Axioms of cooperative decision making

HERVÉ MOULIN
Virginia Polytechnic Institute and State University

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
Cambridge
New York New Rochelle Melbourne Sydney

Э. Мулен

Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели

Перевод с английского
О.Р.Меньшиковой
под редакцией
И.С.Меньшикова

Москва "Мир" 1991

ББК 33
М 90
УДК 519.8

Мулен Э.

М90 Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991, – 464 с., ил.

ISBN 5-03-002131-0

Книга известного французского специалиста по теории игр посвящена вопросам справедливого распределения результатов, полученных за счет кооперации, между участниками кооперации. В ней демонстрируется, каким образом общие принципы, сформулированные в различных частных моделях математической экономики и теории игр, могут быть согласованы на основе аксиоматического подхода. В книге много упражнений и задач, сформулированных и в терминах экономических моделей, и чисто математически.

Для математиков-прикладников, экономистов, социологов, аспирантов и студентов университетов.

М $\frac{1602110000 - 088}{041(01) - 91}$ 18 – 91 **ББК 33**

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-002131-0 (русск.)
ISBN 0-521-36055-2 (англ.)

Предисловие редактора перевода

Основу предлагаемой читателю книги составляют лекции по теории игр и коллективному выбору, прочитанные известным французским ученым Эрве Муленом будущим бизнесменам, политикам и адвокатам на гуманитарных факультетах известных университетов Франции и США. Зачем студентам-гуманитариям точные формулировки определений, аксиом, доказательства теорем? Для того чтобы ответить на этот вопрос, сделаем несколько общих замечаний.

Две основные задачи стоят перед любым человеческим сообществом: созидание и распределение. Как во взаимодействии с природой создать побольше благ, то есть всего того, что делает жизнь человека более привлекательной? Как распределить затраты на создание благ и созданное между входящими в данное сообщество индивидуумами? По тому, сколь успешно решает сообщество эти две главные задачи, можно судить о степени его развития.

Чем тут может помочь наука? Естественные и технические науки помогают создавать блага, видоизменять природу, но так, чтобы не разрушить хрупкую среду обитания человека. О практических успехах естественных наук судят по материализации идеи: по тем новым предметам, которые удалось создать с помощью науки. Гуманитарные науки в основном связаны не с процессом создания благ, а с их распределением. Экономика, социология, политология, социальная психология ищут способы разумной внутренней организации сообщества. Об их практических достижениях судят по тому, как они влияют на сознание людей и какое получается при этом общество.

Положение математики особое. Она возникла и долго развивалась как язык естественных наук, в основном физики и инженерного дела. Однако гуманитарные науки также все больше нуждаются в формализованном языке, причем не столько для овеществления своих идей, сколько для анализа очень непростой логики взаимодействия людей.

Система распределения затрат и благ должна разрешить так или иначе основную конфликтную ситуацию, связанную с тем, что, вообще говоря, каждый стремится сделать вклад поменьше, а получить побольше. Конфликт интересов порождает столкновение людей.

Существуют три основных способа описания этого столкновения. По аналогии с физикой можно представлять людей элементарными частичками, которые взаимодействуют по несколько более сложным законам, чем молекулы идеального газа. Для описання двнжения толпы в метро или потока машин на улице такого подхода может оказаться вполне достаточно. На этом пути удается описать и такие сложные явления, как, напрнмер, изменение линии фронта при боевых действиях, а также некоторые экономические феномены.

По аналогии с биологией можно говорить об эволюции поведения. Стереотипы поведения передаются от одной особи к другой путем наследования, воспитания, подражания. Имеет место некоторый принцип естественного отбора, который связан с понятием роли в обществе ("место нашло человека"). Таким способом могут быть описаны весьма важные механизмы саморегулирования общества, в частности саморегуляция экономики через механизмы рыночной конкуренции.

Третий способ взаимодействия людей собственно человеческий: соглашение, договор, компромисс. В самом деле, не могут же сговориться молекулы газа или прийти к компромиссу кролики и удавы. Именно этому способу взаимодействия, а точнее его математизированному описанию, и посвящена предлагаемая вниманию читателей книга Эрве Мулена. Система распределения благ и затрат опирается на представления о справедливости. Если большинство членов сообщества не признают справедливости существующих принципов распределения, то либо оно развалится, либо будет тратить все большие ресурсы на систему подавления и наказания.

Что же такое справедливость? Человечество думало об этом всегда и выработало достаточно много принципов справедливости. В современном мире всякое общество пытается обосновать справедливость своей системы распределения, заявляет о своем стремлении к совершенствованию этой системы.

Итак, принципов справедливости достаточио много. Они могут дополнять друг друга, но могут быть и иесовместными.

Математика позволяет превратить этический постулат в математическую аксиому, говорить о полноте и непротиворечивости системы принципов справедливости.

Апелляции к принципам справедливости вызывают бурную и массовую эмоциональную реакцию. С их помощью удобно манипулировать общественным мнением, тем более, что современный человек обычно разбирается в логике справедливости, как дикарь в счете: один, два, много... Наберемся терпения и будем надеяться, что человечество усвоит урок с такой же легкостью, как оно освоило весьма абстрактное понятие – ряд натуральных чисел. Во всяком случае книга Мулена служит этой цели.

Несколько слов о содержании книги и о том, что, по-видимому, может представлять наибольший интерес для отечественного читателя.

Для принятия коллективных решений нужно сравнивать альтернативы. Сравнение по набору индивидуальных полезностей приводит к успеху, если одна альтернатива для всех участников лучше другой. Однако слишком многие варианты оказываются при этом несравнимыми: если одному участнику предпочтительнее один вариант, а другому – другой, то как сформировать мнение об этой паре вариантов для всего сообщества?

Два главных принципа коллективного сравнения суть равенство и эффективность. Для того чтобы принцип равенства не приводил к парадоксам (всеобщая нищета – вершина социальной справедливости, если главное – "всем поровну"), его разумно формулировать в следующем виде: мнение бедных учитывается в первую очередь. Эгалитаризм есть стремление к равенству за счет подтягивания благосостояния бедных, а не за счет уничтожения благосостояния богатых. Приверженец эгалитаризма всегда поддержит перераспределение от богатого к бедному (если только богатый не становится беднее бедного), но не будет возражать против социальной дифференциации при увеличении благосостояния всех членов сообщества.

Эгалитаризму противостоит утилитаризм, который при сравнении вариантов опирается на общее (суммарное) благосостояние сообщества. Утилитарист считает, что перераспределение благ – дело второстепенное. Главное, чтобы сообщество накопило побольше богатства. Какой из этих двух основных принципов "справедливее", зависит от конкретной ситуации. Дело математики прояснить свойства и следствия принципов, привести модельные примеры, показывающие, что каждый из них может быть и разумным, и абсурдным.

Какие вообще существуют способы коллективного сравнения альтернатив? Вводится понятие порядка коллективного благосостояния (ПКБ). Оценкой коллективного благосостояния служит функция коллективной полезности (ФКП). Вместо двух принципов мы теперь рассматриваем всю совокупность возможных принципов коллективного сравнения и хотим выбрать принцип, удовлетворяющий определенным свойствам. Эти свойства удобно формулировать в виде аксиом независимости или монотонности.

Хочется подчеркнуть, что каждое требование справедливости резко сужает круг "хороших" ПКБ или ФКП. Эти требования отнюдь не безобидны. К сожалению, часто приходится сталкиваться с публицистическими статьями, в которых авторы на словесном уровне "жонглируют" сразу десятком различных принципов справедливости, вводя читателя в заблуждение: эти принципы, как правило, несовместимы.

В качестве примера рассмотрим аксиому сепарабельности, которая разрешает при перераспределении благосостояния не учитывать тех агентов, которых это перераспределение не затронуло. При некоторых слабых дополнительных условиях эта аксиома позволяет выделить два однопараметрических семейства ФКП, имеющих только два пересечения: утилитаризм и эгалитаризм. На основе этих двух семейств строится компромисс между равенством и эффективностью. Основой для поиска компромисса служит принцип Пигу–Дальтона, который поощряет сближение уровней благосостояния участников при сохранении суммарного богатства. Этот принцип является значительно менее радикальным по сравнению с эгалитаризмом, который настаивает на перераспределении от богатого к бедному, даже если при такой передаче часть богатства вовсе утрачивается. Про ПКБ, удовлетворяющие принципу Пигу–Дальтона, говорят, что они сокращают неравенство. Каждый такой порядок порождает так называемый индекс неравенства. Эти индексы широко используются в экономической статистике для анализа дифференциации благосостояния.

Коллективное сравнение альтернатив часто используется для выбора наилучшего (для сообщества в целом) варианта из фиксированного допустимого множества. Такие правила выбора из допустимого множества, называемые функциями коллективного выбора (ФКВ), можно исследовать и непосредственно. При этом оказывается, что ПКБ соответствуют только те ФКВ, которые удовлетворяют аксиоме Нэша о независимости от посторонних альтернатив: коллективный выбор должен сохраняться при отбрасывании любых вариантов, кроме избранного из первоначального допустимого множества.

Аксиома Нэша не так бесспорна, как это может показаться. Выбор допустимого варианта часто производится на основе сравнения с идеальным выбором для каждого агента. Такой принцип называется относительным эгалитарнзмом, поскольку он требует выравнивания не самих доходов агентов, а их отношений к максимально возможным доходам.

Весьма интересны аксиомы монотонности по допустимому множеству и составу участников. Первая аксиома означает, что научно-технический прогресс не должен повредить никому из участиков: если допустимое множество расширяется, то благосостояние каждого агента увеличивается. В противном случае кто-то из членов трудового коллектива будет препятствовать нововведениям. Монотонность по составу участников звучит очень естественно: если появляется новый участник, а возможности сообщества остаются прежними, то старые члены коллектива несут убытки. Аксиомы монотонности в сочетании с некоторыми аксиомами независимости приводят к той или иной разновидности эгалитаризма.

До сих пор сообщество считалось монолитным, и никак не учитывалась возможность отделения группы участников, недовольных коллективным мнением. Для того чтобы установить, может ли какая-то группа (коалиция) выиграть от отделения, нужно иметь оценку результата, которого она может добиться самостоятельно. В задаче распределения затрат каждый участиик выделяет некоторые средства на коллективные нужды (скажем, на строительство объекта, которым смогут пользоваться все: мост, дорога, система водоснабжения). Коалиция участников не будет иметь желания отделиться, если ее суммарная доля затрат не превышает стоимости обслуживания этой группы отдельно от остального коллектива. Другими словами, агент или группа агентов участвуют в коллективном мероприятии не из абстрактного чувства коллективизма, а лишь тогда, когда это выгодно. В задаче распределения затрат принцип отделения эквивалентен принципу отсутствия субсидий: каждая группа должна оплатить по крайней мере дополнительные затраты на ее обслуживание. Распределения затрат, которые выдерживают тест на отделение произвольной группы участников, составляют так называемое ядро.

Есть два наиболее популярных оператора значения для кооперативных игр, т.е. правила распределения затрат (или дележа совместной прибыли) по заданным оценкам возможностей отдельных групп. Вектор Шепли основан на последовательном учете дополнительных затрат от присоединения фиксированного участника к каждой коалиции. N-ядро получается при применении принципа эгалитаризма, когда мы считаем не доходы отдельных участников, а прибыль от кооперации всех коалиций.

Интерпретация теоретических положений в терминах микроэкономических моделей – органичная часть современных исследований. Такие примеры у автора имеются практически в каждом разделе или по крайней мере в каждой главе. Рассматриваются следующие основные модели: распределение затрат на создание неделимого продукта, дающего каждому агенту определенный доход, ценообразование в регулируемой монополии, манипулирование механизмами принятия общественных решений и способы защиты от манипулирования. Первая тема вряд ли вызовет у читателя недоумение. Более того, многие способы распределения затрат и дележа прибыли вполне могут быть использованы практически хотя бы потому, что свойства каждого конкретного механизма явно указаны, а значит, выбор среди них можно произвести осознанно.

Остановимся чуть подробнее на понятии регулируемой монополии. Оно возникло из желания уравновесить две противоположные тенденции. С одной стороны, если технология производства обладает свойством возрастания доходов на масштаб (чем больше размеры производства, тем больший доход приносит каждая единица капитала), то технологически выгодно слияние мелких производств в одно крупное и, в конечном счете, появление монополии. Но по мере монополизации отрасли перестает работать механизм конкуренции. Если сохранить за монополией право свободно назначать цены, то она "разденет" потребителей. Что же делать? Либо искусственно сдерживать монополизацию, либо отдать отрасль на откуп монополии, но отобрать у нее право ценообразования. Так появляется регулируемая монополия. Государство при этом не вмешивается в технологические проблемы и планирование производства. Зато в его руках находится система ценообразования.

Проблемой защиты механизмов принятия коллективных решений от манипулирования в последнее время занимаются многие исследователи. Всякий механизм коллективных решений базируется на информации, получаемой от агентов: их затратах, доходах, предпочтениях. Естественно, участник может осознать, что его сообщение влияет на окончательный выбор варианта, и вместо правдивого сообщения передать ту неточную информацию, которая приводит к наиболее выгодному для него исходу. Сообщение становится стратегией. Идеальный вариант, когда сообщать правду выгодно. Как ни странно, такие защищенные от манипулирования механизмы существуют. Как правило, за это приходится платить: в механизме ключевых агентов платежи стимулируют говорить правду, однако в руках посредника может оказаться немалая сумма.

Проблемы экономической кооперации отдельных агентов и коллективный выбор на основе голосования имеют много общего.

Многие известные схемы голосования: по правилу большинства, относительного большинства, на основе подсчета очков, методом последовательных парных сравнений по большинству и и т.д. – могут, как увидит читатель, приводить к весьма неожиданным результатам. При становлении демократии грамотность в теории голосования, хотя бы на уровне "таблицы умножения", по-видимому, нужна всем сознательным членам общества.

Проблема манипулирования при голосовании стоит не менее остро в силу теоремы Гиббарда-Саттертуэйта о невозможности (при трех и более кандидатах) построить защищенную от манипулирования процедуру (кроме диктаторской, в которой учитывается мнение лишь одного выборщика). Правда, если предпочтения участников удовлетворяют некоторым априорным предположениям, то такие правила голосования существуют. Особый интерес заслуживает излагаемый автором принцип меньшинства. При многих правилах голосования влияние группы участников на решение зависит скачкообразно от размеров группы: меньшинство не может ничего, большинство может все. Введение права пропорционального вето позволяет сгладить это распределение сил. Даже небольшая группа может отвести наиболее неприятных для себя кандидатов. Влияние коалиции оказывается пропорциональным ее размеру.

Под агрегированием предпочтений понимается то же, что и под ПКБ в теории благосостояния, но для дискретной модели голосования. Автор не слишком заостряет внимание на известном парадоксе Эрроу, указывая пути его преодоления. Любопытны приведенные результаты по рационализируемости. Здесь решается как бы обратная задача: наблюдая выбор, мы хотим обосновать его оптимальность с точки зрения некоторого принципа. Завершается книга описанием весьма привлекательного метода агрегирования предпочтений, построенного по аналогии с методом наибольшего правдоподобия.

В заключение хочется отметить, что несмотря на обилие формальных результатов и содержательных моделей книга читается на редкость легко. Надеемся, что в переводе нам удалось сохранить стиль автора.

И. Меньшиков

Предисловие Амартии Сена

После второй мировой войны в анализе социальных процессов (в широком смысле) наметились два главных направления: только что появившаяся теория коллективного выбора и достигшая расцвета теория игр. Каждое из направлений охарактеризовалось основополагающим трудом, а также множеством последующих ступеней развития. Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн установили плодотворность теории игр как инструмента анализа экономического поведения, общественной кооперации и стратегического анализа.[1] Предложенный Кеннетом Эрроу анализ коллективного выбора и индивидуальных оценок стал основанием нового подхода к пониманию и исследованию общественного агрегирования политических механизмов и нормативных экономических решений.[2] В обоих этих направлениях широко и с изяществом используются математические рассуждения и, таким образом, демонстрируется плодотворность формальных аксиоматических методов для анализа проблем, имеющих практическое значение. Каждое из этих направлений исследования привело к появлению обширной, часто весьма специальной литературы.

Если учесть тесную связь предметов исследования в этих двух областях, то было бы естественно ожидать появления интенсивного взаимообмена и взаимообогащения этих двух направлений. В самом деле, было несколько попыток усвоения уроков одной области в другой. Но справедливости ради нужно сказать, что в основном теория коллективного выбора и тео-

---

1 Фон Нейман Дж. и Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведенне: Перев. с англ. – М.: Наука, 1970.

2 Arrow K. J. Social choice function and individual values. New York: Wiley, 1951; second edition, 1963.

рня игр развиваются совершенно независимо, хотя некоторые исключения все же известны[1].

Эрве Мулен работает иа переднем крае и теории коллективного выбора, и теории игр, поэтому эта монография содержит множество прекрасно подобранных приложений формальной теории коллективного выбора и формальной теории игр к анализу природы и процесса кооперативного принятия решений. Большинство проблем коллективного взаимодействия подразумевает как конфликт, так и совпадение интересов. Элементы совпадения говорят в пользу важности кооперации, но существует много форм кооперации, и интересы различных сторон могут сталкиваться при выборе различных способов кооперации. Мулен обсуждает эти проблемы с поразительной ясностью и глубиной.

Мулен начинает с четкого изложения одного частного подхода, а именно с теории благосостояния, которая широко используется в теории коллективного выбора. В этом подходе коллективное благосостояние является функцией индивидуальных полезностей и только ими и определяется. Полезности могут комбинироваться различными способами (например, при утилитаризме производится сложение, при эгалитариых правилах обращают внимание на полезность наименее благополучного индивида), но все эти способы основаны на рассмотрении только индивидуальных полезностей. В ч. I книги дается из-

---

[1] Литература по манипулированию механизмами коллективного выбора с неизбежностью должна концентрироваться на теоретико-игровых проблемах в рамках теории коллективного выбора. Первоначальный вклад в эти исследования принадлежит таким авторам, как Робин Фаркуарсон и Микаэл Думмет. Мощная теорема Гиббарда-Сэттертуэйта о невозможности построения неманипулируемого механизма коллективного выбора (в более общем виде, игровой формы) вызвала настоящий взрыв публикаций по данной теме. Результаты, во многом аналогичные результатам Гиббарда, хотя и с некоторыми вариациями, были примерно в то же время получены Паттанаиком. Последующая обширная литература содержит много полезных отрицательных, а также позитивных результатов. Смотри, например, книги Эрве Мулена (Hervé Moulin) The strategy of social choice (Amsterdam: North Holland, 1983) и Безалела Пелега (Bezalel Peleg) Game theoretic analysis of voting in committees (Cambridge: Cambridge University Press, 1984).

ложение этого подхода и его связь с проблемой торга, приводящей к выбору конкретного исхода из класса альтернативных кооперативных исходов, которые дают различные преимущества разным сторонам конфликта. Здесь, как и везде в книге, подход Мулена является аксиоматическим. Он использовал этот подход для прояснення принципов, связанных с различными аксиомами, что позволяет систематизировать, анализировать и критически сопоставлять различные решения.

В ч. II Мулен переходит от теории коллективного выбора к теории игр, причем той ее части, которая специализируется иа проблемах кооперации. Выводы, которые могут быть сделаны из теоретико-игрового анализа, подкрепляются тем, что стало известно из аксиоматической теории коллективного выбора.

В ч. III и IV Мулен обсуждает соответственно проблемы механизмов принятия общественных решений и проблемы голосования и коллективного выбора. Первая проблема включает важные вопросы общественной экономики (такие, как выбор системы налогообложения, регулирование монополий, проблемы децентрализации). Вторая проблема связана с различными политическими механизмами, она включает множество типов систем голосования и других способов агрегирования частично конфликтующих предпочтений различных сторон. В рамках этого анализа Мулен эффективно и элегантно использует уроки, усвоенные из теории коллективного выбора, а также из теории игр. Основная цель состоит в том, чтобы проинформировать читателей по этим вопросам с тем, чтобы они вникли в содержательный смысл введенных понятий, а также осознали возможность использования формальных рассуждений при анализе проблем, которые могли бы показаться иа первый взгляд слишком сложными и беспорядочными.

В этом введении мне хотелось бы обратить внимание читателя на две особенности данной книги. Во-первых, значительная часть теории коллективного выбора была связана с представлением отрицательных результатов, а именно с показом того, что не может быть сделано, а не того, что может быть сделано. Несмотря на то что сама теория коллективного выбора началась с отрицательного результата, полученного Кеннетом Эрроу, исключительиое внимание отрицательным результатам при изложении этой теории не является оправданным. Одна из причин отрицательного результата связана с обсуждением первоначального выбора аксном н с предложением рассмотреть различные аксиоматические структуры. Это приводит к положительным результатам, показывающим, что может быть сделано и как. Подход Мулена является последовательно конструктивным. И в этом отношении монография может рассматриваться как важный вклад в созидательное формальное мышление, использующее теорию коллективного выбора и теорию игр.

Во-вторых, в областях, связанных со значительным использованием формальных рассуждений, широкое общение существенно ограничено в силу сложности усвоения того, что происходит в процессе дедукции. Это может выглядеть отвлеченно и чрезмерно абстрактно. Мулен решает эту проблему за счет обогащения анализа огромным числом примеров, которые выявляют в точности то, что требуется. Он также подкрепляет свое изложение значительным числом полезных и хорошо подобранных упражнений, которые дают возможность читателю углубиться в проблему. Как педагогический опыт эта стратегия изложения является превосходной, и книга заслуживает всяческих похвал и с этой точки зрения.

Читателю уже должно быть ясно, что мне бесспорно нравится то, что сделано Муленом. Его усилия несомненно будут вознаграждены, если читатели обратят внимание на эту работу и получат от нее удовольствие. Я нисколько не сомневаюсь, что это случится, причем многократно.

Посвящается Мари

От автора

Эта книга возникла из нескольких продвинутых курсов по коллективным решениям, коллективному выбору и кооперативным играм, которые читались автором в Парижском университете, Принстонском университете и Вирджинском технологическом инстнтуте. Я хочу поблагодарить всех моих студентов за участне н критику. Трое моих коллег дали неоценимые советы на различных стаднях подготовки этой ,книги, н нм я особенно благодарен. Это – Джон Рёмер, Вильям Томсон и Пейтон Янг.

Особая благодарность – Жан-Мишелю Гранмону за его постоянное участие и профессору Амартии Сеиу, который согласился написать предисловие.

Наконец, Национальный Научиый Фонд очень эффективно поддержал этот проект двумя последовательными грантами (SES8419465 и SES8618600).

Введение

Многие решения общественной значимости не могут приниматься на основе рыночных механизмов, поскольку кооперативные возможности не будут эффективно использованы при децентрализованных действиях агентов. Наиболее показательные примеры связаны с производством общественных продуктов, ценообразованием в естественной монополии, а также с принятием решений путем голосования. Для того чтобы исправить эти недостатки рыночных механизмов, приверженцы экономики благосостояния предлагают множество нормативных решений и стараются убедить тех, кто принимает решения, в их уместности.

Теоретическое основание этих нормативных положений является аксиоматическим. Эта позиция прояснена в основополагающей книге Амартии Сена (*Коллективный выбор и коллективное благосостояние*, впервые опубликованной в 1970 году). Начиная с этого момента аксиоматическая литература существенно расширила свой горизонт и видоизменила свои методы. Теория кооперативных игр теперь играет центральную роль в анализе распределения затрат при возрастающих доходах на масштаб. При анализе правил голосования учитывается влияние стратегического манипулирования. Было сконструировано и многократно проверено несколько новых усовершенствованных индексов неравенства и т.д.

В этой книге описываются последние достижения аксиоматического метода в четырех областях. Имеется в виду теория благосостояния (конструирование функций коллективной полезности, а также исследование аксиоматических торгов); кооперативные игры (ядро и два наиболее популярных оператора значения – вектор Шепли и N-ядро); принятие общественных решений (распределение затрат на общественный продукт и ценообразование в регулируемой монополии, оба в двух аспектах: оптимальном и стратегически-оптимальном); голосование и коллективный выбор (голосование по большинству в стиле Кондорсе и методы подсчета очков по Борда; невозможность агрегирования индивидуальных предпочтений в коллективное предпочтение).

Таблица I.1 *Межпрофильные аксиомы*

Независимость	Монотонность
Анонимность: все главы	
Нейтральность: 8,9,11	
Изменение предпочтений	
НПА Эрроу: 11	Принцип Пигу–Дальтона: 2
Независимость от нуля: 2,5	Монотонность: 9,11
Независимость от масштаба: 2,3	Неманипулируемость: 8,10
Независимость от общей шкалы полезностей: 2	Сильная монотонность: 10
Независимость от общего нуля: 2	
Независимость от общего масштаба: 2	
Маргинальность (оператора значения): 5	
Децентрализуемость: 6	
Изменение допустимого множества	
НПА Нэша: 3,11	Монотонность по допустимому множеству: 3
Аксиома Айзермана: 11	Коалиционная монотонность: 5
Расширение: 11	Технологическая монотонность: 7
Аддитивность: 3,5,6	
Изменение состава участников	
Сепарабельность: 2,3	Монотонность по составу участников: 3
Свойства редуцированной игры: 5	Пополнение: 9
Совместимость: 6	Участие: 9

Номера соответствуют главам.

Я старался дать детальное и единое изложение этих технически разнородных предметов. Связь между ними осуществляется с помощью набора аксиом (всего обсуждается около 30 аксиом). Многие из них настолько гибкие, что с незначительными изменениями они приложимы к совершенно разным проблемам. Хорошим примером может служить свойство ядра, которое оказывает заметное влияние на обсуждение методов дележа прибыли в гл. 6 и 7, а также на обсуждение стратегического голосования в гл. 10. Аксиома сепарабельности, например, играет важную роль при анализе коллективных функций полезности (гл. 2 и 3), значений кооперативных игр (гл. 5), а также в методах распределения затрат и дележа прибыли (гл. 6). Из классификации, приведенной в табл. I.1, становится ясно, что существует много таких связей.

На протяжении всей книги аксиоматический метод используется для того, чтобы управлять процессом принятия решений. Конечно, в каждой микроэкономической задаче из тех, что мы будем рассматривать, имеется более одного подходящего решения. Есть много "хороших" правил голосования, несколько "обоснованных" значений кооперативных игр, много полезных индексов неравенства и т.д. Аксиоматический метод может помочь нашему выбору, во-первых, за счет сокращения количества обоснованных и допустимых решений и, во-вторых, предлагая нам специальную аксиоматическую характеризацию каждого из этих обоснованных решений. Например, мы нашли по существу два интересных оператора значения для кооперативных игр и получили характеризацию каждого из них (ч. II, гл. 5). Смотри также обсуждение функций коллективной полезности (ч. I, гл. 2), основанных на эгалитаризме и классическом утилитаризме как на двух полюсах. Или см. в ч. IV сопоставление двух основных семейств правил голосования, основанных соответственно на системе подсчета очков и на сравнении по правилу большинства.

Как правило, мы уделяем незначительное внимание многочисленным отрицательным результатам, которые слишком легко получаются при аксиоматическом подходе. В порядке исключения приведены два отрицательных результата: теорема Эрроу (гл. 11), теорема Гиббарда-Сэттертуэйта (гл. 10), поскольку их математическое содержание является весьма глубоким.

Мы рассматриваем много экономических моделей, в которых аксиоматический метод приводит к значительному успеху, однако состав тем не является исчерпывающим. Наиболее заметным пробелом можно считать распределение частных продуктов либо в результате обмена, либо в плане чистого перераспределения (задача дележа пирога). Несмотря на обширную нормативную литературу по этим вопросам, существующие результаты (см. обзор в Томсон и Вариан [1985]) недостаточно ориентированы на выделение конкретных решений, подходящих для изложения в учебнике, единственным (главным) исключением является "предложение Эджворта", характеризующее конкурентное равновесие в терминах свойства ядра, когда агенты становятся достаточно малыми. Однако распределение частных продуктов между фиксированным числом малых агентов еще не располагает ясными аксиоматическими ответами, за исключением очень специальных случаев, как, например, в задачах о сватовстве.

Теперь мы хотим дать некоторую классификацию многочисленных аксиом, наполняющих данную книгу. Единственная аксиома, которая проходит через весь материал книги,– оптимальность по Парето, называемая также единогласием или эффективностью. Это не должно вызывать удивления, поскольку уже сорок лет назад новое направление в экономике благосостояния пришло к соглашению, что это единственный бесспорный принцип, на котором может развиваться рациональный анализ благосостояния. Заметим, что оптимальность по Парето является внутрипрофильным свойством в том смысле, что оно может быть определено для одного единственного профиля предпочтений в каждой конкретной задаче. Другие *внутрипрофильные аксиомы* устанавливают нижние или верхние (чаще нижние) границы для благосостояния индивидуальных агентов или коалиций агентов. Основными примерами таких свойств служат индивидуальная рациональность и свойство ядра (гл. 4 – 8 и 10).

Межпрофильные аксиомы рассматривают специальные изменения в параметрах модели и постулируют некоторые условия на соответствующие изменения решений. Если это условие говорит о том, что решение не должно измениться при изменении параметров, то мы получаем *аксиому независимости*. Если условие говорит о том, что решение должно измениться в определенном направлении в соответствии с изменением параметра, то мы получаем *аксиому монотонности*.

Наиболее известной аксиомой независимости является анонимность. Она утверждает, что решение должно рассматривать агентов равными (один человек – один голос). В частности, если изменение в задаче связано с обменом характеристик двух агентов (включая их предпочтения), то решение не должно измениться. Этот основной принцип равенства явным образом проявляется в большинстве глав и неявным – во всех главах. Дополнительным принципом равенства является нейтральность, требующая, чтобы не было априорной дискриминации по отношению к какому-либо агенту. Нейтральность играет важную роль в ч. IV.

Большинство межпрофильных аксиом распадается на 6 классов в соответствии с тем, какие параметры модели подвержены изменениям. Параметрами могут быть: (a) предпочтения агентов; (b) допустимое множество исходов; (c) множество рассматриваемых агентов (состав участников). В каждом случае аксиома может выражать либо свойство независимости, либо свойство монотонности. Таким образом, мы, как и утверждалось, получаем 6 классов аксиом.

Изменение предпочтений

Это наиболее часто изменяемый параметр, как это повелось, начиная с Эрроу, при обсуждении независимости от посторонних альтернатив (НПА; аксиома независимости), а также при обсуждении положительной обратной связи (аксиома монотонности). Сен [1977] указывал на особую важность аксиом независимости в теории благосостояния (ч. I), поскольку они дают возможность экономить на сборе информации. На самом деле, эти аксиомы пронизывают ч. I (см. независимость от индивидуального масштаба или нуля полезности). При анализе принятия общественных решений монотонность решений относительно предпочтений является ключевым свойством совместимости побудительных мотивов (см. эквивалентность неманипулируемости и строгой монотонности в гл. 10).

Изменение допустимого множества

Свойство монотонности по допустимому множеству в аксиоматических торгах (гл. 3) говорит о том, что если множество допустимых исходов расширяется, то благосостояние любого агента не может уменьшиться. Аналогичные аксиомы используются для экономики производства (гл. 7) и для значений кооперативных игр (гл. 5).

С другой стороны, абстрактные функции выбора (гл. 11) классифицируются с помощью аксиом независимости, в которых изменяемым параметром является допустимое множество (предмет спора). Смотри вариант НПА Нэша (гл. 3 и 11).

Изменение состава участников

Соответствующей аксиомой независимости является сепарабельность. Функция коллективной полезности является сепарабельной, если она сравнивает два распределения полезностей, сосредоточенных в подгруппе агентов, независимо от остального распределения полезностей. Сепарабельность в различных формах определяется также для индексов неравенства (гл. 2), решений для аксиоматических торгов (гл. 3), кооперативных игр (см. свойство редуцированной игры из гл. 6). В каждом из этих случаев эта аксиома приводит к мощному функциональному уравнению.

Некоторые свойства монотонности по составу участников играют важную роль при голосовании (гл. 9) и для аксиоматических торгов (гл. 3).

В табл. I.1 приведены детали указанной выше классификации.

Обзор

Рассматриваются две обширные группы моделей: дележ прибыли (ч. I, II, III) и коллективный выбор неделимого общественного решения (ч. IV).

В ч. I представлена теория благосостояния утилитаризма. Центральным постулатом здесь является то, что на сравнение двух исходов влияют только уровни индивидуальной полезности и что эти уровни для различных агентов сравнимы. Основной концепцией служит порядок коллективного благосостояния (или почти эквивалентное понятие функции коллективной полезности), агрегирующей индивидуальные полезности в коллективное предпочтение. Двумя главными примерами являются классическая утилитарная коллективная полезность (сумма индивидуальных полезностей) и эгалитарная коллективная полезность (минимальная индивидуальная полезность), которые противопоставляются в гл. 1. На следующем этапе конструируются функции коллективной полезности, которые осуществляют компромисс между этими двумя функциями и которые поэтому порождают семейство разумных индексов неравенства (гл. 2). Наконец, подход теории благосостояния обобщается в модели аксиоматических торгов за счет включения ограничений на допустимость в качестве компоненты в сам метод выбора (гл. 3).

Основным недостатком теории благосостояния является практически полное отсутствие этических соображений, вытекающих из самой природы рассматриваемых экономических решений. Одно из таких соображений связано с учетом возможностей по кооперации индивидуальных агентов и коалиций агентов. Теория *кооперативных игр*, которой посвящена ч. II, обобщает модель благосостояния на основе учета этих возможностей.

Общим принципом равенства для задач распределения затрат служит тест на отделение, преобразованный в гл. 4 в свойство ядра. Это свойство предохраняет произвольную коалицию от получения доли прибыли ниже ее собственных кооперативных возможностей. Хотя в ч. II в основном мы используем упрощающие предположения о том, что с помощью денег полезность может перераспределяться между агентами, задача нахождения оператора значения (детерминированного дележа прибыли, определенного для всех кооперативных игр) отнюдь не является простой. В гл. 5 мы противопоставляем два основных решения, одно из них выбирает центральную точку в ядре (N-ядро), а другое – приписывает каждому агенту его средний маргинальный вклад в различные коалиции (вектор Шепли).

Экономические приложения теории кооперативных игр весьма обширны. В ч. III мы обсуждаем два наиболее важных приложения в рамках более общего подхода к механизмам принятия общественных решений. Здесь речь идет о ценообразовании в регулируемой монополии, а также о производстве и распределении затрат на общественный продукт.

В гл. 6 мы начинаем с двух относительно простых задач бинарного решения: распределение затрат на неделимый общественный продукт и дележ прибыли от неделимого кооперативного. предприятия. Следуя свойству ядра, мы находим по крайней мере пять разумных решений в задаче распределения затрат. В гл. 7 во всей общности рассматривается однопродуктовая регулируемая монополия с единственным ресурсом (один вход – один выход), производящая либо общественный продукт, либо продукт личного пользования. Мы исследуем традиционные методы маргинального ценообразования, которые противопоставляем двум простым эгалитарным решениям.

В гл. 8 мы обсуждаем свойства побудительных мотивов в механизмах с общественным продуктом. Вообще говоря, механизм называется согласованным с побудительными мотивами, если его исход оказывается устойчивым при стратегических манипуляциях эгоистичных агентов. Простейшая манипуляция связана с неточным сообщением индивидуальных предпочтений. Механизм защищен от манипулирования, если таких неточных предпочтений не возникает. В начале 70-х годов был открыт механизм ключевых агентов, который служит примером неманипулируемого механизма. Мы обсуждаем свойство побудительных мотивов, а также аксиоматические свойства этого механизма и сравниваем его с другими неманипулируемыми механизмами. Мы также рассматриваем свойство побудительных мотивов некоторых аналогичных механизмов.

В ч. IV исследуется проблема голосования: на основе конфликтных мнений заданного множества агентов должно быть выбрано чисто общественное решение. Основное отличие от рассмотренных ранее моделей состоит в отсутствии некоторой единицы измерения, трансферабельного продукта, с помощью которого можно осуществить компенсацию тем агентам, которым выбранное решение не нравится, за счет тех, которым оно нравится. При голосовании мы обычно имеем конечное число исходов и чисто порядковое предпочтение. Несмотря на это, аксиомы правил голосования весьма похожи на те, которые использовались в предыдущих частях.

Двухвековой спор между Кондорсе и Борда лег в основу обсуждения в гл. 9. Мы противопоставляем правила голосования, основанные на сравнении по правилу большинства, и методы, приписывающие очки кандидатам в соответствии с голосами избирателей. В гл. 10 обсуждаются два основиых свойства побудительных мотивов: неманипулируемость (оказывается, что никакое разумное правило не может быть защищено от манипулирования, если имеется хотя бы три кандидата) и свойство ядра. Последнее приводит к принципу меньшинства, который оставляет некоторое право решения любой коалиции, сколь малой она бы ни была. Наконец, в гл. 11 мы даем обзор основных результатов по агрегированию предпочтений в смысле Кеннета Эрроу. Так же, как в ч. I в количественном случае, мы пытаемся получить из профиля коллективных предпочтений коллективный порядок для всех кандидатов. Несмотря на обилие отрицательных результатов, ограничивающих возможности практических приложений, эта линия исследоваиия приводит к полезному проникновению в логику коллективиых действий.

В конце каждой главы мы предлагаем в среднем по девять упражнений, многие из которых проясняют важиые моменты, упомянутые в основном тексте главы. Упражнения используются также для того, чтобы подчеркнуть взаимосвязь между главами с помощью "продолжения" примеров. Полная библиография собрана в конце книги. Многие главы снабжены довольно подробным обзором литературы. Мы перечислим эту литературу здесь, что может быть полезно для читателя, ориентирующегося на обучение.

Главы 1 и 2. Классические книги Сена [1970] и Колма [1972] могут быть дополнены обзором Д'Аспремона [1985]. По индексам неравенства см. Шоррокс [1985] и Фостер [1985].

Глава 3. Монография Рота [1979] слегка не современна и может быть дополнена недавним обзором Калаи [1985], а также готовящейся к выходу книгой Томсона. Последняя покрывает многие совсем новые и все классические результаты.

Главы 4 и 5. Учебники по теории игр обычно не охватывают приложений к задачам распределения затрат. Наилучшими ссылками представляются статья Янга [1985*b*] по играм с трансферабельной полезностью (ТП) и монография Шарки [1982] по приложениям к проблеме ценообразования; см. также Ичииши

[1983] по теории игр с нетрансферабельной полезностью (НТП).

Главы 7 и 8. Хорошим элементарным введением являются книги Фелдмана [1980] и Мюллера [1979]. Книга Грина и Лафона [1979] дает более продвинутое изложение механизмов, выявляющих спрос (гл. 8).

Глава 9. Небольшая книга Страффина [1980] является замечательным введением в правила голосования (в ней также обсуждается механизм ключевых агентов). Смотри также обзор Мулена [1985*a*]. Книга Мюллера [1979] дает детальное изложение приложений модели голосования к общественному выбору.

Глава 10. В качестве хорошего введения можно предложить книгу Фелдмана [1980]. Систематическое изложение стратегического голосования см. в книгах Пелега [1984*a*] и Мулена [1983].

Глава 11. Изложение подхода, связанного с агрегированием предпочтений, легко найти в литературе. Так, например, из уже упомянутых книг можно порекомендовать книги Сена [1970], Фелдмана [1980], Мюллера [1979], Мулена [1983] и Пелега [1984*a*]. Смотри также Сузумура [1983].

Часть I

Теория благосостояния

Глава 1

Эгалитаризм или утилитаризм

Обзор

Утилитаризм как философское учение возник два века назад. В рамках этого подхода суждение о коллективном действии производится на основе уровней полезности, которые достаются индивидуальным агентам, и только на основе этих уровней. Можно сказать, что это – оценка результатов, а не средств их достижения. Амартия Сен предложил термин "теория благосостояния" для теоретических основ утилитаризма. Такой подход оказался особенно благотворным в экономической теории и других общественных науках. Аксиоматическое изложение этого подхода, который развивался последние три десятилетия, является предметом рассмотрения гл. 2 и 3.

Для утилитариста общественная кооперация хороша лишь настолько, насколько она увеличивает благосостояние отдельных членов общества. Способы кооперации (общественные и правовые институты, такие, как частные контракты и общественные фирмы) не наделяются какой-либо этической ценностью. Они рассматриваются только как технические механизмы (при этом одни механизмы могут быть гораздо эффективнее других) для повышения индивидуального благосостояния всех членов общества. С этой точки зрения, например, защита определенных прав (скажем, свободы слова) не есть моральный императив. Их нужно поддерживать только в том случае, если они дают агентам возможность получать достаточно высокую полезность.

Эта весьма сухая социальная модель в основном базируется на концепции индивидуальных предпочтений, которые определяются *"свободой воли"* агентов. При этом намеренно игнорируются все факторы, смягчающие эту модель (такие, как влияние образования и социального окружения на формирование мнения индивида, а также родственные и дружественные отношения или какие-то другие специфические человеческие отношения). Начиная с Бентама[1], утилитаристы осознают эти ограничения, тем не менее благодаря своей сверхупрощенности утилитарная модель легко применима, а ее "либеральная идеология" сильна ввиду своей простоты. Философские дискуссии по поводу утилитаризма по-прежнему ведутся весьма активно (см., например, Сен и Уильямс [1982]).

Аксиоматическая теория благосостояния представляет задачу принятия коллективного решения на основе сопоставления каждой допустимой альтернативе (каждому допустимому решению) вектора $(u_1,\dots,u_n)$ индивидуальных уровней полезности, где u_i – полезность агента i. Вся необходимая информация заключена во множестве этих допустимых векторов полезностей. Систематически опускается всякая информация о специфике решений, порождающих многообразие векторов полезностей.

При заданном множестве допустимых векторов полезностей коллективное решение является результатом математического детерминированного правила, которое выделяет один вектор в качестве выбора сообщества. Это правило выражает всю систему этических представлений рассматриваемого сообщества. Неудивительно, что выбор такого правила поднимает ряд острых вопросов. Это – всего лишь исчерпывающее решение данной социальной проблемы, формула, которая позволяет вычислить финальный исход на основе "арифметики удовольствия и боли", но окончательный исход еще должен быть утвержден сообществом В этой главе мы обсуждаем два основных правила, которые поддерживаются утилитаристами, а именно эгалитаризм (стремление уравнять индивидуальные полезности) и класси-

---

[1] Иеремия Бентам (1748 - 1832) – знаменитый английский философ, один из основателей утилитаризма, автор книги "Деонтология, или наука о морали" (1834). К. Маркс назвал И. Бентама "гением буржуазной глупости" (Капитал, т. 1), что, однако, не подорвало авторитета последнего. – *Прим. ред.*

ческий утилитаризм (максимизация суммы индивидуальных полезностей).

Сначала мы обсуждаем эгалитаризм (разд. 1.1). Он вытекает из древнейшего и наиболее популярного принципа справедливости: к равноправным агентам должно быть равное отношение. Применение этого принципа в случае, когда единственной управляемой переменной является полезность, приводит к выравниванию индивидуальных полезностей. Однако несмотря на свою кажущуюся простоту, этот принцип может вступать в противоречие с другим основным постулатом коллективного принятия решений, известным под названием принципа единогласия.

В случае, когда каждый рассматриваемый агент предпочитает решение a решению b (мы говорим, что b доминируется по Парето решением a), принцип единогласия отвергает принятие решения b. Единогласие является единственной и наиболее важной аксиомой, которая используется в каждой главе этой книги. В модели благосостояния принцип единогласия утверждает, что выбранный вектор полезностей должен быть оптимальным по Парето (или, другими словами, он ие должеи доминироваться по Парето никаким другим допустимым вектором полезностей).

Принцип единогласия может вступать в противоречие с простым выравниванием индивидуальных полезностей. Этот, казалось бы, противоестественный факт имеет название дилеммы равенство – эффективность. Ее решение требует более точиого определения эгалитарной программы как максимизации по лексиминному упорядочению (детали см. в разд. 1.1).

Эгалитаризм очень сильно цементирует сообщество. Когда все агеиты делят поровну доход от кооперации, не может быть зависти или разочарования (за исключением, конечно, тех случаев, когда некоторые агенты чувствуют, что их вклад в эти доходы оказался выше среднего, но это остается за пределами модели благосостояния; см. модели гл. 6 и 7). Однако тот принцип перераспределения, который связан с эгалитаризмом, иногда трудно принять: увеличение на единицу полезности одного агента может привести к значительной потере в суммарной полезности всех агентов. Вряд ли кто-нибудь согласится с таким положением, если речь идет о распределении медицинской помощи между пациентами, застрахованиыми на равных условиях. Скажем, что объявлена цель обеспечения по возможности равного уровня здоровья пациентов. Это может означать, что мы должны постояино отказываться от аспирина и антибиотиков для всех агентов, кроме одного, для того чтобы платить за дорогостоящее оборудование, которое продлит его жизнь хотя бы еще на один день. В случае когда маргинальное зиачение (в терминах добавочного здоровья) одиого доллара, потраченного на более здоровых агентов, намного больше значения одного доллара, израсходованного на нездорового человека, большинство людей захочет использовать этот доллар более "полезным" способом, безоговорочно отрицая тем самым эгалитарную программу.

Классическая утилитарная программа заключается в максимизации суммы индивидуальных полезностей. Ее поддерживали родоначальники теории благосостояния (Бентам и Стюарт Милл), и по сей день она является главной альтернативой эгалитаризму. Основное положение, которое приводит к классическому утилитаризму, состоит в том, чтобы считать эквивалентными и полностью сравнимыми приращения полезностей различных агентов (с разными исходными уровнями полезности). Отдельных агентов можно мысленно представить как производственные единицы, производящие (индивидуальное) благосостояние. И тогда роль общественного посредника просто состоит в максимизации коллективного выпуска (а именно общей полезности) при заданных физических ограничениях. Если в примере с медицинским обслуживанием измерять уровень здоровья ожидаемой продолжительностью жизни, то классический утилитаризм предусматривает такую трату добавочного (маргинального) доллара, которая максимизирует суммарное приращение ожидаемой суммарной продолжительиости жизни. В свою очередь эта теория имеет совершенно неприемлемое следствие, состоящее в том, что жизнью людей с тяжелыми врожденными заболеваниями можно пренебречь.

В примерах, рассмотренных в разд. 1.2, эгалитарной программе противопоставляется классическая утилитарная программа. Эти примеры специально подобраны так, чтобы продемонстрировать расхождение между двумя точками зрения. Приверженец эгалитаризма рассматривает индивидуальные уровни полезности как окончательную и не поддающуюся улучшению оценку благосостояния общества. При этом любые компенсаторные платежи между агентами запрещены. Существенное увеличение полезности всех агентов, кроме одного, не стоит даже небольшого уменьшения полезности этого единственного агента, если он оказался наименее удачливым из всех.

В противоположность этому классический утилитаризм рассматривает индивидуальные полезности только как способ производства общественного благосостояния и не стесняется жертвовать интересами отдельного агента ради (агрегированной) коллективной полезности.

На протяжении ч. I проводится сопоставление этих двух этических программ (см., в частности, меры неравенства в разд. 2.6).

1.1 Эгалитаризм

"Les hommes ont pour l'égalité une passion ardente, insatiable, eternelle, invincible" (Стремление людей к равенству является страстным, ненасытным, вечным, непобедимым: Токвиль [1860]). Равное распределение дохода от кооперации есть простой и фундаментальный принцип справедливости. В моделях благосостояния он означает уравнивание индивидуальных полезностей.

Рассмотрим следующий принцип единогласия: если для всех агентов решение x лучше решения y, то решение y не должно быть принято. Принцип единогласия называется также принципом оптимальности по Парето в честь итальянского экономиста В. Парето, который впервые его сформулировал. Оптимальным по Парето решением является такое решение x, что для любого другого решения z, если кто-то (хотя бы один агент) считает, что z лучше x, то кто-то другой считает, что x лучше z. Оптимальное по Парето решение называется также (несколько вольно) эффективным решением. Для нас оба термина будут равносильными. Принцип единогласия утверждает, что должно быть выбрано эффективное решение: почему, в самом деле, мы должны обращать внимание на плохие по Парето решения, если они единогласно отвергаются? Принцип единогласия является самым главным принципом экономики благосостояиия. Он определен, как только заданы качественные предпочтения (в то время как эгалитаризм требует количественных полезностей, соизмеримых для разных агентов) и убедительно выражает идею эффективности благосостояния. Благосостояние будет растрачиваться попусту, если будут приниматься плохие по Парето решения. Во всех многочисленных примерах, обсуждаемых в этой книге, мы будем прежде всего интересоваться оптимальными по Парето решениями.

Удивительным фактом является то, что принципы единогласия и равенства могут быть несовместными, при этом возникает известная *дилемма равенство – эффективность*.

Пример 1.1. Размещение объекта

Два города одинакового размера выбирают место расположения совместного предприятия сферы обслуживания (финансируемого экзогенно).

Города A и B соединены двумя дорогами. Протяженность длинной дороги составляет 5 км, а короткой – 3 км. Обозначим через C точку, находящуюся на короткой дороге на расстоянии 1 км от A. Дорога на участке от C до B проходит в горах, что не позволяет построить там указанное предприятие. Таким образом, приходится выбирать место расположения предприятия либо на длинной дороге, либо между A и C на короткой дороге (рис. 1.1).

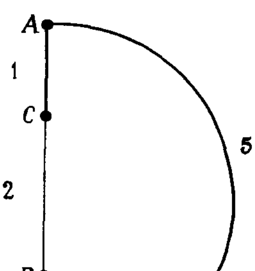


Рис. 1.1

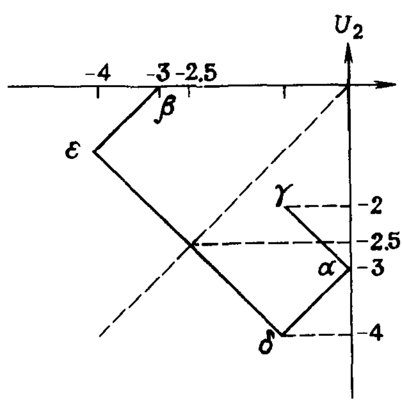


Рис. 1.2

Каждому городу хочется, чтобы предприятие было расположено поближе к нему, поэтому полезность измеряется расстоянием до предприятия со знаком минус. Если расположить предприятие в пункте C, то $(u_1, u_2) = (-1, -2)$. На рис. 1.2 изображено множество допустимых векторов полезиостей.

Отрезок $\beta\varepsilon$ соответствует расположению предприятия на длинной дороге на расстоянии не более 1 км от города B. Отрезок $\varepsilon\delta$ соответствует размещению на длинной дороге на расстоянии не менее 1 км от обоих городов. Отрезок $\delta\alpha$ соответствует расположению предприятия на длинной дороге на расстоянии не более 1 км от города A. Наконец, отрезок $\alpha\gamma$ соответствует расположению предприятия на короткой дороге между A и C.

Оптимальным по Парето (эффективным) является размещение предприятия в городе B или на короткой дороге между пунктами A и C. Равенство полезностей достигается только в одной точке – на полпути из A в B по длинной дороге. Получающийся вектор полезностей (–2.5, –2.5) доминируется по Парето вектором (–1,–2), соответствующим расположеиию предприятия в пункте C. Таким образом, возникает дилемма: мы можем выбрать размещение либо оптимальным по Парето, либо выравнивающим полезности, но не можем добиться одновременного выполнения этих условий.

Заметим, что подобная дилемма может возникнуть даже в том случае, когда множество допустимых векторов полезностей является выпуклым. Соответствующий пример приведен в упражнении 1.4.

В примере 1.1 ясно, как разрешить дилемму: размещение C является наиболее эгалитарным (уравнительным) среди всех возможных эффективных размещений (т.е. величина $|u_1 - u_2|$ достигает наименьшего значения на множестве эффективных размещений в точке C). С другой стороны, в точке C уровень полезности наименее удачливого агента (т.е. уровень $\min(u_1, u_2)$) является наибольшим среди всех возможных векторов полезностей:

$$\min(-1,-2) = -2 \geq \min(u_1, u_2) \text{ для всех допустимых } (u_1, u_2)$$

В нашем примере два подхода выделили один и тот же исход C, однако так бывает не всегда. Действительно, предположим, что множество достижимости содержит только два вектора: $u=(1,2)$ и $u'=(4,1.5)$. Оба являются эффективными. но вектор u минимизирует $|u_1-u_2|$, а вектор u' максимизирует $\min\{u_1,u_2\}$. Если настаивать на симметричности игроков (т.е. считать выполненным принцип анонимности (см. разд. 2.1), то более предпочтительным следует признать вектор u'. Действительно, из принципа анонимности следует, что векторы $u=(1,2)$ и $u''=(2,1)$ социально равнозначны, однако последний доминируется по Парето вектором u'! Упражнение 1.8 показывает, что для двух агентов различие двух методов (максимизации $\min\{u_1,u_2\}$ и минимизации $|u_1-u_2|$ на множестве эффективных векторов) проявляется только в случае невыпуклых множеств достижимости. Однако, если перейти к рассмотрению трех или более агентов, то легко построить пример выпуклого множества достижимости, для которого максимизация $\min(u_i)$ на множестве достижимых векторов полезностей и минимизация $\max|u_i-u_j|$ на множестве эффективных векторов приводит к существенно различным решениям (см. упражнение 1.8, пункт c).

Максимизация коллективной функции полезности

$$W_e(u_1,\dots,u_n)=\min_{1\le i\le n}\{u_i\}$$

на множестве достижимых векторов полезностей связана с именем философа Джона Ролса. Суть этой процедуры, которую называют максиминной, состоит в том, чтобы выбрать такое решение, которое бы максимизировало полезность наименее удачливого агента. Заметим, что Ролс в своей известной книге (Ролс [1971]) говорит скорее о максимине по ресурсу, чем о максимине по полезности, однако мы на этом останавливаться не будем, поскольку указанное различие выходит за рамки данного введения. Приняв уровень полезности наименее удачливого агента за индекс коллективной полезности, мы можем выполнить эгалитарную программу, не нарушив принципа анонимности. Действительно, в результате максимизации W_e на множестве достижимых векторов получается оптимальное по Парето решение, но только в слабом смысле (см. лемму 1.1 ниже). Более того, если существует оптимальное по Парето решение, в котором полезности всех агентов одинаковы (т.е. не существует дилеммы равенство – эффективность), то это решение будет единственным оптимальным решением, выбираемым по критерию W_e. В лемме 1.1, приводимой ниже, содержатся соответствующие формальные утверждения.

Корректная формулировка принципа эгалитарности не сводится к максимизации эгалитарной функции W_e. Функция W_e совпадает с уровнем полезности наименее удачливого агента. Если этот уровень достиг своего максимума, то можно использовать дополнительные возможности так, чтобы к оставшимся агентам применить принцип эгалитарности. Приведем пример.

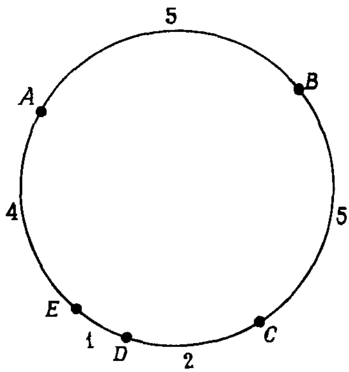


Рис. 1.3

Пример 1.2. Размещение объекта на кольцевой дороге

Пять городов A, B, C, D и E, соединенные кольцевой дорогой, выбирают место размещения совместного предприятия (рис. 1.3). Полезность вновь измеряется расстоянием до предприятия со знаком минус. Предприятие можно расположить в любом месте на кольцевой дороге. Максиминная задача имеет два решения, а именно x на расстоянии 1 км от города A на дороге AE и y на полпути между городами C и D. Действительно, соответствующие векторы полезностей имеют вид

$$u(x) = (-1,-6,-6,-4,-3), \text{ поэтому } W_e(x) = -6,$$
$$u(y) = (-6,-6,-1,-1,-2), \text{ поэтому } W_e(y) = -6.$$

Легко проверить, что для любого другого расположения z выполнено неравенство $W_e(z) < -6$. В упражнении 1.2 содержится общий метод решения максиминной задачи на кольце.

Перейдем к сравнению x и y с позиций эгалитаризма. В обоих случаях имеется два города с полезностью −6; следующий из наименее удачливых агентов в случае x (а именно город D) получает −4, а соответствующий агент в случае y (город E) получает −2. Поэтому при сравнении x и y мы выбираем y. Заметим, что y не доминирует по Парето x, но после упорядочения полезностей по возрастанию получаем

$y^* = (-6,-6,-2,-1,-1)$ доминирует по Парето $x^* = (-6,-6,-4,-3,-1)$.

Лексиминное упорядочение коллективного благосостояния задает полный порядок на множестве векторов полезностей из E^n (через E будем обозначать множество действительных чисел). Оно уточняет эгалитарную функцию коллективной полезности W_e, когда имеется несколько допустимых векторов с одинаковым значением этой функции. В определении этого порядка будем использовать обозначения u^*, v^* для векторов, полученных из векторов u, v из E^n упорядочением компонент u и v по возрастанию. Например, если $u = (5,3,2,4,3)$, то $u^* = (2,3,3,4,5)$.

Определение 1.1. *Векторы u и v являются эквивалентными в смысле* **лексиминного порядка**, *если выполнено равенство $u^* = v^*$. Будем говорить, что вектор u предпочтительнее v, если существует целое число $k = 0,1,\dots,n-1$, для которого выполнены условия*

$$u^*_i = v^*_i \quad \text{для } i = 1,\dots,k, \qquad u^*_{k+1} > v^*_{k+1}.$$

В частности, если $W_e(u) > W_e(v)$ (т.е. $u^*_1 > v^*_1$), то вектор u лексикографически предпочтительнее v.

Лексиминный порядок "работает" следующим образом: сначала сравниваются полезности "наиболее бедных" агентов в обоих распределениях благосостояния, если же они совпадают, то сравниваются полезности "следующих по бедности" агентов и т.д. Приводимые ниже результаты показывают, что этот порядок обладает более привлекательными свойствами, чем эгалитарная функция коллективной полезности W_e.

Для любых двух векторов u,v из E^n обозначим

$$u \ge v \text{ , если } u_i \ge v_i \text{ при } i = 1,\dots,n,$$
$$u > v \text{ , если } u_i \ge v_i \text{ и } u \ne v,$$
$$u \gg v \text{ , если } u_i > v_i \text{ при } i = 1,\dots,n.$$

В лемме 1.1 мы обозначаем через S множество допустимых векторов полезностей. Это множество является замкнутым подмножеством E^n, причем оно ограничено сверху (существует такой вектор $\bar{x}$, что $\bar{x} \geq u$ для всех $u \in S$).

Скажем, что вектор u *оптимален по Парето в* S, если для всех векторов v выполнено

$$v > u \Rightarrow v \notin S.$$

Скажем, что вектор u *слабо оптимален по Парето в* S, если для всех векторов v выполнено

$$v \gg u \Rightarrow v \notin S.$$

Лемма 1.1. (*a*) *Рассмотрим эгалитарную функцию полезности* $W_e = \min\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$. *Обозначим через* S_0 *множество решений задачи* $\max_{u \in S} W_e(u)$. *Множество* S_0 *непусто, и любой элемент множества* S_0 *слабо оптимален по Парето в* S. *Более того, множество* S_0 *содержит по крайней мере один оптимум Парето.*

Предположим, наконец, что множество S *содержит оптимальный по Парето вектор* u^0 (*соответственно слабо оптимальный по Парето вектор* u_0) *такой, что* $u_i^0 = u_j^0$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, n$ (*соответственно* $(u_0)_i = (u_0)_j$ *для всех* i, j). *Тогда* $S_0 = \{u^0\}$ (*соответственно* S_0 *содержит* u_0).

(*b*) *Рассмотрим лексиминный порядок коллективного благосостояния* (*определение* 1.1) *и обозначим через* S_0 *множество максимальных по этому порядку элементов множества* S. *Тогда множество* S_0 *непусто и каждый элемент из* S_0 *оптимален по Парето в* S. *Пусть* u *и* v *принадлежат* S_0, *тогда* $u^* = v^*$, *откуда следует конечность множества* S_0. *Более того, если множество* S *выпукло, то* S_0 *состоит из одного элемента.*

Доказательство утверждения (*a*). Для всякого действительного числа t обозначим $A_t = \{u \in E^n |\ u_i \geq t$ для всех $i = 1, \ldots, n\}$. Максимизация функции W_e на S сводится к нахождению наибольшего числа t, для которого множество $A_t \cap S$ непусто. Отметим, что если множество $A_t \cap S$ непусто, то оно является компактным (поскольку множества A_t и S замкнуты, A_t ограничено снизу, а S ограничено сверху). Таким образом, существует наибольшее число t^*, для которого множество $A_{t^*} \cap S$ непусто (доказывается стандартными предельными рассуждениями, использующими компактность) и совпадает с множеством S_0 из утверждения (*a*).

Предположим, что для элементов u и v множества S выполнено $v \gg u$. Тогда $W_e(v) > W_e(u)$, следовательно, каждый элемент множества S_0 слабо оптимален по Парето. Заметим, что множество S_0 содержит множество S_0 векторов, максимизирующих лексиминный порядок на S, значит, S_0 содержит некоторый оптимальный по Парето вектор полезностей.

Предположим, что S содержит вектор u^0, $u^0 = t$ для всех i и вектор u^0 оптимален по Парето. Тогда для любого другого элемента u из S найдется такая координата i, что $u_i < u_i^0 = t$. Следовательно, $W_e(u) \leq u_i < t = W_e(u^0)$, и мы заключаем, что $S_0 = \{u^0\}$. Если вектор u^0 только слабо оптимален по Парето, то не существует другого вектора u в S, такого, что

$$\text{для всех } i \quad u_i > u_i^0 = t \iff W_e(u) > W_e(u^0) = t\,.$$

Следовательно, u^0 принадлежит S_0.

Утверждение (*b*). Пусть два вектора u, v удовлетворяют условию $W_e(u) > W_e(v)$, следовательно, $u_1^* > v_1^*$, а значит, u предпочтительнее v по лексиминному порядку. Таким образом, S_0 является подмножеством S_0. Внутри множества S_0 все векторы u^* имеют одну и ту же координату u_1^*. Поскольку множество S_0 является замкнутым и ограниченным, мы можем выбрать его подмножество S_{00}, на котором достигается максимум u_2^*, затем подмножество S_{000} множества S_{00}, на котором достигается максимум u_3^* и т. д. Повторив эту операцию n раз, получим искомое множество S_0. По построению для любых двух элементов u, v из S_0 выполнено $u^* = v^*$. Заметим, что для любых векторов u и v, связанных неравенством $u > v$, выполняется также неравенство $u^* > v^*$, поэтому S_0 содержит только оптимальные по Парето элементы.

Осталось показать, что если множество S выпукло, то множество S_0 состоит из единственного элемента. Предположим противное и выберем два различных вектора u, v, для которых $u^* = v^*$. Достаточно показать, что вектор $w = (u + v)/2$ лексикографически предпочтительнее векторов u и v. Для всех i имеем

$$u_i \geq u_1^*, \quad v_i \geq v_1^* \Rightarrow w_i \geq u_1^* = v_1^*,$$

следовательно, $w_1^* \geq u_1^* = v_1^*$. Если последнее неравенство является строгим, то наше утверждение доказано. Предположим теперь, что $w_1^* = u_1^* = v_1^*$. Выберем i из условия $w_1^* = w_i$. Тогда выполнено $u_i = v_i = u_1^*$. Для любого $j \neq i$ справедливо

$$u_j \geq u_1^*, \quad v_j \geq v_1^* \Rightarrow w_j \geq u_1^* = v_1^*,$$

следовательно, $w_2^* \geq u_2^* = v_2^*$. Если последнее неравенство является строгим, то все доказано, в противном случае существует координата $j \neq i$, для которой $u_j = v_j = w_2^*$. Повторяя эти рассуждения, мы либо найдем индекс k, для которого $w_k^* > u_k^* = v_k^*$, либо установим, что векторы u и v равны. Полученное противоречие доказывает лемму.

QED

1.2 Классический утилитаризм

Кооперация – хрупкое предприятие. Она уязвима по крайней мере в двух направлениях. Во-первых, каждый агент должен осознавать, что в отношении него поступают справедливо, т. е. что он получает справедливую долю кооперативной прибыли. Это гарантирует консенсус (согласие) кооперирующих агентов: если какой-то агент или группа агентов не признает правило дележа, то консенсус в конце концов разрушится. Мы будем понимать под внутренней устойчивостью то, что положительно влияет на прочный консенсус. Большинство моделей, анализируемых в данной книге, рассматривается с точки зрения достижения внутренней устойчивости.

Другая угроза устойчивости кооперации – низкие доходы. Если прибыль от кооперации по сравнению с ситуацией без кооперации слишком мала, то вряд ли кто-то сочтет кооперацию разумной (зачем связываться с рискованной кооперацией, если можно достичь почти того же, не лишаясь независимости?). Если доходы от кооперации вообще отрицательны, то кооперация обречена на развал. Будем называть внешней устойчивостью то, что является следствием достаточно высоких доходов от кооперации.

Ясно, что эгалитаризм дает внутреннюю устойчивость: кто может чувствовать себя эксплуатируемым, если прибыль поровну делится между равными агентами? Однако при этом подходе не обращается внимание на внешнюю устойчивость: для уравнивания долей прибыли эгалитарист готов даже уменьшить долю каждого до такой степени, что от кооперативной прибыли почти ничего не останется. Классический утилитаризм идет в противоположном направлении: он максимизирует суммарный доход от кооперации (измеренный в единых единицах полезности), гарантируя тем самым внешнюю устойчивость, но полностью игнорируя внутреннюю устойчивость, как это показано в примерах, рассмотренных ниже (особенно пример 1.4).

Рассмотрим сначала задачу размещения объекта совместного пользования. На этот раз предположим, что город вытянут в линию, скажем, это отрезок $[0,1]$. Плотность населения описывается непрерывной функцией $f(x)$, $0 \le x \le 1$. Таким образом, все население города составляет $\int_0^1 f(x)\,dx$. Предположим, что полезность агента, расположенного в точке x, равна расстоянию от точки x до объекта со знаком минус. Эгалитарный посредник, используя функцию коллективной полезности W_e, бесспорно, порекомендует разместить объект в точке $1/2$ (предполагая, что плотность населения на обоих концах города положительна). Это гарантирует для каждого агента расстояние до объекта не более $1/2$. Утилитарный посредник в свою очередь выберет размещение a из решения следующей задачи:

$$\min_{0 \le a \le 1} \int_0^1 |x-a|\, f(x)\,dx.$$

Решение этой задачи есть медиана a^* функции f: половина населения живет левее a^*, а половина – правее

$$\int_0^{a^*} f(x)\,dx = \int_{a^*}^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Чтобы показать это, вычислим

$$\int_0^1 |x-a|\, f(x)\,dx = \int_0^a (a-x)\cdot f(x)\,dx +$$

$$+ \int_a^1 (x-a)\cdot f(x)\,dx = 2a\int_0^a f(x)\,dx - a\int_0^1 f(x)\,dx -$$

$$- 2\int_0^a x\cdot f(x)\,dx + \int_0^1 x\cdot f(x)\,dx$$

и проверим, что производная этого выражения равна нулю в a^*, положительна до a^* и отрицательна после a^*.[1]

В этом примере эгалитарное решение совершенно не зависит от плотности населения в предположении, что какие-то агенты живут на обоих концах города. Утилитарное решение, напротив, существенно зависит от данной плотности: если плотность смещена влево, то и медиана тоже. Какое решение является более привлекательным, зависит, очевидно, от контекста. Утилитарный выбор, минимизирующий транспортные затраты, является вполне убедительным, если объект – это театр: если 90 процентов населения сконцентрировано на отрезке $[3/4,1]$, то агенты из отрезка $[0,1/4]$ столкнутся с большими транспортными затратами, но это является справедливой ценой за максимизацию общего благосостояния. С другой стороны, если объект есть пункт скорой медицинской помощи (реанимация), то размещение в $1/2$ становится более привлекательным, поскольку оно минимизирует наибольший риск.

(Классическую) *утилитарную функцию полезности* будем обозначать W_*:

$$W_*(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

Утилитарная программа состоит в максимизации функции W_* на множестве допустимых векторов полезностей. Она согласуется с принципом единогласия: любой вектор полезностей, максимизирующий W_* на допустимом множестве, будет оптимальным по Парето (упражнение: почему?)

Этот подход означает механическое объединение агентов. Каждый агент производит некоторую полезность. Если агент 1 более успешно, чем агент 2, трансформирует ресурс в полезность, то в этом и только в этом случае он получает большую полезность, чем агент 2. Наш следующий пример подчеркивает

---

[1] Проще проверить, что при $a < a^*$ имеем

$$\int_0^1 |x-a| \cdot f(x)\,dx - \int_0^1 |x-a^*| \cdot f(x)\,dx = \int_a^{a^*} x \cdot f(x)\,dx \geq 0.$$

Аналогичное неравенство верно при $a > a^*$. – *Прим. ред.*

эту интерпретацию. В этом смысле утилитаризм судит по заслугам, а эгалитаризм – по потребностям.

Пример 1.3. Дележ однородного пирога (Сен [1977])

Два брата должны поделить между собой единицу бесконечно делимого однородного пирога. Брат 1 вдвое более голоден, чем брат 2: один и тот же кусок пирога x приносит брату 1 вдвое большую полезность $u_1(x) = 2\,u_2(x)$. Предположим, что функции u_1, u_2 являются возрастающими, вогнутыми и дифференцируемыми.

Утилитарная программа

$$\max_{0 \le x \le 1} \{u_1(x) + u_2(1-x)\}$$

является задачей вогнутого программирования. Ее решение находится из условий первого порядка

$$u_1'(x^*) = u_2'(1-x^*)\,.$$

Поскольку $u_1 = 2u_2$ и u_1' не возрастет по x, имеем

$$u_1'(x^*) = \frac{1}{2}u_1'(1-x^*) \Rightarrow u_1'(x^*) < u_1'(1-x^*) \Rightarrow x^* > \frac{1}{2}\,.$$

Значит, классический утилитаризм отдает больший кусок более голодному брату, который вносит больший вклад в общественное благосостояние. В противоположность этому, эгалитарная программа компенсирует брату 2 пониженный аппетит, наделяя его большим куском пирога, чем брата 1. В самом деле, в этом примере нет дилеммы равенство – эффективность, поэтому эгалитарное распределение находится так:

$$u_1(\bar{x}) = u_2(1-\bar{x}) \Rightarrow u_1(\bar{x}) = \frac{1}{2}\,u_1(1-\bar{x}) \Rightarrow u_1(\bar{x}) < u_1(1-\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} < \frac{1}{2}.$$

Эгалитарная программа может приводить к крайностям. Так, в описанной выше задаче размещения, если единственный агент поселяется в точке 3, то эгалитарное решение перескакивает из точки 1/2 в точку 3/2, хотя это увеличивает транспортные расходы всех агентов, кроме одного. Симметричным образом утилитарная программа может приводить к абсолютно неадекватным исходам.

Пример 1.4. В котором производительность наказывается (Мирлис [1974])

Два агента преобразуют труд в кукурузу по технологии с постоянными доходами на масштаб (ПДМ). Агеит 2 вдвое более производителен, чем агент 1: час работы агента 2 (агента 1) дает 2 бушеля (1 бушель) кукурузы. Начальные запасы каждого агента соответствуют 10 часам рабочего времени, а кукурузы у них нет. Их функции полезности совпадают:

x = затраты труда в часах,

y = полученная кукуруза в бушелях,

$u(x, y) = y^{1/3}(10 - x)^{1/3}$.

Утилитарная программа выделяет для этой экономики вполне определенный исход

$$\max\{y_1^{1/3}(10 - x_1)^{1/3} + y_2^{1/3}(10 - x_2)^{1/3}\},$$

где x_i, y_i неотрицательны и $y_1 + y_2 = x_1 + 2x_2$. Поскольку эта задача является задачей вогнутого программирования, то мы просто решаем систему уравнений, соответствующую условиям первого порядка:

$$\frac{1}{3}\frac{y_1^{1/3}}{(10 - x_1)^{2/3}} = \frac{1}{3}\frac{(10 - x_1)^{1/3}}{y_1^{2/3}} = \frac{1}{3}\frac{y_2^{1/3}}{2(10 - x_2)^{2/3}} = \frac{1}{3}\frac{(10 - x_2)^{1/3}}{y_2^{2/3}} \qquad (1)$$

Отсюда $y_1 = 10 - x_1$, $y_2 = 2(10 - x_2)$ и, подставляя опять в (1), имеем $(10 - x_1) = 4(10 - x_2)$; $y_1 = 2y_2$. Таким образом, более производительный агент 2 наделяется в 4 раза меньшим свободным временем и получает вдвое меньше кукурузы, чем агент 1! В данном примере утилитарный исход является крайне несправедливым и нереалистичным, поскольку более производительный агент будет скрывать свои таланты: см. Мирлис [1974]. Упражнение 1.7 обобщает этот пример. Кроме того, см. гл. 7, в которой предлагаются другие исходы.

Ключевое различие эгалитаризма и (классического) утилитаризма состоит в соизмеримости и возможности обмена добавочной полезностью между агентами. При этих предположениях утилитаризм является жизненным и осмысленным принципом. На самом деле в определенных социальных ситуациях мы должны рассматривать агентов именно таким образом.

Мирлис предлагает следующую историю о двух автомобилях, загоревшихся в результате катастрофы. В первой машине – четыре пассажира, а во второй – только один. Все пятеро без сознания. У единственного свидетеля есть время спасти только одну машину. Выбирая для спасения первую машину, как вероятно сделает большинство из нас, он волей-неволей становится утилитаристом: целью является максимизация ожидаемого числа спасенных среди пяти людей, подвергнувшихся опасности. Эгалитарный свидетель в противоположность этому для выбора машины бросит симметричную монету с тем, чтобы дать каждому пятидесятипроцентный шанс на выживание.

Другие ситуации явно предполагают эгалитарный подход. Так, например, при распределении таких первичных благ, как элементарная медицинская помощь, образование или свобода слова, как правило, считается, что индивидуумы не могут обмениваться полезностями. При обосновании эгалитарной этики нужно считать уровни полезностей агентов окончательными и запретить последующие компенсации агентов друг другу.

Спор между эгалитаризмом и (классическим) утилитаризмом является старым. К более современным исследованиям социальных философов следует отнести работы Ролса [1971], поддерживающего эгалитаризм, и Харшаньи [1955, 1975], отстаивающего утилитаризм. Для обоснования своего подхода каждый автор предлагает свою метатеорию благосостояния. Агент собирается присоединиться к данному сообществу, но он не знает, какое место он там займет. С учетом этого незнания его собственные предпочтения относительно метода коллективного выбора отражают его этическую установку. Поскольку неизвестно заранее, окажется ли он бедным или богатым, его выбор вряд ли будет эгоистичным. Под этим покровом неизвестности агент Ролса имеет предпочтение, исключающее риск: он боится оказаться самым бедным и поэтому стремится к эгалитарной функции полезности. С другой стороны, агент Харшаньи имеет байесовское предпочтение, основанное на максимизации ожидаемой полезности, откуда проистекает его выбор утилитарной функции полезности.

Эти два подхода являются метавероятностными: каждый из агентов рассматривает неопределенность как жизненную лотерею, приписывающую ему место в обществе. В исходном состоянии он имеет точные предпочтения относительно случайных событий (своего общественного положения). Вероятностное распределение на. них является, мягко говоря, хрупкой интеллектуальной конструкцией.

В обществе благосостояния, а именно тогда, когда окончательный уровень благосостояния каждого агента является хорошо определенной и наблюдаемой величиной, только эгалитарная программа (максиминная полезность или, в случае необходимости, лексиминный порядок) гарантирует консенсус индивидуалистически настроеиных агентов. В самом деле, агент с наименьшим благосостоянием, скажем агент i, знает, что существующее неравенство ему же на пользу: при меньшем уровне нераveиства либо он будет иметь меньший уровень благосостояния, либо какой-то другой агент будет иметь более низкий уровень, чем агент i первоначально. Конечно, привилегированные агенты (с наивысшим уровнем благосостояния) меньше ощущают относительное преимущество этой программы по сравнению с некоторой другой, скажем с классическим утилитаризмом. Но эти привилегии, сколь малыми они бы ни были, гарантированы консенсусом, в который входит даже наименее удачливый агент. В противоположность этому, при утилитарной программе агенты с наименьшим благосостоянием не имеют никаких видимых причин соглашаться с выбранным решением. По крайней мере от них можно ожидать *манипулирования* (в том смысле, как понимается этот термин в ч. III) механизмом принятия решений. Эксперименты настойчиво подтверждают разумность эгалитаризма там, где полезности выражают объективные потребности: см. Яари и Бар-Хиллел [1984], где полезности измеряются количеством витаминов, усвоенных агентами. Если полезности отражают различные вкусы агентов, экспериментальный исход гораздо труднее интерпретировать.

Упражнения

1.1 Размещение объекта на дереве

Предположим, что n городов расположены в вершинах дерева (дерево есть связный граф без циклов). Далее, каждое ребро (соединяющее две соседние вершины) имеет определенную длину. Полезность от размещения определяется как расстояние от города до объекта, взятое со знаком минус. Задача состоит в том, чтобы расположить объект где-то на дереве. Рассмотрим пример.

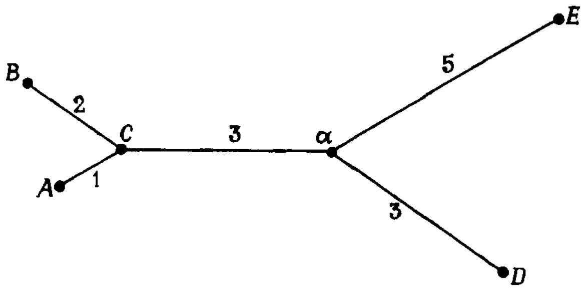


Рис. 1.4

На рис. 1.4 дерево имеет шесть вершин, пять из которых являются городами: A, B, C, D, E (вершина α не город). Числа на дугах соответствуют расстояниям в километрах.

(*a*) Рассмотрите максиминную задачу. Покажите, что единственным решением этой задачи для нашего примера является размещение в точке α. Для произвольного дерева покажите, что все решения максиминной задачи являются серединами максимальных путей между парами городов.

(*b*) Рассмотрите классическую утилитарную задачу. Покажите, что для нашего примера ее решение состоит в размещении объекта в пункте C. Покажите, что в случае произвольного дерева все решения являются *победителями по Кондорсе.*

Размещение x является победителем по Кондорсе, если на каждой ветви, начинающейся в x (включая саму точку x), содержится не более половины всех городов. Общее определение победителя по Кондорсе см. в разд. 10.1. В частности, в случае двух городов весь отрезок, их соединяющий, является множеством победителей по Кондорсе. Для нечетного числа городов победитель по Кондорсе единствен; см. также упражнение 10.4.

1.2 Размещение объекта на кольце

Наши города расположены на кольцевой дороге. Рассмотрим пример с пятью городами, заданного на рис. 1.5.

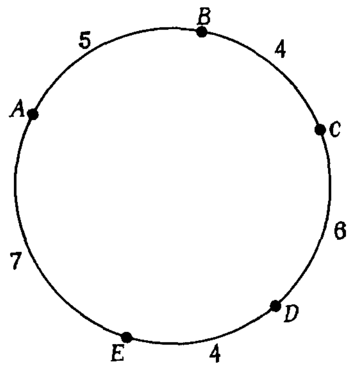


Рис. 1.5

(*a*) Рассмотрим эгалитарную (с максиминной полезностью) программу. Покажите, что в нашем примере ее решение находится между пунктами C и D на расстоянии 0.5 км от C (5.5 км от D). Для произвольного кольца найдем наибольшие интервалы между парами городов и возьмем точки, диаметрально противоположные их серединам. Покажите, что это будут все эгалитарные размещения.

(*b*) Рассмотрим (классическую) утилитарную задачу. Покажите, что в нашем примере ее решение расположено в пункте C. Далее, рассмотрите произвольное кольцо с нечетным числом n городов. Покажите, что утилитарным решением является размещение объекта в городе x^*, определенном следующим образом. Обозначим через $P(x)$ множество размещений y, $y \neq x$, для которых кратчайший путь от x к y является единственным и положительным (в тригонометрической ориентации). Обозначим через $N(x)$ множество тех y, $y \neq x$, для которых кратчайший путь из x в y является единственным и отрицательным. Покажите, что x^* является таким размещением, что множества $P(x^*)$ и $N(x^*)$ содержат менее $n/2$ городов каждое. Таким образом, x^* может быть интерпретирован как победитель по Кондорсе: см. упражнение 10.4.

Рассмотрите случай произвольного кольца с четным числом городов.

1.3. Дилемма равенство – эффективность

Три города (A_1, A_2, A_3) расположены на плоскости E^2. Размещение в любой точке E^2 является допустимым. Полезность размещения в точке x для города A_i определяется евклидовым расстоянием от A_i до x, взятым со знаком минус. Покажите, что оптимальные по Парето размещения образуют треугольник, натянутый на точки, в которых расположены наши три города. Покажите, что дилемма равенство – эффективность возникает тогда и только тогда, когда треугольник тупоугольный. Найдите в этом случае максимум эгалитарной функции коллективной полезности.

1.4 Еще одна дилемма равенство – эффективность

Два агента могут производить общественный продукт в любом количестве x, $x \geq 0$, с затратами $c(x) = 1+x$. Они *должны* поделить переменную часть затрат поровну, но фиксированные затраты в размере 1 они могут разбить произвольным образом на две неотрицательные части:

$$1 = c_1 + c_2\,, \quad c_1 \geq 0\,, \quad c_2 \geq 0\,.$$

Если общественный продукт произведен в количестве x, затраты агента i, $i = 1,2$, составляют $c_i + x/2$. Окончательно полезности подсчитываются по формулам

$$u_1 = 3\sqrt{x} - (c_1 + x), \quad u_2 = \sqrt{x} - (c_2 + x)\,.$$

Найдите множество допустимых векторов полезностей (используйте два параметра $x \geq 0$ и c_1, $0 \leq c_1 \leq 1$) и проверьте, что оно выпукло. Покажите, что имеет место дилемма равенство – эффективность. Найдите распределение затрат с помощью эгалитарной функции полезности (задача нахождения максиминной полезности).

1.5 Дележ продуктов

Эту задачу можно рассматривать как приложение эгалитарной функции коллективной полезности. Он иллюстрирует роль масштаба и нуля (начала отсчета) полезности в эгалитарном методе.

Два агента получили в качестве общего подарка 3 фунта печенья и 1 литр вииа и должны поделить этот подарок между собой. Предпочтения обоих агентов являются линейными (кривые безразличия суть параллельные прямые лиинии). Но предельные коэффициенты замещения различаются: агент 1 один фунт печенья ценит так же, как один литр вина, а агент 2 – четыре фунта печенья ценит так же, как один литр вина.

(*a*) Будем считать печеиье *единицей измерения.* Нуль полезности соответствует случаю, когда агенты ничего не получают. Это приводит к следующим величинам полезностей:

$$u_1 = c_1 + w_1, \quad u_2 = c_2 + 4\, w_2,$$

где c_i – доля печенья, а w_i – доля вина агента i. Покажите, что эффективное и эгалитарное распределение продуктов таково:

$$c_1 = 3, \ c_2 = 0, \ w_1 = 0.2, \ w_2 = 0.8 .$$

(*b*) На рынке один фунт печенья стоит столько же, сколько и пол-литра вина. Возьмите рыночиую стоимость в качестве *единицы измерения* и покажите, что эффективное и эгалитарное распределение продуктов таково:

$$c_1 = 2.\dot{3}3, \ c_2 = 0.67, \ w_1 = 0, \ w_2 = 1 .$$

(*c*) Переместим нули полезностей в физически эгалитарное распределение продуктов (а именно в доминируемое по Парето распределение $c_i = 1.5$, $w_i = 0.5$). Это приведет к полезностям

$$\tilde{u}_1 = c_1 - 1.5 + w_1 - 0.5, \quad \tilde{u}_2 = c_2 - 1.5 + 4\,(w_2 - 0.5) .$$

Покажите, что эгалитарное и эффективное распределение есть $c_1 = 2.75$, $w_1 = 0$, когда *единица измерения* – печенье, и $c_1 = 2.5$, $w_1 = 0$, когда *единица измерения* – рыночная стоимость.

1.6 Распределение затрат на общественный проект

Эту задачу можно рассматривать как приложение лексиминного порядка.

Затраты на общественный проект равны c, $c > 0$, а его потребление агентом i, $i = 1,2,\dots,n$, оценивается величиной b_i, $b_i \geq 0$. Предположим, что осуществление проекта является эффективным решением $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$. Мы ищем эгалитарное распределение затрат между агентами. Предположим сначала, что допустимы любые распределения $(x_1,\dots,x_n)$, такие, что $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$ независимо от знака x_i. Предположим, что полезности в задаче распределения затрат c определяются как $u_i = b_i - x_i$ для агента i. Следующее распределение затрат уравнивает полезности агентов:

$$x_i = b_i - \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right]. \tag{2}$$

(a) Далее будем предполагать, что субсидии агентам невозможны, т. е. затраты не могут быть отрицательными. Рассмотрим задачу нахождения максиминной полезности

$$\max_{x_1,\dots,x_n} \{\min_{i=1,\dots,n} \{b_i - x_i\}\}, \tag{3}$$

где $(x_1,\dots,x_n)$ неотрицательны и $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$. Покажите, что (2) является оптимальным решением этой задачи, если

$$\min_{j=1,\dots,n} \{b_j\} \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right). \tag{4}$$

Если (4) не выполняется, то покажите, что распределение затрат $(x_1,\dots,x_n)$ является решением задачи (3) тогда и только тогда, когда

$$0 \leq x_i \leq b_i - \min_j \{b_j\} \quad \text{для всех } i \text{ и } \sum_{i=1}^{n} x_i = c.$$

Например, возьмем 5 агентов, причем $b_1 = 5$, $b_2 = 10$, $b_3 = 20$, $b_4 = 22$, $b_5 = 27$ и $c = 30$. Задача нахождения максиминной полезности дает произвольное распределение затрат, удовлетворяющее условиям

$$x_1 = 0,\ 0 \leq x_2 \leq 5,\ 0 \leq x_3 \leq 15,\ 0 \leq x_4 \leq 17,\ 0 \leq x_5 \leq 22 \text{ и } \sum_{i=2}^{5} x_i = 30.$$

Для определения единственного распределения затрат требуется лексиминный порядок.

(b) Рассмотрим задачу с лексиминным порядком относительно векторов $(b_1 - x_1,\dots,b_n - x_n)$. Покажите, что этот подход предлагает единственное распределение затрат, в котором как можно большее число агентов, начиная с тех, которым проект нравится менее всего, не платят ничего, в то время как тем, кто платит, соответствует один и тот же уровень чистой полезности. Этот уровень чистой полезности должен быть не меньше уровня полезности любого из "зайцев" (агентов, которые не затрачивают ресурсов на общественный проект).

Формально, упорядочим агентов так, чтобы было выполнено $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$. Лексиминный оптимум определяется по формуле

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{при } i = 1, \ldots, k, \\ b_i - \dfrac{1}{n-k}\left[\sum_{j \ge k+1} b_j - c\right], & \text{при } i = k+1, \ldots, n, \end{cases} \tag{5}$$

где k является единственным решением задачи

$$1 \le k \le n-1, \quad b_k \le \frac{1}{n-k}\left[\sum_{j \ge k+1} b_j - c\right] < b_{k+1}. \tag{6}$$

В числовом прнмере из пункта (a) находим

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 7, \quad x_4 = 9, \quad x_5 = 14.$$

В гл. 6 (лемма 6.1) мы дадим другое выражение для распределения затрат (5) - (6).

1.7 Обобщение примера 1.4 (Мирлис [1974])

Два агента имеют производительности π_1 и π_2 по преобразованию труда в кукурузу. Предположим, что $\pi_1 > \pi_2$. Они имеют одну и ту же функцию полезности $u(x,y)$ от переменных: свободное время, кукуруза. Предположим, что функция u вогнута и дважды дифференцируема. Более того, пусть $\partial^2 u / \partial x \partial y > 0$. Утилитарная задача выглядит следующим образом:

$$\max u(\omega_1 - x_1, y_1) + u(\omega_2 - x_2, y_2)$$
$$\text{при ограничениях } y_1 + y_2 = \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2, \quad y_i, x_i \ge 0.$$

Здесь, как и в примере 1.4, x_i обозначает труд агента i, а w_i - запас его свободного времени.

(a) Покажите, что кривые $C(\alpha)$, $\partial u/\partial x/\partial u/\partial y(x,y) = \alpha$, являются монотонно возрастающими (при любом фиксированном α) и что то же самое справедливо для кривых $D(\beta)$, $\partial u/\partial y(x,y) = \beta$ (для любого фиксированного β). Более того, в любой точке (x,y) наклон (dy/dl) соответствующей кривой $D(\beta)$ меньше, чем у кривой $C(\alpha)$. Наконец, когда α возрастает, то кривая $C(\alpha)$ сдвигается вверх (см. рис. 1.6).

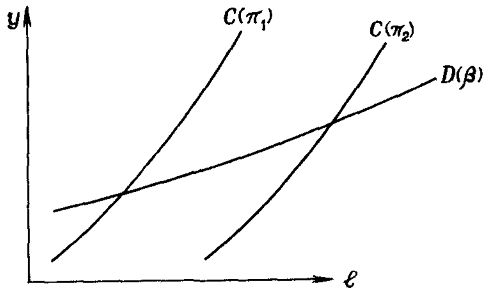


Рис. 1.6

(b) Выпишите условия первого порядка для утилитарной программы в виде

$(x_i, y_i) \in C(\pi_i)$ при условии, что

(x_1, y_1) и (x_2, y_2) принадлежат одной и той же крнвой $D(\beta)$.

Выведите из пункта (a), что при утилитарном решении более производительный агент больше работает и получает меньше кукурузы.

1.8 Наиболее эгалитарное среди эффективных решений

В лемме 1.1 мы рассматривали множество S допустимых векторов полезностей и предполагали, что оно является замкнутым и ограниченным сверху в E^n. Обозначим через $P(S)$ (непустое) множество оптимумов Парето на S. Рассмотрим следующую задачу:

$$\min_{u \in P(S)} \left\{ \max_{1 \le i,\, j \le n} |u_i - u_j| \right\}. \qquad (7)$$

(a) Если существует вектор u, оптимальный по Парето в S и такой, что $u_i = u_j$ для всех i, j, то он и является единственным решением задачи (7). Однако даже при $n = 2$ задача (7) может не иметь оптимального решения, как это показывает следующий пример в E^2:

$$(u_1, u_2) \in S \iff u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,$$
$$(\{u_1 + u_2 \le 2\} \ \text{ и/или } \ \{u_2 \le 1,\ u_1 + u_2 \le 3\}).$$

(b) Если S является выпуклым и $n = 2$, то задача (7) имеет единственное решение, которое одновременно максимизирует лексиминный порядок коллективного благосостояния (определение 1.1).

(c) Если $n \geq 3$, то решение задачи (7) может быть весьма не похоже ни на одно из решений задачи о максиминной полезности. В качестве примера рассмотрим следующий отрезок:

$$S = [(0,0,1),(2,1/2,1/2)].$$

Решением задачи (7) является точка $(4/5,1/5,4/5)$ в то время как в задаче нахождения максиминной полезности решением является точка $(2,1/2,1/2)$.

Глава 2

Порядки коллективного благосостояния

Обзор

Несмотря на все различия эгалитарной и классической утилитарной программ, они имеют одну общую функциональную черту В обоих случаях используется функция коллективной полезности (ФКП), агрегирующая индивидуальные полезности в единый индекс полезности, представляющий коллективное благосостояние. В пределах множества допустимых полезностей эти подходы выделяют коллективный *оптимум*: вектор полезностей, максимизирующий ФКП. Такой функцией является сумма индивидуальных полезностей для классического утилитаризма и их минимум для эгалитаризма (см. гл. 1).

В аксиомах благосостояния, рассматриваемых в этой главе, развивается эта антропоморфическая идея. Коллективное благосостояние описывается индексом коллективной полезности, вычисляемым автоматически по индивидуальным полезностям. Такой коллективный выбор подчиняется той же логике, что и индивидуальный выбор: "Il faut que les méthodes d'une assemblée délibérante se rapprochent autant qu'il est possible de celles des individus qui la composent" (Кондорсе [1785]: "Рациональный выбор сообщества должен быть как можно ближе к способам выбора отдельных его членов"). В частности, любые два вектора индивидуальных полезностей должны быть сравнимы, и эти сравнения должны быть транзитивны.

Изначальным экономическим приложением ФКП является измерение неравенства. Оценивание рядов благосостояния по распределению доходов (или любой другой переменной, связанной с индивидуальным благосостоянием) является важной задачей экономики общества Если довести этот подход до логической завершенности, мы должны быть в состоянии сравнить любые два распределения доходов и сказать, какой соответствует более высокому коллективному благосостоянию. Другими словами, мы должны выбрать порядок коллективного благосостояния (ПКБ). К этому выбору приводят различные этические предположения (постулаты). Предметом этой главы является рассмотрение этих требований к ПКБ, выраженных в математической форме.

Основным постулатом является принцип Пигу - Дальтона. Он говорит, что передача полезности от агента i агенту j увеличивает (или хотя бы не уменьшает) коллективное благосостояние, если полезность агента i выше полезности агента j до и после передачи (конечно, разница их полезностей меньше после передачи). Как эгалитарная, так и утилитарная ФКП удовлетворяют этому принципу (последняя в слабом смысле, поскольку она безразлична к перераспределениям полезностей).

ПКБ, используемые при проведении реальных измерений неравенства, осуществляют компромисс между утилитарной и эгалитарной этикой. Чтобы объснить это, нужно проанализировать две основные аксиомы, которым удовлетворяют оба подхода: принцип Пигу - Дальтона (разд. 2.5) и сепарабельность (разд. 2.4). Мы дадим интуитивное представление об этих аксиомах, но сначала обратнмся к матерналу первых трех разделов.

В разд. 2.1 приводится формальное определение ФКП и ПКБ. ПКБ является порядковой частью ФКП так же, как порядок предпочтений является порядковым аналогом числовой функции полезности. Общая теорема о представлении (теорема 2.1) говорит о том, что при весьма слабых топологическнх предположениях каждый ПКБ может быть представлен некоторой ФКП. Следовательно, для представления коллективного благосостояния мы можем использовать оба объекта, почти не делая между ними различий.

На протяжении гл. 2 мы предполагаем, что все ПКБ (как и ФКП) удовлетворяют двум основным условиям, а именно анонимности и условию единогласия. Последнее означает, что если вектор полезностей u лучше по Парето вектора v, то для общества вектор u предпочтительнее вектора v. Такнм образом, оптимальный вектор полезностей всегда эффективен.

С другой стороны, анонимность выражает равноправие индивидуальных агентов: коллективиое благосостояние не изменится, если два агента поменяются полезностями. Анонимные ПКБ не могут дискриминировать агентов только на основе их имен. Это очень слабое требование равноправия. Значительная часть теории ПКБ и ФКП может быть обобщена на случай, когда аксиома анонимности не выполнена. Например, утилитарная ФКП $\sum_{i=1}^{n} u_i$ превращается во взвешенную сумму $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, где фиксированные параметры λ_i дают различный вес различным агентам. Тем не менее для простоты изложения мы выбрали анонимный случай, дополняя изложение ссылками на статьи, в которых обсуждаются детали неанонимных ПКБ.

(Классическая) утилитарная ФКП ($\sum_{i=1}^{n} u_i$) и эгалитарная ФКП ($\min u_i$) являются двумя фокусами теории благосостояния. В дополнение к этической привлекательности этих функций (обсуждаемой в гл. 1), они могут быть легко охарактеризованы с помощью двух различных свойств независимости. ФКП не зависит от заданного преобразования полезностей, если сравнение на ее основе двух произвольных векторов не зависит от того, применяли ли мы данное преобразование к векторам или нет. Примерами таких преобразований являются прибавление одной и той же константы ко всем полезностям (независимость от общего нуля, определение 2.5) и умножение всех полезностей на одну и ту же (положительную) константу (независимость от общего масштаба, определение 2.5). Представим, например, что полезности выражены в деньгах. Если мы используем ПКБ, *не являющийся* независимым от масштаба, то *имеет* значение, выражаем ли мы деньги американским долларом или французским франком. Или рассмотрим полезности, представленные температурой. Если мы сравниваем распределения температур с помощью ПКБ, не зависящего от общего масштаба и общего нуля, то не важно, выражены ли все температуры в градусах Цельсия или в градусах Фаренгейта.

Конечно, утилитарная и эгалитарная ФКП не зависят от общего нуля и общего масштаба. Чтобы охарактеризовать утилитарную ФКП нам нужно гораздо более сильное свойство независимости, а именно независимость от нуля каждой индивидуальной полезности (определение 2.1). Оно говорит, что на сравнение двух векторов полезностей u и v влияет только вектор $(u - v)$. Утилитарная ФКП по существу единственная, представляющая ПКБ, который удовлетворяет этому свойству (теорема 2.2). Если мы вместо этого рассмотрим независимость от масштаба каждой индивидуальной полезности, то мы охарактеризуем знаменнтую функцию коллективной полезности, предложенную Нэшем. В ней берется произведение индивидуальных полезностей (в то время как классический утилитаризм берет их сумму), смотри теорему 2.3.

Эгалитарная (максиминная) ФКП не зависит от общей шкалы полезности. Это означает, что вы можете преобразовывать индивидуальные полезности любым монотонным образом (применяя одно и то же преобразование для каждой полезности), не оказывая влияния на коллективное предпочтение. Другими словами, для сравнения двух векторов u и v вся необходимая информация заключена в списке неравенств $u_i \geq v_j$ или $v_i \geq u_j$ (определение 2.3). Это свойство характеризует семейство рангового диктаторства. Эгалитарная ФКП является диктатом последнего ранга, поскольку мы максимизируем полезность агента, последнего по рангу. Другой член семейства – диктат середины, когда максимизируется полезность агента, чье благосостояние по рангу находится как раз посредине между первым и последним. Детали см. в теореме 2.4.

В разд. 2.4 мы обсуждаем мощную аксиому сепарабельности. Предположим, что мы хотим сравнить два распределения полезностей u, v, которые отличаются только на подмножестве T агентов (другими словами, все агенты из $N \setminus T$ имеют одинаковую полезность в распределениях u и v). При сепарабельном ПКБ не надо знать полезности агентов из $N \setminus T$ (поскольку их полезность в распределениях u и v одинакова) для сравнения u и v. Сепарабельность есть свойство децентрализации: для того чтобы оценить изменение в распределении полезностей, мы можем ограничиться рассмотрением только тех агентов, которых это изменение затронуло. Лексиминный и утилитарный ПКБ оба сепарабельны.

Комбинируя сепарабельность и независимость от общего масштаба, мы выделяем семейство ФКП, в которых берется сумма некоторых фиксированных степеней индивидуальных полезностей (теорема 2.6). Утилитарная ФКП соответствует степени 1; лексиминный ПКБ получается как предел, когда показатель степени при индивидуальных полезностях стремится к $-\infty$.

Раздел 2.5 посвящен принципу Пигу - Дальтона. Мы обсуждаем несколько эквивалентных формулировок этого принципа. Одна из них использует концепцию доминирования Лоренса (лемма 2.3), ослабленный вариант доминирования Парето. На заданном множестве допустимых векторов полезностей оптимумы Лоренса суть те оптимумы Парето, для которых невозможно перераспределение Пигу - Дальтона. Любой индекс неравенства (как это определено в разд. 2.6) достигает минимума среди оптимальных по Парето векторов полезностей на оптимальном по Лоренсу распределении полезностей. В разд. 2.6 представлены наиболее популярные индексы неравенства, а именно индекс Джини и семейство индексов Аткинсона. Последние по существу характеризуются комбинацией принципа Пигу - Дальтона и слабым вариантом аксиомы сепарабельности (теорема 2.8). За пределами рассмотрения книги остаются быстро растущие приложения теории индексов неравенства. Заинтересованный читатель может познакомиться с обзором в работах Фостер [1985] и Шоррокс [1985].

2.1 Порядки коллективного благосостояния и функции коллективной полезности

Обозначим через $N = \{1,2,\ldots,n\}$ "сообщество", т.е. фиксированное множество участвующих агентов, так что распределение полезностей есть элемент $u = (u_1,\ldots,u_n)$ пространства E^N (E обозначает множество действительных чисел). *Порядком коллективного благосостояния* называется упорядочение R в E^N (полное, рефлексивное и транзитивное отношение на E^N). Обозначим через P его строгую компоненту, а через I – соответствующее отношение безразличия:

$$u\,P\,v \iff \{u\,R\,v, \text{ но не } v\,R\,u\},$$
$$u\,I\,v \iff \{u\,R\,v \text{ и } v\,R\,u\}.$$

Всюду предполагается, что ПКБ удовлетворяет двум дополнительным свойствам.

(a) *Анонимность* (симметрия по агентам). Если u получен из v перестановкой координат, то u и v одинаковы по предпочтительности: $u\,I\,v$.

(b) *Единогласие*. Если $u,v \in E^N$ таковы, что $u_i \geq v_i$ для всех $i \in N$ (обозначается $u \geq v$), то $u\,R\,v$ Более того, если $u_i > v_i$ для всех $i \in N$ (обозначается $u \gg v$), то u строго лучше v: $u\,P\,v$.

Лексиминный порядок (определение 1.1) является ПКБ. Мы оставляем читателю проверку выполнения для него свойств анонимности и единогласия.

Заметим, что для того, чтобы бинарное отношение было ПКБ, необходимо, чтобы его строгая компонента P и отношение безразличия I были транзитивны. Рассмотрим, например, отношение

$$u\,T\,v \iff_{\text{def}} \text{ не выполнено } \{v_i > u_i \text{ для всех } i \in N\}.$$

Это не ПКБ (хотя свойства анонимности и единогласия выполнены), потому что соответствующее ему отношение безразличия не транзитивно ((1,2) эквивалентно (3,1), (3,1) эквивалентно (2,3), но (1,2) не эквивалентно (2,3)). Заметим, что строгая компонента отношения T является в точности доминированием Парето.

Функцией коллективной полезности (ФКП) называется действительная функция W, определенная на E^N и удовлетворяющая следующим двум свойствам.

(i) *Анонимность*. W симметрична по переменным $u_1,\ldots,u_n$.

(ii) *Единогласие*. Если $u,v \in E^N$ таковы, что $u \geq v$ ($u \gg v$), то $W(u) \geq W(v)$ $[W(u) > W(v)]$.

Два примера нам известны: эгалитарная ФКП $W_e(u) = min\, u_i$ и утилитарная ФКП $W_*(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Произвольная ФКП W однозначно порождает ПКБ, определенный следующим образом:

$$u\,R\,v \iff_{\text{def}} W(u) \geq W(v).$$

В этом случае мы будем говорить, что W представляет R. Конечно, если W представляет R, то и ФКП $W + 3$, $2W$, e^W и вообще $\sigma(W)$, где σ – любая возрастающая действительная функция, также представляют R.

Представление ПКБ R с помощью ФКП является очень удобным так же, как и представление предпочтений индивидуального агента с помощью функции полезности. Но не все ПКБ могут быть представлены ФКП. Простейший пример – лексиминный ПКБ (определение 1.1).

Лемма 2.1. *Лексиминный порядок коллективного благосостояния не представляется функцией коллективной полезности.*

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 2$ и предположим, что $W(u_1, u_2)$ – ФКП, представляющая лексиминный порядок. Для любого числа x, $1 \le x \le 2$, определим число $\varepsilon_x = W(x,4) - W(x,3)$. Поскольку $(x,4)$ по лексиминному порядку лучше $(x,3)$, то число ε_x положительно. Для любого целого n обозначим через $A(n)$ множество тех x из $[1,2]$, для которых $\varepsilon_x \ge 1/n$. Поскольку множества $A(n)$, $n = 1,2,\dots$, покрывают отрезок $[1,2]$, то хотя бы одно нз них бескоиечно. Следовательно, мы можем выбрать такое целое n_0, что

$$1,2 \in A(n_0) \quad \text{и} \quad A(n_0) \ \text{бесконечно.}$$

Теперь рассмотрим два элемента x,y из $A(n_0)$, причем $y < x$. Поскольку по лексиминному порядку $(x,3)$ лучше, чем $(y,4)$, имеем

$$W(y,4) < W(x,3) \Rightarrow \frac{1}{n_0} \le W(y,4) - W(y,3) < W(x,3) - W(y,3).$$

Значнт, для любой конечной возрастающей последовательности $x_1 = 1 < x_2 < \dots < x_{K-1} < x_K = 2$ получается

$$W(2,3) - W(1,3) = \sum_{k=2}^{K} (W(x_k,3) - W(x_{k-1},3)) \ge \frac{K-1}{n_0}.$$

Так как K может быть выбраио произвольно большим, то число $W(2,3) - W(1,3)$ не является конечным. Противоречие.

QED

Сложность, вскрытая леммой 2.1, может быть преодолена двумя способами. Во-первых, мы можем ограничиться рассмотрением *непрерывных* ПКБ (а именно таких ПКБ, у которых все верхние и нижние контурные множества являются замкнутыми, – см. разд. 2.2 ниже), поскольку классическая теорема Дебре [1960] гарантирует, что непрерывный ПКБ представим непрерывной ФКП. Однако это ограничение, к сожалению, вычеркивает из рассмотрения важный лексиминный ПКБ.

Другой путь состоит в том, чтобы ограничиться более слабым понятием представления ПКБ с помощью ФКП. Скажем, что ФКП W *слабо представляет* ФКП R, если

$$W(u) > W(v) \quad \Rightarrow \quad u\,P\,v \quad \text{для всех} \quad u,v \in E^N. \qquad (1)$$

В частности, из свойства (1) вытекает

$$u\,R\,v \;\Rightarrow\; W(u) \geq W(v) \quad \text{и} \quad u\,I\,v \;\Rightarrow\; W(u) = W(v).$$

Например, эгалитарная ФКП W_e $(W_e(u) = \min\{u_i\}_{1\leq i\leq n})$ слабо представляет лексиминный ПКБ. Все обычные порядки коллективного благосостояния (в частности все те, которые обсуждаются в этой книге) слабо представляются *непрерывными* ФКП. Очень слабое свойство непрерывности ПКБ является достаточным, чтобы гарантировать возможность такого представления.

Теорема 2.1 (Робертс [1980*b*]). *Предположим, что ПКБ R удовлетворяет следующему условию.*

> *Для всех $u,v \in E^N$, таких, что $u\,P\,v$, существуют u',v', сколь угодно близкие к u,v, такие, что $u' \gg u$, $v' \gg v$ и $u'\,P\,v'$. Аналогично, существуют u'',v'', сколь угодно близкие к u,v, такие, что $u'' \ll u$, $v'' \ll v$ и $u''\,P\,v''$.* (2)

Тогда ПКБ R слабо представим непрерывной ФКП.

Доказательство теоремы 2.1 является предметом упражнения 2.9. В следующих двух разделах мы охарактеризуем две важнейшие ФКП: утилитарную и эгалитарную в терминах аксиом независимости.

2.2 Независимость от масштаба и нуля

Утилитарная ФКП $W_*(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i$ не зависит от индивидуальных нулей полезности. Рассмотрим, например, задачу о размещении объекта (примеры 1.1, 1.2). Пусть объект – это новая почта, которая должна заменить старую почту, расположенную в точке x_0. Естественный нуль полезности соответствует расстоянию от данного города t_i до исходной позиции x_0. Если мы разместим новый объект в точке x, то изменение полезности для города t_i описывается величиной $d(t_i, x_0) - d(t_i, x)$. Это более правильный индекс благосостояния для i, чем $-d(t_i, x)$, поскольку реальное решение состоит в перемещении почты из точки x_0 в точку x. Следовательно, вектор полезностей, связанный с решением x, есть

$$u(x) = (d(t_1, x_0) - d(t_1, x), \ldots, d(t_n, x_0) - d(t_n, x)),$$

а не $v(x) = (-d(t_1, x), \ldots, -d(t_n, x))$ как раньше. Этот пересчет индивидуальных полезностей меняет решение, предлагаемое большинством ПКБ, но не оказывает влияния на предложение по утилитарной ФКП. В самом деле, имеем

$$W(u(x)) = \sum_{i=1}^{n} [d(t_i, x_0) - d(t_i, x)] = \sum_{i=1}^{n} d(t_i, x_0) - \sum_{i=1}^{n} d(t_i, x) =$$
$$= -W(v(x_0)) + W(v(x)).$$

При изменении индивидуальных нулей полезности к коллективной полезности просто прибавляется некоторая константа, а значит, максимизация коллективной полезности даст те же решения.

При рассмотрении следующего примера предположим, что мы сравниваем несколько политик налогообложения по распределению доходов $(r_1, \ldots, r_n)$, остающихся у агентов после выплаты налогов. Облагаемый налогом доход r_i представляет только одну компоненту благосостояния агента. Мы должны еще по крайней мере учесть, хотя бы в агрегированном виде, некоторую величину s_i, отражающую необлагаемые налогом параметры благосостояния агента (пенсии, оплачиваемые отпуска и т.д.). Полное благосостояние агента записывается как $u_i = r_i + s_i$. Конечно, несвязанную с доходом компоненту благосостояния s_i трудно измерить и даже оценить. Однако этого и не требуется, если мы используем утилитарную ФКП, поскольку сравнение распределений доходов $(r_1, \ldots, r_n)$ после уплаты налогов эквивалентно сравнению распределений полных полезностей $(u_1,\ldots,u_n)$ в предположении, что распределение необлагаемых налогом компонент благосостояния $(s_1,\ldots,s_n)$ остается неизменным.

Короче говоря, утилитарная ФКП сравнивает два распределения полезностей по вектору абсолютных изменений полезностей. Это свойство является характеристическим.

Определение 2.1. *ПКБ R* **не зависит от нуля** *(НН), если он удовлетворяет одному из двух эквивалентных свойств.*

(i) Для всех $u,v,w \in E^N$: $u\,R\,v \iff (u+w)\,R\,(v+w)$.

(ii) Для всех $u,v \in E^N$: $u\,R\,v \iff (u-v)\,R\,0$.

В следующем утверждении под непрерывным ПКБ понимается ПКБ R, для которого при всех $u \in E^n$ верхнее контурное множество в точке u ($\{v \mid v\,R\,u\}$) и нижнее контурное множество в точке u ($\{v \mid u\,R\,v\}$) являются замкнутыми множествами в E^n.

Теорема 2.2 (Д'Аспремон и Дживерс [1977]). *Утилитарная ФКП W_* не зависит от нуля. Обратно, независимый от нуля ПКБ слабо представим утилитарной ФКП. В частности, существует единственный независимый от нуля и непрерывный ПКБ. Он представим утилитарной ФКП.*

Доказательство. Пусть R – независимый от нуля ПКБ. Во-первых, он удовлетворяет условию (2). В самом деле, $u\,P\,v$ влечет за собой $(u+\varepsilon e)\,P\,(v+\varepsilon e)$ и $(u-\varepsilon e)\,P\,(v-\varepsilon e)$, где e – вектор $e=(1,\ldots,1)$. Таким образом, мы можем применить теорему 2.1 и слабо представить R с помощью непрерывной ФКП W. Фиксируем вектор w и определим два открытых множества A и B.

$$A=\{u\in E^N \mid W(u)>W(w)\},\quad B=\{u\in E^N \mid W(u)<W(w)\}.$$

Мы утверждаем, что оба множества A и B выпуклы. В самом деле, возьмем два вектора $u^1,u^2 \in A$ и определим $u=(u^1+u^2)/2$. Тогда проверим, что $W(u)>W(w)$, значит, $u\in A$, а следовательно, множество A является выпуклым, поскольку оно открыто. Если выполнено $W(u)\geq W(u^2)$, то очевидно, что $W(u)>W(w)$. В противном случае $W(u)<W(u^2)$, значит, $u^2\,P\,u$. Пользуясь независимостью от нуля, получаем $u^2+(u-u^2)\,P\,u+(u-u^2)$, значит, $u\,P\,u^1$, а потому

$W(u) \geq W(u^1)$ и $W(u) > W(w)$. Доказательство выпуклости множества B аналогично.

Итак, множества A и B являются выпуклыми, открытыми и непересекающимися. По свойству единогласия линия уровня функции W, проходящая через точку w (а именно $E^N \setminus (A \cup B)$), имеет пустую внутренность. Из теоремы о разделяющей гиперплоскости следует, что эта линия уровня являются гиперплоскостью, разделяющей множества A и B. Итак, все кривые безразличия функции W суть гиперплоскости. По свойству анонимности, все они параллельны симплексу (рассмотрите кривые безразличия, проходящие через точки, полученные растяжением вектора e). В свою очередь это означает, что функция W представляет тот же порядок, что и утилитарная ФКП.

QED

В другом варианте теоремы 2.2 рассматривается независимость от индивидуальных масштабов полезности. Соответствующий порядок ПКБ теперь уже зависит не от абсолютных изменений полезности, а от относительных.

Определение 2.2. *Рассмотрим ПКБ R, определенный на* **положительном** *ортанте E^N_{++} ($u_i > 0$ для всех i). Скажем, что R* **не зависит от масштаба** *(НМ), если он обладает одним из двух эквивалентных свойств.*

(i) Для всех $u, v, w \in E^N$: $u \, R \, v \iff (u \cdot w) \, R \, (v \cdot w)$.

(ii) Для всех $u, v \in E^N$: $u \, R \, v \iff (u : v) \, R \, e$,

где мы обозначаем

$u \cdot v = (u_1 v_1, \ldots, u_n v_n)$, $u : v = (u_1 : v_1, \ldots, u_n : v_n)$ и $e = (1, \ldots, 1)$.

Теорема 2.3. *ФКП Нэша W_N (определенная на E^N_{++})*

$$W_N(u) = u_1 u_2 \ldots u_n$$

не зависит от масштаба. Обратно, если ПКБ определен на E^N_{++} и не зависит от масштаба, то он слабо представим ФКП Нэша. В частности, существует единственный ПКБ на E^N_{++}, независимый от масштаба и непрерывный. Он представляется ФКП Нэша.

Доказательство. Каждому ПКБ R, определенному на E^N_{++}, соответствует ПКБ R^* на E^N:

$$u\, R^*\, v \Longleftrightarrow (e^{u_1},\ldots,e^{u_n})\ R\ (e^{v_1},\ldots,e^{v_n}).$$

Проверьте, что R не зависит от масштаба тогда и только тогда, когда R^* не зависит от нуля. Более того, R представляется ФКП Нэша тогда и только тогда, когда R^* представляет классический утилитаризм. Таким образом, теорема 2.3 является следствием из теоремы 2.2.

QED

Замечание 2.1. В предположении анонимности предположение о непрерывности в теореме 2.2 (и теореме 2.3) может быть опущено. Смотри упражнение 2.11.

Пример 2.1. Дележ продуктов

Этот пример является вариантом упражнения 1.5. Два агента получают общий подарок, состоящий из a единиц продукта A и b единиц продукта B. Им нужно поделить подарок между собой. Оба агента имеют линейные предпочтения, но с различными предельными коэффициентами замещения. Точнее

$$u_1(a_1,b_1) = 2a_1 + b_1, \quad u_2(a_2,b_2) = a_2 + 2b_2.$$

Заметим, что мы выбрали нуль полезности в соответствии с нулевым распределением. Другим естественным нулем является физически эгалитарное распределение $a_i = a/2$, $b_i = b/2$; см. упражнение 1.5.

Множество допустимых распределений пары продуктов (a,b) на неотрицательные количества определяется так:

$$a_i, b_i \geq 0, \quad a_1 + a_2 = a \quad \text{и} \quad b_1 + b_2 = b.$$

Максимизируя ФКП Нэша на допустимом множестве, мы выбираем эффективное (оптимальное по Парето) распределение, используя чисто порядковые соображения. В самом деле, ФКП Нэша не зависит от конкретного выбора единицы измерения количества полезности (в противоположность этому см. упражнение 1.5, в котором показывается, как выбор единицы измерения влияет на эгалитарные методы распределения).

Оптимальное распределение определяется как решение задачи

$$\max_{\substack{0 \leq a_1 \leq a \\ 0 \leq b_1 \leq b}} (2a_1 + b_1)((a - a_1) + 2(b - b_1)). \tag{3}$$

На рис. 2.1 показано множество S допустимых векторов полезностей при $a = 1.2$, $b = 1$.

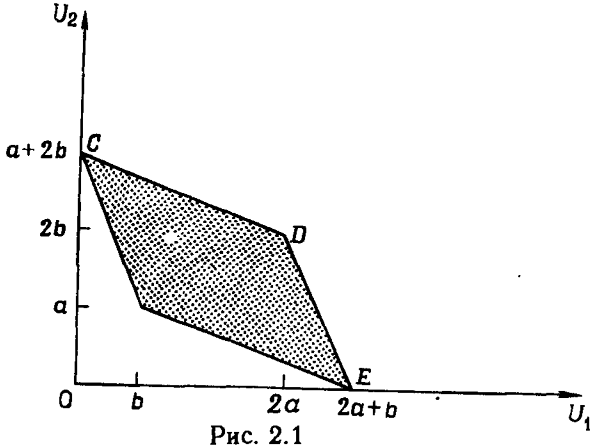


Рис. 2.1

Оптимальные по Парето векторы полезностей располагаются на отрезке $[C, D]$ при $b_1 = 0$ и на отрезке $[D, E]$ при $a_1 = a$. В зависимости от наклона OD, а именно от значения b/a, ФКП Нэша, линии уровня которой симметричны относительно биссектрисы положительного ортанта, может достигать максимального значения между точками C и D, в точке D и между точками D и E. Несложные вычисления приводят к точным формулам.

Случай 1: $2b \le a$. Оптимальный вектор полезностей находится на отрезке $[C, D]$. Оптимальное распределение:

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + 2b), \quad a_2 = \frac{1}{2}(a - 2b); \quad b_1 = 0, \quad b_2 = b.$$

Случай 2: $\frac{1}{2} \le b/a \le 2$. Оптимальный вектор полезностей находится в точке D. Оптимальное распределение:

$$a_1 = a, \quad a_2 = 0; \quad b_1 = 0, \quad b_2 = b.$$

Случай 3: $2a \le b$. Оптимальный вектор полезностей находится на отрезке $[D, E]$. Оптимальное распределение:

$$a_1 = a, \quad a_2 = 0; \quad b_1 = \frac{1}{2}(b - 2a), \quad b_2 = \frac{1}{2}(b + 2a).$$

Проверка и обобщение этих формул является предметом упражнения 2.1.

Вследствие теорем 2.2 и 2.3 не существует ПКБ, который бы не зависел как от нуля, так и от масштаба. Значит, всякий ПКБ зависит от индивидуальных нулей и/или от индивидуальных масштабов. Открывается возможность для двух похожих способов манипулирования, связанных с искусственным увеличением или уменьшением масштаба индивидуальной полезности и повышением или понижением нуля индивидуальной полезности. Рассмотрим обсуждавшуюся ранее задачу о дележе пирога (пример 1.3). Если правило дележа является эгалитарным, то агенту выгодно производить впечатление менее голодного, чем он есть на самом деле (уменьшать масштаб полезности). Например, если брат 1 сможет убедить судью, что его функция полезности $v_1(x) = u_1(x)/2$ (где u_1 – его истинная функция полезности), то он получит половину пирога (поскольку окажется, что у обоих агентов одинаковая функция полезности) и, значит, увеличит свою долю. Аналогично брат 2 получит большую долю, если он сможет убедить всех, что его полезность $v_2 = \lambda u_2$, где λ – любое число, меньшее 1. В противоположность этому, утилитарное правило дележа более выгодно голодному агенту, поэтому в данном случае агенту выгодно увеличивать масштаб полезности (например, если брат 2 утверждает, что он в два раза более голоден, чем на самом деле, то он получит половину пирога).

В упражнении 2.8 мы подробно исследуем феномен выгодности уменьшения (увеличения) индивидуальных масштабов и выгодности повышения (понижения) индивидуальных нулей полезности. Мы определяем эти явления точно и показываем, в частности, что при лексиминном ПКБ агенту всегда выгодно повышать нуль полезности и уменьшать масштаб полезности. При утилитарном ПКБ выгодным является увеличение масштаба полезности (изменение нуля полезности не оказывает никакого эффекта).

2.3 Независимость от общей шкалы полезности

Эгалитарная ФКП и лексиминный ПКБ не зависят от общей шкалы полезности.

Предположим, что мы желаем сравнивать распределения доходов. Нам известно распределение облагаемых налогом доходов $(i_1,\dots,i_n)$, но мы не знаем, какая схема налогообложения будет использоваться. Достаточно ли у нас информации, чтобы сравнивать благосостояние агентов, определяемое как доход за вычетом налога? Отметим, что налоговая схема является возрастающей функцией $r=f(i)$, которая выражает доход после уплаты налога как функцию от дохода до уплаты налога. Большинство ФКП, например утилитарная ФКП, будет приводить к разным результатам для распределений доходов до и после уплаты налога, если налоговая функция f нелинейна. Для эгалитарной ФКП это не так. Она отдает предпочтение u при сравнении с v, если беднейший при распределении u богаче беднейшего при распределении v. После уплаты налогов относительное положение доходов любых двух агентов останется неизменным, поэтому $f(u)$ по-прежнему предпочтительнее, чем $f(v)$.

Определение 2.3. *ПКБ R* **не зависит от общей шкалы полезности** *(НОШ), если для любой возрастающей биекции $f: E \longrightarrow E$ выполнено*

$$u\,R\,v \Leftrightarrow f(u)\,R\,f(v) \quad \text{для всех } u,v \in E^N,$$

где мы обозначаем $f(u)=(f(u_1),\dots,f(u_n))$. Эквивалентным образом R – НОШ, если для любых u,u',v,v' из E^N выполнено

$$[\text{ для любых } i,j \in N,\ u_i \begin{Bmatrix}\geq\\ \leq\end{Bmatrix} v_j \Leftrightarrow u_i' \begin{Bmatrix}\geq\\ \leq\end{Bmatrix} v_j' \ ] \Rightarrow$$
$$[\ u\,R\,v \Leftrightarrow u'\,R\,v'\ ]. \tag{4}$$

Для не зависящего от общей шкалы полезности ПКБ имеют значение только парные сравнения $u_i \begin{Bmatrix}\geq\\ \leq\end{Bmatrix} v_j$, но не имеет значения (количественная) интенсивность сравнения $u_i - v_j$. В этом смысле такой ПКБ является порядковым.

Примерами независимых от общей шкалы полезности ПКБ могут служить лексиминный ПКБ, эгалитарная ФКП, а также обобщающее их понятие рангового диктаторства, которое мы сейчас определим.

Для данного вектора полезностей u из E^N обозначим через u_k^* k-й (начиная с наименьшего) уровень полезности, т.е. k-ю координату вектора u^* (определенного в разд. 1.1). Определим диктаторскую ФКП W_k ранга k:

$$W_k(u) = u_k^* \text{ для всех } u \in E^N.$$

Заметим, что W_1 – эгалитарная ФКП, обозначаемая в гл. 1 как W_e, а $W_n(u) = \max_{1 \le i \le n} u_i$ – ФКП, интересующаяся только благосостоянием наиболее удачливого агента. Другая интересная ФКП рангового диктаторства – диктат середины при $k = (n+1)/2$ (если n нечетно и $k = n/2$ или $n/2 + 1$, если n четно). Здесь средний доход считается репрезентативным.

Теорема 2.4 (Хаммонд [1976], Д'Аспремон и Дживерс [1977]). *Диктаторская ФКП ранга k не зависит от общей шкалы полезности при всех k, $1 \le k \le n$. Обратно, если R – независимый от общей шкалы полезности ПКБ, то существует такое целое k, $1 \le k \le n$, что W_k слабо представляет R.*

Доказательство. Очевидно, что ФКП W_k является НОШ. Для доказательства обратного утверждения фиксируем ПКБ R, удовлетворяющий условию НОШ.

Для каждого k, $1 \le k \le n$, определим систему неравенств $A_k(u,v)$:

$$A_k(u,v): \quad \begin{array}{ll} v_j^* < u_{j+1}^* & \text{для всех } j = 1,\dots,n-1, \\ u_j^* < v_j^* & \text{для всех } j \ne k, \\ v_k^* < u_k^*. & \end{array}$$

Напомним, что u^*, v^* получены из u,v перестановкой координат по возрастанию. Система $A_k(u,v)$ полностью определяет результаты сравнений всех пар v_i^* и u_j^* при произвольных i,j. Следовательно, по свойствам анонимности и НОШ все пары u,v, удовлетворяющие системе $A_k(u,v)$, сравниваются по R одинаково. Значит, выполняется в точиости одно из двух следующих условий:

$$\begin{array}{lll} Q_k: & \text{для всех } u,v & A_k(u,v) \Rightarrow u\,P\,v, \\ \text{не } Q_k: & \text{для всех } u,v & A_k(u,v) \Rightarrow v\,R\,u. \end{array}$$

Дальше доказательство проводится в три этапа.

Шаг 1. По крайней мере одно свойство Q_k выполнено.

В самом деле, рассмотрим следующую последовательность $u^0, u^1, \dots, u^n$ из E^N:

$$u^0 = (n, 2n, \dots, in, \dots, n^2),$$

$$u^1 = (0, 2n+1, \dots, in+1, \dots, n^2+1),$$

$$u_i^k = (i-1)n + k - 1, \qquad \text{если } 1 \le i \le k,$$
$$u_i^k = in + k, \qquad \text{если } k+1 \le i \le n,$$
$$u^n = (n-1,\ 2n-1,\ \dots,\ in-1,\ \dots,\ n^2-1).$$

Можно последовательно проверить справедливость систем

$$A_1(u^0,u^1),\dots,A_k(u^{k-1},u^k),\dots,A_n(u^{n-1},u^n).$$

Следовательно, если ни одно из свойств Q_k не выполняется, то получаем

$$A_k(u^{k-1},u^k) \Rightarrow u^k \, R \, u^{k-1} \quad \text{для всех } k=1,\dots,n.$$

Из транзитивности R отсюда получаем $u^n R u^0$. Поскольку u^0 превосходит по Парето u^n, то, по свойству единогласия, имеем $u^0 P u^n$. Это противоречие доказывает шаг 1.

Шаг 2. Справедливо не более одного свойства Q_k.

Предположим, например, что одновременно выполнены Q_2 и Q_5 (доказательство для общего случая с Q_k и $Q_{k'}$ аналогично, только придется использовать более громоздкие обозначения). Рассмотрим три вектора u, v, w, такие, что

$$u^* = (1,5,7,10,13,16,\dots), \qquad u_i^* = 16 + (i-6) \text{ при } i \ge 6,$$
$$v^* = (2,4,8,11,15,17,\dots), \qquad v_i^* = 17 + (i-6) \text{ при } i \ge 6,$$
$$w^* = (3,6,9,12,14,18,\dots), \qquad w_i^* = 18 + (i-6) \text{ при } i \ge 6.$$

Проверим, что выполнена система $A_2(u,v)$, в то время как $u P v$ (по Q_2) и что справедлива система $A_5(u,w)$, в то время как $v P w$ (по Q_5). С другой стороны, w^* превосходит по Парето u^*. Так что по анонимности и единогласию мы должны иметь $w P u$. Противоречие.

Шаг 3. В силу шагов 1 и 2 выполняется ровно одно свойство, скажем Q_k, а другие свойства Q_j, $j \ne k$ не выполнены. Докажем тогда, что диктаторская ФКП W_k ранга k слабо представляется R, т.е.

$$v_k^* < u_k^* \Rightarrow u \, P \, v \qquad \text{для всех } u, v.$$

Идея состоит в том, чтобы сконструировать предпочтение для пары u,v так, чтобы $u P v$, причем $v_k^* < u_k^*$, в то время как в любом другом сравнении v предпочтительнее u:

$$u_1^* \leq \ldots \leq u_{k-1}^* < v_1^* \leq \ldots \leq v_k^* < u_k^* \leq \ldots \leq u_n^* < v_{k+1}^* \leq \ldots \leq v_n^*. \tag{5}$$

Раз это получено, рассмотрим пару u', v', для которой $u_k'^* > v_k'^*$. Мы можем увеличить по Парето v' до вектора v'' и в то же самое время уменьшить по Парето вектор u' до вектора u''. Таким образом, мы получим конфигурацию (5) для u'' и v''. По НОШ и в силу $u P v$ имеем $u'' P v''$ и по единогласию получаем $u' P u''$, $v'' P v'$.

Осталось сконструировать пару u,v. Для простоты обозначений предположим, что $k = 3$, $n = 5$. Рассмотрим следующую последовательность:

$$
\begin{aligned}
&u = (3,5,14,16,17),\\
&u^1 = (1,4,13,15,23),\\
&u^2 = (0,2,12,19,22),\\
&u^3 = (1,3,11,21,23),\\
&u^4 = (0,8,10,19,22),\\
&v = (6,7,9,18,21).
\end{aligned}
$$

Выполнено $A_5(u^1,u)$, следовательно, $u R u^1$, по не Q_5. Далее выполнено $A_4(u^2,u^1)$, следовательно, $u^1 R u^2$, по не Q_4. Далее $A_3(u^2,u^3)$, следовательно, $u^2 P u^3$ по Q_3. Далее $A_2(u^4,u^3)$, следовательно, $u^3 R u^4$ по не Q_2. Наконец, $A_1(v,u^4)$, следовательно, $u^4 R v$ по не Q_1. Значит, $u P v$, и имеет место (5), что и требовалось.

Внимательный читатель без труда обобщит эту конструкцию для произвольных k и n.

QED

Заметим, что теорема 2.4 не дает характеризации эгалитарной ФКП: аксиома НОШ выделяет n различных ФКП, некоторые из них весьма непривлекательны, вроде диктаторской ФКП W_n ранга n. Ниже, в разд. 2.5 мы увидим, что из семейства W_k, $1 \leq k \leq n$, только эгалитарная ФКП W_1 уменьшает неравенство (см. свойство (9)). Это и дает, в свою очередь, характеризацию эгалитаризма.

2.4 Сепарабельность

Предположим, что в заданном сообществе $N = \{1,2,3,4\}$ перераспределение благосостояния касается только агентов 1 и 2. Можем ли мы судить о благосостоянии (т.е. сказать, лучше ли для сообщества в целом такое изменение), не зная фиксированных уровней благосостояния агентов 3 и 4?

При условии сепарабельности – да. Другими словами, сравнение благосостояния не зависит от нерассматриваемых агентов.

Определение 2.4. *Для заданных сообщества N и ПКБ R на E^N скажем, что порядок R является сепарабельным, если для любого собственного непустого подмножества T множества N и любых векторов полезностей u, v, u', v' выполнено*

$$\begin{aligned}&\{(u_i = u_i',\ v_i = v_i' \text{ для всех } i \in T) \text{ и}\\ &(u_j = v_j,\ u_j' = v_j' \text{ для всех } j \in N \setminus T)\} \Rightarrow\\ &\qquad\qquad \{u\,R\,v \iff u'\,R\,v'\}.\end{aligned} \tag{6}$$

Более компактная форма записи такова:

$$(u_T u_{N\setminus T})\ R\ (v_T u_{N\setminus T}) \iff (u_T v_{N\setminus T})\ R\ (v_T v_{N\setminus T}) \tag{7}$$

(здесь мы обозначаем через u_T T-проекцию вектора u и через $u_{N\setminus T}$ его $N\setminus T$-проекцию).

Сепарабельность означает информационную децентрализацию: ПКБ может быть успешно ограничен на любые подмножества сообщества N. В самом деле, эквивалентная формулировка определения 2.4 явным образом использует ПКБ, определенный на всех подмножествах N; см. упражнение 2.3.

Основные примеры сепарабельных ПКБ получаются из сепарабельно аддитивных ФКП. *Сепарабельно аддитивная* ФКП может быть записана в виде:

$$W(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(u_i),$$

где α – некоторая возрастающая действительная функция. Например, ПКБ, представленный ФКП Нэша (на E_{++}^N), сепарабелен, поскольку его также представляет сепарабельно аддитивная ФКП $W(u) = \sum_{i=1}^{n} \log u_i$. Но не все сепарабельные ПКБ могут быть представлены (хотя бы слабо) сепарабельно аддитивными ФКП.

Лексиминный порядок сепарабелен. Тем не менее эгалитарная ФКП не представляет сепарабельный ПКБ. В самом деле, обозначим через R лексиминный ПКБ и предположим, что

$(u_T u_{N\setminus T})\, R\, (v_T u_{N\setminus T})$. Тогда u_T^* лексикографически превосходит или безразлично с v_T^*, поэтому $(u_T v_{N\setminus T})\, R\, (v_T v_{N\setminus T})$. С другой стороны, рассмотрим эгалитарную ФКП. Имеем $W_e(2,3,4) < W_e(3,3,4)$, но $W_e(2,3,1) = W_e(3,3,1)$, значит, соответствующий ПКБ несепарабелен (возьмите $T = \{1\}$).

Эгалитарная ФКП нарушает сепарабельность не так уж сильно. При выполнении свойства (6) мы не можем получить $u\, P\, v$ и $v'\, P\, u'$. Для того чтобы найти явное противоречие условию (6), рассмотрим диктат середины, введенный в разд. 2.3. Возьмем, например, $n = 3$, тогда $W_2(u) = u_2^*$. Имеем $W(0,2,3) > W(0,1,4)$, но $W(5,2,3) < W(5,1,4)$, что противоречит условию (6) при $T = \{2,3\}$.

Теорема 2.5 (Дебре [1960], Горман [1968]). *Пусть $n \geq 3$. Тогда сепарабельный и непрерывный ПКБ представим сепарабельно аддитивной и непрерывной ФКП.*

Эта теорема является вариантом общей теоремы о сепарабельных порядках предпочтений на E^N (без предположений об анонимности и единогласии). Ее доказательство трудное, и мы не станем приводить даже набросок. Интересующийся читатель может обратиться к Блэкорби, Примон, Рассел [1978].

При некоторых дополнительных слабых свойствах независимости аксиома сепарабельности выделяет небольшое подмножество ФКП.

Определение 2.5

(*a*) *Рассмотрим порядок коллективного благосостояния R на E^N. Скажем, что R* **не зависит от общего нуля полезности,** *если для любых $u, v \in E^N$ и любых $\lambda \in E$ выполнено*

$$u\, R\, v \iff (u + \lambda e)\, R\, (v + \lambda e),$$

где вектор $e = (1,\ldots,1)$ имеет все координаты равные 1.

(*b*) *Рассмотрим порядок коллективного благосостояния R на E^N_{++}. Скажем, что R* **не зависит от общего масштаба,** *если для любых $u, v \in E^N_{++}$ и любого $\lambda > 0$ выполнено*

$$u\, R\, v \iff (\lambda u)\, R\, (\lambda v).$$

При независимости от общего масштаба полезности не имеет значения измеряем ли мы доход в долларах или центах, лишь бы доход всех агентов измерялся в одних и тех же единицах. Если порядок коллективного благосостояния не зависит от общего нуля полезности, то мы можем одинаковым образом сравнивать распределения доходов и их части при условии отсчета от некоторого единого прожиточного минимума.

Теорема 2.6 (Робертс [1980*b*]). *Предположим, что сообщество N содержит хотя бы трех агентов.*

(*a*) *Пусть R непрерывный и сепарабельный ПКБ на E^N. Тогда R не зависит от общего нуля полезности в том и только том случае, если он может быть представлен одной из следующих ФКП:*

(*i*) $\sum_{i=1}^{n} e^{pu_i}$ *при* $p > 0$,

(*ii*) $-\sum_{i=1}^{n} e^{pu_i}$ *при* $p < 0$,

(*iii*) $\sum_{i=1}^{n} u_i$.

(*b*) *Пусть R – непрерывный и сепарабельный ПКБ на E^N_{++}. Тогда R не зависит от общего масштаба полезности в том и только в том случае, если он может быть представлен одной из следующих ФКП:*

(*i*) $\sum_{i=1}^{n} u_i^q$ *при* $q > 0$,

(*ii*) $-\sum_{i=1}^{n} u_i^q$ *при* $q < 0$,

(*iii*) $\sum_{i=1}^{n} \log u_i$.

Набросок доказательства.

Утверждения (*a*) и (*b*) эквивалентны так же, как и теоремы 2.2 и 2.3. Приведем набросок доказательства утверждения (*b*). По теореме 2.5 R представим ФКП вида $W(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(u_i)$, где α – непрерывная возрастающая функция на E_{++}.

Вначале можно показать, что для любого числа агентов n^1 ФКП $W^1(u^1) = \sum_{i=1}^{n^1} \alpha(u^1)$, определенная для сообщества размера n^1, также не зависит от общего масштаба полезности.

Далее рассмотрим пять положительных чисел u_1, u_1^1, u_2, u_2^1 и λ и предположим, что

$$u_1 < u_1^1,\ u_2 > u_2^1 \quad \text{и} \quad \frac{\alpha(\lambda u_1) - \alpha(\lambda u_1^1)}{\alpha(u_1) - \alpha(u_1^1)} \neq \frac{\alpha(\lambda u_2) - \alpha(\lambda u_2^1)}{\alpha(u_2) - \alpha(u_2^1)}. \tag{8}$$

Предположим, например, что

$$[\alpha(u_1)-\alpha(u_1^1)]/[\alpha(u_2)-\alpha(u_2^1)] = -\frac{2}{3}.$$

Тогда получаем

$$W(u_1,u_1,u_1,u_2,u_2) = W(u_1^1,u_1^1,u_2^1,u_2^1,u_2^1).$$

Но из (8) следует, что

$$W(\lambda u_1,\lambda u_1,\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_2) \neq W(\lambda u_1^1,\lambda u_1^1,\lambda u_2^1,\lambda u_2^1,\lambda u_2^1)$$

в противоречии с независимостью от общего масштаба. Если

$$[\alpha(u_1)-\alpha(u_1^1)]/[\alpha(u_2)-\alpha(u_2^1)]$$

– любое отрицательное число, то мы можем получить противоречие аналогичным образом (по непрерывности можно всегда считать это отношение рациональным числом).

Поскольку (8) приводит к противоречию, то выполнено следующее функциональное уравнение

$$\alpha(\lambda u)-\alpha(\lambda v) = \beta(\lambda)\cdot(\alpha(u)-\alpha(v)).$$

Непрерывные решения этого уравнения известны (Акцель [1966]):

$$\alpha(u) = C\log u + D \quad \text{или} \quad \alpha(u) = C\cdot u^q + D$$

при некоторых действительных C, D, q. Это, в свою очередь, доказывает утверждение (b).

QED

Два семейства ФКП, описанные в утверждениях (a) и (b), имеют только один общий элемент – утилитарную ФКП $\sum_{i=1}^{n} u_i$. Тем не менее, при p и q, стремящихся к $-\infty$, ПКБ R_p (представленный по ($a.ii$)) и R^q (представленный по ($b.ii$)) "сходятся" к лексминному ПКБ; см. упражнение 2.4.

2.5 Сокращение неравенства

Эгалитарная программа осуществляет перераспределение благосостояния от "богатого" к "бедному" (по крайней мере пока не возникает дилемма равенство – эффективность). Утилитарная программа безразлична к таким перераспределениям. Между двумя этими крайними случаями имеется весьма обширный класс ПКБ, каждый из которых до некоторой степени обращает внимание на перераспределение от богатого к бедному, но также стремится поднять и общую сумму полезностей.

Принцип передачи Пигу – Дальтона гласит, что передача полезности от одного агента другому, которая не увеличивает разрыв в их благосостоянии, не может уменьшить коллективного благосостояния. Для формального определения этого принципа рассмотрим ПКБ R. Скажем, что порядок R удовлетворяет принципу Пигу – Дальтона, если для любых двух агентов i,j и любых двух векторов $u,v \in E^N$ выполнено следующее условие:

$$\{u_k = v_k \text{ для всех } k \neq i,j,\ u_i + u_j = v_i + v_j \text{ и } |v_i - v_j| < |u_i - u_j|\} \Rightarrow \{v\,R\,u\}. \qquad (9)$$

Строгий принцип Пигу – Дальтона требует, чтобы вектор v был строго предпочтительнее u при тех же предположениях. Если ПКБ удовлетворяет принципу Пигу – Дальтона (строгому принципу Пигу – Дальтона), то будем говорить, что он *не увеличивает* (*сокращает*) *неравенство*.

Рассмотрим для примера сепарабельно аддитивную ФКП $W(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(u_i)$. Какое свойство функции α соответствует ПКБ, сокращающему неравенство? Запишем принцип Пигу – Дальтона:

$$\{u_i + u_j = v_i + v_j \text{ и } |v_i - v_j| < |u_i - u_j|\} \Rightarrow \{\alpha(u_i) + \alpha(u_j) \leq \alpha(v_i) + \alpha(v_j)\}.$$

Это эквивалентно следующему условию:

$$\text{для всех } x < y \text{ и любого } \varepsilon > 0: \alpha(x + \varepsilon) - \alpha(x) \geq \alpha(y+\varepsilon) - \alpha(y)$$

(в самом деле, положим $u_i = x$, $u_j = y + \varepsilon$, $v_i = x + \varepsilon$, $v_j = y$). Последнее условие есть просто вогнутость функции α. Таким образом, для того чтобы ФКП $\sum_{i=1}^{n} \alpha(u_i)$ не увеличивала (сокращала) неравенство, необходимо и достаточно, чтобы функция α была вогнутой (строго вогнутой).

Рассмотрим, например, ФКП, определенные в теореме 2.6:

$$W_p(u) = \operatorname{sgn}(p) \sum_{i=1}^{n} e^{pu_i} \qquad \text{при соглашении } W_0(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i,$$

$$W^q(u) = \operatorname{sgn}(q) \sum_{i=1}^{n} u_i^q \qquad \text{при соглашении } W^0(u) = \sum_{i=1}^{n} \log u_i.$$

Функция $\alpha(x) = \operatorname{sgn}(p) \cdot e^{px}$ вогнута при $p < 0$ и выпукла при $p > 0$. Аналогично, функция $\alpha(x) = \operatorname{sgn}(q) \cdot x^q$ выпукла при $q > 1$ и вогнута прн $q < 0$ или при $0 < q < 1$. Таким образом, W_p не увеличивает (сокращает) неравенство при $-\infty < p \leq 0$ ($-\infty < p < 0$) и W^q не увеличивает (сокращает) неравенство при $-\infty < q \le 1$ $(-\infty < q < 1)$. Заметим, что эти два однопараметрических семейства (W_p при $-\infty < p \le 0$ и W^q при $-\infty < q \le 1$) соединяются по утилитарной ФКП на одном конце (при $p = 0$ и $q = 1$) и на лексиминном ПКБ на другом конце (когда p и q стремятся к $-\infty$; см. упражнение 2.4). Можно легко проверить, что лексиминный ПКБ сокращает неравенство (и что эгалитарная ФКП его не увеличивает).

Приведем еще один пример использования принципа Пигу – Дальтона. Рассмотрим семейство рангового диктаторства:

$$W_k(u) = u_k^* , \quad k = 1,\dots,n.$$

Эгалитарная ФКП W_1 не увеличивает неравенство. Любая другая ФКП рангового диктаторства нарушает принцип Пигу – Дальтона.

Например, W_2 нарушает этот принцип. Если $n = 2$, то $W_2(u) = \max\{u_1, u_2\}$, поэтому передача от богатого к бедному всегда уменьшает W_2. Для $n \ge 3$ рассмотрим вектор полезностей $u = (1,3,4,4,\dots,4)$. Передача от агента 2 агенту 1 изменяет этот вектор на вектор $v = (2,2,4,\dots,4)$. Значение W_2 уменьшается от 3 до 2. Аналогично доказывается, что W_k нарушает принцип при $k \ge 2$. Напротив, W_1 удовлетворяет принципу Пигу – Дальтона, поскольку перераспределение, связанное с уменьшением неравенства, никогда не может ухудшить позицию агента, имеющего самый низкий уровень благосостояния.

Таким образом, в качестве следствия из теоремы 2.4 получаем следующее утверждение: если ПКБ не зависит от общей шкалы полезности и не увеличивает неравенство, то он слабо представим эгалитарной ФКП.

Наш следующий результат показывает, что принцип Пигу – Дальтона выполнен не только для сепарабельно аддитивных ФКП, но и для многих других ФКП.

Лемма 2.2. *Предположим, что ФКП W дифференцируема. Тогда она удовлетворяет принципу Пигу – Дальтона в том и только том случае, если*

$$\text{для всех } u \in E^N: \; u_i \le u_j \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial u_j}(u) \le \frac{\partial W}{\partial u_i}(u). \tag{10}$$

Доказательство. В самом деле, условие (9) означает, что для всех $u \in E^N$ и для всех $i,j \in N$ выполнено

$$\{u_i < u_j,\ \varepsilon \le \tfrac{1}{2}(u_j - u_i)\} \Rightarrow \{W(u) \le W(v), \text{ где}$$
$$v_i = u_i + \varepsilon,\ v_j = u_j - \varepsilon,\ v_k = u_k \text{ для всех } k \ne i,j\}.$$

Поскольку W дифференцируема, имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon}(W(v) - W(u))_{\varepsilon=0} = \frac{\partial W}{\partial u_i}(u) - \frac{\partial W}{\partial u_j}(u).$$

Значит, из (9) следует (10). Обратное утверждение проверяется так же просто.

QED

Сейчас мы выведем два главных способа характеризации принципа Пигу – Дальтона. Первый из них связан с частичным порядком на перераспределениях полезности, более слабым, чем порядок Парето.

Определение 2.6. *Для вектора полезностей $u \in E^N$ определим* **кривую Лоренса**, *а именно вектор*

$$L(u) = (u_1^*, u_1^* + u_2^*, \ldots, u_1^* + u_2^* + \ldots + u_n^*) \text{ или}$$
$$[L(u)]_k = \sum_{i=1}^{k} u_i^* \quad \text{для всех } k.$$

Первая координата кривой Лоренса является наименьшим уровнем полезности, сумма двух самых низких уровней полезности – ее вторая координата и т.д. Координата n – это просто сумма всех полезностей (поскольку $\sum_{i=1}^{n} u_i^* = \sum_{i=1}^{n} u_i$).
Если рассматривать ее как кривую $k \longrightarrow u_1^* + \ldots + u_k^*$, то для каждого k она дает суммарную полезность k беднейших агентов.

Как влияет перераспределение полезностей, описанное в принципе Пигу – Дальтона, на кривую Лоренса? Возьмем $i < j$ и предположим, что $u_i^* < u_j^*$. Увеличим затем u_i^* до $u_i^* + \varepsilon$, одновременно понижая u_j^* до $u_j^* - \varepsilon$, где ε выбрано так, чтобы $\varepsilon < \frac{1}{2}|u_j^* - u_i^*|$. Ниже приведен пример, в котором при перераспределении отнимается 4 единицы полезности от u_7^* и передается u_2^* (итак, $i = 2$, $j = 7$, $\varepsilon = 4$). Обозначим через v вектор, полученный после перераспределения

$u^* = (2,6,8,9,11,14,16,18) \quad \Rightarrow \quad L(u) = (2,8,16,25,36,50,66,84),$
$v = (2,10,8,9,11,14,12,18) \quad \Rightarrow \quad L(v) = (2,10,19,29,40,52,66,84).$

Таким образом, после перераспределения каждая координата кривой Лоренса либо поднимается, либо остается неизменной. Это свойство общее: любая передача Пигу – Дальтона поднимает кривую Лоренса. Интересно, что справедливо и обратное.

Лемма 2.3. *Скажем, что вектор u* **доминирует по Лоренсу** *вектор v, если его кривая Лоренса L(u) превосходит (по Парето) кривую Лоренса L(v):*

$$L(u) > L(v) \iff \{\text{для всех } k\text{: } \sum_{i=1}^{k} u_i^* \geq \sum_{i=1}^{k} v_i^*,$$

причем хотя бы при одном k неравенство строгое}.

Если u доминирует по Парето v или u получен из v передачей Пигу – Дальтона, то u доминирует по Лоренсу v. Обратно, если u доминирует по Лоренсу v, то можно подобрать последовательность передач Пигу – Дальтона и улучшений Парето, позволяющую из v получить u.

Следовательно, ПКБ R не увелнчивает неравенство (сокращает) тогда и только тогда, когда он согласован с доминированием Лоренса: для всех u,v, таких, что $L(u) > L(v) \Rightarrow u\,R\,v$ $(u\,P\,v)$. Доказательство леммы 2.3 является предметом упражнения 2.7.

Последовательность, упомянутая в лемме 2.3, для каждого сокращающего неравенство ПКБ приведет к оптимальному по Лоренсу элементу, т.е. к вектору, который не доминируется по Лоренсу никаким другим допустимым вектором для любого множества допустимых векторов полезностей. Оптимумы Лоренса составляют подмножество множества Парето, часто небольшое подмножество, как показывают два наших следующих примера.

Пример 2.2. Оптимумы Лоренса при двух агентах

Когда $n = 2$, крнвая Лоренса есть просто

$$L(u_1, u_2) = (\min\{u_1, u_2\},\ u_1 + u_2).$$

Следовательно, вектор полезностей оптимален по Лоренсу тогда и только тогда, когда он не может быть улучшен по утилитарной ФКП без ухудшения по эгалитарной ФКП (и наоборот).

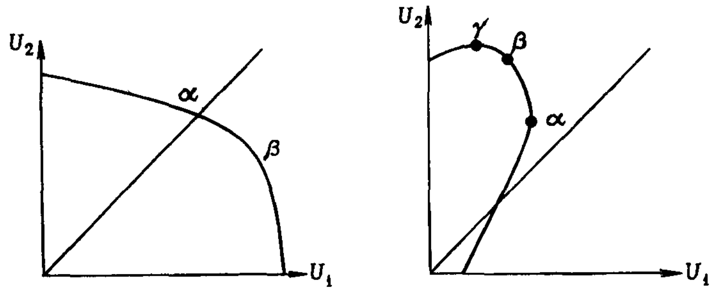


Рис. 2.2

На рис. 2.2 показаны типичная конфигурация (без дилеммы равенство – эффективность и при ней) для выпуклого допустимого множества S и соответствующие оптимумы Лоренса и Парето.

Оптимумы Лоренса расположены между α (эгалитарным исходом) и β (утилитарным исходом). Оптимумы Парето помечены жирной линией на левом рисунке и находятся между γ и α на правом.

Пример 2.3. Оптимумы Лоренса в задаче размещения

Пять городов расположены на отрезке [0,1] в точках 0, 1/4, 3/4, 3/4 и 1. Каждое размещение на отрезке [0,1] допустимо и каждое оптимально по Парето. Эгалитарное размещение есть точка 1/2, а утилитарное – точка 3/4 (см. упражнение 1.1). Оптимумы Лоренса расположены между 1/2 и 3/4 (включая оба конца).

В самом деле, никакое размещение между этими двумя не доминируемо по Лоренсу: эгалитарная ФКП (первая компонента кривой Лоренса) уменьшается, когда мы сдвигаемся (немного) вправо, а утилитарная ФКП (последняя компонента кривой Лоренса) уменьшается, когда мы сдвигаемся (немного) влево.

С другой стороны, любое размещение вне отрезка [1/2,3/4] доминируемо по Лоренсу. В самом деле, любое размещение из [0,1/2) доминируется 1/2, а любое размещение из (3/4,1] доминируется 3/4. Эти утверждения получаются в результате несложной проверки. Например, возьмем размещение x из отрезка $[1/4,3/8]$. Запишем вектор полезностей, *взятый со знаком минус в убывающем порядке*:

$$u^*(x) = (1 - x, \tfrac{3}{4} - x, \tfrac{3}{4} - x, x, x - \tfrac{1}{4}),$$

тогда кривая Лоренса будет иметь вид

$$L(x) = (1 - x, \tfrac{7}{4} - 2x, \tfrac{10}{4} - 3x, \tfrac{10}{4} - 2x, \tfrac{9}{4} - x).$$

Сравним с размещением в $1/2$

$$u^*(\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}), \quad L(\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4})$$

и установим, что любая компонента $L(x)$ расположена выше (иногда строго выше) соответствующей компоненты $L(1/2)$. Конечно, поскольку полезности взяты с обратным знаком, то вектор оптимален по Лоренсу, когда его кривая Лоренса не может быть *уменьшена*. Аналогично для размещения x из $[3/8, 1/2]$:

$$u^*(x) = (1 - x, x, \tfrac{3}{4} - x, \tfrac{3}{4} - x, x - \tfrac{1}{4}),$$
$$L(x) = (1 - x, 1, \tfrac{7}{4} - x, \tfrac{10}{4} - 2x, \tfrac{9}{4} - x).$$

Мы предлагаем читателю провести аналогичные вычисления для отрезков $[0,1/8]$, $[1/8,1/4]$, $[3/4,7/8]$ и $[7/8,1]$.

Отметим, что результат примера 2.3 не является общим: для задачи размещения на отрезке $[0,1]$ оптимумы Лоренса не всегда расположены между эгалитарным и утилитарным решениями (см. упражнение 2.5).

Второй способ характеризации принципа Пигу – Дальтона носит технический характер. Он утверждает, что выпуклые (строго выпуклые) ПКБ не увеличивают (сокращают) неравенство. Скажем, что $n \times n$ матрица $Q = [q_{ij}]$ является дважды стохастической, если $q_{ij} \geq 0$, $\sum_i q_{ij} = \sum_j q_{ij} = 1$ при всех i,j. Матрица перестановки – это такая дважды стохастическая матрица, у которой $q_{ij} = 0$ или 1 при всех i,j.

Теорема 2.7 (Харди, Литтлвуд и Пойа [1934]). *ПКБ R не увеличивает неравенство тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему условию*:

при всех $u \in E^N$ и для любой дважды стохастической $n \times n$ матрицы Q выполнено $(Qu)\, R\, u$. (11)

Более того, ПКБ R сокращает неравенство тогда и только *тогда, когда выполнено* $(Qu)\,P\,u$ *для всех* u *с полностью различными компонентами и для всех дважды стохастических матриц* Q, *не являющихся матрицами перестановок.*

Следствие. *Скажем, что ПКБ* R *выпуклый (строго выпуклый), если его верхние контурные множества* $\{v|\ \ v\,R\,u\}$ *всегда выпуклы (строго выпуклы). Выпуклый ПКБ не увеличивает неравенство. Строго выпуклый ПКБ сокращает неравенство.*

Мы опускаем доказательство теоремы 2.7. Оно состоит в том, чтобы показать, что для всех u, v, $L(v) \geq L(u)$ выполнено тогда и только тогда, когда $v \geq Qu$ для некоторой дважды стохастической матрицы. Следствие справедливо в силу того, что любая дважды стохастическая матрица является выпуклой комбинацией матриц перестановок. Полное доказательство можно найти в Фостер [1985]. Приложение этого математического результата для сравнения распределений впервые было предложено Колмом [1968] и Аткинсоном [1970].

ПКБ, удовлетворяющий условию (11), также называется выпуклым по Шуру. Рис. 2.3 показывает, что контур выпуклого по Шуру ПКБ может быть невыпуклым.

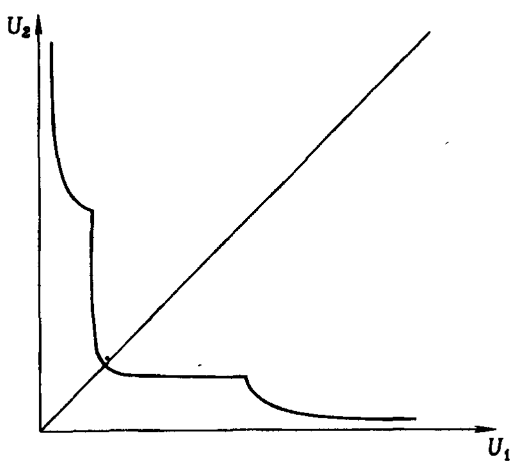


Рис. 2.3

2.6 Индексы неравенства

Индекс неравенства является математической трансформацией ФКП, которая позволяет выразить потери благосостояния в результате неравенства в распределении полезностей.

Начнем с ПКБ R, сокращающего неравенство. Для любого положительного вектора полезностей u определим эквивалентное ему равное распределение полезностей с уровнем $\varepsilon(u)$ следующим образом:

$$(\varepsilon(u)\cdot e)\ I\ u$$

(где e – вектор $(1,\ldots,1)$). Далее определим индекс неравенства J, связанный с R. Обозначим через $\bar{u}=(\sum_{i=1}^{n}u_i)/n$ среднюю полезность в распределении u, тогда

$$J(u)=1-\frac{\varepsilon(u)}{\bar{u}} \quad \text{для всех } u\in E^N_{++}. \tag{12}$$

Отметим, что J определеляется только для положительных распределений полезности u. Поскольку R сокращает неравенство, то распределение $\bar{u}\cdot e$ предпочтительнее или безразлично с u. Следовательно,

$$\{(\bar{u}\cdot e)\ R\ u,\ u\ I\ (\varepsilon(u)\cdot e)\}\ \Rightarrow\ (\bar{u}\cdot e)\ R\ (\varepsilon(u)\cdot e)\ \Rightarrow\ \bar{u}\geq\varepsilon(u).$$

Таким образом, $J(u)$ неотрицательно для всех u. Более того, $J(u)=0$ только при $\varepsilon(u)=\bar{u}$, что возможно только если u – равное распределение $(u=\bar{u}\cdot e)$, поскольку R сокращает неравенство. Наконец, $J(u)$ ограничено сверху 1, поскольку $\varepsilon(u)$ неотрицательно (вектор u положителен). Суммируем сказанное:

$$0\leq J(u)\leq 1 \quad \text{для всех } u, \text{ причем}$$
$$J(u)=0 \text{ тогда и только тогда, когда } u=\bar{u}\cdot e.$$

Теория индексов неравенства параллельна теории ПКБ. В самом деле, пусть дан индекс J, тогда мы можем восстановить функцию ε из (12), и ε будет ФКП, представляющей R. Полнокровное развитие теории индексов неравенства началось после пионерских работ Колма [1968], Аткинсона [1970] и Сена [1973]. Большинство ее результатов может быть выражено также на языке ПКБ. Мы не претендуем на систематический обзор постоянно растущего потока литературы по этому вопросу. Заинтересованный читатель может посмотреть недавние обзоры Фостера [1985] и Шоррокса [1985].

В оставшейся части раздела мы просто определим два наиболее популярных индекса: индексы Аткинсона и индекс Джини. Мы также обсудим сильный результат по характеризации, основанный на аксиоме сепарабельности.

Поскольку индекс неравенства J представляет сокращающий неравенство ПКБ, то он будет уменьшаться в результате передачи Пигу – Дальтона (проверьте, что если v получено из u передачей Пигу – Дальтона, то $\varepsilon(v)$ больше, чем $\varepsilon(u)$). Наконец, мы будем предполагать, что наши индексы не меняются при общем изменении масштаба полезностей (для этого нужно предположить, что соответствующий ПКБ не зависит от общего масштаба). Подводя итог, скажем, что индекс неравенства есть функция J, определенная на E^N_{++} и удовлетворяющая условию

$$\begin{aligned} &0 \le J(u) \le 1, \text{ причем } J(u) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } u = \bar{u}\cdot e, \\ &J(v) < J(u), \text{ если } v \text{ получено из } u \text{ передачей Пигу – Дальтона}, \\ &J(\lambda u) = J(u) \text{ для всех положительных } \lambda. \end{aligned} \tag{13}$$

Пример 2.4. Индексы Аткинсона

Рассмотрим ФКП, охарактеризованные в теореме 2.6(b) условиями сепарабельности и независимости от общего масштаба. Ограничимся рассмотрением тех из них, которые сокращают неравенство, а именно

$$\begin{aligned} &W_q(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i^q, && 0 < q < 1, \\ &W_q(u) = -\sum_{i=1}^{n} u_i^q, && q < 0, \\ &W_0(u) = \sum_{i=1}^{n} \log u_i. \end{aligned}$$

Соответствующие меры неравенства получаются непосредственными вычислениями из (12):

$$J_q(u) = 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_i}{\bar{u}}\right]^q\right]^{1/q}, \quad 0 < q < 1 \text{ или } q < 0, \tag{14}$$

$$J_0(u) = 1 - \left[\prod_{i=1}^{n}\frac{u_i}{\bar{u}}\right]^{1/n}.$$

Пример 2 5 Индекс неравенства Джини

Рассмотрим вектор полезностей u и соответствующую кривую Лоренса $L(u)$ Заметим, что кривая Лоренса, соответствующая равному распределению $u = \bar{u}\cdot e$, является прямой линией $k \longrightarrow k\bar{u}$, в то время как для любого другого вектора кривая Лоренса ограничена сверху этой прямой линией

$$\text{для всех } k \quad \sum_{i=1}^{k} u_i^* \leq k\cdot\bar{u} \tag{15}$$

Чтобы проверить (15), заметим, что $u_j^* \geq (1/k)\sum_{i=1}^{k} u_i^*$ для всех $j \geq k+1$, в то время как

$$n\bar{u} \geq \sum_{i=1}^{k} u_i^* + \sum_{j=k+1}^{n} u_j^* \geq \sum_{i=1}^{k} u_i^* + (n-k)\cdot\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} u_i^*$$

Рассмотрим пример

$$u = (1\ 5, 4, 1, 5, 2\ 5, 5, 3)$$

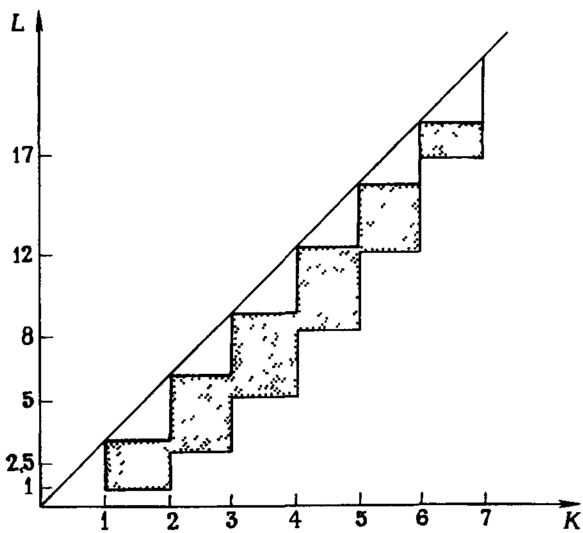


Рис 2 4

Кривая "прямой линии" соответствует верхней ступенчатой функции на рис 2 4 Она выглядит более или менее как прямая линия, когда число агентов растет Нижняя ступенчатая функция представляет $L(u)$

Если распределение слишком неравное (скажем, все агенты, кроме одного, имеют нулевую полезность), тогда кривая Лоренса весьма далека от прямой линии Это наводит на мысль взять *площадь* между прямой линией и кривой Лоренса (заштрихованная часть на рис 2 4) в качестве меры неравенства Чтобы индекс неравенства не превосходил 1, проведем нормировку, поделив эту площадь на площадь под прямой линией Это определяет индекс Джини

$$G(u) = \sum_{k=1}^{n}(k\bar{u} - L(u)_k) \Big/ \left[\frac{1}{2} n \sum_{i=1}^{n} u_i\right]$$

Получим более компактную формулу

$$G(u) = \frac{2}{n^2 \bar{u}} \left[\bar{u} \times \left[\sum_{i=1}^{n} k\right] - \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{k} u_i^*\right]\right] =$$

$$= \frac{2}{n^2 \bar{u}} \left[\frac{n(n+1)}{2}\bar{u} - \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)u_k^*\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(u) = 1 - \frac{1}{n^2 \bar{u}} \left[\sum_{k=1}^{n}(2(n-k)+1)u_k^*\right] \qquad (16)$$

Следовательно, индекс Джини соответствует следующей ФКП

$$W(u) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n}(2(n-k)+1) \cdot u_k^*$$

В самом деле, $W(\lambda \cdot e) = \lambda$ для любого положительного λ, значит $\varepsilon(u) = W(u)$, таким образом, индекс неравенства, соответствующий W в силу (12), есть G

ФКП W является вариантом классического утилитаризма, при котором веса более удачливых агентов убывают линейно в соответствии с возрастанием ранга

Другая полезная формула для индекса Джини такова

$$G(u) = \frac{1}{n^2 \bar{u}} \sum_{1 \le i,j \le n} |u_i - u_j| \qquad (17)$$

С точностью до нормировки этот индекс есть средний разброс полезностей по всем парам агентов Доказательство формулы (17) является предметом упражнения 2 10

Несмотря на привлекательную интерпретацию, индекс Джини имеет существенный недостаток, связанный с тем, что соответствующая ФКП несепарабельна Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующее распределение полезностей у пяти агентов

$$u = (4,11,3,9,8).$$

Его индекс Джини (по (16)):

$$G_5(u) = 1 - \frac{1}{5^2 \times 7}(9\times 3 + 7\times 4 + 5\times 8 + 3\times 9 + 1\times 11) = \frac{6}{25}.$$

Предположим теперь, что произошло перераспределение полезностей между первыми тремя агентами с (4,11,3) до (7,10,1). Общая полезность внутри группы {1,2,3} осталась неизменной, а индекс неравенства в смысле Джини возрос:

$$G_3(4,11,3) = 1 - \frac{1}{3^2 \times 6}(5\times 3 + 3\times 4 + 1\times 11) = \frac{8}{27},$$

$$G_3(7,10,1) = 1 - \frac{1}{3^2 \times 6}(5\times 1 + 3\times 7 + 1\times 10) = \frac{9}{27}.$$

Тем не менее, для сообщества из пяти агентов (два последних остались без изменений) неравенство, опять же в смысле Джини, уменьшилось:

$$v = (7,10,1,9,8),$$

$$G_5(u) = 1 - \frac{1}{5^2 \times 7}(9\times 1 + 7\times 7 + 5\times 8 + 3\times 9 + 1\times 10) = \frac{8}{35}$$

$$\text{и} \quad \frac{8}{35} < \frac{6}{25}.$$

Свойство, которое нам здесь нужно, есть вариант сепарабельности для индексов неравенства. Предположим, что для каждого числа агентов n задан индекс неравенства J_n.

Сепарабельность по подгруппам. Даны два сообщества N, T, причем $T \subset N$, два вектора $u_T, v_T \in E^T_{++}$, такие, что $\bar{u}_T = \bar{v}_T$ и вектор $u_{N\setminus T} \in E^{N\setminus T}_{++}$, тогда

$$J_t(u_T) \geq J_t(v_T) \iff J_n(u_T, u_{N\setminus T}) \geq J_n(v_T, u_{N\setminus T}).$$

Ясно, что если ФКП W сепарабельна на E^N (определение 2.4), то ее ограничения на подмножества N удовлетворяют условию групповой сепарабельности. Например, все индексы Аткинсона (пример 2.4) удовлетворяют свойству групповой сепарабельности. В действительности существуют другие сепарабельные индексы, не только индексы Аткинсона, но их не так много, как это видно из следующей теоремы.

Теорема 2.8 (Шоррокс [1984]). *Для каждого n задан непрерывный индекс J_n, удовлетворяющий* (13). *Более того,* *предположим, что выполнено следующее репликационное свойство*:

для всех n и для всех $u \in E^N_{++}$: $J_{2n}(u,u) = J_n(u)$.

Тогда J_n, $n = 1,2, \ldots,$ *удовлетворяет свойству сепарабельности по подгруппам* **в том и только том случае, если** *они принимают следующий вид*: *для некоторого действительного c и строго возрастающей непрерывной функции f с условием* $f(0) = 0$ *и* $f(x) \le 1$ *для всех x*

$$J_n(u) = f\left[\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{c(c-1)} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{u_i}{\bar{u}}\right]^c - 1\right\}\right]\right], \tag{18}$$

где мы принимаем соглашение

$$\text{при } c = 0: \qquad J_n(u) = f\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \log\left[\frac{\bar{u}}{u_i}\right]\right], \tag{19}$$

$$\text{при } c = 1: \qquad J_n(u) = f\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\bar{u}} \cdot \log\left\{\frac{u_i}{\bar{u}}\right\}\right]. \tag{20}$$

Это семейство индексов неравенства называют мерами энтропии: в самом деле, (19) есть монотонная трансформация энтропии вектора $(1/\bar{u}) \cdot u$.

Теорема 2.8 похожа на теорему 2.6. Если J_n сепарабелен по подгруппам, то любая ФКП W, которой он соответствует, удовлетворяет определению 2.4 в слабой форме, где u_T и v_T имеют одинаковую суммарную полезность. В этом смысле теорема Шоррокса сильнее, чем теорема 2.6.

В заключение проверим, что индексы Аткинсона (пример 2.4) являются частным случаем (18). Возьмем $c < 0$ или $0 < c < 1$. Определим функцию f следующим образом:

$$f(x) = 1 - (c(c-1)x + 1)^{1/c}.$$

Проверим, что f возрастает и непрерывна и что формула (14) следует из формулы (18):

$$J(u) = f\left[\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{c(c-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{u_i}{\bar{u}}\right]^c - 1\right\}\right] = 1 - \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{u_i}{\bar{u}}\right]^c\right]^{1/c}.$$

Для случая $c = 0$ возьмем $f(x) = 1 - e^{-x}$ и применим (19):

$$J(u) = f\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \log\left[\frac{\bar{u}}{u_i}\right]\right] = 1 - \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\bar{u}}\right]^{1/n}.$$

Упражнения

2.1 Дележ продуктов по ФКП Нэша

Обобщим модель из примера 2.1, взяв произвольные линейные предпочтения относительно двух продуктов: $u_i = \alpha_i a_i + \beta_i b_i$, $i = 1,2$ (где a_i – количество продукта A, доставшегося агенту i). Предположим, что все коэффициенты α_i, β_i положительны.

(a) Нуль функции полезности u_i совпадает с нулевым распределением для агента i. Предположим, что $\alpha_2 / \beta_2 < \alpha_1 / \beta_1$, и покажем, что распределение, максимизирующее ФКП Нэша, таково:

если $\alpha_1 / \beta_1 \le a / b$, то $\begin{cases} a_1 = a, \\ b_1 = \frac{1}{2}[b - (\alpha_1 / \beta_1)a], \end{cases}$

если $\alpha_2 / \beta_2 \le b / a \le \alpha_1 / \beta_1$, то $\begin{cases} a_1 = a, \\ b_1 = 0, \end{cases}$

если $b / a \le \alpha_2 / \beta_2$, то $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}[a - (\beta_2 / \alpha_2)b], \\ b_1 = 0. \end{cases}$

(b) Рассмотрим функцию полезности $\bar{u}_i$, представляющую те же предпочтения, но с нулем в точке физически эгалитарного дележа продуктов:

$$\bar{u}_i = \alpha_i(a_i - \tfrac{1}{2}a) + \beta_i(b_i - \tfrac{1}{2}a).$$

Покажите тогда, что в предположении $\alpha_2 / \beta_2 < \alpha_1 / \beta_1$ решение Нэша таково:

если $\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right] \le \frac{b}{a}$, то $\begin{cases} a_1 = a, \\ b_1 = \frac{1}{2}\left[b - \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right]a\right], \end{cases}$

если $\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right]\right]^{-1} \le \frac{b}{a} \le \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right]$, то $\begin{cases} a_1 = a, \\ b_1 = 0, \end{cases}$

если $\frac{b}{a} \le \left[\frac{1}{2}\left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right]\right]^{-1}$, то $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}\left[a - \frac{1}{2}\left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right]b\right], \\ b_1 = 0. \end{cases}$

2.2 Диктат середины

Рассмотрим сообщество с нечетным числом n агентов. Положим $n = 2n' - 1$ так, чтобы диктаторская ФКП середины совпадала с диктаторством ранга n', т. е.

$$W(u) = u^*_{n'}, \qquad \text{для всех } u.$$

Цель упражнения состоит в нахождении решения, рекомендуемого диктатом середины для нескольких примеров из гл. 1.

(a) Предположим, что три города расположены на отрезке $[0,1]$ в точках 0, a и 1. Покажите, что наилучшее размещение по диктату середины – точка $a/2$, если $a < 1/2$, точка $(a+1)/2$, если $a > 1/2$, и точки $1/4$ или $3/4$ при $a = 1/2$. Сравните это решение с эгалитарным размещением в $1/2$ и утилитарным размещении в a. Для пяти городов, расположенных в точках 0, 0,32, 0.55, 0.74, 1, покажите, что точка 0.53 будет выбрана по диктаторской ФКП середины.

(b) Какое размещение будет выбрано на дереве из упражнения 1.1? На кольце из упражнения 1.2?

(c) Рассмотрим задачу распределения затрат на общественный проект (упражнение 1.5). Покажите, что в числовом примере диктаторская ФКП середины выбирает следующее распределение затрат:

$$c_1 = 5,\ c_2 = 10,\ c_3 = 2,\ c_4 = 4,\ c_5 = 8.$$

Предложите метод нахождения оптимума диктата середины в общей задаче распределения затрат (с нечетным числом агентов).

2.3 *Эквивалентное определение сепарабельности* (по Блэкорби и Дональдсону [1984])

Дана конечная *последовательность* ПКБ $R_1, R_2, \ldots, R_n$ по одному для каждого возможного размера сообщества от 1 до n. Для произвольных векторов u, v из E^N и любого подмножества T размера t из N предположим

$$\{u_i = v_i = 0 \text{ для всех } i \in N \setminus T\} \Rightarrow \{u\, R_n\, v \Longrightarrow u_T\, R_t\, v_T\},$$

где u_T, v_T обозначают проекции u, v на E^T.

(a) Покажите, что ПКБ R_n сепарабелен тогда и только тогда, когда все ПКБ $R_1, \ldots, R_n$ сепарабельны.

(b) Покажите, что R_n сепарабелен тогда и только тогда, когда для любых n_1, n_2, для которых $n_1 + n_2 \le n$ и для любых векторов $u^1, v^1 \in E^{n_1}$, $u^2, v^2 \in E^{n_2}$ имеем

$$\{u^1 R_{n_1} v^1 \text{ и } u^2 R_{n_2} v^2\} \Rightarrow \{[u^1 u^2]\, R_{n_1+n_2} [v^1 v^2]\},$$

где $[u^1 u^2]$ – конкатенация u^1 и u^2 (размерности $n_1 + n_2$).

2.4 Пределы ФКП из теоремы 2.6

Обозначим через R_p (соответственно R^q) ПКБ, представленный ФКП из утверждения (*a*)((*b*)) теоремы 2.6. Примем соглашение, что R_0 – классический утилитаризм, а R^0 - ПКБ Нэша. Следовательно, R_p и R^q определены для всех действительных p, q.

Обозначим через R_* лексиминный ПКБ. Покажите, что R_* является пределом R_p (R^q), когда p (q) стремится к $-\infty$ в следующем смысле:

для всех $u, v \in E^N$:

$\{u\ R_*\ v\} \Longleftrightarrow \{\exists\ p_0$, такое, что при всех $p \leq p_0\ :\ u\ R_p\ v\}$,

соответственно для всех $u, v \in E^N_{++}$:

$\{u\ R_*\ v\} \Longleftrightarrow \{\exists\ q_0$, такое, что при всех $q \leq q_0\ :\ u\ R^q\ v\}$.

Каков предел R_p (R^q), когда p (q) стремится к $+\infty$?

2.5 Размещение на отрезке

Предположим, что n городов расположены на отрезке [0,1]. Покажите, что отрезок между эгалитарным решение и утилитарным решением состоит из оптимальных по Лоренсу размещений (когда n нечетно, то утилитарное размещение единственио, когда n четно, то целый отрезок). Приведите пример, когда оптимальное по Лоренсу размещение лежит вне этого отрезка.

2.6 Оптимальные по Лоренсу векторы полезностей

Предположим, что $n = 2$, и рассмотрим подмножество S допустимых векторов полезностей ($S \subseteq E^2$). Предположим, что эгалитарная ФКП имеет *единственный* максимум на S, а именно $u^e = (u^e_1, u^e_2)$, и что утилитарная ФКП также имеет *единственный* максимум на S, а именно $u^0 = (u^0_1, u^0_2)$. Пусть u – оптимальный по Лоренсу вектор из S. Покажите, что

$$u \neq u^e \Rightarrow |u^e_1 - u^e_2| < |u_1 - u_2|,$$

$$u \neq u^0 \Rightarrow |u_1 - u_2| < |u^0_1 - u^0_2|.$$

Таким образом, эгалитарное (утилитарное) распределение имеет наименьшее (наибольшее) абсолютное значение неравенства среди оптимальных по Лоренсу распределений. Сравните с упражнением 1.8.

2.7 Доказательство леммы 2.3

Предположим, что u доминирует v по Лоренсу. Без ограничения общности будем считать $u = u^*$, $v = v^*$. Для каждого $\lambda \geq 0$ рассмотрим систему из n уравнений и неизвестного $w \in E^N_{++}$:

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = \max\left\{\left[\sum_{i=1}^{k} u_i\right] - \lambda, \sum_{i=1}^{k} v_i\right\} \quad \text{для всех } k = 1, \ldots, n.$$

Покажите, что ее единственное решение $w(\lambda)$ удовлетворяет условиям $w(\lambda) = w^*(\lambda)$ и $L(v) \leq L(w(\lambda)) \leq L(u)$. Покажите, что $w(\lambda)$ кусочно-непрерывна и что каждый ее кусок соответствует передаче Пигу – Дальтона или улучшению по Парето.

2.8 Искажение индивидуального нуля и масштаба

Обозначения: у вектора e_i компонента i равна 1, а остальные – 0. Рассмотрим ПКБ R на E^N. Скажем, что увеличение индивидуального нуля выгодно при R, если

$$\text{для любых } u, v \in E^N,\ i \in N,\ \lambda_i < 0:$$
$$\{u\, R\, v \text{ и } (v + \lambda_i e_i)\, R\, (u + \lambda_i e_i)\} \Rightarrow \{u_i \leq v_i\}. \tag{21}$$

Интерпретация: агент i увеличивает свой нуль полезности на $|\lambda_i|$, изменяя u_i на $u_i + \lambda_i$. Если при этом сравнение $u\,R\,v$ изменяется в пользу v, то агенту i лучше при распределении v. В частности, фиксируем допустимое множество S. После того как агент i увеличил свой нуль на $|\lambda_i|$, новое допустимое множество есть $S + \{\lambda_i e_i\}$ $(\lambda_i < 0)$. Значит, из (21) вытекает, что при максимизации R на S лучший исход для агента i получается при повышении начала отсчета полезности.

Аналогично, скажем, что уменьшение индивидуального нуля выгодно при R, если свойство (21) выполнено при всех $\lambda_i > 0$ (а не при всех $\lambda_i < 0$).

(*a*) Покажите, что увеличение индивидуального нуля выгодно при лексиминном порядке (но не при эгалитарной ФКП).

(*b*) Рассмотрим сепарабельно аддитивную ФКП $W(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(u_i)$. Покажите, что увеличение (уменьшение) индивидуального нуля выгодно тогда и только тогда, когда α

вогнута (выпукла). Например, увеличение индивидуального нуля выгодно при ПКБ, представленном ФКП Нэша.

(*c*) Для вектора полезностей u, положительного числа λ и агента i обозначим через $u(\lambda, i)$ вектор $u(\lambda, i)_i = \lambda u_i$, $u(\lambda, i)_j = u_j$ при $j \neq i$. Скажем, что инфляция (дефляция) индивидуального масштаба выгодна, если

$$\text{для всех } u, v \in E^N_{++}, \ i, \ \lambda > 1:$$
$$\{u\, R\, v \text{ и } v(\lambda, i)\, R\, u(\lambda, i)\} \Rightarrow \{u_i \leq v_i\} \qquad (22)$$

(соответственно то же свойство при $\lambda < 1$). Покажите, что дефляция индивидуального масштаба выгодна при лексиминном ПКБ (но не при эгалитарной ФКП).

Рассмотрим сепарабельно аддитивную ФКП $W(u) = \sum_{i=1}^n \beta(u_i)$. Покажите, что дефляция (инфляция) индивидуального масштаба выгодна тогда и только тогда, когда $\beta(e^x)$ вогнута по x (выпукла). В частности, инфляция индивидуального масштаба выгодна при утилитарном ПКБ.

(*d*) Покажите, что выгодность увеличения индивидуального нуля (свойство (21)) эквивалентна следующему свойству:

$$\text{для всех } u, v, w \in E^N: \qquad (23)$$
$$\{u\, R\, v \text{ и } (u_i - v_i) \cdot w_i \leq 0 \text{ при } i \in N\} \Rightarrow \{(u + w)\, R\, (v + w)\}.$$

Свойство (23) введено в Яари [1978] в другом контексте. Покажите, что из (23) следует сепарабельность R. Докажите, что при непрерывном ПКБ R увеличение (уменьшение) индивидуального нуля выгодно *тогда и только тогда, когда* он представим сепарабельно аддитивной ФКП $W(u) = \sum_{i=1}^n \alpha(u_i)$ с вогнутой (выпуклой) функцией α.

Дайте аналогичную характеризацию непрерывных ПКБ на E^N_{++}, при которых выгодна инфляция (дефляция) индивидуального масштаба.

2.9 Доказательство теоремы 2.1

Пусть R удовлетворяет (2). Определим два бинарных отношения P^* и I^* так:

$$u\, P^* v \Rightarrow \exists\, u' \ll u,\ v' \gg v:\ u'\, P\, v',$$

$$u\, I^* v \Rightarrow \text{не } (u\, P^* v) \text{ и не } (v\, P^* u).$$

(a) Проверьте, что P^* транзитивно и что $u P^* v \Rightarrow u P v$.

(b) Покажите, что для любых $u, v \in E^N$ и любого $\zeta \gg 0$ имеем:

$$v I^* u \Rightarrow (v + \zeta) P u, \quad v I^* u \Longrightarrow u P (v - \zeta).$$

Подсказка: для установления первой импликации предположим противное. Скажем, $v I^* u$, но $u R (v + \zeta)$. Выведите, что для всех $w, v \ll w \ll v + \zeta$ и для всех u', u'', $u' \ll u \ll u''$, имеем $u'' P w P u'$. Теперь получите противоречие, используя (2) для u и $v + \zeta/2$.

(c) Из (b) выведите, что I^* – отношение эквивалентности (симметричное и транзитивное).

(d) Определим R^* так:

$$u R^* v \Rightarrow u P^* v \text{ или } u I^* v.$$

Покажите, что R^* полный и транзитивный порядок и его верхние (нижние) контурные множества замкнуты. Значит (по теореме Дебре), R^* представим непрерывной ФКП.

2.10 Доказательство формулы (17)

Индекс неравенства Джини может быть записан. так:

$$G(u) = \frac{1}{n^2 \bar{u}} \sum_{1 \le i, j \le n} |u_i - u_j|.$$

Получите это из (16), используя формулу

$$|a - b| = a + b - 2 \min \{a, b\}.$$

2.11 Доказательство теоремы 2.2 без предположения непрерывности (Канеко [1984]).

Дан независимый от нуля (и анонимный) ПКБ. Покажем, что для всех u, v из E^n выполнено

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \Rightarrow u I v. \tag{24}$$

Из предыдущего доказательства следует, что R слабо представим утилитарной ФКП, поэтому из (24) следует, что R является на самом деле утилитарной ФКП.

(a) Пусть $n = 2$. Покажите, что для любых x, y, λ из E

$$(x, y) I (y, x) \Rightarrow (x + \lambda, y - \lambda) I (y + \lambda, x - \lambda).$$

Получите формулу (24) для $n = 2$.

(*b*) Покажите, что для всех u из E^n и всех (v_1, v_2) из E^2 выполнено

$$u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)\ I\ (v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n).$$

(*c*) Докажите (24), последовательно используя свойство (*b*).

ГЛАВА 3

Аксиоматические торги

Обзор

Нэш [1950] предложил перейти от ПКБ к более сложным правилам выбора, которые мы называем функциями коллективного выбора (ФКВ). Идея состоит в том, чтобы, приняв во внимание все множество допустимых векторов полезностей, произвести выбор наиболее справедливого исхода. Таким образом, два произвольных вектора полезностей не сравниваются более между собой независимо от остальных (т.е. от заданного множества допустимых векторов), как это было в случае ПКБ. Чтобы понять, как это расширяет область мыслимых методов выбора, рассмотрим относительный эгалитаризм в противовес обычному эгалитаризму. Скажем, два агента должны поделить между собой некоторый набор предметов потребления. Эгалитарная программа просто выбирает наиболее равное среди допустимых распределенне полезностей (предполагая, что дилеммы равенство – эффективность нет), не обращая внимания на существование неравных допустимых распределений полезности. С другой стороны, относительный эгалитаризм сначала вычисляет полезность $\bar{u}_i$, которую агент i получит, потребив в одиночку весь набор. Затем выбирается эффективный вектор полезностей, у которого отношение реального потребления к наибольшему мыслимому потреблению $\bar{u}_i$ одинаково для всех агентов. Другими словами, относительный эгалитаризм уравнивает индивидуальные доли удовлетворения (или разочарования), определяя полное удовлетворение (нулевое разочарование) в зависимости от контекста. Мы приведем числовой пример (пример 3.1), подчеркивающий разницу между эгалитаризмом и относительным эгалитаризмом.

Формально, ключевой элемент конструкции Нэша – отображение, ставящее в соответствие множеству допустимых векторов полезностей оптимальный по Парето элемент этого множества.

Это отображение называется ФКВ. Мы, конечно, делаем некоторые правдоподобные предположения о форме допустимого множества полезностей (см. разд. 3.1). Они резко ограничивают область определения ФКВ. Тем не менее ФКВ как математический объект гораздо сложнее, чем ПКБ. На самом деле модель Нэша включает еще один параметр в область определения ФКВ, а именно доминируемый по Парето вектор полезностей, который интерпретируется как точка разлада (разногласия). В этой главе мы всегда будем считать точку разлада началом отсчета индивидуальных полезностей, более того, мы предположим, что допустимое множество полезностей состоит только из неотрицательных векторов полезностей. Это предположеиие является ограничительным по двум причинам. Во-первых, мы не можем рассматривать аксиомы, выясняющие эффект изменения точки разлада. Такие аксиомы совсем недавно появились в литературе (Петерс [1986*a*, *b*], Чан и Томсон [1987]), но большинство существующих результатов может быть без потери общности сформулировано для фиксированной точки разлада. Во-вторых, мы предполагаем, что допустимый вектор полезностей, не ограниченный снизу точкой разлада, не оказывает никакого влияния на решение. Это не является серьезным ограничением, если мы интерпретируем уровень полезности агента при разладе как уровень, который он может гарантировать себе сам независимо от того, что делают остальные агенты. Поскольку каждый агент имеет право на индивидуальный уровень, соответствующий разладу, то по-настоящему допустимыми можно считать только те допустимые векторы, которые ограничены снизу вектором разлада. Кооперация не может вынудить агента отказаться от своих прав.

В разд. 3.1 мы формально определяем ФКВ и обсуждаем ограничения на допустимое множество полезностей, которые формируют ее область определения. Всегда предполагается, как и в гл. 2, что ФКВ удовлетворяет условиям анонимности и единогласия. Заметим, что все результаты этой главы обобщаются также на неанонимный случай (некоторые могут быть сформулированы и без условия единогласия). Как всегда, мы используем эти две аксиомы, поскольку они заметно упрощают доказательства без потери их содержательиости.

В разд. 3.2 мы обсуждаем основополагающий результат теории аксиоматических торгов, а именно характеризацию ПКБ Нэша с помощью двух аксиом: независимости от масштаба и независимости от посторонних альтернатив (теорема 3.1). На самом деле этот результат очень похож на полученную ранее характеризацию ПКБ Нэша (теорема 2.3). Только доказательство является оригинальным; оно породило много других доказательств.

В разд. 3.3 и 3.4 мы обсуждаем две характеризации эгалитарного и относительно эгалитарного решений. Эти два результата основаны на двух различных аксиомах монотонности. Результат Калаи (теорема 3.2) использует монотонность по допустимому миожеству: если множество допустимых векторов полезностей расширяется, то полезность каждого агента (предлагаемая ФКВ) не уменьшается. Это означает, что каждый выигрывает от расширения возможностей кооперации. Довольно неожиданно, что только эгалитарное решение удовлетворяет этой аксиоме (относительный эгалитаризм может быть тоже охарактеризован более слабой версией монотонности по допустимому множеству; см. замечание 3.2). Монотонность по допустимому множеству является многоплановой аксномой, она будет играть важную роль в экономике производства из гл. 7.

Вторая характеризация эгалитаризма (и относительного эгалитаризма) – теорема 3.3 Томсона. Она требует монотонности по составу участников: если количество агентов, имеющих право на дележ кооперативного дохода, возрастает, а новых кооперативных возможностей не возникает, то полезность исходных агеитов не должиа возрасти. Другими словами, чем с большим числом гостей приходится делить один и тот же пирог, тем туже каждый должен затянуть пояс (см. определение 3.4).

В разд. 3.5 мы предлагаем вариант аксиомы сепарабельности, адаптированный для ФКВ. Эта аксиома является ключевым элементом сильного результата Ленсберга (аналогичного теореме 2.5), характеризующего вогнутые и сепарабельные аддитивные ПКБ.

Наконец, разд. 3.6 посвящен характеризации (классической) утилитарной ФКВ в термииах аддитивности: решение коммутирует с операцией взятия выпуклой комбинации допустимых множеств Хотя это свойство труднее интерпретировать, зато теорема Майерсона (теорема 3 4) дает математически изящное дополнение ранее полученным характернзациям классического утилитаризма (см гл 2)

Выбранные нами результаты покрывают лишь малую долю литературы по аксиоматическим торгам, хотя мы и старалнсь ухватить наиболее существенные идеи Более продвинутое осмысление этой литературы можно найти в обзорах Рота [1979], Калаи [1985] и очень полной книге Томсона [в печати]

Аксиоматическая модель торга является наиболее продвинутым инструментом исследования в теории благосостояния Ее предположения многочисленны и только ей прнсущи (достаточно посмотреть на ограничения на множества допустимых полезностей, определение 3 1) Математическая аргументация может быть достаточно запутанной и может требовать большого количества предположений Тем не менее это очаровывающая интеллектуальная конструкция, объеднняющая множество арбитражных схем и этических постулатов в единую теорию Мы верим, что эта методология потенциально применима к множеству микроэкономических задач справедливого распределения В ч III мы дадим аргументы в пользу этой позиции Развивая эти приложения, мы сможем преодолеть принципиальную слабость теории благосостояния (хотя в этом также причина ее привлекающей простоты), а именно систематическое игнорирование любых аспектов конкретной проблемы, которые не связаны с распределением полезностей

3.1 Функции коллективного выбора

ПКБ (гл 2) осуществляет бинарное сравнение векторов полезностей независимо от конкретного вида допустимого множества, которому эти векторы принадлежат В качестве выбора сообщества ПКБ для заданного допустимого множества выделяет максимальный элемент (элементы) В теории аксиоматических торгов мы представляем коллективный выбор как отображение, которое ставит в соответствие каждому возможному допустимому множеству полезностей некоторый его элемент Это отображение называется функцией коллективного выбора (ФКВ) из каждого множества $S \subset E_+^N$ допустимых полезностей (E_+ – множество неотрицательных чисел $[0,+\infty)$) выбирается конкретный элемент из S

Простейшим примером правила, которое не может быть получено максимизацией ПКБ, является *относительный эгалитаризм* Для компактного допустимого множества $S \subset E_+^N$ вычислим максимальный допустимый уровень полезности для каждого агента, выбирая в S наиболее предпочтительный вектор для агента 1, наиболее предпочтительный вектор для агента 2 и т д Затем уравниваем относительные полезности, соотнеся полезности с их максимальными уровнями

Пример 3 1 Дележ продуктов

Два агента получают общий подарок, состоящий из 1 литра джина и 1 литра виски Они должны поделить подарок между собой Агент 2 не любит джин, а агент 1 одинаково любит и джин, и виски Если g_i (соответственно w_i) – количество джина (виски), доставшееся агенту i, то их полезности суть

$$u_1 = g_1 + w_1, \quad u_2 = w_2, \quad 0 \le g_1, \ w_i \le 1, \quad w_1 + w_2 = 1$$

Допустимое множество S – выделенная область на рис 3 1

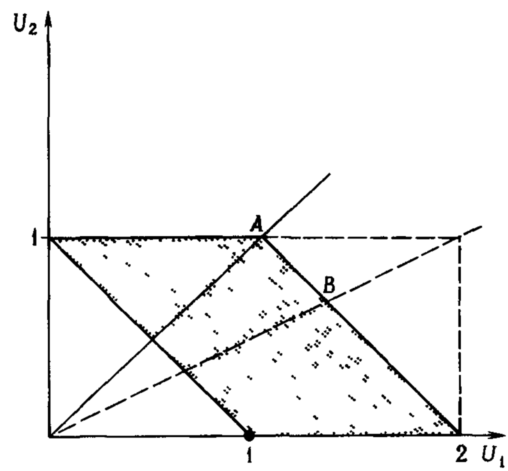


Рис 3 1

Заметьте, что мы выбрали нулями полезностей отсутствие подарка. Обычный эгалитаризм отдаст весь джин агенту 1, все виски агенту 2, и таким образом, получится вектор полезностей A. Относительный эгалитаризм чуть более изыскан. Он учитывает, что агент 2 не может насладиться более, чем одной единицей полезности (даже если он получит весь подарок), в то время как потолок агента 1 равен двум единицам. Таким образом, этот подход предлагает вектор полезностей B, в котором относительные выигрыши $u_1/2$ и $u_2/1$ совпадают. Это приводит к следующей системе:

$$\frac{w_1 + g_1}{2} = \frac{w_2}{1} \quad \text{и} \quad \{w_2 = 1 \text{ или } g_1 = 1\}$$

(оптимальность по Парето)

с единственным решением $w_1 = 1/3$, $g_1 = 1$ и $w_2 = 2/3$.

Отметим неявно подразумеваемые относительным эгалитаризмом аргументы, которые могут быть использованы при торге: было бы несправедливо, чтобы агент 2 получил абсолютный максимум своей полезности, а агент 1 – нет.

Перед тем как объяснить, почему относительный эгалитаризм не может быть получен на основе ПКБ, нам нужно дать общее определение ФКВ.

Даны сообщество N и множество Σ подмножеств из E_+^N. *Функция коллективного выбора* на (N,Σ) есть отображение φ, ставящее в соответствие каждому множеству $S \in \Sigma$ вектор $\varphi(S) \in S$.

Выбор области Σ весьма важен. На очень большой области аксиомы будут выделять пустое множество отображений. Например, если Σ содержит все конечные множества, то аксиома анонимиости (см. ниже) не может выполняться (представим, что $N=\{1,2\}$ и $S = \{(1,2),(2,1)\}$). Если Σ содержит открытые множества, то граница Парето может быть пуста, тогда аксиома единогласия выделит пустое множество.

В этом введении в аксиоматические торги мы будем работать с весьма малой областью Σ_0. Эта область всегда содержится (как правило, строго содержится) во всех тех многочисленных областях, которые рассматриваются в литературе. Чем меньше область, тем больше ФКВ удовлетворяют аксиомам. Таким образом, мы не теряем интересные правила выбора, работая с небольшой областью. Скажем, что допустимое множество S является исчерпывающим, если для всех $u,v \in E_+^N$ $\{u \in S,\ v \le u\} \Rightarrow v \in S$.

Определение 3.1. *Область Σ_0 состоит из всех подмножеств S из E_+^N, которые являются выпуклыми, компактными, исчерпывающими и удовлетворяют следующему условию, называемому* **минимальной трансферабельностью**:

$$\text{для любых } u \in S \text{ и } i \in N$$
$$\{u_i > 0\} \Rightarrow \{\exists\, v \in S,\ v_i < u_i \text{ и } v_j > u_j \text{ при всех } j \ne i\}. \qquad (1)$$

Предположение выпуклости (названное неполяризуемостью в Яари [1981]) означает, что компромисс возможен между любыми двумя допустимыми векторами полезностей. Это – осмысленное предположение, когда множество S получается нз некоторой модели экономики обмена и/или производства. Это предположение важно с технической точки зрения.

Предположение компактности вряд ли ограничительно, а исчерпывающие множества получаются при возможностн свободного отказа от полезности. Это предположение по общему мнению не является обременительным.

Данные три предположения почти всегда присутствуют в литературе (иногда без условия исчерпывания, см. Петерс [1986*a*]). Минимальная трансферабельность – менее популярное предположение. Оно также менее необходимо: многие приведенные ниже результаты (теоремы 3.1, 3.4) остаются справедливыми на гораздо бо́льшей области выпуклых компактных и исчерпывающих множеств и могут быть переписаны для этой области. Комбинация выпуклости и минимальной трансферабельиости устраняет всякую разницу между оптимальностью по Парето и слабой оптимальностью по Парето элементов нз S (зти понятия определены в разд. 1.1). Пусть S выпукло и удовлетворяет условию минимальиой трансферабельности. Тогда для всех $u \in S$

$$\{\exists\, v \in S,\ v > u\} \Longleftrightarrow \{\exists\, v \in S,\ v \gg u\}. \qquad (2)$$

Следовательно, слабый оптимум Парето является также и оптимумом Парето.

Для доказательства (2) возьмем $u,v \in S$, такие, что $v > u$. Тогда для некоторого агента i выполнено $v_i > u_i$. В силу (1) существует $w \in S$, для которого $w_i < v_i$ и $w_j > v_j$ при $j \neq i$. Из выпуклости следует, что выпуклая комбинация $z = \lambda w + (1 - \lambda) v$ также принадлежит S. Для достаточно малых λ выполнено $z \gg u$, и утверждение (2) доказано.

Важным предположением в определении 3.1 является то, что все допустимые множества S суть подмножества E^N_+. Нулевой вектор полезностей играет роль уровня полезностей разлада (также называемого *status quo* полезностей). Это абсолютный минимум, гарантируемый каждому агенту. Агенты должны прийти к единогласному соглашению о выборе распределения полезностей из S. Любой агент может отказаться от соглашения и реализовать точку разлада. Эта интерпретация играет решающую роль в некооперативных моделях торгов. В них делается попытка явно изучать стратегическую игру, описывающую процесс выработки соглашения (см. Рубинштейн [1982], Бинмор, Рубинштейн, Волынский [1986]). Но для обсуждаемых нами нормативных аксиом кооперативной справедливости эта интерпретация точки разлада может быть опущена.

Наше следующее определение представляет две основные аксиомы, уже присутствовавшие в гл. 1 и 2.

Определение 3.2. *Для заданного сообщества N* **функция коллективного выбора** *на Σ_0 есть отображение φ из Σ_0 в E^N_+, удовлетворяющее следующим условиям.*

(*i*) **Анонимность:** *для любой перестановки σ множества N обозначим через $\sigma(u)$ вектор $\sigma(u)_i = u_{\sigma(i)}$. Тогда*

$$\text{для всех } S \in \Sigma_0 : \varphi(\sigma(S)) = \sigma(\varphi(S)).$$

(*ii*) **Единогласие:** *для любого $S \in \Sigma_0$ вектор $\varphi(S)$ является оптимальным по Парето элементом S.*

Работы, на которые мы ссылаемся после каждой теоремы, обычно не предполагают анонимности. Два результата, в которых не предполагаются соответственно анонимность и единогласие, см. также в упражнениях 3.5 и 3.6.

Чтобы проиллюстрировать определение 3.2, дадим математические определения эгалитаризма и относительного эгалитаризма.

Эгалитарная ФКВ:
для всех $S \in \Sigma_0$: $\varphi_e(S) = \bar{\lambda} e$, где $\bar{\lambda} = \sup \{ \lambda \geq 0 \mid \lambda e \in S\}$.

Относительная эгалитарная ФКВ (Калаи и Смородинский [1975]): для всех $S \in \Sigma_0$ и всех $i \in N$ определим $u^m_i(S) = \max \{u_i \mid u \in S\}$. Тогда

$$\varphi_{re}(S) = \bar{\mu}\, u^m(S), \text{ где } \bar{\mu} = \sup \{\mu \geq 0 \mid \mu\, u^m(S) \in S\}. \qquad (4)$$

Эти две ФКВ корректно определены в силу компактности S. Проверим, что они оптимальны по Парето. Если λe доминируется вектором $v \in S$, то можно считать, что $v \gg \lambda e$, а поскольку S исчерпывающее множество, значит, можно найти $\lambda' > \lambda''$ и $\lambda' e \in S$, противоречие. Доказательство оптимальности по Парето $\varphi_{re}(S)$ на множестве S аналогично. Тем самым мы только что доказали, что дилемма равенство – эффективность для S не возникает.

3.2 Аксиома Нэша независимости от посторонних альтернатив

ПКБ соответствует ФКВ, выделяющая в каждом допустимом множестве максимальный по данному ПКБ вектор полезностей. Если максимумов несколько, то требуется некоторое дополнительное правило. Предположим, что ПКБ R достигает максимума на S на единственном векторе $\varphi(S)$, если S из Σ_0. Тогда соответствующая ФКВ φ удовлетворяет следующему свойству.

Независимость от посторонних альтернатив по Нэшу (*НПАН*):

для всех $S, S' \in \Sigma$: $\quad \{S \subset S' \text{ и } \varphi(S') \in S\} \Rightarrow \{\varphi(S) = \varphi(S')\}$.

В самом деле, $\varphi(S') = u$ означает, что $u\, R\, v$ для всех $v \in S'$. Тем более, $u\, R\, v$ для всех $v \in S$ значит $\varphi(S) = u$.

Аксиома НПАН является мощным средством проверки того, представима ли ФКВ с помощью ПКБ или нет. Например, эгалитарная ФКВ представима эгалитарным ПКБ (эгалитарной ФКП), в то же время относительная эгалитарная ФКВ (4) не представима с помощью ФКП. В самом деле, рассмотрим сообщество из двух агентов и допустимое множество

$$S' = \{(u_1, u_2) \in E^2_+ \mid u_1 + u_2 \leq 2\} \in \Sigma_0.$$

Оба агента имеют одинаковый уровень устремлений $u^m_i(S')$, поэтому относительный эгалитаризм на этом множестве сводится к обычному эгалитаризму: $\varphi_{re}(S')=(1,1)$. Далее сократим S' до подмножества S:

$$S=\{(u_1,u_2)\in E^2_+ \mid u_1+u_2\le 2 \text{ и } u_2\le 1\}^1.$$

Теперь $\varphi_{re}(S)=(4/3,2/3)$, как мы видели в примере 3.1 (где допустимое множество имело ту же границу Парето, но не было исчерпывающим), а это противоречит НПАН, поскольку S содержит $\varphi_{re}(S')$. Попутно заметим, что любая ФКВ φ, представимая ПКБ, должна выбирать $\varphi(S)=(1,1)$, поскольку по анонимности $\varphi(S')=(1,1)$.

Аксиома НПАН сама по себе не означает, что ФКВ может быть представима с помощью ПКБ. Чтобы получить это утверждение, нужно добавить определенные условия непрерывности (см. Петерс и Уоккер [1987]).

Аксиома НПАН очень эффективна в сочетании со свойством независимости. Наиболее известным примером этого является основополагающий результат теории аксиоматических торгов.

Теорема 3.1 (Нэш [1950]). *Для данного сообщества N существует ровно одна ФКВ φ на Σ_0, удовлетворяющая*

(*i*) *независимости от посторонних альтернатив Нэша и*

(*ii*) *независимости от масштаба*

$$\text{для всех } \lambda\in E^N_+ \text{ и } S\in\Sigma_0 : \varphi(\lambda\cdot S)=\lambda\cdot\varphi(S) \qquad (6)$$

(*где $u\cdot v$ как в определении 2.1; $\lambda\cdot v\in S$ тогда и только тогда, когда существует u из S, для которого $v=\lambda\cdot u$*).

Эта ФКВ представима ПКБ Нэша: на каждом допустимом множестве $S\in\Sigma_0$ она максимизирует произведение $u_1,\dots,u_n$.

Доказательство. Проверим сначала, что ФКП Нэша строго квазивогнута, следовательно, на любом выпуклом компактном подмножестве из E^N_+ она достигает максимума в единственной точке. Значит, соответствующая ФКВ удовлетворяет НПАН (см. выше). Далее, мы знаем из теоремы 2.3, что ПКБ Нэша не

---

1 Формально $S\notin\Sigma_0$, однако читатель без труда может преодолеть это затруднение. – *Прим. ред.*

зависит от масштаба (определение 2.1). Следовательно, соответствующая ФКВ удовлетворяет (6).

Докажем обратное утверждение. Пусть φ – ФКВ, удовлетворяющая НПАН и (6). Для любого положительного вектора a, $a \gg 0$, рассмотрим подмножество

$$S(a) = \left\{ u \in E_+^N \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{a_i} \leq n \right\}.$$

Проверим, что $S(a)$ принадлежит Σ_0. Затем заметим, что $S(a) = a \cdot S(e)$. В силу анонимности $\varphi(S(e)) = e$, значит, из независимости от масштаба получаем $\varphi(S(a)) = a$.

Далее рассмотрим произвольный элемент S из Σ_0. Обозначим через a единственный максимум ФКП Нэша W_N на S. В силу квазивогнутости W_N и выпуклости S множество S и верхний контур W_N разделяются в точке a гиперплоскостью. Эта гиперплоскость перпендикулярна градиенту функции W_N в a, т. е. ее нормалью является вектор $(1/a_1, \dots, 1/a_n)$. Таким образом, эта гиперплоскость имеет уравнение $\sum_{i=1}^{n} (u_i/a_i) = n$ (напомним, что она содержит a), значит, множество $S(a)$ содержит S (см. рис. 3.2).

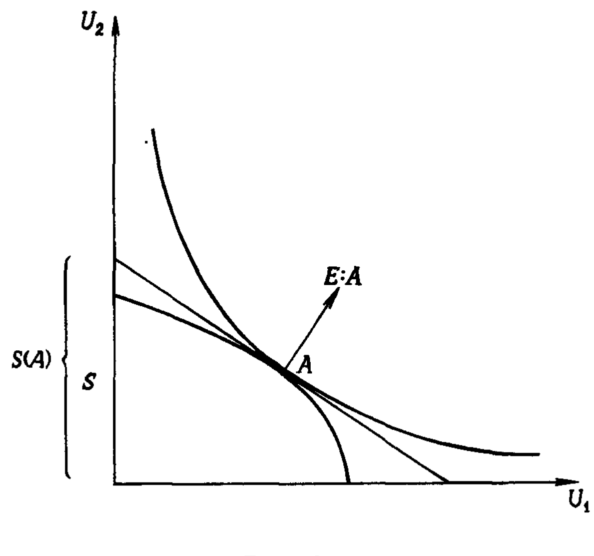


Рис. 3.2

Мы имеем $\{\varphi(S(a)) = a, \quad a \in S, \quad S \subset S(a)\}$, получаем (по НПАН) $\varphi(S) = a$, что и требовалось. QED

Теорема 3.1 имеет большое историческое значение, однако она ничего не добавляет к теореме 2.3, характеризующей ФКП Нэша среди ПКБ с помощью независимости от масштаба. Аналогично, комбинация НПАН и независимости от нуля характеризует классический утилитаризм, как в теореме 2.2. В упражнении 3.8 приведены детали.

3.3 Монотонность по допустимому множеству

Вклад ФКВ в теорию благосостояния является двояким: предлагаются новые аксиомы для характеризации старых методов выбора и открываются новые методы. Следующие два результата иллюстрируют оба эти аспекта.

Первая новая аксиома – *монотонность по допустимому множеству*. Предположим, что мы делим некоторые ресурсы методом эгалитарного благосостояния (т.е. измеряем уровни полезностей в соответствии с некоторой *единицей измерения* и уравниваем эти полезности). Если количество ресурсов, подлежащих дележу изменилось, а *единица измерения* осталась прежней, то агенты все вместе выиграют или все вместе проиграют от этого изменения: не может так случиться, что полезность агента i увеличится, а полезность агента j уменьшится. Это происходит потому, что эгалитарный метод выбирает вектор полезностей на диагонали (забудем о дилемме равенство – эффективность), а любые две точки на диагонали сравниваются одинаково для всех агентов.

Это элементарное наблюдение имеет далеко идущие последствия. В данном рассмотрении оно приводит к простой характеризации эгалитарной (и относительной эгалитарной) ФКВ. Далее мы будем использовать два варианта монотонности по допустимому множеству ие в контексте теории благосостояния (см. разд. 7.6) с аналогичными последствиями.

Определение 3.3. *Скажем, что ФКВ φ, определенная на Σ_0, удовлетворяет условию* **монотонности по допустимому множеству,** *если*

$$\textit{для всех } S, S' \in \Sigma_0 \, : \, S \subset S' \;\Rightarrow\; \varphi(S) \leq \varphi(S'). \tag{7}$$

Проверим сначала, что монотонность по допустимому множеству сильнее НПАН (при условии оптимальности по Парето). В самом деле, в предположении (5) монотонность по допустимому множеству влечет за собой $\varphi(S) \leq \varphi(S')$. Так как $\varphi(S)$ оптимален по Парето в S и $\varphi(S')$ принадлежит S, то мы должны получить равенство.

Как утилитарная ФКП, так и ФКП Нэша удовлетворяют НПАН, но нарушают монотонность по допустимому множеству (см. упражнение 3.1). Следовательно, последнее свойство сильнее, чем НПАН.

Теорема 3.2 Калаи [1977]. *Для данного сообщества N существует ровно одна ФКВ φ на Σ_0, удовлетворяющая условию монотонности по допустимому множеству. Это – эгалитарная ФКВ φ_e (определенная по* (3)).

Доказательство. Эгалитарная ФКВ монотонна по допустимому множеству. Обратно, пусть ФКВ φ удовлетворяет условию монотонсти по допустимому множеству. Фиксируем допустимое множество $S \in \Sigma_0$ и обозначим через $a = \lambda e$ вектор из S, выбираемый по эгалитарной ФКВ (3). Если $a = 0$, то $S = \{0\}$ (потому что a оптимально по Парето), и получаем желаемое равенство $\varphi(S) = a$. Далее предположим, что $a \neq 0$, а значит, $\lambda > 0$. Из (2) следует, что для всех i мы можем найти $v^i \in S$, такие, что $v^i_i < \lambda$, $v^i_j > \lambda$ при $j \neq i$. Обозначим через

$$\alpha = \inf_{1 \leq i \neq j \leq n} v^i_j \, , \quad \alpha > \lambda,$$

и определим n векторов a_i, $i \in N$, $a^i_i = 0$, $a^i_j = \alpha$ при $j \neq i$. Поскольку $a^i \leq v^i$ и S – исчерпывающее множество, то каждый вектор a^i принадлежит S.

Обозначим через S_0 выпуклую оболочку векторов $0, a, a^1, \ldots, a^n$. Внимательный читатель может убедиться, что S_0 принадлежит Σ_0 и инвариантно относительно перестановки координат. Таким образом, по анонимности и единогласию получаем $\varphi(S_0) = a$. С другой стороны, S_0 является подмножеством S (S выпукло и содержит $a, a_1, \ldots, a_n$), значит, в силу монотонности по допустимому множеству $a \leq \varphi(S)$. Для завершения доказательства из оптимальности по Парето a в S получаем $\varphi(S) = a$. QED

Замечание 3.1. Оригинальное доказательство теоремы 3.2 из Калаи [1977] является несколько более сложным, поскольку оно не опирается на предположение (1) о минимальной трансферабельности и оптимальность по Парето заменена на слабую оптимальность по Парето.

Замечание 3.2. Калаи и Смородинский [1975] предлагали аналогичную характеризацию относительной эгалитарной ФКВ при выполнении аксиомы ограниченной монотонности по допустимому множеству и независимости от масштаба. Этот результат является предметом упражнения 3.3.

Томсон и Майерсон [1980] изучали влияние монотонности по допустимому множеству без аксиомы анонимности, но при выполнении аксиомы единогласия. Они охарактеризовали семейство методов, монотонных вдоль пути, которые описаны в упражнении 3.5.

3.4 Монотонность по составу участников

Монотонность относительно изменения состава участников является другим важнейшим свойством теории аксиоматических торгов. Рассмотрим два сообщества N и $N \cup \{\omega\}$, в котором добавляется новый агент ω, $\omega \notin N$. Аксиома Томсона монотонности по составу участников звучит так: если добавление агента ω не расширило возможностей кооперации, то никто из агентов N не выиграет от такого присоединения. На интуитивном уровне можно сказать, что если появляется новый гость, который будет участвовать в разделе того же пирога, то всем придется потуже затянуть пояса.

Конечно, основная трудность состоит в том, чтобы перевести на формальный язык мысль о том, что пирог не увеличивается, когда присоединяется агент ω. В рамках аксиоматического подхода к торгам решение является простым. Обозначим через $\Sigma_0(n)$ область из определения 3.1 для сообщества размеров n. Пусть $S \in \Sigma_0(n+1)$ – множество допустимых полезностей для $N \cup \{\omega\}$, т.е. их возможные доходы. Устранение агента ω без потери каких-либо возможностей аналогично тому, что его полезность u_ω поддерживается на уровне разлада $u_\omega = 0$. Тем самым берется сечение множества S при $u_\omega = 0$, что эквивалентно взятию проекции $\pi_N(S) \subset E_+^N$ множества S на $E^N \times \{0\}$ (сечение при $u_\omega = 0$ совпадает с проекцией на $E^N \times \{0\}$, поскольку S – исчерпывающее множество).

Определение 3.4. *Дана последовательность φ^n, $n = 1,2,\ldots,$ ФКВ, по одной на каждый возможный размер n сообщества N. Скажем, что эта последовательность* **монотонна по составу участников,** *если для всех сообществ $N \cup \{\omega\}$ размера $n+1$ и для всех допустимых множеств $S \in \Sigma_0(n+1)$ имеем*

$$\pi_N(\varphi^{n+1}(S)) \le \varphi^n(\pi_N(S)). \tag{8}$$

Отметим, что монотонность по составу участников есть свойство последовательности ФКВ, а не одной ФКВ для фиксированного сообщества. Аксиома сепарабельности из следующего раздела является свойством того же типа.

Наша ближайшая цель – проиллюстрировать свойство (8), показав, что последовательность эгалитарных ФКВ монотонна по составу участников.

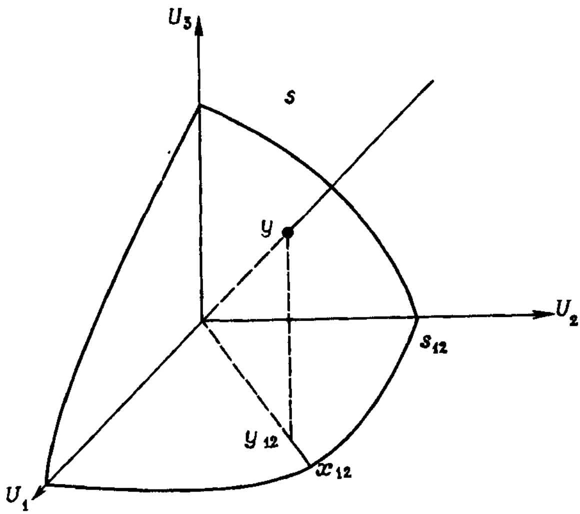


Рис. 3.3

Пусть $N = \{1,2\}$, $\omega = 3$, и дано допустимое множество $S \in \Sigma_0(3)$. Обозначим через S_{12} проекцию S на плоскость $u_3 = 0$. Далее, пусть $x \in E^2$ эгалитарный исход в S_{12}, а $y \in E^3$ – такой исход в S (см. рис. 3.3).

Мы должны показать, что проекция y на $E_+^{\{12\}} \times \{0\}$, обозначаемая через y_{12}, находится ниже x. Поскольку $y_{12} \times \{0\}$ принадлежит S (в силу исчерпываемости), то вектор y_{12} принадлежит S_{12}. По определению эгалитарного решения y в S имеем $y_1 = y_2$, следовательно, y_{12} лежит на диагонали $E_+^{\{12\}}$. По определению x получаем $y_{12} \leq x$, что и надо было доказать. Доказательство для N произвольной размерности проводится аналогично.

Монотонность по составу участников сама по себе не характеризует эгалитарные ФКВ. В частности, относительные эгалитарные ФКВ также удовлетворяют (8). Комбинируя монотонность по составу участников со свойством независимости, мы получим две новые характеризации эгалитарной и относительной эгалитарной ФКВ соответственно.

Теорема 3.3 (Томсон [1983*a*, *b*])

(*a*) *Существует только одна последовательность ФКВ (по одной на каждый размер* $n = 1,2,\ldots$ *сообщества), удовлетворяющая свойствам монотонности по составу участников и НПАН. Это – последовательность эгалитарных ФКВ.*

(*b*) *Существует только одна последовательность ФКВ, удовлетворяющая свойствам монотонности и независимости от масштаба. Это – последовательность относительных эгалитарных ФКВ.*

Набросок доказательства

Утверждение (*a*). Дана последовательность φ^n, $n = 1,2,\ldots$, ФКВ, удовлетворяющих НПАН для каждого n и свойству монотонности по составу участников. Рассмотрим сообщество $\{1,2,3\}$ и допустимое множество $S \in \Sigma_0(2)$ для первых двух агентов ($S \subset E_+^{\{1,2\}}$). Мы покажем, что $\varphi^2(S) = \lambda \cdot (1,1)$, где λ определено по (3) (т. е. $\varphi^2(S)$ – эгалитарное решение), построив допустимое множество T из $E_+^{\{1,2,3\}}$, проекция которого на $E_+^{\{1,2\}}$ есть S.

Обозначим $x = (\lambda,\lambda,\lambda)$ и возьмем в качестве T выпуклую исчерпывающую оболочку. векторов x, $(0,0,2\lambda)$ и $S\times\{0\}$ (см. рис. 3.4). Проверьте, что T принадлежит $\Sigma_0(3)$. Далее

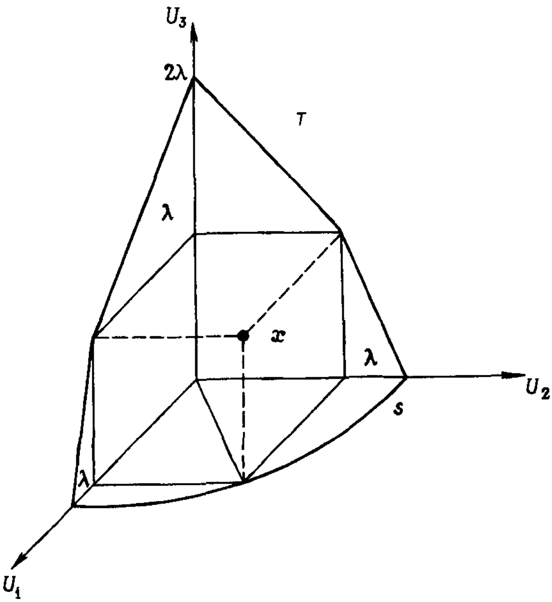


Рис. 3.4

рассмотрим допустимое множество $H = \{u \in E^3_+ \mid u_1 + u_2 + u_3 \le 3\lambda\}$. Предположим, что T содержится в H. По анонимности имеем $\varphi^3(H) = x$. Поскольку $\dot{x} \in T$ и $T \subset H$, то из НПАН следует $\varphi^3(T) = x$. Проверим далее, что проекция T на $E^{\{1,2\}}_+$ есть S, тогда в силу монотонности по составу участников имеем

$$\pi_{\{12\}}(\varphi^3(T)) = (\lambda,\lambda) \le \varphi^2(S).$$

Наконец, оптимальность по Парето вектора (λ,λ) влечет за собой требуемое равенство.

Приведенное выше рассуждение основано на предположении о том, что T содержится в H, что эквивалентно тому, что $S\times\{0\}$ содержится в H. Это справедливо, если S не является "слишком перекошенным" в следующем смысле:

$$u^m_i(S) \le 2\lambda, \text{ (где } u^m_i(S) \text{ определено в (4))}.$$

В самом деле, каждый элемент $(u_1,u_2,0)$ из $S\times\{0\}$ удовлетворяет $\{u_1 \le \lambda, \quad u_2 \le u^m_2(S)\}$ или $\{u_1 \le u^m_1(S),$

$u_2 \leq \lambda\}$, т. е. он также принадлежит и H.

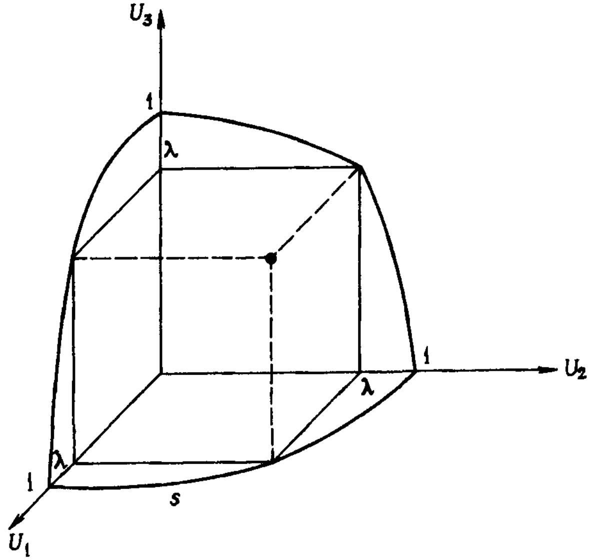


Рис. 3.5

В полном доказательстве утверждения (*a*) (Томсон [1983*b*]) проводится индукция по степеии перекошенности S, и доказательство распространяется иа произвольное количество агентов.

Утверждение (*b*). По минимальной трансферабельности (свойство (1)) допустимое множество $S \in \Sigma_0(n)$ либо есть $\{0\}$, либо $u_i^m(S) > 0$ при всех i. Следовательно, если последовательность φ^n, $n = 1,2,\ldots$, ФКВ удовлетворяет свойству независимости от масштаба, то достаточио рассматривать такие допустимые множества $S \in \Sigma_0(n)$, что $u_i^m(S) = 1$ для всех i.

Проверим, что последовательность относительных эгалитарных ФКВ удовлетворяет свойству монотонности по составу участников. Если для допустимого множества S выполнено $u_i^m(S) = 1$ при всех i, то относительный эгалитаризм есть просто эгалитаризм, так что больше нечего доказывать.

Обратно, предположим, что последовательность φ^n, $n = 1,2,\ldots$, удовлетворяет свойствам монотонности по составу участников и независимости от масштаба. Фиксируем сообщество $N=\{1,2,3\}$ и рассмотрим допустимое множество $S \in \Sigma_0(2)$ для первых двух агентов ($S \in E_+^{\{1,2\}}$). Предположим также, что $u_i^m(S)=1$, $i=1,2$, и обозначим через $\lambda(1,1)$ эгалитарный (и относительный эгалитарный) исход из S.

Рассмотрим перестановку σ множества $\{1,2,3\}$, $\sigma(i)=i+1$ (по соглашению $3+1=1$) и обозначим через T выпуклую исчерпывающую оболочку в E_+^3 векторов $(\lambda,\lambda,\lambda)$, $S\times\{0\}$, $\sigma(S\times\{0\})$, $\sigma^2(S\times\{0\})$ (см. рис.3.5).

Проверим сначала, что T принадлежит $\Sigma_0(3)$. Затем заметим, что $(\lambda,\lambda,\lambda)$ оптимален по Парето в T и что T инвариантно относительно перестановки σ. Из анонимности получаем $\varphi^3(T)=(\lambda,\lambda,\lambda)$. Далее, проекция T на $E_+^{\{1,2\}}$ есть S, следовательно, из монотонности по составу участников получаем $(\lambda,\lambda) \le \varphi^2(S)$, а значит, для завершения доказательства достаточно заметить, что (λ,λ) оптимален по Парето в S. Доказательство для допустимого множества произвольной размерности проводится вполне аналогичным образом. Детали см. в Томсон [1983*b*]. QED

3.5 Сепарабельность

Для ФКВ сепарабельность представляет ту же идею, что и для ПКБ (см. разд. 2.4): решение, касающееся подмножества агентов, должно быть основано только на уровнях полезностей этих агентов. В рамках теории аксиоматических торгов формулировка этой аксиомы является более запутанной, поскольку сужение на подмножество агентов влияет на границу их возможных полезностей.

Обозначение: для данных двух сообществ N,M при $N \subset M$ и вектора полезностей $u \in E_+^M$ обозначим через H_N^u следующее линейное пространство:

$$H_N^u = \{y \in E_+^M \mid y_j = u_j \text{ для всех } j \in M\backslash N\}.$$

Для всех $S \in \Sigma_0(M)$ (допустимое множество из E_+^M) и для $u \in S$ обозначим $t_N^u(S) = \pi_N(H_N^u \cap S)$, где π_N – проекция E^M на $E^N \times \{0\}^{M\backslash N}$.

Таким образом, u является допустимым вектором для сооб–

щества M, $H^u_N \cap S$ содержит допустимые векторы из S, которые дают для агентов из $M \backslash N$ такие же полезности, что и u, а $t^u_N(S)$ – допустимое множество, оставшееся для сообщества N после того, как агенты из $M \backslash N$ получили то же, что и при распределении u (см. рис. 3.6).

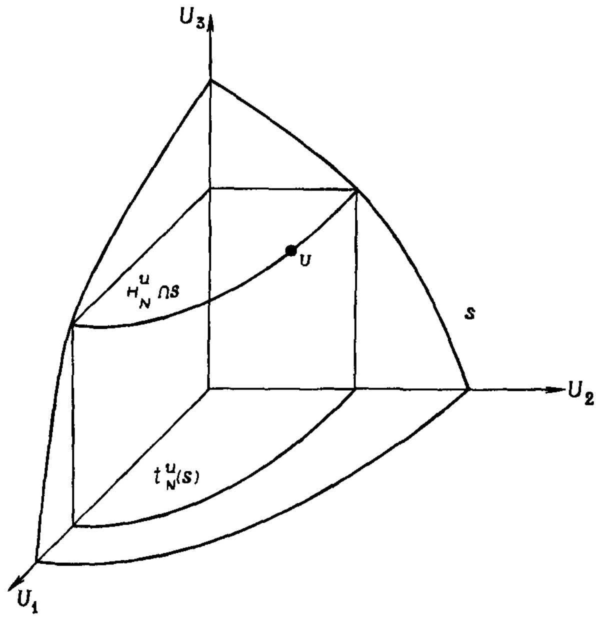


Рис. 3.6

Определим теперь сепарабельность, первоначально введенную в Ленсберг [1987] под названием стабильность.

Сепарабельность

Дана последовательность φ^n, $n = 1,2,\ldots$, ФКВ, по одной для каждого возможного размера сообщества. Для любых двух сообществ N, M при $N \subset M$ и любого допустимого множества $S \in \Sigma_0(M)$ требуется, чтобы

$$\varphi^m(S) = u \Rightarrow \varphi^n(t^u_N) = \pi_N(u). \qquad (9)$$

Другими словами, пусть агенты из N решают договорнться о перераспределении полезностей. Они дают каждому агенту из $M \backslash N$ ту полезность, которую он получает в сообществе M: для сообщества N это приводит к допустимому множеству t_N^u (где $u=\varphi^m(S)$). Свойство (9) говорит о том, что арбитраж внутри подгруппы N на этом ограниченном допустимом множестве будет в точности совпадать с арбитражем для большего сообщества M внутри первоначального допустимого множества.

Для того чтобы привести пример сепарабельной последовательности ФКВ, возьмем просто эгалитарные ФКВ при всех n. Для любого допустимого множества S имеем $\varphi^m(S)=\lambda\cdot e_M$. Заметим, что вектор $\lambda\cdot e_N$ является оптимальным по Парето в $t_N^{\lambda\cdot e_M(S)}$, поскольку $\lambda\cdot e_M$ – оптимален по Парето в S. В свою очередь отсюда следует (9).

Большое семейство сепарабельных ФКВ получается, если мы возьмем возрастающую и строго вогнутую действительную функцию α и максимизируем на S ФКП $\sum_{i\in M}\alpha(u_i)$ для всех m (где m – размер M). Эта функция строго вогнута при всех n и, значит, имеет единственную точку максимума на любом выпуклом допустимом множестве.

Проверим, что соответствующая последовательность ФКВ удовлетворяет (9). Фиксируем $S\in\Sigma_0(M)$ и $u=$ $=\operatorname{argmax}\{\sum_{i\in M}\alpha(u_i)\}$. Выберем $N\subset M$ и предположим, что $\pi_N(u)$ не есть максимум $\sum_{i\in N}\alpha(w_i)$ на t_N^u:

$$\sum_{i\in N}\alpha(u_i)<\sum_{i\in N}\alpha(v_i)\quad\text{для некоторого } v\in t_N^u.$$

Построим вектор w следующим образом: $w_i=v_i$ для $i\in N$, $w_j=u_j$ для $j\in M\backslash N$. Тогда w принадлежит S (по определению t_N^u) и $\sum_{i\in M}\alpha(u_i)<\sum_{i\in M}\alpha(w_i)$, противоречие.

Глубокая теорема Ленсберга [1987] устанавливает обратное свойство: аксиома сепарабельности по существу характеризует последовательность ФКВ, максимизирующих некоторую сепарабельную аддитивную ФКП вида $\sum_i\alpha(u_i)$, где α – строго вогнутая функция. Одно существенное отличие формулировки Ленсберга состоит в том, что последовательность эгалитарных ФКВ (которые не являются результатами максимизации некоторой сепарабельно аддитивной ФКП) не рассматривается как возможное решение из-за отсутствия оптимальности по Парето. В самом деле, Ленсберг рассматривал в качестве области определения ФКВ компактные, выпуклые, исчерпывающие подмножества из E_+^N с непустой внутренностью. Минимальная трансферабельность не предполагалась, так что подмножество S множества E_+^2

$$S = \{(u_1, u_2) \mid 0 \le u_1 \le 1,\ 0 \le u_2 \le 2\}$$

вполне является допустимым множеством. Тем не менее на S эгалитарная ФКВ (определенная по (3)) выбирает (1,1), что не является оптимумом Парето (это – оптимум только в слабом смысле).

Наконец, результат Ленсберга использует аксиому непрерывности ФКВ в дополнение к сепарабельности. При этом дополнительном требовании вне рассмотрения остаются любые оптимальные по Парето переопределения эгалитариого метода (такие, как максимизация лексиминного ПКБ), которые удовлетворяют свойству сепарабельности.

Доказательство теоремы Ленсберга трудное, так что мы даже не будем приводить набросок этого доказательства. Она вскрывает глубокую аналогию между двумя аксиомами сепарабельности: для ПКБ (определение 2.4 и теорема 2.5) и для ФКВ.

3.6 Аддитивность

Обратимся к нескольким аксиомам, связанным с классическим утилитаризмом.

Пусть теперь опять сообщество фиксировано. Для даиного N ФКВ φ называется *утилитарной*, если она выбирает вектор, при котором максимальна общая полезность:

$$\text{для всех } S \in \Sigma_0$$

$$\{\varphi(S) = u\} \Rightarrow \left\{\sum_{i=1}^{n} u_i \ge \sum_{i=1}^{n} v_i \quad \text{при } v \in S\right\}. \tag{10}$$

Заметим, что для некоторых допустимых множеств (таких, как единичный симплекс в E_+^N) утилитарная задача допускает много решений. Условие (10) не фиксирует определенного дополнительного правила. Для простоты в этом разделе мы еще более ограничим область допустимых множеств. Вместо того чтобы иметь дело с Σ_0 (определение 3.1), мы будем использовать область Σ_{00}, состоящую из всех компактных, *строго* выпуклых и исчерпывающих подмножеств E_+^N. Оставляем читателю проверку того, что Σ_{00} является подмножеством Σ_0 (из строгой вогнутости и исчерпываемости следует минимальная трансферабельность). Ниже мы объясним (замечание 3.3), как основной результат может быть сформулирован для области Σ_0.

На каждом допустимом множестве $S \in \Sigma_{00}$ утилитарная ФКП имеет единственный максимум, одиозначно определяющий утилитарную ФКВ, обозначенную φ_*. Эта ФКВ коммутирует с взятием выпуклой комбинации допустимых множеств.

Обозначение: для данного числа λ, $0 \le \lambda \le 1$ выпуклая комбинация двух подмножеств S, S' из E_+^N обозначается $\lambda S + (1-\lambda)S'$:

$$u \in \lambda S + (1-\lambda)S' \iff \exists\, v \in S,\ v' \in S' :\ u = \lambda v + (1-\lambda)v'.$$

Теорема 3.4 (Майерсон [1981]). *В области Σ_{00} утилитарная ФКВ коммутирует с взятием выпуклых комбинаций*:

$$\varphi_*(\lambda S + (1-\lambda)S') = \lambda\varphi_*(S) + (1-\lambda)\varphi_*(S'),$$
$$\text{для всех } S, S' \in \Sigma_{00}, \text{ для всех } \lambda,\ 0 \le \lambda \le 1. \tag{11}$$

Обратно, других ФКВ из Σ_{00}, удовлетворяющих (11), *нет.*

Майерсои [1981] называет (11) условием "отсутствия временного эффекта". История, которую он рассказывает, связаиа со случайными допустимыми множествами, как в том случае, когда возможности кооперации являются неопределеиными. Скажем, с вероятностью λ допустимым множеством будет S, а с вероятностью $1-\lambda$ им будет S'. Условие (11) означает, что не важно, будет ли проводиться арбитраж до или после случайного выбора допустимого множества: если после, то нужно взять $\varphi(S)$ с вероятностью λ и $\varphi(S')$ с вероятностью $1-\lambda$, если до, то иужно рассматривать допустимое множество $\lambda S + (1-\lambda)S'$ (поскольку выборы в S и S' не определены).

Доказательство теоремы 3.4. Пусть даны N и ФКВ φ иа $\Sigma_{00}(N)$. Для всех S обозначим через $Q(S)$ следующнй конус в E_+^N:

$$Q(S) = \{\ p \in E_+^N \mid \max_{u \in S}(p \cdot u) > p \cdot \varphi(S)\ \}.$$

Предположим, что существует некоторое $p \in E_+^N$, $p \ne 0$, такое, что для всех $S \in \Sigma_{00}$ выполнеио $p \cdot \varphi(S) = \max_{u \in S}(p \cdot u)$. Тогда p должно быть параллельно e. Рассмотрим

$$S = \{ u \in E_+^N \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \leq 1 \},$$

где $p \cdot u$ максимально при $u = p / \|p\|$. По анонимности мы должны получить $\varphi(S) = (1/\sqrt{n})e$.

Таким образом, φ является утилитарной ФКВ тогда и только тогда, когда множества $Q(S)$, $S \in \Sigma_{00}$ не покрывают E_+^N. Предположим, что они покрывают E_+^N, в частности, они покрывают единичный симплекс, являющийся компактным множеством. Поскольку каждое множество $Q(S)$ открыто, то конечного подмножества $Q(S_1), \ldots, Q(S_K)$ достаточно для покрытия единичного симплекса. Положим $S = (1/K)\sum_{k=1}^{K} S_k$ и заметим, что S принадлежит Σ_{00} (Σ_{00} замкнуто относительно выпуклых комбинаций). Из предположения (11) следует

$$\varphi(S) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \varphi(S_k). \tag{12}$$

Поскольку $\varphi(S)$ оптимально по Парето в S , то существует вектор p в симплексе E_+^N, такой, что

$$p \cdot \varphi(S) = \max_{u \in S} p \cdot u. \tag{13}$$

По построению существует k_0, такое, что $p \in Q(S_{k_0})$:

$$p \cdot \varphi(S_{k_0}) < \max_{u \in S_{k_0}} p \cdot u \Rightarrow p \cdot \varphi(S_{k_0}) < p \cdot u_{k_0},$$

где u_{k_0} – некоторый вектор из S_{k_0}.

Рассмотрим вектор $u = (1/K)[u_{k_0} + \sum_{k \neq k_0} \varphi(S_k)] \in S$.

По (12) имеем

$$p \cdot \varphi(S) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} p \cdot \varphi(S_k) < \frac{1}{K} [p \cdot u_{k_0} + \sum_{k \neq k_0} p \cdot \varphi(S_k)] = p \cdot u,$$

где u – элемент из S, а значит, имеем противоречие с (13).

QED

Замечание 3.3. Имеется вариант теоремы 3.4 для ФКВ, определенных на области Σ_0 и даже на большей области компактных выпуклых и исчерпывающих подмножеств из E_+^N. Единственной сложностью является распространение аккуратного определения утилитарной ФКВ иа эти области (это может быть сделано несколькими способами).

Замечание 3.4. Утилитарная ФКВ также коммутирует со сложением допустимых множеств

$$\varphi_*(S + S') = \varphi_*(S) + \varphi_*(S') \text{ для всех } S, S' \in \Sigma_{00}. \quad (14)$$

Это свойство также характеризует утилитарную ФКВ, как это утверждается в упражнении 3.8. Можно дать специальную интерпретацию (14): представим, что агенты из N участвуют в двух различных кооперативных предприятиях. Пусть полезиости, полученные в этих предприятиях, могут быть сложены (для этого нужно рассматривать полезности как трансферабельные платежи). Свойство (14) означает, что не важно, имеем ли мы дело с двумя отдельными задачами арбитража или агрегируем их в одну задачу.

Замечание 3.5. Несмотря на относительно слабое этическое обоснование, условия аддитивности (14) и аффинности (11) привлекли большое внимание благодаря их математической трактовке. Ослабленными вариантами этих условий являются

супераддитивность: $\varphi(S) + \varphi(S') \le \varphi(S + S')$ и

супераффинность: $\lambda\varphi(S) + (1-\lambda)\varphi(S') \le \varphi(\lambda S + (1-\lambda)S')$.

Оба свойства выполнены для эгалитарной ФКВ и для некоторых других. Майерсон [1981] использовал супераффинность для совместной характеризации утилитарной и эгалитарной ФКВ. Машлер и Перлс [1981*a*, *b*] объединяли супераддитивность с независимостью от масштаба, с тем чтобы получить новую ФКВ при $n = 2$ и результат о противоречивости этих свойств при $n \ge 3$.

Другим интересиым вариантом аксиомы является ограниченная аддитивность по Петерсу (Петерс [1986*a*]).

Упражнения

3.1 Некоторые контрпримеры

(*a*) Рассмотрим следующие два подмножества из $\Sigma_2(2)$:

$$S = \{u_1, u_2 \in E^2_+ \mid \max\{2u_1 + u_2,\ u_1 + 2u_3\} \le 3\},$$

$$S' = \{(u_1, u_2) \in E^2_+ \mid \max\{\tfrac{5}{2}u_1 + u_2,\ \tfrac{10}{7}u_1 + \tfrac{10}{7}u_2\} \le 4\}.$$

Вычислите решения для S и S' по утилитарной ФКВ и ФКВ Нэша. Проверьте, что ни одна из них не удовлетворяет свойству монотонности по допустимому множеству.

(b) Рассмотрите подмножество S'' из $\Sigma_0(3)$, которое является выпуклой оболочкой $S\times\{0\}$, (1.4,0,0.8) и (0,0,0.9). Найдите решения на S'' по утилитарной ФКВ и ФКВ Нэша. Проверьте, что ни одна из этих двух ФКВ не удовлетворяет требованию монотонности по составу участников.

(c) Рассмотрим следующие два подмножества из $\Sigma_{00}(2)$:

$$S_1 = \{(u_1, u_2) \in E_+^2 \mid u_1^2 + 8u_1 + u_2^2 \le 9\},$$

$$S_2 = \{(u_1, u_2) \in E_+^2 \mid u_1^2 + 8u_2 + u_2^2 \le 9\}.$$

Используя эти множества, покажите, что эгалитарная ФКВ и ФКВ Нэша не удовлетворяют требованиям аддитивиости (14) и аффинности (11).

3.2 *Дележ продуктов*

Рассмотрим модель из упражнения 2.1. Два агента должны поделить a единиц продукта A и b единиц продукта B. Их полезности равны $u_i = \alpha_i a_i + \beta_i b_i$ при $i = 1,2$. Предположим, что все коэффициенты α_i, β_i положительные и что $\alpha_2/\beta_2 < \alpha_1/\beta_1$.

(a) Покажите, что с этими функциями полезности относительная эгалитарная ФКВ выбирает следующее распределение (принимая за нуль нулевое распределение):

$$\text{если } \frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2} \le \frac{b^2}{a^2}, \text{ то } \begin{cases} a_1 = a, \\ b_1 = a\cdot\dfrac{b^2/a^2 - \alpha_1/\beta_1\cdot\alpha_2/\beta_2}{2b/a + \alpha_2/\beta_2 + \alpha_1/\beta_1}, \end{cases}$$

$$\text{если } \frac{b^2}{a^2} \le \frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \text{ то } \begin{cases} b_1 = 0, \\ a_1 = a - b\cdot\dfrac{a^2/b^2 - \beta_1/\alpha_1\cdot\beta_2/\alpha_2}{2a/b + \beta_2/\alpha_2 + \beta_1/\alpha_1}. \end{cases}$$

(b) Аналогично найдите относительное эгалитарное решение, когда предпочтения представлены той же линейной функцией полезности, но с нулем при распределении $a_1 = a/2$, $b_1 = b/2$.

3.3 Нежелание рисковать

Два брата получают в качестве общего подарка два лотерейных билета. Билет A выигрывает 200 долларов с вероятностью 1/2, а билет B выигрывает 1000 долларов с вероятностью 1/10. Они должны поделить между собой эти билеты, причем денежные компенсации не допускаются. Вместо этого они распределяют оба билета случайным образом: агент 1 (агент 2) получает билет A с вероятностью λ (соответственно $(1-\lambda)$), и он получает билет B с вероятностью μ (соответственно $(1-\mu)$).

Агент 1 нейтрален к риску: для него полезность пары (λ,μ) есть просто математическое ожидание выигрыша:

$$u(\lambda A + \mu B) = 100\cdot\lambda + 100\cdot\mu .$$

Агент 2, напротив, не любит рисковать: если билет A оценивается в 100 единиц полезности (что бы ни значили эти единицы), то билет B оценивается только в $100 - r$ тех же единиц (где r – мера его нежелания рисковать). Для него полезность пары $(1-\lambda,1-\mu)$ есть

$$v((1-\lambda)A + (1-\mu)B) = 100\cdot(1-\lambda) + (100-r)\cdot(1-\mu).$$

Вычислите распределение билетов, рекомендуемое по ФКВ Нэша и по относительной эгалитарной ФКВ.

Используя формулы упражнений 2.1 и 3.1, вычислите потери в ожидаемом денежном выигрыше агента 2 относительно r, $0 \le r \le 100$.

3.4 Характеризация относительной эгалитарной ФКВ (Калаи и Смородинский [1975])

Даны сообщество N и допустимое множество $S \in \Sigma_0(N)$. Напомним, что $u_i^m(S)$ есть наибольшая допустимая полезность для агента i во множестве S (см. (4)). Рассмотрим следующую аксиому для ФКВ φ.

Ограниченная монотонность по допустимому множеству:
для всех $S, S' \in \Sigma_0$:
$\{\ u_i^m(S) = u_i^m(S')$ и $S \subset S'\} \Rightarrow \{\ \varphi(S) \le \varphi(S')\ \}$.

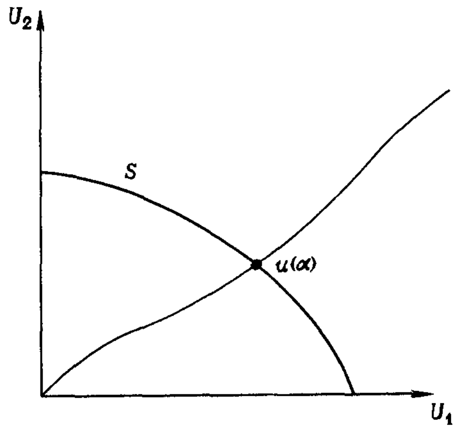


Рис. 3.7

(a) Покажите, что ФКВ, соответствующие ФКП Нэша и утилитарной ФКП, не удовлетворяют требованию ограниченной монотонности по допустимому множеству. Используйте следующий пример, предложенный в Петерс [1986b, с.51].

$$S = \{(u_1, u_2) \in E_+^2 \mid \max\{\tfrac{1}{3}u_1 + u_2,\ u_1 + \tfrac{1}{3}u_2\} \leq 1\},$$

$$S' = \{(u_1, u_2) \in E_+^2 \mid \max\{\tfrac{6}{19}u_1 + u_2,\ u_1 + \tfrac{1}{14}u_2\} \leq 1\}.$$

(b) Покажите, что эгалитарная и относительная эгалитарная ФКВ удовлетворяют требованию ограниченной монотонности по допустимому множеству.

(c) Покажите, что относительная эгалитарная ФКВ характеризуется аксиомами независимости от масштаба и ограниченной монотонности по допустимому множеству.

3.5 ФКВ, монотонные вдоль пути (Томсон и Майерсон [1980])

В этом упражнении ФКВ удовлетворяет требованию единогласия, но не обязательно анонимна.

Рассмотрим возрастающий путь в E_+^N, а именно отображение $\alpha \longrightarrow u(\alpha) = (u_i(\alpha))$ из E_+^N в E_+^N, где $u(0) = 0$, u_i — непрерывная и неубывающая функция от α для каждого i, и

$\sum_{i \in N} u_i$ возрастает по α (см. рис. 3.7). Для каждого множества $S \in \Sigma_0(N)$ определим

$$\varphi(S) = \sup \{ u(\alpha) \mid u(\alpha) \in S \}. \tag{15}$$

(*a*) Покажите, что тем самым определена (неанонимная) ФКВ, удовлетворяющая требованию монотонности по допустимому множеству.

(*b*) Обратно, покажите, что (неанонимная) ФКВ удовлетворяет требованию монотонности по допустимому множеству, если она может быть записана в виде (15) для некоторого возрастающего пути $\alpha \longrightarrow u(\alpha)$.

Подсказка: для всех α положим

$$T_\alpha = \{ u \in E_+^N \mid \sum_{i \in N} u_i = \alpha \}$$

и определим $u(\alpha) = \varphi(T_\alpha)$. Покажите тогда, что $\alpha \longrightarrow u(\alpha)$ – требуемый путь.

В Петерс [1986*b*] (предложение 5.14) предлагается в таком же духе обобщить на немонотонный случай относительный эгалитаризм.

3.6 Еще одна характеризация ФКВ Нэша (Рот [1979])

В этом упражнении ФКВ удовлетворяет требованию анонимности, но не обязательно удовлетворяет требованию единогласия.

Рассмотрим ФКВ, удовлетворяющую на Σ_0 аксиомам независимости от масштаба, НПАН (и анонимности). Покажите, что тогда это – либо ФКВ Нэша, либо постоянная ФКВ: $\varphi(S) = 0$ при всех $S \in \Sigma_0$.

Подсказка: Предположите, что для некоторого допустимого множества $S \in \Sigma_0$ получается $\varphi(S) \neq 0$ и $\varphi(S)$ доминируемо по Парето в S. Тогда положите $S' = \lambda S$, где λ меньше 1, и получите противоречие при λ достаточно близком к единице.

3.7 Другая интерпретация ФКВ Нэша (Шепли [1969])

Даны сообщество N и допустимое множество $S \in \Sigma_0(N)$. Пусть u^* – вектор, выбранный в S по ФКВ Нэша.

(*a*) Покажите, что все координаты u^* положительны (кроме $S = \{0\}$, когда $u = 0$). Обозначим $p = (1/u_1^*, \ldots, 1/u_n^*)$. Покажите, что u^* является решением системы:

$$u \in S,\ p \cdot u \geq p \cdot v \text{ для всех } v \in S \text{ и }$$
$$p_i u_i = p_j u_j \text{ для всех } i, j. \qquad (16)$$

Это говорит о том, что индивидуальные полезности взвешены, как $p_1, \ldots, p_n$, соответственно. Распределение благосостояния u^* является одновременно утилитарным и эгалитарным решением.

(*b*) Обратно, фиксируем вектор $p \in E_+^N$, $p \neq 0$ и рассмотрим систему (16) с неизвестным u. Покажите, что система не имеет решения, если вектор p не параллелен $(1/u_1^*, \ldots, 1/u_n^*)$. В этом последнем случае покажите, что решение Нэша u^* является единственным решением системы (16).

3.8 Вариант теоремы 3.4

(*a*) Покажите, что эгалитарная ФКВ супераддитивна:

$$\varphi(S) + \varphi(S') \leq \varphi(S + S') \quad \text{для всех } S, S' \in \Sigma_0.$$

Покажите, что относительная эгалитарная ФКВ не супераддитивна (и не субаддитивна).

(*b*) Покажите, что в области Σ_{00} (см. разд. 3.6) утилитарная ФКВ характеризуется аддитивностью:

$$\varphi(S) + \varphi(S') = \varphi(S + S') \quad \text{для всех } S, S' \in \Sigma_{00}.$$

3.9 Другая характеризация утилитаризма

В этом упражнении область $\tilde{\Sigma}$ допустимых множеств состоит из всех подмножеств S из E^N (а не из E_+^N), удовлетворяющих следующим свойствам:

$$S \text{ замкнуто, выпукло, исчерпывающее и } S \neq E^N.$$

Дана ФКВ φ, определенная на $\tilde{\Sigma}$ (она удовлетворяет требованиям анонимности и единогласия), такая что

$$\varphi(S + a) = \varphi(S) + a \text{ для всех } S \in \tilde{\Sigma},\ a \in E^N,$$

где $S + a$ есть просто множество S, сдвинутое на a. Предположим, более того, что φ удовлетворяет НПАН (свойство (5) для $\tilde{\Sigma}$). Покажите, что φ является утилитарной ФКВ в смысле свойства (10).

Часть II

Кооперативные игры

Глава 4

Игры с распределением затрат и ядро

Обзор

В кооперативной игре для сообщества N рассматривается не только допустимое множество полезностей для максимальной коалиции N, но и множество полезностей для каждой коалиции (непустого подмножества) из N, включая коалиции, состоящие из единственного агента. Каждое из $2^n - 1$ множеств полезностей рассматривается как модель благосостояния из ч. I, т. е. как допустимое множество кооперативных возможностей: если агенты в данной коалиции договорятся, то они могут реализовать любое распределение полезностей из этого множества. Игровая модель не описывает, какие действия они должны произвести, чтобы достигнуть заданного распределения полезностей. Это должно быть ясно из конкретной микроэкономической модели, порождающей кооперативную игру.

Мы рассматриваем игровую кооперативную модель как расширение модели аксиоматических торгов (гл. 3). Последняя определяет допустимое множество полезностей для максимальной коалиции N и для каждой коалиции, состоящей из одного агента. В самом деле, полезность, соответствующая разладу, показывает для данного агента его возможные затраты, связанные с присоединением к максимальной коалиции. Таким образом, единственный новый ингредиент кооперативной игры – множество возможностей промежуточных коалиций (состоящих из не менее 2 и не более $n-1$ агентов).

Для кооперативной игры возникает следующая нормативная проблема: при всеобщей кооперации требуется выбрать исход из допустимого множества максимальной коалиции N (в действительности это, как правило, следует из принципа единогласия, см. ниже). Как при этом должны быть использованы множества полезностей подкоалиций, чтобы ограничить, а возможно, и полностью определить этот выбор? Понятие ядра предполагает, что эти коалиционные множества полезностей рассматриваются как возможные затраты, связанные с кооперацией с остальными агентами. В ядре мы стараемся защитить права одновременно всех за счет того, что ни одна коалиция агентов не имеет такого допустимого вектора полезностей, который был бы предпочтительнее для нее результата всеобщей кооперации.

Понятие ядра представлено иногда в литературе по распределению затрат под видом *принципа отделения* или *отсутствия субсидий* (см. Фаульхабер [1975] об этих принципах). Систематическое приложение этой идеи к микроэкономике началось с пионерской работы Шубик [1962]. Вскоре после этого Дебре и Скарф [1963], Скарф [1967] и Фоули [1967], [1970] успешно применяли концепцию ядра для анализа экономики обмена, экономики производства и экономики общественных продуктов соответственно. Таким образом, была показана применимость этого понятия для широкого круга проблем: некоторые из этих работ обсуждаются в ч. III (гл. 6 и 7).

Примеры, обсуждаемые в этой и следующих главах, всегда соответствуют *супераддитивным* кооперативным играм. Супераддитивность означает следующее. Все, что могут сделать коалиции независимо, может сделать и объединение этих коалиций. Важным следствием этого условия является принадлежность любого оптимального по Парето распределения допустимому множеству полезностей максимальной коалиции N. В супераддитивной игре принцип единогласия приводит ко всеобщей кооперации. В большинстве экономических примеров кооперативные игры супераддитивны.

Удивительный, но простой факт: в супераддитивной кооперативной игре ядро может быть пусто. Даже если кооперация всех есть единственный эффективный исход, он может быть несовместим с совокупностью коалиционных прав. Нашей основной задачей в гл. 4 является иллюстрация этой возможности, а также установление некоторых математических свойств, предотвращающих ее проявление. Концепция ядра играет центральную роль в нашем обсуждеиии вплоть до гл. 7 (см. также разд. 10.3, 10.4).

В первых трех разделах этой главы (так же, как во всей гл. 5) мы ограничимся рассмотрением кооперативных игр с *трансферабельной полезностью* (ТП-игр). Это связано с предположением, что полезиости наших агентов квазилинейны, т. е. что имеет место аддитивная декомпозиция на деньги и другие товары, причем зависимость от денег линейная. Полезность может быть свободно передана от одного агента к другому за счет денежных платежей. В рамках классического анализа благосостояния (как это рассматривалось в ч. I) все просто: оптимальность по Парето эквивалентна максимизации общей полезности, в то время как побочные платежи (денежные платежи) осуществляют перераспределение, в частности при простом эгалитаризме, совместимом с оптимальностью по Парето. Тем не менее теория ТП кооперативных игр осложнена информацией о возможных коалиционных затратах.

В разд. 4.1 мы обсуждаем игры с распределением затрат и определяем соответствующие ядра. Устанавливается, что множество распределений из ядра может быть большим, малым или даже пустым. Таким образом, требования, связанные с определением ядра, могут слабо сужать множество распределений затрат, а могут быть и несовместны. Это делает осмысленным более детерминированный подход к кооперативным играм, когда для каждой кооперативной игры выбирается единственное распределение. Эта точка зрения развивается в гл. 5. В разд. 4.2 мы охарактеризуем класс ТП кооперативных игр, в которых ядро не пусто (теорема 4.1). Этот полезный результат является следствием стандартиых методов линейного программирования.

Все примеры кооперативных игр в данной главе связаны с ценообразованием в естественной монополии. Технология производства доступна как сообществу N, так и любой подкоалиции S. Технология обладает свойством естественной монополии (субаддитивность затрат), что приводит к супераддитивным играм и делает совместное производство единственным эффективным способом организации. Регулируемая монополия (от которой требуется только покрытие затрат) будет максимизировать коллективное благосостояние. Но она не может определить линию распределения прибыли между агентами в соответствии с их различным спросом (поскольку максимизация доходов запрещена). Здесь вступает в силу концепция ядра как общий принцип, ограничивающий распределение затрат: на практике отсутствие субсидий является обычным ограничением для большинства общественных фирм. Детали обсуждаются в Баумоль, Панзар и Уиллиг [1982], а также в Шарки [1982].

В разд. 4.3 мы начинаем систематический анализ этой проблемы ценообразования в рамках модели кооперативной игры (эта точка зрения развивается в гл. 7 за счет рассмотрения спроса). Концепция ядра трансформируется в понятие свободного от субсидий вектора цен, а непустота ядра приводит к понятию обеспеченной функции затрат (теорема 4.2).

Наконец, в разд. 4.4 мы определяем более общую модель кооперативных игр без предположения о трансферабельной полезности (НТП-игры). Мы приводим (без доказательства) достаточное условие непустоты ядра такой игры (теорема 4.3). НТП-модель может быть найдена в некоторых приложениях в гл. 7, а также в гл. 10.

4.1 Принципы отделения и отсутствия субсидий

Пример 4.1. Распределение затрат на объект

Пусть $N=\{1,\ldots,n\}$ представляет множество потенциально возможных потребителей общественной службы или объекта коллективного пользования. Каждый потребитель может быть либо обслужен, либо нет, например он либо получает телефон, либо нет, подключается к локальной системе водоснабжения, либо нет и т.д. (в разд. 4.3 мы обсудим случай бесконечно делимого продукта или продуктов).

Затраты суммируются в общую функцию затрат $c(S)$, где S – любая коалиция (подмножество) агентов, а $c(S)$ – минимальные затраты на обслуживание S наиболее эффективным способом. Распределение затрат есть вектор $(x_1,\ldots,x_n)$, такой, что $x_1+\ldots+x_n=c(N)$. Другими словами, мы хотим обслужить всех потребителей и хотим поделить соответствующие затраты.

Типичный пример такой проблемы из области планирования капиталовложений – строительство соседними муниципалитетами совместной системы водоснабжения. Рассмотрим числовой пример с тремя агентами. Предположим, что величины затрат для трех городов A, B, C таковы:

затраты на систему водоснабжения

город A отдельно: 120, город B: 140, город C: 120,
коалиция $\{A,B\}$: 170, коалиция $\{B,C\}$: 190,
коалиция $\{A,C\}$: 160,
три города вместе: 255.

Если рассматриваются только два агента, то задача распределения затрат имеет непосредственное эгалитарное решение. Выбросим, например, из рассмотрения город C:

$$c(A) = 120,\ c(B) = 140,\ c(AB) = 170.$$

Экономия затрат от совместного производства равна $c(A) + c(B) - c(AB) = 90$. Равное распределение этой экономии приводит к

$$c_A = 120 - \frac{1}{2}(90) = 75,\ c_B = 140 - \frac{1}{2}(90) = 95.$$

Если участвуют три агента, то мы можем попытаться использовать тот же метод. Сосчитаем сначала общую экономию на затратах

$$c(A) + c(B) + c(C) - c(ABC) = 125.$$

Затем распределим ее равным образом между тремя городами:

$$c_A = 120 - \frac{1}{3}(125) = 78.3\ ,\ c_B = 140 - \frac{1}{3}(125) = 98.3,$$
$$c_C = 120 - \frac{1}{3}(125) = 78.3.$$

Приемлемость такого распределения затрат проблематична. Общие затраты, получающиеся для коалиции AB, превосходят затраты на их обслуживание независимо от города C:

$$c_A + c_B = 176.6 > 170 = c(AB).$$

Таким образом, коалиция AB скорее отделится и использует свои собственные кооперативные возможности, чем будет терпеть ущерб от такого распределения затрат. Во всяком случае, коалиция AB может оспаривать чрезмерное субсидирование агента C при таком распределении затрат.

На протяжении ч. I нам дано множество N агентов, и мы рассматриваем *коалиции* агентов. Коалиция есть любое *непустое* подмножество из N. Само множество N также есть коалиция, которую называют максимальной коалицией. Обозначим множество всех коалиций через 2^N, приняв соглашение, что пустое множество не есть элемент 2^N.

Принцип отделения гласит, что коалиция никогда не заплатит цену, превосходящую затраты, которые должна понести эта коалиция, если она захочет обслуживаться самостоятельно:

$$\text{для всех}\quad S \subset N:\quad \sum_{i\in S} x_i \le c(S). \tag{1}$$

Принцип *отсутствия субсидий* говорит, что никакая коалиция потребителей не должна платить меньше, чем дополнительные затраты на ее обслуживаиие (разница в затратах с учетом этой коалицин и без нее):

$$\text{для всех}\quad S \subset N:\quad \sum_{i\in S} x_i \ge c(N) - c(N\backslash S). \tag{2}$$

Поскольку $\sum_{i\in N} x_i = c(N)$, то оба этих принципа эквивалентны. В самом деле, иеравенство (2) записывается в виде

$$\sum_{i\in S} x_i \ge \sum_{i\in N} x_i - c(N\backslash S) \iff c(N\backslash S) \ge \sum_{i\in N\backslash S} x_i$$

Определение 4.1. *Дана игра с распределением затрат* (N,c), *где* $N=\{1,\ldots,n\}$ *– множество агентов, а* c *связывает с каждой коалицией* S *из* N *ее затраты* $c(S) \ge 0$.

Ядром (N,c) *называется множество распределений затрат, удовлетворяющих* $\sum_{i=1}^{n} x_i = c(N)$ *и свойству* (1).

Давайте найдем распределение затрат из ядра для нашего примера. Свойство (1) есть следующая система неравенств, где мы обозначили города A,B,C агентами 1,2,3 соответственно:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 255,\quad x_1 \le 120,\quad x_2 \le 140,\quad x_3 \le 120,$$
$$x_1 + x_2 \le 170,\quad x_2 + x_3 \le 190,\quad x_1 + x_3 \le 160.$$

Для того чтобы представить решение системы более наглядным образом, произведем замену переменных. Определим экономию затрат агента i как $y_i = c(i) - x_i$. Тогда получим новую систему:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 125, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,$$
$$y_1 + y_2 \geq 90, \quad y_2 + y_3 \geq 70, \quad y_1 + y_3 \geq 80.$$

На рис. 4.1 изображен симплекс $\{y_i \geq 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 125\}$, внутри которого трн дополнительных ограничения выделяют небольшой треугольник (заштрихованиая область) – ядро игры с распределением затрат. Центр этого треугольника легко находится:

$$y^* = (51.7, 41.7, 31.7),$$

соответствующее распределение затрат таково:

$$x^* = (68.3, 98.3, 88.3).$$

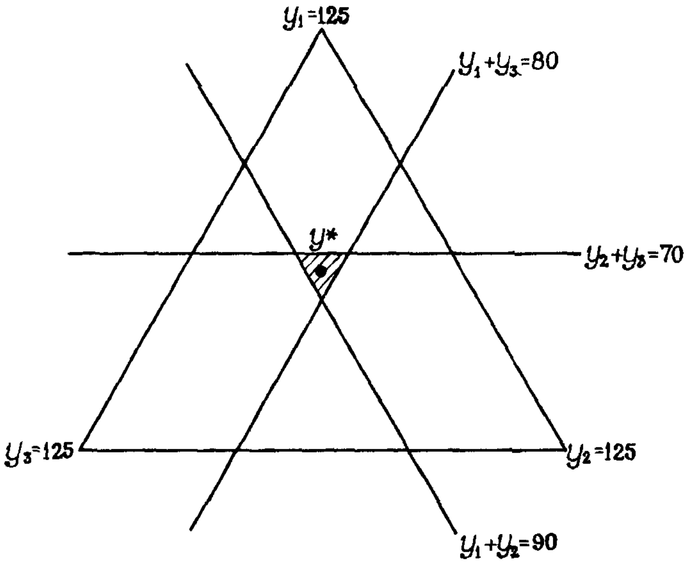


Рис. 4.1

Эта точка является разумным компромиссом (на самом деле это есть N–ядро игры с распределением затрат: см. разд. 5.4).

Ядро является нашей первой попыткой подойти к концепции решения кооперативных игр. Тем не менее оно еще далеко не однозначно определяет распределение ресурсов. В примере 4.1 ядро является характерным треугольником. С другой стороны, оно может быть также пустым множеством, т.е. система условий (1) может совсем не иметь решений. Предположим, что в примере 4.1 мы повышаем затраты максимальной коалиции с 255 до 265. Соответствующая система (1) не имеет решения:

$$\{x_1 + x_2 \le 170,\ \ x_2 + x_3 \le 190,\ \ x_1 + x_3 \le 160\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) \le 170 + 190 + 160 = 520,$$

что противоречит $x_1 + x_2 + x_3 = 265$.

Заметим также, что и при более высокнх затратах $c(ABC) = 265$ совместное производство объекта по-прежнему эффективно. В самом деле, это следует из иеравенств

$$c(ABC) \le c(A) + c(B) + c(C),$$
$$c(ABC) \le c(A) + c(BC),\ \ c(AB) + c(C),\ \ c(B) + c(AC).$$

Это свойство называется субаддитивностью затрат и означает, что наилучшей оргаиизацией пронзводства является совместное производство объекта, обслуживающего все три города.

В нашем примере ядро является небольшим множеством векторов распределений затрат. Все почти полностью определеио (затраты агента внутри ядра изменяются не более чем на 10 единиц). Следующий пример показывает, что ядро может быть и очень большим.

Вторым примером является модель распределения затрат на общий объект, в которой учитывается спрос потребителя. Так, в игре с распределением прибыли каждой коалиции ставится в соответствие максимальная выгода от кооперации. Это считается полным описанием коалицнонных возможностей. Мы по-прежнему полагаем, что полезности потребителей квазилннейны и что пронзводнтся неделимый продукт. Эти два предположения будут ослаблены в гл. 7, где обсуждается существование ядра в экономнке производства (см., в частности, разд. 7.3).

Пример 4.2. Распределение затрат с независимым спросом

Рассматривается коллективный объект (система водоснабжения), обслуживающий четырех потребителей. Структура затрат счнтается симметричной:

затраты на обслуживание	один потребитель:	40
	два потребителя:	60
	три потребителя:	70
	все четыре потребителя:	80

Доходы агентов от использования объектов таковы:

$$b_1 = 41,\ b_2 = 24,\ b_3 = 22,\ b_4 = 12.$$

Квазилинейиость полезности означает, что потребитель i соглашается на покупку объекта тогда и только тогда, когда он должеи заплатить ие больше b_i. Независимость спроса означает, что агенту i безразлично, какое потребление объекта соответствует агенту j (нет предположения о взаимовлиянии).

Заметим, во-первых, что функция затрат *субаддитивна*: для любых двух непересекающихся коалиций S,T имеем $c(S) + C(T) > c(S \cup T)$. Доказательство этого факта таково: функция затрат на одного агента $c(S)/|S|$ строго убывает с возрастанием размера S, следовательно:

$$\left.\begin{array}{l} c(S \cup T) < a = \dfrac{|S|+|T|}{|S|}\, c(S) \\ c(S \cup T) < b = \dfrac{|S|+|T|}{|T|}\, c(T) \end{array}\right\} \Rightarrow c(S \cup T) < \frac{|S|}{|S|+|T|}\, a +$$

$$+ \frac{|T|}{|S|+|T|}\, b = c(S) + c(T).$$

При субаддитивности затрат неэффективным является обслуживание коалиции S за счет строительства одного объекта и обслуживание непересекающейся с ней коалиции T за счет строительства другого объекта. Таким образом, некоторое наибольшее множество потребителей будет эффективно обслуживаться единственным объектом. Необязательно все потребители будут включены в это множество. В нашем примере, если b_4 уменьшить до 8, то маргинальные затраты на обслуживание агента 4 никогда не будут покрыты его доходом, и значит, будет неэффективио его обслуживать. Другой такой пример и общую формулу см. в упражнении 4.1.

Вычислим возможности коалиции в игре с распределением прибыли. При обслуживаиии коалиции S потребители из S получают прибыль $\sum_{i \in N} b_i - c(S)$. Следовательно, максимальная возможная прибыль для данной коалиции есть наибольшая прибыль по всем ее подкоалициям, включая нулевую прибыль, когда никто не обслуживается. Таким образом:

$$v(S) = \max_{T \subset S} \left\{ \sum_{i \in T} b_i - c(T),\ 0 \right\}$$

В нашем примере

$$v(34) = \max\{\,0,\ 22 - 40,\ 12 - 40,\ (22 + 12) - 60\,\} = 0,$$
$$v(12) = \max\{\,0,\ 41 - 40,\ 24 - 40,\ (41 + 24) - 60\,\} = 5,$$
$$v(14) = \max\{\,0,\ 41 - 40,\ 12 - 40,\ (41 + 12) - 60\} = 1$$

Агенты 3 и 4 не могут получить никакую прибыль ни по отдельности, ни вместе, поскольку их доходы слишком низки. В противоположность этому, если агенты 1 и 2 вступают в кооперацию, то они получают прибыль в пять единиц от производства обслуживающего их объекта. Наконец, если агенты 1 и 4 вступают в кооперацию, то агенту 4 это в действительности не поможет, поскольку обслуживаться будет только агент 1. Аналогичными вычислениями получаем

$$v(1) = 1, \quad v(2) = v(3) = v(4) = 0,$$
$$v(12) = 5,\ \ v(13) = 3,\ \ v(14) = 1,\ \ v(23) = v(24) = v(34) = 0,$$
$$v(123) = 17, \quad v(124) = 7, \quad v(134) = 5, \quad v(234) = 0,$$
$$v(N) = 19.$$

Заметим, что максимальная прибыль 19 достигается при обслуживании всех четырех агентов.

В игре с распределением прибыли принцип отделения утверждает, что каждая коалиция будет довольствоваться прибылью не менее той, которую она может гарантировать себе, порвав с остальными Таким образом, если мы дадим агенту i x_i единиц прибыли, то получим следующие условия на (x_1, x_2, x_3, x_4)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19, \quad x_1 \geq 1, \quad x_2, x_3, x_4 \geq 0,$$
$$x_1 + x_2 \geq 5, \quad x_1 + x_3 \geq 3, \quad x_1 + x_4 \geq 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 17, \quad x_1 + x_2 + x_4 \geq 7, \quad x_1 + x_3 + x_4 \geq 5.$$

Отметим, что опущены некоторые несущественные неравенства, такие, как $x_2 + x_3 \geq 0$ или $x_2 + x_3 + x_4 \geq 0$.

Проверим сначала, что в этом примере ядро устанавливает слишком широкие рамки для распределения затрат. Точнее, это весьма большое подмножество симплекса $\sum_{i=1}^{4} x_i = 19$, $x_1 \geq 1$, $x_2, x_3, x_4 \geq 0$. Поскольку кооперация с агентом 1 необходима для получения какой-либо прибыли, то этот агент может получить все 19 единиц прибыли: $x' = (19,0,0,0)$ – распределение из ядра. Но таковым является также и распределение $x'' = (1,8,8,2)$, где вся выгода от кооперации с агентом 1 идет остальным агентам, в то время как агент 1 остается на своем собственном гарантированном уровне прибыли. Соответствующее распределение затрат (при $c_i = b_i - x_i$) таково:

$$c' = (22,24,22,12) \quad \text{соответствует } x',$$
$$c'' = (40,16,14,10) \quad \text{соответствует } x''.$$

Определение 4.2 (Джиллис [1959]). *Кооперативная игра с трансферабельной полезностью (ТП-игра) есть пара (N,v), где N – (конечное) сообщество, а v каждой коалиции S ставит в соответствие ее (числовую) прибыль $v(S)$. Распределение есть такой вектор x из E^N, что $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.* ***Ядро*** *игры (N,v) – это множество распределений x, удовлетворяющих условию:*

$$\text{для всех } S \subset N: \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S). \tag{3}$$

В этом определении величина $v(S)$ рассматривается как прибыль, достижимая для коалиции S, а именно чистый доход в денежном выражении, который агенты из S получат от кооперации.

Определения 4.1 и 4.2 симметричны. Игре с распределением затрат (N,v) соответствует ТП-игра (N,v) (с распределением прибыли) по формуле

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S).$$

Распределению затрат x в (N,c) ставится в соответствие распределение y в (N,v), где $y_i = c(i) - x_i$, $i \in N$. Проверьте, что x является распределением затрат из ядра в (N,c) (условие (1)) тогда и только тогда, когда y есть распределение из ядра в (N,v) (условие (3)). Интерпретация игры с распределением прибыли более удобна для приложений и поэтому общее исследование мы будем проводить в этих терминах.

4.2 Сбалансированные игры

Возможная пустота ядра является наиболее серьезным ограничением этой концепции. Что хорошего дает приицип отделения, если при любом распределении затрат одиа или иесколько коалиций могут возражать против него. Такой принцип не поощряет консенсус, а исключает его. В связи с этим важной проблемой является существование ядра: при каких условиях в даиной кооперативной игре ядро не пусто? Для игр с трансферабельной полезностью этот вопрос решается в рамках линейного программирования.

Необходимым условием непустоты ядра в игре (N,v) является свойство супераддитивности. Предположим, что коалиции $S_1,\dots,S_K$ образуют разбиение максимальной коалиции N (они попарно не пересекаются и их объеднненне есть N), тогда должно быть выполнено

$$\sum_{k=1}^{K} v(S_k) \le v(N). \tag{4}$$

В самом деле, если (4) не выполняется, то, складывая неравенства $\sum_{i\in S_k} x_i \ge v(S_k)$, получаем $\sum_{i\in N} x_i > v(N)$, откуда следует пустота ядра.

Тем не менее свойства супераддитивности (4) (для каждого разбиения N) иедостаточно для непустоты ядра, как это показано в примере 4.1 (когда мы поднимаем $c(ABC)$ до 265). Необходимым и достаточным условием существования ядра является существенное усилеиие свойства (4). В следующем определении мы будем называть коалицию *собственной*, если она не совпадает с максимальной коалицией.

Определение 4.3. *Для данного сообщества N сбалансированное покрытие есть такое отображение δ из $2^N \setminus \{N\}$ (множества собственных коалиций) в $[0,1]$, что*

$$\sum_{S:\, i\in S} \delta_S = 1 \qquad \text{для всех агентов } i, \tag{5}$$

где суммирование ведется по всем собственным коалициям, содержащим агента i.

Теорема 4.1 (Бондарева [1962]). *Ядро ТП-игры не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия δ имеем*

$$\sum_{S \underset{\neq}{\subset} N} \delta_S \cdot v(S) \le v(N). \qquad (6)$$

Доказательство. Предположим, что x – распределение из ядра игры (N,v), а δ – сбалансированное покрытие. Заметим, что

$$\text{для всех } S \underset{\neq}{\subset} N: \sum_{i \in N} x_i \ge v(S) \Rightarrow \delta_S \left[\sum_{i \in S} x_i\right] \ge \delta_S \cdot v(S).$$

Суммируя эти неравенства и используя (5), имеем

$$\sum_{S \underset{\neq}{\subset} N} \delta_S \cdot v(S) \le \sum_{S \underset{\neq}{\subset} N} \delta_S \cdot x(S) = \sum_{i \in N} \sum_{S: i \in S} \delta_S x_i = \sum_{i \in N} x_i = v(N).$$

Обратно, предположим, что ядро в (N,v) пусто. Это означает, что гиперплоскость $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ не пересекается с выпуклым (не пустым) подмножеством из E^N, определенным неравенствами

$$\sum_{i \in S} x_i \ge v(S) \qquad \text{для всех } S \underset{\neq}{\subset} N.$$

Используя стандартные результаты об отделяющей гиперплоскости (см., например, Рокафеллар [1970]), получаем существование для каждой коалиции S такого неотрицательного числа δ_S, что

$$\text{для всех } x \in E^N: \sum_{i \in N} x_i = \sum_{S \underset{\neq}{\subset} N} \delta_S \left[\sum_{i \in S} x_i\right]$$

$$\text{и} \quad \sum_{S \underset{\neq}{\subset} N} \delta_S \, v(S) > v(N). \qquad (7)$$

Свойство (7) уже эквивалентно свойству (5), что и завершает доказательство.

QED

Замечание 4.1. Игра с распределением затрат (N,c) имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда для любого сбалансированиого покрытия δ выполнеио

$$\sum_{S \underset{\neq}{\subset} N} \delta_S \, c(S) \ge c(N).$$

Условие (6) называется сбалансированностью игры (N,v).

Его не так легко интерпретировать, поскольку сбалансированные покрытия нелегко визуализируются. В любом случае условие (6) означает, что кооперативная прибыль $v(S)$ собственных коалиций не должна быть слишком большой по сравнению с прибылью $v(N)$, доступной максимальной коалиции.

Заметим, что неравенства (6) включают свойства супераддитивности (4). Для этого положим

$$\delta_{S_k} = 1 \text{ для } k = 1,\dots,K,$$
$$\delta_S = 0 \quad \text{для всех других коалиций } S. \tag{8}$$

Заметим также, что сбалансированные покрытия образуют выпуклый, компактный многогранник в E^A, где $A = 2^N \setminus \{N\}$. Значит, свойство (6) достаточно проверить для крайних точек этого многогранника. Если мы сможем найти эти точки, то свойство сбалансированности может быть записано как *конечная* система линейных неравенств на v. Это удобно для всех приложений.

В качестве простой иллюстрации рассмотрим игры с тремя агентами: $N = \{1,2,3\}$. Сбалансированные покрытия образуют многогранник в E^6 размерности 3 с пятью крайними точками. Четыре из них соответствуют разбиениям (1,2,3), (12,3), (1, 23), (2,13), как в (8). Пятое покрытие таково:

$$\delta_S = \frac{1}{2} \quad \text{для} \quad |S| = 2, \qquad \delta_S = 0 \quad \text{для} \quad |S| = 1.$$

Используя (6) для этих пяти покрытий, получаем

Следствие 1 теоремы 4.1. *ТП-игра (N,v) с тремя агентами имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда*

$$v(1) + v(2) + v(3) \le v(N),$$
$$v(1) + v(23), \ v(2) + v(13), \ v(3) + v(12) \le v(N),$$
$$\frac{1}{2}[v(12) + v(23) + v(13)] \le v(N).$$

Далее рассмотрим игры с четырьмя агентами. На этот раз сбалансированные покрытия образуют многогранник в E^{14} с 23 крайними точками! Следовательно, система (6) состоит по крайней мере из 23 различных неравенств. Количество неравенств можно существенно сократить, если предположить супераддитивность игры v:

для любых двух непересекающихся коалиций S,T:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T). \tag{9}$$

Свойству супераддитивности удовлетворяют все экономические игры, обсуждаемые в ч. II и III.

Следствие 2 теоремы 4.1. *Предположим, что ТП-игра* (N,v) *четырех агентов супераддитивна* (*свойство* (9)). *Тогда ее ядро не пусто в том и только том случае, если выполняются семь дополнительных неравенств*

$$\frac{1}{3}[v(123) + v(234) + v(134) + v(124)] \leq v(N), \tag{10}$$

$$\frac{1}{2}[v(123) + v(234) + v(14)] \leq v(N) \tag{11}$$

и пять аналогичных (11) *неравенств с учетом перестановки агентов.*

Доказательство следствия 2.3. Когда агентов четыре, то имеется всего 23 сбалансированных покрытия δ_S, $S \in 2^N \backslash N$, которые не могут быть получены как выпуклые комбинации пары других сбалансированных покрытий. Это двенадцать векторов δ, соответствующих разбиениям множества N (они характеризуются тем, что каждая координата δ_S есть либо ноль, либо единица), четыре вектора типа $\delta_1 = 1$, $\delta_{23} = \delta_{24} = \delta_{34} = \frac{1}{2}$ и $\delta_S = 0$ для остальных коалиций; шесть векторов типа $\delta_{123} = \delta_{234} = \delta_{14} = \frac{1}{2}$ и $\delta_S = 0$ для остальных коалиций и вектор $\delta_S = \frac{1}{3}$ при $|S| = 3$, иначе $\delta_S = 0$. Неравенство (6), когда δ соответствует разбиению множества N, выполняется автоматически по свойству супераддитивности. Неравенство (11) есть просто (6), когда δ – одно из шести. Аналогично, неравенство (10) есть неравенство (6) для равномерного покрытия трехэлементными коалициями. Остается проверить четыре неравенства типа

$$v(1) + \frac{1}{2}[v(23) + v(24) + v(34)] \leq v(N). \tag{12}$$

Они следуют из супераддитивности и условия (11):

$$\left.\begin{aligned} &(11) \Rightarrow v(124) + v(134) + v(23) \leq 2v(N) \\ &(9) \Rightarrow v(1) + v(24) \leq v(124),\ v(1) + v(34) \leq v(134) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (12).$$

QED

В гл. 5 мы дадим другое достаточное условие непустоты ядра, называемое выпуклостью: см. определение 5.2.

4.3 Ценообразование в многопродуктовой монополии

Рассмотрим теперь проблему ценообразования на бесконечно делимые продукты. В центре нашего внимания будет простая задача распределения затрат, т.е. мы до некоторых пор будем игнорировать существующий в экономике спрос (это будет обсуждаться в гл. 7).

Предположим, что регулируемая монополия производит n продуктов, занумерованных от 1 до n. Затраты на производство вектора выпуска $(q_1,\ldots,q_n)$, где q_i – количество продукта i, составляют $C(q_1,\ldots,q_n)$ и измерены в деньгах. Задача состоит в отыскании системы цен $(p_1,\ldots,p_n)$, где p_i – цена на продукт i, которая балансирует бюджет монополиста (регулируемая фирма не предполагает извлечения положительной прибыли) и является в некотором смысле справедливой.

Принцип отсутствия субсидий в этих терминах получает простую формулировку.

Определение 4.4. *Дана функция затрат $C(q_1,\ldots,q_n)$ и уровень выпуска $\bar{q}=(\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_n)$ Скажем, что система цен $p = (p_1,\ldots,p_n)$* **свободна от субсидий**, *если выполнены условия*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\bar{q}_i = C(\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_n), \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot q_i \le C(q_1,\ldots,q_n) \text{ для всех } q,\ 0\le q\le\bar{q}. \tag{14}$$

Уравнение (13) есть условие сбалансированности бюджета: монополист в точности покрывает свои затраты. Свойство (14) является условием отсутствия субсидий. Предположим, что (14) не выполняется. Тогда существует уровень выпуска q, $q\le\bar{q}$, для которого $\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot q_i > C(q)$. Затраты, посчитанные для доли q общего спроса, слишком высоки: подгруппа (коалиция) потребителей, получающая в точности вектор выпуска q, в действительности субсидирует остальную экономику. Заметим, что в этой интерпретации используется понятие потенциальной коалиции неопределенного сообщества.

Только после утверждения из теоремы 4.2 ниже мы сможем точно объяснить связи с моделью ТП-игры.

Альтернативная интерпретация свойства (14) популярна в литературе по организации промышленного производства (см., например, Баумоль, Панзар и Уиллиг [1982]). Если (14) не выполняется, то конкурент может угрожать позиции монополиста следующей стратегией вторжения. Пусть $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i > C(q)$. Тогда соперник, понижая несколько свою цену относительно цены монополиста, обслуживает долю q общего спроса. Поскольку неравенство $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i > C(q)$ строгое, то малой скидки соперника достаточно, чтобы получить некоторую положительную прибыль. Потребители, соответствующие оставшейся доле спроса $\bar{q} - q$, не могут рассчитывать на скидку и должны обслуживаться монополистом, который уже не в состоянии покрыть своих затрат.

В качестве дальнейшей иллюстрации определения 4.4 рассмотрим однопродуктовый случай. Тогда условие (13) переписывается в виде $p = C(\bar{q})/\bar{q}$, а условие (14) превращается в

$$\text{для всех } q,\ 0 \le q \le \bar{q}:\ \frac{C(\bar{q})}{\bar{q}} \le \frac{C(q)}{q}. \tag{15}$$

Таким образом, средние затраты являются свободной от субсидий ценой тогда и только тогда, когда они не выше чем средние затраты на любой меньший выпуск.

Определение 4.5 (Шарки и Телзер [1978]). *Функция затрат $C(q_1,\dots q_n)$ называется обеспеченной тогда и только тогда, когда существует свободная от субсидий система цен для каждого уровня производства.*

В частности, однопродуктовая функция затрат $C(q)$ свободна от субсидий тогда и только тогда, когда средние затраты не возрастают (что соответствует неубывающим доходам на масштаб производства).

Лемма 4.1. *Если функция затрат C является обеспеченной, то она субаддитивна и соответствует возрастающим доходам на масштаб по лучу (ВДМ по лучу):*

C **субаддитивна**, *если:*

$$\text{для всех } q, q' \in E_{+}^{n}:\quad C(q + q') \le C(q) + C(q'). \tag{16}$$

С удовлетворяет **свойству ВДМ по лучу,** *если*

$$\text{для всех } q, q' \in E^n_+,\ \lambda \geq 1:\quad C(\lambda q) \leq \lambda C(q). \tag{17}$$

Доказательство леммы 4.1 является предметом упражнения 4.4.

Как и следовало ожидать, обеспеченность имеет смысл только для технологии производства, которая допускает естественную монополию. Тем не менее субаддитивности и ВДМ по лучу еще не достаточно для выполнения свойства обеспеченности. Контрпример имеется в Шарки и Телзер [1978].

Теорема 4.2. *Дана непрерывная функция затрат $C(q_1,\ldots,q_n)$. Тогда C – обеспечена в том и только том случае, если для любой конечной последовательности $q^k \in E^k_+$, $k = 1,\ldots,K$, следующая игра с распределением затрат $(\{1,\ldots,K\}, c)$ с K агентами имеет непустое ядро, причем*

$$\text{при } S \subset \{1,\ldots,K\}:\quad c(S) = C\Big(\sum_{k\in S} q^k\Big). \tag{18}$$

Данные K агентов с фиксированным спросом (спрос агента k равен q^k) используют совместную технологию C для удовлетворения своих потребностей. Обеспеченность C означает, что мы можем распределнть свои затраты гармонично в соответствии с принципом отделения.

Доказательство необходимости. Пусть C обеспечена. Фиксируем $q^1,\ldots,q^K$ и положим $\bar q = \sum_{k=1}^K q^k$. По определению 4.5 существуют свободные от субсидий цены p на $\bar q$. Из свойства (15) следует, что для любой коалиции $S \subset \{1,\ldots,K\}$ выполнено

$$p\cdot\Big[\sum_{k\in S} q^k\Big] \leq C\Big[\sum_{k\in S} q^k\Big]. \tag{19}$$

Возьмем сбалансированное покрытие δ, умножим каждое неравенство (19) на δ_S и просуммируем их:

$$\sum_{S \subsetneq N} \delta_S \Big\{p\cdot\Big[\sum_{k\in S} q^k\Big]\Big\} \leq \sum_{S \subsetneq N} \delta_S\cdot C\Big[\sum_{k\in S} q^k\Big]. \tag{20}$$

Выражение в левой части (20) записывается как

$$\sum_{S \subsetneq N} \sum_{k\in S} \delta_S (p\cdot q^k) = \sum_{k=1}^{K}\Big[\sum_{S:\, k\in S} \delta_S\Big](p\cdot q^k) = p\cdot \bar q.$$

Значит, по (13) неравенство (20) принимает вид

$$C(\bar{q}) = p \cdot q \le \sum_S \delta_S \cdot C\Big(\sum_{k\in S} q^k\Big).$$

Это означает, что игра с распределением затрат сбалансирована. Следовательно, по замечанию 4.1 ее ядро не пусто.

Достаточность (Это доказательство является адаптированным вариантом из Скарф [1986]). Пусть C – такая функция затрат, что все игры типа (18) имеют непустое ядро. Фиксируем вектор выпуска $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_n)$. Мы должны найти свободные от субсидий цены p на $\bar{q}$. Обозначим через $e^i \in E^n_+$ координатный вектор ($e^i_i = 1$, $e^i_j = 0$ при $j \ne i$). Для любого целого r построим следующую двойную последовательность векторов $q^{i,j}$ из E^n_+:

$$q^{i,j} = (q_i/2^r) \cdot e^i, \quad \text{где} \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, 2^r.$$

Заметим, что $q^{i,j}$ не зависит от j. Рассмотрим игру с распределением затрат с $K = (n \cdot 2^r)$ агентами, определенную по (18). По предположению ее ядро не пусто, значит, мы можем найти такой вектор $a = (a^{i,j})$ из $E^{n\times 2^r}_+$, что

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le 2^r}} a^{i,j} = C(\bar{q}), \qquad \sum_{(i,j)\in S} a^{i,j} \le C\Big[\sum_{(i,j)\in S} q^{i,j}\Big]$$

$$\text{при всех} \quad S \subset \{1, \ldots, K\}.$$

Положим $\delta_i = \sum_{1\le j\le 2^r} a^{i,j}$. Тогда приведенная формула эквивалентным образом переписывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = C(\bar{q}), \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{2^r}\delta_i \le C\Big[\frac{k_1}{2^r} q_1, \ldots, \frac{k_n}{2^r} q_n\Big]$$

$$\text{при всех} \quad k_1, \ldots, k_n, \quad 0 \le k_i \le 2^r. \tag{21}$$

Значит, для каждого целого r мы можем найти вектор $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ в симплексе $\{\delta_i \ge 0, \; \sum_i \delta_i = C(\bar{q})\}$, удовлетворяющий условию (21). Когда r стремится к бесконечности, мы можем выбрать сходящуюся подпоследовательность векторов $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Пусть $(\delta^*_1, \ldots, \delta^*_n)$ – ее предел.

По непрерывности имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^* = C(\bar{q}), \quad \sum_{i=1}^{n} t_i \delta_i^* \le C\left[t_1 q_1, \ldots, t_n q_n\right]$$

$$\text{при всех} \quad t_1, \ldots, t_n, \quad 0 \le t_i \le 1. \tag{22}$$

Определим $p_i = \delta_i^* / q_i$, если $q_i > 0$, и $p_i = 0$ в противном случае. Проверим, что если $q_i = 0$, то $\delta_i = 0$ для всех i (по (21)), так что $\delta_i^* = 0$. Следовательно, (22) эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i = C(\bar{q}), \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (t_i q_i) \le C((t_1 q_1), \ldots, (t_n q_n))$$

$$\text{при всех} \quad (t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n.$$

Это говорит о том, что p – желаемые свободные от субсидий цены. QED

Известны еще некоторые достаточные условия обеспеченности функции затрат, дополняющие теорему 4.2. Одно из таких условий – дистрибутивность соответствующего производственного множества по Скарфу [1986]. Другой пример приведен в Шарки и Телзер [1978], где доказано, что если C удовлетворяет свойству ВДМ по лучу и квазивыпукла, то она обеспечена: см. упражнение 4.4. Еще одно достаточное условие – комплементарность затрат: оно определено в примере 5.5, где показано, что оно эквивалентно выпуклости игр с распределением затрат (18).

Замечание 4.2. В качестве двойственной модели к многопродуктовому ценообразованию рассмотрим многофакторное распределение прибыли. Пусть имеется n ресурсов $r_1, \ldots, r_n$, совместно используемых в производстве трансферабельного выпуска (скажем, денег) на основе производственной функции $F(r_1, \ldots, r_n)$. Задача состоит в том, чтобы справедливо распределить выпуск в соответствии с вложенными ресурсами. Свободные от субсидий цены на совокупность ресурсов $\bar{r} = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)$ – это такие цены $p_1, \ldots, p_n$, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \bar{r}_i = F(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n), \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i r_i \ge F(r_1, \ldots, r_n)$$

$$\text{при всех } r, \ 0 \le r \le \bar{r}.$$

Определение 4.5, лемма 4.1, теорема 4.2 получаются идентичным образом для этой модели изменением знака.

4.4 НТП-игры

Кооперативная игра с нетрансферабельной полезностью (кратко НТП-игра) задается множеством агентов (сообществом) N и допустимым множеством полезностей $v(S)$ для каждой коалиции S агентов, включая максимальную коалицию N. Каждое допустимое множество $v(S)$ из E^S суммирует кооперативные возможности коалиции S: каждый вектор полезности u_S из $v(S)$ может быть получен агентами из S с помощью некоторого кооперативного действия. Так же, как и в аксиоматике торгов (гл. 3), коалиционные множества $v(S)$ обычно являются выпуклыми, исчерпывающими и замкнутыми. Смотри теорему 4.3 ниже.

Ядро определяется на основе принципа отделения: распределение полезностей $x \in E^N$ *не* принадлежит ядру, если некоторая коалиция может отделиться и улучшить благосостояние всех своих членов.

Обозначение: для данного вектора x из E^N и подмножества S из N обозначим через x_S проекцию x на E^S: $(x_S)_i = x_i$ при всех $i \in S$.

Определение 4.6. *Задана* **НТП-игра** (N,v), *где* v *сопоставляет каждому непустому подмножеству* S *из* N *подмножество* $v(S) \subset E^S$ *допустимых для коалиции* S *векторов полезностей. Скажем, что* $x \in E^N$ – **распределение из ядра** *игры* (N,v), *если оно принадлежит* $v(N)$ *(допустимо для коалиции* N*) и не существует непустой коалиции* S, *для которой*

$$\text{при каком-то } y_S \in v(S)\text{: } x_S < y_S \qquad (23)$$

(напомним, что $u < v$ *означает* $u_i \le v_i$ *при всех* i *и хотя бы одно неравенство строгое).*

Заметим, что коалиция S в (23) может быть максимальной коалицией N. Таким образом, из принадлежности ядру распределения x следует его оптимальность по Парето в $v(N)$.

Проверим, что это определение обобщает определение 4.2. В самом деле, ТП-игра (N,v_0) может быть записана как НТП-игра (N,v), где

$$v(S) = \left\{ x \in E^S \mid \sum_{i \in S} x_i \le v_0(S) \right\}. \qquad (24)$$

Сравнение (3) и (23) показывает, что ядра (N,v) и (N,v_0) совпадают.

Теория НТП-игр намного беднее результатами и технически гораздо сложнее теории ТП-игр. В этой и следующей главах мы приведем (дадим ссылки) ее основные результаты, не давая каких-либо доказательств. В ч. III мы обсудим некоторые детали наиболее важных экономических примеров НТП - игр: производство частного продукта в регулируемой монополии (гл. 7), изготовление коллективного продукта (гл. 6), экономики обмена (гл. 8).

Если рассматривать проблему существования ядра, то результат теоремы 4.1 обобщается не полностью, а именно, получается достаточное условие непустоты ядра.

Определение 4.7. *Для данного N* **сбалансированным семейством коалиций** *называется подмножество B множества собственных коалиций ($B \subset 2^N \setminus \{N\}$), для которого существуют такие веса δ_S, $0 \le \delta_S \le 1$, для всех $S \in B$, что*

$$\text{для всех } i \in N\text{:} \quad \sum_{S:\, i \in S} \delta_S = 1. \qquad (25)$$

Скажем, что НТП-игра (N,v) **сбалансирована**, *если для любого сбалансированного семейства коалиций и для любого распределения полезностей $x \in E^N$ выполнено*

$$\{\text{для всех } S \in B,\ x_S \in v(S)\} \Rightarrow \{x \in v(N)\}.$$

Внимательный читатель может проверить, что ТП-игра (N,v_0) сбалансирована (удовлетворяет свойству (6)) тогда и только тогда, когда ее каноническое представление как НТП-игры (24) сбалансировано.

Теорема 4.3 (Скарф [1967]). *Дана НТП-игра (N,v), где для каждой коалиции S (включая максимальную коалицию) множество $v(S)$ является замкнутым, исчерпывающим собственным подмножеством E^S. Если игра (N,v) сбалансирована, то ее ядро не пусто.*

По поводу доказательства этого результата и его приложений наилучшей ссылкой является Ичииши [1983].

Упражнения

4.1 Распределение затрат с независимым спросом

Это упражнение является обобщением примера 4.2. Имеются n агентов, доход которых от объекта равен соответственно $b_1, \ldots, b_n$. Задана также функция затрат c (как в определении 4.1).

Если обслужнвается подмножество S агентов, то соответствующая прибыль равна $\sum_{i \in S} b_i - c(S)$. Эффективным является обслуживание подмножества агентов с максимальной прибылью (это может быть пустое подмножество, если все прибыли отрицательны).

(a) Покажите, что обслуживание всех агентов эффективно тогда и только тогда, когда

$$\text{для всех } S \subset N: \quad \sum_{i \in S} b_i \geq c(N) - c(N \backslash S). \tag{26}$$

(b) Определим ТП-игру (N,v) с распределением прибыли следующим образом:

$$v(S) = \max_{T \subset S} \left\{ \sum_{i \in T} b_i - c(T),\ 0 \right\}. \tag{27}$$

Покажите, что v супераддитивна, если c субаддитивна.

(c) Предположим, что выполнено (26), и для сбалансированного распределения x из (N,v) определим y как $y_i = b_i - x_i$ при всех $i \in N$. Покажите, что x принадлежит ядру (N,v) тогда и только тогда, когда y принадлежит ядру игры с распределением затрат $(N, \tilde{c})$, где $\tilde{c}$ определяется так:

$$\tilde{c}(i) = \inf \{ c(i), b_i \} \qquad \text{для всех } i \in N,$$
$$\tilde{c}(S) = c(S) \qquad \text{для всех } S \subset N,\ |S| \geq 2.$$

(d) Проверьте на следующем примере, для которого (26) выполнено, что игра (N,c) с распределением затрат имеет непустое ядро (по следствию 2 из теоремы 4.1), хотя ядро игры $(N, \tilde{c})$ с распределением затрат и игра с распределением прибылн имеют пустые ядра.

$$N = \{1,2,3,4\}, \quad c(i) = 4 \quad \text{для всех } i;$$

$$\text{для всех } S \text{ при } |S| = 2: \quad \begin{cases} c(S) = 8, & \text{если } 1 \in S, \\ c(S) = 4.5, & \text{если } 1 \notin S, \end{cases}$$

$c(S) = 8$ для всех $|S| = 3$, $c(N) = 10$, $b_1 = 2.5$, $b_i = 5$ для $i = 2,3,4$.

4.2 Пустое ядро с зависимым спросом

Три агента расположены в вершинах треугольника, стороны которого представляют существующие улицы. Они должны распределить затраты на коллективное уличное освещение, которое может быть размещено в любой из трех точек середин сторон a, b, c. Полезности таковы:

$u_i = 0$, если нет освещения ни в одной из ближайших точек размещения (например, $u_1 = 0$, если уличное освещение имеется только в точке a или его нет совсем),

$u_i = 30$, если есть освещение ровно на одной соседней улице,

$u_i = 45$, если освещение имеется на обеих соседних улицах.

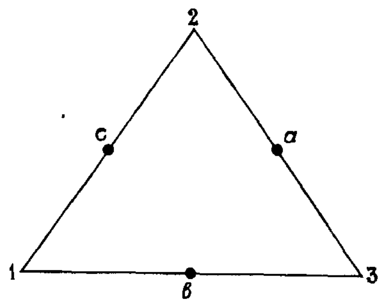


Рис. 4.2

Таким образом, если имеется освещение в точке a и в точке b, то мы получаем $(u_1, u_2, u_3) = (30, 30, 45)$.

В действительности имеется три различных продукта (освещение в точках a, b или c), но спрос на них не является независимым: агент 1 меньше хочет иметь освещение в точке c, если он уже имеет его в точке b, чем в случае, когда он не имеет его в этой точке. Структура затрат соответствует постоянным доходам: освещение любой улицы стоит 40. Постройте ТП-игру, соответствующую игре с распределением прибыли, и покажите, что ее ядро пусто.

4.3 Немонотонность ядра

Трудность, вскрытая этим примером, будет обобщена в следующей главе (теорема 5.1).

(*a*) Рассмотрим следующую ТП-игру с 4 агентами

$$v(i) = 0 \quad \text{при } i = 1,\dots,4,$$
$$v(12) = v(34) = 0,\ v(13) = v(14) = v(23) = v(24) = 1,$$
$$v(S) = 1 \quad \text{при } |S| = 3, \quad v(N) = 2.$$

Проверьте, что ее ядро есть отрезок, соединяющий точки (0,0,1,1) и (1,1,0,0). Оно симметрично относительно $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

(*b*) Предположим, что $v(134)$ увелнчивается на единицу и определим новую ТП-игру v':

$$v'(134) = 2, \quad v'(S) = v(S) \quad \text{для всех } S \neq \{134\}.$$

Покажите, что ядро v' стягивается до единственного распределения и что эта редукция может быть плоха только агенту 1, если сравниваются распределения из ядер v и v'. Таким образом, полезность агента 1 уменьшается, даже если его кооперативные возможности возрастают.

4.4 Обеспеченные функции затрат (Шарки и Телзер [1978])

На протяжении этого упражнения считаем, что задана возрастающая относительно всех своих переменных функция затрат $C(q_1,\dots,q_n)$. Вопросы (*a*) и (*b*) этого упражнения – необходимые условия обеспеченности C (сформулированные ранее в лемме 4.1). Вопросы (*c*) и (*d*) – достаточные условия.

(*a*) Если C обеспечена, то C субаддитивна (16). Докажите это от противного: если $C(q_1 + q_2) > C(q_1) + C(q_2)$, то выберите свободные от субсидий цены на $q_1 + q_2$ и получите противоречие.

(*b*) Покажите, что если C обеспечена, то C удовлетворяет свойству ВДМ по лучу (17).

(*c*) Скажем, что C квазивыпукла, если

$$C(\lambda q + (1-\lambda)q') \leq \sup\{C(q), C(q')\} \text{ при всех } q, q' \geq 0 \text{ и } \lambda,\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Покажите, что если C удовлетворяет свойству ВДМ по лучу и квазивыпукла, то C обеспечена. Фиксируем вектор выпуска $\bar{q}$

и обозначим через A подмножество $A = \{q \in E^n_+ | \ C(q) \le C(\bar{q})\}$. Покажите, что $\bar{q}$ является граничной точкой выпуклого множества A, и выберите опорный вектор p к A в точке $\bar{q}$. Покажите, что p – свободная от субсидий система цен на $\bar{q}$.

(d) Скажем, что C удовлетворяет свойству ПДМ (постоянные доходы на масштаб), если $C(\lambda q) = \lambda C(q)$ для всех $\lambda \ge 0$ и $q \in E^n_+$. Покажите, что если C субаддитивна и удовлетворяет свойству ПДМ, то C обеспечена.

4.5 Экономика производства с пустым ядром (Шарки [1979])

Пусть имеются четыре продукта и три агента. Первые три продукта (выпуски) производятся из четвертого продукта (ресурса) с затратами

$$c(x_1, x_2, x_3) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3),$$

где f есть следующая функция:

$$f(x) = x \quad \text{при } 0 \le x \le 1, \quad f(x) = \frac{1}{2}(x+1) \text{ при } x \ge 1.$$

Начальный запас каждого агента состоит из 0.6 единиц ресурса, и он не приписывает полезности этому продукту. Функции полезности наших трех агентов таковы:

$$u_1(x) = f(x_1+x_2), \ u_2(x) = f(x_2+x_3), \ u_3(x) = f(x_1+x_3).$$

(a) Покажите, что C обеспечена (используйте упражнение 4.4) и что предпочтения агентов выпуклы.

(b) Тем не менее ядро игры с производством пусто. Общее определение этой игры будет дано в гл. 7 (разд. 7.1). Для цели этого упражнения достаточно показать, что каждый агент может самостоятельно гарантировать $u_1 \ge 0.6$, два агента могут гарантировать $u_1 + u_2 \ge 1.4$, а любой допустимый вектор полезностей максимальной коалиции удовлетворяет условию $u_1 + u_2 + u_3 \le 2$.

Глава 5

Значения кооперативных игр

Обзор

Заветная цель кооперативной теории игр состоит в построении универсальной концепции решения, основанной на широко принятых аксиомах равенства и выбирающей для каждой кооперативной игры единственное распределение полезностей аналогично функции коллективного выбора из гл. 3. Такой объект называется значением или оператором значения. На протяжении более тридцати лет этот подход применялся к ТП-играм. Он оказался в достаточной степени успешным. Конечно, не появилось *единственной* концепции решения, которая согласовывалась бы с представлением о равенстве во всех ТП-играх каждого исследователя. Точно так же не существует единственной функции коллективного выбора как универсальной панацеи аксиоматических торгов (см. ч. I). Тем не менее было открыто два известных значения, которые доказали свою применимость для широкого круга экономических моделей. Это – вектор Шепли и N-ядро, которые в основном и обсуждаются в этой главе.

В двух словах, концепция N-ядра соответствует эгалитаризму для ТП-игр, тогда как вектор Шепли следует принципу утилитаризма. В самом деле, N-ядро минимизирует лексиминный ПКБ на длинных векторах полезностей, в которых каждая координата соответствует определенной коалиции (см. определение 5.4). С другой стороны, вектор Шепли приписывает каждому агенту его средний маргинальный вклад во все коалиции, его содержащие. Если основываться на средней полезности, то этот подход является столь же утилитарным, как и классический утилитаризм (гл. 1). Соответственно N-ядро труднее найти, чем вектор Шепли (так же, как максимизировать лексиминный ПКБ труднее, чем найти максимум утилитарного ПКБ).

В этой главе на простых примерах мы обсуждаем аксиоматические свойства и качественные черты этих двух операторов значения. Мы рассматриваем популярную модель распределения затрат (пример 5.3) и элементарную модель экономики производства (пример 5.2), а также приводим числовые примеры ТП-игр без каких-либо специальных экономических интерпретаций. Другие примеры появляются в ч. III (см. гл. 6 и 7).

В разд. 5.1 мы определяем вектор Шепли и находим его для наших простых примеров. Оказывается; что вектор Шепли может не принадлежать ядру игры (когда последнее ие пусто), и это его главный этический недостаток. Поэтому особенно интересно найти класс ТП-игр, называемых выпуклыми играми, в которых вектор Шепли располагается в центре (непустого) ядра. Выпуклые игры обсуждаются в разд. 5.2. Они определены следующим свойством: маргинальный вклад каждого агента в коалицию увеличивается, если эта коалиция расширяется (см. определение 5.2). Другими словами, кооперация обладает свойством увеличения доходов на масштаб.

В разд. 5.3 приводятся две аксиоматические характеризации вектора Шепли. Оригинальная характеризация самого Шепли (теорема 5.2) основана на аксиоме аддитивности, весьма похожей на аксиому, характеризующую утилитарные функции коллективного выбора (см. теорему 3.4 и упражнение 3.8). Более современная характеризация содержится в работах Ломан и Уинстон [1974] и Янг [1985*a*] и является более тонкой. Она утверждает, что вектор Шепли является единственным оператором значения, в котором значение для каждого агента зависит только (быть может и нелинейно) от вектора его маргинальных вкладов (теорема 5.1). Попросту говоря, кооперативная продуктивность агента – это единственное, что определяет его долю прибыли.

В разд. 5.4 мы определяем N-ядро и находим его для тех же моделей, для которых был посчитан вектор Шепли (для простой экономики производства из примера 5 2 и задачи распределения затрат из примера 5.3). Характерно, что эти вычисления гораздо труднее, чем для вектора Шепли Сравнение обоих значений в этих примерах дает некоторое интуитивное представление об их общих этических различиях.

Следующий разд. 5.5 начинается с резкой критики концепции N-ядра: когда коалиционные возможности максимальной коалиции возрастают ($v(N)$ увеличивается), а возможности остальных коалиций остаются неизменными ($v(S)$ не меняется для всех $S \neq N$), то некоторые агенты могут понести потери (лемма 5.2) В более общем виде удивительный отрицательный результат (теорема 5.3) говорит о том, что любое значение, выбирающее распределение из ядра, когда оно непусто, должно нарушать соответствующую аксиому монотонности, называемую коалиционной монотонностью (определение 5.5).

Отсюда дилемма: значение не может удовлетворять более чем одному из следующих свойств: принцип отделения (выбор из ядра) и коалиционная монотонность. N-ядро удовлетворяет первому, а вектор Шепли – последнему

Разд. 5.6 посвящен трудной аксиоматической характеризации N-ядра по Соболеву (теорема 5.4). Она основана на свойстве редуцированной игры (определение 5.7), аксиоме, имеющей ту же направленность, что и аксиомы сепарабельности, обсуждавшиеся в ч. I (разд. 2.4 и 3.5).

5.1 Вектор Шепли

Значение ТП кооперативных игр каждой игре (N,v) ставит в соответствие сбалансированное распределение $x \in E^N$ величины $v(N)$, т.е. $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$.

Мы начнем с игры с распределением затрат (N,c), для которой значение было предложено, как отмечается в литературе, почти полвека назад (см. исторический обзор Страффин и Хини [1981]). Оно называется *равное распределение несепарабельных* (*РРНС*) *затрат.*

Назовем величину $SC_i = c(N) - c(N\backslash i)$ сепарабельными затратами агента i. Это – маргинальные затраты на обслуживание агента i при условии, что все остальные агенты уже обслужены. Можно посчитать сумму сепарабельных затрат. Остаток называется несепарабельными затратами и обозначается NSC. Он может быть как положительным, так и отрицательным:

$$NSC = c(N) - \sum_{i\in N} [c(N) - c(N\backslash i)].$$

Значение РРНС затрат приписывает каждому агенту i затраты SC_i и делит NSC поровну между всеми агентами. Преобразуя это выражение, получаем следующую долю затрат агента i:

$$c_i = SC_i + \frac{1}{n} NSC_i = \frac{1}{n}\left[c(N) + \sum_{j\in N} c(N\setminus j)\right] - c(N\setminus i). \tag{1}$$

Это – наш первый пример значения, поскольку этот подход применим ко *всем* играм с распределением затрат, а также ко всем ТП-играм (N,v) (с заменой c на v в формуле (1)). В этом случае этот подход может быть назван равным распределением несепарабельной прибыли.

Первый очевидный недостаток значения РРНС затрат состоит в том, что игнорируются все коалиции, кроме максимальной коалиции и коалиции размера $n-1$. В то же время возможная прибыль (или затраты) малых коалиций должна играть некоторую роль. Во всяком случае это настоятельно следует из примеров, обсуждавшихся в гл. 4. Первое достоинство *вектора Шепли* заключается в том, что он как раз удовлетворяет этому свойству и при этом сохраняет идею распределения затрат, основанную на маргинальных вкладах (таких, как сепарабельные затраты). Таким образом, доля затрат (доля прибыли) агента i вычисляется как средние маргинальные затраты (прибыль), добавляемые агентом i к каждой коалиции остальных агентов.

Для того чтобы получить соответствующую формулу, представим, что агенты из N случайно упорядочены $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$, причем вероятность каждого упорядочения одинакова. Агенту i вектор Шепли приписывает среднее его маргинальной прибыли $v(S\cup\{i\}) - v(S)$, взятое по всем коалициям $S\subset N\setminus i$, включая пустое множество. Вес коалиции S соответствует вероятности того, что в случайной очереди $(i_1,\ldots,i_n)$ перед агентом i стоят в точности элементы из множества S. Непосредственное вычисление этой вероятности дает величину $s!\,(n-s-1)!\,/\,n!$, где s есть размер S. В самом деле, существует ровно $s!\,(n-s-1)!$ упорядочений N таких, что первые s элементов берутся из S, а последние $n-s-1$ элементов берутся из $N\setminus(S\cup\{i\})$.

Определение 5.1. *Для данной ТП-игры (N,v) вектор Шепли σ*

распределяет прибыль $v(N)$ максимальной коалиции следующим образом:

для всех агентов i:

$$\sigma_i = \sum_{0 \le s \le n-1} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!} \sum_{\substack{S \subset N \setminus i \\ |S| = s}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)); \qquad (2)$$

по соглашению $0! = 1$ *и* $v(\varnothing) = 0$.

Очевидно, что вектор Шепли для игр с распределением затрат получается на основе аналогичной формулы, где c заменяется на v.

Мы утверждаем, что вектор $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ из определения 5.1 является распределением $v(N)$. В самом деле, для того чтобы проверить $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i = v(N)$, вспомним данную выше вероятностную интерпретацию вектора Шепли. Для любого данного порядка, скажем $(1,2,\dots,n)$, вектор маргинальных вкладов x равен

$$x_1 = v(1);\quad x_i = v(\{1,\dots,i\}) - v(\{1,\dots,i-1\}) \text{ при } i = 2,\dots,n.$$

Таким образом, равенство $\sum_{i=1}^{n}x_i = v(N)$ выполняется для каждого вектора маргинальных вкладов, от которых мы берем среднее, следовательно, $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i = v(N)$.

В качестве альтернативы мы можем проверить справедлнвость этого равенства непосредственно в формуле (2). Преобразуя $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i$, выберем любую собственную коалицию S из N и посчитаем ее коэффициент

$$s\cdot\left[\frac{(s-1)!\,(n-(s-1)-1)!}{n!}\right] - (n-s)\cdot\left[\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\right] = 0,$$

где коэффициент при $v(N)$ равен $[(n-1)!0!/n!] = 1$.

Заметим сначала, что если игра (N,v) супераддитивна, то вектор Шепли является индивидуально рациональным, т.е. агент i получает по крайней мере доступную ему прибыль $v(i)$. Для доказательства этого утверждения заметим, что из супераддитивности следует

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \ge v(i) \text{ для всех } S \subset N \setminus \{i\}.$$

В формуле (2) коэффициент при $(v(S \cup \{i\}) - v(S))$ есть вероятность того, что в случайной очереди перед агентом i стоят в точности элементы из S, следовательно, сумма этих коэффициентов при S, изменяющейся в $N\setminus\{i\}$, равна единице, откуда $\sigma_i \geq v(i)$.

Таким образом, при использовании вектора Шепли один агент не может отделиться и высказывать возражения. Тем не менее промежуточные коалиции могут иметь такую возможность, как показывает наш первый пример.

Пример 5.1. Вектор Шепли в игре трех лиц

В игре трех лиц (N,v) при $N=\{1,2,3\}$ формула (2) принимает вид:

$$\sigma_1 = \frac{1}{3} v(1) + \frac{1}{6}[(v(12)-v(2))+(v(13)-v(3))] + \frac{1}{3}(v(N)-v(23)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_1 = \frac{1}{3} v(N) + \frac{1}{6}(v(12)+v(13)-2v(23)) + \frac{1}{6}(2v(1)-v(2)-v(3)). \tag{3}$$

Так, в примере 4.1 мы получим распределение затрат $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (73.3,\ 98.3,\ 83.3)$. Это распределение лежит вне ядра (поскольку $\sigma_1 + \sigma_2 > 170$), хотя и не очень далеко от его центра $(68.3,\ 98.3,\ 88.3)$.

В наших следующих двух примерах нахождение вектора Шепли связано с довольно интересными вычислениями.

Пример 5.2. Экономика производства кукурузы в имении

Имеется $n+1$ агентов. Агенту 0 (землевладельцу) принадлежит земля, а агенты $1,2,\ldots,n$ – суть n одинаковых рабочих, которым принадлежит только их рабочая сила. Производственная функция показывает для каждого числа рабочих i количество $f(i)$ кукурузы, которое они произведут, работая в (неделимом) имении. Фуикция f не убывает и $f(0)=0$. ТП-игра отражает производственные возможности коалиции: без участия агента 0 коалиция бесполезна, при его участии количество произведенной продукции определяется числом рабочих:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \notin S, \\ f(s) & \text{при } 0 \in S \text{ и } |S| = s+1. \end{cases} \tag{4}$$

Вектор Шепли отдает $\sigma_0 = [\,1/(n+1)\,] \sum_{i=1}^{n} f(i)$ землевладельцу, поскольку в случайном порядке $\{0,1,\ldots,n\}$ его маргинальный вклад равен $f(i)$, где i – число рабочих перед ним, а случайная величина i равномерно распределена на

$0,1,\ldots,n$. Поскольку все рабочие одинаковы, то они получают одинаковые доли:

$$\sigma_i = \frac{1}{n}(f(n) - \sigma_0) = \frac{1}{n}\left[f(n) - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(i)\right]. \tag{5}$$

Заметим, что в этой игре ядро очень велико, и в его пределах даже вся прибыль может быть отдана землевладельцу ($x_0 = f(n)$, $x_i = 0$ при $i \geq 1$ есть распределение из ядра). Но прибыль землевладельца в ядре может быть и нулевой, если средняя продуктивность максимальна при использовании всех рабочих. В самом деле, распределение $x_0 = 0$, $x_i = f(n)/n$ при всех i принадлежит ядру тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(s)}{s} \leq \frac{f(n)}{n} \quad \text{для всех } s = 1,\ldots,n-1. \tag{6}$$

Внимательный читатель может легко проверить, что при выполнении (6) вектор Шепли также принадлежит ядру.

Пример 5.3. Взносы пользователей (Литтлчайлд и Оуэн [1973])

n авиакомпаний распределяют затраты на строительство взлетно-посадочной полосы. Для обслуживания самолетов, принадлежащих авиакомпании i, достаточно, чтобы длина взлетно-посадочной полосы была равна c_i. В первом приближении будем считать, что длина пропорциональна затратам. Без ограничения общности предположим, что

$$c_n \leq c_{n-1} \leq \ldots \leq c_2 \leq c_1.$$

Получаем следующую игру распределения затрат:

$$c(S) = \max_{i \in S}\{c_i\} \quad \text{для всех } S \subset \{1,\ldots,n\}. \tag{7}$$

И вновь эта игра имеет обширное ядро (ниже в разд. 5.2 мы покажем, что данная игра является выпуклой), поэтому важной является проблема однозначного выбора распределения. Интересный результат дает вектор Шепли:

$$\sigma_n = \frac{1}{n}c_n, \quad \sigma_{n-1} = \frac{1}{n}c_n + \frac{1}{n-1}(c_{n-1} - c_n), \ldots,$$

$$\sigma_i = \sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}(c_j - c_{j+1}) \quad \text{для всех } i = 1,\ldots,n, \tag{8}$$

$$\text{где } c_{n+1} = 0.$$

Для того чтобы проверить эту формулу, используйте (2) или разделите общие затраты c_1 на части $\delta_n = c_n$, $\delta_i = c_i - c_{i+1}$, $i = 1,\dots,n-1$. Затем заметьте, что в векторе маргинальных распределений для порядка $(i_1,\dots,i_n)$ на N

δ_n относится к тому, кто является первым, скажем i_1,
δ_{n-1} относится к тому, кто является первым среди агентов $\{1,\dots,n-1\}$,
δ_i относится к тому, кто является первым среди агентов $\{1,\dots,i\}$.

Таким образом, δ_i может распределяться с равной вероятностью $1/i$ среди агентов $1,\dots,i$. Отсюда, в свою очередь, получаем формулу (8).

5.2 Выпуклые игры

Пример 5.1 показывает, что вектор Шепли не удовлетворяет принципу отделения: существуют игры с непустым ядром, в которых вектор Шепли лежит вне ядра.

Выпуклые игры представляют собой важный класс игр, в которых ядро непусто и содержит вектор Шепли. На самом деле вектор Шепли расположен в центре ядра выпуклой игры. Грубо говоря, игра является выпуклой, если имеет место возрастание доходов от кооперации. В рамках ТП-игр этот тезис читается следующим образом: чем больше коалиция, к которой присоединяется игрок i, тем больше его маргинальный вклад.

Определение 5.2. *ТП кооперативная игра* (N,v) *является* **выпуклой**, *если она удовлетворяет одному из двух эквивалентных свойств:*

для всех $i \in N$, $S,T \subset N\backslash\{i\}$:
$$\{S \subset T\} \Rightarrow \{v(S \cup \{i\}) - v(S) \le v(T \cup \{i\}) - v(T)\}, \qquad (9)$$

и/или

$$\text{для всех } S,T \subset N:\quad v(S)+v(T) \le v(S \cup T)+v(S \cap T), \qquad (10)$$

где по соглашению $v(\varnothing) = 0$.

Для того чтобы убедиться в указанной эквивалентности, заметим сначала, что (9) является частным случаем (10) для коалиций $S \cup \{i\}$ и T. Обратно, предположим, что выполнено (9), и рассмотрим две коалиции S,T, для которых выполнено

$S \subset T$. Обозначим $R = N \backslash T$ и рассмотрим последовательность $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, покрывающую R. Последовательно применяя (9), получим

$$v(S \cup i_1) - v(S) \le v(T \cup i_1) - v(T),$$

$$v(S \cup \{i_1, i_2\}) - v(S \cup i_1) \le v(T \cup \{i_1, i_2\}) - v(T \cup i_1),$$

$$v(S \cup \{i_1 \ldots i_k\}) - v(S \cup \{i_1 \ldots i_{k-1}\}) \le$$
$$\le v(T \cup \{i_1 \ldots i_k\}) - v(T \cup \{i_1 \ldots i_{k-1}\}).$$

Суммируя эти неравенства, мы находим, что для любой коалиции $R' \subset N \backslash T = R$ выполнено

$$v(S \cup R') - v(S) \le v(T \cup R') - v(T). \tag{11}$$

Зафиксируем теперь две произвольные коалиции S_0, T_0 (необязательно, чтобы одна принадлежала другой) и применим (11) к $S = S_0 \cap T_0$, $T = T_0$ и $R' = S_0 \backslash T_0$. Отсюда выводим желаемое свойство (10).

Замечательное свойство выпуклых игр состоит в том, что для любого порядка N соответствующий вектор маргинальных вкладов принадлежит ядру. Следовательно, выпуклая игра является сбалансированной. Более того, барнцентр множества векторов маргинальных вкладов, т.е. вектор Шепли, принадлежит ядру (поскольку ядро является выпуклым подмножеством E^N).

Лемма 5.1. *Пусть (N, v) – выпуклая ТП-игра, а множество N упорядочено следующим образом: $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Соответствующий вектор маргинальных вкладов*

$$x_{i_k} = v(i_1, \ldots, i_k) - v(i_1, \ldots, i_{k-1})$$

принадлежит ядру данной игры. Следовательно, вектор Шепли также принадлежит ядру.

Доказательство. Для простоты обозначений будем считать, что множество N упорядочено так: $\{1, \ldots, n\}$. Соответствующий вектор маргинальных вкладов обозначим x. Выберем произвольную коалицию $S \subset N$ и упорядочим ее элементы следующим образом: $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$. Для любого k, $1 \le k \le s$, применим (9) при условии, что $S' = \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$, $T' = \{1, 2, \ldots, i_k - 1\}$ и $i = i_k$:

$$v(i_1,\ldots,i_k) - v(i_1,\ldots i_{k-1}) \le$$
$$\le v(1,2,\ldots,i_k) - v(1,2,\ldots,i_k - 1) = x_{i_k}.$$

Суммируя эти неравенства по k от 1 до s–1, получаем

$$v(i_1,\ldots,i_s) = v(S) \le \sum_{k=1}^{s} x_{i_k} = \sum_{i\in S} x_i$$

требуемое неравенство. Второе утверждение леммы следует из того, что ядро является выпуклым подмножеством E^N, а вектор Шеплн определяется как равномерное среднее векторов маргинальных вкладов.

QED

Замечание 5.1. В упражнении 5.5, следуя Ичнииши [1981], доказывается обратное утверждение: если все векторы маргинальных вкладов принадлежат ядру, то игра является выпуклой.

В выпуклых нграх вектор Шепли занимает центральное положение в ядре. Действительно, векторы маргинальных вкладов являются крайними точками (вершинами) (выпуклого) ядра, илн, что то же самое, ядро является выпуклой оболочкой векторов маргннальных вкладов. Этот трудный результат был доказан Шеплн [1971]. Из него следует, что вектор Шепли является барицентром вершин ядра при условии, что вершииа считается дважды, еслн она соответствует двум векторам маргинальных вкладов при двух различных упорядочениях агентов. Проиллюстрируем этот результат на примере игр трех лиц.

Пример 5.4. Выпуклые игры трех лиц

Любая выпуклая игра является (полностью) супераддитивной, что следует из формулы (10) для непересекающихся коалиций S и T. Таким образом, нормализованная выпуклая игра трех лнц задается так:

$$v(i) = 0 \quad \text{при } i = 1,2,3; \qquad v(N) = 1;$$
$$0 \le v(ij) \le 1 \quad \text{для всех } i,j,\ i \ne j. \tag{12}$$

Заметим, что в случае, когда S содержит T нли наоборот, формула (10) становится тривиальной. Поэтому выпуклость игры трех лиц сводится к трем неравенствам, соответствующим (10), где S и T – различные двухэлементные коалиции:

$$v(12) + v(23) \leq v(N) + v(2), \dots .$$

С учетом того что игра является нормализованной (см. (12)), это означает

$$v(ij) + v(jk) \leq 1$$

для всех $\{ij\}$, $\{jk\}$, где i, j, k попарно различны.

На рис. 5.1 мы изобразили соответствующее ядро: оно является шестиугольником (если только некоторые из приведенных выше неравенств не обращаются в равенства). Следовательно, ядро является достаточно большим подмножеством симплекса. Однако в некоторых крайних случаях его поверхность очень мала, как, например, при $v(12) = 0.98$ и $v(13) = v(23) = 0.01$.

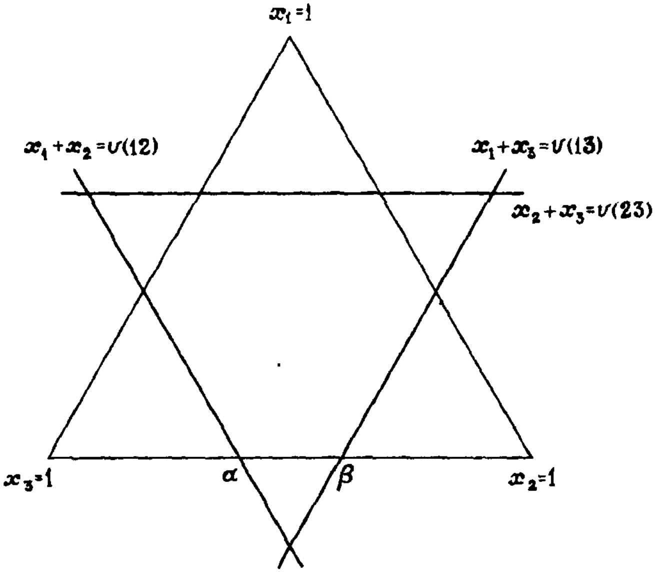


Рис. 5.1

Векторы маргинальных вкладов расположены в точках пересечения прямых $x_i + x_j = v(ij)$ с границей симплекса. Таких точек 6, каждая прямая пересекается с двумя границами. Рассмотрим два следующих порядка: (1,2,3) и (1,3,2) и соответствующие им векторы маргинальных вкладов $\alpha = (0, v(12), 1 - v(12))$, $\beta = (0, 1 - v(13), v(13))$. Из условия $v(12) + v(13) \leq$

≤ 1 следует, что вектор α расположен между β и вершиной $(0,0,1)$, а вектор β – между α и вершиной $(0,1,0)$. Рис. 5.1 соответствует следующим числовым параметрам: $v(12) = 0.3$, $v(23) = 0.3$, $v(13) = 0.6$.

Игры, соответствующие экономике производства, часто являются выпуклыми, если технология обладает свойством увеличения доходов на масштаб, как, например, в экономике производства кукурузы в имении, рассмотренной в примере 5.2 (см. упражнение 5.2 пункт (а)). Другим важным семейством выпуклых игр являются игры с дележом прибыли, которые связаны с производством общественного продукта. Исследованию таких игр посвящена гл. 6. А сейчас приведем два примера вогнутых игр распределения затрат.

Пример 5.3. Взносы пользователей (продолжение)

Примеру 5.3 соответствует *вогнутая* игра распределения затрат:

$$\text{для всех } i,S,T\text{:}$$

$$\{S \underset{\neq}{\subset} T \subset N\backslash i\} \Rightarrow c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(T \cup \{i\}) - c(T). \tag{13}$$

Маргинальные затраты игрока i уменьшаются с ростом коалиции. Для вогнутой функции c справедлив аналог леммы 5.1: любой вектор маргинальных затрат принадлежит ядру, а значит, и вектор Шепли.

Для того чтобы проверить, что игра "взносы пользователей" является вогнутой, запишем свойство (9) с помощью (7):

$$\max_{j \in S \cup \{i\}} \{c_j\} - \max_{j \in S} \{c_j\} \geq \max_{j \in T \cup \{i\}} \{c_j\} - \max_{j \in T} \{c_j\}.$$

Обозначим $\max_S c_j = c_1$ и $\max_T c_j = c_2$. С учетом этих обозначений приведенное выше неравенство будет выглядеть так:

$$\max(c_1, c_i) - c_1 \geq \max(c_2, c_i) - c_2. \tag{14}$$

Из $S \subseteq T$ следует $c_1 \leq c_2$. Будем различать три случая. Если $c_i \leq c_1$, то в (14) слева и справа стоят нули. Если $c_1 \leq c_i \leq c_2$, (14) будет выглядеть так: $c_i - c_1 \geq c_2 - c_2 = 0$. Наконец, если $c_2 \leq c_i$, неравенство (14) примет вид $c_i - c_1 \geq c_i - c_2$, т.е. $c_2 \geq c_1$.

Пример 5.5. Ценообразование в многопродуктовой монополии

Дана функция затрат $C(q_1,\dots,q_n)$. С каждой конечной последовательностью $q^1,\dots,q^K \in E^n$ мы связываем игру с распределением затрат K участников, заданную формулой (18) из гл. 4, причем спрос агента k равен q^k. Какие свойства функции затрат C гарантируют выпуклость каждой из этих игр с распределением затрат? Желаемое неравенство является обратным к (10), поскольку мы имеем дело с игрой с распределением затрат:

$$C\Big[\sum_S q^k\Big] + C\Big[\sum_T q^k\Big] \ge C\Big[\sum_{S\cup T} q^k\Big] + C\Big[\sum_{S\cap T} q^k\Big]. \tag{15}$$

Положим $a = \sum_{S\cap T} q^k$, $b = \sum_T q^k$, $x = \sum_{S\setminus T} q^k$. Тогда (15) переписывается в виде

$$\begin{aligned} &C(a+x) + C(b) \ge C(b+x) + C(a) \iff \\ &\iff C(a+x) - C(a) \ge C(b+x) - C(b). \end{aligned} \tag{16}$$

Это неравенство должно выполняться для всех $a,b,x \in E^n_+$ при $b \ge a$. Обратно, из (16) сразу следует (15). Условие (16) известно под названием *комплементарность затрат*. Оно может быть эквивалентным образом переписано в виде

$$C(a+b+c) - C(a+b) \le C(a+c) - C(a)$$
$$\text{для всех } a,b,c \in E^n_+.$$

Если C дважды дифференцируема, то комплементарность затрат эквивалентна условию

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial q_j}(q) \le 0 \quad \text{для всех } q \in E^n_+.$$

При условии комплементарности затрат все игры с распределением затрат (уравнение (18) из гл. 4) имеют непустое ядро. Следовательно (теорема 4.2), функция затрат C обеспечена. Аналог вектора Шепли для этой модели есть цена Аумана – Шепли, обсуждаемая в разд. 7.4.

Понятие выпуклых игр обобщается также и для НТП-игр. На самом деле имеется два обобщения выпуклости. Одно в количественном смысле (Шарки [1981]), а другое – в порядковом (Вилков [1977]). Лемма 5.1 обобщается только частично. Ядро каждой выпуклой игры (как в порядковом, так и в количественном смыслах) не пусто (Вилков [1977], Пелег [1984*b*]), однако только количественная выпуклость гарантирует принадлежность соответствующего обобщения вектора Шепли ядру (Керн [1985]).

5.3 Характеризации вектора Шепли

Главная особенность формулы (2) состоит в том, что компонента вектора Шепли σ_i, соответствующая агенту i, зависит только от вектора его маргинальных вкладов $[v(S\cup\{i\}) - v(S)]$ во все коалиции S из $N\backslash i$. Таким образом, σ_i зависит от 2^{n-1} независимых переменных в отличии от $2^n - 1$ переменных для произвольного оператора значения. Другим очевидным свойством вектора Шепли является анонимность: имена агентов не имеют значения. Эти два свойства вместе являются характеристическими.

Определение 5.3. *Для данного сообщества N множество ТП-игр с множеством агентов N есть векторное пространство E^{2^N}.*

Оператор значения *есть отображение φ из E^{2^N} в E^N, ставящее в соответствие каждой игре (N,v) распределение $\varphi(v)$ величины $v(N)$:*

$$\sum_{i\in N} \varphi_i(v) = v(N). \tag{17}$$

Определение 5.4. *Даны сообщество N и оператор значения на E^{2^N}.*

Будем говорить, что φ **анонимен**, *если он коммутирует с перестановкой агентов. Для любой биекции τ множества N в себя и любого вектора $v \in E^{2^N}$ выполнено*

$$\tau(\varphi(v)) = \varphi(\tau(v)), \tag{18}$$

где $\tau(v)(S) = v(\tau(S))$ при $S \subset N$ и $\tau(x)_i = x_{\tau(i)}$ при $x \in E^N$.

Будем говорить, что оператор φ **маргинален**, *если $\varphi_i(v)$ зависит только от вектора $(v(S\cup\{i\}) - v(S))_{S\subset N\backslash\{i\}}$, что означает, что для любого фиксированного i из N мы имеем:*

$$\text{для всех } v, w \in E^{2^N}$$
$$\{v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S) \text{ для всех } S \subset N \setminus \{i\}\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi_i(v) = \varphi_i(w)$$

при соглашении $v(\varnothing) = w(\varnothing) = 0$.

Теорема 5.1 (Янг [1985*a*]). *Существует только один анонимный и маргинальный оператор значения. Это – вектор Шепли.*

Доказательство. Мы приведем доказательство теоремы 5.1 для случая трех агентов. Общее доказательство Янга получается по индукции.

Проверим сначала по (2), что оператор значения σ, соответствующий вектору Шепли, маргинален и анонимен. Обратно, предположим, что оператор значения φ обладает этими двумя свойствами. Определим тогда отображение α из E^{2^N} в E^N так:

$$\alpha(v) = \varphi(v) - \sigma(v) \quad \text{для всех} \quad v \in E^{2^N}.$$

Это отображение является анонимным и маргинальным. Более того, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i(v) = 0$ для всех $v \in E^{2^N}$.

Поскольку $\alpha_1(v)$ маргинально, то оно имеет вид

$$\alpha_1(v) = \alpha_1(v(N)-v(23),\ v(12)-v(2),\ v(13)-v(3),\ v(1)). \tag{19}$$

Рассмотрим следующее преобразование v в v':

$$v'(S) = \begin{cases} v(S) + \lambda & \text{при } 1 \in S, \\ v(S) & \text{при } 1 \notin S, \end{cases}$$

где λ – произвольное заданное действительное число. Используя формулы, аналогичные (19) для агентов 2 и 3, получаем

$$\alpha_2(v') = \alpha_2(v); \qquad \alpha_3(v') = \alpha_3(v).$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i(v) = 0$, то мы заключаем, что $\alpha_1(v') = \alpha_1(v)$, или равносильно

$$\alpha_1(x + \lambda, y + \lambda, z + \lambda, t + \lambda) = \alpha_1(x, y, z, t).$$

Значит, мы можем положить $\lambda = -v(1)$ и записать $\alpha_1(v)$ в виде

$$\alpha_1(v) = \beta_1(v(N)-v(23)-v(1),\ v(12)-v(1)-v(2),\ v(13)-v(3)-v(1))$$

и аналогично функции β_2, β_3 для α_2, α_3 соответственно. По анонимности $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$ и β – симметричная функция своих последних двух аргументов.

Положим $v(i) = 0$ для всех i и $v(12) = x$, $v(23) = y$, $v(13) = z$ и $v(N) = t$. Условие $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ переписывается в виде

$$\beta(t - y, x, z) + \beta(t - z, y, x) + \beta(t - x, z, y) = 0 \tag{20}$$

для всех действительных чисел x, y, z, t.

Для того чтобы решить функциональное уравнение (20), положим $x = z$ и определим $w = t - x$. Получаем

$$\beta(w - y + x, x, x) + \beta(w, y, x) + \beta(w, x, y) = 0.$$

Поскольку β симметрична относительно двух последних аргументов, то мы получаем, что $\beta(w, y, x)$ зависит только от $w - y$. Аналогично, она зависит только от $w - x$, и следовательно, $\beta(x, y, z) = \gamma(x - y - z)$. Подставляя это в (20), приходим к желаемому выводу: $\beta = 0$.

QED

Слабый вариант теоремы 5.1 был доказан Ломаном и Уинстоном [1974] с использованием предположения дифференцируемости, которое, как доказал Янг [1985*a*], не является необходимым. Янг использует более слабое предположение симметрии, чем наша аксиома анонимности.

Маргинальный оператор значения не исключает нелинейную функциональную зависимость $\varphi_i(v)$ от маргинальных вкладов $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Тем не менее теорема 5.1 говорит о том, что эта зависимость на самом деле линейна (при анонимности). Оригинальная характеризация, предложенная Шепли, следует противоположному курсу. Аддитивность оператора значения относительно игры v постулируется, а маргинальность получается как следствие аксиомы аддитивности и аксиомы болвана.

Аксиома аддитивности:

для любых $v, w \in E^{2^N}$: $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.

Аксиома болвана:

для любых $i \in N$, $v \in E^{2^N}$:

$$\{v(S \cup \{i\}) = v(S) \quad \text{для всех } S \subset N \setminus \{i\}\} \Rightarrow \varphi_i(v) = 0.$$

Теорема 5.2 (Шепли [1953]). *Существует только один оператор значения, удовлетворяющий аксиомам анонимности, аддитивности и болвана. Это – вектор Шепли.*

Аксиома болвана является слабой формой маргинальности. Агент с нулевым маргинальным вкладом в любую коалицию остальных игроков является болваном. В аксиоме утверждается, что он должен получить нуль. В предположении маргинальности и анонимности вектор Шепли нулевой игры ($v(S) = 0$ для всех S) есть нулевой вектор. Следовательно, в произвольной игре болван должен получить нуль.

Без выполнения аксиомы болвана многие операторы значения являются анонимными и аддитивными, например значение РРНС затрат (формула (1) с v вместо c).

Доказательство теоремы 5.2. Пусть φ – оператор значения, удовлетворяющий всем трем аксиомам. Для любой коалиции $S \subset N$ обозначим через $\delta_S \in E^{2^N}$ следующую игру с S-единогласием:

$$\delta_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{при } S \subset T, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

В игре $\lambda\delta_S$ все агенты из $N \setminus S$ являются болванами и, значит, получают нуль. По анонимности все агенты из S получают одинаковую величину. Следовательно, в силу эффективности (условие (17)) вектор $\varphi(\lambda\delta_S)$ полностью определен. Все агенты из S получают $(\lambda/|S|)$, а все агенты из $N \setminus S$ получают нуль.

Покажем далее, что игры δ_S, $S \in 2^N$, образуют базис в пространстве E^{2^N}. Для этого достаточно показать, что они линейно независимы. Предположим, что некоторая линейная комбинация этих игр дает нуль:

$$\sum_{S \in 2^N} \lambda_S \cdot \delta_S = 0. \tag{21}$$

Если не все коэффициенты λ_S не равны нулю, то найдется коалиция S_0, такая что $\lambda_{S_0} \neq 0$ и $\lambda_S = 0$ для всех $S \subsetneq S_0$. Следовательно, из (21) вытекает

$$\delta_{S_0} = \sum_S -\frac{\lambda_S}{\lambda_{S_0}} \cdot \delta_S, \qquad (22)$$

где сумма берется по коалициям, которые не содержатся в S_0. Взяв значение вектора из правой части для коалиции S_0, получим $\delta_{S_0}(S_0) = 0$; противоречие.

Мы доказали, что игры δ_S, $S \in 2^N$, образуют базис в E^{2^N} и что φ определен для каждой игры $\lambda \cdot \delta_S$. По аддитивности существует не более одного оператора значения, удовлетворяющего нашим трем аксиомам. Обратно, очевидно, что оператор значения Шепли (2) удовлетворяет этим аксиомам.

QED

В упражнении 5.9 мы приведем явную формулу, представляющую любую игру v через базис $(\delta_S,\ S \in 2^N)$.

Аддитивность вектора Шепли является весьма привлекательной с математической точки зрения. В дополнение к тому, что получается явная формула, аддитивность еще делает весьма осмысленным анализ чувствительности: влияние изменения дохода коалиции, влияние присоединения или отделения некоторых агентов и т.д.

Имеется еще несколько характеризаций вектора Шепли. Можно явным образом выразить произвольную игру через базис $(\delta_S,\ S \in 2^N)$ и интерпретировать альтернативную формулу для вектора Шепли как процесс выравнивания долей от дивидендов при добавлении все большего и большего числа коалиций (детали см. в упражнении 5.9). Это приводит к аксиоматической характеризации Майерсона вектора Шепли в модели, где необязательно все коалиции являются допустимыми (Майерсон [1977]).

Другой взгляд связан с редуцированной игрой в модели с переменным количеством участников: см. разд. 5.6 и результат о характеризации Харта и Мас-Колелла [в печати], описанный в упражнении 5.12.

Вектор Шепли многократно обобщался. По крайней мере три различных оператора значения могут быть построены для НТП-игр так, чтобы совпадать с вектором Шепли на подмножестве ТП-игр. Они были предложены Харшаньи [1963] (впоследствии аксиоматизированы Хартом [1985]), Шепли [1969] (впоследствии аксиоматизированы Ауманом [1985]) и Калаи и Самет [1985].

Другим успешным обобщением являются игры с континуумом агентов (игроков). Этой модели посвящена книга Аумана и Шепли [1974], в которой каждый агент считается бесконечно малой частицей общества. Имеются приложения к ценообразованию для многопродуктовой монополии.

В разд. 4.3 у нас была функция затрат $C(q_1,\dots,q_n)$ и был дан вектор выпуска (неэластичный спрос) $(\bar{q}_1,\dots,\bar{q}_n)$. Соответствующая ТП-игра ((18) в гл. 4) обобщается на игру с континуумом агентов, в которой общий спрос разбивается на все большее число частей, каждый агент в конечном счете представляет бесконечно малую долю спроса. Аналог вектора Шепли в этом контексте есть *вектор цен Аумана–Шепли*, заданный так:

$$p_i = \int_0^1 \frac{\partial C}{\partial q_i}(t\bar{q}_1,\dots,t\bar{q}_n)\,dt, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Очевидно, что эти цены являются сбалансированными по бюджету $[\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \bar{q}_i = C(\bar{q})]$. Мирман, Тауман и Занг [1985] показали, что если C удовлетворяет условию комплементарности затрат ($[\partial^2 C/(\partial q_i \partial q_j)](q) \le 0$ для всех q и i, j; поднимая уровень любого выпуска, уменьшаем маргинальные затраты на любой выпуск), то цена Аумана–Шепли свободна от субсидий (определение 4.4). Это – по существу, обобщение леммы 5.1.

5.4 N-ядро

Вектор Шепли не является селектором ядра в любой сбалансированной игре. Разумно требовать, чтобы значение принадлежало ядру, если, конечно, последнее не пусто. Наиболее интересный оператор значения, являющийся селектором ядра, – это N-ядро. Оно занимает центральное положение внутри ядра и определяется эгалитарным арбитражем по отношению ко всем коалициям.

Определение 5.5 (Шмайдлер [1969]). *Рассмотрим ТП-игру (N,v). Обозначим через B множество эффективных распределений $x \in E^N$ $(\sum_{i \in N} x_i = v(N))$. Любому вектору из множества B поставим в соответствие вектор $e(x) \in E^{2^N \setminus N}$:*

$$\text{для всех собственных коалиций } S \subset N: \quad e(x;S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S).$$

Во множестве B существует единственное распределение γ, такое, что для любого $x \in B$ вектор $e(\gamma)$ в смысле лексиминного порядка предпочтительнее вектора $e(x)$. Его называют N-ядром игры (N,v).

Утверждение определения 5.5 следует из свойства лексиминного порядка, доказанного в лемме 1.1: если x меняется внутри множества B, то вектор $e(x)$ изменяется внутри замкнутого выпуклого множества A, принадлежащего $E^{2^N \setminus N}$. Множество A не является ограниченным сверху. Однако для того чтобы максимизировать лексиминный порядок на множестве A, удобно ограничиться рассмотрением компактного подмножества множества A, после чего из леммы 1.1 получаем, что лексиминный порядок имеет единственный максимум на A (детали мы опускаем). Более того, поскольку отображение $x \longrightarrow e(x)$ взаимно однозначное, этот единственный максимум соответствует единственному распределению, что и утверждалось.

При определении N-ядра благосостояние коалиции S измеряют с помощью эксцесса $e(x,S)$, который по сути есть сверхдоход коалиции S по сравнению с ее собственным возможным результатом. Эксцессы различных коалиций сравниваются в эгалитарном духе. В первую очередь рассматривается минимальная прибыль, которая максимизируется. Вектор эксцессов $e(\gamma)$ максимизирует на B эгалитарную ФКП при условии, что полезность каждой коалиции измеряется ее эксцессом:

$$\min_{S \subset N} e(\gamma,S) \geq \min_{S \subset N} e(x,S) \quad \text{для всех } x \in B \iff$$

$$\iff \min_{S \subset N} \left[\sum_{i \in S} \gamma_i - v(S)\right] = \max_{x \in B} \left\{\min_{S \subset N} \left[\sum_{i \in S} x_i - v(S)\right]\right\}. \tag{23}$$

Затем среди решений задачи (23) N-ядро выбирает такое распределение, при котором максимального значения достигает вторая по минимальности коалиционная прибыль. В конечном итоге такой процесс приводит к единственному распределению, которое и является N-ядром.

Заметим, что если ядро игры (N,v) не пусто, то все решения задачи (23) ему принадлежат. Действительно, предположим, что распределение $x \in B$ принадлежит ядру игры (N,v), т.е. $\min_{S \subset N} e(x,S) \geq 0$. Тогда любое решение (23) должно удовлетворять этому же неравенству, что означает его принадлежность ядру.

Можем ли мы в случае пустого ядра рассчитывать по крайней мере на индивидуальную рациональность N-ядра ($\gamma_i \geq v(i)$ для всех i)? Для супераддитивной игры (N,v) ответ является положительным (напомним, что вектор Шепли тоже является индивидуально рациональным для супераддитивной игры). Для того чтобы это показать, обозначим через γ N-ядро игры (N,v) и через M – множество собственных коалиций T из N, для которых эксцесс $e(\gamma,T)$ минимален:

$$T \in M \iff e(\gamma,T) = \min_{S \subset N} e(\gamma,S).$$

Пусть $\gamma_1 < v(1)$. Мы утверждаем, что любая коалиция T во множестве M содержит игрока 1. В противном случае, вычисляя эксцесс коалиции $T \cup \{1\}$, получим противоречие:

$$e(\gamma, T \cup \{1\}) = \gamma_1 + \sum_{i \in T} \gamma_i - v(T \cup \{1\}) =$$

$$= (\gamma_1 - v(1)) + e(\gamma,T) + (v(1) + v(T) - v(T \cup \{1\})),$$

из условия супераддитивности получаем $e(\gamma, T \cup \{1\}) < e(\gamma,T)$.

Выберем малое положительное число ε и определим новое распределение $\gamma' \in B$ следующим образом:

$$\gamma'_1 = \gamma_1 + \varepsilon; \quad \gamma'_i = \gamma_i - \varepsilon/(n-1) \text{ для всех } i \geq 2.$$

Поскольку любая коалиция T во множестве M является собственной (меньше коалиции всех игроков), то

$$e(\gamma',T) = e(\gamma,T) + \varepsilon - \frac{|T|-1}{n-1}\varepsilon > e(\gamma,T).$$

Таким образом, для достаточно малого ε вектор γ' имеет больший минимальный эксцесс, чем γ, что противоречит (23).

Замечание 5.2. Оригинальное определение N-ядра, принадлежащее Шмайдлеру, гарантирует его индивидуальную рациональность (множество B заменяется более узким множеством B' эффективных и индивидуально рациональных распределений; в остальном определение точно такое же). Мы только что показали, что для супераддитивных игр такое требование является избыточным (а все экономические примеры удовлетворяют условию супераддитивности). В любом случае наше определение 5.5 (называемое также в литературе квази-N-ядром) более пригодно для аксиоматической характеризации. Теорема 5.4 не справедлива для оригинального определения Шмайдлера.

Вычислим теперь N-ядро для нескольких примеров. Первый пример - для игр трех лиц. Мы покажем, что N-ядро занимает центральное положение внутри ядра.

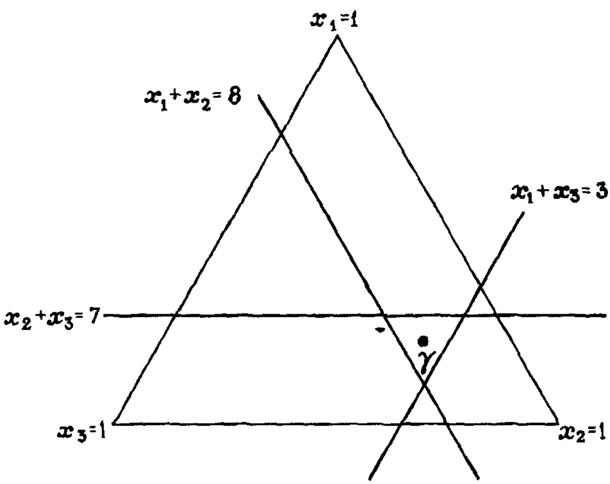


Рис. 5.2

Пример 5.6. N-ядро в некоторых играх трех лиц

Даже для игр трех лиц не так легко привести общую формулу для N-ядра. Исчерпывающие вычисления для супераддитивных игр трех лиц даны в упражнении 5.2. Здесь мы только рассмотрим три типичных случая, относящихся к нормализованным супераддитивным играм, для которых $v(i)=0$ для всех i, $v(N)=1$, $0 \le v(ij) \le 1$.

Случай 1. *Игры с малым или пустым ядром.* Этот класс игр определен тремя неравенствами

$$v(ij)+v(jk) \ge 1 \quad \text{для всех } \{ij\}\ \{jk\},$$
$$\text{где } i,j,k \text{ попарно различны.} \tag{24}$$

В этих играх коалиции, состоящие из двух игроков, являются достаточно сильными. Геометрически неравенства (24) означают, что три точки, в которых пересекаются прямые $x_i+x_j=v(ij)$ и $x_j+x_k=v(jk)$ (например, пересечением является точка $x=(1-v(23),\ v(12)+v(23),\ 1-v(12))$ при $i=1,\ j=2,\ k=3$), лежат внутри симплекса.

Следовательно, возможны две конфигурации (зависящие от знака $v(12)+v(23)+v(13)-2$): одна с непустым ядром (см. рис. 5.2), а другая – с пустым (см. рис. 5.3). В обоих случаях N–ядро является центром трех прямых $x_i+x_j=$ $=v(ij)$, а именно центром γ ядра, если оно не пусто (см. рис. 5.2), и центром "теневого ядра", если ядро пусто.

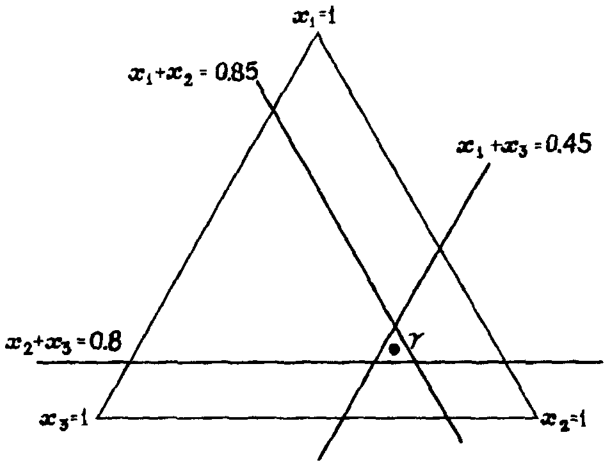


Рис. 5.3

Формальное доказательство этих утверждений является предметом упражнения 5.2. Интуитивно ясно, что поскольку двухэлементные коалиции являются сильными, то только они и будут играть существенную роль в максиминной задаче (23):

$$\max_{x\in B} \min_{S\subset N} e(x,S) = \max_{x\in B} \min\{\, e(x,12),\ e(x,13),\ e(x,23)\,\}.$$

Поскольку сумма $\sum e(x,ij)$ является константой на B, легко вычислить решение γ задачи, указанной в правой части:

$$e(\gamma,12) = e(\gamma,13) = e(\gamma,23) \iff \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(v(12) + v(13) - 2v(23)), \\ \gamma_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(v(12) + v(23) - 2v(13)), \\ \gamma_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(v(13) + v(23) - 2v(12)). \end{cases}$$

Заметим, что в играх, удовлетворяющих (24), легко сравнить вектор Шепли σ с N-ядром. Действительно, для нормализованной игры из формулы (2) получаем формулу

$$\sigma_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\,(v(12) + v(13) - 2v(23))$$

и две аналогичные формулы для σ_2, σ_3, которые получаются заменой агентов. Обозначим через ω центр симплекса, соответствующий равномерному распределению $\omega = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. σ является средней точкой ω и γ, т.е. $\sigma = \frac{1}{2}(\omega + \gamma)$. Это означает, что N-ядро приводит к в два раза большему неравенству в долях прибыли, чем вектор Шепли.

Случай 2. Игры с очень слабыми коалициями двух игроков. Этот класс описывается следующими неравенствами:

$$v(ij) \le \frac{1}{3} \quad \text{для всех } \{ij\}.$$

В любой двухэлементной коалиции прибыль на одного агента равна не более половины прибыли на одного агента в максимальной коалиции. Следовательно, двухэлементные коалиции не являются существенными в задаче (23) (формальное доказательство этого факта является предметом рассмотрения упражнения 5.2):

$$\max_{x\in B} \min_{S\subset N} e(x,S) = \max_{x\in B} \min\{\, e(x,1),\ e(x,2),\ e(x,3)\,\}.$$

Поскольку сумма $\sum e(x,i)$ постоянна на B, N-ядро совпадает с центром ω симплекса:

$$e(\gamma,1) = e(\gamma,2) = e(\gamma,3) \iff \gamma = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$

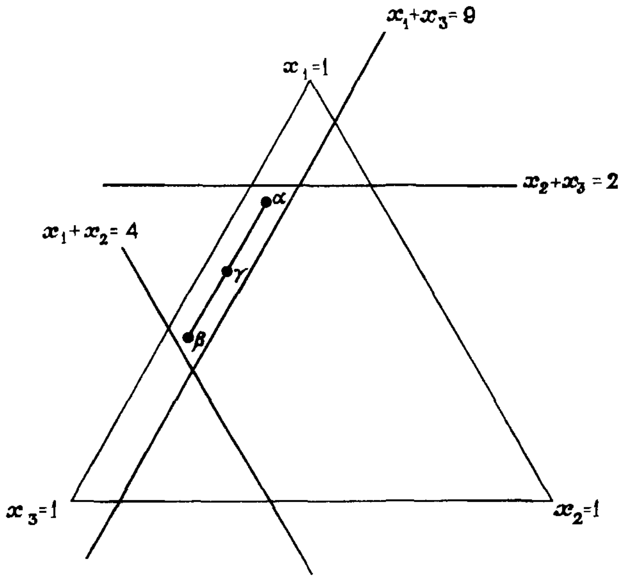


Рис. 5.4

Случай 3. $v(12)=0.4$, $v(23)=0.2$, $v(13)=0.9$. Это типичный пример промежуточной ситуации, когда двухэлементные коалиции не являются ни слабыми, ни сильными. Непустое ядро изображено на рис. 5.4.

В максиминной задаче (23) наиболее существенными ограничениями являются $e(x,2)$ и $e(x,13)$. В действительности мы имеем

$$\begin{aligned} e(x,2)+e(x,13) &= (x_2-v(2))+(x_1+x_3-v(13)) = \\ &= v(N)-v(2)-v(13)=0.1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{для всех } x\in B\colon \quad \min_{S\subset N} e(x,S) \le \min\{e(x,2),\ e(x,13)\} \le 0.05.$$

Решениями задачи (23) являются распределения x, для которых

$$\min_{S\subset N} e(x,S)=0.05.$$

Они покрывают интервал между

$$\alpha=(0.75,\ 0.05,\ 0.2) \quad \text{и} \quad \beta=(0.4,\ 0.05,\ 0.55)$$

(см. рис. 5.4). Лексиминный порядок устраняет неоднозначность; на интервале $[\alpha,\beta]$ критическими являются эксцессы $e(x,12)$ и $e(x,23)$:

$$\text{для всех } x \in [\alpha,\beta]:$$
$$e(x,12) + e(x,23) = x_2 + v(N) - v(12) - v(23) = 0.45.$$

Средняя точка $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = (0.575,\ 0.05,\ 0.375)$ является N-ядром данной игры.

Для произвольной игры n лиц вычисление N-ядра является весьма сложной задачей. В этом смысле вектор Шепли намного проще. Ниже рассмотрены два экономических примера 5.2 и 5.3, в которых вычислить N-ядро намного сложнее, чем вектор Шепли.

Пример 5.2. *Экономика производства кукурузы в имении* (продолжение)

Для произвольной производственной функции f вычислить N-ядро не так просто. Мы приведем точную формулу для случая, когда f соответствуют возрастающие маргинальные доходы и другую формулу для случая их убывания. Сначала рассмотрим случай убывающих маргинальных доходов:

$$\text{для всех } i = 1,\ldots,n-1:$$
$$f(i) - f(i-1) \geq f(i+1) - f(i), \quad \text{где} \quad f(0) = 0. \tag{25}$$

Отметим сначала, что N-ядро дает равные доли прибыли для всех рабочих (это свойство анонимности; см. теорему 5.4). Следовательно, оно имеет вид

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = a; \qquad \gamma_0 = f(n) - na. \tag{26}$$

Заметим теперь, что указанное выше распределение принадлежит ядру в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$0 \leq a \leq f(n) - f(n-1). \tag{27}$$

Действительно, для любой коалиции S, содержащей землевладельца и k рабочих ($|S| = k+1$), мы должны проверить

$$f(n) - na + ka \geq f(k) \iff$$
$$\iff a \leq \frac{f(n)-f(k)}{n-k} \quad \text{для всех } k = 0,\ldots,n-1.$$

Из предположения (25) легко получить, что

$$f(n) - f(n-1) \le \frac{f(n)-f(k)}{n-k} \quad \text{для всех } k = 0,\dots,n-1.$$

Ограничимся теперь рассмотрением максиминной задачи (23) для распределений вида (26) и (27). Задача свелась к нахождению числа a из решения следующей задачи:

$$\max_{0 \le a \le f(n)-f(n-1)} \min_{k=0,\dots,n-1} \{(f(n) - na + ka) - f(k), a\} \tag{28}$$

Мы утверждаем, что для всех $k = 0,1,\dots,n$

$$f(n) - f(k) - (n-k)\,a \ge f(n) - f(n-1) - a \iff \frac{f(n-1)-f(k)}{(n-1)-k}$$

Действительно, из (25) следует

$$f(n) - f(n-1) \le \frac{f(n-1)-f(k)}{(n-1)-k}.$$

Таким образом, задача (28) сводится к задаче

$$\max_{0 \le a \le f(n)-f(n-1)} \min \{f(n) - f(n-1) - a, a\},$$

имеющей единственное решение $a = \frac{1}{2}(f(n) - f(n-1))$. Подведем итоги. Мы доказали, что N-ядро игры (4) при убывающих маргинальных доходах выглядит так:

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_n = \frac{1}{2}(f(n) - f(n-1)),$$

$$\gamma_0 = f(n) - \frac{n}{2}(f(n) - f(n-1)).$$

Интересно сравнить доли землевладельца в N-ядре и векторе Шепли, последняя равна $\sigma_0 = [1/(n+1)]\sum_{i=1}^{n} f(i)$. N-ядро дает ему больший выигрыш и чем сильнее убывают маргинальные доходы, тем больше эта разница:

$$\gamma_0 \ge \sigma_0 \iff \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(i) \le f(n) - \frac{n}{2}(f(n) - f(n-1)).$$

Для того чтобы доказать это неравенство, положите $g(i) = f(i) - (f(n) - f(n-1))\cdot i$ и запишете соответствующее неравенство для g. Выведите из (25), что g не убывает, и завершите доказательство.

При убывающих маргинальных доходах даже в векторе Шепли доля землевладельца больше доли всех рабочих вместе взятых. Для того чтобы убедиться в этом, внимательный читатель должен проверить неравенство $\sigma_0 \ge f(n)/2$.

Случай возрастающих маргинальных доходов, когда для всех

$$i=1,\ldots,n-1:\ f(i)-f(i-1)\le f(i+1)-f(i), \tag{29}$$

приводит к совершенно противоположным результатам. N–ядро дает одинаковые доли землевладельцу и каждому рабочему (по крайней мере в случае, когда маргинальные доходы возрастают достаточно быстро; детали см. в упражнении 5.3):

$$\gamma_0=\gamma_1=\quad=\gamma_n=\frac{f(n)}{n+1}\ . \tag{30}$$

Итак, вектор Шепли дает значительно большую долю землевладельцу в противоположность крайнему эгалитаризму N–ядра. Таким образом, в обоих случаях (убывания и возрастания маргинальных доходов) вектор Шепли предлагает более умеренный арбитраж, а именно при убывании доходов дает не слишком большое преимущество землевладельцу, а при возрастании – рабочим. Доказательство формулы (30) является предметом упражнения 5.3.

Пример 5 3. *Взносы пользователей* (продолжение)

Заданы n затрат, которые упорядочены так: $0\le c_n\le c_{n-1}\le$ $\le\ldots\le c_1$. Затраты на обслуживание коалиции S равны $\max_{i\in S}\{c_i\}$. Для вычисления вектора Шеплн разобьем максимальные затраты c_1 на добавочные затраты $\delta_i=c_i-c_{i+1}$ (при соглашении $c_{n+1}=0$), тогда полные затраты представимы в виде

$$c_1=\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n.$$

В общем случае вычисление N–ядра является весьма трудной задачей (см. Оуэн [1982], с. 256). Мы обсудим только частный случай

$$\delta_1\ge\delta_2\ge\ .\ .\ \ge\delta_n,$$

при котором можно получить явную формулу.

В векторе Шепли (формула (8); см также ниже) доли равны δ_i для агентов $1,2,\ldots,i$, которые "ответственны" за них. N–ядро также распределяет δ_i между агентами $1,2,\ldots,i$, но доля агента i является наибольшей, и доли убывают со скоростью геометрической прогрессии относительно индекса агента. Более точно, если $i\ge2$, то доля агента i равна $\frac{1}{2}$, а доля агента i–1 равна $\frac{1}{4}$ и т. д. Агенты 2 и 1 имеют долю $1/2^{i-1}$. Из этого следует, что агенты 1 и 2 (с максимальными затратами) платят меньше при N-ядре, чем при векторе Шепли, а агенты $n-1$ и n (с наименьшими затратами) платят больше. Точная формула (доказанная в упражнении 5.4) имеет следующий вид:

$$\gamma_1 = \delta_1 + \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_3}{4} + \quad + \frac{\delta_n}{2^{n-1}},$$

$$\gamma_2 = \quad \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_3}{4} + \quad + \frac{\delta_n}{2^{n-1}},$$

$$\gamma_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{\delta_j}{2^{j-i+1}} \quad \text{для всех } i, \quad 2 \le i \le n,$$

$$\gamma_{n-1} = \frac{\delta_{n-1}}{2} + \frac{\delta_n}{4}, \tag{31}$$

$$\gamma_n = \frac{\delta_n}{2}.$$

Заметим, что агент 1 играет особую роль и для него общая формула для γ_i неприменима. Сравним с вектором Шепли

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{\delta_j}{j} \quad \text{для всех} \quad i, \quad 1 \le i \le n.$$

Ясно, что $\sigma_1 \ge \gamma_1$, $\sigma_2 \ge \gamma_2$ и $\sigma_{n-1} \le \gamma_{n-1}$, $\sigma_n \le \gamma_n$ (при $n \ge 4$), но сравнение σ_i с γ_i может решиться в любую сторону для остальных значений i.

5.5 Селекторы ядра

N-ядро демонстрирует эгалитарный подход к эксцессам различных коалиций, и при этом не учитывается размер коалиции, которой достается эта прибыль (или которая несет потери, если ядро пусто). Одна единица прибыли для отдельного агента расценивается так же, как и одна единица для его дополнения - коалиции из $n-1$ агентов. Это положение весьма произвольно. В другом, возможно, более привлекательном определении учитывается *средний* (*в расчете на одного члена коалиции*) *эксцесс*:

$$\bar{e}(x, S) = \frac{1}{|S|} e(x, S)$$

и используется лексиминный порядок для сравнения векторов $\bar{e}(x)$. Это приводит к *пропорциональному* N*-ядру* (единственность и корректность определения проверяются так же, как и для определения 5.5). Получим новый селектор ядра. Пропорциональное N-ядро принадлежит ядру, если последнее непусто. Конечно, возможны и другие варианты. Если мы хотим придать больший вес прибыли больших коалиций, то мы можем взять $\bar{e}(x,S) = |S| \cdot e(x,S)$ и получим еще один селектор ядра и т.д.[1]

Серьезным недостатком N-ядра является его немонотонность по отношению к доходу максимальной коалиции. Может так случиться, что прибыль $v(N)$, доступная максимальной коалиции, возрастет при сохранении прибыли всех остальных коалиций, а доля прибыли некоторых агентов уменьшится. Это весьма непривлекательное свойство, поскольку увеличение $v(N)$ подразумевает участие в дележе всех агентов. Если какие-то агенты страдают в результате улучшений, то они могут отказаться от участия и тем самым сделать невозможным улучшение ситуации.

Лемма 5.2 (Мегиддо [1974]). *Если N состоит из* **девяти** *или более агентов, то можно найти две такие игры (N,v) и (N,w), что*

$$v(N) < w(N) \quad \text{и} \quad v(S) = w(S) \quad \text{для всех } S \subset N, \tag{32}$$

и тем не менее если мы обозначим через γ и μ соответственно их N-ядра, то для некоторого агента i возможно неравенство $\mu_i < \gamma_i$.

Доказательство. Построим пример при $N = \{1,2,\ldots,9\}$. Игра v определяется следующим образом:

$$v(N) = 12,$$

$$v(S) = \begin{cases} 6, & \text{если } S \in A = \{123, 14, 24, 34, 15, 25, 35, 789\}, \\ 9, & \text{если } S \in B = \{12367,\ 12368,\ 12369,\ 456\}, \\ 0 & \text{для любых других } S. \end{cases}$$

---

[1] Вообще эксцесс коалиции S можно представить в виде $\bar{e}(x,S) = e(x,S)/d(S)$, где $d(S) > 0$ – некоторый нормирующий множитель, позволяющий, в частности, перенести на случай коалиций понятие относительного эгалитаризма. Об алгоритме вычисления такого N-ядра см. Меньшикова [1976] и Меньшикова, Меньшиков [1983].

Мы утверждаем, что ее N-ядро есть $\gamma = (1,1,1,2,2,2,1,1,1)$. В самом деле, имеем

$$e(\gamma, S) = -3, \text{ если } S \in A \cup B,$$
$$e(\gamma, S) \geq 0 \text{ для любых других } S \subset N.$$

Значит, $\min_S e(\gamma, S) = -3$. С другой стороны, фиксируем любое другое распределение x, $\sum_{i \in N} x_i = 12$ и определим $\varepsilon_i = x_i - \gamma_i$ при $i \in N$. Рассмотрим следующие веса сбалансированного покрытия:

$$\delta_{456} = \frac{1}{2}, \quad \delta_{789} = \frac{5}{6},$$

$$\delta_S = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{если } \{S \in A \cup B, \ S \neq 456, 789\}, \\ 0, & \text{если } S \notin A \cup B. \end{cases}$$

Из $\sum_{i \in N} \varepsilon_i = 0$ мы выводим

$$\sum_{S \in A \cup B} \delta_S \left[\sum_{i \in S} \varepsilon_i \right] = 0. \tag{33}$$

Если $\sum_{i \in S} \varepsilon_i = 0$ для всех $S \in A \cup B$, то $\varepsilon = 0$ и $x = \gamma$, что легко может проверить читатель. Таким образом, для распределения x, отличного от γ, существует коалиция S из $A \cup B$ при $\sum_{i \in S} \varepsilon_i \neq 0$. Из (33) и того факта, что $\delta_S > 0$ для $S \in A \cup B$, следует, что для некоторой $S \in A \cup B$

$$\sum_{i \in S} \varepsilon_i < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e(x, S) < e(\gamma, S) \ \Rightarrow \ \min_S e(x, S) < -3.$$

Это завершает доказательство утверждения.

Теперь определим новую игру (N, w) при $w(N) = 13$, $w(S) = v(S)$ для всех $S \subset N$. Мы утверждаем, что ее N-ядро есть

$$\mu = (1\tfrac{1}{9}, 1\tfrac{1}{9}, 1\tfrac{1}{9}, 2\tfrac{2}{9}, 2\tfrac{2}{9}, 1\tfrac{8}{9}, 1\tfrac{1}{9}, 1\tfrac{1}{9}, 1\tfrac{1}{9}),$$

таким образом, агент 6 несет потери. Для того чтобы доказать это новое утверждение, вычислим

$$e(\mu, S) = -2\tfrac{2}{3} \quad \text{для всех } S \in A \cup B,$$
$$e(\mu, S) \geq 0 \quad \text{для любых других } S.$$

Далее используем те же самые веса сбалансированного покрытия, чтобы доказать аналогичным образом, что при любом другом распределении x получается $e(x, S) < -2\frac{2}{3}$ для некоторого S.

QED

Вскрытая леммой 5.2 трудность устраняется, если мы используем обобщенное N-ядро вместо N-ядра. Другими словами, обобщенное N-ядро (со средним эксцессом) монотонно относительно дохода максимальной коалиции. Для того чтобы это доказать, рассмотрим две игры (N,v) и (N,w), для которых выполнено (32). Обозначим через $\bar{\gamma}$ и $\bar{\mu}$ их обобщенные N-ядра. Обозначим через $\varepsilon = w(N) - v(N)$ увеличение дохода максимальной коалиции. Для любого сбалансированного распределения x для (N,v) рассмотрим сбалансированное распределение y для (N,w):

$$y_i = x_i + \varepsilon/n \text{ для всех } i \in N.$$

Проверим выполнение следующего равенства:

$$\bar{e}_w(y,S) = \bar{e}_v(x,S) + \varepsilon/n \text{ для всех } S \subset N,$$

откуда следует, что $\bar{\mu} = \bar{\gamma} + \varepsilon/n$. Другими словами, агенты поровну делят добавку к $v(N)$.

Итак, мы имеем весьма сильный аргумент в пользу обобщенного N-ядра в сопоставлении с N-ядром. Однако если присмотреться повнимательнее, то окажется, что и обобщенное N-ядро нарушает некоторое аналогичное свойство монотонности.

Что можно ожидать для агентов данной коалиции S, если ее прибыль $v(S)$ увеличится, а все остальные $v(T)$ останутся без изменений? Естественным изменением явилось бы увеличение долей каждого члена коалиции S (по крайней мере не должно быть уменьшения), что делает добавку желательной для каждого агента из S.

Определение 5.6. *Пусть даны сообщество N и оператор значения φ на E^{2^N}. Скажем, что φ является* **коалиционно монотонным**, *если для любой коалиции S и всех агентов $i \in S$ имеем*

$$\text{для всех } v,w \in E^{2^N}:$$
$$\{v(S) \le w(S) \text{ и } v(T) = w(T) \text{ для всех } T \ne S\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{\varphi_i(v) \le \varphi_i(w)\}.$$

Очевидно, что вектор Шепли является коалиционно монотонным, поскольку по формуле (2) коэффициент при $v(S)$ положителен, если S содержит i. Но это свойство монотонности не может быть выполнено ни для какого оператора значения, выбирающего распределение из ядра.

Теорема 5.3 (Янг [1985*a*]). *Предположим, что N состоит из пяти или более агентов, и пусть φ – оператор значения. Он не может быть одновременно селектором ядра ($\varphi(v)$ принадлежит ядру (N,v), если оно непусто) и обладать коалиционной монотонностью.*

В частности, обобщенное N-ядро не является коалиционно монотонным. Суть теоремы 5.3 состоит в том, что она подвергает крнтнке само понятие ядра.

Доказательство теоремы 5.3. Для доказательства рассмотрим опять простой пример. Для сообщества $N = \{1,2,3,4,5\}$ рассмотрнм нгру v:

$$v(123) = v(35) = 3, \quad v(134) = v(245) = v(1245) = 9,$$

$$v(N) = 11, \; v(S) = 0 \text{ для любых другнх коалиций } S.$$

Мы утверждаем, что ядро v состоит из единственного распределения $\gamma = (0,1,2,7,1)$. В самом деле, запишем некоторые условия принадлежностн распределения x ядру:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \quad x_3 + x_5 \geq 3, \quad x_1 + x_3 + x_4 \geq 9,$$

$$x_2 + x_4 + x_5 \geq 9, \quad x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq 9. \tag{34}$$

Сложение этих неравенств дает $3(\sum_{i=1}^{5} x_i) \geq 33$. Принимая во внимание условие эффективности ($\sum_{i=1}^{5} x_i = 11$), приходим к выводу, что все неравенства в (34) являются равенствами. Эта система пяти независимых уравнений имеет единственное решение γ.

Увелнчим далее $v(1245)$ и $v(N)$ н получнм игру (N,w):

$$w(1245) = w(N) = 12,$$

$$w(S) = v(S) \text{ для всех коалиций } S \neq \{1245\},\ N.$$

Ее ядро состоит из единственного распределения $\mu = (3,0,0,6,3)$. Это получается из аналогичных соображений: выпнсав систему условнй прннадлежности ядру для тех же коалицнй, что и в (34), и сложив их, получим $3(\sum_{i=1}^{5} x_i) \geq 36$.

Значит, в силу эффективности имеет место равенство. Остальное – как раньше.

Если оператор φ является селектором ядра, то $\varphi(v) = \gamma$ и $\varphi(w) = \mu$. Если он является коалиционно монотонным, то $\varphi_i(v) \leq \varphi_i(w)$ при $i = 1,2,4,5$. Получается противоречие, поскольку $\mu_2 < \gamma_2$ и $\mu_4 < \gamma_4$.

QED

Замечание 5.3. В доказательствах леммы 5.2 и теоремы 5.3 мы использовали несупераддитивные ТП-игры. Однако это совсем не важно; то же доказательство сохраняет силу, если заменить v (или w) на их *супераддитивную огибающую*, т.е. наименьшую супераддитивную игру, доминирующую данную.

5.6 Характеризация N-ядра

Характеризация N-ядра получается в контексте изменения состава участников, как в разд. 3.4. Центральная аксиома напоминает свойство сепарабельности для аксиоматических торгов (разд. 3.5). Она называется свойством редуцированной игры.

Если состав участников меняется, то оператор значения φ должен определяться на парах (N,v), где N – произвольное конечное сообщество, а $v \in E^{2^N}$ – кооперативная ТП-игра для данного сообщества.

Для игры двух лиц простая эгалитарная идея приводит к равному дележу кооперативной прибыли $(v(12) - v(1) - v(2))$, даже если это число отрицательно. В самом деле, это единственный оператор значения, который является анонимным и не зависит от индивидуальных нулей.

Определение 5.7. *Оператор значения* φ *является* **независимым от нуля**, *если для любого* N, *любых* $w,v \in E^{2^N}$ *и любого* $\beta \in E^N$ *имеем*

$$\left\{ w(S) = v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i \text{ для всех } S \right\} \Rightarrow \{\varphi(N,w) = \varphi(N,v) + \beta\}. \tag{35}$$

Если нуль полезности агента i уменьшается на β_i при всех

i, то игра v превращается в игру w, как в (35). Независимость от нуля означает, что решение для w остается таким же, как и для v, с точностью до переноса индивидуальных нулей.

Лемма 5.3. *Если оператор значения φ является анонимным и не зависящим от нуля, то для любой ТП-игры двух лиц оператор φ поровну делит кооперативную прибыль:*

$$\text{при } |N| = 2, \quad \varphi_i(N,v) = v(i) + \frac{1}{2}(v(N) - v(1) - v(2)) =$$
$$= \frac{1}{2}(v(N) + v(i) - v(j)). \tag{36}$$

Мы опускаем очевидное доказательство.

Имея значение для любой игры двух лиц, попробуем получить решение игры трех лиц из соображений сепарабельности. Пусть фиксированы $N = \{1,2,3\}$ и игра (N,v). По независимости от нуля мы можем предположить, что без потери общности $v(i) = 0$ при всех i. Обозначим через $\varphi(N,v) = (x_1,x_2,x_3)$ распределение, выбираемое нашим оператором значения. Предположим, что агенты 1 и 2 рассуждают о распределении общей полезности $x_1 + x_2$. Каковы будут их возможные прибыли в редуцированной игре двух лиц при дележе $x_1 + x_2$? Агент 1 может отделиться и получить $v(1) = 0$, а может вступить в кооперацию с агентом 3, образовав коалицию $\{1,3\}$ и отдав агенту 3 величину x_3, а именно то, что агент 3 получает при данном операторе значения. Это приводит к следующему определению редуцированной игры $(\{1,2\},\bar{v})$:

$$\bar{v}(12) = x_1 + x_2,$$
$$\bar{v}(1) = \max(0, v(13) - x_3), \quad \bar{v}(2) = \max(0, v(23) - x_3)$$

Свойство редуцированной игры говорит о том, что в редуцированной игре двух лиц оператор значения предлагает в точности доли (x_1,x_2); доли агентов 1 и 2 справедливы даже при парном сравнении. В силу леммы 5.3 это означает, что

$$x_1 = \frac{1}{2}(\bar{v}(12) + \bar{v}(1) - \bar{v}(2)) =$$
$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \max(0, v(13) - x_3) - \max(0, v(23) - x_3)),$$

откуда

$$x_1 - (v(13) - x_3)^+ = x_2 - (v(23) - x_3)^+ \tag{37}$$

при обозначении $\max(0,y) = y^+$. Проведенное выше рассуждение применимо и к другим двухэлементным коалициям {23} и {13}, что приводит к двум аналогичным формулам:

$$
\begin{aligned}
x_2 - (v(12) - x_1)^+ &= x_3 - (v(13) - x_1)^+, \\
x_1 - (v(12) - x_2)^+ &= x_3 - (v(23) - x_2)^+.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

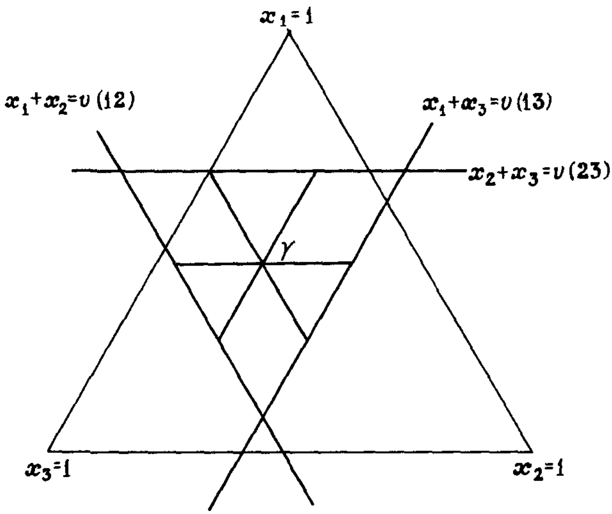


Рис. 5.5

Для того чтобы проинтерпретировать эти формулы, предположим для простоты, что в игре (N,v) имеется непустое ядро. Тогда (37) и (38) означают, что x является центром ядра в следующем смысле. Фиксируем x_3 и рассмотрим распределение (y_1, y_2, x_3) около (x_1, x_2, x_3), которое все еще в ядре. Это возможно тогда и только тогда, когда (y_1, y_2) удовлетворяет следующей системе:

$$
\begin{gathered}
y_1 + y_2 = x_1 + x_2, \\
\{y_1 \geq 0,\ y_1 + x_3 \geq v(13)\} \Longleftrightarrow y_1 \geq (v(13) - x_3)^+, \\
\{y_2 \geq 0,\ y_2 + x_3 \geq v(23)\} \Longleftrightarrow y_2 \geq (v(23) - x_3)^+.
\end{gathered}
$$

Следовательно, уравнение (37) означает, что (x_1, x_2) – средняя точка пересечения ядра с прямой линией $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$, т.е. интервала между

$$((v(13) - x_3)^+,\ x_1 + x_2 - (v(13) - x_3)^+) \text{ и}$$
$$(x_1 + x_2 - (v(23) - x_3)^+,\ (v(23) - x_3)^+).$$

Следовательно, формулы (37) и (38) говорят о том, что x – средняя точка находящейся в ядре части любой прямой, проходящей через x и параллельной грани симплекса; см. рис. 5.5.

Оказывается, что формулы (37) и (38) характеризуют N-ядро произвольной игры трех лиц, независимо от того, пусто ли ее ядро. Этот результат будет доказан в упражнении 5.2 после того, как мы вычислим в явном виде N-ядро произвольной (супераддитивной) игры трех лиц.

Весьма удивительно, что этот результат обобщается до характеризации N-ядра во всех ТП-играх с произвольным числом агентов.

Определение 5.8 (Пелег [1986]). *Для заданной ТП-игры* (N,v), *эффективного распределения* x $(\sum_{i\in N} x_i = v(N))$ *и собственной коалиции* $S \subset N$ **редуцированной игрой для** S **при** x *называется следующая игра* (S, v_x^S):

$$v_x^S(S) = \sum_{i\in S} x_i,$$
$$\text{для всех } T \subset S: \quad v_x^S(T) = \max_{\varnothing \subset R \subset N\setminus S} \left\{ v(T \cup R) - \sum_{i\in R} x_i \right\}. \tag{39}$$

Рассмотрим оператор значения φ, *определенный для ТП-игр всех размеров. Будем говорить, что* φ *удовлетворяет* **свойству редуцированной игры**, *если для любой игры* (N,v) *и любой собственной коалиции* $S \subset N$ *имеем*

$$x = \varphi(N,v) \Rightarrow \varphi(S, v_x^S) = \pi_S(x), \tag{40}$$

где π_S *– проекция из* E^N *на* E^S.

В редуцированной игре v_x^S любая собственная коалиция S может вступить в кооперацию любым подмножеством из $N\setminus S$, заплатив цену, соответствующую x. Свойство редуцированной игры означает, что если внутри собственной коалиции агенты вычислят свои внутрикоалиционные возможности по формуле редуцированной игры (39), то они согласятся с распределением, которое им предлагает оператор значения и которое оказывается справедливым даже внутри их собственной подгруппы.

Теорема 5.4 (Соболев [1975]). *Существует единственный оператор значения, удовлетворяющий свойствам анонимности, независимости от нуля и редуцированной игры. Это – N–ядро.*

Доказательство для произвольного числа агентов является трудным. Свойство редуцированной игры может быть адаптировано и для случая многозначных операторов значения, когда $\varphi(N,v)$ является подмножеством распределений из $v(N)$, а не единственным распределением. Это ключевой момент в аксиоматической характеризации ядра; см. Пелег [1986] (для ТП–игр) и Пелег [1985] (для НТП–игр).

Конечно, свойство редуцированной игры является весьма сложной аксиомой с достаточно тонкой интерпретацией. Вычисление возможных прибылей внутри сепаратных коалиций существенно зависит от возможности купить согласие *любого* подмножества агентов из $N\setminus S$ по цене, установленной оператором значения для исходной игры. Другие определения этих возможных прибылей скорее всего приведут к другим результатам. Один из них состоит в том, что коалиция T всегда кооперирует с агентами из $N\setminus S$, платя им то, что они получили бы в сужении игры на $T\cup(N\setminus S)$, а не их значение в исходной игре. Это определение является весьма произвольным главным образом потому, что агенты из T вынуждены призывать к кооперации агентов из $N\setminus S$ при вычислении их собственных коалиционных возможностей. Тем не менее это приводит к оригинальной характеризации вектора Шепли по Харту и Мас–Колеллу [в печати], что и объясняется в упражнении 5.12.

Упражнения

5.1 *Рынок перчаток* (Ауман [1985])

(a) Два агента (назовем их 1 и 2) имеют по правой перчатке, а другие два агента (назовем их 3 и 4) имеют по левой перчатке. Рыночная цена одной перчатки равна нулю, а цена любой пары (с одной правой и одной левой) равна 10. Эта ситуация описывается следующей ТП–игрой (N,v):

$$v(13) = v(14) = v(23) = v(24) = 1,$$
$$v(S) = 1 \text{ при } |S| = 3, \ v(N) = 2,$$
$$v(S) = 0 \text{ для остальных коалиций.}$$

Покажите, что любой анонимный оператор значения выбирает распределение $\omega = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ в этой игре.

(*b*) Предположим далее, что у агента 1 имеется *две* правые перчатки, в то время как остальные агенты располагают прежним запасом. Это приводит к следующей игре (N, v'):

$$v'(134) = 2, \ v'(S) = v(S) \text{ при } S \neq \{134\}.$$

Проверьте это определение и сосчитайте N-ядро и вектор Шепли для (N, v'). (*Подсказка:* при вычислении N-ядра используйте упражнение 4.3.) Заметьте, что N-ядро наказывает агентов 1 и 2 при переходе от v к v', а вектор Шепли наказывает только агента 2.

(*c*) Рассмотрим игру *пяти* лиц, в которой три агента (назовем их 0, 1 и 2) имеют по одной правой перчатке, а два других агента имеют по одной левой перчатке. Определите кооперативную ТП-игру, описывающую данную ситуацию. Покажите, что ее N-ядро по существу то же, что и в вопросе (*b*) (владельцы левых перчаток делят всю прибыль). Вычислите вектор Шепли и покажите, что положение владельцев левых перчаток несколько лучше, чем в вопросе (*b*).

5.2 *N-ядро супераддитивной игры трех лиц* (Легро [1981])

Дана супераддитивная игра трех лиц. В силу независимости от нуля мы можем без потери общности предполагать, что $v(i) = 0$ при любом i. С точностью до перестановки агентов можно предположить, что

$$0 \leq v(23) \leq v(13) \leq v(12) \leq v(N).$$

Определим пять классов игр и для каждого класса дадим точную формулу для N-ядра. Вам нужно доказать эти формулы.

(*a*) *Класс 1:* $v(12) \leq \frac{1}{3} v(N)$. Тогда $\gamma = \frac{1}{3}(v(N), v(N), v(N))$.

Подсказка: Докажите, что $\min_{S \subset N} e(\gamma, S) = \frac{1}{3} v(N)$ и что γ – единственное решение максиминной задачи (23).

(*b*) *Класс 2:* $\frac{2}{3} v(13) + \frac{1}{3} v(12) \leq \frac{1}{3} v(N) \leq v(12)$. Тогда

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{4}(v(N) + v(12)), \ \gamma_3 = \frac{1}{2}(v(N) - v(12)).$$

Подсказка: Проверьте, что

$$e(\gamma,3) = e(\gamma,12) \le e(\gamma,1) = e(\gamma,2) \le e(\gamma,S)$$

для $S = \{23\}$ и $S = \{13\}$. Если x – другое распределение, такое что $e(x)$ не хуже по лексиминному порядку $e(\gamma)$, то покажите, что $x_3 = \gamma_3$, поскольку

$$e(x,3) + e(x,12) = e(\gamma,3) + e(\gamma,12),$$

и далее, что $x_1 = \gamma_1$, поскольку

$$e(x,1) + e(x,2) = e(\gamma,1) + e(\gamma,2).$$

(*c*) *Класс 3:* $\frac{2}{3}v(23) + \frac{1}{3}v(12) \le \frac{1}{3}v(N) \le \frac{2}{3}v(13) + \frac{1}{3}v(12)$.
Тогда

$$\gamma = (\frac{1}{2}(v(12) + v(13)), \frac{1}{2}(v(N) - v(13)), \frac{1}{2}(v(N) - v(12))).$$

Подсказка: Проверьте, что

$$e(\gamma,3) = e(\gamma,12) \le e(\gamma,2) = e(\gamma,13) \le e(\gamma,S)$$

для $S = \{1\}$ и $S = \{23\}$. Затем используйте тот же прием, что и в вопросе (*b*).

(*d*) *Класс 4:*

$$\frac{2}{3}(v(13) + v(23)) - \frac{1}{3}v(12) \le \frac{1}{3}v(N) \le \frac{2}{3}v(23) + \frac{1}{3}v(12).$$

Тогда

$$\gamma = (\frac{1}{4}(v(N) + v(12)) + \frac{1}{2}(v(13) - v(23)),$$
$$\frac{1}{4}(v(N) + v(12)) + \frac{1}{2}(v(23) - v(13)), \frac{1}{2}(v(N) - v(12))).$$

Подсказка: Проверьте, что

$$e(\gamma,3) = e(\gamma,12) \le e(\gamma,13) = e(\gamma,23) \le e(\gamma,S)$$

для $S = \{1\}$ и $S = \{2\}$. Затем проделайте то же, что и в вопросе (*b*).

(*e*) *Класс 5:* $\frac{1}{3}v(N) \le \frac{2}{3}(v(13) + v(23)) - \frac{1}{3}v(12)$. Тогда

$$\gamma = \frac{1}{3}(v(N) + v(12) + v(13) - 2v(23),$$
$$v(N) + v(12) + v(23) - 2v(13), v(N) + v(13) + v(23) - 2v(12)).$$

Подсказка: Докажите, что

$$\min_{S\subset N} e(\gamma,S) = \frac{1}{3}(2v(N) - v(12) - v(23) - v(13)),$$

и продолжайте, как в вопросе (*a*).

(*f*) Покажите, что в классах 1–4 ядро игры непусто.

(*g*) Покажите, что для каждого класса N-ядро удовлетворяет свойству редуцированной игры (формулы (37) и (38)).

5.3 *N-ядро для экономики производства кукурузы в имении* (продолжение)

Рассматривается модель из примера 5.2, в которой мы предполагаем возрастание маргинальных доходов для всех

$$i = 1,\ldots,n-1:\quad f(i) - f(i-1) \le f(i+1) - f(i) \tag{41}$$

при соглашении $f(0) = 0$.

(*a*) Покажите, что игра (4) является выпуклой тогда и только тогда, когда маргинальные доходы возрастают.

(*b*) Покажите, что такое распределение, как (26), принадлежит ядру в том и только том случае, если $0 \le a \le f(n)/n$. Значит, максиминная задача (23) редуцируется к

$$\max_{0\le a\le f(n)/n} \min\left\{a, \min_{k=0,\ldots,n-1}\{f(n) - f(k) - (n-k)a\}\right\}. \tag{42}$$

(*c*) Покажите, что единственным решением задачи (42) (значит, N-ядром нашей игры) является

$$a^* = \min\left\{\frac{1}{n+1}f(n),\ \frac{1}{2}(f(n) - f(n-1))\right\}.$$

Значит, если $[1/(n+1)]f(n) \le \frac{1}{2}(f(n) - f(n-1))$, то N-ядро строго эгалитарно среди $n+1$ агентов. *Подсказка:* Используйте предположение (41), чтобы показать, что в (42) имеют значение только величины $k = 0$ и $k = n-1$.

5.4 *N-ядро в игре "взносы пользователей"* (продолжение)

Рассматривается модель из примера 5.3 при предположениях

$$0 \le c_n \le c_{n-1} \le \ldots \le c_1,$$

$$\delta_i = c_i - c_{i+1},\ \text{где}\ c_{n+1} = 0.$$

Мы хотим доказать формулу (31). Это – игра с распределением затрат, поэтому вместо максимизации вектора эксцессов $\sum_{i\in S} x_i - v(S)$ мы будем минимизировать вектор эксцессов затрат $\sum_{i\in S} x_i - c(S)$. В частности, максиминная задача (23) превратится в минимаксную задачу

$$\min_{x\in B}\left\{\max\left[\sum_{i\in S} x_i - c(S)\right]\right\} = \min_{x\in B} \varepsilon(x). \tag{43}$$

(a) Рассмотрим распределение $\gamma \in B$, заданное по (31). Покажите, что $\varepsilon(\gamma) = -\frac{1}{2}\delta_n$ тогда и только тогда, когда

$$\text{для всех } i = 1,\dots,n: \quad \sum_{j=i}^{n} \frac{\delta_j}{2^{j-i+1}} \geq \frac{\delta_n}{2}. \tag{44}$$

Рассматривая коалиции $S = \{n\}$ и $S = \{1,\dots,n-1\}$, покажите, что если выполнено (44), то любое решение x задачи (43) имеет $x_n = \frac{1}{2}\delta_n$.

(b) Предположим, что (44) верно. Покажите, что распределение $(x_1,\dots,x_n)$ является N-ядром игры (N, c) тогда и только тогда, когда $\{x_n = \frac{1}{2}c_n$ и $(x_1,\dots,x_{n-1})$ – N-ядро игры $(N\backslash\{n\}, c')\}$, где

$$c'_i = c_i - \frac{1}{2}c_n \text{ для всех } i = 1,\dots,n-1 \iff$$

$$\delta'_i = \delta_i \text{ для всех } i = 1,\dots,n-2 \text{ и } \delta'_{n-1} = \delta_{n-1} + \frac{1}{2}\delta_n.$$

(c) Предположим, что $\delta_n \leq \delta_{n-1} \leq \dots \leq \delta_1$. Используйте индукцию для того, чтобы показать, что N-ядро игры (N, c) задано формулой (31).

5.5 *Вектор Шепли и N-ядро в некоторых играх с квотой* (Ауман [1976])

Дано сообщество $N = \{1,\dots,n\}$ и игра с квотой $\{q; p_1,\dots,p_n\}$ соответствующая следующей ТП-игре (N, v):

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i\in S} p_i \geq q, \\ 0, & \text{если } \sum_{i\in S} p_i < q. \end{cases}$$

Предположим, что веса $p_1,\dots,p_n$ образуют положительную выпуклую комбинацию ($p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$) и что квота q больше $\frac{1}{2}$ и меньше 1.

Коалиция выигрывает ($v(S) = 1$), если ее общий вес достигает квоты, и проигрывает ($v(S) = 0$) в противном случае. Оператор значения предлагает компромисс (похожий на распределение портфелей между партиями, представленными в парламенте) с помощью распределения долей $(x_1,\ldots,x_n)$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, которое может существенно отличаться от вектора относительиых весов $(p_i / \sum_{j=1}^{n} p_j)$.

(a) Покажите, что ядро игры с квотой пусто тогда и только тогда, когда $p_i \leq 1-q$ для всех i.

(b) Рассмотрим игру с квотой для 7 агентов:

$$q = \frac{5}{9},\ p_1 = p_2 = \frac{2}{9},\ p_3 = \ldots = p_7 = \frac{1}{9}.$$

Коалиция выигрывает, если она содержит пять малых агеитов или одного большого и трех малых или двух больших агентов и одного малого.

Покажите, что N-ядро распределяет каждому агенту его вес $(\gamma_i = p_i)$, в то время как вектор Шепли дает $\frac{5}{21}$ каждому большому агенту и только $\frac{11}{105}$ – каждому малому. *Подсказка:* Для нахождения N-ядра решите максиминиую задачу, принимая во внимание миинмальные по включению выигрывающие коалиции. Для нахождения вектора Шепли, вычислите вероятность для большого агента оказаться ключевым, если агенты приходят случайно (ключевым является агент, который делает коалицию выигрывающей).

(c) Рассмотрим игру с квотой с n+1 агентами:

$$q = \frac{1}{2},\ p_0 = \frac{1}{3},\ p_1 = \ldots = p_n = \frac{2}{3n}.$$

Покажите, что при возрастании n N-ядро снова находится вблизи вектора весов, а вектор Шепли дает около $\frac{1}{2}$ большому агенту (равномерно распределяя остаток между малыми агентами).

(d) Рассмотрим игру с квотой с $n+2$ агентами:

$$q = \frac{1}{2},\ p_1 = p_2 = \frac{1}{3},\ p_3 = \ldots = p_{n+2} = \frac{1}{3n}.$$

Покажите, что для больших n N-ядро и вектор Шепли совпадают и дают только $\frac{1}{4}$ каждому большому агенту.

Таким образом, в игре из пункта (d) в векторе Шепли большие агенты наказываются (относительно их квоты), в то время как в играх из пунктов (b) и (c) оии получают выигрыш.

5.6 *Метод распределения пропорционально сепарабельным затратам*

Этот оператор значения в задаче распределения затрат часто используется (см. обзор Яига [1985*b*]). Он состоит в распределениии $c(N)$ пропорционально сепарабельным затратам SC_i:

$$c_i = \frac{SC_i}{\sum_{j=1}^{n} SC_j} \cdot c(N), \qquad \text{где } SC_i = c(N) - c(N\backslash i).$$

Конечно, мы предполагаем, что все SC_i неотрицательны и по крайней мере одно из них положительно. Покажите, что этот оператор удовлетворяет условиям анонимности, аксиоме болвана и независимости от масштаба, но не удовлетворяет аксиоме независимости от нуля.

Покажите, что он не является монотонным относительно максимальной коалиции; c_i может только уменьшиться в результате увеличения $c(N)$, ceteris paribus.

5.7 *Выпуклые игры и значение РРНС затрат*

Приведите пример выпуклой игры трех лиц (можно взять ее в нормализованном виде, как в примере 5.6), в котором значение РРНС затрат (заданное формулой (1) с заменой c на v) не принадлежит ядру. *Подсказка:* Проведите геометрические построения для значения РРНС затрат на симплексе, представляющем игру.

5.8 *Вектор Шепли и монотонность по составу участников*

Рассмотрим *выпуклую* игру (N,v) и для любой коалиции $S \subset N$ обозначим через $\sigma(S,v)$ вектор Шепли игры $(S,\bar{v})$, где $\bar{v}$ – сужение v на S (т.е. $\bar{v}$ получено из v путем простого отбрасывания $v(T)$ для всех коалиций T, не содержащихся в S). Покажите, что компонента вектора Шепли для заданного агента возрастает, если сообщество расширяется:

$$\{i \in S \subset T\} \Rightarrow \{\sigma_i(S,v) \leq \sigma_i(T,v)\} \text{ для всех } S, T, i.$$

Покажите, что это неравеиство может нарушаться, если игра v супераддитивна, но не выпукла.

5.9 *Характеризация выпуклых игр* (Ичиниши [1981])

Игра (N,v) является выпуклой тогда и только тогда, когда вектор маргинальных вкладов (для всех возможных упорядочений N) принадлежит ядру. Необходимость доказана в лемме 5.1. Докажите достаточность. *Подсказка:* Выберите любые две коалиции $S,T \subset N$ и порядок агентов в N так, чтобы сначала шли агенты из $S \cap T$, затем из $T \setminus S$, затем из $S \setminus T$ и наконец из $N \setminus (S \cup T)$. Потом примените иеравенство из определения ядра для соответствующего вектора маргинальных вкладов и коалиции S.

5.10 *Другая формула для вектора Шепли*

(a) Из доказательства теоремы 5.2 следует, что система $(\delta_S,\ S \subset N)$ образует базис в векторном пространстве E^{2^N} ТП-игр для сообщества N. Покажите теперь, что произвольная игра $v \in E^{2^N}$ имеет следующие координаты в этом базисе:

$$v = \sum_{S \subset N} \alpha_S \cdot \delta_S, \quad \text{где } \alpha_S = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T)$$

при соглашении $s = |S|$, $t = |T|$. *Подсказка:* Фиксируем коалицию S_0 и вычислим

$$\sum_{S \subset N} \alpha_S \cdot \delta_S(S_0) = \sum_{S \subset S_0} \alpha_S = \sum_{S \subset S_0} \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T).$$

В правой части этой формулы вычислите коэффициент при $v(T)$ для всех $T \subset S_0$.

(b) Покажите, что вектор Шепли может быть записан с помощью оператора σ:

$$\sigma(v) = \sum_{S:\, i \in S} \frac{\alpha_S}{s}.$$

Дайте интерпретацию этой формулы на основе последовательного платежа дивидендов агенту i. Здесь α_S – дивиденд коалиции S, поровну поделенный между членами этой коалиции. Детали и обобщения для НТП-игр см. в Харшаньи [1963] и Калаи и Самет [1985].

5.11 *Другой взгляд на вектор Шепли для игр трех лиц*

Рассмотрим оператор φ для игр двух и трех лиц. Для игр двух лиц он задается формулой (36). Для игр трех лиц он дает равный. доход (потери) от присоединения к любой коалиции двух агентов. Сформулируем это свойство более точно.

Пусть (N,v) – игра трех лиц. Если агенты 1 и 2 объединяются, то они оказываются в игре двух лиц с агентами 12 и 3 и кооперативными возможностями, определяемыми, как и ранее, по v. Обозначим через δ_{ij} разницу между общим распределением для коалиции ij до и после их объединения. Мы хотим, чтобы $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23}$.

Покажите, что это свойство приводит к вектору Шепли.

5.12 *Другие свойства редуцированной игры* (Харт и Мас-Колелл [в печати])

На протяжении этого упражнения φ – оператор значения, определенный для всех игр (N,v) с произвольными конечными сообществами.

(a) Определим редуцированную игру на S при x так:

$$v_x^S(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

для всех $T \subset S$: $$v_x^S(T) = v(T \cup (N \setminus S)) - \sum_{i \in N \setminus S} x_i$$

Покажите, что значение РРНС затрат (формула (1) с v вместо затрат) удовлетворяет соответствующему свойству редуцированной игры. Покажите, что значение РРНС затрат характеризуется анонимностью, независимостью от нуля и свойством редуцированной игры. *Подсказка:* Используйте лемму 5.3 и примените (40) для коалиций S из двух агентов.

(b) Определим редуцированную игру на S при заданном φ следующим образом:

для всех $T \subset S$: $$v^S(T) = \sum_{i \in T} \varphi_i(T \cup (N \setminus S), v). \tag{45}$$

В выражении $\varphi(T \cup (N \setminus S), v)$ игра v является обычным сужением (N,v) на $T \cup (N \setminus S)$.

Заметьте, что это определение редуцированной игры зависит от оператора значения для нее самой, но не от произвольного распределения x. В соответствующем свойстве редуцированной игры (40) просто осуществляется замена v_x^S на v^S.

Вектор Шепли характеризуется соответствующим свойством редуцированной игры, анонимностью и независимостью от нуля (Харт и Мас-Колелл [в печати]). Покажите это, определив "потенциальную" функцию P следующим образом:

$$\text{для всех ТП-игр } (N,v)\text{:}\quad P(N,v) = \sum_{S\subset N} \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!} v(S),$$

где s – размер S. Проверьте, что вектор Шепли задается оператором σ:

$$\sigma_i(N,v) = P(N,v) - P(N\setminus\{i\},v).$$

Рассмотрим коалицию $S = N\setminus\{1\}$ и соответствующую редуцированную игру (45) на S при заданном σ, обозначаемую v^{-1}:

$$v^{-1}(T) = \sum_{i\in T} \sigma_i(T\cup\{1\},v) =$$
$$= \sum_{i\in T} P(T\cup\{1\},v) - P(T\cup\{1\}\setminus\{i\},v) \text{ для всех } T\subset N\setminus\{1\}.$$

Покажите, что для всех $T\subset N\setminus\{1\}$ выполнено $P(T,v^{-1}) = P(T\cup\{1\},v)$ и выведите отсюда, что

$$\sigma_j(N\setminus\{1\},v^{-1}) = \sigma_j(N,v) \quad \text{для всех } j\in N\setminus\{1\},$$

т.е. в точности желаемое свойство редуцированной игры для $S = N\setminus\{1\}$. Затем используйте соображения индукции и покажите, что σ удовлетворяет свойству редуцированной игры для любой коалиции $S\subset N$.

Обратно, индукцией по $|N|$ покажите, что оператор значения σ, который (i) удовлетворяет свойству редуцированной игры и (ii) задан формулой (36) для любой игры двух лиц, должен совпадать с вектором Шепли.

(c) Определим редуцированную игру на S при заданном φ следующим образом:

$$v^S(S) = \sum_{i\in S} \varphi_i(N,v)$$
$$\text{для всех } T\subset S\text{:}\quad v^S(T) = \max_{R\subset N\setminus S} \sum_{i\in T} \varphi_i(T\cup R,v). \tag{46}$$

Покажите, что оператор значения φ, заданный по (36) для игр двух лиц и удовлетворяющий свойству редуцированной игры, определенной по (46), для игр трех лиц должен быть следующей модификацией вектора Шепли:

$$\varphi_1(N,v) = \frac{1}{3}\,v(N) + \frac{1}{6}\,[(v(12) - v(1) - v(2))^+ +$$
$$+ (v(13) - v(1) - v(3))^+ - 2(v(23) - v(2) - v(3))^+] +$$
$$+ \frac{1}{3}\,(2v(1) - v(2) - v(3)).$$

Заметьте, что для супераддитивных игр это – обычный вектор Шепли. Покажите, что этот оператор нельзя продолжить иа игры четырех лиц с сохранением свойства редуцированной игры, определенной по (46).

Часть III

Механизмы коллективного принятия решений

Глава 6

Равный или пропорциональный дележ

Обзор

В ч. III мы применим введенные в ч. I и II понятия к некоторым микроэкономическим проблемам дележа прибыли. В двух обсуждаемых в этой главе простейших задачах распределения прибыли н дележа затрат нет очевидного решения.

При рассмотрении задачи распределения затрат лучше всего иметь в виду производство неделимого общественного продукта, скажем строительство моста или другого подобного объекта коллективного пользования. Проблема – в том, как распределить затраты на создание объекта. Имеются только данные об общих затратах на строительство моста и доходы, которые каждый агент извлекает из этого объекта (по одному числу на агента, если мы предполагаем квазилинейность полезностей). Другой интерпретацией той же формальной модели служит расчет при банкротстве. Агенты являются кредиторами обанкротившейся фирмы. Каждый агент имеет выраженную в деньгах претензию на ее собственность, но вся собственность фирмы оказывается меньше суммы претензий. Проблема состоит в том, как поделить собственность между кредиторами.

Задача дележа прибыли заключается в том, что нужно поделить выручку от неделимого кооперативного предприятия между несколькими партнерами. Представим себе оркестр, дающий единственный концерт. Гонорар должен быть поделен среди музыкантов. Правило дележа должно быть основано на оценке "рыночной стоимости" каждого музыканта – по одному числу на каждого агента, представляющему его полные затраты на присоединение к оркестру.[1] Предположим, что гонорар превосходит сумму полных затрат. Как он должен быть поделен между участниками?

Общей чертой этих двух задач является предельная простота входных данных и, значит, их широкая применимость. Представим себе деловое сотрудничество, объединяющее профессионалов различной квалификации. Предположим, что единственной оценкой их полных затрат на включение в дело является некоторое число в долларах и что у нас нет никаких других оценок (например, усилий) их относительного вклада в кооперативное предприятие. Если чистый доход от участия превосходит (меньше) сумму полных затрат, то мы имеем модель дележа прибыли (модель распределения затрат).

Простые задачи требуют простых решений. В самом деле, две простые идеи: равное и пропорциональное распределение доходов (или затрат) являются наиболее частыми решениями этих задач. В этой главе мы систематически сравниваем эти два подхода и аксиоматически устанавливаем их первостепенное значение. Некоторые рассуждения (в частности, аксиомы в разд. 6.5 и 6.6 и математические результаты о характеризации) далеко не очевидны. Более того, мы найдем нетривиальный альтернативный механизм (см. разд. 6.4). В конце концов наши задачи не так уж просты.

В задаче дележа прибыли (разд. 6.1) пропорциональное решение делит общий доход пропорционально индивидуальным полным затратам. Эгалитарное решение сначала возмещает полные затраты и затем поровну делит оставшуюся часть прибыли. В задаче распределения затрат (разд. 6.2) пропорциональное решение определяется так же просто (с агентов взимается плата, пропорциональная доходам), но в случае эгалитаризма все обстоит несколько сложнее. Во-первых, есть две эгалитарные идеи: уравнивать затраты и уравнивать чистые доходы от экономии затрат. Во-вторых, мы должны быть уверены, что вектор распределения затрат выдерживает тест

---

[1] Возможная интерпретация этих затрат: зарплата на старом месте работы плюс расходы, связанные с переездом на новое место жительства, плюс и т.д. – *Прим. ред.*

на отделение: затраты, посчитанные для произвольной коалиции агентов, не должны превосходить общих затрат иа продукт (иначе коалиция предпочтет произвести продукт самостоятельно) и общего дохода коалиции (иначе она вообще предпочтет не иметь коллективного продукта). В разд. 6.3 мы адаптируем обе эгалитарные идеи так, чтобы они удовлетворяли этому тесту. Получившиеся решеиия будут назваиы соответствеино подушным налогом и уровневым налогом (определение 6.1).

В разд. 6.4 обсуждаются еще два механизма распределеиия затрат на наш неделимый продукт коллективного пользования. Они соответствуют N-ядру и вектору Шепли для кооперативной ТП-игры, получающейся при учете принципа отделения. Эти два метода требуют более трудоемких вычислений, зато они оказываются удивительно уместными, особенно в интерпретации с банкротством (см. пример 6.4).

Последние два раздела посвящены аксиоматическим результатам. Мы обсуждаем две мощных аксиомы независимости. Одна из них является вариантом проанализированиого выше условия сепарабельиости. Новая аксиома (разд. 6.5) называется децентрализуемость: часть затрат (доля прибылн) агента должна зависеть от общих затрат, собственного дохода от продукта, общего дохода всех агентов вместе взятых (соответственно от общего дохода, собственных полных затрат и суммы полных затрат). В задаче распределения затрат этой аксиомы по существу достаточно для характеризации пропорционального решения (теорема 6.1). Однако в задаче дележа прибыли пропорциональное решение, эгалитарное решение и многие другие удовлетворяют этой аксиоме. В разд. 6.6 мы введем сильную аксиому сепарабельности (подобную аксиоме сепарабельности из гл. 3 и свойству редуцированной игры из гл. 5). В ней утверждается, что доли затрат (доли прибыли) коалиции должны зависеть только от общих затрат, посчитанных для этой коалиции, и доходов ее членов (общей прибыли, доставшейся коалиции, и полных затрат ее членов). Аксиома сепарабельности характеризует бесконечное семейство решений, называемых параметрическими решениями. Это семейство включает все ранее введенные решения, кроме одного. В задаче дележа прибыли комбинация децентрализуемости и сепарабельности характеризует однопараметрическое семейство решений, содержащее равное и пропорциональное решения в качестве своих крайних точек. Это, в свою очередь, приводит к оригинальной характеризации *пары*, состоящей из этих двух базовых решений (упражнение 6.6).

6.1 Модель дележа прибыли

> *Задача дележа прибыли.* n агентов получают от кооперации доход $r > 0$. Полные затраты агента i составляют $c_i > 0$. Предположим, что кооперация приносит прибыль, т.е. $\sum_{i=1}^{n} c_i \leq r$. Как она должна быть поделена?

Первый принцип распределения дохода r – индивидуальная рациональность. Каждый агент должен получить не меньше своих полных затрат, иначе он не будет кооперировать. После того как эти приоритетные платежи произведены, останется прибыль $s = r - \sum_{i=1}^{n} c_i$. Поскольку у нас нет способа соотнести эту прибыль с усилиями конкретного агента (или коалиции агентов), то почему бы не поделить ее поровну? Принцип ясен: поскольку какую-то прибыль дает кооперация всех агентов, то все они имеют равные права на нее. Итак, при эгалитарном решении доля агента i такова: $s/n + c_i$.

Предыдущие рассуждения могут быть усилены на языке кооперативных игр. Наша задача – это в точности ТП-игра, в которой прибыль $v(N)$ максимальной коалиции равна r, а для коалиции из одного игрока получается $v(i) = c_i$. Поскольку мы ничего не знаем о значении $v(S)$ промежуточной коалиции, предположим, что S не способна создать кооперативной прибыли ($v(S) = \sum_{i \in S} c_i$). Теперь любой не зависящий от нуля (определение 5.7) и анонимный оператор значения поделит $v(N)$ так же, как и при эгалитарном решении. (Упражнение: почему?)

Конечно, агент, у которого полные затраты превышают средний уровень, может не согласиться с этой аргументацией. Он может возразить, что неправомерно считать несущественными промежуточные коалиции ($v(S) = \sum_{i \in S} c_i$). Вместо этого нужно рассматривать полные затраты агентов как факторы процесса производства, в котором доход является выходом. В первом приближении этому процессу соответствуют постоянные доходы на масштаб, и x единиц преобразуется в $r / \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x$ единиц отдачи. Так что каждый агент *должен получить* ту часть выпуска, которую он произвел, т.е. агент i получает $r \cdot (c_i / \sum_{j=1}^{n} c_j)$. Это и есть *пропорциональное* решение. Прицип опять же ясен. Отдача на единицу индивидуальных затрат для всех одинакова.

Наш первый пример дает некоторую экспериментальную мотивировку того, что эгалитарное и пропорциональное решения являются двумя основными решениями задачи дележа прибыли.

Таблица 6.1

Распределение		Число опрошенных	
Джон	Питер	Вариант (*a*)	Вариант (*b*)
90 000	0	0	0
60 000	30 000	1	5
50 000	40 000	33	15
45 000	45 000	6	21
40 000	50 000	0	0
30 000	60 000	0	0
0	90 000	0	0
	Всего	40	41

Пример 6.1. Эксперимент (Шоккерт и Оверлит [1986])

В этом эксперименте участникам предлагали справедливо поделить прибыль, причем им рассказывали одну из следующих историй: вариант (*a*) или (*b*). Вариант (*a*) был рассказан сорока опрошенным, а вариант (*b*) – 41. Ответы явно сконцентрированы вокруг эгалитарного и пропорционального решений. Вместе на них приходится 97% ответов в варианте (*a*) и 87% в варианте (*b*) (см. табл. 6.1).

Джон и Питер стеклодувы и ведут дело совместно. (*a*) Джон работает пять дней в неделю, а Питер – только четыре. (*b*) Джон художественно более одарен, чем Питер, и может поэтому получать больший доход. Их работа является взаимно дополняющей, и оба они абсолютно необходимы друг другу. Джои имеет чистый доход 500 000 в год, а Питер получает 400 000. В конце года их торговая выручка составила 990 000. Таким образом, после вычета заработной платы они получили прибыль 90 000. Каково с вашей точки зрения должно быть справедливое распределение этой прибыли?

6.2 Модель распределения затрат

Задача ассигнований на производство неделимого общественного продукта Этот коллективный объект (мост) стоит $c > 0$ и приносит доход $b_i \geq 0$ каждому из его пользователей $i = 1, \ldots, n$. Это простой коллективный продукт: агент i извлекает b_i единиц из его потребления вне зависимости от того, сколько получают другие агенты. Мы предполагаем, что сооружение объекта эффективно: $\sum_{i=1}^n b_i \geq c$. Как мы должны распределить затраты на него?

Формально эта модель является симметричной моделью дележа прибыли, если мы рассматриваем b_i как полные затраты агента i, а $\sum_{i=1}^n b_i - c$ как общий доход. Мы вернемся к этой интерпретации в разд. 6.4 (см. пример 6.4).

Пропорциональное решение подсчитывает затраты пропорционально доходам, значит, агент i платит $x_i = c \cdot (b_i / \sum_{j=1}^n b_j)$. Заметим, что доля затрат x_i неотрицательна (никто не получает субсидий за потребление продукта) и ограничена сверху величиной b_i (никто не платит больше своего полного дохода).

Эгалитарная идея может применяться двумя способами: уравнивание долей затрат и уравнивание чистой экономии на затратах. Решение с *равномерным распределением затрат* приписывает $x_i = c/n$ каждому агенту, в то время как решение с *равной прибылью* приписывает $x_i = b_i - (\sum_{j=1}^n b_j - c)/n$ агенту i (так что $b_i - x_i = b_j - x_j$ для всех i, j). Очевидный недостаток равномерного распределения затрат состоит в том, что какой-то агент, возможно, должен будет заплатить больше своего полного дохода (если b_i ниже c/n). С другой стороны, при равной прибыли кто-то может получить субсидию за потребление продукта (если b_i ниже $(\sum_{j=1}^{n} b_j - c)/n$). Этой ситуацией вряд ли будут довольны остальные n–1 агентов. В следующем разделе мы модифицируем оба эти решения так, чтобы преодолеть эти трудности.

Необходимость (нижних и верхних) границ на доли затрат соответствуют понятию ядра в кооперативной ТП-игре, описывающей полные затраты коалиций. В задаче ассигнований на коллективный продукт коалиция может произвести некоторую прибыль за счет строительства объекта и покрытия полных затрат на него. Другими словами, коалиция S получает следующую прибыль:

$$v(S) = \left[\sum_{i\in S} b_i - c\right]^+ \text{ при обозначении } z^+ = \max(z,0). \qquad (1)$$

Заметим, что эта кооперативная игра есть частный случай игры с распределением затрат и независимым спросом (см. упражнение 4.1). Здесь затраты на обслуживание любой коалиции одинаковы: $c(S) = c$ для любой S.

Предположим, что $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$. Вектор $(x_1, \dots, x_n)$ долей затрат проходит тест на отделение тогда и только тогда, когда вектор прибылей $(b_1 - x_1, \dots, b_n - x_n)$ принадлежит ядру игры (1), точнее

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c \quad \text{ и для всех } S \subset N:$$

$$\sum_{i\in S}(b_i - x_i) \geq \left[\sum_{i\in S} b_i - c\right]^+ \Leftrightarrow \sum_{i\in S} x_i \leq \min\left\{c, \sum_{i\in S} b_i\right\}.$$

Из этих неравенств, в частности, следует, что $x_i \leq b_i$ (возьмите $S = \{i\}$): никто не платит больше (полного) дохода, который он получает от коллективного продукта. Другое следствие состоит в том, что $x_i \geq 0$ (возьмите $S = N\setminus\{i\}$ и запишите $\sum_{N\setminus\{i\}} x_j = c - x_i$): никто не получает деньги за потребление коллективного продукта. Обратно, эти границы на индивидуальные доли затрат и уравнение бюджетного баланса вместе дают принадлежность ядру:

Вектор затрат $(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит ядру игры (1)
тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$ и $0 \leq x_i \leq b_i$ для всех i. (2)

(Отметим неточность выражения: в действительности вектор $b-x$ принадлежит ядру.) Опустим очевидное доказательство. Таким образом, ядро устанавливает достаточно широкие границы для распределения затрат. На самом деле кооперативная игра (1) является выпуклой (определение 5.2. Упражнение: докажите это утверждение). Как было замечено выше, пропорциональное распределение затрат принадлежит ядру. В следующих двух разделах мы построим еще четыре селектора ядра для задачи распределения затрат.

6.3 Уровиевый налог и подушный налог

Мы строим два селектора ядра, основанные на равной прибыли и равномерных долях затрат. Ранее отмечалось, что первый из них может оказаться вне ядра за счет нарушения ограничений $0 \le x_i$, а второй – за счет нарушения ограничений $x_i \le b_i$. Чтобы разрешить эту проблему, мы будем рассматривать неравенства $0 \le x_i \le b_i$ в качестве ограничений. Это приводит к двум решениям из ядра, называемым уровневым налогом и подушным налогом.

Определение 6.1. *Дана задача распределения затрат при* $\sum_{i=1}^{n} b_i \ge c$. **Уровневый налог** *есть (единственное) распределение затрат* $(x_1,\dots,x_n)$, *являющееся решением задачи:*

$$(x_1,\dots,x_n) \in A = \left\{(y_1,\dots,y_n) \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = c \text{ и } 0 \le y_i \le b_i \ \forall i\right\},$$

$$(b_1-x_1,\dots,b_n-x_n)\ R_*(b_1-y_1,\dots,b_n-y_n) \quad \text{для всех } y \in A,$$

где R_* *– лексиминный порядок на* E^n.

Подушный налог *есть (единственное) распределение затрат* $(x_1,\dots,x_n)$, *являющееся решением задачи:*

$$(x_1,\dots,x_n) \in A,$$
$$(x_1,\dots,x_n)\ R_*\ (y_1,\dots,y_n) \quad \text{для всех } y \in A.$$

Уровневый налог уравнивает прибыли (чистые доходы) при ограничеииях $0 \le x_i \le b_i$, в то время как подушный налог уравнивает затраты при тех же ограничениях. Если доли затрат равной прибыли (равномерное распределение затрат) удовлетворяет этим ограничениям, то оно совпадает с уровневым налогом (подушным налогом).

Единственность этих двух решений всегда имеет место, поскольку мы находим максимум лексимииного порядка иа выпуклом множестве из E^n (лемма 1.1).

"Налоговая" терминология принадлежит Янгу [1987], который интерпретировал неделимый общественный продукт как услуги, оказываемые сборщиком налогов. Доход агента i до уплаты налога равен b_i, а его доход после уплаты налогов равен $b_i - x_i$. Таким образом, c – есть общая иеобходимая сумма налогов (бюджет сборщика).

Как уровневый, так и подушный налоги могут быть вычислены в явном виде; см. формулы (5) и (6) в упражнении 1.6 для уровневого налога. Аналогичные формулы для подушного налога могут быть легко получены отсюда (замена переменных $x_i^1 = b_i - x_i$ преобразует задачу о подушном налоге $(b_1, \ldots, b_n; c)$ в задачу об уровневом налоге $(b_1, \ldots, b_n; c^1)$ при $c^1 = \sum_{i=1}^n b_i - c$).

Альтернативное параметрическое представление является более выразительным.

Лемма 6.1. *Для данной задачи* $(b_1, \ldots, b_n; c)$ *подушный налог может быть вычислен из решения следующего уравнения относительно неизвестного* $\lambda \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = c \quad \Rightarrow \quad x_i = \min\{\lambda, b_i\}. \tag{3}$$

Уровневый налог может быть вычислен из решения следующего уравнения относительно неизвестного $\lambda \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \quad \Rightarrow \quad x_i = b_i - \min\{\lambda, b_i\}. \tag{4}$$

Доказательство справедливости формул (3) и (4) является предметом упражнения 6.1. Проиллюстрируем их на двух примерах.

Пример 6.2. *Распределение затрат между двумя агентами*

Уравнение (3) при $n = 2$ переписывается как

$$\min\{\lambda, b_1\} + \min\{\lambda, b_2\} = c, \quad x_i = \min\{\lambda, b_i\}.$$

Предполагая, что $b_1 < b_2$, получаем явное решение

$$\begin{aligned} &\lambda = \tfrac{1}{2}c \text{ и } x_1 = x_2 = \tfrac{1}{2}c && \text{при } 0 \le c \le 2b_1, \\ &\lambda = c - b_1 \text{ и } x_1 = b_1,\ x_2 = c - b_1 && \text{при } 2b_1 \le c \le b_1 + b_2. \end{aligned} \qquad (5)$$

Аналогично уравнение (4) переписывается как

$$\min\{\lambda, b_1\} + \min\{\lambda, b_2\} = (b_1 + b_2 - c), \quad x_i = b_i - \min\{\lambda, b_i\}$$

со следующим решением при $b_1 < b_2$:

$$\begin{aligned} &\lambda = b_2 - c \text{ и } x_1 = 0,\ x_2 = c && \text{при } 0 \le c \le b_2 - b_1, \\ &\lambda = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2 - c) \text{ и } b_1 - x_1 = b_2 - x_2 = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2 - c) && \\ & && \text{при } b_2 - b_1 \le c \le b_1 + b_2. \end{aligned} \qquad (6)$$

На рис. 6.1 мы изобразили три кривые, соответствующие траекториям вектора прибыли $(b_1 - x_1, b_2 - x_2)$ при затратах c, увеличивающихся от нуля до $b_1 + b_2$ для пропорционального налога, подушного налога и уровневого налога.

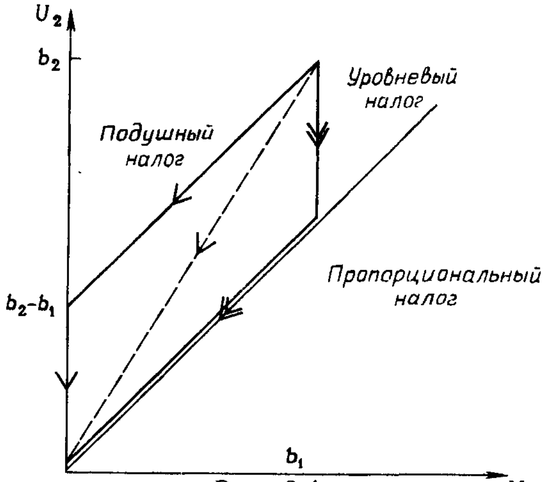


Рис. 6 1

Из формул (5) и (6) мы видим, что подушный налог совпадает с равномерным распределением затрат для малых значений c, а уровневый налог совпадает с равной прибылью для больших значений c. Это свойство остается справедливым и для произвольного n. Если каждое b_i положительно и $c/n \le \min\{b_i\}$, то решение (3) есть $\lambda = x_i = c/n$. В то же время если $\sum_j b_j - n \cdot \min(b_j) \le c \le \sum_j b_j$, то решение (4) есть

$$\lambda = b_i - x_i = (1/n)(\textstyle\sum_j b_j - c).$$

Пример 6.3. Числовой пример

Имеется пять агентов с доходами

$$b_1 = 4, \quad b_2 = 12, \quad b_3 = 20, \quad b_4 = 24 \quad \text{и} \quad b_5 = 30.$$

Общий доход равен $\sum_{i=1}^{n} b_i = 90$. Рассмотрим сначала (как и в упражнении 1.3) достаточно низкие затраты $c = 30$. Они все же недостаточно низки, чтобы подушный налог совпадал с равномерным распределением ($x_i = 6$ для всех i). Агент 1 может заплатить только $x_1 = 4$, после чего оставшиеся четыре агента равномерно распределяют оставшиеся затраты. Вместе с тем, уровневый налог очень приятен для агентов 1 и 2, которые не платят ничего, в то время как остальные агенты довольствуются $14\frac{2}{3}$ единицами прибыли каждый:

Доходы	4	12	20	24	30	Общие затраты
Подушный налог	4	$6\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	30
Пропорциональный налог	$1\frac{1}{3}$	4	$6\frac{2}{3}$	8	10	30
Уровневый налог	0	0	$5\frac{1}{3}$	$9\frac{1}{3}$	$15\frac{1}{3}$	30

Далее выберем достаточно большие затраты $c = 66$. При уровневом налоге все агенты кроме первого получают по пять единиц прибыли. При подушном налоге первые два агента не получают никакой прибыли, а оставшиеся три – имеют по $16\frac{2}{3}$ каждый:

Доходы	4	12	20	24	30	Общие затраты
Подушный налог	4	12	$16\frac{2}{3}$	$16\frac{2}{3}$	$16\frac{2}{3}$	66
Пропорциональный налог	2.9	8.8	14.7	17.6	22	66
Уровневый налог	0	7	15	19	25	66

Заметим, что в этих двух примерах пропорциональный налог, как правило, но не всегда, находится между подушным налогом и уровневым налогом.

Каждый из трех селекторов ядра (а именно пропорциональный, подушный и уровневый налоги) могут быть подтверждены соответствующей аксиоматикой. Пропорциональное. распределение затрат допускает оригинальную характеризацию, которая объясняется в разд. 6.5 (теорема 6.1). Подушный налог (уровневый налог) есть селектор ядра, минимизирующий нера–

венство в распределении затрат (в распределении прибыли): см. упражнение 6.2. Эти три метода имеют также долгую историю практического применения. В противоположность этому в следующем разделе приводится два достаточно экзотических решения, которые получаются как приложения двух наиболее известных операторов значения для ТП-игр.

6.4 Вектор Шепли и N-ядро при распределении затрат

Построим еще два решения задачи распределения затрат, основанные на векторе Шепли и N-ядре ТП-игры (1).

Заметим сначала, что если затраты на общественный продукт настолько малы, что каждый отдельный агент мог бы произвести его за свой счет, а именно $0 \leq c \leq \min_j b_j$, то игра (1) записывается в виде

$$v(S) = \sum_{i \in S} b_i - c \quad \text{для всех } S \subseteq N.$$

В этом случае ее значение соответствует равномерному распределению затрат $x_i = c/n$ для всех i. Это есть также подушный налог для любого значения, удовлетворяющего независимости от нуля и анонимности (такими, в частности, являются вектор Шепли и N-ядро). В самом деле, при независимости от нуля значение равно $(b_1 + y_1, \ldots, b_n + y_n)$, где $(y_1, \ldots, y_n)$ – значение игры w, $w(S) = -c$ при всех S. По анонимности значение w есть $y_i = -c/n$ при всех i.

Предположим далее, что затраты c настолько велики, что производство общественного продукта является эффективным только в том случае, если все агенты потребляют его, а именно

$$\text{для всех } i\text{:} \qquad \sum_{j \neq i} b_j \leq c \leq \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Тогда ТП-игра (1) записывается в виде: $v(S) = 0$ для всех $S \subset N$, $v(N) = \sum_N b_i - c$. Таким образом, любой анонимный оператор значения будет уравнивать доли прибыли $v(N)$ соответственно методу равной прибыли: $b_i - x_i = b_j - x_j$ для всех i, j. Это также есть уровневый налог.

Эти два крайних поведения – равномерное распределение затрат, если затраты достаточно малы, и равная прибыль, если затраты достаточно велики – имеют хороший содержательный смысл, особенно при интерпретации, связанной с банкротством и обсуждаемой в Ауман и Машлер [1985]. В их истории b_i – заявка кредитора на некоторое наследство, которое равно e, $e < \sum_{i=1}^{n} b_i$. Дефицит $c = \sum_{i=1}^{n} b_i - e$ есть те затраты, которые кредиторы должны договориться поделить между собой, перед тем как они ликвидируют наследство. Если дефицит очень мал (относительно каждой заявки), то к а ж д ы й знает, что его заявка будет почти выполнена, и его внимание сфокусируется на дефиците, что приведет к уравниванию затрат. С другой стороны, если стоимость наследства очень мала (скажем, меньше любой заявки), то часть заявки сверх e становится бессмысленной, что ставит всех агентов в равные условия, предполагая равномерное распределение e, т.е. равную прибыль.

Рассмотрим теперь задачу с двумя агентами. Все независимые от нуля и анонимные значения совпадают в этом случае (лемма 5.3) и ведут к следующему распределению затрат.

Лемма 6.2. *Дана задача распределения затрат между двумя агентами* (b_1, b_2, c) *при* $b_1 \le b_2$. *Независимый от нуля анонимный оператор значения предлагает следующее распределение затрат в игре с дележом прибыли* (1):

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_2 = \tfrac{1}{2} c && \text{при } 0 \le c \le b_1,\\
&x_1 = \tfrac{1}{2} b_1,\ \ x_2 = c - \tfrac{1}{2} b_1 && \text{при } b_1 \le c \le b_2, \qquad (7)\\
&b_1 - x_1 = b_2 - x_2 = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2 - c) && \text{при } b_2 \le c \le b_1 + b_2.
\end{aligned}
$$

Доказательство. В силу леммы 5.3 вектор прибыли $(b_1 - x_1, b_2 - x_2)$ задан формулой (36) из гл. 5. По нашему определению игры (1) получаем

$$
\begin{aligned}
b_1 - x_1 &= \tfrac{1}{2}((b_1 + b_2 - c) + (b_1 - c)^+ - (b_2 - c)^+),\\
b_2 - x_2 &= \tfrac{1}{2}((b_1 + b_2 - c) + (b_2 - c)^+ - (b_1 - c)^+).
\end{aligned}
$$

Расположение c относительно величин b_1 и b_2 приводит к формуле (7).

QED

Как и на рис. 6.1, мы проводим убывающую траекторию вектора прибыли $(b_1 - x_1, b_2 - x_2)$, когда затраты растут от 0 до $b_1 + b_2$ (см. рис. 6.2).

Можно получить явную формулу N-ядра для случая трех и более агентов. Имеется две различных области. Если $c \le \frac{1}{2} \cdot \sum_1^n b_i$, то затраты относительно низки, и доли затрат выравниваются при ограничениях $x_i \le \frac{1}{2} b_i$. С другой стороны, если $\frac{1}{2} \sum_1^n b_i \le c$, то прибыль относительно низка, и прибыли выравниваются при ограничениях $b_i - x_i \le \frac{1}{2} b_i$.

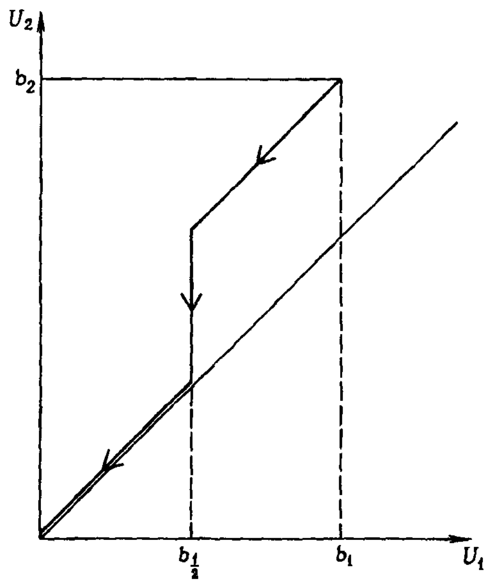


Рис. 6.2

Лемма 6.3 (Ауман и Машлер [1985]). *N-ядро игры* (1) *соответствует следующим долям затрат:*

если $c \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b_i$:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \min\left\{\lambda, \frac{b_i}{2}\right\} = c \right\} \Rightarrow \left\{ x_i = \min\left\{\lambda, \frac{b_i}{2}\right\} \text{ для всех } i \right\}, \tag{8}$$

если $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b_i \le c$: (9)

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \min\left\{\lambda, \frac{b_i}{2}\right\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \right\} \Rightarrow \left\{ x_i = b_i - \min\left\{\lambda, \frac{b_i}{2}\right\} \text{ для всех } i \right\}.$$

Доказательство мы опускаем. Упражнение 6.3 дает более явные формулы для этого распределения затрат.

Ауман и Машлер обратили внимание на то, что N-ядро является решением любопытной загадки из талмудистской литературы.

Пример 6.4. *Задача о банкротстве из Мишны* (Ауман и Машлер [1985])

Умирает человек, у него остается три жены, претензии которых на наследство мужа составляют соответственно 100, 200 и 300 Талмуд рекомендует следующие доли в случае, когда сумма наследства равна 100, 200 и 300.

Заявка	100	200	300	Сумма наследства
Доли	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	100
Доли	50	75	75	200
Доли	50	100	150	300

Какой логический метод лежит в основе решения раввина? Доли при дележе 100 соответствуют методу равной прибыли, но в двух других случаях предлагаемый дележ прибыли отличается от уровневого налога (который дает 66.66 каждой вдове, если наследство равно 200), от подушного налога и от пропорционального налога.

N-ядро решает загадку. Поскольку общие затраты $c = b_1 + b_2 + b_3 - e$ не ниже $\frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3) = 300$, то мы используем формулу (9). Если стоимость $e = 600 - c$ наследства увеличивается от 0 до 300, то прибыли $b_i - x_i$ остаются равными до значения $e = 150$. В этой точке прибыль агента 1 достигает $50 = \frac{1}{2}b_1$ и далее остается неизменной. От $e = 150$ до $e = 250$ агенты 2 и 3 получают одинаковую прибыль до 100 при $e = 250$. От $e = 250$ до $e = 300$ агент 3 присваивает всю дополнительную прибыль. После $e = 300$ формула (8) дает симметричные изменения долей затрат: для $e = 400$ доли затрат составляют (50, 75, 75) (значит, доли наследства составляют (50, 125, 225)), а для $e = 500$ доли затрат составляют $(33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3})$. Симметрия относительно $c = \frac{1}{2}\sum_1^n b_i$ детально рассмотрена в упражнении 6.3.

Вектор Шепли игры (1) не имеет такой простой формулы как

N–ядро. Тем не менее его обычная интерпретация как среднего маргинальных вкладов приводит к следующей истории. Агенты пытаются скрыться от сборщика налогов. Он ловит их одного за другим в случайном порядке (все порядки равновероятны). Пойманные агенты платят полную сумму своих доходов, пока затраты не будут покрыты. Пусть порядок поимки совпадает с $(1,\ldots,n)$, а затраты покрываются только после поимки агента i+1:

$$\sum_{j=1}^{i} b_j < c \le \sum_{j=1}^{i+1} b_j. \tag{10}$$

Тогда первые i агентов платят b_i, агент i+1 платит $c-\sum_{j=1}^{i} b_j$, а оставшиеся $n-i-1$ агентов не платят ничего.

В интерпретации с банкротством получается симметричная история (О'Нил [1982]). Агенты бегут в банк и получают наследство полностью в соответствии с заявкой (по принципу "кто первый пришел, тот первый и обслуживается"), пока наследство полностью не исчерпается. В примере из Талмуда вектор Шепли совпадает с N–ядром, если наследство равно 100 или 300, но отличается от него, если наследство составляет 200. Проверим это последнее утверждение. Положим $e = 200$. Следовательно, $c = 400$. Тогда агент 1 заплатит полностью весь свой доход, если он будет пойман первым или вторым, и ничего не заплатит, если будет пойман последним. Таким образом, его доля затрат равна $66\frac{2}{3}$. Далее, агент 2 должен заплатить 200, если пойман первым, 100 или 200 с равной вероятностью, если пойман вторым, и ничего, если пойман последним. Значит, его доля равна $116\frac{2}{3}$. Следовательно, наследство делится так $(33\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3})$. В качестве простого упражнения читатель может уточнить вектор Шепли для заявок 100, 200 и 300, когда стоимость e наследства изменяется от 0 до 600.

6.5 Децентрализуемость

Модели распределения затрат и дележа прибыли с аксиоматической точки зрения рассматривались несколькими авторами (Бэйкер [1981], О'Нил [1982], Ауман и Машлер [1985], Янг

[1985*a*, 1987], Мулен [1985*d*, 1987*a*], Чан [1988]). В этом и следующих разделах мы дадим обзор некоторых типичных результатов.

Определение 6.2. *Для данного сообщества* $\{1,\ldots,n\}$ *механизмом* **распределения затрат** *называется отображение* x, *ставящее в соответствие каждой задаче* $(b_1,\ldots,b_n;\ c)$, *такой что* $\sum_{i=1}^n b_i \geq c$, *вектор долей затрат* $x(b;\ c) = (x_i(b_1,\ldots,b_n;\ c))$, для которого $\sum_{i=1}^n x_i(b;c) = c$.

Механизмом **дележа прибыли** *называется отображение* y, *ставящее в соответствие каждой задаче* $(c_1,\ldots,c_n;\ r)$ *такой, что* $\sum_{i=1}^n c_i \leq r$, *вектор долей* $y(c;r) = (y_i(c_1,\ldots,c_n;r))$, *для которого* $\sum_{i=1}^n y_i(c;\ r) = r$.

Определение 6.3 (Мулен [1985*b*, 1987*a*]). *Будем говорить, что механизм распределения затрат* x (*механизм дележа прибыли* y) **децентрализуем**, *если доля* $x_i(b;\ c)$ *агента* i *зависит только от затрат* c, *его собственного дохода* b_i *и общего дохода* $\sum_{j=1}^n b_j$:

$$x_i(b;\ c) = t_i(b_i;\ \textstyle\sum_j b_j;\ c) \tag{11}$$

(*соответственно если* $y_i(c;\ r)$ *зависит только от дохода* r, *его собственных полных затрат* c_i *и общих полных затрат* $\sum_j c_j$:

$$y_i(c;\ r) = t_i(c_i;\ \textstyle\sum_j c_j;\ r)).$$

Децентрализуемость есть некоторое условие независимости вычисления доли агента, при котором агент не должен знать детали распределения доходов между своими партнерами. Нужно знать только общий (или средний) доход. Когда n достаточно велико, в особенности удобно вычислять доли затрат (или доли прибыли) децентрализованно.

Следствием децентрализуемости является то, что общая доля затрат любой коалиции может быть вычислена по общим доходам этой коалиции и ее дополнения. Для любой S, $\varnothing \neq S \subset N$, существует функция r_S, такая, что

$$\sum_{i\in S} x_i(b;\ c) = r_S\left[\sum_{i\in S} b_i;\ \sum_{N\setminus S} b_j;\ c\right]. \tag{12}$$

Для произвольной коалиции S формула (11) означает, что $\sum_S x_i$ зависит только от $\sum_{N\setminus S} b_j$. Меняя местами S и $N\setminus S$, мы понимаем, что $\sum_{N\setminus S} x_j$ зависит только от $\sum_S b_i$. Поскольку $\sum_S x_i = c - \sum_{N\setminus S} x_j$, то справедлива формула (12). Конечно, децентрализуемый механизм дележа прибыли также удовлетворяет некоторой формуле, аналогичной (12). Мулен [1985*b*] дает стратегическую интерпретацию децентрализуемости, в которой он определяет прибыльную систему побочных платежей внутри коалиции.

В задаче дележа прибыли пропорциональный и эгалитарный механизмы децентрализуемы. Тем не менее в задаче распределения затрат ни уровневый налог, ни подушный налог не дают децентрализуемых механизмов. Рассмотрим, например, задачу из примера 6.3. Изменим доходы агентов 1 и 2 с $b_1 = 4$, $b_2 = 12$ до $b'_1 = b'_2 = 8$. Из децентрализуемости должно следовать, что доли затрат агентов 3, 4 и 5 остаются при этом без изменения. Поскольку общие затраты равны 30, то подушный налог приводит к $c'_i = 6$ для всех i (значит, агенты 3, 4 и 5 платят меньше), а если общие затраты равны 66, то уровневый доход приводит к $(c'_1, c'_2, c'_3, c'_4, c'_5) = (3.2, 3.2, 15.2, 19.2, 25.2)$ (значит, агенты 3, 4 и 5 платят больше).

Теорема 6.1 (Мулен [1985*b*]). *Предположим, что сообщество состоит из трех или более агентов. Существует в точности один механизм распределения затрат, являющийся децентрализуемым и согласованым с ядром. Это - пропорциональный налог.*

Согласованность с ядром: $0 \le x_i(b;c) \le b_i$ *для всех* b, c, i.

Доказательство. Пропорциональный налог $x_i = (b_i / \sum_N b_j) \cdot c$ очевидно децентрализуем. Обратно, рассмотрим анонимный механизм x, заданный формулой (11). Фиксируем $S = \{1,2\}$ и применим (12) к коалиции S:

$$x_1(b;c) + x_2(b;c) = r_{12}\left[\, b_1 + b_2;\ \sum_{i \ge 3} b_i;\ c\right]. \tag{13}$$

По формуле (11) имеем $x_1(b;c) = t_1(b_1; \sum_N b_j; c)$ и т.д. Положим $b_0 = \sum_{j \in N} b_j$. Тогда свойство (13) дает

$$t_1(b_1;\ b_0;\ c) + t_2(b_2;\ b_0;\ c) = r_{12}(b_1 + b_2,\ b_0 - (b_1 + b_2);\ c).$$

Значит, для любых данных b_0 и c сумма $t_1(b_1) + t_2(b_2)$

зависит только от b_1+b_2, пока b_1+b_2 меньше b_0. Это знаменитое функциональное уравнение известно как уравнение Йенсена (см. Акцель [1966]). Его решение (с точностью до топологических деталей) имеет вид

$$t_1(b_1;\ b_0;\ c) = h_1(b_0;\ c) + b_1\cdot k_1(b_0;c). \tag{14}$$

Используем теперь согласованность с ядром, чтобы полностью определить функцию h_1:

$$\{b_1 = 0\ \Rightarrow\ x_1 = 0\ \Rightarrow\ t_1(0;\ b_0;\ c) = 0\}\ \Rightarrow\ h_1 = 0.$$

Значит, $t_1(b_1;\ b_0;\ c) = b_1\cdot k_1(b_0;c)$. Из бюджетного баланса и вновь по согласованности с ядром получаем

$$t_1(b_0;\ b_0;\ c) = c.$$

В свою очередь, отсюда следует $k_1(b_0;\ c) = c/b_0$. Поскольку выбор агента 1 был произвольным, то доказательство завершено.

QED

В теореме 6.1 согласованность с ядром не может быть отброшена. В самом деле, как равномерное распределение затрат $(x_i = c/n)$, так и механизм равной прибыли $(b_i - x_i = b_j - x_j$ при всех $i,j)$ децентрализуемы.

Пропорциональное распределение затрат удовлетворяет даже более сильному свойству, чем децентрализуемость. Пусть наше сообщество N разбито на группы

$$N = S_1 \cup \ldots \cup S_K.$$

Тогда мы можем вычислить (пропорциональное) распределение затрат в N в два этапа. Сначала мы вычисляем (пропорциональное) распределение затрат в задаче распределения с K агентами $(\Sigma_{S_1} b_i, \ldots,\ \Sigma_{S_K} b_i;\ c)$. Пусть получаются доли $c_1,\ldots,c_K$. Далее мы вычисляем окончательное распределение затрат для каждой коалиции S_k как решение задачи $(b_i, i\in S_k;\ c_k)$. Бэнкер [1981] и О'Нил [1982] использовали это свойство для характеризации пропорционального распределения затрат. Их построения могут быть адаптированы для характеризации пропорционального механизма в задаче дележа прибыли.

6.6 Сепарабельность

Определение 6.4 (Янг [1987]). *Дан механизм распределения затрат* $x(b;c)$ (*механизм дележа прибыли* $y(c;r)$) *для сообщества* $\{1,\dots,n\}$. *Будем говорить, что он* **сепарабельный,** *если для любой собственной коалиции* $S \underset{\neq}{\subset} N$ *и для любых* b, b', c, c' *имеем*

$$\left\{ b_i = b'_i \ \text{ для всех } i \in S \text{ и } \sum_{i\in S} x_i(b;\, c) = \sum_{i\in S} x_i(b';\, c') \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x_i(b;\, c) = x_i(b';\, c') \text{ для всех } i \in S\} \tag{15}$$

и для любых c, c', r, r' *имеем*

$$\left\{ c_i = c'_i \ \text{ для всех } i \in S \text{ и } \sum_{i\in S} y_i(c;\, r) = \sum_{i\in S} y_i(c';\, r') \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{y_i(c;\, r) = y_i(c';\, r') \text{ для всех } i \in S\}. \tag{16}$$

Другими словами, распределение затрат (дележ прибыли) внутри коалиции S зависит от доходов (полных затрат) членов коалиции S и общих затрат (общей прибыли) коалиции S.

Идея сепарабельности нам уже достаточно знакома (см. гл. 2 и 3 и свойство редуцированной игры из гл. 5). Распределяемый доход может быть редуцирован на произвольную подгруппу агентов. Отметим дополнительность децентрализуемости и сепарабельности. Первая упрощает вычисление общих долей (затрат или прибыли) коалиции (см. формулу (12)), последняя означает, что доли внутри коалиции полностью определены общей долей коалиции (и параметрами полезности членов коалиции).

Сепарабельность может быть сформулирована различными способами. Янг [1987] предлагает аксиому *совместимости*, переводящую определение 6.4 в рамки изменения состава участников. Другим эквивалентным свойством является следущая аксиома *согласия*, которую мы сформулируем в случае дележа прибыли. Для любых двух агентов i, j и любых c, c', r, r'

$$\{c_i = c'_i \ \text{ и } \ c_j = c'_j\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(y_i(c;r) - y_i(c';r')) \cdot (y_j(c;r) - y_j(c';r')) \geq 0\}. \tag{17}$$

Другими словами, рассмотрим любых двух агентов, полные затраты которых фиксированы, в то время как все остальное меняется (доход, полные затраты других агентов). Эти изменения должны быть выгодны или невыгодны одновременно для обоих. Эквивалентность согласия и сепарабельности является предметом упражнения 6.4.

Большинство методов распределения затрат (дележа прибыли), определенных выше, удовлетворяют свойству сепарабельности. Единственным исключением является вектор Шепли как механизм распределения затрат (см. упражнение 6.4).

Класс сепарабельных механизмов распределения затрат (дележа прибыли) допускает аналитическое представление. Мы поясним этот результат в случае распределения затрат.

Определение 6.5 (Янг [1987]). *Рассмотрим действительную функцию $h(\lambda, b)$, определенную при $b \geq 0$ и при $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$, где $\bar{\lambda}$ – фиксированное положительное число (возможно $+\infty$). Предположим, что h не убывает и непрерывна по λ при фиксированном b и что, более того,*

$$h(0, b) = 0, \quad h(\bar{\lambda}, b) = b \text{ для всех } b \geq 0.$$

Поставим в соответствие функции h следующий **параметрический** *механизм распределения затрат. Для данной задачи $(b_1, \ldots, b_n; c)$ найдем по существу единственное решение λ^* уравнения*

$$\sum_{i=1}^{n} h(\lambda, b_i) = c. \tag{18}$$

Положим $x_i = h(\lambda^*, b_i)$.

Если λ увеличивается от 0 до $\bar{\lambda}$, то значение функции $\sum_{i=1}^{n} h(\lambda, b_i)$ непрерывно возрастает (или остается постоянным) от 0 до $\sum_{i=1}^{n} b_i$. Поэтому уравнение (18) имеет решение тогда и только тогда, когда производство общественного продукта является эффективным. Это уравнение может иметь несколько решений, если все функции $h(\lambda, b_i)$ имеют плоский участок по λ в одном и том же месте, однако вектор долей затрат $(x_1, \ldots, x_n)$ всегда определен однозначно.

Параметрический метод всегда выбирает распределение затрат из ядра, поскольку в силу ограничений на h имеем $0 \leq h(\lambda, b_i) \leq b_i$ (см. свойство (2)).

Из леммы 6.2 сразу следует, что подушный налог и уровневый налог являются вариантами параметрического метода при следующих функциях h:

$$h(\lambda, b) = \min\{\lambda, b\}, \qquad \bar{\lambda} = +\infty \qquad \text{(подушный налог)},$$

$$h(\lambda, b) = b - \min\{1/\lambda, b\}, \qquad \bar{\lambda} = +\infty \qquad \text{(уровневый налог)}.$$

Очевидно, что пропорциональный налог соответствует функции

$$h(\lambda, b) = \lambda \cdot b, \qquad \bar{\lambda} = 1 \qquad \text{(пропорциональный налог)}.$$

Наконец, N-ядро игры (1) также является параметрическим методом, как можно догадаться из леммы 6.4: формулы (8) и (9) похожи на два куска параметрического представления. Точное представление N-ядра дано в упражнении 6.3 вопрос (c).

Ясно, что параметрический метод распределения затрат является сепарабельным. Рассмотрим коалицию $S \underset{\neq}{\subset} N$ и две задачи распределения затрат (b; c) и (b'; c') с соответствующими параметрами λ и λ'. Предположим, что $b_i = b'_i$ для всех $i \in S$:

$$\sum_{i \in S} x_i(b;\, c) = \sum_{i \in S} x_i(b';\, c') \iff \sum_{i \in S} h(\lambda, b_i) = \sum_{i \in S} h(\lambda', b_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\lambda, b_i) = h(\lambda', b_i) \text{ для всех } i \in S.$$

Из результатов Янга [1987] следует, что семейство параметрических методов распределения затрат (определение 6.5) *характеризуется* четырьмя свойствами: анонимностью, соответствием ядру (доля затрат агента i должна быть между 0 и b_i), непрерывностью (доли затрат непрерывно изменяются при изменении c) и совместимостью.

В задаче дележа прибыли параметрический механизм определяется аналогично. Выберем действительную функцию $k(\mu, c)$, определенную при $c \geq 0$ и $\mu \geq 0$. Предположим, что k не убывает и непрерывна по μ и что, более того,

$$k(0, c) = c, \quad k(+\infty, c) = +\infty.$$

Для каждой задачи ($c_1, \ldots, c_n$; r) найдем (по существу единственное) решение μ^* уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} k(\mu, c_i) = r..$$

Полагая $y_i = k(\mu^*, c_i)$, определяем параметрический механизм дележа прибыли, соответствующий функции k.

Параметрические механизмы дележа прибыли опять же характеризуются сепарабельностью. непрерывностью и анонимностью (Янг [1987]).

Эгалитарный и пропорциональный механизмы распределеиия прибыли, следовательно, удовлетворяют двум нашим информационным аксиомам. На самом деле комбинация сепарабельности и децентрализуемости характеризуют одномерное семейство механизмов, содержащее пропорциональный и эгалитарный механизм в качестве двух крайних точек (Мулен [1987*а*]). Для того чтобы аксиоматически выделить эти два базовых механизма, требуется еще одна аксиома. Это – свойство аддитивности индивидуальных долей по общему доходу, названное независимостью от пути (см. упражнение 6.6). Три аксиомы вместе: децентрализуемость, сепарабельность и независимость от пути,– характеризуют *пару* механизмов: эгалитарный и пропорциональный (в Мулен [1987*а*] см. точные утверждения и варианты этого результата).

Упражиения

6.1 Доказательство леммы 6.1

(*а*) Рассмотрим задачу распределения затрат $(b_1, \ldots, b_n; c)$ и обозначим через λ^* решение уравнения (3). Покажите, что оно единственно, поскольку $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$. Обозначив $x_i^* = \min\{\lambda^*, b_i\}$, покажите, что x^* является решением задачи

$$\max_{x \in A} \left[\min_{i=1,\ldots,n} \{x_i\} \right].$$

Подсказка: Нужно различать два случая: (*а*) $\lambda^* \le b_i$ для всех i и (*b*) $\lambda^* \ge b_i$ для некоторого i. Докажите, что x^* есть подушный налог. Обозначьте через i_0 такого агента, для которого $x^*_{i_0} \le x^*_i$ при всех i. Рассмотрите задачу с $(n-1)$ агентами (b_i для всех $i \ne i_0$; $c - x^*_{i_0}$) и используйте индуктивные соображения.

(*b*) Пользуясь заменой переменных $y_i = b_i - x_i$, докажите второе утверждение как следствие из первого.

6.2 Еще две характеризации подушного налога и уровневого налога

Рассмотрнм задачу распределения затрат $(b_1,\ldots,b_n;\ c)$ неделимого продукта и обозначим через $x^h(x^e)$ подушный налог (уровневый налог). Обозначим через A, как и в определении 6.1, множество всех векторов распределения затрат, в которых агенты не субсидируются и не получают отрицательной прибыли.

(a) Покажите, что x^h доминирует по Лоренсу (разд. 2.5) любое распределение затрат x из A, $x \neq x^h$. Покажите, что $b - x^e$ доминирует по Лоренсу любой вектор прибыли $b - x$, где x из A, $x \neq x^e$.

(b) Обозначим через D следующее подмножество из A:

$$x \in D \iff \{x \in A \text{ и } (b_i \le b_j \Rightarrow 0 \le x_j - x_i \le b_j - b_i \text{ для всех } i,j)\}.$$

Это свойство говорит о том, что если агент 1 выигрывает больше от использования продукта, чем агент 2, то агент 1 платит не меньше и прибыли получает не меньше, чем агент 2.

Покажите, что любое распределение затрат x из D, $x \neq x^e$, доминирует по Лоренсу x^e. Покажите, что любой вектор прибыли $b - x$, где $x \in D$, $x \neq x^h$, доминирует по Лоренсу $b - x^h$.

6.3 N-ядро в игре (1) с распределением затрат

Дана задача распределения затрат $(b_1,\ldots,b_n;\ c)$, в которой без ограничения общности полагаем

$$b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n.$$

(a) Скажем, что метод распределения затрат симметричен, если он удовлетворяет следующему условию.

Если $(x_1,\ldots,x_n)$ – распределение затрат в задаче $(b_1,\ldots,b_n; c)$, то $(b_1 - x_1,\ldots,b_n - x_n)$ – распределение затрат в задаче $(b_1,\ldots,b_n;\ \sum_{i=1}^n b_i - c)$. Покажите, что N-ядро (лемма 4.6) и вектор Шепли игры (1) дают симметричные методы распределения затрат.

(b) Определим следующие числа:

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_k = \frac{1}{2}\left\{\sum_1^{k-1} b_i + (n-k+1)b_k\right\} \text{ для всех } k = 1,\ldots,n,$$

$$\beta_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i, \quad \beta_k = \frac{1}{2}\sum_{1}^{k-1} b_i - \left[\frac{n-k-1}{2}\right] b_k + \sum_{k+1}^{n} b_i \text{ для всех } k = 1,\ldots,n$$

(при соглашении $\sum_1^0 = \sum_{n+1}^n = 0$). Заметим, что

$$0 \le \alpha_0 \le \ldots \le \alpha_n = \frac{1}{2}\sum_1^n b_i = \beta_n \le \beta_{n-1} \le \ldots \le \beta_0 = \sum_1^n b_i$$

Докажите, что N-ядро в задаче распределения затрат (определенное по (8) и (9)) эквивалентным образом может быть задано следующими формулами: если $\alpha_k \le c \le \alpha_{k+1}$ (для некоторого $k = 0,1,\ldots,n-1$), то

$$x_i = \frac{1}{2} b_i \qquad \text{при } 1 \le i \le k,$$

$$x_j = \frac{1}{n-k}\left[c - \frac{1}{2}\sum_1^k b_i\right] \qquad \text{при } k+1 \le j \le n.$$

Если $\beta_{k+1} \le c \le \beta_k$ (для некоторого $k = 0,1,\ldots,n-1$), то

$$x_i = \frac{1}{2} b_i \qquad \text{при } 1 \le i \le k,$$

$$x_j = b_j - \frac{1}{n-k}\left[\frac{1}{2}\sum_1^k b_i + \sum_{k+1}^n b_j - c\right] \qquad \text{при } k+1 \le j \le n.$$

(c) Покажите, что N-ядро является параметрическим механизмом распределения затрат (определение 6.5). *Подсказка:* рассмотрите функцию $h(\mu, b)$ с параметром μ, изменяющимся на всем E (от $-\infty$ до $+\infty$):

$$h(\mu, b) = \min\left[-\frac{1}{\mu}, \frac{b}{2}\right] \qquad \text{при } \mu \le 0,$$

$$= \max\left[b - \frac{1}{\mu}, \frac{b}{2}\right] \qquad \text{при } \mu \ge 0.$$

Покажите, что h представляет N-ядро распределения затрат. Затем используйте замену переменных, чтобы получить эквивалентное параметрическое представление для неотрицательного параметра.

6.4 Еще о сепарабельности

(a) Покажите, что основанный на векторе Шепли метод распределения затрат (разд. 6.4) *не является* сепарабельным. Используйте числовой пример, данный в конце разд. 6.4, а именно задачу (100, 200, 300; 400). Рассмотрите другую задачу (100, 200, 0; $116\frac{2}{3}$) и получите противоречие с (15) для $S = \{1,2\}$.

(b) Покажите, что для механизма дележа прибыли согласие (свойство (17)) влечет сепарабельность (формула (16)). Обратно, предположим, что y – сепарабельный механизм. Предположим также, что каждая функция y_i не убывает по r. Покажите, что этот механизм удовлетворяет свойству согласия. *Подсказка:* положим $i=1$ и $j=2$ и определим две функции δ_i, $i=1,2$ следующим образом·

$$\delta_i(c_1,c_2;\ \sigma) = d_i(c_1,c_2,c_2,\ldots,c_2;\ r),$$

где r является единственным решением

$$(d_1+d_2)\,(c_1,c_2,c_2,\ldots,c_2;\ r) = \sigma.$$

Проверьте, что δ_i не убывает по σ. Заметьте, что для произвольной задачи $(c;\ r)$ имеем

$$d_i(c;\ r) = \delta_i(c_1,c_2;\ d_1(c;r) + d_2(c;r)).$$

6.5 Децентрализуемые механизмы дележа прибыли (Мулен [1987a])

(a) Рассмотрим произвольную функцию ξ, определенную на E_N^+ и зададим механизм дележа прибыли следующим образом:

$$y_i(c;\ r) = \frac{r}{n} + \left[c_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j\right]\cdot\xi\left[r,\ \sum_{j=1}^{n} c_j\right].$$

Проверьте, что этот механизм является анонимным (перестановка полных затрат двух агентов меняет местами их долн и оставляет доли остальных агентов неизменными) и децентрализуемым.

(b) Обратно, покажите, что анонимный и децентрализуемый механизм имеет вид (a) *Подсказка:* перепишите доказательство теоремы 6.1. Используйте анонимность после вывода аналога формулы (14).

6.6 Децентрализуемость и сепарабельность при дележе прибыли (Мулен [1987a])

(a) Фиксируем действительное число λ, $1 \le \lambda \le +\infty$, и определим механизм дележа прибыли y^λ следующим образом:

$$y_i^\lambda(c;r) = r \cdot \left[c_i / \sum_{j=1}^{n} c_j\right], \qquad \text{если } r \le \lambda \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} c_j\right],$$

$$y_i^\lambda(c;r) = \lambda \cdot c_i + \frac{1}{n} \cdot \left[r - \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\right], \qquad \text{если } r \ge \lambda \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} c_j\right]$$

Проверьте, что y^1 – эгалитарный механизм, а $y^{+\infty}$ – пропорциональный механизм. Покажите, что каждый механизм y^λ децентрализуем и сепарабелен. Обратно, теорема 1 из Мулен [1987*a*] показывает, что эти две аксиомы по существу характеризуют семейство y^λ, $1 \le \lambda \le +\infty$.

(*b*) Рассмотрим следующую аксиому независимости от пути. Для любого заданного вектора c полных затрат и доходов r, r'

$$y(c, r + r') = y(c + y(c;\ r);\ r').$$

Дайте интерпретацию этому свойству и покажите, что в семействе y^λ только эгалитарные и пропорциональные механизмы независимы от пути. Таким образом, децентрализуемость, сепарабельность и независимость от пути вместе характеризуют пару, состоящую из пропорционального и эгалитарного механизмов. Мулен [1987*a*] предлагает еще три характеризации этой пары.

6.7 Селектор ядра с произвольными предпочтениями

Далее мы не будем предполагать, что индивидуальные предпочтения являются квазилинейными. Общественный проект может быть реализован ($\varepsilon = 1$) или нет ($\varepsilon = 0$). Предпочтение агента i на (ε, x_i) (где x_i – чистая выплата, возможно отрицательная, если агент i получает некоторое количество денег) строго убывает по x_i и не убывает по ε.

Наиболее желательно для агента i заплатить за проект величину $\bar{x}_i$, при которой наступает безразличие между $(\varepsilon = 1, \bar{x}_i)$ и $(\varepsilon = 0, 0)$. Далее существует некоторая денежная компенсация $\underline{x}_i$, которая эквивалентна отказу от общественного продукта: для агента i наступает безразличие между $(\varepsilon = 1, 0)$ и $(\varepsilon = 0, 0)$. Однако числа $\bar{x}_i$, $\underline{x}_i$ не могут быть систематическим образом упорядочены (в квазилинейном случае $\bar{x}_i = \underline{x}_i$).

(*a*) Покажите, что (начальное) распределение "никакого проекта" ($\varepsilon = 0$, $x_i = 0$ для всех i) является доминируемым по Парето тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i > c. \tag{19}$$

(b) Пусть выполнено (19) и индивидуальные предпочтения непрерывны. Покажите, что существует единственное распределение затрат, такое, что для некоторого положительного числа λ, $\sum_1^n x_i^* = c$ и для агента i имеет место безразличие между $(1, x_i^*)$ и $(0, -\lambda \cdot x_i^*)$ при всех i. Какое распределение затрат мы получим, если предпочтения будут квазилинейными?

(c) Покажите, что распределение $(1, x_1^*, \ldots, x_n^*)$ содержится в ядре НТП-игры с распределением прибыли, соответствующей нашей задаче распределения затрат (определение НТП-игры для экономики с общественным продуктом дано в разд. 7.2).

Глава 7

Регулируемая монополия

Обзор

Экономическое поведение общественной фирмы – одна из старейших проблем экономики благосостояния. Два основных предназначения общественной фирмы состоят в производстве общественного продукта и такого продукта личного потребления, технология производства которого имеет возрастающие доходы на масштаб (ВДМ). В этих двух случаях говорят о естественной монополии. С экономической теорией естественных монополий можно познакомиться в Баумоль, Панзар и Уиллиг [1982]; об оптимальном производстве общественного продукта см. исторический обзор Масгрейв и Пикок [1958] и теоретический обзор Миллерон [1972]. В обоих случаях единственной эффективной организацией производства является использование одной производственной единицы, в то же время для общества было бы расточительно позволить монополисту, максимизирующему прибыль, управлять этой единицей. Следовательно, существует необходимость в регулируемой общественной фирме, и для нее нужно решать нормативную проблему ценообразования.

Даже при уменьшающихся доходах на масштаб (УДМ) часто возникают причины для совместного производства. Рабочие кооператива совместно владеют своей техникой, члены юридической фирмы делят своих клиентов. Они должны выбрать справедливую форму дележа плодов кооперации. Таким образом, при общем обсуждении общественной фирмы технология предполагается произвольной. Если ей соответствуют убывающие доходы на масштаб, то это означает, что она управляется агентами совместно и нет возможности дублирования (имеются большие неявные фиксированные затраты на открытие новой производственной единицы).

Традиционные подходы к проблеме регулируемой монополии следуют традициям теории конкурентного рыночного равновесия. В случае общественного продукта это приводит к индивидуальным ценам Линдала: каждому агенту приписывается своя цена на общественный продукт; по этим ценам спрос агентов на этот продукт одинаков. В случае продукта личного пользования это приводит к маргинальным правилам ценообразования. Обоснование этих правил является сложной проблемой, если не использовать обычные сюжеты, связанные с конкуренцией. Как я могу принять индивндульную цену в качестве внешнего сигнала, если общественная фирма не имеет принудительной силы? Будет ли справедливым назначение единовременной пошлины для покрытия дефнцита фирмы?

Современные успешные приложения модели кооперативной игры к общественному ценообразованию основываются на идее ядра. Тест на отделение следует из того, что любая коалиция может воспользоваться технологией по своему желанию (свободный доступ к технологии). Это приводит к обсуждениям данной главы.

В свете кооперативных игр мы обсуждаем два типа решений, связанных с проблемами регулируемой монополии. Первая категория включает методы ценообразования, основанные на маргинальной полезности: равновесие Линдала и его развитие – долевое равновесие (ДР) в модели с общественным продуктом, а также конкурентное равновесие, в котором каждый агент владеет одной и той же долей общественной фирмы в модели с продуктом личного пользования. Вторая категория включает два эгалитарных по благосостоянию решения с весьма компактной аксиоматической характеризацией. Эти решения описаны ниже.

В этой главе (разд. 7.1 – 7.7) мы ограничимся однопродуктовой моделью с одним ресурсом, поскольку многопродуктовая и/или многоресурсная модель (см. замечание 7.2) гораздо сложнее. Ресурсом является личный продукт, а выходом может быть и личный, и общественный продукт. Мы обсуждаем обе модели параллельно. Рассматрнваемые агенты описываются порядковыми предпочтениями, заданными в пространстве вход – выход, и некоторым начальным запасом ресурса. Фиксация производственной функции завершает описание вполне определенной экономики производства с нетрансферабельной полезностью (НТП).

Механизм дележа прибыли (разд. 7.1) должен выбрать эффективное распределение, определяющее вклад каждого агента и долю выхода (или просто уровень выхода в случае общественного продукта). Нас интересуют полностью эффективные (неулучшаемые) механизмы, выбирающие оптимальные по Парето распределения в каждой экономике.

В разд. 7.2 и 7.3 определяется НТП кооперативная игра, в которой каждая коалиция имеет свободный доступ к технологии, и ядро этой игры. В модели с общественным продуктом эта игра является выпуклой (в НТП смысле), и ее ядро всегда непусто. В модели с продуктом личного пользования (разд. 7.3) ситуация несколько более неодиозначна. Рассмотрим сначала случай производственной функции, соответствующей постоянным доходам на масштаб (ПДМ) (столько-то единиц выпуска при таком-то количестве единиц затрат). Это приводит к тому, что совместное пользование процессом преобразования затрат в выпуск не порождает взаимного влияния (ни положительного, ни отрицательного) между агентами. Каждый агент может свободно превращать затраты в выпуск (при постояном технологическом коэффициенте замены), не внося изменений в возможности такого превращения ни для какого другого агента. Ядро тогда по существу состоит из единственного исхода: каждый игрок независимо решает, какое именно количество продукта он хочет произвести, расходуя соответствующее количество ресурса.

В общей модели с продуктом личного пользования мы ожидаем, что ядро непусто при производстве с возрастающими доходами на масштаб (ВДМ), поскольку использование агентом производственной единицы порождает положительное влияние. При производстве с отрицательными доходами на масштаб это влияние является отрицательным, и ядро, как правило, пусто. Мы можем использовать тогда допустимые множества коалиций для обозначения верхних границ полезностей агентов (эти множества дают нижние границы в концепции ядра). Это приводит к понятию антиядра (которое обсуждается в разд. 7.3;

см. также упражнение 7.7). Антиядро, как правило, непусто при УДМ.

В разд. 7.4 мы развиваем концепцию маргинального ценообразования (МЦ) для модели с общественным продуктом. Понятие равновесия Линдала адекватно отражает эту концепцию, если производство обладает ПДМ. В этом случае оно дает распределение из ядра (теорема 7.1). Для произвольной производственной фуикции корректным обобщением равновесия Линдала служит долевое равновесие Канеко. Если оно существует, то принадлежит ядру, а существует оно, когда доходы на масштаб убывают.

Раздел 7.5 показывает, что МЦ решения не столь удовлетворительны для модели с продуктом личного пользования. МЦ равновесие определяется в значительной мере таким же образом, как и конкурентное равновесие в экономике Эрроу – Дебре, в которой все агенты владеют одинаковой долей фнрмы (единственная разиица состоит в том, что фирма не максимизирует свою прибыль). В случае возрастаиия доходов агенты делят дефицит фирмы, и МЦ равновесие может приводить к чистым потерям в полезности для некоторых агентов. В частности, это может быть не распределеиие из ядра. В случае убывающих доходов агенты делят прибыль фирмы, и МЦ равновесие может ие принадлежать антиядру.

В разд. 7.6 мы конструируем два механизма дележа прибыли (для экономик с общественным продуктом и продуктом личного пользоваиия), основанных на эгалитарном подходе. Идея заключается в том, чтобы представить предпочтения "правильной" функцией полезности. В случае общественного продукта фокус состоит в том, чтобы взять сам общественный продукт в качестве *измерителя* для представления предпочтения агентов. Таким образом, полезность пяти единиц общественного продукта при затратах 10$ равна 3, если для агента нет разницы между тремя единицами общественного продукта бесплатио и пятью единицами за 10$.

Используя это количественное представление предпочтений, всегда можно найти эффективный исход, дающий равную полезность каждому агенту. Этот исход определяет распределение эгалитарного эквивалента (ЭЭ). Удивительным является факт принадлежности этого распределения ядру без каких-либо ограничительных предположений о предпочтениях (теорема 7.2).

В случае продукта личного пользования аналогичная конструкция приводит к селектору ядра (или антиядра). Здесь *измерителем*, оценивающим распределение (выпуск × затраты), является цена p выпуска относительно затрат, такая, что для каждого агента нет разницы по предпочтению между данным распределением и возможностью купить любое желаемое количество продукта по цене p. Уравнивая таким образом измеренные индивидуальные полезности, приходим к распределению с эквивалентом постоянных доходов (ЭПД). При возрастающих доходах это распределение принадлежит ядру (теорема 7.3). При убывающих доходах (и выпуклых предпочтениях) это распределение принадлежит антиядру (упражнение 7.7).

Наконец, в разд. 7.7 дадим краткий обзор результатов по характеризации ЭЭ и ЭПД механизмов на основе аксиомы технологической монотонности (ТМ). Эта аксиома говорит о том, что при улучшении технологии (уменьшении производственных затрат для всех уровней выпуска) полезность ни для какого агента не может уменьшиться. Мы завершаем сравнение МЦ механизмов и механизмов эгалитарного благосостояния с позиций аксиоматического подхода.

7.1 Две экономики производства

Модель 1. Производство общественного продукта

В экономике имеются два продукта: один чисто общественный и один чисто личный (деньги). Затраты на производство y единиц общественного продукта составляют $c(y)$ единиц денег. Функция c не убывает, и $c(0) = 0$.

Имеется n агентов. В начале запас агента i составляет ω_i единиц денег, и никакого общественного продукта не производится ($y = 0$). Конечное распределение соответствует некоторым вкладам денег (скажем, агент i внес x_i) и производству y единиц общественного продукта. Условие допустимости имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c(y). \tag{1}$$

Предпочтения агента i описываются функцией полезности $u_i(\omega_i - x_i, y)$, заданной на пространстве деньги × общественный продукт.

Модель 2. Производство продукта личного пользования

В экономике имеются два личных продукта: труд используется как ресурс для производства кукурузы (выпуск). Производство y единиц кукурузы требует $x = c(y)$ едииниц труда.

Имеется n агентов. В начале агент i располагает ω_i единицами свободного времени (оно может быть потреблено в качестве отдыха или досуга или использовано на труд) и у него нет кукурузы. При конечном распределении в его распоряжении остается часть свободного времени при затратах труда x_i, и он потребляет y_i единиц кукурузы. Его предпочтения описываются функцией полезности $u_i(\omega_i - x_i, y_i)$, заданной на пространстве свободное время × кукуруза. Таким образом, распределение является допустимым, если (и только если)

$$0 \le x_i \le \omega_i,\quad 0 \le y_i \text{ для всех } i \text{ и } \sum_{i=1}^{n} x_i = c\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big). \tag{2}$$

Несмотря на использованне количественной функции полезности, весь анализ гл. 7 является чисто порядковым.

Заметим, что в модели с общественным продуктом агенты могут свободно обмениваться затратами (деньгами). В допустимом распределении $(x_1, \ldots, x_n; y)$ может быть $x_i < 0$ (агент i получает платеж в размере $|x_i|$ долларов наличными) или $x_i > \omega_i$ (его доля затрат превышает начальный запас). Свойство ядра из разд. 7.2 исключает эти возможности. В противоположность этому, в модели с продуктом личного пользования затраты нетрансферабельны между агентами. Агент i не может остаться с большим количеством свободного времени, чем у него было в начале, он не может позаимствовать свободное время у кого-то другого.

Какие распределения являются оптимальными по Парето в этих двух экономиках? Предполагая дифференцируемость функции полезности, в качестве простого упражнения можно получить необходимые условия оптимальности по Парето в экономике с общественным продуктом:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_{iy}}{u_{ix}} (\omega_i - x_i, y) = c'(y), \tag{3}$$

где $u_{iy}(u_{ix})$ – частная производная u_i по общественному (личному) продукту. Условие (3) известно как условие Самуэльсона.

Аналогично, в экономике с продуктом личного пользования рассмотрим внутренние распределения $(0 < x_i < \omega_i, \quad 0 < y_i)$. Для оптимальности по Парето такого распределения необходимо

$$\frac{u_{iy}}{u_{ix}} (\omega_i - x_i, y) = c' \left[\sum_{j=1}^{n} y_j\right] \text{ для всех } i = 1,\ldots,n. \tag{4}$$

Обратно, если предпочтения выпуклы (функции u_i квазивогнуты) и функция затрат выпукла, то эти условия являются также и достаточными.

Пример 7.1. Случай квазилинейных полезностей

Предположим, что все предпочтения аддитивно сепарабельны по затратам и выходным продуктам и линейны по затратам. Так, в модели с общественным продуктом

$$u_i(\omega_i - x_i, y) = b_i(y) + (\omega_i - x_i),$$

где $b_i(y)$ – денежный эквивалент y единиц общественного продукта. Для агента i безразлично, получает ли он платеж в $b_i(y)$ долларов или потребляет y единиц общественного продукта бесплатно.

При квазилинейных полезностях условия Самуэльсона (3) упрощаются

$$\sum_{i=1}^{n} b'_i(y) = c'(y),$$

т.е. сумма маргинальных доходов равна маргинальным затратам на общественный продукт. Заметим, что уровни затрат x_i исчезают в этой формуле. Оптимальность по Парето накладывает условия на количество произведенного общественного продукта, но не накладывает условия на соответствующее ему распределение затрат. Это полезное свойство квазилинейной модели будет эксплуатироваться многократно. В действительности в квазилинейной модели с общественным продуктом оптимальность по Парето *эквивалентна* максимизации прибыли

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(-x_i,\ y) = \sum_{i=1}^{n} b_i - c(y)\ .$$

Это очень общий факт, не требующий предположений дифференцируемости и выпуклости. Проверим сначала, что если $(x_1,\dots,x_n,y)$ превосходит по Парето $(x'_1,\dots,x'_n,y')$, то $(\sum_{i=1}^{n} b_i - c)(y)$ больше, чем $(\sum_{i=1}^{n} b_i - c)(y')$. Обратно, если y не максимизирует $\sum_{i=1}^{n} b_i - c$, то любое допустимое распределение $(x_1,\dots,x_n,y)$ доминируемо по Парето: существуют $y,\varepsilon > 0$, такие, что

$$\left[\sum_i b_i - c\right](y') = \left[\sum_i b_i - c\right](y) + \varepsilon.$$

Значит, распределение $(x'_1,\dots,x'_n,y')$ допустимо и превосходит по Парето наше распределение, где

$$x'_i = x_i + b_i(y') - b_i(y) - \varepsilon/n \quad \text{для всех } i\,.$$

В модели с личным продуктом квазилинейные полезности имеют вид

$$u_i(\omega_i - x_i,\ y_i) = b_i(y_i) + (\omega_i - x_i)\ ,$$

где $b_i(y_i)$ измеряет эквивалент в затратах y_i единиц выпуска. Условия оптимальности по Парето первого порядка (4) принимают форму

$$b'_i(y_i) = c'\left[\sum_{j=1}^{n} y_j\right] \quad \text{для всех } i = 1,\dots,n\,. \tag{5}$$

Эти условия являются условиями первого порядка при максимизации прибыли

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(-x_i,\ y_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i(y_i) - c\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right].$$

В действительности любое распределение $(y_1,\dots,y_n)$, максимизирующее прибыль $\sum_i b_i(y_i) - c(\sum_i y_i)$, оптимально по Парето. Обратно, внутренние оптимальные по Парето распределения максимизируют прибыль (рассуждения аналогичны случаю общественного продукта). Еще раз отметим, что оптимальность по Парето не предъявляет требований к вектору затрат $(x_1,\dots,x_n)$ (доли затрат), а затрагивает только уровень выпуска. На самом деле если функции дохода вогнуты и функция c выпукла, то решение системы (5) по существу единственно.

7.2 Ядро экономики с общественным продуктом

Предположим, что в модели 1 технологией по превращению личного продукта в общественный совместно владеют все агенты. Один путь в материализации этого совместного владения состоит в том, чтобы позволить каждой коалиции распоряжаться этой технологией так, как ей хочется. Любая кооалиция может решить произвести любое количество продукта при условии, что она полностью покроет расходы. Это определяет нижние ограничения для уровней полезности различных коалиций, что, в свою очередь, налагает ограничения на приемлемые распределения затрат. Эти нижние границы определяют следующую НТП-игру (определение 4.6).

Определение 7.1. НТП-игра для экономики с общественным продуктом. *Для данной коалиции* $S \subset \{1,\dots,n\}$ *вектор полезностей* $\bar{u}_S$ *допустим для* S ($\bar{u}_S \in v(S)$) *тогда и только тогда, когда существуют* $y \geq 0$ *и* x_i *для всех* $i \in S$, *такие, что*

$$\sum_{i \in S} x_i = c(y) \quad \text{и} \quad \bar{u}_i \leq u_i(\omega_i - x_i, y) \quad \text{для всех } i \in S.$$

Ядро этой НТП-игры выделяется, как и всегда, тестом на отделение: если распределение $(x_1,\dots,x_n,y)$ принадлежит ядру, то никакая коалиция не может отделиться и улучшить благосостояние своих членов.

В качестве первого примера покажем, что механизмы равномерного распределения не проходят теста на отделение. Эти механизмы выбирают оптимальные по Парето распределения с одинаковыми долями затрат: $x_i = (1/n) \cdot c(y)$ для всех i. В случае квазилинейных предпочтений (пример 7.1) легко выбрать эффективный уровень производства и равномерно поделить затраты на него. Для того чтобы понять, что эта процедура не дает распределения из ядра, рассмотрим агента, который не получает почти никакой полезности от общественного продукта. Если эффективный уровень y^* достаточно велик, то мы будем иметь

$$u_i\left[\omega_i - \frac{1}{n} \cdot c(y^*), y^*\right] < u_i(\omega_i, 0).$$

В силу этого обстоятельства агент i предпочтет отделиться и не производить никакого общественного продукта.

Вторым следствием свойства ядра является то, что никакой агент не субсидируется за потребление общественного продукта ($x_i \geq 0$ при всех i). Предположим, что $(x_1, \ldots, x_n, y)$ – распределение из ядра и $x_1 < 0$. Тогда коалиции $N \backslash \{1\}$ лучше отделиться и произвести y, сэкономив $|x_1|$ долларов.

Оказывается, что НТП-игра для экономики с общественным продуктом при весьма слабых предположениях о предпочтениях и затратах всегда имеет непустое ядро. Нужно только, чтобы функция затрат была бы непрерывной неубывающей функцией, предпочтения были монотонными и должно быть выполнено еще одно ограничение, гарантирующее, что агенты не захотят производить бесконечно большое количество общественного продукта. Точная формулировка приведена в разд. 7.6 (теорема 7.2), в которой конкретное распределение из ядра строится конструктивно. В действительности рассматриваемая НТП-игра обладает большим ядром, поскольку она выпукла (Демаиж [1986]). Для того чтобы полностью понять это утверждение, нужно сначала обобщить понятие выпуклой игры (определение 5.2) на случай НТП-игры. В то же время интуитивно все ясно: когда агент присоединяется к существующей коалиции, он добавляет свою долю затрат в общий котел, тем самым увеличивая полезность всех членов коалиции. Чем больше существующая коалиция, тем большую добавку благосостояния дает его присоединение. Мы приведем сейчас другое интуитивное понимание этого утверждения, рассмотрев квазилинейный случай.

Пример 7.2. Экономика общественного продукта с квазилинейными предпочтениями

Рассмотрим экономику общественного продукта, в которой полезность агента i, если он платит x_i и потребляет y единиц общественного продукта, измеряется величиной $b_i(y) - x_i$ (мы опускаем начальный запас денег, поскольку его величина не играет никакой роли).

Поскольку оптимальные по Парето распределения получаются из максимизации общей прибыли $\sum_i b_i - c$, то и коалиция при отделении произведет уровень продукта y, максимизирующий

$\sum_{i\in S} b_i - c$. Используя распределение затрат, коалиция может затем поделить суммарную прибыль между агентами. Другими словами, свободный доступ к технологии любой коалиции может быть смоделирован в виде кооперативной игры с *трансферабельной полезностью* (ТП):

$$\text{для всех } S \subset \{1,\ldots,n\}: \quad v(S) = \max_{y \geq 0} \left\{ \sum_{i\in S} b_i(y) - c(y) \right\}. \tag{6}$$

Допустимое распределение $(x_1,\ldots,x_n,y)$ принадлежит ядру нашей ТП экономики общественного продукта тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i\in S} (b_i(y) - x_i) \geq v(S) \qquad \text{для всех } S \subset N. \tag{7}$$

Заметим, что неравенство (7) при $S = N$ в точности означает эффективность уровня y (максимизирующего общую прибыль $\sum_{i\in N} b_i - c$).

Проверим теперь, что ТП-игра (6) выпукла (определение 5.2), а значит, имеет большое ядро (лемма 5.1).

Выберем две коалиции S,T при $S \subset T$ и агента i вне коалиции T. Докажем неравенство (9) из гл. 5:

$$v(S \cup \{i\}) + v(T) \leq v(S) + v(T \cup \{i\}).$$

Для этого достаточно доказать, что для любых $y \geq 0$ и любых $z \geq 0$ выполнено

$$\left[\left(\sum_S b_j(y) \right) + b_i(y) - c(y) \right] + \left[\left(\sum_T b_j(z) \right) - c(z) \right] \leq v(S) + v(T \cup \{i\}).$$

Рассмотрим два случая. Если $y \leq z$, то перенесем $b_i(y)$ из левой скобки в правую и воспользуемся тем, что $b_i(y) \leq b_i(z)$. С другой стороны, если $z \leq y$, то левая часть неравенства ограничена сверху выражением

$$\left[\sum_S b_j(y) + b_i(y) - c(y) \right] + \left[\sum_{T \setminus S} b_j(y) + \sum_S b_j(z) - c(z) \right] =$$

$$\left[\sum_{T \cup \{i\}} b_j(y) - c(y) \right] + \left[\sum_S b_j(z) - c(z) \right] \leq v(T \cup \{i\}) + v(S).$$

Пример 7.3. Числовой пример

Технология имеет ПДМ: $c(y) = \frac{3}{2} y$ при всех y. Есть два агента с квазилинейными предпочтениями

$$b_1(y) = \ln(1 + y), \qquad b_2(y) = 2\sqrt{y}.$$

Функция прибыли $b_1 + b_2 - c$ строго вогнута, ее единственный максимум вычисляется из условия Самуэльсона (3):

$$\frac{1}{1+y} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y^* = 1 .$$

Соответствующая прибыль равна

$$v(12) = (b_1 + b_2 - c)(y^*) = 1.19 .$$

Теперь вычислим прибыль, которую может получить коалиция из одного агента:

$$v(1) = \max_{y \geq 0} \ln(1+y) - \frac{3}{2} y = 0, \quad v(2) = \max_{y \geq 0} 2\sqrt{y} - \frac{3}{2} y = 0.67.$$

Распределения из ядра произвольным образом делят кооперативную прибыль $v(12) - v(1) - v(2) = 0.53$ между двумя агентами. В одной крайней точке вся кооперативная прибыль достается агенту 1, что приводит к следующим долям затрат x_1, x_2:

$$b_1(y^*) - x_1 = 0.53 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0.17 ,$$
$$b_2(y^*) - x_2 = 0.67 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1.33 .$$

В другой крайней точке вся кооперативная прибыль достается агенту 2 с такими долями затрат (x'_1, x'_2):

$$b_1(y^*) - x'_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x'_1 = 0.69 ,$$
$$b_2(y^*) - x'_2 = 1.19 \quad \Rightarrow \quad x'_2 = 0.81 .$$

7.3 Ядро экономики с продуктом личного пользования

В экономике с продуктом личного пользования (модель 2) определение НТП-игры, в которой все коалиции имеют свободный доступ к технологии, формально идентично определению 7.1.

Определение 7.2. НТП-игра для экономики с продуктом личного пользования. *Для данной коалиции* $S \subset \{1, \ldots, n\}$ *вектор полезностей* $(\bar{u}_i)_{i \in S}$ *допустим для коалиции* S $(u_S \in v(S))$ *тогда и только тогда, когда существуют такие* $y_i \geq 0$ *и* x_i *для всех* $i \in S$, *что*

$$0 \leq x_i \leq \omega_i \quad \text{для всех } i \in S, \quad \sum_{i \in S} x_i = c\left[\sum_{i \in S} y_i\right]$$
$$\text{и} \quad u_i \leq u_i(\omega_i - x_i, y_i) .$$

Непустота ядра этой игры решающим образом зависит от изменения доходов на масштаб рассматриваемой технологии.

Рассмотрим сначала случай производственной функции с ПДМ: $c(y) = c \cdot y$, где фиксированное число c – цена одного бушеля кукурузы в часах труда. Каждый агент может использовать производственный процесс, никоим образом не влияя на возможности других агентов. Очевидно, что справедливый исход состоит в выборе наилучшего плана для каждого агента. Это приводит к необходимости решить n децентрализованных задач:

$$\max_{0 \le x_i \le \omega_i} u_i\left[\omega_i - x_i, \frac{x_i}{c}\right]. \qquad (8)$$

Обозначим через x_i^* оптимальное решение задачи (8) (предполагая, что оно существует) и через $\gamma_i(c)$ ее оптимальное значение (таким образом, $\gamma_i(c) = u_i(\omega_i - x_i^*, x_i^*/c)$). Распределение $(x_i^*, y_i^* = x_i^*/c)_{i=1,\ldots,n}$ может быть названо некооперативным исходом, поскольку кооперация бессмысленна в случае ПДМ. Это распределение оптимально по Парето (предполагаем u_i неубывающей по свободному времени и кукурузе и строго возрастающей, хотя бы по одному из аргументов).

Пример 7.4. Два агента с различной производительностью

Вернемся к примеру 1.4 и упражнению 1.7 с двумя агентами и ПДМ технологией, превращающей 1 час труда стандартной производительности в 1 бушель кукурузы. Оба агента имеют одинаковые предпочтения на пространстве свободное время × кукуруза, равные начальные запасы ω свободного времени, но различную производительность: x'_i единицам труда агента i соответствует $\pi_i x'_i$ единиц труда стандарта. Таким образом, допустимый вектор полезностей имеет вид:

$$(u(\omega - x'_1, y_1), u(\omega - x'_2, y_2)), \quad \text{где} \quad y_1 + y_2 = \pi_1 x'_1 + \pi_2 x'_2 .$$

Эта экономика легко преобразуется в нашу общую модель. Заменим просто труд на труд стандартной производительности $x_i = \pi_i x'_i$ и получим разные начальные запасы ($\pi_i\omega$ для агента i) и разные функции полезности:

$$u_l(\pi_l\omega - x_l, y_l) = u\,((\pi_l\omega - x_l)/\pi_l, y_l)\,.$$

Некооперативный исход справедливым образом учитывает разницу в производительности труда: более производительному агенту соответствует больший уровень полезности:

$$\pi_1 \geq \pi_2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1(c) \geq \gamma_2(c)\,.$$

В самом деле, обозначим через x_2^* оптимальные затраты труда стандартной производительности для агента 2:

$$\gamma_2(c) = u_2\,[\,\pi_2\cdot\omega - x_2^*, \frac{x_2^*}{c}\,] = u\ [\omega - \frac{x_2^*}{\pi_2}, \frac{x_2^*}{c}]\,.$$

Если агент 1 затрачивает x_2^*, то он получает большую полезность, чем агент 2, следовательно:

$$\gamma_2(c) = u\,[\omega - \frac{x_2^*}{\pi_2}, \frac{x_2^*}{c}\,] \leq u\ [\omega - \frac{x_2^*}{\pi_1}, \frac{x_2^*}{c}] \leq \gamma_1(c)\,.$$

В этом прямое отличие от исхода, выбираемого программой классического утилитаризма, когда более производительный агент оказывался с меньшим уровнем полезности (см. упражнение 1.7). Упражнение 7.9 рассматривает модель из примера 7.4 более подробно. В частности, обсуждаются два основных экономических механизма (МЦ и ЭПД).

Рассмотрим случай технологии производства при УДМ: средние затраты $c(y)/y$ уменьшаются по y. Это предположение о естественной монополии: совместное использование данной технологии дает положительное взаимное влияние, и ядро действительно непусто при весьма общих предположениях (теорема 7.3). Как и в модели общественного продукта, НТП-игра является выпуклой (Мулен [1987c]), поэтому ядро большое. Мы покажем, что ядро непусто, построив конкретное распределение из ядра (теорема 7.3).

Пример 7.5. ВДМ экономика производства с предпочтениями Кобба – Дугласа

Оба агента имеют по одной единице запаса свободного времени и следующие функции полезности:

$$u_1(1 - x_1, y_1) = (1 - x_1)\cdot y_1\,,$$
$$u_2(1 - x_2, y_2) = (1 - x_2)\cdot(y_2)^{1/2}.$$

Заметим, что предельная норма замещения кукурузы на свободное время (u_{2y}/u_{2l}) агента 2 в два раза меньше, чем у агента 1. Функция затрат такова: $c(y)=\sqrt{y}$. Построим НТП-игру, соответствующую данной экономике. Предположим сначала, что отдельный агент имеет свободный доступ к технологии:

$$\gamma_1(c)=v(1)=\max_{0\le y_1\le 1}(1-\sqrt{y_1})\cdot y_1=0.148\,,$$
$$\gamma_2(c)=v(2)=\max_{0\le y_2\le 1}(1-\sqrt{y_2})\cdot y_2^{1/2}=0.25\,.$$

Множество $v(12)$ задается границей допустимых полезностей или образом оптимальных по Парето распределений. Условия эффективности первого порядка (система (4)) приводят здесь к

$$\frac{1-x_1}{y_1}=\frac{1-x_2}{2y_2}=\frac{1}{2\sqrt{y}},\qquad \text{где}\qquad y=y_1+y_2\,. \tag{9}$$

Принимая во внимание $x_1+x_2=\sqrt{y}$, получаем

$$(1-x_1)+(1-x_2)=2-\sqrt{y}\quad\Rightarrow\quad y_1+2y_2=4\sqrt{y}-2y\,.$$

Значит, мы можем выразить все координаты оптимальиых по Парето распределений через общий выпуск y:

$$\begin{aligned} &y_1=4y-4\sqrt{y}, && y_2=4\sqrt{y}-3y\,,\\ &1-x_1=2\sqrt{y}-2, && 1-x_2=4-3\sqrt{y}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Ограничения $y_l\ge 0$, $0\le x_i\le 1$ приводят к следующему диапазоиу параметра $\lambda=\sqrt{y}$:

$$1\le\lambda\le\frac{4}{3}\iff 1\le y\le\frac{16}{9}\,.$$

Таким образом, получаем следующее представление оптимальных по Парето векторов полезностей:

$$u_1=8\lambda\,(\lambda-1)^2,\qquad u_2=\sqrt{\lambda}\cdot(4-3\lambda)^{3/2},\qquad 1\le\lambda\le\frac{4}{3}\,. \tag{11}$$

Эта кривая изображена на рис. 7.1 вместе с уровнями полезности $v(i)$, $i=1,2$. Заметим, что вектор $(v(1),v(2))$ находится ниже границы Парето. Векторы полезностей из ядра получаются при значениях параметра $1.13\le\lambda\le 1.21$. Оии составляют большой кусок границы Парето.

Перейдем теперь к случаю технологии УДМ ($c(y)/y$ воз-

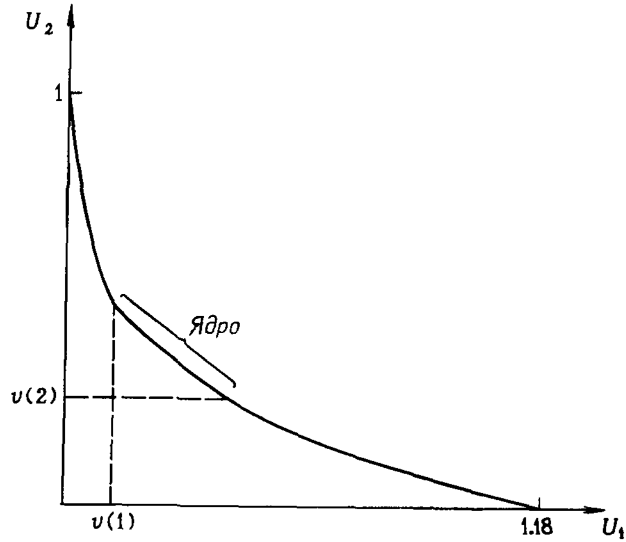


Рис. 7.1

растает по y). В этом случае совместное использование технологии производства приводит к отрицательному взаимовлиянию. Следовательно, предположение о свободном доступе к технологии не может быть выполнено, поскольку ядро, как правило, *пусто*. Для того чтобы понять это, рассмотрим, какого уровеня полезности может достигнуть агент i, если он имеет самостоятельный доступ к технологии:

$$\gamma_i(c) = \max u_i(\omega_i - c(y_i), y_i) ;$$

здесь максимум берется по всем $y_i \geq 0$ таким, что $c(y_i) \leq \omega_i$. Уменьшающиеся доходы на масштаб, как правило, препятствуют достижимости вектора $(\gamma_1(c), \ldots, \gamma_n(c))$ для коалиции всех агентов, как это показано в нашем следующем числовом примере.

Пример 7.6. УДМ экономика производства с предпочтениями Кобба – Дугласа

Пусть агенты те же, что и в примере 7.5, но функция затрат другая: $c(y) = y^2$. Вычислим сначала величины $v(i)$:

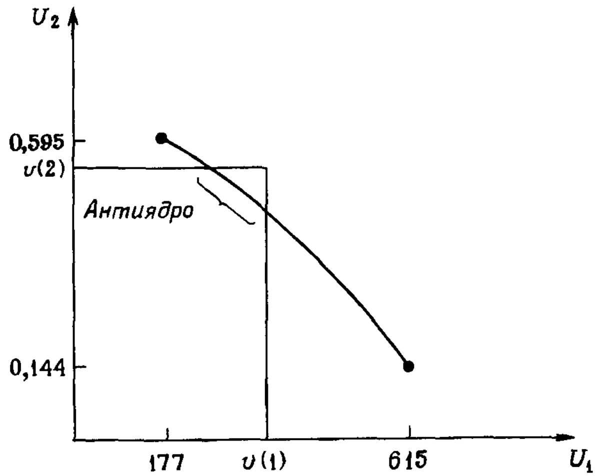


Рис. 7.2

$$\gamma_1(c) = v(1) = \max_{0 \le y_1 \le 1} (1 - y_1^2) \cdot y_1 = 3.85\ ,$$

$$\gamma_2(c) = v(2) = \max_{0 \le y_1 \le 1} (1 - y_2^2) \cdot y_2^{1/2} = 0.535\ .$$

Затем, как и в прнмере 7.5, получим параметрическое представление границы Парето. Условия первого порядка (9) таковы:

$$\frac{1-x_1}{y_1} = \frac{1-x_2}{2y_2} = 2y$$

и

$$(1 - x_1) + (1 - x_2) = 2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad y_1 + 2y_2 = \frac{1}{y} - \frac{y}{2}.$$

Значнт,

$y_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{y}$, $y_2 = \frac{1}{y} - \frac{3}{2}y$, $1 - x_i = 5y^2 - 2$, $1 - x_2 = 4 - 6y^2$.

Следовательно, уравнения границы Парето через параметр $\lambda = y$ имеют вид:

$$u_1 = \frac{(5\lambda^2 - 2)^2}{2\lambda}, \quad u_2 = \left\{\frac{2}{\lambda} \cdot (2 - 3\lambda^2)^3\right\}^{1/2}, \tag{12}$$

$$0.707 \le \lambda \le 0.775\ .$$

Рис. 7.2 показывает множество $v(12)$ и вектор $(v(1), v(2))$ вне этого множества.

Таким образом, в случае УДМ НТП-игра из определения 7.2 даже не супераддитивна: если каждый агент имеет индивидуальный свободный доступ к технологии, то у них нет побудительных мотивов к кооперации. Поскольку мы предполагаем, что они должны совместно участвовать в едином производственном процессе, кооперация может рассматриваться как общая ноша в рамках задач распределения затрат предыдущей главы (см. пример 6.4). В этой интерпретации коалиционные множества полезностей из определения 7.2 могут рассматриваться как *верхние* границы коалиционных векторов полезностей. Мы рассматриваем оптимальный по Парето вектор полезностей как такой вектор, для которого любая подкоалиция может достигнуть таких же (или больших) уровней полезности, если будет иметь свободный доступ к технологии. Это означает, что каждая коалиция чем-то жертвует, чтобы покрыть потери, вызванные монополистическим производством. В экономике с двумя агентами это соответствует оптимальным по Парето векторам полезностей, где каждый агент получает не больше чем его доход $v(i)$. На рис. 7.2 показана эта область для числового примера 7.6.

Концепция *антиядра* приведена в Мулен [1987*c*], где дается точная формализация этой идеи. Оно выделяет непустое подмножество эффективных распределений для УДМ технологии и выпуклых предпочтений агентов (см. упражнение 7.7).

7.4 Маргинальное ценообразование в экономике с общественным продуктом

Начнем с модели с общественным продуктом. Аналогом системы конкурентного ценообразования в экономике с общественным продуктом является система индивидуальных цен на общественный продукт, называемых ценами Линдала. Каждому агенту i соответствует своя цена p_i на общественный продукт. "Рынок сбалансирован", если (*i*) каждый агент запрашивает один и тот же уровень общественного продукта, и (*ii*) сумма индивидуальных платежей в точности покрывает затраты на производство данного уровня общественного продукта. Мы проиллюстрируем эти условия, используя предыдущий числовой пример.

Пример 7.3. (продолжение)

В числовом примере 7.3 фиксируем пару неотрицательных цен и вычислим соответствующий спрос на общественный продукт. Агент 1 решает следующую задачу:

$$\max_{y \geq 0} \ln(1+y) - p_1 y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{p_1} - 1 .$$

Агент 2 решает задачу

$$\max_{y \geq 0} 2\sqrt{y} - p_2 y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{p_2^2} .$$

Следовательно, выполнение двух указаниых выше условий (равный спрос и бюджетиый баланс) означает

$$\frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{p^2} \qquad \text{и} \qquad p_1 + p_2 = \frac{3}{2}$$

с единственным неотрицательным решением $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = 1$. Соответствующие доли затрат равны $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, а вектор полезиостей получается как

$$b_1(y^*) - x_1 = 0.20, \qquad b_2(y^*) - x_2 = 1 .$$

Таким образом, агеит 1 получает 38 процентов кооперативной прибыли, а агент 2 – оставшиеся 62 процеита.

Общее определеиие системы цен Лиидала легко формулируется для ПДМ техиологии ($c(y) = c \cdot y$ при всех y). Будем говорить, что $(p_1, \ldots, p_n; y^*)$ равновесие Лиидала, если выполняются следующие условия:

$$\text{для всех } i = 1, \ldots, n:$$

$$u_i(\omega_i - p_i \cdot y^*, y^*) = \max_{y \geq 0} u_i(\omega_i - p_i \cdot y, y) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = c .$$

Первое условие говорит о том, что спрос агентов на общественный продукт однtнаков, а второе условие – что затраты в точности покрываются. При адаптации этого определения для случая произвольной технологии получается долевое равновесие (ДР) (Канеко [1977]). Каждому агенту приписывается фиксированнная пропорция реальных затрат на производство общественного продукта (его доля). Значит, если доля агента i равна $r_i \geq 0$, то он должен платить $r_i c(y)$ за уровень y общественного продукта. ДР есть $(n+1)$-мерный вектор $(r_1,\ldots,r_n;\ y^*)$, такой что (i) каждый агент запрашивает один и тот же уровень y^* при его заданной доле, и (ii) сумма долей равна 1:

для всех $i = 1,\ldots,n$:

$$u_i(\omega_i - r_i \cdot c(y^*),\ y^*) = \max_{y \geq 0} u_i(\omega_i - r_i \cdot c(y),\ y)\ , \tag{13}$$

$$r_i \geq 0 \quad \text{для всех } i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = 1\ . \tag{14}$$

Теорема 7.1. (Фоули [1970], Канеко [1977]). *Дана экономика с общественным продуктом* $(u_1,\ldots,u_n,\omega_1,\ldots,\omega_n,c)$. *Предположим, что предпочтения агентов строго возрастают по личному продукту. Тогда долевое равновесие* $(r_1,\ldots,r_n;\ y^*)$ *приводит к распределению* $(x_i = r_i - c(y^*)$ *для всех* $i)$ *из ядра НТП-игры (определение 7.1).*

Доказательство. Предположим от противного, что коалиция S, $S \subset N$, может иметь возражения против ДР $(r_1,\ldots,r_n;\ y^*)$. Для некоторого $y \geq 0$ и некоторого $x_i \geq 0$, $i \in S$ получаем

$$u_i(\omega_i - x_i, y) \geq u_i(\omega_i - r_i \cdot c(y^*), y^*) \quad \text{для всех } i \in S\ ,$$

где хотя бы одно неравенство строгое и $\sum_{i \in S} x_i = c(y)$. Из (13) следует

$$u_i(\omega_i - x_i, y) \geq u_i(\omega_i - r_i \cdot c(y), y) \quad \text{для всех } i \in S\ . \tag{15}$$

Одно из этих неравенств должно быть строгим, скажем, при $i = 1$, т. е. $x_1 < r_1 \cdot c(y)$. Принимая во внимание (14), получаем

$$\sum_{i \in S} r_i \cdot c(y) \leq c(y) = \sum_{i \in S} x_i \quad \text{и} \quad x_1 < r_1 \cdot c(y)\ .$$

Значит, для некоторого $j \in S$ имеем $r_j \cdot c(y) < x_j$ и, следовательно, получаем противоречие с (15), поскольку u_i строго возрастает по личному продукту.

QED

ДР выдерживает тест на отделение. Его существование гарантируется при выпуклой функции затрат (означающей УДМ) и выпуклости предпочтений агентов (квазивогнутые функции полезности – см. Канеко [1977]). В этом случае условия оптимальности первого порядка в задаче (13) имеют вид

$$\frac{u_{iy}}{u_{ix}} = r_i \cdot c'(y^*) \quad \text{для всех } i = 1,\dots,n. \tag{16}$$

Значит, вектор долей параллелен вектору предельных норм замещения между личным и общественным продуктом. Заметим, что суммируя предыдущие уравнения, мы получаем условие Самуэльсона (3).

Рассматривая ДР как механизм распределения затрат, мы обнаруживаем многие его достоинства. Оно соответствует осмысленному пропорциональному правилу (система (16)) и приводит к распределению из ядра Его главный недостаток заключается в том, что оно может не существовать при возрастающих доходах на масштаб и/или при невыпуклых предпочтениях агентов. В упражнении 7.3 приводится такой пример.

Замечание 7.1. ДР не является единственной концепцией, обобщающей равновесие Линдала на случай произвольной функции затрат. Другой аналогичной возможностью служит использование тарифа с двумя ставками. Все агенты получают фиксированный (отрицательный или положительный) денежный платеж (одинаковый для всех агентов) и плагят индивидуальную цену p_i за каждую единицу общественного продукта. Равновесие достигается, если они требуют одного и того же количества общественного продукта, и общие платежи агентов покрывают затраты на производство. Общее определение мы даем в упражнении 7.5, где показываем также, что это равновесие может не выдерживать теста на отделение (приводятся УДМ *и* ВДМ примеры). Идея тарифов с двумя ставками является ключевой для МЦ равновесия в регулируемой монополии с личным продуктом.

7.5 Маргинальное ценообразование в экономике с продуктом личного пользования

Для ПДМ технологии некооперативный исход (см. разд. 7.3) приводит к назначению истинной цены производства. В случае произвольной технологии МЦ имитирует случай ПДМ назначением единой правильно подобраиной цены (одной для всех агентов), порождающей эффективное распределение. Это приводит "фирму" к некоторой прибыли или дефициту (платежи агентов не балансируют затраты производства). Чтобы решить эту проблему, мы равномерно распределяем прибыль или дефицит в виде единовременной передачи личного продукта. Таким образом, мы ищем тариф из двух ставок, при котором индивидуальный спрос приводил бы к эффективному распределению.

Определение 7.3. *Для экономики типа труд – кукуруза $E=(u_1,\ldots,u_n,\omega_1,\ldots,\omega_n;c)$ рассмотрим пару (p,t), где p – (неотрицательная) цена единицы кукурузы относительно труда, а t – фиксированнное количество кукурузы (положительное или отрицательное).*

Скажем, что распределение (x^*,y^*) является **равновесием при маргинальном ценообразованнн** *для (p,t), если выполнены два условия:*

(a) Это распределение допустимо (2) и оптимально по Парето в экономике E.

(b) Для каждого агента $i=1,\ldots,n$ имеем $x_i^*=p\cdot(y_i^*-t)$ и

$$u_i(\omega_i-x_i^*,y_i^*)=\max_{\substack{0\le x_i\le\omega_i,\ 0\le y_i\\ x_i=p\cdot(y_i-t)}} u_i(\omega_i-x_i,y_i). \tag{17}$$

Это равновесие имеет сходство с конкурентным равновесием Эрроу – Дебре в экономике производства, в которой каждому агенту принадлежит равная доля фирмы. Разница заключается в том, что фирма необязательно максимизирует свой доход. Поэтому нам понадобилось условие эффективности *a*.

МЦ равновесие сохраняет основное децентрализующее свойство конкурентного равновесия: каждый агент выбирает свое распределение независимо на основе ценового сигнала (из двух частей). Мы проиллюстрируем определение 7.3 с помощью двух ранее рассмотренных числовых примеров.

Пример 7.5. ВДМ экономика производства с предпочтениями Кобба – Дугласа (продолжение)

Условия оптимальности первого порядка для задачи (17) принимают вид $u_{ly}/u_{lx} = p$, следовательно, в этом числовом примере

$$\frac{1-x_1}{y_1} = \frac{1-x_2}{2y_2} = 2y. \tag{18}$$

Сравнивая это с условиями эффективности (9), получаем $p = \frac{1}{2}\sqrt{y}$. Наконец, МЦ равиовесие удовлетворяет условию

$$(1 - x_1) + py_1 = (1 - x_2) + py_2 .$$

В этом последнем уравнении все переменные могут быть выражены через y (в силу (10)):

$$(2\sqrt{y} - 2) + \frac{1}{2\sqrt{y}} (4y - 4\sqrt{y}) = 4 - 3\sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt{y}}(4\sqrt{y} - 3y) .$$

Отсюда $\sqrt{y} = \frac{20}{17}$, или $y = 1.38$, и получаем следующее МЦ равновесие:

$$y_1 = 0.83, \quad y_2 = 0.55, \quad 1 - x_1 = 0.35, \quad 1 - x_2 = 0.47 ,$$
$$u_1 = 0.293, \quad u_2 = 0.35 .$$

Заметим, что это распределение прииадлежит ядру экономики (нq' это не общее свойство, как показывает пример 7.7). Заметим также, что передача $t = y_i - x_i/p$ отрицательна ($t = -0.70$), так что каждый агент должеи купить право на обмеи труда на кукурузу по благоприятной цене $p = 0.425$.

Пример 7.6. УДМ экономика производства с предпочтениями Кобба – Дугласа (продолжение)

Как и в предыдущем примере, непосредственными вычислениями получаем МЦ равновесие:

$$\frac{1-x_1}{y_1} = \frac{1-x_2}{2y_2} = p = 2y \text{ и } (1 - x_1) + py_1 = (1 - x_2) + py_2 \Rightarrow y = 0.725,$$

так что

$$y_1 = 0.43, \quad y_2 = 0.295, \quad 1 - x_1 = 0.63, \quad 1 - x_2 = 0.85,$$
$$u_1 = 0.272, \quad u_2 = 0.457.$$

На этот раз. единовременная передача $t = y_i - x_i/p$ положительна ($t = 0.30$). Каждый агент субсидируется, но должен приобретать кукурузу за труд по высокой цене $p = 2.9$.

На самом деле МЦ равновесие может не выдерживать теста на отделение, даже когда ядро непусто. Рассмотрим простой пример экономики с двумя агентами и ВДМ технологией.

Пример 7.7. В котором МЦ равновесие находится вне ядра

Два агента имеют одинаковые предпочтения Кобба – Дугласа и различный начальный запас труда:

$$\omega_1 = 6, \quad \omega_2 = 2, \quad u_i(\omega_i - x_i, y_i) = (\omega_i - x_i) \cdot y_i .$$

Функция затрат такова:

$$c(y) = \begin{cases} 2y & \text{при } 0 \le y \le 2, \\ y + 2 & \text{при } 2 \le y. \end{cases}$$

Значнт, средние затраты не возрастают. Рассмотрим бюджетное ограничение $x_i = y_i + 1$ (каждый агент расплачнвается одной еднницей труда и один к одному обменивает дополннтельный труд на кукурузу). Соответствующий спрос агентов получается нз решения задач:

$$\max_{x_1 = y_1 + 1,\ 0 \le x_1 \le 6} (6 - x_1) \cdot y_1 \Rightarrow (\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (3.5,\ 2.5),$$

$$\max_{x_2 = y_2 + 1,\ 0 \le x_2 \le 2} (2 - x_2) \cdot y_2 \Rightarrow (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (1.5,\ 0.5).$$

Заметим, что соответствующее распределенне эффективно, поскольку $x_1 + x_2 = c(y_1 + y_2)$, а маргинальные нормы замещения равны маргинальным затратам. Значит, это – МЦ равновесие. Внимательный читатель проверит, что других таких равновеснй нет.

Проверим далее, что это равновесие не принадлежит ядру. Если агеит 2 будет использовать технологию самостоятельно, то он достигнет уровня полезности 0.5 (производя 0.5 единиц кукурузы)

$$\max_{x_2 = c(y_2)} u_2(\omega_2 - x_2, y_2) = \max_{0 \le y_2 \le 1} (2 - 2y_2) \cdot y_2 = 0.5.$$

Следовательно, агент 2 предпочтет отделиться от МЦ равновесия, поскольку $u_2(\omega_2 - \bar{x}_2, \bar{y}_2) = 0.25$.

В случае УДМ технологии анологично можно показать, что МЦ равновесие может быть вне антнядра: некоторые агенты могут получить больше, чем они бы получили при свободном доступе к технологии (см. упражненне 7.7).

В следующем разделе мы обсуднм совсем другой механизм, основанный на эгалитаризме, который всегда дает распределение из ядра (для случая ВДМ технологии) и из антиядра (для случая УДМ технологии) в экономике с личным продуктом.

7.6 Два эгалитарных селектора ядра

Начием с экономики с общественным продуктом (модель 1). Механизм эгалитарного эквивалента (ЭЭ) основан на желании выбрать конкретную функцию полезности, представляющую предпочтения и уравнять полезности агентов.

Точнее, мы используем общественный продукт в качестве *измерителя* полезности. Пусть полезность агента i для распределения $(\omega_i - x_i, y)$ равна такому уровню общественного продукта w_i, что для агента i одинаковы по предпочтению данное распределение и (ω_i, w_i) (т.е. потребление w_i единиц общественного продукта бесплатно). Формально, определение функции $w_i(\cdot, \cdot)$ следующее:

$$w_i(\omega_i - x_i, y) = \alpha \iff u_i(\omega_i - x_i, y) = u_i(\omega_i, \alpha).$$

Это свойство определяет w_i, если u_i непрерывна, строго возрастает по общественному продукту и если $u_i(\omega_i - x_i, y) \geq u_i(\omega_i, 0)$. Распределение при *эгалитарном эквиваленте* является эффективным распределением, уравнивающим полезности w_i. Формально, обозначим через $v(N)$ множество допустимых векторов полезностей экономики с общественным продуктом (определение 7.1). Затем определим ЭЭ уровень $\bar{y}$ общественного продукта как наибольший уровень общественного продукта, потребление которого без затрат (недопустимое распределение) все-таки приводит к допустимому вектору

$$\bar{y} = \sup \{y \geq 0 \mid (u_i(\omega_i, y))_{i=1,\dots,n} \in v(N)\}.$$

ЭЭ распределение – любое допустимое распределение, приводящее к вектору полезностей $(u_i(\omega_i, \bar{y}))_{i=1,\dots,n}$.

Конечно, нужны некоторые топологические предположения на предпочтения и функцию затрат, необходимые для того чтобы гарантировать существование этого распределения. По существу достаточио, чтобы предпочтения были монотоиными по обоим продуктам и непрерывными и чтобы функция затрат была моиотоина и иепрерывна (детали см. в Мулеи [1987*b*]).

Рассмотрим случай квазилинейиых предпочтений агентов, как в примере 7.1. Пусть y^* эффективный уровень общественного продукта, максимизирующий прибыль $(\sum_{i=1}^{n} b_i(y) - c(y))$ (предположим для простоты, что существует едииствеиный y^*). Тогда вектор полезностей $(u_i(\omega_i, y))_i$ допустим тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(y) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i(y^*) - c(y^*).$$

Следовательно, ЭЭ уровень $\bar{y}$ является решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} b_i(y^*) - c(y^*). \tag{19}$$

Затем ЭЭ распределение затрат для $\bar{y}$ определяется как

$$b_i(y^*) - x_i = b_i(\bar{y}) \quad \Rightarrow \quad x_i = b_i(y^*) - b_i(\bar{y}) \text{ для всех } i. \tag{20}$$

Проиллюстрируем эти формулы на примере.

Пример 7.3. (продолжение)

В числовом примере эффективиый уровеиь общественного продукта есть $y^* = 1$. Найдем ЭЭ уровень из решения (19):

$$\ln(1 + \bar{y}) + 2\sqrt{\bar{y}} = \ln 2 + 2 - \frac{3}{2} = 1.19 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = 0.24$$

и доли затрат

$$x_1 = \ln 2 - \ln(1.24) = 0.48, \qquad x_2 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0.24} = 1.02\ ,$$

значит, игрок 1 получает 42 процента прибыли (если личный продукт служит *измерителем*), а игрок 2 получает 58 процентов. Сравните с распределением Линдала (см. разд. 7.4), дающим 38 процентов прибыли игроку 1. Разница весьма мала!

Теорема 7.2 (Мас-Колелл [1980], Мулеи [1987*b*]). *Предположим, что предпочтения агентов строго возрастают по личному продукту. Тогда ЭЭ распределение содержится в ядре экономики с общественным продуктом.*

Доказательство. Для начала заметим, что если

$(x_1,\dots,x_n,y)$ – ЭЭ распределение и $\bar{y}$ – ЭЭ уровень общественного продукта, то

$$u_i(\omega_i - x_i, y) = u_i(\omega_i, \bar{y}) \quad \text{для всех } i.$$

Из этого, в частности, следует, что все ЭЭ распределения приводят к одному и тому же вектору полезностей, и что все они оптимальны по Парето. Предположим далее, что наше ЭЭ распределение не принадлежит ядру: для некоторой коалиции T можно найти $(x'_i,\ i \in T; y')$, такое, что

$$c(y') = \sum_{i\in T} x'_i \text{ и } u_i(\omega_i - x_i, y) \le u_i(\omega_i - x'_i, y'), \quad \text{для всех } i \in T \tag{21}$$

и хотя бы одно неравенство строгое. Рассмотрим допустимое распределение $(x'_1,\dots,x'_n,y')$, где $x'_i = 0$ для всех $i \in N\backslash T$. Заметим, что из неравенства $\bar{y} \le y'$ следует $u_i(\omega_i - x_i, y) = u_i(\omega_i, \bar{y}) \le u_i(\omega_i - x'_i, y')$ для всех $i \in N\backslash T$, в то же время

$$u_i(\omega_i - x_i, y) \le u_i(\omega_i - x'_i, y') \text{ для всех } i \in T.$$

Поскольку по крайней мере одно из последних неравенств строгое, то мы получаем противоречие с оптимальностью по Парето $(x_1,\dots,x_n;y)$. Значит, мы должны иметь $y' < \bar{y}$ и из неравенства (21) следует, что для всех $i \in T$

$$u_i(\omega_i, \bar{y}) = u_i(\omega_i - x_i, y) \le u_i(\omega_i - x'_i, y') \le u_i(\omega_i - x'_i, \bar{y}).$$

Отсюда в свою очередь получаем $x'_i \le 0$ для всех $i \in T$, так что допустимость (21) требует $x'_i = 0$ для всех $i \in T$. Следовательно,

$$u_i(\omega_i - x'_i, y') = u_i(\omega_i, y') \le u_i(\omega_i, \bar{y}) = u_i(\omega_i - x_i, y),$$

и все неравенства в (21) обращаются в равенства, откуда следует желаемое противоречие.

QED

Теоремы 7.1 и 7.2 представляют два селектора ядра экономики с общественным продуктом, а именно ДР и ЭЭ распределение. В последнем случае возможна компактная аксиоматическая характеризация, обсуждаемая в разд. 7.7. Несколько числовых примеров убедят читателя в том, что эти два механизма часто близки друг к другу, как в примере 7.3 (см. также упражнение 7.2).

Обратимся теперь к эгалитарному селектору ядра экономики с личным продуктом. Фокус здесь опять состоит в том, чтобы разумно выбрать *измеритель* для представления предпочтений агентов.

Для данного положительного числа p рассмотрим ПДМ технологию $c(y) = p \cdot y$ и обозначим через $\gamma_i(p)$ полезность, которую получает агент i в соответствующем некооперативном исходе (см. разд. 7.3):

$$\gamma_i(p) = \max_{0 \leq x_i \leq \omega_i} u_i\left[\omega_i - x_i, \frac{x_i}{p}\right].$$

Функция γ_i зависит только от функции полезности агента i, поэтому траектория полезностей $\gamma(p) = (\gamma_1(p), \ldots, \gamma_n(p))$ зависит только от профиля полезностей. Более того, $\gamma_i(p)$ убывает по p для всех i и для больших p сходится к $u_i(\omega_i, 0)$.

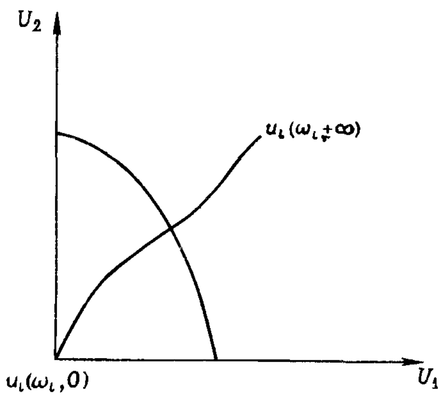


Рис. 7.3

Для произвольной функции затрат c мы ищем наибольший допустимый вектор полезностей на этой траектории. Такой вектор существует, поскольку при $p = 0$ вектор $\gamma(0) = (u_i(\omega_i, +\infty))_i$ недопустим, а при $p = +\infty$ вектор $\gamma(+\infty) = (u_i(\omega_i, 0))_i$ допустим. Таким образом, наибольший вдоль траектории допустимый вектор оптимален по Парето (см. рис. 7.3 или детально в Мулен [1987c]).

Как и в случае общественного продукта, обозначим через $v(N)$ множество достижимых векторов полезностей в экономике с личным продуктом. *Цена эквивалента постоянных доходов* есть наименьшая цена p такая, что $\gamma(p)$ – допустимый вектор:

$$\bar{p} = \inf \{p \geq 0 \mid \gamma(p) \in v(N)\}.$$

ЭПД распределение есть любое допустимое распределение, при котором достигается вектор полезностей $\gamma(\bar{p})$. ЭПД механизм пытается выравнять полезности при представлении предпочтений следующей функцией *отрицательной* полезности w_i:

$$w_i(\omega_i - x_i, y_i) = p \iff \gamma_i(p) = u_i(\omega_i - x_i, y_i).$$

Другими словами, агент i получает p единиц отрицательной полезности от некоторого распределения, если это распределение одинаково для него по предпочтению с возможностью купить кукурузу по цене p (относительно труда).

Как говорилось ранее, ЭПД распределение действительно оптимально по Парето (в предположениях теоремы 7.3).

Примеры 7.5 и 7.6. (продолжение)

Вычислим ЭПД цену и распределение для двух экономик из примеров 7.5 (случай ВДМ) и 7.6 (случай УДМ). Найдем сначала функции $\gamma_i(p)$, $i = 1,2$,

$$\gamma_1(p) = \max_{0 \leq x_1 \leq 1} (1 - x_1) \cdot \frac{x_1}{p} = \frac{1}{4p},$$

$$\gamma_2(p) = \max_{0 \leq x_2 \leq 1} (1 - x_2) \cdot \left[\frac{x_2}{p}\right]^{1/2} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{(p)^{1/2}}.$$

Вектор полезностей $\gamma(p)$ на траектории удовлетворяет условию

$$4\,\gamma_1 = \frac{27}{4}\gamma_2^2. \tag{22}$$

Случай ВДМ. Используя параметрическое представление (11) оптимальных по Парето векторов полезностей, получаем уравнение

$$4 \cdot 8\lambda\,(\lambda - 1)^2 = \frac{27}{4} \cdot \lambda\,(4 - 3\lambda)^3 \iff \frac{(4 - 3\lambda)^3}{(\lambda - 1)^2} = 4.74$$

относительно неизвестного $\lambda = \sqrt{y}$. Решение этого уравнения есть $\lambda = 1.165$ или $y = 1.36$, которому соответствует распределение

$$y_1 = 0.77, \quad y_2 = 0.59, \quad 1 - x_1 = 0.33, \quad 1 - x_2 = 0.505\,,$$
$$u_1 = 0.254, \quad u_2 = 0.387\,.$$

Оно весьма близко к МЦ равновесию (не более 10 процентов отклонения по любой переменной).

Случай УДМ. Теперь параметрическое представление оптимальных по Парето векторов дано условием (12). Пересечение с кривой (22) дает уравнение

$$4 \cdot \frac{(5\lambda^2 - 2)^2}{2\lambda} = \frac{27}{4} \cdot \frac{2}{\lambda}(2 - 3\lambda^2)^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(2 - 3\lambda^2)^3}{(5\lambda^2 - 2)^2} = 0.148\,,$$

решение которого $\lambda^2 = 0.532$ или $\lambda = y = 0.729$. Соответствующее распределение есть

$$y_1 = 0.450, \quad y_2 = 0.279, \quad 1 - x_1 = 0.657, \quad 1 - x_2 = 0.811\,,$$
$$u_1 = 0.296, \quad u_2 = 0.428\,.$$

Опять оно близко с МЦ равновесием (распределения отличаются менее чем на 5 процентов).

Несмотря на тот факт, что ЭПД и МЦ распределения часто численно близки, между ними существует важное концептуальное отличие. Как мы показали ранее, последнее может не принадлежать ядру экономики при возрастающих доходах на масштаб (см. пример 7.7), а первое всегда лежит в ядре.

Теорема 7.3 (Мас-Колелл [1980], Мулен [1987*c*]). *Предположим, что предпочтения выпуклы, строго возрастают по свободному времени и не убывают по кукурузе. Пусть функция затрат непрерывна, не убывает и средние затраты $c(y)/y$ не возрастают по y (ВДМ). Тогда ЭПД распределение принадлежит ядру экономики. Таким образом, ядро непусто.*

Доказательство теоремы 7.3 намечено в упражнениии 7.8.

Замечание 7.2. Приведенный результат является простейшим из результатов о непустоте ядра экономики производства при возрастающих доходах. Двумя ограничительными предположениями здесь являются: (1) ресурсы не могут обмениваться между агеитами, (2) одии ресурс преобразуется в один продукт. Никакое из этих двух предположений не может быть снято. Скарф [1986] показал, что при трансферабельных ресурсах непостоянные доходы на масштаб всегда могут приводить к пустому ядру. В случае многих продуктов (при единственном нетрансферабельиом ресурсе) обеспеченности фуикции затрат (определение 5.4) недостаточно для непустоты ядра даже при выпуклых предпочтениях (см. упражнение 4.5). Шарки [1979] приводит некоторые весьма сильные достаточные условия непустоты, такие, как выпуклость предпочтений плюс квазивыпуклость затрат плюс возрастание доходов на масштаб по лучу (ВДМ по лучу).

7.7 Технологическая монотонность

Привлекательная черта двух селекторов ядра, обсуждаемых в разд. 7.6, состоит в том, что они монотонно реагируют иа изменения условий затрат. Аксиома *технологической монотонности* утверждает, что все агенты должны выиграть при улучшении производственной функции (расширении производственного множества). Другими словами, техиический прогресс должен приветствоваться всемн.

Мы рассматриваем ТМ аксиому как иормативное следствие общественного владения технологией. Если мы совместно владеем иекоторым имуществом, то иикто из нас не должен пострадать, если это имущество станет объктивно более значимым. ТМ аксиома весьма близка к аксиоме монотонности по допустимому миожеству в аксиоматических торгах (определение 3.3). В действительности как ЭЭ механизм (в случае общественного продукта), так и ЭПД механизм (в случае личного продукта) являются специальными случаями монотонных вдоль пути функций коллективного выбора (упражнение 3.4) и потому удовлетворяют ТМ аксиоме. Каждый механизм основан на траектории полезностей, зависящей только от профиля полезностей. Для любого выбора функции затрат пересечение допустимого миожества полезностей с заданной траекторией полезностей определяет окончательный вектор полезностей. Если функция затрат убывает от c_1 до c_2 (в смысле $c_2(y) \leq c_1(y)$ для всех

y), то допустнмое множество полезностей расширяется от $v_1(N)$ до $v_2(N)$, и значит, окончательиая полезность каждого агента также возрастает (см. рис. 7.4).

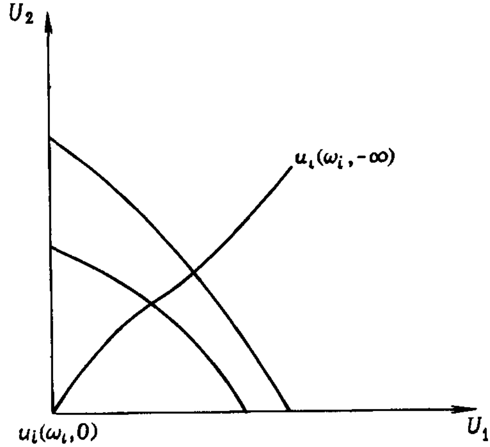


Рис. 7.4

Проверим теперь, что другие механизмы, такие, как ДР Канеко (случай общественного продукта) и МЦ равновесие (случай личного продукта) *не* удовлетворяют ТМ. Мы построим явиый пример экономики с общественным продуктом с двумя участниками, имеющими следующие квазилинейные предпочтения:

$$b_1(y) = 2\sqrt{y}, \quad b_2(y) = \min\{18\cdot\sqrt{y},\ (0.1)y + 18\}.$$

Идея состоит в том, чтобы подобрать функцию затрат c_1 так, чтобы эффективный уровень общественного продукта был $y_1^* = 1$, а меньшая функция затрат c_2 приводила бы к эффективному уровню обществеиных затрат $y_2^* = 1.23$. ДР доли затрат пропорциональны $b_1'(y)$, $b_2'(y)$. При $y_1^* = 1$ это соответствует 10 процентам общих затрат для агента 1 (поскольку $b_2(y) = 18\cdot\sqrt{y}$ в окрестности $y = 1$), но при $y_2^* = 1.23$ агент 1 должен покрывать 90 процентов затрат (поскольку $b_2(y) = (0.1)y + 18$ в окрестности $y = \frac{100}{81}$). В качестве результата получаем потери в полезности агента 1. Для определенности рассмотрим следующие фуиции затрат:

$$c_1(y) = \max\{y,\ 10y - 8\} \geq c_2(y) = y \quad \text{для всех } y.$$

Проверим, что $y_1^* = 1$ – эффективный уровень в экономике (b_1, b_2, c_1) соответствующий ДР:

$$\frac{b_1'(1)}{b_2'(1)} = \frac{1}{9}, \quad c_1(1) = 2 \;\Rightarrow\; x_1 = 0.2 \;\text{ и }\; u_1 = b_1(y_1^*) - x_1 = 1.8\,.$$

Далее $y_2^* = \frac{100}{81} = 1.23$ – эффективный уровень в экономике (b_1, b_2, c), соответствующий ДР:

$$\frac{b_1'(1.23)}{b_2'(1.23)} = 9, \;\; c_2(1.23) = 1.23 \;\Rightarrow\; x_1' = 1.11 \;\text{ и }\; u_2 = b_1(y_2^*) - x_1' = 1.11\,.$$

Значит, полезность агента 1 уменьшается в результате технологических улучшений, т.е. ДР нарушает ТМ, что и требовалось доказать.

Аналогичный пример может быть построен для демонстрации того, что МЦ механизм также нарушает ТМ.

ТМ аксиома является ключевой при аксиоматической характеризации ЭЭ и ЭПД механизмов. Общая характеризация монотонности по выпуску из теории аксиоматических торгов может быть адаптирована для экономики производства: любой оптимальный по Парето механизм, удовлетворяющий ТМ, выбирает наибольший допустимый вектор полезностей вдоль фиксированной монотонной траектории полезности (Мулен [1987*c*]). Другими словами, такой механизм уравнивает некоторые количественные полезности, представляющие предпочтения агентов.

Если мы скомбинируем ТМ со свойством ядра в экономике с общественным продуктом (при фиксированном профиле предпочтений и переменной функцией затрат), то однозначно охарактеризуем ЭЭ механизм (Мулен [1987*b*]). Если мы скомбинируем ТМ со свойством ядра в экономике личного продукта при ВДМ (фиксируем профиль полезности; функция затрат изменяется в области ВДМ), то однозначно получим ЭПД механизм (Мулен [1987*c*]).

Для завершения отметим, что ЭЭ и ЭПД механизмы обладают более хорошими глобальными свойствами, чем ДР и МЦ равновесия соответственно. Во-первых, ЭЭ и ЭПД определены всегда, а ДР и МЦ могут не существовать при невыпуклых предпочтениях. Во-вторых, ЭЭ и ЭПД неизменно выдерживают тест на отделение, а ДР и МЦ могут не выдерживать. Наконец, ЭЭ и ЭПД технологически монотонны в противоположность ДР и МЦ.

С другой стороны, ДР и МЦ распределеиия могут быть найдены по ограниченному набору данных, в то время как ЭЭ и ЭПД требуют глобального знания предпочтений и затрат. Это эквивалентно тому, что ДР и МЦ децентрализуют задачу распределения, превращая ее в n задач максимизации индивидуальной полезности.

Упражнения

Первые пять упражнений касаются модели с общественным продуктом, а последние четыре – модели с личным продуктом.

7.1 Некоторые числовые примеры экономики с общественным продуктом с квазилинейными предпочтениями (примеры 7.1 и 7.2)

(a) В нашем первом примере технология производства общественного продукта имеет ПДМ. $c(y) = 2y$. Имеются два агента, извлекающих следующий доход из потребления общественного продукта.

$$b_1(y) = y, \qquad b_2(y) = 2\sqrt{y}\,.$$

Постройте ТП кооперативную игру (6) и найдите множество векторов полезностей, соответствующих ядру.

Найдите равновесие Линдала (заметим, что функция спроса агента 1 разрывна в $p_1 = 1$) Каковы соответствующие доли кооперативной прибыли $v(12) - v(1) - v(2)$? Найдите ЭЭ уровень общественного продукта и ЭЭ распределение. Проверьте, что оно более выгодно для агента 1, чем равновесие Линдала.

(b) В нашем втором примере имеются три агента, которые извлекают следующие доходы из потребления общественного продукта:

$$b_1(y) = \frac{12}{5}\ln(1 + y), \qquad b_2(y) = b_3(y) = \frac{6}{5}y\,.$$

Технология имеет УДМ:

$$c(y) = \frac{1}{2}y^2 \quad \text{для всех } y \geq 0\,.$$

Постройте ТП-игру (6) и найдите такое симметричное распределение затрат из ядра данной игры, в котором агенты 2 и 3 имеют равные доли затрат. Найдите доли затрат, соответствующие вектору Шепли и N-ядру игры (6). Найдите доли затрат, соответствующие ЭЭ и ДР. Расположите четыре вектора распределеиий затрат на отрезке, состоящем из симметричных распределений затрат из ядра.

7.2 Пропорциональные функции доходов

Рассмотрим экономику с общественным продуктом, в которой предпочтения всех агентов квазилинейны и, более того, их функции доходов пропорциональны. Существуют некоторая неотрицательная функция $b(y)$ и положительные коэффициенты $\beta_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, для которых

$$b_i(y) = \beta_i \cdot b(y) \quad \text{для всех} \quad i = 1,\dots,n \text{ и всех } y \geq 0 .$$

Предположим, что существует единственный эффектнвный уровень y^* общественного продукта.

Покажите, что существует единственное долевое равновесие и что оно совпадает с ЭЭ распределеиием. Найдите в явном виде соответствующий вектор распределения затрат.

7.3 Отсутствие ДР

Рассмотрим ВДМ технологию $c(y) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{y}$ и два квазилинейиых предпочтения

$$b_1(y) = \min\{y,1\}, \qquad b_2(y) = \min\{y,2\} .$$

Проверьте, что эффективный уровень общественного продукта есть $y^* = 2$ и что единственная доля, при которой агент 1 запрашивает y^*, есть $r_1 = 0$. Выведите отсюда, что ДР не существует.

7.4 Значение и технологическая монотонность

В экономике с общественным продуктом с квазилинейиыми предпочтениями мы можем выразить коалиционные возможности с помощью ТП-игры (6). Применяя к этой игре оператор значения, такой, как вектор Шепли или N-ядро, мы получим распределение затрат из ядра (поскольку игра (6) выпукла). Числовой пример приведен в упражнении 7.1 вопрос (b). Мы покажем, что оба этих механизма нарушают технологическую монотонность.

Рассмотрим экономику с двумя агентами

$$b_1(y) = \frac{3}{2}y, \quad b_2(y) = \min\{y, 1\},$$

$$c(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \leq 1, \quad c(y) = (y-1)^2 \quad \text{при} \quad y \geq 1.$$

Оба оператора значения распределяют кооперативную прибыль поровну. Найдите соответствующий вектор полезностей.

Далее предположим, что функция затрат возросла до $c'(y) = \max\{y/2, c(x)\}$. Найдите новые распределения, соответствующие значениям, и покажите, что ТМ нарушается.

7.5 Цены Линдала с единовременными платежами

В этом упражнении развивается замечание 7.1. Рассмотрим экономику с общественным продуктом (модель 1) с произвольной фунцией затрат. Мы ищем тариф из двух ставок, при котором каждый агент имеет дело с ценой p_i и получает единовременный платеж t единиц личного продукта (одинаковый для всех агентов). Тогда каждый агент решает задачу

$$\max_{y \geq 0} \; u_i(\omega_i - p_i \cdot y + t, \, y).$$

Равновесием (обобщенным) Линдала называется $(n+1)$-мерный вектор $(p_1, \ldots, p_n; t)$, для которого (i) спрос каждого агента равен одному и тому же уровню y^* общественного продукта, (ii) платежи в точности покрывают затраты ($\sum_i p_i y^* - nt = c(y^*)$) и (iii) доход фирмы $\sum_i p_i y - nt - c(y)$ максимален при y^*.

(a) Проверьте, что это определение приводит к эффективному распределению.

(b) Вычислите обобщенное равновесие Линдала в двух следующих экономиках с двумя участниками, имеющими квазилинейные предпочтения:

УДМ-пример: $b_1(y) = (0.8)y, \; b_2(y) = (0.2)y, \; c(y) = \frac{1}{2}y^2$.

ВДМ-пример:

$$b_1(y) = \min\{9y, 36\}, \; b_2(y) = \min\{y, 4\}, \; c(y) = 10\sqrt{y}.$$

В ВДМ-примере отметим, что при оптимальном уровне 4 существует континуум векторов цен Линдала, являющихся решениями системы

$$0 \le p_1 \le 9, \quad 0 \le p_2 \le 1, \quad p_1 + p_2 = \frac{5}{2}, \quad t = 2(p_1 + p_2) - 10 .$$

Следовательно, мы имеем континуум обобщенных равновесий Линдала.

(*c*) В каждом из приведенных примеров покажите, что обобщенное равновесие Линдала *не* содержится в ядре экономики. В ВДМ примере это означает, что один агент предпочитает отклониться от любого из распределений, соответствующих равновесиям Линдала.

7.6 Экономика с личным продуктом при идентичных предпочтениях Кобба – Дугласа

В этой экономике кукуруза - труд все агенты имеют одинаковые предпочтения:

$$u_i(\omega_i - x_i, y_i) = (\omega_i - x_i) \cdot y_i \quad \text{для всех} \quad i .$$

Они различаются только начальными запасами. Технология имеет УДМ: $c(y) = y^2$.

(*a*) Проверьте, что МЦ равновесие приводит к следующему распределению:

$$x_i = \frac{\omega_i}{2} - \frac{1}{6n} \cdot \omega_N, \quad y_i = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{\omega_i}{\sqrt{\omega_N}} + \frac{1}{3n} \sqrt{\omega_N} \right],$$

где мы обозначили $\omega_N = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$.

(*b*) Проверьте, что ЭПД распределение есть

$$x_i = \frac{1}{3}\,\omega_i, \quad y_i = \frac{\omega_i}{\sqrt{3\omega_N}} .$$

7.7 Антиядро (Мулен [1987*c*])

Будем говорить, что в экономике с личным продуктом (модель 2) допустимое распределение принадлежит *антиядру*, если (*i*) оно оптимально по Парето и (*ii*) его вектор полезностей $(u_1, \ldots, u_n)$ таков, что для любой собственной коалиции $S \underset{\neq}{\subset} N$ существует вектор полезностей $(\bar{u}_i)_{i \in S}$, допустимый для S (определение 7.2), причем $u_i \le \bar{u}_i$ для всех $i \in S$.

(*a*) Покажите, что если технология имеет (строго) ВДМ, то антиядро пусто (используйте тот факт, что функция затрат строго субаддитивна).

(*b*) Когда технология имеет УДМ, то антиядро, как правило, не пусто (см. ниже). Тем не менее МЦ равновесие может не принадлежать антиядру. Покажите это, используя числовой пример из упражнения 7.6 при $n=2$, $\omega_1=1$, $\omega_2=9$ и $S=\{1\}$.

(*c*) В примере из упражнения 7.6 проверьте, что ЭПД распределение принадлежит антиядру. Это свойство справедливо и в общем виде. Если предпочтение выпукло, а технология имеет УДМ, то ЭПД распределение принадлежит антиядру (Мулен [1987*c*]). Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.3, которое намечается в следующем упражнении.

7.8 Доказательство теоремы 7.3

Обозначим через $\bar{p}$ ЭПД цену, соответствующую заданной экономике $(u_1,\dots,u_n;\ \omega_1,\dots,\omega_n,c)$. Выберем собственную коалицию S и предположим, что вектор $(\gamma_i(\bar{p}))_{i\in S}$ допустим для S. Существует $(x_i,y_i)_{i\in S}$, для которого

$$\sum_{i\in S} x_i = c\left[\sum_{i\in S} y_i\right] \text{ и } u_i(\omega_i - x_i, y_i) \geq \gamma_i(\bar{p}) \text{ для всех } i \in S.$$

Если S имеет возражение против ЭПД распределения, то по крайней мере одно из этих неравенств должно быть строгим. Покажите, что для S существует распределение $(x'_i, y'_i)_{i\in S}$, для которого

$$\sum_{i\in S} x'_i > c\left[\sum_{i\in S} y'_i\right] \text{ и } u_i(\omega_i - x'_i, y'_i) \geq \gamma_i(\bar{p}) \text{ для всех } i \in S.$$

Обозначим $x=\sum_{i\in S} x'_i$, $y=\sum_{i\in S} y'_i$. Покажите, что выполнено неравенство $x \leq \bar{p}\cdot y$. Для любого агента j *вне* коалиции S обозначим

$$U_j = \{(x_j,y_j) \mid u_j(\omega_j - x_j, y_j) \geq \gamma_j(\bar{p})\}.$$

Проверьте, что U_j пересекается с линией $x_j=\bar{p}\cdot y_j$ (полезно нарисовать рисунок). Выведете отсюда существование такого $\lambda_j \geq 0$, что $(\lambda_j x, \lambda_j y)$ принадлежит U_j.

Далее, предполагая субаддитивность функции затрат (следствие ВДМ и $c(0)=0$), докажите, что распределение

$(x'_i, y'_i)_{i=1,\dots,n}$ (где $(x'_j, y'_j) = \lambda_j(x,y)$ для всех $j \in N \setminus S$) удовлетворяет

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i > c\left[\sum_{i=1}^{n} y'_i\right].$$

Получите отсюда противоречие с определением $\bar{p}$.

7.9 Агенты с различной производительностью

Рассмотрим экономику из примера 7.4 с произвольной технологией и агентами, отличающимися только своей производительностью. Другими словами, существуют общая функция полезности u и общий начальный запас свободного времени ω, такие что агент i получает полезность $u(\omega - x_i/\pi_i, y_i)$ от потребления y_i единиц выпуска и вложения x_i едининц ресурса. Параметр $\pi_i > 0$ – производительность. Наконец, условие допустимости имеет вид

$$\sum_i x_i = c\left[\sum_i y_i\right].$$

(a) Покажите, что при МЦ равновесии и ЭПД распределенни более квалифицированный агент получает большую полезность:

$$\pi_i > \pi_j \;\Rightarrow\; u_i\left[\omega_i - \frac{x_i}{\pi_i}, y_i\right] \geq u_j\left[\omega_j - \frac{x_j}{\pi_j}, y_j\right].$$

(b) Предположим, что функция полезиости выпукла и вторая производная u_{xy} неотрицательна (нет подчнненного продукта).

Покажите, что при МЦ равновесии и ЭПД распределении чем выше квалификация агента, тем больше он затрачивает ресурса и тем больше он получает выпускаемого продукта:

$$\pi_i > \pi_j \;\Rightarrow\; x_i > x_j \text{ и } y_i > y_j.$$

Однако это не означет, что более квалифицированный агент больше работает. При условии $\pi_i > \pi_j$ может быть

$$\text{и } x_i/\pi_i > x_j/\pi_j, \text{ и } x_i/\pi_i < x_j/\pi_j.$$

(c) При тех же предположениях, что и в вопросе (b), предположим, что есть всего два агента и производство имеет ВДМ. Покажите, что МЦ равновесие выгоднее более квалифицированному агенту, чем ЭПД распределение. *Подсказка.* Пусть p – цена, обеспечивающая МЦ равновесие (x_1, y_1, x_2, y_2). Если агент i менее квалифицирован, то обозначим через p' такую цену, для которой $\gamma_2(p') = u(\omega - x_2/\pi_2, y_2)$. Покажите последовательно, что $p' \leq p$ и затем, что $u(\omega - x_1/\pi_1, y_1) \geq \gamma_1(p')$. Выведите отсюда, что ЭПД цена $\bar{p} \geq p'$, и завершите доказательство.

Глава 8

Неманипулируемые механизмы

Обзор

Предположим, что принимающий общественное решение (в дальнейшем называемый посредником) столкнулся с конкретной задачей распределения затрат или дележа прибыли и пришел к некоторому мнению о справедливом исходе (например, он усвоил один из основных методов распределения затрат на общественный продукт из гл. 6). Все же есть еще одно препятствие на пути реализации наиболее благоприятного с его точки зрения решения. Он должен вытянуть из отдельных агентов сообщения об их предпочтениях (в данном частном примере он должен выяснить величины индивидуальных доходов от потребления общественного продукта).

Информация об индивидуальных предпочтениях есть по существу личное дело каждого агента. Даже если у меня есть ясные доказательства того, что ты предпочитаешь вино пиву, я не могу отрицать твоего права утверждать обратное.

Таким образом, юридически и практически вся информация о предпочтениях должна исходить от самих агентов. Из этого следует, что агент может оказывать влияние на реализацию исхода, фальсифицируя свои предпочтения (например, занижая или завышая доход, который он получает от общественного продукта). Конечно, он будет манипулировать только таким образом, чтобы это соответствовало его интересам.

Проблема стратегического манипулирования механизмов принятия решений последние два десятилетия оказалась в центре пристального внимания. Главная задача – найти неманипулируемый[1] механизм, т.е. механизм, при котором каждый агент, какие бы у него ни были предпочтения, имеет все некоопера-

---

[1] Английский термин *strategyproof mechanism* в буквальном переводе означает (общественный) механизм, защищенный от стратегических действий. – *Прим. ред.*

тивные основания искренне раскрыть свои предпочтения принимающему решение. На этот вопрос получен достаточно полный ответ в двух весьма простых моделях, а именно в модели общественного принятия решений с денежными платежами (которая анализируется в этой главе) и в модели голосования (которая обсуждается в разд. 10.1 и 10.2). Здесь мы опишем на некотором уровне детализации класс неманипулируемых механизмов общественного принятия решений (так называемых механизмов Гроувза), наиболее известным представителем которого является механизм ключевых агентов. Мы также коснемся более общих и гораздо более трудных вопросов стратегических манипуляций некооперативных агентов.

В самом деле, если большинство известных механизмов является манипулируемыми, то мы можем ожидать, что агенты будут манипулировать своими сообщениями (т.е. будут посылать ложные описания предпочтений). Можем ли мы по крайней мере измерить влияние этих манипуляций, сравнивая соответствующий исход некооперативного равновесия (когда каждый агент манипулирует и принимает во внимание манипуляции остальных агентов) с исходом, который является результатом правдивых неискаженных сообщений. Чем глубже вопрос, тем труднее на него ответить, потому что теория игр не дает непосредственно стратегических предсказаний в большинстве игровых ситуаций. Так, например, очень мало известно о сравнении стратегий даже для наиболее распространенных механизмов принятия решений.

В разд. 8.1 мы приводим несколько примеров некооперативных манипуляций различных механизмов, таких, как пропорциональное распределение затрат на общественный продукт (гл. 6) и добровольное вложение ресурса в регулируемую монополию (гл. 7). Никакого общего вывода мы не получим. Нашей целью является только иллюстрация разнообразия таких манипуляций в задаче простой компенсации, в которой должно быть принято не требующее затрат общественное решение и могут использоваться денежные платежи для того, чтобы вызвать правильные побудительные мотивы. Механизм ключевых агентов является неманипулируемым и выбирает эффективное (максимизирующее прибыль) общественное решение. Его главный недостаток заключается в том, что посредник накапливает некоторую бюджетную прибыль, которую он не перераспределяет между агентами. В разд. 8.3 приводится несколько вариантов механизма ключевых агентов для задачи распределения затрат.

Начиная с разд. 8.4, мы представляем несколько более абстрактных результатов о характеризации. Сначала мы анализируем неманипулируемые (вскрывающие предпочтения) механизмы в общей задаче компенсации. Мы обнаруживаем, что все такие механизмы похожи на механизм ключевых агентов в предположении, что они выбирают эффективные решения для каждого профиля. Отсюда следует, что не существует неманипулируемого механизма, полностью эффективного для каждого профиля предпочтений (теорема 8.2). В разд. 8.5 мы с аксиоматической точки зрения объясняем ведущую роль механизма ключевых агентов в классе механизмов, вскрывающих предпочтения. Поскольку анонимности и нейтральности недостаточно, чтобы выделить этот механизм, мы приводим некоторые дополнительные аксиомы.

8.1 Некооперативные манипуляции

Проиллюстрируем последствия некооперативного поведения на нескольких типичных механизмах из двух последних глав. Цель этого раздела – продемонстрировать, что такие манипуляции могут повлиять на различные механизмы, причем различным образом.

Пример 8.1. Пропорциональное распределение затрат на общественный продукт

Рассматривается распределение затрат на неделимый общественный продукт (разд. 6.2) при величине затрат $c=1$ и двух агентах. При использовании данного механизма каждого агента просят сообщить его доход b_i, $i=1,2$, далее общественный продукт производится в том и только том случае, если $b_1+b_2 \geq 1$ и затраты на него распределяются пропорционально: $x_i = b_i/(b_1+b_2)$.

Предположим, что истинные доходы суть $b_1=2$ и $b_2=0.4$. Ясно, что сообщение истинных доходов не дает некооперативного равновесия в игре с манипулированием. В самом деле, если сообщение агента 1 правдиво, то агент 2 может освободиться от своей доли затрат, сообщая $a_2 = 0$, при этом общественный продукт по-прежнему будет произведен. Аналогично, если агент 2 является искренним, то агент 1 может сообщить, что его доход является низким $a_1 = 0.6$ и при сохранении эффективного решення уменьшить свою собственную долю затрат до

$$0.6/(0.4 + 0.6) = 0.6 \le b_1/(b_1 + b_2) = 0.83.$$

Какие пары сообщений (a_1, a_2) являются возможными некооперативными исходами (равновесиями Нэша) в игре с сообщениями?

Одна такая пара – $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.2$. Общественный продукт производится, агенты платят 0.8 и 0.2 соответственно, что приводит к чистым полезностям

$$u_1 = 2 - 0.8 = 1.2, \quad u_2 = 0.6 - 0.2 = 0.4 .$$

Никто из агентов не может выиграть от уменьшения своих объявленных доходов, поскольку такое уменьшение приведет к остановке производства продукта и аннулирует выигрыш. С другой стороны, увеличивая сообщаемый доход, агент повышает свою собственную долю затрат.

Аналогичная аргументация может быть использована для любой пары a_1, a_2 некооперативных сообщений, такой, что $a_1 + a_2 = 1$, и в то же время чистые полезности каждого агента остаются неотрицательными:

$$2 - \frac{a_1}{a_1 + a_2} \ge 0, \qquad 0.4 - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \ge 0 \iff a_2 \le 0.4 .$$

В самом деле, каждому агенту гарантируется неотрицательная чистая полезность при сообщении правды. Поэтому равновесие Нэша не может приводить к отрицательным чистым полезностям.

Таким образом, каждая пара (a_1, a_2) при $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 \ge 0.6$, $a_2 \ge 0$ является равновесием Нэша в игре с сообщениями. Соответствующие доли затрат (x_1, x_2) удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \le 1$, $x_2 \le 0.4$, т.е.

это все распределения затрат при ограничении типа индивидуальной рациональности $x_i \leq \min\{b_i, c\}$.

В этом примере поведение, связанное с равновесием Нэша, крайне неопределенное, его предсказательная сила практически равна нулю (никакое доопределение концепции Нэша не может помочь сузить равновесное множество). Если агенты знают истинные доходы друг друга, то имеет место ситуация "борьбы за первый ход" (Мулен [1986*a*], гл. 2), в которой каждый игрок старается присвоить себе право первым объявить наиболее выгодную равновесную стратегию. Агент 1 хочет объявить $a_1 = 0.61$ с тем, чтобы вынудить агента 2 сообщить $a_2 = 0.39$. При этом агент 1 забирает почти всю прибыль (1.39). Аналогично агент 2 старается объявить $a_2 = 0$ и "бесплатно прокатиться" за счет производства общественного продукта агентом 1.

Выводы примера 8.1 могут быть существенно обобщены. Рассмотрим любой механизм производства общественного продукта, выбирающий распределение затрат из ядра. В игре с выяснением спроса, в которой каждый агент сообщает свой доход, любое распределение затрат из ядра соответствует некоторым равновесным по Нэшу сообщениям. Смотри упражнение 8.1, где поясняются этот и еще два аналогичных результата для дележа прибыли и в задачах простой компенсации.

Пример 8.2. Простая компенсация

Дано (конечное) множество A общественных решений, и n рассматриваемых агентов могут без всяких затрат выбрать одно из них. Предпочтения квазилинейны по решениям и деньгам. Денежные платежи служат компенсацией "проигравшим", т.е. агентам, которым не нравится эффективное для сообщества решение.

Модель чистой компенсации играет важную роль в этой главе. В нашем первом числовом примере сравниваются две возможности размещения общественной службы. Из четырех рассматриваемых городов два получат доход при размещениии в a и понесут потери при размещении в b. Остальные два города имеют противоположные предпочтения:

Номер города	1	2	3	4	
Размещение в a	+20	+15	−10	0	(1)
Размещение в b	−10	−5	+12	+4	

В таблице приведены полезности городов при двух возможных размещениях. Даны квазилинейные предпочтения, измеряющие разницу в полезностях между двумя размещениями: агент 1 готов заплатить 30, чтобы переключиться с размещения в a на размещение в b; в то же время агент 4 готов заплатить 4, чтобы поменять размещение в b на размещение в a. Без потери общности мы можем произвольно выбрать нули индивидуальных полезностей. Удобно выбрать их так, чтобы $u_i(a) + u_i(b) = 0$.

В нашем примере теперь профили предпочтений имеют вид:

Город	1	2	3	4
a	+15	+10	−11	−2
b	−15	−10	+11	+2

Эта нормализация позволяет явно поделить множество N на тех, кто предпочитает a, и тех, кто предпочитает b. За нуль полезности взята величина $\frac{1}{2}(u_i(a) + u_i(b))$, соответствующая воображаемому *status quo*, при котором решение принимается случайно с равной вероятностью (эта интерпретация требует, тем не менее, предположения о нейтральности к риску агентов, максимизирующих ожидаемый доход).

Эффективное решение максимизирует общую полезность. В нашем примере $\sum_i u_i(a) = 12 > -12 = \sum_i u_i(b)$. Рассмотрим механизм невмешательства, который выбирает эффективное решение и не предполагает никаких платежей (кроме случая, когда оба решения эффективны; в этом случае механизм приводит окончательную полезность каждого агента к нулю). Это – простейший механизм для решения задачи простой компенсации. Однако он весьма подвержен манипуляциям. Скажем, что агент i проигрывает, если он предпочитает неэффективное решение. В нашем примере проигрывают агенты 3 и 4. Проигрывающему агенту выгодно в своем сообщении завысить свое неприятие эффективного решения (в данном примере агент 3 может сообщить $v_3(a) - v_3(b) = -50$). На самом деле сообщение истинных предпочтений не является рациональным ни для какого агента. *Некоторая* инфляция при сообщении абсолютно безопасна. В теоретико-игровом смысле честное сообщение *доминируется* сообщением с инфляцией. Детали см. в упражнении 8.1.

Если агенты дают сообщение с инфляцией, то результирующее решение вполне может оказаться неэффективным, и тогда манипуляции приведут к общественным потерям. Для контраста рассмотрим эгалитарный механизм, при котором общая прибыль сверх нулевого уровня полезности распределяется между агентами. В нашем примере прибыль равна $\sum_i u_i(a) = 12$, так что каждый агент приходит к уровню полезности +3 на основе платежей

$$t_1 = -12,\ t_2 = -7,\ t_3 = +14,\ t_4 = +5\,.$$

Манипуляции эгалитарного механизма в значительной степени такие же, как и в примере 8.1. Агент минимизирует свое удовлетворение эффективным решением, но так, чтобы оно не стало выглядеть неэффективным. В нашем примере, если агенты 2, 3 и 4 сообщают правду, то агент 1 может сократить свой платеж почти на 9 при сообщении $v_i(a) = 3 + \varepsilon$, $v_i(b) = -3 - \varepsilon$, которое сохраняет эффективность решения a. Стратегию того же типа будет использовать любой манипулирующий игрок, таким образом, некооперативные манипуляции эгалитарного механизма не ведут к общественным потерям. В упражнении 8.1 это свойство сформулировано точно.

Замечание 8.1. В задаче простой компенсации решение при невмешательстве и эгалитарное решение могут быть подтверждены соответствующей аксиоматической характеризацией. Смотри Мулен [1985*b*] по приложениям децентрализуемости и Мулен [1987*d*] о систематическом сравнении этих двух решений.

В нашем следующем примере рассматривается производство делимых продуктов, т.е. регулируемые монополии, производящие либо личный, либо общественный продукт (гл. 7). Простейшие механизмы определяют индивидуальные вклады ресурса.

Пример 8 3. Добровольный вклад в регулируемую монополию

Предположим, что в экономике с общественным продуктом (модель 1 из разд. 7.1) каждый агент осуществляет добровольный вклад x_i в производство общественного продукта. Затем сумма этих вкладов используется как ресурс для производства общественного продукта. Если агенты действуют некооперативно, то этот механизм индуцирует субоптимальный уровень производства. Это справедливо при весьма общих предположениях относительно предпочтений и производственных функций. Мы дадим интуитивные представления об этом факте в простом случае, когда предпочтения агентов вогнуты и квазилинейны, а производственная функция вогнута.

Обозначим через α_i вклад агента i при условии, что он – единственный агент в экономике. Тогда α_i есть решение следующей задачи:

$$\max_{x_i \geq 0} \quad b_i(f(x_i)) - x_i, \tag{2}$$

где f – производственная функция (обратная к функции затрат). Без потери общности предположим, что агент 1 может произвести наибольший уровень общественного продукта: $\alpha_1 \geq \alpha_i$ при всех i. Тогда в любом равновесии Нэша в игре с добровольными вкладами уровень общественного продукта, как правило, равен $f(\alpha_1)$. В самом деле, рассмотрим любой вектор вкладов $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, такой что $\sum_i \bar{x}_i < \alpha_1$. Агенту 1 лучше увеличить свой вклад, поскольку решение задачи

$$\max_{x_1} \; b_1\left[f\left[x_1 + \sum_{j \neq 1} \bar{x}_j\right]\right] - x_1$$

есть $x_1 = \alpha_1 - \sum_{j \neq 1} \bar{x}_j$. Далее, если вектор $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ таков, что $\sum_i \bar{x}_i > \alpha_1$, то легко проверить, что любому агенту, который делает положительный вклад, лучше уменьшить его. Должно быть ясно, что уровень общественного продукта $y_0 = f(\alpha_1)$ гораздо ниже оптимального уровня y^*. В самом деле, если при уровне y_0 предельная полезность *одного* агента 1 уравнивает предельные затраты $(b_1'(y_0)) = c'(y_0))$, то при уровне y^* *сумма* индивидуальных предельных полезностей уравнивает предельные затраты (условие Самуэльсона (3) из гл. 7).

Обратимся теперь к регулируемой монополии, производящей личный продукт (модель 2 из разд. 7.2). Предположим, что выпуск (кукуруза) делится пропорционально вложенным ресурсам (труду). Таким образом, если агент i затрачивает x_i единиц труда, $i = 1,\dots,n$, то окончательно его полезность равна

$$u_i\left[\omega_i - x_i \frac{x_i}{x_N} f(x_N)\right], \quad \text{где} \quad x_N = \sum_{j=1}^{n} x_j .$$

В игре с добровольными вкладами ресурса выпуск, соответствующий равновесию Нэша, оптимален по Парето тогда и только тогда, когда производство имеет ПДМ. Если доходы на масштаб убывают, то производство избыточно, а если доходы на масштаб возрастают, то оно недостаточно. (Упражнение: почему?)

8.2 Неманипулируемость и механизм ключевых агентов

Механизм общественного принятия решения является неманипулируемым, если при всех возможных предпочтениях каждый агент посылает сообщение, которое является наилучшим с некооперативной точки зрения, какие бы сообщения ни посылались другими агентами. В терминах теории игр каждый агент имеет доминирующую стратегию при любом своем возможном предпочтении.

Прямым механизмом называется такой, в котором каждый агент должен непосредственно сообщить свое индивидуальное предпочтение. Прямой механизм защищен от манипулирования, если правдивое сообщение является доминирующей стратегией для каждого агента при любых индивидуальных предпочтениях. Можно показать, что если мы ограничимся рассмотрением прямых механизмов при изучении неманипулируемости, то мы не теряем общности (этот факт известен как "принцип выявления предпочтений"). Поскольку в дальнейшем в этой главе мы обсуждаем только прямые механизмы, мы будем как синонимы использовать термины неманипулируемость, правдивость и даже выявление спроса по отношению к механизмам.

Сформулируем теперь механизм ключевых агентов в задаче простой компенсации. Пусть по-прежнему у нас имеется конечное множество общественных решений A и n агентов с квазилинейными предпочтениями на пространстве решения x деньги. Рассмотрим числовой пример 8.2. Поскольку он предполагает только два решения a, b, и решение a эффективно, то мы будем называть победителями тех агентов, которые предпочитают a решению b. Механизм ключевых агентов выбирает эффективное решение и *не* дает компенсации проигравшим. С другой стороны, *некоторые* победители облагаются налогом. А именно те, кому a нравится больше, чем b, причем если этого агента отбросить, то эффективным станет решение b. Поскольку некоторые победители облагаются налогом, а проигравшие не получают компенсации, то механизм ключевых агентов может приводить к бюджетному избытку, который не перераспределяется. Эта принципиальная слабость механизма обсуждается ниже.

Скажем, что агент i является *ключевым*, если эффективное решение для агентов из $N\setminus\{i\}$ отличается от эффективного решения всех агентов. В нашем примере агент 1 является ключевым, поскольку среди {1,3,4} эффективным является размещение в b. Других ключевых агентов нет. Для коалиций {1,2,3,4}, {1,2,3} и {1,3,4} единственным эффективным размещением является a. Механизм ключевых агентов облагает агента 1 налогом, в точности равным потерям суммарной полезности для коалиции {2,3,4} при переключении с решения b на решение a:

$$x_1 = (-10 + 11 + 2) - (10 - 11 - 2) = 6 .$$

Неключевые агенты не облагаются налогом: $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Для того чтобы понять, что эта система налогов приводит к правдивому сообщению предпочтений, рассмотрим сначала агента 1. Любое сообщение, которое не меняет эффективного решения (размещение в a), не приносит ни выгоды, ни убытков, поскольку его налог не меняется. Любое сообщение, приводящее к тому, что размещение в b выглядит эффективным, отменяет этот налог, но приводит к потерям полезности в 30 единиц. Рассмотрим далее агента 3. Если он преувеличивает свою неприязнь к размещению в a (скажем, сообщая $v_3(a) = -25$, $v_3(b) = 25$) так, чтобы размещение в b выглядело эффективным, то он будет облагаться налогом, который в точности равен потерям коалиции {1,2,3,4} при переключении с решения a на решение b: $x_3 = (15 + 10 - 2) - (-15 - 10 + 2) = 46$.

Такой большой налог обесценит доход от потребления при решении b (а именно +22). Аналогичным образом проводятся рассуждения для агентов 2 и 4.

Для точной формулировки механизма ключевых агентов нам понадобятся некоторые определения.

Определение 8.1. *Дана квазилинейная задача компенсации с множеством N из n индивидуальных агентов, которые совместно выбирают* **общественное решение** *из конечного множества A. Решение a является общественным, поскольку никакой индивидуальный агент не может быть отстранен от его потребления (хотя его мнение может игнорироваться в процессе выбора); решение также не требует затрат. Таким образом,* **исходом** *является пара (a,t), где $a \in A$ и $t = (t_i)_{i \in N}$ – вектор денежных платежей.*

Предпочтения агентов аддитивно сепарабельны по общественному решению и деньгам и линейны по деньгам. Итак, предпочтения агента i описываются вектором u_i из E^A, поэтому полезность исхода (a,t) для него равна $u_i(a) + t_i$

Обозначим через **1** вектор из E^N, все компоненты которого равны 1. Тогда два вектора u_i, v_i из E^A такие, что $v_i = u_i + a$ для некоторого действительного числа a, представляют одно и то же предпочтение на множестве исходов и потому могут быть отождествлены. Свойство (3) в приведенном ниже определении учитывает этот момент, постулируя, что нуль функции полезности агента не играет никакой роли.

Определение 8.2. *Для данных конечных (N,A)* **механизмом** *называется отображение, ставящее в соответствие каждому профилю полезностей $u = (u_i)_{i \in N}$, $u_i \in E^A$, исход $(a(u),t(u))$, причем это отображение не зависит от индивидуального нуля полезности:*

для всех $i \in N$ и всех профилей u,v, таких что $v_i = u_i + a \cdot 1$ для некоторого действительного числаа и $v_j = u_j$ при всех $j \neq i$ имеем: $a(u) = a(v)$, $t(u) = t(v)$. (3)

Механизм **эффективен**, *если он выбирает эффективное общественное решение для всех профилей*:

$a(u)$ – *эффективное общественное решение*:

$$\sum_{i \in N} u_i(a) = \max_{b \in A} \left\{ \sum_{i \in N} u_i(b) \right\}.$$

Механизм является **допустимым**, *если* $t(u)$ *не приводит к дефициту ни при каком профиле*:

$$\sum_{i \in N} t_i(u) \leq 0 .$$

Заметим, что эффективный и допустимый общественный механизм может приводить к бюджетиому избытку и потому к потере первоначальной оптимальности по Парето. С точки зреиия агентов бюджетный избыток есть цена, которую оии должны заплатить за согласование интересов (теорема 8.2).

Определение 8.3. *Механизм* $(a(\cdot), t(\cdot))$ **защищен от манипулирования**, *если для каждого профиля* $u = (u_j)_{j \in N}$, *любого агента* i *и функции полезности* $v_i \in E^A$ *агент* i *не выигрывает от сообщения* v_i *вместо своей истинной функции полезности* u_i:

$$u_i(a(u)) + t_i(u) \geq u_i(a(v_i, u_{-i})) + t_i(v_i, u_{-i}) . \qquad (4)$$

Механизм ключевых агентов был введен в начале 70-х годов Кларком [1971] и Гроувзом [1973] и вызвал значительный интерес в литературе по общественной экономике: см. Грин, Колберг и Лафон [1976], Тайдман и Туллок [1976] и монографию Грина и Лафоиа [1979]. Мы представляем в первую очередь задачу принятия общественного решения, не требующего затрат.

В механизме ключевых агентов каждый агеит сообщает свою полезность, затем принимается эффективное решение (исходя из максимизации общей полезности). Накоиец, каждый агент облагается налогом, в точности равным потерям, которые несут остальные агенты в связи с его присутствием, т.е. разнице в их общей полезиости между выбранным решением и решением, которое они бы выбрали, если бы его присутствие попросту игнорировалось.

Лемма 8.1. *Механизм ключевых агентов – это такой механизм, что для каждого профиля u решение $a(u)$ является эффективным общественным решением и*

$$t_i(u) = \sum_{j\neq i} u_j(a(u)) - \max_{b\in A} \left\{\sum_{j\neq i} u_j(b)\right\} = u_{N\setminus i}(a(u)) - \max_A u_{N\setminus i}. \tag{5}$$

Этот механизм является эффективным, допустимым и защищенным от манипулирования.

Для профилей u, для которых существует несколько эффективных общественных решений, несколько исходов (a,t) могут быть выбраны так, чтобы они удовлетворяли условию (4). Все они приводят для каждого агента к одному и тому же окончательному уровню полезности:

$$S_i^* = \max_A \left\{\sum_{j=1}^{n} u_j\right\} - \max_A \left\{\sum_{j\neq i} u_j\right\} = \max_A u_N - \max_A u_{N\setminus i} \tag{6}$$

Доказательство. Для проверки допустимости достаточно показать, что для каждого профиля u

$$\sum_{i=1}^{n} S_i^*(u) \leq \max_A u_N.$$

В силу (5) это означает, что

$$(n-1) \max_A u_N \leq \sum_{i=1}^{n} \max_A u_{N\setminus i}.$$

Выберем эффективное решение $a(u)$ (максимизирующее u_N):

$$(n-1) \max_A u_N = (n-1) u_N(a) = \sum_{i=1}^{n} u_{N\setminus i}(a) \leq \sum_{i=1}^{n} \max_A u_{N\setminus i}.$$

Для проверки неманипулируемости фиксируем профиль u, агента i и сообщение $v_i \in E^A$. Обозначим $a(u) = a$, $a(v_i, u_{-i}) = b$. Ввиду (5) неравенство (4) имеет вид:

$$u_i(a) + u_{N\setminus i}(a) - \max_A u_{N\setminus i} \geq u_i(b) + u_{N\setminus i}(b) - \max_A u_{N\setminus i}.$$

QED

Главный недостаток механизма ключевых агентов состоит в бюджетном избытке, который он порождает для всех профилей, при которых хотя бы один агент является ключевым. Тем не менее если все коалиции из $n-1$ агентов согласны с одним и тем же эффективным решением (т.е. если есть некоторое решение, которое любой коалицией из $n-1$ агентов считается эффективным), то никакой агент не будет ключевым, и механизм порождает полностью эффективный исход. При большом числе агентов такая ситуация является вполне правдоподобной: см. Грин, Лафон [1979] и Роб [1982].

Интересно сравнить механизм ключевых агентов и эгалитарный способ дележа прибыли, предложенный в Дубинс [1977] и проиллюстрированный в примере 8.2.

Определение 8.4. *Эгалитарный механизм выбирает для каждого профиля эффективное решение и следующие платежи:*

$$t_i(u) = -u_i(a(u)) + \frac{1}{n}\sigma, \qquad (7)$$

где σ – общая прибыль по сравнению со "средней" полезностью

$$\sigma = \max_A u_N - \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} u_N(a). \qquad (8)$$

Как мы отмечали в примере 8.2, этот механизм не защищен от манипулирования. Исходы, соответствующие равновесиям Нэша, – это все исходы, при которых каждый агент получает не меньше своей средней полезности $(1/|A|)\sum_{a\in A} u_i(a)$ (см. упражнение 8.1). Таким образом, если прибыль σ мала, то эгалитарный механизм хорошо препятствует манипуляциям. На самом деле когда σ равна нулю, то правдивые сообщения являются детермиинированным исходом игры (игра несущественна в очеиь сильном смысле, см. Мулеи [1986*a*], гл. 2). С другой стороны, если σ достаточно мала, то почти каждый агент может оказаться ключевым, и потому механизм ключевых агентов является весьма расточительным.

В противоположность этому представим себе ситуацию, когда все индивидуальные агенты согласны с некоторым наилучшим решением и, значит, механизм ключевых агентов является полностью эффективным. В то же время если прибыль σ достаточно велика, то манипуляции эгалитарного механизма приводят к весьма непредсказуемым результатам.

Другое сравнение этих двух механизмов основано на *гарантированном уровне полезности*, а именно на том уровне полезности, который агент может гарантировать себе, если он участвует в данном механизме. При эгалитарном механизме гарантированный уровень полезности агента i равен в точности $(1/|A|)\sum_{a\in A}u_i(a)$. При механизме ключевых агентов он равен только $\min_{a\in A} u_i(a)$ (см. лемму 8.2).

8.3 Неманипулируемое распределение затрат

Обсудим сначала задачу распределения затрат при производстве неделимого общественного продукта (разд. 6.2), для которой легко можно адаптировать механизм ключевых агентов.

Пример 8.4. Распределение затрат на неделимый общественный продукт

Рассмотрим неделимый общественный продукт с затратами c и доходами агентов $b_1,\dots,b_n$. Посмотрим на эту ситуацию как на задачу компенсации (определение 8.1) с двумя решениями: решение $a=0$ – *status quo* (не производить продукт), решение $a=1$ – продукт произвести, и затраты поделить поровну между n агентами. Механизм ключевых агентов выглядит так.

Каждый агент сообщает свой доход b_i.

(i) если $\sum_{i\in N} b_i \le c$, то продукт не производится.

Агент i ничего не платит, если $\sum_{j\ne i} b_j \le \frac{n-1}{n}c$;

в противном случае, он платит $|t_i| = \sum_{j\ne i} b_j - \frac{n-1}{n}c$;

(9)

(ii) если $\sum_{i\in N} b_i > c$, то продукт производится. Агент i

платит $\frac{c}{n}$, если $\sum_{j\ne i} b_j \ge \frac{n-1}{n}c$; иначе он

платит $|t_i| = \frac{c}{n} + \left[\frac{n-1}{n}c - \sum_{j\ne i} b_j\right]$.

Это в точности соответствует формуле (5) при $u_i(0)=0$ и $u_i(1)=b_i-c/n$:

$$(i)\ b_N \le c \Rightarrow a(u)=0,\ t_i(u) = 0 - \max\left\{b_{N\setminus i} - \frac{n-1}{n}c,\ 0\right\};$$

(10)

$$(ii)\ b_N > c \quad \Rightarrow \quad a(u)=1,$$

$$t_i(u) = b_{N\setminus i} - \frac{n-1}{n}c - \max\left\{b_{N\setminus i} - \frac{n-1}{n}c,\ 0\right\} =$$
$$= -\max\left\{\frac{n-1}{n}c - b_{N\setminus i},\ 0\right\}.$$

Заметим, что механизм ключевых агентов не предлагает какого-то оригинального распределения затрат. Он просто имеет в виду некоторое фиксированное (в нашем случае равномерное) распределение затрат и устанавливает дополнительный налог для каждого ключевого агента, т.е. для агента, отсутствие которого привело бы к другому решению. Сверхналог на ключевого агента является тяжелым. В самом деле, он равен полной величине потерь общей полезности остальных агентов от присутствия ключевого агента (но он не используется для их компенсации).

Бюджетный избыток измеряет отступление от (первоначальной) оптимальности по Парето нашего механизма. Если мы имеем дело с достаточно малым числом агентов, то эта величина может быть значительной. В самом деле, при двух агентах бюджетный избыток может превышать общую кооперативную прибыль от осуществления проекта. Предположим, например, что $c = 4$, $b_1 = 1$ и $b_2 = 3.5$. Тогда эффективное решение состоит в том, чтобы производить продукт, который приносит $1 + 3.5 - 4 = 0.5$ долларов прибыли. Поскольку агент 2 является ключевым (так как $b_1 < c/2$), то он должен заплатить дополнительно $c/2 - b_1 = 1$ доллар. Таким образом, чистый баланс состоит в потере 50 центов по сравнению с начальным неэффективным решением! Механизм ключевых агентов может быть аналогичным образом адаптирован для любой задачи принятия общественного решения, в которой затраты приписаны каждому общественному решению: см. упражнение 8.3.

Пример 8.4 демонстрирует главный недостаток механизма ключевых агентов. Хотя он и выбирает эффективное решение, но его платежи не являются бюджетно сбалансированными. Теорема 8.2 из следующего раздела показывает, что этот недостаток бюджетного баланса является общим свойством: полностью эффективный механизм не может быть защищенным от манипулирования. Во втором приближении мы позволим механизму выбирать неэффективное решение, но потребуем, чтобы бюджет был сбалансированным. Можно легко построить много таких механизмов, например, в контексте примера 8.4 рассмотрим прямой механизм, при котором агенты сообщают свои доходы b_i, после чего

(i) если $b_i \geq c/n$ для всех $i \in N$, то общественный продукт производится и каждый агент платит c/n;

(ii) если $b_i < c/n$ хотя бы для одного агента i, то общественный продукт не производится и никто ничего не платит.

Другие примеры неэффективных механизмов, защищенных от манипулирования, обсуждаются в упражнении 8.5 и в примере 10.2 для задачи производства делимого общественного продукта. Наш следующий пример – экономика с квазилинейными предпочтениями, в которой производится делимый общественный продукт.

Пример 8.5. Распределение затрат на делимый общественный продукт

Технология производства имеет ПДМ $cy = y$ (цена на общественный продукт равна 1), и есть n агентов с пропорциональными функциями доходов $b_i(y) = \beta_i\sqrt{y}$, $i = 1,\ldots,n$.

Эффективный уровень общественного продукта равен $y^* = \frac{1}{4}\beta_N^2$, где мы обозначили $\beta_N = \sum_{i=1}^n \beta_i$. Решение с маргинальным ценообразованием и решение по эгалитарному эквиваленту рекомендуют одно и то же распределение затрат $c_i = \frac{1}{4}\beta_i \cdot \beta_N$. Прямой механизм, в котором каждый агент сообщает β_i и при котором получается исход $(y^*, c_1, \ldots, c_n)$, *не* является защищенным от манипулирования. Агентам свойственно стремление к преуменьшению своего удовлетворения от потребления общественного продукта. При сообщениях, соответствующих единственному равновесию Нэша, уровень производимого общественного продукта оказывается гораздо ниже социально оптимального уровня (детали приведены в упражнении 8.2). Для того чтобы снять это недоразумение, Гроувз и Лоеб [1975] предложили следующий механизм.

Механизм Гроувза – Лоеба. Каждый агент сообщает свой параметр β_i. Затем производится $y^* = \frac{1}{4}\beta_N^2$, и доля затрат агента i вычисляется так:

$$x_i = \frac{1}{4}\beta_i^2 + \frac{1}{2(n-2)} \sum_{\substack{j,k \neq i \\ j<k}} \beta_j \cdot \beta_k . \tag{11}$$

Проверим сначала, что доли затрат (11) в точности покрывают затраты на y^*:

$$\sum_i x_i = \frac{1}{4}\left[\sum_i \beta_i^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{j<k} \beta_j \cdot \beta_k = \frac{1}{4}\left[\sum_i \beta_i\right]^2 = c(y^*) .$$

Далее докажем, что агент i не имеет побудительных мотивов сообщать что-нибудь, кроме правды. Предположим, что сообщения других агентов суть α_j при $j \neq i$. Тогда сообщение α_i агента i приводит к уровню $y(\alpha_i, \alpha_{-i}) = \frac{1}{4}(\alpha_N)^2$ и к доле затрат $x_i(\alpha_i, \alpha_{-i})$, заданной в силу (11) (где каждое β_j заменено на α_j). Таким образом, его задача максимизации полезности имеет вид:

$$\max_{\alpha_i \geq 0} \{\beta_i \cdot \sqrt{y(\alpha_i, \alpha_{-i})} - x_i(\alpha_i, \alpha_{-i})\} = \max_{\alpha_i \geq 0} \{ \frac{1}{2}\beta_i \cdot \alpha_N - \frac{1}{4}\alpha_i^2 - \theta\} , \tag{12}$$

где остаток θ не зависит от α_i (поскольку $2(n-2)\theta = \sum_{j,k \neq i, j<k} \beta_j \cdot \beta_k$). Решение задачи (12) совпадает с решением следующей задачи:

$$\max_{\alpha_i \geq 0} \{ \beta_i \cdot (\alpha_i + \alpha_{N \setminus i}) - \frac{1}{2}\alpha_i^2 \} ,$$

а значит, $\alpha_i = \beta_i$, что и требовалось доказать.

Механизм (12) действительно замечательный. Он одновременно делает правдивое сообщение доминирующей стратегией каждого агента при любом значении параметров (неманипулируемость), приводит к эффективному уровню общественного продукта и в точности покрывает затраты (сбалансированность бюджета). В действительности в конкретной экономике этого примера данный механизм однозначно характеризуется защищенностью от манипулирования, оптимальностью по Парето (эффективный уровень общественного продукта плюс баланс бюджета) и анонимностью; см. упражнение 8.4.

С другой стороны, механизм Гроувза – Лоеба не в состоянии гарантировать какого-либо ограниченного минимального уровня полезности индивидуальным агентам. В самом деле, рассмотрим окончательный уровень полезности агента i при правдивых сообщениях агентов $(\beta_1,\dots,\beta_n)$:

$$u_i(\beta_1,\dots,\beta_n) = \frac{1}{2}\beta_i\cdot\beta_N - \frac{1}{4}\beta_i^2 - \frac{1}{2(n-2)}\sum_{\substack{j,k\neq i\\ j<k}}\beta_j\cdot\beta_k .$$

Ясно, что при фиксированном β_i эта полезность может стать отрицательной и даже неограниченно малой. Например, положим $\beta_j = \lambda$ при всех $j \neq i$ и вычислим

$$u_i(\lambda,\dots,\lambda,\beta_i,\lambda,\dots,\lambda) = \frac{1}{4}\,\beta_i^2 + \frac{1}{2}(n-1)\beta_i\cdot\lambda - \frac{1}{4}(n-1)\lambda^2.$$

Когда λ равно $3\beta_i$, то эта полезность уже отрицательна ($u_i = -\frac{1}{2}(n-1)\,\beta_i^2$), а если λ неограниченно растет, то u_i стремится к $-\infty$.

Таким образом, участвуя в механизме Гроувза – Лоеба, агент не гарантирует себе даже начального нулевого уровня полезности, когда общественный продукт не производится и не осуществляются никакие денежные платежи. Более того, если он предполагает, что общественный продукт ему нравится намного меньше, чем другим агентам, то он может ожидать, что налог будет очень тяжелым и что нет верхней границы тому платежу, который он возможно должен будет заплатить! Отсутствие *индивидуальной рациональности* является существенным недостатком механизма Гроувза – Лоеба: какой смысл сообщать правдивые предпочтения, когда общественный посредник имеет право на неограниченные принудительные налоги?

Существование защищенного от манипулирования и полностью эффективного механизма в предыдущем примере является весьма удивительным. Мы покажем (замечание 8.3), что при различном выборе функции затрат (или функции доходов) такой механизм, как правило, не существует, но мы должны сначала во всей полноте охарактеризовать класс неманипулируемых механизмов.

8.4 Класс механизмов, выявляющих предпочтения

Класс неманипулируемых и эффективных механизмов для задачи простой компенсации есть просто обобщение механизма ключевых агентов.

Теорема 8.1 (Грин и Лафон [1979]). *Для любого $i \in N$ обозначим через $h_i(u_{-i})$ произвольную действительную функцию, определенную для всех $u_{-i} \in (E^A)^{N \setminus \{i\}}$. Рассмотрим механизм $(a(\cdot), t(\cdot))$, для которого*

$$a(u) \text{ – эффективное решение при каждом профиле } u \tag{13}$$
$$t_i(u) = u_{N \setminus i}(a(u)) - h_i(u_{-i}) \text{ при каждом профиле } u \text{ и при всех } i \in N.$$

Этот механизм защищен от манипулирования. Обратно, любой неманипулируемый и эффективный механизм может быть записан в данном виде.

Доказательство. Защищенность от манипулирования механизма (13) доказывается так же, как и для случая механизма ключевых агентов (лемма 8.1). Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $(a(\cdot), t(\cdot))$ – неманипулируемый и эффективный механизм. Обозначим

$$k_i(u) = u_{N \setminus i}(a(u)) - t_i(u) \text{ для любого } u \text{ и всех } i \in N.$$

Мы хотим показать, что k_i действительно не зависит от $u_i \in E^A$.

Фиксируем u_{-i} и используем неравенство неманипулируемости (4) для профиля (u_i, u_{-i}) и (неточного) сообщения v_i:

$$u_i(a(u_i)) + t_i(u_i) = u_N(a(u_i)) - k_i(u_i) \geq$$
$$\geq u_N(a(v_i)) - k_i(v_i) = u_i(a(v_i)) + t_i(v_i).$$

Заметим, что для простоты мы опустили u_{-i} в $a(u_i, u_{-i})$, $t_i(v_i, u_{-i})$ и так далее. Предыдущее неравенство переписывается в виде

$$u_N(a(u_i)) - u_N(a(v_i)) \geq k_i(u_i) - k_i(v_i). \tag{14}$$

Предположим теперь, что $a(u_i) = a(v_i)$. Из (14) и симметричного неравенства, в котором u_i и v_i меняются ролями, мы получаем $k_i(u_i) = k_i(v_i)$. Таким образом, для всех $b \in A$ обозначим через $k_i(b)$ общее значение $k_i(u_i)$ для всех u_i, для которых $a(u_i) = b$ (u_{-i} остается неизменным).

Выберем далее два решения b, b' и построим функцию полезности u_i, для которой

$$u_N(b) = u_N(b') \geq u_N(c) + 1 \quad \text{для всех } c \neq b, b'.$$

Затем определим v_i^ε, w_i^ε как

$$v_i^\varepsilon(b) = u_i(b) + \varepsilon, \qquad v_i^\varepsilon(c) = u_i(c) \quad \text{для всех } c \neq b,$$

$$w_i^\varepsilon(b') = u_i(b') + \varepsilon, \qquad w_i^\varepsilon(c) = u_i(c) \quad \text{для всех } c \neq b'.$$

Для всех положительных ε единственное эффективное решение при $(v_i^\varepsilon, u_{-i})$ $((w_i^\varepsilon, u_{-i}))$ есть b (b'), и следовательно, из эффективности механизма вытекает $a(v_i^\varepsilon) = b$ $(a(w_i^\varepsilon) = b')$. Используя (14) для профиля $(v_i^\varepsilon, u_{-i})$ и (неточного) сообщения w_i^ε, получаем

$$(v_i^\varepsilon + u_{N\setminus i})(b) + (v_i^\varepsilon + u_{N\setminus i})(b') \geq k_i(b) - k_i(b').$$

При ε, стремящемся к нулю, с учетом $u_N(b) = u_N(b')$ имеем $k_i(b) - k_i(b') \leq 0$. Меняя ролями b и b', получаем симметричное неравенство и, значит, $k_i(b) = k_i(b')$, что завершает доказательство независимости k_i от u_i.

QED

Замечание 8.2. Более общий результат К. Робертса [1979] дает характеризацию всех защищенных от манипулирования механизмов независимо от того, эффективен механизм или нет. Каждый такой механизм выбирает решение, максимизирующее некоторое взвешенное среднее индивидуальных полезностей (если только оно не выбирает одно и то же решение для всех профилей). В квазилинейном случае это вовсе не является привлекательным. Упражнение 8.9 описывает класс механизмов Робертса.

Теперь мы докажем, что в классе неманипулируемых эффективных механизмов нет механизма, сбалансированного по бюджету. Таким образом, первоначальная оптимальность по Парето не согласуется с требованием защищенности от манипулирования.

Теорема 8.2 (Грин и Лафон [1979]). *Не существует защищенного от манипулирования эффективного и сбалансированного по бюджету механизма.*

Доказательство. Фиксируем иеманипулируемый и эффективный механизм $(a(\cdot),t(\cdot))$ с платежами вида (13) при иекоторых функциях h_i, $i \in N$. Бюджетный баланс имеет вид

$$\sum_{i\in N} t_i(u) = 0 \iff \sum_{i\in N} h_i(u_{-i}) = \sum_{i\in N} u_{N\setminus i}(a(u)) = (n-1)\max_A u_N.$$

Положим $\theta(u) = \sum_{i\in N} h_i(u_{-i})$. Эта функция удовлетворяет следующему разностному уравнению.

Обозначим через $S = \{1,2\}^N$ множество отображений σ из N в $\{1,2\}$. Определим также $\varepsilon(\sigma) = \sum_{i\in N}\sigma(i)$. Выберем далее два профиля u^1,u^2 из $(E^A)^N$ и определим профиль u^σ:

$$u_i^\sigma = u_i^{\sigma(i)} \quad \text{для всех } i \in N.$$

Приведем теперь разностное уравнение, характеризующее все фуикции $\theta(u)$, представимые в виде n функций, зависящих только от $n-1$ переменных.

$$\sum_{\sigma\in S}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\,\theta(u^\sigma) = 0\,. \tag{15}$$

Это уравнение имеет место при любом выборе u^1,u^2. Нам нужно проверить, что функция $\lambda(u) = \max_A u_N$ не удовлетворяет (15). Это легко сделать при $n = 2,3$. Для произвольного n пара u^1,u^2 строится следующим образом. Фиксируем два решения a,b и определим

$$u_i^1(a) = 1,\ \ u_i^1(b) = 1 + \frac{1}{n},\ \ u_i^1(c) = 0 \text{ для всех } i \in N,\ \ c \neq a,b\,,$$
$$u_i^2(a) = 1,\quad u_i^2(b) = u_i^2(c) = 0\,.$$

Для даниого элемента σ из S вычислим

$$\max_A u_N^1 = u_N(b) = n+1,\ \ \max_A u_N^\sigma = u_N^\sigma(a) = n \text{ для остальных } \sigma.$$

Таким образом,

$$\sum_{\sigma\in S}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\theta(u^\sigma) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k\left[\max_A u_N^\sigma\right] =$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\, C_n^k + (-1)^n(n+1) = (-1)^n \neq 0$$

QED

Замечание 8.3. Как же нам удалось при справедливости теоремы 8.2 обнаружить в примере 8.5 немаиипулируемый, эффективный и сбалансированный по бюджету механизм? Это произошло потому, что мы выбрали специальиую конфигурацию из (i) ограничеииого класса функций полезности с единственным неизвестным параметром и из (ii) хорошо подобранной фуикции затрат.

Лафон и Маскин [1980] сформулировали общие необходимые условия существоваиия таких оптимальных по Парето и защищенных от манипулирования механизмов. Мы опишем их подход для простого примера 8.5.

Рассмотрим те же функции доходов $b_i(y) = \beta_i \sqrt{y}$ и выпуклую возрастающую функцию затрат $c(y)$. Мы хотим охарактеризовать функции затрат, при которых существуют неманипулируемые, эффективиые и сбалансированные по бюджету механизмы. Мы уже знаем, что $c(y) = y$ – одна из таких функций, и хотим узнать, какие функции еще возможны.

Пусть $(a(\cdot), t(\cdot))$ – неманипулируемый, эффективный и сбалансированный по бюджету механизм. Эффективное решение при профиле $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ максимизирует вогнутую фуикцию $\beta_N \cdot \sqrt{y} - c(y)$. Значит, если не прииимать во виимаиие граничиые случаи, оио является решением

$$\sqrt{y} \cdot c'(y) = \frac{\beta_N}{2}. \tag{16}$$

Обозначим через α функцию, обратную к $\sqrt{y} \cdot c'(y)$:

$$\sqrt{y} \cdot c'(y) = x \iff y = \alpha(x). \tag{17}$$

Таким образом, иаш механизм принимает решение $a(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \alpha(\beta_N/2)$. Далее, используем условие иеманипулируемости

$$\beta_i \cdot \sqrt{\alpha\left[\frac{\beta_N}{2}\right]} + t_i(\beta) \ge \beta_i \sqrt{\alpha\left[\alpha_i + \frac{\beta_{N \setminus i}}{2}\right]} + t_i(\alpha_i, \beta_{-i}).$$

Правая часть, рассматриваемая как функция от $\alpha_i \ge 0$, достигает максимума при $\alpha_i = \beta_i$.

Предполагая, что t_i дифференцируема по β_i (это предположение может быть сиято, на результат это не повлияет), получаем

$$\frac{1}{4} \beta_i \frac{\alpha'(\beta_N/2)}{\sqrt{\alpha(\beta_N/2)}} + \frac{\partial t_i}{\partial \beta_i}(\beta) = 0. \tag{18}$$

Обозначим через Г первообразную функции $\sqrt{\alpha(x/2)}$ по переменной x. Тогда функция

$$\bar{t}_i(\beta) = \Gamma(\beta_N) - \beta_i \sqrt{\alpha\left[\frac{\beta_N}{2}\right]}$$

является одним из решений уравнения (18). Любое другое решение имеет вид

$$t_i(\beta) = \bar{t}_i(\beta) + h_i(\beta_{-i}) .$$

Это полностью характеризует эффективные и неманипулируемые механизмы. Осталось определить, возможен ли баланс бюджета. Для этого требуется найти n функций h_i, для которых

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{t}_i(\beta) + h_i(\beta_{-i})) + c\left[\alpha\left[\frac{\beta_N}{2}\right]\right] = 0$$

или, эквивалентно,

$$n\Gamma(\beta_N) - \beta_N \cdot \sqrt{\alpha\left[\frac{\beta_N}{2}\right]} + c\left[\alpha\left[\frac{\beta_N}{2}\right]\right] = -\sum_{i=1}^{n} h_i(\beta_{-i}) . \tag{19}$$

В этой формуле левая часть есть функция только от $(\beta_1 + \ldots + \beta_n)$. Функция в правой части аддитивно представлена в виде функций от $n-1$ переменных. Вновь предполагая дифференцируемость, получаем, что ее смешанная производная порядка n должна быть равна нулю:

$$\frac{\partial^n}{\partial\beta_1 \ldots \partial\beta_n}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i(\beta_{-i})\right] = 0 . \tag{20}$$

Для функции вида $f(\beta_1 + \ldots + \beta_n)$ смешанная производная порядка n является в точности производной порядка n функции f: $f^{(n)}(\beta_1 + \ldots + \beta_n)$ Таким образом, (19) и (20) вместе приводят к тому, что функция

$$f(x) = n \cdot \Gamma(x) - x \cdot \sqrt{\alpha\left[\frac{x}{2}\right]} + c\left[\alpha\left[\frac{x}{2}\right]\right]$$

имеет $f^{(n)}(x)$ равную нулю. Следовательно, f есть многочлен степени не более $n-1$, а его производная f' – многочлен степени не более $n-2$. Вычислим f', принимая во внимание (17):

$$f'(x) = (n-1)\sqrt{\alpha\left[\frac{x}{2}\right]} - \frac{x}{4}\frac{\alpha'(x/2)}{\sqrt{\alpha(x/2)}} + \frac{1}{2}c'\left[\alpha\left[\frac{x}{2}\right]\right] \cdot \alpha'\left[\frac{x}{2}\right] =$$

$$= (n-1)\sqrt{\alpha\left[\frac{x}{2}\right]} - \frac{1}{2}\alpha'\left[\frac{x}{2}\right]\cdot\left\{c'\left[\alpha\left[\frac{x}{2}\right]\right] - \frac{x}{2\sqrt{\alpha(x/2)}}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = (n-1)\sqrt{\alpha\left[\frac{x}{2}\right]}\,.$$

Мы заключаем, что функция $\sqrt{\alpha(x)}$ должна быть многочленом степени не выше $n-2$. Это существенно ограничивает класс допустимых функций затрат. Например, при $n=3$ существуют такие фиксированные параметры λ, μ, γ, что

$$\alpha(x) = (\lambda x + \mu)^2 \Rightarrow \sqrt{y}\cdot c'(y) = \frac{1}{\lambda}(\sqrt{y} - \mu) \Rightarrow c(y) = \frac{1}{\lambda}y - 2\frac{\mu}{\lambda}\sqrt{y} + \gamma\,,$$

т.е. мы имеем дело с трехпараметрическим семейством. При n агентах класс допустимых функций затрат имеет n независимых параметров.

Таким образом, в задаче производства общественного продукта полностью эффективных и защищенных от манипулирования механизмов, вообще говоря, не существует. Тем не менее можно построить механизмы, аналогичные тому, который описан в примере 8.5, в которых единственное равновесие Нэша в сообщениях приводит к полностью эффективному исходу: см. Гроувз и Ледьярд [1977], Гурвиц [1979] и Ким [1986].

8.5 Характеризации механизма ключевых агентов

Что выделяет механизм ключевых агентов из класса механизмов, описанных в теореме 8.1, так называемых механизмов Гроувза (см. Гроувз [1973])?

Один из возможных ответов состоит в том, что механизм ключевых агентов гарантирует наибольший минимальный уровень полезности.

Лемма 8.2 (Мулен [1986*b*]). *Пусть $S_i^*(u)$ – окончательная полезность агента i при профиле u для механизма ключевых агентов (заданного в* (6)). *Фиксируем агента i и его функцию полезности u_i. Тогда*

$$\min_{u_{-i}} S_i^*(u_i, u_{-i}) = \min_{A} u_i\,. \tag{21}$$

Обратно, пусть $S_i(u)$ – окончательная полезность агента i

при профиле u для некоторого неманипулируемого, допустимого и эффективного механизма. Если выполнено условие

$S_i(u) \geq \min\limits_A u_i$ *для всякого профиля u и агента i,* (22)

то этот механизм является механизмом ключевых агентов.

Доказательство. Для данного агента i и функции полезности u_i выберем u_{-i} так, что $u_{N\setminus i} = -u_i$. Тогда

$$S_i^*(u_i, u_{-i}) = \max_A u_N - \max_A u_{N\setminus i} = 0 - \max_A (-u_i) = \min_A u_i. \quad (23)$$

Более того, для произвольной пары векторов z, w из E^A имеем

$$\max_A (z + w) \geq \max_A z + \min_A w.$$

Применяя это неравенство при $z = u_{N\setminus i}$ и $w = u_i$ для произвольного профиля, получаем

$$S_i^*(u) = \max_A u_N - \max_A u_{N\setminus i} \geq \min_A u_i. \quad (24)$$

Формулы (23) и (24), взятые вместе, доказывают справедливость (21). Докажем обратное утверждение. Пусть $S_i(u)$ такое, как в утверждении леммы. По теореме 8.1 S_i имеет вид

$$S_i(u) = \max_A u_N - h_i(u_{-i}).$$

По предположению (22) имеем

$$h_i(u_{-i}) \leq \max_A u_N - \min_A u_i.$$

Фиксируя u_{-i} и выбирая $u_i = -u_{N\setminus i}$, получаем

$$h_i(u_{-i}) \leq -\min_A (-u_{N\setminus i}) = \max_A u_{N\setminus i}. \quad (25)$$

Следовательно, $S_i(u) \geq S_i^*(u)$ при любом профиле u и для любого агента i. Остается показать, что все эти неравенства суть равенства. Это будет следовать из допустимости S.

Итак, нам нужно показать, что (25) на самом деле является равенством. Фиксируем профиль u_{-i} для $n-1$ агентов, и пусть при решении b значение $u_{N\setminus i}$ максимально. Тогда построим полезность u_i так, чтобы $u_{N\setminus j}$ было максимально в b при всех $j \in N$ (это возможно, если выбрать $u_i(c) = 0$ при всех $c \neq b$ и положить $u_i(b)$ достаточно большим). Тогда при профиле (u_i, u_{-i}) никакой агент не является ключевым, и вектор полезностей $(S_i^*(u), i \in N)$ оптимален по Парето. В силу допустимости $(S_i(u), i \in N)$ отсюда следует, что $S_i(u) = S_i^*(u)$:

$$u_N(b) - h_i(u_{-i}) = S_i(u) = S_i^*(u) = u_i(b) .$$

Значит, $h_i(u_{-i}) = u_{N\setminus i}(b) = \max_A u_{N\setminus i}$, что и требовалось доказать.

QED

В упражнении 8.7 представлена альтернативная характеризация механизма ключевых агентов, при которой верхняя граница полезности агента используется вместо нижней границы (как в лемме 8.2).

Другое желательное свойство механизма ключевых агентов состоит в том, что он рассматривает симметрично агентов (анонимность) и общественные решения (нейтральность).

Определение 8.5. *Пусть $(a(\cdot), t(\cdot))$ – механизм (определение 8.2). Обозначим через S_i, $i \in N$, окончательную полезность агента i:*

$$S_i(u) = u_i(a(u)) + t_i(u) .$$

Скажем, что механизм является **анонимным**, *если $S = (S_i)_{i \in N}$ – симметричное отображение $u_i, i \in N$: если v получен из u заменой u_i на u_j, то $S_i(u) = S_j(v)$ и $S_k(u) = S_k(v)$ при всех $k \neq i, j$. Скажем, что механизм является* **нейтральным**, *если для любой биекции σ множества A имеем*

$$S_i(u) = S_i(u^{\sigma}) ,$$

где u_j^{σ} определено из условия $u_j^{\sigma}(a) = u_j(\sigma(a))$.

Непосредственно можно проверить, что механизм ключевых агентов является анонимным и нейтральным. Рассмотрим теперь класс неманипулируемых и эффективных механизмов (механизмы Гроувза), охарактеризованных в теореме 8.1. Если внутри этого класса дополнительно потребовать выполнение анонимности и нейтральности, то это приведет к ограничениям на выбор функций платежей (13). В самом деле, они примут вид

$$t_i(u) = u_{N\setminus i}(a(u)) - h(u_{-i}) ,$$

где функция h симметрична относительно всех своих переменных и нейтральна.

Вопрос: если такой механизм к тому же должен быть допустимым, получим ли мы механизм ключевых агентов? В случае двух агентов ($n = 2$) ответ является положительным. В самом деле, условие допустимости записывается как

$$t_1(u) + t_2(u) = (u_2(a(u)) - h(u_2)) + (u_1(a(u)) - h(u_1)) \le 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad \max_A \{u_1 + u_2\} \le h(u_1) + h(u_2)\,,$$

последнее неравенство эквивалентно $\max_A u_i \le h(u_i)$ (положим $u_1 = u_2$), что в свою очередь приводит к

$$t_1(u) = u_2(a(u)) - h(u_2) \le u_2(a(u)) - \max_A u_2 = t_1^*(u)\,,$$

где $t_1^*(u)$ – платеж, который требуется произвести по механизму ключевых агентов. Следовательно, наш механизм в действительности доминируется по Парето (или совпадает с) механизмом ключевых агентов. Он также выбирает эффективное решение, но облагает всех агентов более тяжелыми налогами. Даже если существует несколько эффективных решений, каждый агент всегда выигрывает при использовании механизма ключевых агентов:

$$S_1(u) = \max_A (u_1 + u_2) - h(u_2) \le \max_A (u_1 + u_2) - \max_A (u_2) = S_1^*(u)\,.$$

Таким образом, для задач с двумя агентами, в которых желательны анонимность и нейтральность, механизм ключевых агентов не имеет серьезных сопе̂рников. Этот вывод, однако, не сохраняется, если агентов три или более.

Лемма 8.3 (Мулен [1986б])

(i) *Если агентов только два, то любой неманипулируемый, эффективный, допустимый и анонимный механизм доминируется по Парето (или совпадает с) механизмом ключевых агентов.*

(ii) *Если агентов три или более, то существуют неманипулируемые, эффективные, допустимые, анонимные и нейтральные механизмы, которые при некоторых профилях дают более низкий бюджетный избыток, чем механизм ключевых агентов:*

$$\sum_{i\in N} S_i^*(u) < \sum_{i\in N} S_i(u) \le \max_A \left[\sum_{i\in N} u_i\right] \text{ для некоторого профиля } u.$$

Доказательство утверждения (i) пояснено ранее. Заметим, что предположение нейтральности не является необходимым. Доказательство утверждения (ii) подробно обсуждается в упражнении 8.7 на примере.

Наконец, механизм ключевых агентов может быть выделен из класса механизмов Гроувза с помощью единственной аксиомы, основанной на изменении состава участников. Решение a выбирается как чистый общественный продукт, от потребления которого не может быть отстранен ни один агент. Тогда агент имеет возможность отказаться от участия в механизме и "бесплатно прокатиться" на решении, принятом остальными игроками. Ясно, что он теряет при этом возможность влиять на выбор решения, но зато избавлен теперь от налога. Второе может перекрыть первое, и нашему агенту может оказаться выгоднее быть "зайцем", чем участником.

При механизме ключевых агентов быть "зайцем" никогда не выгодно. В самом деле, фиксируем профиль u и агента i. Для каждого решения a, эффективного для ограниченного сообщества $N\backslash i$, проверим, что

$$u_i(a) \le S_i^*(u) = \max_A u_N - \max_A u_{N\backslash i}.$$

Поскольку $\max_A u_{N\backslash i} = u_{N\backslash i}(a)$, то предыдущее неравенство очевидно.

Мулен [1986b] доказал обратное утверждение: в классе механизмов Гроувза (неманипулируемых, эффективных и допустимых) только механизм ключевых агентов не дает побудительных мотивов агенту становиться "зайцем". Доказательство намечено в упражнении 8.7.

Упражнения

8.1 Равновесие Нэша в сообщениях при бинарных решениях

(a) Рассмотрим задачу распределения затрат на неделимый общественный продукт как в примере 8.1. Рассмотрим прямой механизм, в котором каждый агент сообщает свой доход a_i.

Затраты c на общественный продукт известны посреднику. Если $\sum_i a_i < c$, то продукт не производится, и никто не должен ничего платить. Если $\sum_i a_i \geq c$, то продукт производится, и доля затрат агента i равна $x_i(a,c)$, причем

$$0 \leq x_i(a,c) \leq \min\{a_i, c\}.$$

Покажите, что любое распределение затрат из ядра задачи $(b_1,\ldots,b_n,c)$ с *истинными* значениями параметров соответствует исходу, порожденному равновесием Нэша. Покажите, что при других равновесиях Нэша сообщения таковы, что продукт не производится.

(b) Рассмотрим механизм дележа прибыли из разд. 6.1, при котором каждый агент сообщает свои полные затраты γ_i (истинные его полные затраты равны c_i). Общий доход от кооперации равен r. Механизм приписывает не предпринимать кооперативных действий, если $\sum_i \gamma_i > r$. С другой стороны, если $\sum_i \gamma_i \leq r$, то кооперация имеет место, и агент получает долю $y_i(\gamma,r)$:

$$\sum_i y_i(\gamma,r) = r, \quad y_i(\gamma,r) \geq \gamma_i \quad \text{для всех } i.$$

Найдите равновесие Нэша в сообщениях, если истинная задача дележа такова: $(c_1,\ldots,c_n,r)$ при $\sum_i c_i \leq r$.

(c) Рассмотрим квазилинейную задачу компенсации из определения 8.1, но только при двух решениях a,b, как в примере 8.2. Проверьте, что при механизме невмешательства и при том, что истинная полезность агента i есть $u_i(a) = u_i$ (и $u_i(b) = -u_i$), сообщение $2u_i$ (т.е. $v_i(a) = 2u_i$, $v_i(b) = -2u_i$) доминирует правдивое сообщение.

(d) В той же задаче, что и в вопросе (c), рассмотрим эффективный прямой механизм, который гарантирует нулевой уровень полезности каждому агенту (в предположении, что он сообщает правду). Покажите, что векторы полезностей, соответствующие равновесиям Нэша, являются эффективными распределениями полезности, при которых каждый агент получает неотрицательную (истинную) полезность.

(e) Обобщите результаты вопросов (c) и (d) для квазилинейной задачи компенсации с произвольным числом общественных решений.

8.2 Манипуляции при пропорциональном распределении затрат из примера 8.5

Рассмотрим прямой механизм, при котором каждый агент сообщает α_i (истинное значение его параметра равно β_i) Получается следующий исход:

уровень общественного продукта $y=\frac{1}{4}\alpha_N^2$,
доли затрат $c_i=\frac{1}{4}\alpha_i\cdot\alpha_N$.

Покажите, что вектор сообщений $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ является равновесием Нэша при истинных параметрах $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ тогда и только тогда, когда

$$\text{при всех } i \quad \alpha_i=\begin{cases}\beta_i-\frac{1}{2}\alpha_{N\setminus i} & \text{при } \beta_i\geq\frac{1}{2}\alpha_{N\setminus i},\\ 0 & \text{при } \beta_i<\frac{1}{2}\alpha_{N\setminus i}.\end{cases}$$

Покажите, что если все β_i почти одинаковы (в том смысле, который делает точным приведенное далее утверждение), то уровень общественного продукта, соответствующий равновесию Нэша, в $\{(n+1)^2/4\}$ раз меньше, чем эффективный уровень.

Теперь мы во всей полноте опишем единственное решение предыдущей системы. Предположим, что агенты ранжированы так, что $\beta_1\geq\beta_2\geq\ldots\geq\beta_n$. Покажите, что существует единственное целое t, $1\leq t\leq n$, для которого

$$\beta_{t+1}\leq\frac{1}{t+1}\cdot\left[\sum_{i=1}^{t}\beta_i\right]<\beta_t.$$

Затем покажите, что единственное решение нашей системы имеет вид

$$\alpha_i=\begin{cases}2\left[\beta_i-\frac{1}{t+1}\left\{\sum_{j=1}^{t}\beta_j\right\}\right] & \text{для } i=1,\ldots,t,\\ 0 & \text{для } i\geq t+1.\end{cases}$$

Выведите отсюда, что при равновесии Нэша производство общественного продукта всегда субоптимально, если хотя бы у двух агентов параметры β_i положительны.

8.3 Механизм ключевых агентов с затратами

Имеются n агентов и конечное множество A общественных решений. Каждому решению a соответствуют затраты $c(a)$. Полезности, как всегда, квазилинейны. Условие бюджетного баланса и условие допустимости имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} t_i + c(a) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i + c(a) \le 0 .$$

Определим механизм ключевых агентов следующим образом:

решение $a(u)$ максимизирует $\left[\sum_{i=1}^{n} u_i - c\right]$ на A,

платеж агента i: $t_i = \sum_{j\ne i} u_j(a(u)) - c(a(u)) - \max_{a\in A}\left\{\sum_{j\ne i} u_j - \frac{n-1}{n} c\right\}$.

Проверьте, что этот механизм является допустимым и защищенным от манипулирования. Проверьте, что он совпадает с механизмом ключевых агентов при $c = 0$. Для каких профилей этот механизм дает сбалансированность бюджета?

Вычислите, к чему приводит этот механизм в следующем примере:

	u_1	u_2	u_3	c
a	0	8	−5	0
b	−4	0	+10	+5
d	0	12	0	+9
e	3	−7	+15	+15

8.4 Сравнение механизма ключевых агентов с механизмом Гроувза – Лоеба из примера 8.5

Рассмотрим неманипулируемый и эффективный механизм, вскрывающий параметры β_i. Итак, каждый агент сообщает β_i. Затем производится общественный продукт на уровне $\frac{1}{4}\beta_N^2$, и каждый агент выплачивает долю затрат $x_i(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $i = 1,\dots,n$.

(a) Покажите, что функции x_i имеют вид

$$x_i(\beta_1,\dots,\beta_n) = \frac{1}{4}\beta_i^2 + h_i(\beta_{-i})$$

(можно использовать теорему 8.1, убедившись, что решение означает производство некоторого уровня общественного продукта u равномерные затраты на него; можно также дать прямое доказательство).

(b) Предположим, что наш механизм является анонимным (определение 8.5) и сбалансированным по бюджету. Покажите тогда, что он совпадает с механизмом Гроувза – Лоеба.

(c) Покажите, что механизм ключевых агентов с затратами (см. упражнение 8.3) соответствует следующим налогам (покрывающим затраты на общественный продукт и иногда дающим прибыль):

$$x_i(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \frac{1}{4}\left[\beta_i^2 + \frac{1}{n-1}\cdot\{\beta_{N\setminus i}\}^2\right].$$

Проверьте, что если все агенты, кроме i, имеют один и тот же параметр $\beta_j = \lambda$, то налог агента i в механизме ключевых агентов и в механизме Гроувза – Лоеба одинаков. Таким образом, механизм ключевых агентов не приводит к улучшению гарантированного уровня полезности по сравнению с механизмом Гроувза – Лоеба.

8.5 Сбалансированные по бюджету, но неэффективные механизмы (Шампсор и Роше [1983])

Имеются два агента, которые должны выбрать некоторый уровень общественного продукта y, $0 \le y \le 1$. Затраты равны $c(y) = y$, а функции дохода линейны:

$$b_i(y) = b_i \cdot y \quad \text{для всех } y,\ 0 \le y \le 1.$$

Предположим, что $0 \le b_i \le 1$, $i = 1,2$, и рассмотрим следующий механизм:

Каждый агент сообщает свою маргинальную полезность b_i.
Если $b_1 + b_2 < 1$, то общественный продукт не производится: $y = 0$ и $x_1 = x_2 = 0$.
Если $b_1 + b_2 \ge 1$, то продукт производится в количестве $y = b_1 + b_2 - 1$, и доли затрат на него равны

$$x_1 = \frac{1}{2}(u_1^2 - (u_2 - 1)^2), \quad x_2 = \frac{1}{2}(u_2^2 - (u_1 - 1)^2).$$

(a) Покажите, что этот механизм является неманипулируемым, сбалансированным по бюджету и индивидуально-рациональным (полезность агента i не может быть ниже, чем в начальной позиции $y = 0$, $x_i = 0$). Покажите, тем не менее, что этот механизм не эффективен.

(b) Для каждого профиля (b_1, b_2) вычислите избыток, порождаемый данным механизмом (потери в совокупной полезности по сравнению с первоначальными исходами). Сравните эту функцию избыточных потерь с той, которая имеется в механизме ключевых агентов (адаптированном с учетом затрат, как в упражнении 8.3).

8.6 Неманипулируемые механизмы с решением status quo

Даны A, N, как в теореме 8.1, и фиксированное решение a_0 из A. Рассмотрим неманипулируемый и эффективный механизм $(a(\cdot), t(\cdot))$, гарантирующий уровень полезности, как при решении a_0 (оно интерпретируется как *status quo*) для каждого агента:

$$u_i(a(u)) + t_i(u) \geq u_i(a_0) \text{ для всех } i \in N \text{ и любого профиля } u.$$

Покажите, что этот механизм не является допустимым и что его бюджетный дефицит по крайней мере в $n-1$ раз превышает кооперативную прибыль при a_0:

$$\sum_{i \in N} t_i(u) \geq (n-1)\left[\max_A (u_N) - u_N(a_0)\right].$$

8.7 Две характеризации механизма ключевых агентов (Мулен [1986*b*])

Обозначения, как в лемме 8.2.

(*a*) Покажите, что максимальный уровень полезности агента i при механизме ключевых агентов соответствует тому, что принимается наиболее благоприятное для него решение без затрат:

$$\max_A S_i^*(u_i, u_{-i}) = \max_A u_i.$$

(*b*) Рассмотрим допустимый, эффективный и неманипулируемый механизм, удовлетворяющий следующему неравенству:

$$S_i(u) \leq \max_A u_i \quad \text{для всех } i \text{ и любого } u$$

(где $S_i(u)$ – окончательная полезность агента i при профиле u). Докажите, что наш механизм доминируется по Парето или совпадает с механизмом ключевых агентов:

$$S_i(u) \leq S_i^*(u) \quad \text{для всех } i \text{ и любого } u.$$

(c) *Аксиома отсутствия "зайцев".* Для каждого возможного сообщества N задан механизм $(a^N(\cdot), t^N(\cdot))$. Аксиома отсутствия "зайцев" утверждает следующее:

$$\text{для всех } N,\ i \in N, \text{ любого профиля } u \in (E^A)^N$$
$$u_i(a^N(u)) + t_i^N(u) \geq u_i(a^{N\setminus i}(u_{-i})) .$$

Она говорит о том, что агенту i выгоднее принимать участие в механизме, чем "бесплатно прокатиться" на решении, которое примут остальные агенты в его отсутствие. Мы уже отмечали, что механизм ключевых агентов удовлетворяет условию отсутствия "зайцев" (см. конец разд. 8.5). Обратно, покажите, что если механизм является неманипулируемым, эффективным, допустимым и удовлетворяет условию отсутствия "зайцев", то он должен совпадать с механизмом ключевых агентов.

Подсказка. По теореме 8.1 такие механизмы имеют вид (13). Используйте условие отсутствия "зайцев" при $u_i = 0$ и выведите, что $h_i(u_{-i}) \leq \max_A\{u_{N\setminus i}\}$. Докажнте обратное неравенство, фиксируя произвольный профиль u_{-i} для $N\setminus i$ и определив u_i так, что все $u_{N\setminus j}$, $j \in N$, имеют одно и то же эффективное решенне.

8.8 Доказательство леммы 8.3 (Мулен [1986*b*])

Имеются два решення $A = \{a, b\}$ и три агента. Рассмотрим механизм, заданный в (13), со следующимн функциями $h_i(u_{-i})$:

$$h_i = h \quad \text{при } i = 1,2,3,\ h(u_2, u_3) = \max_A \{u_2 + u_3\} + k\,(u_2, u_3)\,,$$

где

$$k(u_2, u_3) = \begin{cases} -\min\{|\delta_2|, |\delta_3|\} & \text{при } \delta_2 \cdot \delta_3 \leq 0 \\ 2\min\{|\delta_2|, |\delta_3|\} & \text{прн } \delta_2 \cdot \delta_3 \geq 0 \end{cases}$$

н

$$\delta_i = u_i(a) - u_i(b)\ .$$

Другими словамн, на агента накладывается более тяжелый налог, чем в случае механизма ключевых агентов, если другне два агента одинаково сравнивают a и b. Еслн они сравннвают решения по-разному, то наш агент облагается меньшнм налогом, чем в случае механизма ключевых агентов (может быть он даже субсидируется).

(a) Проверьте, что этот механнзм анонимен и нейтрален.

(*b*) Обозначим через $BS(u)$ бюджетный избыток для нашего механизма:

$$BS(u) = \max_A u_N - \sum_{i=1}^{3} S_i(u) = \sum_{i=1}^{3} h(u_{-i}) - 2 \max_A u_N .$$

Проверьте, что величина $BS(u)$ неотрицательна для всех профилей (допустимость). Найдите профили, для которых $BS(u) = 0$, в то время как $BS^*(u) > 0$ (бюджетный избыток механизма ключевых агентов). Найдите профили, для которых $BS^*(u) = 0$, в то время как $BS(u) > 0$.

Подсказка. Предположите без потери общности, что $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3$ и рассмотрите три случая: (1) $\delta_i \geq 0$ при всех i; (2) $\delta_1, \delta_2 \geq 0$, $\delta_3 \leq 0$ и (3) $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2, \delta_3 \leq 0$. В случае (2) рассмотрите еще три подслучая в соответствии со знаками $\delta_1 + \delta_3$ и $\delta_2 + \delta_3$.

8.9 Механизмы Робертса (К. Робертс [1979])

Обозначения из определения 8.2.

Даны A, N, фиксированная функция полезности $u_0 \in E^A$ и положительный вектор весов $\lambda \in E_+^N$, $\lambda_i > 0$ при всех $i \in N$. Рассмотрим механизм $(a(\cdot), t(\cdot))$, определенный следующим образом:

для каждого профиля u решение $a(u)$ максимизирует

$$u_0 + \sum_{i \in N} \lambda_i u_i \text{ на } A;$$

для всех u и всех i

$$t_i(u) = \frac{1}{\lambda_i} \left[u_0(a(u)) + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j(a(u)) \right] - h_i(u_{-i}) .$$

Покажите, что этот механизм защищен от манипулирования. Обратно, К. Робертс [1979] показал, что если A содержит три или более решений, то этот класс содержит по существу все неманипулируемые механизмы.

Часть IV

Голосование и коллективный выбор

Глава 9

Голосование большинством голосов и методы подсчета очков

Обзор

"Демократия как метод управления использует итоги общественных решений граждан на выборах и решений законодателей в представительных органах" (Рикер [1982], с. 21). В самом деле, большинство общественных распределенных решений (таких, как налоги и общественные расходы) принимается на основе голосования. Выборы также используются для пополнения многих общественных учреждений. Здесь мы имеем важные примеры чистых общественных продуктов (например, все граждане данного города без каких-либо исключений участвуют в "потреблении" своего мэра), выбираемых на основе голосования и без побочных платежей.

Начиная с политической философии Просвещения, выбор правил голосования являлся главной этической проблемой, связанной с далеко идущими приложениями для функционирования большинства политических институтов. Дебаты о справедливости различных методов голосования начались с исследований де Борда [1781] и Кондорсе [1785]. В 1952 году Эрроу предложил формальную модель, которая в течении трех десятилетий анализировалась в многочисленных работах математической ориентации по так называемому коллективному выбору (см. Эрроу [1963]). В них исследовались свойства различных правил голосования с аксиоматической точки зрения. Предметом ч. IV является обсуждение наиболее важных исследований в области коллективного выбора.

Формально правило голосования решает задачу коллективного принятия решения, в которой несколько индивидуальных агентов (выборщиков) должны совместно выбрать один из нескольких исходов (также называемых кандидатами), относительно которых их мнения расходятся. В этой главе мы будем предполагать, что конечное множество N выборщиков должно избрать одного кандидата из конечного множества A (другие возможности мы обсуждаем в гл. 10). Для простоты предположим, что индивидуальные мнения (или предпочтения) не допускают случаев безразличия. Каждое такое предпочтение есть произвольный линейный порядок на A (т.е. полное транзитивное и асимметричное бинарное отношение). Это предположение не приводит к существенным потерям общности.

Правило голосования представляет собой систематическое решение, во всей полноте опирающееся на индивидуальные мнения. Обозначим через $L(A)$ множество линейных порядков на A, тогда правило голосования есть отображение $L(A)^N$ в A. То, что правило голосования может быть определено для любой мыслимой конфигурации предпочтений, выражает фундаментальный принцип свободы мнений: каждый выборщик имеет право ранжировать кандидатов любым самым сумасшедшим образом, как только ему нравится. Однако в некоторых моделях голосования, содержащих экономические переменные или неопределенные исходы, можно обоснованно предполагать, что предпочтения выборщиков удовлетворяют некоторому общему условию. Это особенно удобно при стратегическом анализе голосования и при агрегировании предпочтений (см. разд. 10.3 и 11.6).

Правило голосования выбирает кандидата на основе сообщенных порядковых предпочтений и только на основе этих предпочтений. В этом существенное отличие от моделей, обсуждаемых в ч. I–III, в которых деньги и другие делимые продукты позволяли осуществлять произвольно малые компенсации для агентов. Голосование не допускает компромисса между двумя кандидатами иначе, чем за счет возможного избрания третьего кандидата. В этой главе мы обсуждаем реальные правила голосования, откладывая до последней главы разбор знаменитой теоремы Эрроу о невозможности. Эта теорема, как мы увидим, указывает на аксиоматические недостатки, которые являются общими для всех правил голосования. Более реалистичный подход состоит в том, что здесь мы ищем практические правила голосования, которые могут быть рекомендованы исходя из *каких-либо* теоретических соображений.

Если кандидатов только два, то обычное правило голосования большинством голосов бесспорно является наиболее справедливым методом. Этот принцип большинства – исходный пункт процесса демократического принятия решений. Он был явно сформулирован два века назад, а его основа является гораздо более древней (см. исторический обзор Лео Мулена [1953]). Аксиоматическая формализация принципа большинства предложена в Мэй [1952]. Теорема Мэя (теорема 11.1) говорит о том, что выборы большинством голосов – единственный метод, который является анонимным (равноправие выборщиков), нейтральным (равноправие кандидатов) и монотонным (усиление поддержки кандидата не может подвергать сомнению его избрание). Рассмотрим голосование с тремя или более кандидатами.

Какое правило голосования является адекватным продолжением голосования по принципу большинства для пар кандидатов? Первое, что приходит в голову, это правило относительного большинства: каждый выборщик записывает имя (ровно) одного кандидата в своем избирательном бюллетене. Выигрывает кандидат, получивший наибольшее количество голосов. Это правило является самым популярным правилом голосования. Оно подвергалось значительной критике с двух сторон, что в значительной степени и породило современную школу исследования правнл голосования. Как Борда, так и Кондорсе заметили, что правило относительного большинства может приводить к избранию плохого кандидата, точнее такого кандидата, который в парном сравнении по правилу большииства проигрывает *любому* другому кандидату. Соответствующий пример обсуждается в разд. 9.1.

Для того чтобы преодолеть этот недостаток, Кондорсе и Борда предложили отказаться от правила отиосительного большинства, причем каждый из них предложил свое правило взамен данного. То, что правило относительного большинства все еще широко используется, дает нам представление о том, с какой скоростью эти теории прокладывают себе путь в реальный мир.

Кондорсе предложил выбирать кандидата, который побеждает любого другого кандидата в парном сравнении, если такой *победитель по Кондорсе* существует. Борда предложил приписать очки каждому кандидату, линейно возрастающие в зависимости от его ранга в предпочтении выборщика. Затем он предложил избрать кандидата, получившего наибольшее суммарное количество очков у всех выборщиков. Эти две идеи приводят к двум наиболее важным семействам правил голосования, а именно к методам, состоятельным по Кондорсе (те правила, которые выбирают победителя по Кондорсе, если такой существует, и определены произвольно в противном случае), и к методам подсчета очков (с произвольно заданной системой очков по рангам). В гл. 9 эти два семейства критически сравниваются.

В разд. 9.1 и 9.2 мы показываем, сколь сильно могут отличаться исходы этих правил голосования, и проверяем их основные свойства эффективности и равноправия. Одним из таких свойств является аксиома монотонности (разд. 9.2). Правило голосования называется монотонным, если кандидат *остается* выбранным при усилении его поддержки (т.е. когда относительная позиция данного кандидата в чьих-то предпочтениях улучшается, а относительные позиции других кандидатов не меняются). Все методы подсчета очков являются монотонными, но некоторые известные методы, проистекающие из подсчета очков, не являются таковыми. Примерами таких правил служат весьма популярное правило относительного большинства с выбыванием и метод альтернативных голосов.

В разд. 9.3 мы формулируем две аксиомы, которые приводят к критике состоятельных по Кондорсе правил (поскольку данные правила нарушают эти аксиомы). С другой стороны, на этих аксиомах основана характеризация метода подсчета очков. Эти аксиомы сравнивают кандидатов, избранных различными группами избирателей. Они называются свойствами пополнения и участия. Пополнение означает, что если две непересекающиеся группы избирателей (например, сенат и палата представителей) избирают одного и того же кандидата *a*, то объединение этих двух избирательных органов подтвердит избрание *a*. Участие означает, что выборщик не может выиграть, воздерживаясь от голосования, в сравнении с возможностью участвовать в голосовании и искренне высказать свои предпочтения. Удивительно, что *любое* состоятельное по Кондорсе правило нарушает обе эти аксиомы (теоремы 9.2 и 9.3). В противоположность этому правила подсчета очков по существу характеризуются свойством пополнения (теорема 9.4 Янга) и удовлетворяют аксиоме участия. Теорема Янга в настоящее время является наиболее существенным доводом в поддержку методов подсчета очков, в частности системы очков Борда.

Несмотря на то, что в разд. 9.3 они были подвергнуты критике, все же состоятельные по Кондорсе правила голосования чрезвычайно популярны, в частности, благодаря простоте доводов парного сравнения по правилу большинства. Соответствующий класс состоятельных по Кондорсе методов основан на последовательных сравнениях по правилу большинства. Законопроект и многочисленные поправки к нему в конгрессе США голосуются именно таким образом. Мы покажем, что известный метод последовательного исключения может нарушать условие оптимальности по Парето. Другие методы, основанные на бинарных деревьях парных сравнений по правилу большинства, противоречат аксиоме монотонности. Простейшее правило, основанное на последовательном сравнении и являющееся оптимальным по Парето и монотонным, называется многоэтапным методом исключения. При использовании этого метода требуется меньше парных сравнений, чем в других, концептуально более простых методах, например в правиле Копленда. По последнему правилу избирается тот, кто выигрывает большинство парных дуэлей. Таким образом, голосование, основанное на последовательных парных сравнениях, может удовлетворять наиболее важным аксиоматическим требованиям, но только в том случае, если мы выберем эту последовательность аккуратным образом.

9.1 Кондорсе против Борда

Если кандидатов более двух, то наиболее популярным методом голосования является правило относительного большинства.

Правило относительного большинства. Каждый выборщик отдает свой голос наиболее предпочтительному для себя кандндату. Избирается кандидат, упомянутый в наибольшем количестве бюллетеней (как принимается решение в случае равенства голосов, пока для нас неважно).

Это правило уважает волю большинства в том смысле, что если большинство выборщиков считает какого-то кандидата наилучшим, то он и побеждает. Более глубокий анализ показывает, что правило относительного большинства может противоречить мнению большинства. Приведем рассуждения Кондорсе. Рассмотрим ситуацию с 21 выборщиком, 4 кандидатами и следующим *профилем* предпочтений:

3	5	7	6	
a	a	b	c	
b	c	d	b	(1)
c	b	c	d	
d	d	a	a	

Эта таблица читается так: три выборщика имеют порядок $a > b > c > d$, пять имеют порядок $a > c > b > d$ и т. д. По правилу относительного большинства побеждает a (8 голосами). Но, говорит Кондорсе, в действительности a является *наихудшим* кандидатом для явного большинства выборщиков (13). Это большинство предпочитает любого кандидата кандидату a. Более того, большинство (из 14 других выборщиков) считает c лучше, чем d, и большинство (еще из 11 выборщиков) считает c лучше, чем b. Таким образом, утверждает Кондорсе, если мы хотим остаться верными мнению большинства, то на самом деле должен быть избран кандидат c.

Рассматривая тот же самый профиль (1), Борда соглашается с Кондорсе, что a – плохой кандидат для избрания, но предлагает другого победителя, а именно b. Он хочет принять во внимание ранги всех кандидатов в предпочтениях выборщиков. Если я ставлю кандидата на первое место, то это должно помочь ему больше, чем если бы я поставил его на второе место.

Сравниваем b и c по (1). Замечаем, что b имеет первый ранг у 7 выборщиков (против 6 у *c*); *b* имеет первый или второй ранг у 16 выборщиков (против 11 у *c*) и *b* имеет первый, второй или третий ранг у всех выборщиков (как и *c*). Значит, *b* должно быть отдано предпочтение в сравнении с *c*. На самом деле Борда предлагает определенный способ учета рангов с помощью подсчета очков линейно убывающих относительно ранга.

Определение 9.1. Правило Борда. *Каждый выборщик объявляет свои предпочтения, ранжируя p кандидатов от лучшего к худшему (безразличие запрещается). Кандидат не получает очков за последнее место, получает одно очко за предпоследнее и так далее, получает* $p-1$ *очков за первое место. Побеждает кандидат с наибольшей* **суммой** *очков. Он называется* **победителем по Борда.**

Мы опять же не уточняем, как поступать при равенстве очков. Определим теперь состоятельность по Кондорсе.

Определение 9.2. *Для заданного профиля предпочтений* **победителем по Кондорсе** *называется кандидат a (с необходимостью единственный), который побеждает любого другого кандидата при парном сравнении по правилу большинства:*

для всякого $b \neq a$ *выборщиков, считающих a лучше b, больше, чем тех, кто считает, что b лучше a.*

Состоятельное по Кондорсе правило выбирает победителя по Кондорсе, если такой существует.

Ясно, что следует называть худшим по Борда (худшим по Кондорсе) кандидата с наименьшим числом очков Борда (кандидата, проигрывающего любому другому кандидату при парном сравнении по правилу большинства).

Заметим сначала, что правило Борда действительно является правилом голосования (при заданной процедуре выбора кандидата для любого профиля при равенстве очков). В то же время состоятельность по Кондорсе определяет избираемого кандидата только для части профилей, а именно для тех профилей, для которых победитель по Кондорсе существует. Если победителя по Кондорсе нет, т.е. мы имеем конфигурацию предпочтений, называемую иногда парадоксом Кондорсе, то парные сравнения по правилу большинства образуют цикл. Рассмотрим типичный пример такого профиля:

$$\begin{array}{ccc} 8 & 7 & 6 \\ a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{array} \qquad (2)$$

при котором для 14 агентов (из 21) a лучше b, для 15 агентов b лучше c и для 13 – c лучше a.

Отсутствие победителя по Кондорсе есть знаменитый "парадокс голосования". Вообще говоря, нет ничего парадоксального в цикле парных сравнений по правилу большинства, поскольку каждой паре сравнения в цикле соответствует свое множество выборщиков, составляющих большинство (как в только что приведенном примере). Сразу же после того, как Кондорсе предложил понятие победителя, он осознал возможность циклов и привел аналогичный пример.

Как часто может наблюдаться парадокс голосования? Политологи обычно считают его редким явлением, хотя известен целый ряд исторических ситуаций, когда он наблюдался и влиял на ход событий. Смотри блестящую книгу Рикер [1982], в частности гл. 7 и 9. С математической точки зрения можно оценить вероятность парадокса при предположении "беспристрастности". Зафиксируем количество выборщиков, скажем три, и кандидатов тоже, скажем три. Припишем случайное предпочтение каждому выборщику. Каждый выборщик может иметь один из шести возможных порядков кандидатов a,b,c с равной вероятностью. Пусть далее предпочтения выборщиков совместно независимы (никто не оказывает влияния на мнение другого). При этих предположениях вероятность того, что победителя по Кондорсе не существует, равна только 0.056. Чтобы убедиться в этом, фиксируем предпочтение выборщика 1, например, $a > b > c$. Тогда парадокс возникает в том и только том случае, если выборщики 2 и 3 имеют предпочтения $b > c > a$ и $c > a > b$, все равно у кого какое. Это дает вероятность $\frac{1}{18}$.

В общем случае вероятность $\pi(p,n)$ того, что победителя по Кондорсе не существует при p кандидатах и n выборщиках, возрастает по p и возрастает по числу выборщиков от n до $n+2$. Это может быть проверено на основе вычисления $\pi(n,p)$ для малых значений n и p, но в общем случае это утверждение остается недоказанным предположением (см. Келли [1986]). Вероятность парадокса растет достаточно быстро при больших p, как это показано в табл. 9.1.

Таблица 9.1 *Вероятность отсутствия победителя по Кондорсе*

Число кандидатов	Число выборщиков 3	5	7	9	11		Предел
3	0.05	0.069	0.075	0.078	0.080	...	0.088
4	0.111	0.139	0.150	0.156	0.160	...	0.176
5	0.160	0.200	0.215	0.230	0.251	...	0.251
6	0.202	0.255	0.258	0.284	0.294	...	0.315
7	0.239	0.299	0.305	0.342	0.343	...	0.369
...	...	...	...	...	...	...	...
Предел	1	1	1	1	1		1

При $5 < n$, $p < +\infty$ даны приближенные оценки.
Источник: Фишберн [1973], с. 95.

Таким образом, парадокс голосования становится почти достоверным событием, когда число кандидатов становится достаточно большим при фиксированном n. Если число выборщиков становится достаточно большим при фиксированном p, то предельная вероятность $\pi(p)$ может быть оценена по Фишберн [1984]:

$$\pi(p) = \frac{p+0.2}{p+9.53} - (0.63)^{(p-3)/2},$$

которая справедлива с точностью до половины процента при $p \le 50$. Конечно, предположение о беспристрастности является весьма нереалистичным для больших n (при массовых выборах мнения избирателей влияют друг на друга) и при больших p (поскольку безразличие некоторых исходов неизбежно, когда этих исходов слишком много). Состоятельное по Кондорсе правило голосования имеет право на существование и в том случае, когда парадокс возникает. Если победителя по Кондорсе не существует, то оно выбирает разумную ему замену. Это может быть сделано несколькими способами: см. правила Копленда и Симпсона в разд. 9.2 и последовательные сравнения по правилу большинства в разд. 9.4. Теперь мы хотим обратиться к фундаментальному противоречию между требованием состоятельности по Кондорсе и идеей любого метода, основанного на подсчете очков, заданных в соответствии с рангами.

Определение 9.3. Правила голосования с подсчетом очков. *Фиксируем неубывающую последовательность действительных чисел*

$$s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{p-1} \qquad \textit{при} \quad s_0 < s_{p-1}.$$

Выборщики ранжируют кандидатов, причем s_0 очков дается за последнее место, s_1 – за предпоследнее и так далее. Избирается кандидат с максимальной суммой очков.

Правило Борда и правило относительного большинства представляют собой два примера правил с подсчетом очков (при относительном большинстве положим $s_0 = s_1 = \ldots = s_{p-2} < s_p$). Другим примером является правило антибольшинства, при котором выборщиков спрашивают, какой кандидат им нравится меньше всего, и побеждает кандидат с наименьшим числом голосов.

Теорема 9.1 (Фишберн [1973]). *Существуют профили, при которых победитель по Кондорсе не может быть избран ни при каком методе подсчета очков.*

Доказательство. Рассмотрим следующий профиль с семью выборщиками и тремя кандидатами (Фишберн [1984]):

Число выборщиков	3	2	1	1
s_2	c	a	a	b
s_1	a	b	c	c
s_0	b	c	b	a

Здесь c – победитель по Кондорсе. Хотя при любом методе подсчета очков при возрастающей последовательности ($s_0 < s_1 < s_2$) кандидат a получает преимущество:

$$\text{очки } a = 3s_2 + 3s_1 + s_0 > 3s_2 + 2s_1 + 2s_0 = \text{очки } c.$$

Теорема остается справедливой и для произвольного метода подсчета очков, если последовательность очков не является *строго* возрастающей, как в случае голосования по правилу относительного большинства. Наименьший пример, который может быть приведен в данном случае, содержит 17 выборщиков (и 3 кандидата):

Число выборщиков	6	3	4	4
s_2	a	c	b	b
s_1	b	a	a	c
s_0	c	b	c	a

Здесь a – победитель по Кондорсе. Тем не менее b выигрывает при любом методе подсчета очков. Для того чтобы понять это, предположим без ограничения общности, что $s_0 = 0$, значит, $0 \le s_1 \le s_2$ и $s_2 > 0$. Сравним суммы очков для a и для b:

$$\text{очки для } a = 6s_2 + 7s_1,$$
$$\text{очки для } b = 8s_2 + 6s_1.$$

Заметим, что

$$8s_2 + 6s_1 = 8(s_2 - s_1) + 14\,s_1 > 6(s_2 - s_1) + 13\,s_1 = 6s_2 + 7s_1,$$

причем неравенство является строгим, поскольку $s_2 - s_1$ и s_1 оба неотрицательны и хотя бы одно из них положительно.

QED

Интересно отметить, что множество кандидатов, которые могут быть избраны при *каком-либо* способе подсчета очков, можно легко описать. Для данных профиля и кандидата a построим вектор $r(a)$ из E^p следующим образом:

$r_1(a) =$ число выборщиков, у которых a имеет первый ранг;

$r_2(a) =$ число выборщиков, у которых a имеет первые два ранга; (3)

$r_k(a) =$ число выборщиков, у которых a имеет ранг k или менее при $k = 1,\ldots,p-1$, где p – число кандидатов.

Кандидат a не может быть победителем ни при одном методе подсчета очков, если вектор $r(a)$ доминируется по Парето (по каждой координате) вектором $r(b)$ для некоторого другого кандидата b. Это, по существу, определяет множество исходов, возможных при различных правилах подсчета очков. Подробности см. в упражнении 9.3.

Заметим также, что победитель по правилу относительного большинства может быть наихудшим по Кондорсе (как при профиле (1)), но победитель по Борда не может быть наихудшим по Кондорсе. В самом деле, победитель по Борда есть кандидат, который имеет наивысший *средний* ранг или, эквивалентно, он имеет в среднем наибольшее число поддерживающих его выборщиков в бинарных дуэлях с другими кандидатами. Формальное доказательство см. в упражнении 9.3.

9.2 Свойства равенства и монотонности

Мы хотим сопоставить правила голосования с подсчетом очков и состоятельные по Кондорсе правила по их нормативным свойствам. Для этого нам надо определить явным образом некоторые состоятельные по Кондорсе правила. Ниже даны два наиболее естественных обобщения победителя по Кондорсе.

Определение 9.4. Правило Копленда. *Сравним кандидата a с любым другим кандидатом x. Начислим ему +1, если для большинства a лучше x, −1, если для большинства x лучше a, и 0 при равенстве. Суммируя общее количество очков по всем x, $x \neq a$, получаем оценку Копленда для a. Избирается кандидат, называемый* **победителем по Копленду**, *с наивысшей из таких оценок.*

Определение 9.5. Правило Симпсона. *Рассмотрим кандидата a, любого другого кандидата x и обозначим через $N(a,x)$ число выборщиков, для которых a лучше x. Оценкой Симпсона для a называется минимальное из чисел $N(a,x)$ по всем x, $x \neq a$. Избирается кандидат, называемый* **победителем по Симпсону**, *с наивысшей такой оценкой.*

Для того чтобы победить по правилу Копленда, вы должны выиграть у наибольшего возможного количества других кандидатов. Чтобы выиграть по правилу Симпсона, вы должны быть уверены, что никакой кандидат не соберет против вас значительного большинства.

Оба эти правила состоятельны по Кондорсе. В самом деле, победитель по Кондорсе один получает наивысшую оценку Копленда $p-1$ (p – число кандидатов), а также оценку Симпсона выше $\frac{1}{2}n$ (n – число выборщиков). Так же, как правило Борда или любой другой метод подсчета очков (определение 9.1 и 9.3), правила Копленда и Симпсона выбирают для каждого профиля подмножество победителей, которое может состоять из нескольких кандидатов, получивших одинаковую оценку.

Ниже перечислены три основных нормативных свойства для правил голосования.

Оптимальность по Парето. Если кандидат a для всех лучше кандидата b, то b не может быть избранным.

Анонимность. Имена выборщиков не имеют значения: если два выборщика поменяются голосами, то результат выборов не изменится.

Нейтральность. Имена кандидатов не имеют значения. Если мы поменяем местами кандидатов a и b в предпочтении каждого выборщика, то исход голосования изменится соответственно (если раньше выбирался a, то теперь будет выбираться b и наоборот; если выбирался некоторый x, отличный от a и b, то он же и будет избран).

Анонимность и нейтральность должны быть выполнены, если мы требуем равноправия выборщиков и кандидатов. Оптимальность по Парето аналогична требованию эффективности.

Правила Копленда и Симпсона оптимальны по Парето, анонимны и нейтральны, если мы рассматриваем их как отображения, ставящие в соответствие каждому профилю предпочтений подмножество победителей. Анонимность и нейтральность очевидны. Проверить, что множества победителей по Борда (Копленду, Симпсону) содержат только оптимальные по Парето исходы, достаточно просто. Так, оценка Симпсона доминируемого по Парето кандидата равна нулю, а для оптимального по Парето кандидата она положительна.

Правило Борда оптимально по Парето, анонимно и нейтрально. То же справедливо для любого правила голосования с подсчетом очков, если очки разные ($s_k < s_{k+1}$; см. определение 9.3). Но некоторые правила голосования с подсчетом очков не являются оптимальными по Парето, например правило антибольшинства ($s_0 = 0 < 1 = s_1 = \ldots = s_{p-1}$ при $p \geq 3$). В самом деле, если мнения всех выборщиков совпадают, то все кандидаты, кроме наихудшего, могут быть избраны, хотя только наилучший кандидат оптимален по Парето.

Что произойдет, если мы будем вынуждены ввести некоторое правило при равенстве очков, выделяющее единственного победителя (в правилах Копленда, Симпсона и с подсчетом очков)? Вообще говоря, мы не можем этого сделать без нарушения либо анонимности, либо нейтральности. Это становится очевидным при трех выборщиках, трех кандидатах и симметричном профиле предпочтений:

$$\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{array} \qquad (4)$$

Если при анонимном, нейтральном и однозначном правиле голосования избирается, скажем, b, то по нейтральности c должен быть избран при профиле, который получается при перестановке a в b, b в c, c в a:

$$\begin{array}{ccc} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ b & a & c \\ c & b & a \\ a & c & b \end{array} \qquad (5)$$

Но по анонимности при профилях (4) и (5) должен получиться один и тот же исход.

Таким образом, для большинства значений n (числа выборщиков) и p (числа кандидатов) не существует однозначного правила голосования, удовлетворяющего трем нашим основным требованиям. Единственный случай, когда такое правило существует, описывается следующим образом: n не должно иметь простого делителя меньшего либо равного p. Подробности см. в упражнении 9.9.

На практике нас вполне устраивает отображение голосования (такие, как множество победителей по Борда или победителей по Копленду), для которых выполняются три наших принципа и которые не слишком часто приводят к равенству очков. Если требуется однозначное избрание, то мы используем либо неанонимное правило при равенстве очков (выбираем, скажем, среди победителей того, кто больше нравится агенту 1) или ненейтральное правило (среди победителей выбирается первый в алфавитном порядке). Наш следующий критерий – свойство монотонности. Он говорит о том, что большая поддержка кандидата не может уменьшить его шанса быть избранным. Это свойство иногда называется положительной обратной связью.

> *Монотонность.* Предположим, что a выбирается (среди победителей) при данном профиле и профиль изменяется только так, что положение a улучшается, а относительное сравнение пары любых других кандидатов для любого выборщика остается неизменным. Тогда a по-прежнему будет выбран (вновь среди победителей) для нового профиля.

Неудивительно, что все правила подсчета очков, а также правила Копленда и Симпсона являются монотонными, рассматриваем ли мы. их как отображения или как однозначные правила выбора (при равенстве используем один из двух описанных выше методов). В самом деле, если изменение профиля сводится к передвижке кандидата a вверх без каких-либо изменений сужения данного профиля на множество остальных кандидатов, то оценка кандидата a (по Копленду, Симпсону или Борда) не может уменьшиться, а оценки других кандидатов не могут увеличиться.

Требование монотонности исключает разного рода глупые методы голосования, такие, как избрание *наихудшего* по Борда. Правда, это правило будет отброшено и по условию оптимальности по Парето. Однако можно рассмотреть следующее правило: среди всех оптимальных по Парето кандидатов выбирается тот, у которого оценка Борда минимальна. Более серьезным примером, связанным с монотонностью, является правило относительного большинства с выбыванием (широко используемое во Франции).

Относительное большинство с выбыванием. В первом раунде каждый выборщик подает один голос за одного кандидата. Если кандидат набирает строгое большинство голосов, то он и избирается. В противном случае во втором туре проводится голосование по правилу большинства с двумя кандидатами, набравшими наибольшее количество голосов в первом туре.

Сторонники этого метода утверждают, что он почти так же прост, как и правило относительного большинства (выборщику не нужно сообщать полное ранжирование кандидатов), и исключает расточительные выборы. При обычном правиле относительного большинства, если я голосую за кандидата, получающего маленькую поддержку, то мой голос будет расточительным. Однако при выбывании у меня есть еще один шанс повлиять на исход. Тем не менее этот метод ***не является*** монотонным, как показывают следующие два профиля с 17 выборщиками:

Профиль A

6	5	4	2
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

Профиль B

6	5	4	2
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

При профиле A во второй тур проходят a и b и выигрывает a (11 голосов против 6). Профиль B такой же за одним исключением. У двух выборщиков предпочтение $b > a > c$ меняется на предпочтение $a > b > c$, т.е. для них теперь a лучше b. Теперь во второй тур проходят a и c, причем выигрывает c (9 голосов против 8). Таким образом, улучшение позиции кандидата a приводит к его поражению!

Аналогично правилу относительного большинства с выбыванием можно определить следующее правило.

Метод альтернативных голосов. Исключим сначала тех, кто получил наименьшее количество голосов. Затем посчитаем голоса для оставшихся кандидатов и опять исключим неудачников. Будем повторять эту операцию до тех пор, пока не останется один кандидат (или множество кандидатов с равным числом голосов).

Здесь главное внимание уделяется тому, чтобы не потерять никакие голоса и каждому дать шанс поддержать кандидата, который нравится больше всего. В этом подходе повторно используются методы подсчета очков для исключения неудачливых кандидатов. Кажется, что это имеет смысл, поскольку мы определенно меньше рискуем, исключая неудачника по Борда, чем выбирая победителя по Борда (если мы заменим правило относительного большинства на правило Борда в каждом раунде исключения, мы даже получим метод, состоятельный по Кондорсе; см. упражнение 9.4). Увы, *любое* правило, основанное на последовательном исключении по методу подсчета очков, должно нарушать свойство монотонности для некоторых профилей. Для доказательства приведем пример с 27 выборщиками из Фишбери [1982]:

Число выборщиков	6	4	6	2	6	3	
	a	b	b	c	c	a	(6)
	b	a	c	b	a	c	
	c	c	a	a	b	b	

Пусть мы производим первое исключение на основе вектора очков $s_0 = 0 \le s_1 \le s_2$ (при $0 < s_2$) и затем действует правило большинства. Сначала c исключается, поскольку

$$9s_1 + 8s_2 < \min\{10s_1 + 9s_2,\ 8s_1 + 10s_2\};$$

затем b проигрывает во втором раунде.

Предположим далее, что пять агентов (три из четырех с предпочтением $b > a > c$ и два с предпочтением $c > b > a$) теперь несколько улучшают свое мнение об a, который для них теперь лучше b. Получаем новый профиль:

Число выборщиков	9	1	6	8	3
	a	b	b	c	a
	b	a	c	a	c
	c	c	a	b	b

В первом раунде теперь будет исключен b, поскольку

$$9s_1 + 7s_2 < \min\{9s_1 + 12s_2, 9s_1 + 8s_2\},$$

а во втором раунде c побьет a 14 голосами против 13.

9.3 Пополнение и участие

В споре методов, состоятельных по Кондорсе, с методами подсчета очков последователи Кондорсе настаивают на чрезвычайной простоте их принципа. Идею сравнеиий по правилу большинства легче уяснить, и она представляется более близкой взглядам людей, чем подсчет очков. Многие также считают, что сложение очков избирателей скрывает каждый конкретный голос за математической формулой, в то время как последовательные дуэли по правилу большинства дают достоверную информацию о предпочтениях различных групп избирателей. Такая линия рассуждений приводит к методам голосования, осиованиым на последовательиом сравнеиии по правилу большииства, которым посвящен разд. 9.4. При этом также выполняется аксиома Эрроу о независимости от посторониих альтернатив, которая является центральной аксиомой в гл. 11.

Вместе с тем сторонники Борда также располагают весьма сильными аргумеитами в пользу методов подсчета очков и против состоятельности по Кондорсе.

Два наиболее существенных аргумента являются выражеиием свойств состоятельности прн избрании исходов двумя различными группами избирателей. Эти аксиомы формулируются в контексте переменного состава участиков (как в разд. 3.4, 3.5, 5.6). Первое свойство было введеио в Смит [1973] и Янг [1974] и известио как аксиома Янга о пополнеиии.

> *Пополнение (однозначные правила голосования).* Две непересекающиеся группы избирателей N_1, N_2 имеют дело с одиим и тем же миожеством A кандидатов. Пусть выборщики N_1 и N_2 выбирают одного и того же кандидата a. Тогда выборщики $N_1 \cup N_2$ также изберут a из A.

Это свойство является весьма обоснованным, когда едииый избирательный оргаи разбит на большое количество подмножеств, как в случае региональных ассамблей и подкомитетов.

Предположим, что A – множество формулировок законопроекта, а соответствующие комитеты в палате представителей и в сенате независимым голосованием предложили одну и ту же альтернативу $a \in A$. Аксиома пополнения говорит о том, что на совместном заседании они также изберут a.

Аксиома может быть также сформулирована для отображений голосования, ставящих в соответствие каждому профилю предпочтений множество соответствующих победителей. Это полезно, если мы накладываем требования анонимности и нейтральности (см. теорема 9.4).

Пополнение (отображения голосования). Две непересекающиеся группы избирателей N_1, N_2 имеют дело с одним и тем же множеством A кандидатов. Пусть выборщики N_i избирают подмножество B_i из A при $i=1,2$. Если B_1 и B_2 пересекаются, то выборщики $N_1 \cup N_2$ изберут $B_1 \cap B_2$ как множество наилучших для себя исходов.

Теорема 9.2 (Янг [1975])

(*a*) *Все отображения голосования, основанные на подсчете очков (выбирающие подмножества кандидатов с наибольшим суммарным количеством очков), удовлетворяют аксиоме пополнения. Если при равенстве очков выбор производится на основе фиксированного порядка на A, то соответствующие правила голосования также удовлетворяют аксиоме пополнения.*

(*b*) *Не существует состоятельного по Кондорсе правила голосования (или отображения голосования), которое бы удовлетворяло аксиоме пополнения.*

Доказательство. Утверждение (*a*). Если a получает t_1 очков у выборщиков N_1 и t_2 очков у выборщиков N_2, то он получит t_1+t_2 у $N_1 \cup N_2$. Значит, отображения голосования с подсчетом очков удовлетворяют условию пополнения. Если при равенстве очков используется правило, основанное на фиксированном порядке на A, то аксиома по-прежнему выполняется: если a – наилучший кандидат из B_1 и B_2 по этому порядку, то он также наилучший и на множестве $B_1 \cap B_2$.

Утверждение (*b*). Заметим, что если голосование ограничено профилями, в которых существует по крайней мере один победитель по Кондорсе, то выбор победителей по Кондорсе удовлетворяет аксиоме пополнения. В самом деле, если большинство из N_1 и большинство из N_2 считают, что a лучше x, то большинство из $N_1 \cup N_2$ считает a лучше x. Следовательно, нарушение аксиомы пополнения может происходить только из-за циклов правила большинства.

Возьмем любое число $n_1 \geq 3$ агентов и любой профиль предпочтений u, для которого не существует победителя по Кондорсе. Предположим, что наш состоятельный по Кондорсе метод выбирает некоторого кандидата a (среди прочих). Поскольку a не является победителем по Кондорсе, то существует другой кандидат b, такой, что m агентов, $\frac{1}{2} n_1 < m \leq n_1$, считают b лучше a. Положим теперь $n_2 = 2m + n_1$ и рассмотрим следующий профиль для $2N_1 \cup N_2$:

Число выборщиков	n_1	n_1	$2m$	n_1
			a	b
			b	a
	u	u	c	c
			$\vdots$	$\vdots$
	N_1	N_1	N_2	

Поскольку a выбирается при N_1, то он должен также выбираться и при $2N_1$, если только выполнена аксиома пополнения. Поскольку a – единственный победитель по Кондорсе для N_2, то он должен (однозначно) избираться при N_2. Но для $2N_1 \cup N_2$, кандидат b является единственным победителем по Кондорсе, следовательно, аксиома пополнения не может быть выполнена.

QED

Вслед за аксиомой пополнения рассмотрим связанную с аксиомой монотонности так называемую аксиому участия. Мы дадим интуитивное представление об этой аксиоме, показав, что типичный состоятельный по Кондорсе метод, а именно отображение голосования Симпсона, нарушает ее.

Рассмотрим выбор с 4 кандидатами и 15 выборщиками при следующих предпочтениях:

Число выборщиков	3	3	5	4
	a	a	d	b
	d	d	b	c
	c	b	c	a
	b	c	a	d

Оценки Симпсона таковы:

$$S(a) = N(a,c) = N(a,b) = 6\ ,$$
$$S(b) = N(b,d) = 4\ ,$$
$$S(c) = N(c,b) = 3\ ,$$
$$S(d) = N(d,a) = 5\ .$$

Следовательно, a – бесспорный победитель по Симпсону (хотя он и не является победителем по Кондорсе). Предположим далее, что добавляются еще 4 выборщика с одинаковыми предпочтениями $c > a > b > d$. Вычислим новые оценки:

$$S(a) = N(a,c) = 6\ ,$$
$$S(b) = N(b,d) = 8\ ,$$
$$S(c) = N(c,d) = 7\ ,$$
$$S(d) = N(d,a) = 5\ .$$

Теперь побеждает b. Следовательно, четырем новым выборщикам лучше остаться дома, чем участвовать в голосовании, и тогда победит a! Это – *парадокс неучастия* (Брамс и Фишберн [1983]). Может так случиться, что добавление моего собственного бюллетеня приведет для меня же к потерям в полезности. Для того чтобы устранить эту несуразность (напоминающую случай нарушения монотонности, хотя и не совпадающую с ним), сформулируем следующую аксиому.

Аксиома участия. Пусть кандидат a выбирается из множества A выборщиками из N. Рассмотрим далее выборщика i вне N. Тогда выборщики из $N \cup \{i\}$ должны избрать либо a, либо кандидата, который для агента i строго лучше a.

Это означает, что если дополнительный голос действительно изменяет исход выборов, то это может быть только на руку "ключевому" выборщику.

Теорема 9.3 (Мулен [1986*c*])

(*a*) *Для всех правил голосования с подсчетом очков, когда при равенстве очков выбор осуществляется с помощью заданного порядка на A, выполняется аксиома участия.*

(*b*) *Если A состоит хотя бы из четырех кандидатов, то ни одно состоятельное по Кондорсе правило голосования не удовлетворяет аксиоме участия.*

Доказательство является предметом упражнения 9.6. Там, в частности, показано, что при трех кандидатах состоятельность по Кондорсе и аксиома участия совместны.

Мы завершаем этот раздел формулировкой одного из наиболее известных результатов теории голосования. Он утверждает, что аксиомы пополнения по существу достаточно для характеризации методов подсчета очков.

Нам потребуется дополнительное свойство непрерывности.

> *Непрерывность.* Пусть выборщики из N_1 избирают кандидата a из A, а непересекающаяся с N_1 группа N_2 избирает другого кандидата b. Тогда существует достаточно большое число m дублей группы выборщиков N_1, такое что комбинированная группа выборщиков $(mN_1) \cup N_2$ изберет a.

Это требование является достаточно мягким. Если коалиция выборщиков представляет собой достаточно малую долю общего числа выборщиков, то она не должна иметь возможности влиять на исход. Заметим, что по аксиоме пополнения при дублировании множества выборщиков множество победителей не меняется.

Теорема 9.4 (Янг [1975]). *Отображение голосования основано на методе подсчета очков (определение* 9.3 *без фиксации правила для случая равенства очков) тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим четырем свойствам:*

анонимность, нейтральность,

аксиома пополнения и непрерывность.

Мы опускаем трудное доказательство этой теоремы.

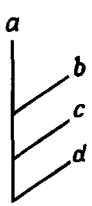
Вебер [1978] сравнивал однозначные правила голосования по их "эффективности", т.е. по ожидаемому удовлетворению, получаемому выборщиками, чьи полезности, связанные с кандидатами, независимы и одинаково распределены. Он обнаружил, что метод Борда является почти оптимальным, когда число выборщиков велико.

В следующей главе мы рассмотрим правила голосования, в которых исход определяется лотереей на множестве кандидатов. Методы подсчета очков, обобщенные на этот случай, могут быть охарактеризованы с помощью свойства неманипулируемости (см. замечание 10.2 и упражнение 10.9).

9.4 Последовательные сравнения по правилу большинства

Несмотря на сложности, обнаруженные в предыдущем разделе, состоятельность по Кондорсе широко известна в качестве основного демократического принципа.

Конечно, состоятельные по Кондорсе правила голосования различаются для тех профилей, для которых не существует победителя по Кондорсе. Правила Копленда и Симпсона решают проблему за счет рассмотрения каждой пары кандидатов по правилу большинства. На практике это слишком длинный процесс и должны быть использованы другие более простые алгоритмы. Приведем один известный метод, используемый в США. Конгресс голосует предложение и внесенные поправки. Эта процедура известна как процесс поправок (см. подробнее Рикер [1982], с. 70):



(7)

Голосование с последовательным исключением. Сначала по правилу большинства исключается либо a, либо b, затем по правилу большинства проводится сравнение победителя первого раунда и c и так далее. В случае равенства проигрывает нижний кандидат.

В этом процессе поправок пусть a – поправка, b – поправка к поправке, c – исходное предложеиие, d – *status quo*.

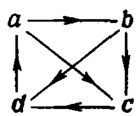
Этот метод удовлетворяет аксиоме состоятельности по Кондорсе: если a – победитель по Кондорсе, то он выигрывает. На самом деле состоятельность при сравнениях по правилу большинства справедлива в гораздо более сильиом смысле.

> *Состоятельность по Смиту.* Если множество A кандидатов разбивается на два непересекающихся подмножества B_1, B_2 и каждый кандидат $b_1 \in B_1$ выигрывает (по строгому большинству) у любого каидидата $b_2 \in B_2$, то должеи быть выбран исход из B_1.

С другой стороны, голосование при последовательном исключении очевидио не является нейтральным. Порядок исключений, конечно, влияет иа исход. Чтобы понять это, рассмотрим следующий профиль при пяти выборщиках:

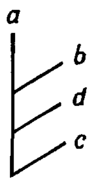
Число выборщиков	1	2	1	1
	d	a	d	b
	b	b	c	c
	a	c	a	d
	c	d	b	a

Соответствующие сравнения по правилу большинства могут быть представлены в виде "мажоритарного турнира":

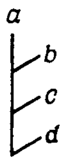


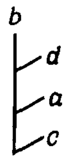
(8)

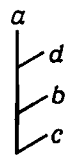
где a побеждает b, b побеждает c, b побеждает d и так далее. Теперь предположим, что председатель комитета имеет право определить повестку дня, т.е. установить порядок последовательного сравнения кандидатов. Легко понять, что он в состоянии обеспечить избрание любого кандидата по своему желанию. Например, чтобы c был избран, подходит следующая повестка дия·



Аналогично получаем







Выбирается d *Выбирается a* *Выбирается b*

Таким образом, определяя повестку дня председатель фактически контролирует процесс выборов. Хотя не все профили наделяют того, кто определяет повестку дня, абсолютной силой, все же при любом профиле, при котором нет победителя по Кондорсе, выбор повестки дня влияет на избрание (см. упражнение 9.10, вопрос (d)).

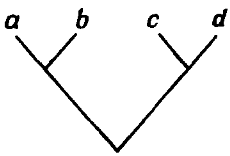
Кроме нарушения нейтральности метод последовательных исключений может нарушать и оптимальность по Парето. Рассмотрим следующий профиль при трех выборщиках:

1	1	1
b	a	c
a	d	b
d	c	a
c	b	d

и проведем последовательное исключение в порядке $abcd$ (как в (7)). Тогда b победит a, затем c победит b, затем d победит c и будет избран d. В то же время a для всех лучше d!

Итак, голосование с последовательным исключением является по существу несправедливым (нет нейтральности). Кандидат, представляемый последним (в примере – d), имеет очевидное преимущество, поскольку ему надо выиграть только у одного своего оппонента. В противоположиость этому любому из двух кандидатов, представлениых первыми (в примере – a и b), нужио победить каждый другой исход (т.е. быть победителем по Кондорсе), чтобы выиграть.

Эта трудность может быть легко преодолена при четырех кандидатах. Рассмотрим следующий турнир с исключением:



(9)

Правило параллельного исключения. Сначала по правилу большинства сравииваются пары a с b и c с d. Победители встречаются в финале, где сравниваются по правилу большинства. В случае равенства выбирается кандидат, идущий раньше по алфавиту.

Это – опять состоятельный по Кондорсе метод. Более того, для избрания каждому кандидату x нужно победить в двух сравнениях по правилу большинства. Предположим сначала, что равенства при сравнении с этими двумя каидидатами нет (x выигрывает для строгого большиства). Тогда x не может доминироваться по Парето иекоторым кандидатом y, иначе y был бы победителем по Кондорсе. Следовательно, метод параллельного исключения выбирает оптимальный по Парето исход в (наиболее распространенном) случае, когда при биварных выборах нет равенств. Тем не менее если равенства возможны, то оптимальность по Парето может нарушаться. Рассмотрим следующий профиль с четырьмя выборщиками:

Число выборщиков	2	2
	d	c
	a	d
	c	a
	b	b

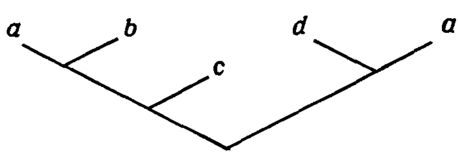
Здесь a побеждает b, но по выбранному правилу при равенстве голосов c побеждает d, затем a побеждает c. Победитель a доминируется по Парето кандидатом d.

Возникает следующий общий вопрос: можно ли построить схему последовательного исключения на основе соответствующего дерева так, чтобы при произвольном количестве кандидатов избирался бы оптимальный по Парето исход при всяком профиле предпочтений?

Чтобы ответить на этот вопрос с соответствующей степенью общности, поставим в соответствие каждому профилю предпочтений *мажоритарный турнир*, а именно бинарное отношение T, которое получается в результате сравнений по правилу большинства: $a\,T\,b$ означает, что большинство считает a лучше b. Для простоты до конца этой главы будем предполагать, что при парных сравнениях нет равенства голосов. Тогда для двух кандидатов a, b должно быть выполнено ровно одно отношение: либо $a\,T\,b$, либо $b\,T\,a$. Наше предположение выполнено, в частности, если число выборщиков нечетно и случаи безразличия исключены.

Обозначим через A множество кандидатов. *Бинарное дерево* на A есть такое конечное дерево, в котором каждой нефинальной вершине (включая начальную) соответствуют ровно две следующие, а каждой финальной вершине (у которой нет следующих за ней) приписан кандидат (элемент из A), причем каждый кандидат появляется по крайней мере в одной финальной вершине.

Вот, например, бинарное дерево на $A = \{a, b, c, d\}$:



(10)

С бинарным деревом на A мы связываем следующее правило голосования. Для любого заданного профиля предпочтений проведем турнир по правилу большинства T. Затем на основе T получим решение для дерева.

(i) Выберем нетерминальную вершину n, у которой обе следующие вершины m, m' являются финальными (такие вершины существуют; рассмотрите путь максимальной длины из начальной вершины и возьмите предпоследнюю вершину).

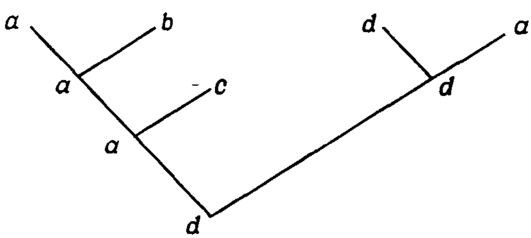
(*ii*) Если x, x' – кандидаты, приписанные m, m', то назовем y победителем по правилу большинства:

$$y = \begin{cases} x & \text{при } x\,T\,x', \\ x' & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

(*iii*) Удалим дуги nm и nm', сделав n финальной вершиной, которой приписан кандидат y.

(*iv*) Будем повторять эту операцию до тех пор, пока не получим дерево из одной вершины (начальная вершина Г). Ей будет приписан избираемый кандидат.

Так например, для дерева (10) и турнира aTb, aTc, bTd, cTd, dTa получаем следующий процесс исключения, при котором победителем становится d:



Легко проверить, что любое бинарное дерево порождает состоятельный по Кондорсе (и даже состоятельный по Смиту) метод голосования. Другие основные свойства, такие, как оптимальность по Парето (см. выше) и монотонность (см. ниже), не всегда выполняются.

Среди бинарных деревьев простейшими являются те, в которых каждый кандидат приписан *ровно одной* вершине. Назовем их *деревьями без повторных исключений*. Например, голосование с последовательным исключением (7) и голосование с параллельным исключением (9) соответствуют бесповторным деревьям, а дерево (10) таким не является.

Лемма 9.1

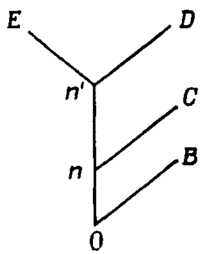
(*a*) *Если A состоит из трех кандидатов, то дерево после-*

довательного исключения является единственным бесповторным деревом. Соответствующее правило голосования оптимально по Парето (при нашем условии, что все сравнения по большинству строгие).

(*b*) *Если A состоит из четырех кандидатов, то есть только два бесповторных дерева: последовательное исключение и параллельное исключение. Первое из них нарушает оптимальность по Парето, а последнее – нет.*

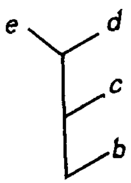
(*c*) *Если A содержит пять или более кандидатов, то любое исключение по бесповторному дереву приводит к избранию доминируемого по Парето кандидата для некоторых профилей.*

Доказательство. Утверждение (*b*) уже почти доказано, а доказательство утверждения (*a*) проводится аналогично. Для доказательства утверждения (*c*) заметим, что поскольку в нашем бинарном дереве пять или более вершин, то существует путь длины не менее 3. Найдем вершину n, следующую за начальной вершиной O, и нефинальиую вершнну n', которая следует за n:



(11)

Множество A разбнвается на четыре подмножества. Множество B состоит из кандидатов, соответствующих дуге, ведущей из O не в n; C содержит тех кандидатов, которые соответствуют дуге, ведущей из n не в n'; E и D соответствуют двум дугам из n' (см. (11)). Выберем исходы b из B, c из C, d из D и e из E. Рассмотрим профиль, в котором все кандидаты, кроме b, c, d, e, доминируются по Парето (каждый агент предпочнтает любого из этих четырех кандидатов любому из остальных). Такой профиль для голосовання по бннарному дереву приводит к последовательному исключению:



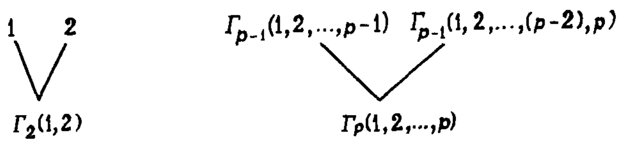
Следовательно, оио не оптимально по Парето (утверждеиие (b)).

QED

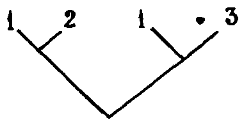
Таким образом, бинарное дерево может дать оптимальное по Парето правило голосования только в более сложиом случае, чем бесповторное дерево. Однако если мы размножаем финальные вершины, которым приписан некоторый каидидат, то мы рискуем нарушить другое основное требование, а именно монотонность. В самом деле, в примере из упражнения 9.4 показано, что некоторые бииариые деревья порождают немоиотоииые правила голосования (в то время как все бесповторные деревья приводят к монотонным правилам).

К счастью, существует бинарное дерево, определенное для произвольного количества участников, которое позволяет избежать обеих этих опасностей. Соответствующне последовательные нсключения порождают оптимальное по Парето, анонимное и монотониое правило голосования. Это замечательное дерево называется деревом *многоэтапного исключения*.

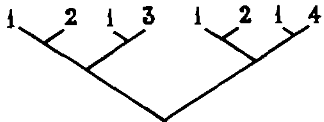
Существует по одному такому дереву для каждого конкретного упорядочення кандидатов. Обозначим через $\Gamma_p(1,2,\dots,p)$ дерево, соответствующее порядку $A=\{1,2,\ \dots\ ,p\}$. Определим его индуктивно по размеру A:



Так, для трех и четырех кандидатов получаем:



$\Gamma_3(1,2,3)$



$\Gamma_4(1,2,3,4)$

При p кандидатах получаются 2^{p-1} финальные вершины; кандидат 1 приписан 2^{p-2} финальным вершинам, а кандидат p только одной. Тем на менее для избрания даже кандидату p нужно победить в $p-1$ дуэлях (хотя ему возможно придется по нескольку раз столкнуться с одним и тем же оппонентом).

Хотя дерево многоэтапного исключения велико, его решение (т. е. вычисление выигрывающего кандидата) может быть получено с помощью очень простого алгоритма.

Теорема 9.5 (Шепсл и Вейнгаст [1984]). *Даны дерево многоэтапного исключения* $\Gamma_p(1,2,\dots,p)$ *и профиль предпочтения, соответствующий мажоритарному турниру* T. *Избираемый кандидат* a^* *может быть найден по следующему алгоритму:*

$$\alpha_1 = 1,$$

для всех $i=2,\dots,p$:
$$\alpha_i = \begin{cases} i & \text{при } i\,T\,\alpha_{i-1},\ i\,T\,\alpha_{i-2},\dots,i\,T\,\alpha_1, \\ \alpha_{i-1} & \text{при } \alpha_j\,T\,\alpha_i \text{ для некоторого } j, \\ & 1 \le j \le i-1, \end{cases} \tag{12}$$

$$\alpha_p = a^*.$$

Доказательство. Проводится индукцией по p. При $p=1,2$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно вплоть до $p-1$, и рассмотрим турнир T на $\{1,2,\dots,p\}$. Обозначим через $T^{-p}(T^{-(p-1)})$ ограничение T на $\{1,2,\dots,p-1\}$ (на $\{1,2,\dots,p-2,p\}$). Обозначим через β_{p-1} исход $\Gamma_{p-1}(1,2,\dots,p-1)$ по T^{-p} при соответствующей последовательности $\beta_1,\dots,\beta_{p-1}$ в (12). Аналогично, γ_{p-1} – исход $\Gamma_{p-1}(1,2,\dots,p-2)$ по $T^{-(p-1)}$ при соответствующей последовательности $\gamma_1,\dots,\gamma_{p-1}$. По индуктивному определению $\Gamma_p(1,2,\dots,p)$ его исход a по турниру T получается так:

$$a = \begin{cases} \beta_{p-1} & \text{при } \beta_{p-1} \, T \, \gamma_{p-1}, \\ \gamma_{p-1} & \text{при } \gamma_{p-1} \, T \, \beta_{p-1}. \end{cases} \tag{13}$$

Рассмотрим теперь последовательность $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$, определенную по (12). По построению имеем

$$\{\text{для } i=1,\ldots,p-2\colon \ \alpha_i=\beta_i=\gamma_i\} \quad \text{и} \quad \{\alpha_{p-1}=\beta_{p-1}\}.$$

Чтобы доказать, что $\alpha_p = a$, рассмотрим три случая.

Случай 1. $\gamma_{p-1}=\gamma_{p-2}$. Тогда для некоторого i, $1 \le i \le p-2$, $\gamma_i \, T \, p$. Поскольку $\alpha_i=\gamma_i$, то получаем $\alpha_p=\alpha_{p-1}$. С другой стороны, $\beta_{p-1} \, T \, \beta_{p-2}$ (опять из (12) при соглашении $x \, T \, x$), значит, из $\gamma_{p-1}=\beta_{p-2}$ получаем $\beta_{p-1} \, T \, \gamma_{p-1}$. Следовательно, в силу (13) $a=\beta_{p-1}$, поэтому $a=\alpha_{p-1}=\alpha_p$, что и требовалось.

Случай 2. $\gamma_{p-1}=p$ и $\beta_{p-1}=\beta_{p-2}$. В этом случае p побеждает любого α_i, $1 \le i \le p-2$ (по определению γ_{p-1}), и β_{p-1} – один из них Итак, p побеждает $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}$. Значит, $\alpha_p=p$. С другой стороны, $\gamma_{p-1}=p$ побеждает $\beta_{p-1}=\alpha_{p-2}$, значнт, из (13) получаем $a=p$.

Случай 3. $\gamma_{p-1}=p$ и $\beta_{p-1}=p-1$. Кандидаты p и $p-1$ побеждают $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-2}\}$. Значит, $\alpha_p=p$, если $p \, T \, (p-1)$ и $\alpha_p = (p-1)$, если $(p-1) \, T \, p$. С другой стороны, по (13) a – один и тот же исход.

QED

Следствие теоремы 9.5. *Кандидат a, выбираемый по дереву многоэтапного исключения с турниром T, удовлетворяет условию:*

$$\begin{aligned} &\text{для любого } b \in A,\ b \ne a\colon \\ &\{a \, T \, b\} \text{ и/или } \{\text{для некоторого } c,\ a \, T \, c \text{ и } c \, T \, b\}. \end{aligned} \tag{14}$$

В частности, a оптимален по Парето. Более того, дерево многоэтапного исключения порождает монотонный метод голосования.

Доказательство. Докажем (14), обозначив через a исход из (12). Предположим, что a имеет ранг i и рассмотрим другой исход b ранга j. Предположнм сначала, что $j < i$. Если $\alpha_j = j$, то из (12) получаем $a \, T \, b$. Если $\alpha_j=\alpha_{j-1}$, то b проигрывает иекоторому $c=\alpha_k$, $k<j$, в то время как a побеждает c, что доказывает (14). Предположим далее, что

$j > i$. Тогда j проигрывает одному из $\alpha_1,\dots,\alpha_i = a$, в то же время a побеждает $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1}$, откуда следует (14).

Выведем из (14) оптимальность по Парето исхода a. Если b доминирует по Парето a, то $a\,T\,b$ невозможно, значит, существует c такой, что $a\,T\,c$ (для строгого большинства a лучше c) и $c\,T\,b$ (для строгого большинства c лучше b). Поскольку два множества, образующие строгое большинство, пересекаются, то найдется выборщик, который считает a лучше b; противоречие.

Для доказательства монотонности рассмотрим два профиля u и u', отличающиеся только тем, что относительная позиция a в профиле u лучше. Соответствующие турниры T и T' отличаются только тем (и то необязательно), что отношение $b\,T\,a$ переходит в $a\,T\,b$. Проверьте, что если a выигрывает по алгоритму (12) при T, то он должен выиграть и при T'.

QED

Множество кандидатов, удовлетворяющее (14), называется ***непокрытым множеством*** для турнира T (Миллер [1980]). Оно одноточечно тогда и только тогда, когда T имеет победителя по Кондорсе, в противном случае оно содержит по крайней мере три элемента: более подробно см. в упражнении 9.11 и статьях Бэнкс [1985], Мулен [1986*c*].

Среди состоятельных по Кондорсе правил голосования мы обнаружили три метода, удовлетворяющих основным требованиям оптимальности по Парето, анонимности и монотонности: множество победителей по Копленду, множество победителей по Симпсону и дерево многоэтапного исключения. Первые два нейтральны, но могут выделять нескольких победителей (дополнительное правило при равенстве очков нарушит нейтральность). Заметим, что победитель при многоэтапном исключении находится быстрее, поскольку алгоритм (12) в среднем требует сравнения не более половины от всех $\frac{1}{2}p(p-1)$ пар. В то же время для определения победителей по Копленду и Симпсону требуется провести весь турнир сравнений по правилу большинства. На самом деле Мулен [1986*c*] показал, что не существует бинарного дерева, победитель по которому всегда является победителем Копленда (Симпсона). Этот результат объясняется в упражнении 9.8.

Упражнения

9.1 Любопытный профиль (Страффин [1980])

Рассмотрим следующий профиль при 9 выборщиках и 5 кандидатах:

Число выборщиков	1	4	1	3
	a	*c*	*e*	*e*
	b	*d*	*a*	*a*
	c	*b*	*d*	*b*
	d	*e*	*b*	*d*
	e	*a*	*c*	*c*

(*a*) Проведите мажоритарный турнир. Определите победителя Копленда и победителя Симпсона.

(*b*) Найдите победителя Борда. Покажите, что оценки Борда ранжируют кандидатов в порядке, противоположном тому, который получается по оценкам Копленда.

(*c*) Найдите методы подсчета очков, при которых однозначно избирается соответственно кандидат c, b, d.

9.2 Метод альтернативных голосов

Рассмотрим следующий профиль с 17 выборщиками и 7 кандидатами, предложенный в Даммет [1984], с. 172:

Число выборщ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	a	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*d*	*d*	*d*	*e*	*e*	*f*
	g	*b*	*c*	*f*	*g*	*d*	*a*	*d*	*e*	*g*	*g*	*f*	*g*	*g*	*g*	*f*	*g*
	f	*e*	*b*	*g*	*f*	*c*	*c*	*g*	*g*	*f*	*f*	*g*	*e*	*f*	*f*	*g*	*a*
	e	*d*	*f*	*e*	*e*	*a*	*d*	*f*	*f*	*e*	*e*	*e*	*f*	*e*	*b*	*a*	*e*
	d	*g*	*g*	*d*	*c*	*e*	*e*	*e*	*d*	*d*	*d*	*c*	*b*	*a*	*d*	*d*	*d*
	c	*f*	*e*	*c*	*d*	*f*	*g*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
	b	*c*	*d*	*a*	*a*	*g*	*f*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*b*

Покажите, что метод альтернативных голосов (см. разд. 9.2) последовательно исключает g, f, e, d, c, b и делает a победителем. Проверьте, что оценки Борда находятся с этим в полном противоречии: g имеет максимальную оценку, f – вторую, затем e и так далее. Проверьте также, что оценки Копленда совпадают с оценками Борда, за исключением относительного ранжирования a и b.

9.3 Другие методы подсчета очков

(a) Победитель (неудачник) по Кондорсе не может быть неудачником (победителем) по Борда. Докажите это утверждение, зафиксировав профиль предпочтения с n выборщиками и p кандидатами. Обозначим через $\beta(a)$ оценку Борда кандидата a и через $N(a,b)$ число выборщиков, считающих, что a лучше b. Докажите формулу

$$\beta(a) = \sum_{b \neq a} N(a,b) .$$

Проверьте, что если a – победитель по Кондорсе, то должно быть выполнено $\beta(a) > n \cdot (p-1)/2$, причем $n \cdot (p-1)/2$ совпадает со средней оценкой Борда.

(b) Рассмотрим строго возрастающий вектор очков $s_0 < s_1 < \ldots < s_{p-1}$. Покажите, что если кандидат a является s–победителем, то соответствующий ему вектор $r(a)$ (3) оптимален по Парето: не существует другого исхода b, такого, что $r_k(b) \geq r_k(a)$ при всех $k = 1,\ldots,p-1$, причем хотя бы одно неравенство является строгим. Обратно, любой кандидат a, для которого вектор $r(a)$ оптимален по Парето, является s–победителем для некоторого строго возрастающего вектора очков. *Подсказка*: обозначим $d_k = s_k - s_{k-1}$ при $k = 1,\ldots,p-1$. Покажите, что s–оценка $\sigma(a)$ кандидата a может быть представлена в виде

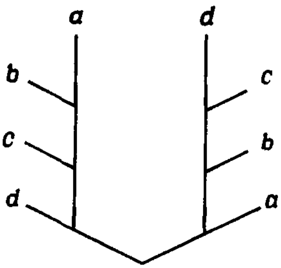
$$\sigma(a) = n \cdot s_0 + \sum_{k=1}^{p-1} d_{p-k} \cdot r_k(a) .$$

(c) Рассмотрим произвольный вектор очков (определение 9.3). Покажите, что если a – s–победитель, то вектор $r(a)$ слабо оптимален по Парето: не существует кандидата b, для которого $r_k(b) > r_k(a)$ при всех $k = 1,\ldots,p-1$. Покажите, что выполнено также и обратное утверждение.

9.4 Состоятельность по Кондорсе и монотонность

(a) Метод Нансона состоит в последовательном исключении неудачников по Борда (вычисляем новые оценки после каждого раунда исключений так же, как в методе альтернативных голосов для относительного большинства). Покажите, что этот метод состоятелен по Кондорсе (используйте вопрос (*a*) из упражнения 9.3). Тем не менее этот метод не является монотоииым, как следует из примера (6).

(*b*) Рассмотрим данное дерево исключений на множестве кандидатов $\{a, b, c, d\}$.



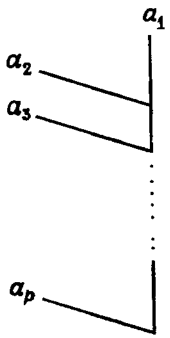
Это правило голосования состоятельио по Коидорсе. Проверьте, что оно также оптимальио по Парето (предполагая, как и в разд. 9.4, что все париые сравнения строгие). Покажите далее, что это правило не является монотонным, рассмотрев следующие два профиля с тремя выборщиками:

b	*d*	*c*		*a*	*d*	*c*
a	*a*	*b*	и	*b*	*a*	*b*
c	*c*	*d*		*c*	*c*	*d*
d	*b*	*a*		*d*	*b*	*a*

(c) Покажите, что для всех бесповторных деревьев исключения получаются монотонные правила голосования.

9.5

(*a*) Докажите, что при голосовании последовательным исключением кандидат a_1 (или a_2) избирается тогда и только тогда, когда он является победителем по Кондорсе. Значит, им труднее всего. Докажите, что чем позже представляется кандидат, тем больше у него шансов победить в следующем смысле: если a_k избирается при данном профиле, то он также будет избраи, если кандидаты представляются в порядке $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_k, a_{k+2}, \ldots, a_n$.



(b) Докажите, что при голосовании с многоэтапным исключением первый кандидат выбирается только в том случае, если он является победителем по Кондорсе. Докажите, как и выше, что чем позже кандидат представляется, тем больше у него шансов на победу (используйте алгоритм (12)).

9.6 Доказательство теоремы 9.3 (Мулен [в печати])

(a) Покажите, что для любого правила голосования с подсчетом очков, в котором при равенстве используется фиксированный порядок кандидатов, выполнена аксиома участия.

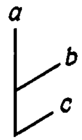
Тем не менее при последовательном исключении кандидатов на основе метода подсчета очков может возникнуть парадокс неучастия. Убедитесь в этом, используя правило относительного большинства с выбыванием для следующего профиля:

Число выборщиков	3	4	4
	a	b	c
	c	a	b
	b	c	a

Проверьте, что если два выборщика с предпочтениями $b > a > c$ не будут участвовать, то их полезность возрастет.

(b) Рассмотрите случай с тремя кандидатами и покажите, что правило голосования Симпсона (с заданным порядком на A при равенстве) удовлетворяет аксиоме участия.

Тем не менее не всякое состоятельное по Кондорсе правило таково. Рассмотрим, например, последовательное исключение



для следующего профиля:

Число выборщиков	1	2	2	2
	c	a	b	c
	b	c	a	a
	a	b	c	b

Проверьте, что двум кандидатам с предпочтениями $c > a > b$ лучше остаться дома.

(c) Доказательство утверждения (b) (теорема 9.3). Рассмотрим состоятельное по Кондорсе правило, заданное для произвольного количества выборщиков и удовлетворяющее аксиоме участия. Для данного множества выборщиков N размера n обозначим через $t(a)$ оценку Симпсона кандидата a (см. определение 9.5):

$$t(a) = \min_{x \neq a} N(a, x) .$$

Фиксируем далее двух кандидатов a, b и предположим, что

$$t(b) \geq N(a, b) + 1 . \tag{15}$$

Затем увеличим N на m идентичных выборщиков, $m = n - 2t(b) + 1$, для которых a – наилучший кандидат, а b – на втором месте. Проверьте, что в расширенном профиле с $n + m$ выборщиками b является победителем по Кондорсе. Тогда по аксиоме участия, если a выбирается при первоначальном профиле на N, то он также будет выбран и при расширенном профиле. Мы доказали следующее свойство для всех a, b:

$$t(b) \geq N(a, b) + 1 \quad \Rightarrow \quad a \quad \text{не выбирается} . \tag{16}$$

Используйте это свойство, чтобы показать, что a должен быть избран при следующем профиле с 15 выборщиками и 4 кандидатами:

Число выборщиков	3	3	5	4
	a	a	d	b
	d	d	b	c
	c	b	c	a
	b	c	a	d

Добавим далее 4 выборщиков с идентичными предпочтениями $c > a > b > d$. Используя (16), покажите опять, что ни a, ни c не могут быть избраны при расшнренном профиле с 19 выборщиками. Выведите противоречие.

9.7 Турниры и мажоритарное отношение (Макгарви [1953])

Рассмотрим турннр T (полное асимметрнчное отношение) на множестве кандидатов A. Постройте профиль предпочтений на A, при котором сравнения по правилу большинства приводят в точности к турниру T. *Подсказка*: еслн чнсло канднтатов равно p, то подойдет профиль с $p(p-1)$ выборщиками.

Стирнс [1959] существенно усилил результат Макгарви, доказав, что для каждого турнира T с p кандидатами можно построить профнль предпочтений с всего $p+2$ выборщиками (или $p+1$, если p нечетно), для которого соответствующий мажоритарный турнир в точности совпадает с T.

9.8 Победители по Копленду и турниры с бинарным исключением (Мулен [1986*c*])

(*a*) Если A состоит из четырех кандидатов, то метод параллельного исключения (9) должен избнрать победителя Копленда для каждого турнира. Однако если A имеет 8 или более злементов, то невозможно постронть бинарное дерево, которое делает то же самое. Это будет доказано после решения следующих трех вопросов.

(*b*) Рассмотрим следующнй турнир T для 8 кандидатов a, b, c, d, e, x, y, z: T совпадает с порядком $a > b > c > d > e > x > y > z$, за исключением

$$zTa,\ zTb,\ zTc,\ zTd,\ zTe. \tag{17}$$

Покажите, что a – единственный победитель по Копленду.

(*c*) Рассмотрнм произвольное бинарное дерево на A и предположим, что оно выбнрает a по турниру T. Заменим T на другой турнир T', изменив только некоторые отношения на множестве $B=\{a,b,c,d,e\}$. На множестве B турнир T' удовлетворяет условию

$$\text{для всех } \alpha \in B:$$
$$\alpha T x,\ \alpha T y,\ z T \alpha, \qquad x T y,\ x T z,\ y T z. \tag{18}$$

Покажнте, что исход выборов по нашему дереву прн T' должен быть из B.

(d) Рассмотрим конкретный турннр T', определенный по (18) н

$$a T b,\ a T c,\ d T a,\ e T a;\ b T c,\ b T d,\ e T b;\ c T d,\ c T e,\ d T e.$$

Найдите для него победителя Копленда. Сравнивая с вопросом (c), придите к следующему заключению: если кандидатов хотя бы 8, то не существует бинарного дерева, которое выбирало бы победителя по Копленду для любого турнира.

9.9 Неустранимые равенства в правилах голосования

Даны множество исходов A мощности p и множество выборщиков N мощности n. Обозначим через $L(A)$ множество всех линейных порядков на A. Тогда однозначное правило голосования есть отображение S нз $L(A)^N$ в A. Нас интересуют анонимные и нейтральные правнла голосования.

S анонимно, если S – симметрнчная функция n своих аргументов (индивндуальных предпочтенний).

S нейтрально, еслн для любого взанмно однозначного соответствия σ из A в себя и для любого профиля u имеем

$$S(u^{\sigma}) = \sigma(S(u)),$$

где при профнле u^{σ} агент i считает a лучше b тогда и только тогда, когда при профиле u агент i счнтает $\sigma^{-1}(a)$ лучше $\sigma^{-1}(b)$.

(a) Покажите, что для данных a и N существует однозначное правило голосования, являющееся оптимальным по Парето, анонимным и нейтральным *тогда и только тогда, когда* у n нет простых делителей, меньшнх или равных p. *Подсказка для доказательства достаточности:* нспользуйте версию с повторяющимся правилом отиосительного большинства. Сначала возьмем всех победнтелей по правилу относнтельного большнцства, затем – всех победителей по правилу относительного большинства из этих кандидатов.

(b) При $n=2$, $p=3$ можно найти анонимные, нейтральные и однозначные правила голосования (хотя они не будут оптимальны по Парето в силу вопроса (a)). Вот одно из таких правил: если у u_1 и u_2 одинаковый наилучший кандидат, то возьмем его в качестве $S(u_1,u_2)$. В противном случае выберем оставшегося (возможно доминируемого по Парето кандидата).

В общем случае покажите, что для A и N существует однозначное правило голосования, которое является анонимным и нейтральным тогда и только тогда, когда p не может быть записано в виде нетривиальных делителей n (нетривиальные делители n есть делители, отличные от 1; само n допускается). *Подсказка*: Фиксируем n и пусть D_n – множество целых q, которые могут быть записаны в виде суммы нетривиальных делителей n при соглашении $0 \in D_n$. Доказательство ведется индукцией по p. Предположим, что $p \notin D_n$ и фиксируем профиль u. Для всех t, $0 \le t \le n$, обозначим через A_t (возможно пустое) подмножество исходов, имеющих первый ранг ровно у t агентов. Поскольку p не принадлежит D_n и $p=\sum_{0 \le t \le n}|A_t|$, то существует по крайней мере одно t, такое, что $|A_t| \notin D_n$ и $|A_t| < p$. Возьмем наибольшее такое t и применим предположение индукции.

Это доказывает достаточность. Для доказательства необходимости предположим, что $p \in D_n$. Можно записать $p=q_1p_1+ \ldots +p_kq_k$, где $q_1,\ldots,q_k$ ненулевые целые числа, а $p_1,\ldots,p_k$ попарно различные простые делители n. Следовательно, произведение $(p_1 \cdots p_k)$ является делителем n. Постройте профиль с $p_1 \cdots p_k$ агентами и $p_1+\ldots+p_k$ исходами, который не может быть справедливо разрешен при условии анонимности и нейтральности. Затем проведите дублирование агентов и исходов.

9.10 Максимальный цикл

Задан турнир T на множестве A, содержащем p кандидатов. Обозначим через T^* транзитивное замыкание T, а именно полное транзитивное отношение, определенное следующим образом:

$$a\,T^*b \text{ тогда и только тогда, когда существуют целое } q \text{ и последовательность } a_0, a_1, \ldots, a_q = b \text{ такие, что } a_i\,T\,a_{i+1} \text{ для всех } i = 0,1,\ldots, q-1.$$

Максимальный цикл для T есть непустое подмножество максимальных элементов для отношения T^*. Оно обозначается $\mathrm{tc}(T)$:

$$a \in \mathrm{tc}(T) \iff a\,T^*b \quad \text{для всех } b \neq a.$$

(a) Проверьте, что максимальный цикл для турнира T состоит из одного элемента тогда и только тогда, когда он является победителем по Кондорсе для T ($a\,T\,b$ при всех $b \neq a$). В частности, для турнира (8) максимальный цикл есть все множество A.

(b) Покажите, что $\mathrm{tc}(T)$ – наименьшее по включению подмножество B множества A, удовлетворяющее условию

$$\text{для всех } a \in B,\ b \notin B\text{:} \quad a\,T\,b\,.$$

Выведите отсюда, что $\mathrm{tc}(T)$ никогда не состоит ровно из двух элементов.

(c) Если $\mathrm{tc}(T)$ не состоит из одного элемента, то это T цикл размера не менее 3. Это означает, что можно так упорядочить $\mathrm{tc}(T)$, что $\mathrm{tc}(T) = \{a_1, \ldots, a_k\}$, где

$$a_i\,T\,a_{i+1},\quad i = 1,\ldots,k-1, \quad \text{и} \quad a_k\,T\,a_1\,.$$

Подсказка: если T не имеет победителя по Кондорсе, то каждый исход из $\mathrm{tc}(T)$ проигрывает по крайней мере одному другому исходу из $\mathrm{tc}(T)$. Рассмотрим максимальный по включению T цикл из $\mathrm{tc}(T)$. Докажите, что он должен совпасть с $\mathrm{tc}(T)$.

(d) Покажите, что любое бинарное дерево на A выбирает по турниру T кандидата из максимального цикла для T. Рассмотрите деревья последовательного исключения (как в вопросе (a) из упражнения 9.5) при всех возможных порядках кандидатов. Фиксируем турнир T и покажем, что при изменении этого порядка все исходы из максимального цикла могут быть выбраны.

9.11. Непокрытое множество (Мнллер [1980])

Для данного турнира T на A определим отношение покрытия так:

$$\{b \text{ покрывает } a\} \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$\{a \neq b,\ b\,T\,a \text{ и для всех } c \in A\colon\ a\,T\,c \Rightarrow b\,T\,c\}.$$

Отношение покрытня является транзитивным, хотя и необязательно полным. Непокрытое множество из T обозначается $\mathrm{uc}(T)$ и состоит из максимальных элементов этого отношения:

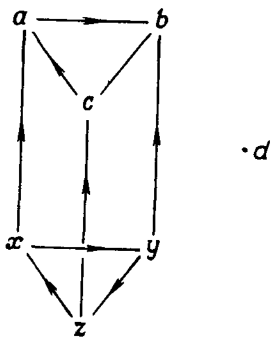
$$\{a \in \mathrm{uc}(T)\} \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$\{\text{не существует } b \in A\colon\ b \text{ покрывает } a\}.$$

(a) Докажите, что исход a принадлежит непокрытому множеству тогда и только тогда, когда выполняется свойство (14). Покажите, что (i) непокрытое множество является подмножеством максимального цикла (упражнение 9.10) и (ii) непокрытое множество содержит всех победителей Копленда для T.

(b) Пусть T есть турнир (8). Покажите, что непокрытое множество есть $\{a,b,d\}$. Рассмотрим далее турнир T на $A = \{1,2,\ldots,n\}$, который совпадает с порядком $1 > 2 > \ldots > n$ за исключением $n\,T\,1$. Покажите, что соответствующее непокрытое множество есть $\{1,2,n\}$, и сравните его с максимальным циклом.

(c) Покажите, что непокрытое множество состонт из единственного элемента тогда и только тогда, когда это есть победнтель по Кондорсе для T. В противном случае ограннчение T на $\mathrm{uc}(T)$ не имеет победителя по Кондорсе и, следовательно, $\mathrm{uc}(T)$ состонт по крайней мере из четырех элементов. *Подсказка:* каждый исход вне $\mathrm{uc}(T)$ должен быть покрыт некоторым исходом из $\mathrm{uc}(T)$. Предположим далее, что T не нмеет победителя по Кондорсе, однако $a \in \mathrm{uc}(T)$ побеждает всякий другой исход нз $\mathrm{uc}(T)$. Положнм $B = \{b \mid b \neq a,\ b\,T\,a\}$. Исход из B покрывается некоторым нсходом из $\mathrm{uc}(T)$. Протнворечие.

(d) Мы знаем (следствие из теремы 9.5), что метод многоэтапного исключения выбнрает кандидата из непокрытого множества (для любого порядка на A). Покажнте на прнмере, что при изменении порядка на A не могут быть получены все исходы из uc(T). Приведенный ниже граф представляет турнир T на $A = \{a, b, c, d, x, y, z\}$ при соглашении, что всякая непомеченная стрелка идет вниз (т.е. $a\,T\,d$, $d\,T\,y$, $c\,T\,x$). Проверьте, что непокрытое множество есть $\{a, b, c, d\}$. Покажите, что d никогда не может быть избран по алгоритму (12) вне зависимости от порядка на A.



Глава 10

Judging Неманипулируемость и устойчивость ядра

Обзор

При голосовании по правилу относительного большинства иногда бывает целесообразно отдать свой голос не наилучшему для себя кандидату, а некоторому другому: если я знаю, что наиболее предпочтительный для меня кандидат a все равно не пройдет, поскольку кандидаты b и c наверняка наберут больше голосов, то я лучше помогу тому кандидату из b, c, который для меня предпочтительнее. При любом методе голосования, как только выборщик осознает, что его голос оказывает влияние на конечный результат, он дважды подумает, прежде чем отдать его. Возможно, что наивное голосование, подсказанное истинными предпочтениями выборщика, не лучшим образом работает в его интересах. Вместо того чтобы пассивно сообщать свое мнение о кандидатах, он действует как игрок в игре голосования, стремясь максимизировать выигрыш от своего голоса.

При реальных выборах невозможно отличить стратегически измененные сообщения о предпочтениях выборщиков от истинных предпочтений. Поскольку мнение выборщика *юридически* является его личной информацией, то открыто заявленное неправдивое сообщение является полностью законным действием.

В некоторых ранних исследованиях методов голосования, если и признавалась возможность стратегических аспектов, то лишь в контексте неприятного недоразумения, связанного с нечестно поданным голосом. Смотри ссылки на Борда в Страффин [1980] и на Додгсона в Фаркуарсон [1969]. Математически осмысленный штурм этой проблемы начался только в последние 15 лет. Основной вопрос здесь: можем ли мы построить *защищенное от манипулирования* правило голосования, т.е. такое правило, что каждый индивидуальный выборщик, будучи изолирован в избирательной кабине, всегда захочет сообщить свое мнение правдиво?

В случае бинарного выбора (когда имеются только два кандидата) голосование по правилу большинства является неманипулируемым. Если кандидатов не менее трех, то единственным неманипулируемым правилом голосования является диктаторское правило. Этот важный результат был доказан Гиббардом [1973] и Сэттертуэйтом [1975].

Теорема Гиббарда – Сэттертуэйта является весьма общим утверждением. Диктаторское правило отдает право выбора в руки единственного выборщика (одного и того же при всех профилях). Ясно, что мы отвергаем такое правило, как наиболее несправедливое. Однако для любого недиктаторского правила голосования существует такой профиль предпочтений, при котором некоторому агенту выгодно не сообщать правдиво свои предпочтения. Таким образом, голосование не является заслуживающим доверия механизмом по сбору информации о предпочтениях выборщиков. Некоторый стратегический шум всегда будет сопутствовать процессу сбора информации. Мы сформулируем и докажем эту теорему в разд. 10.1. Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы Эрроу (теорема 11.2). Мы также обсудим некоторый вариант теоремы для *вероятностных* правил голосования, при которых исходом правила голосования является лотерея на множестве кандидатов (значит, на окончательное избрание влияет некоторый элемент случайности). Хотя можно найти неманипулируемые вероятностные правила голосования, которые являются анонимными и нейтральными, однако они весьма не эффективны (см. замечание 10.2).

Как же может быть преодолен отрицательный результат Гиббарда – Сэттертуэйта? Главной особенностью этой теоремы является то, что любой профиль предпочтений является допустимым входом для правил голосования (предположение о неограниченной области). Если мы можем из содержательных соображений наложить ограничение на область предпочтений, то угроза стратегических манипуляций, возможно, исчезнет. Например, предположим, что профиль предпочтений изменяется в области, в которой не возникает парадокса голосования, т. е. в которой победитель по Кондорсе всегда существует. Тогда голосование по правилу большинства (выбирающее в точности победителя по Кондорсе) защищено от манипулирования и даже устойчиво при манипуляциях любой коалиции выборщиков. Мы докажем этот важный результат в разд. 10.2 (лемма 10.3). Затем мы изучнм конкретный пример ограниченной области, исключающий парадокс голосования, а именно *унимодальные* предпочтения. Предположим, что множество A исходов (кандидатов) может быть линейно упорядочено, как, скажем, политики, которые упорядочиваются от левых до правых. Предпочтение на упорядоченном множестве A является унимодальным, еслн оно возрастает до некоторого исхода (пика) и убывает после него. Мы обсудим несколько соответствующих экономических примеров в разд. 10.2.

Начиная с разд. 10.3, мы возвращаемся к неограниченной области предпочтений. В разд. 10.3 мы рассматриваем манипуляцни коалиций выборщиков. Может ли коалнция выборщнков, совместно договорившись о некоторой стратегни голосования, увеличить полезностн всех членов коалнцни, сколь упорно ни старались бы выборщнки вне коалиции блокировать эти действия? Формально это приводит к рассмотрению исхода из *ядра* (НТП) кооперативной игры, порожденной выигрывающнми коалициями для данного правила голосования (коалиция называется выигрывающей, если она может форсировать избрание любого кандидата по своему желанию). Если правило голосования приводит к избранию кандидата из ядра, то коалиции скорей всего не возникнут, и мы прнходнм к стратегнчески устойчивому методу (хотя из устойчивости ядра не следует неманипулируемость).

Теорема Накамуры (теорема 10.2) характеризует все кооперативные игры, в которых ядро всегда не пусто. В частности, при p кандидатах и n выборщнках существование ядра возможно, если только вынгрывающая коалиция содержит не менее $n \cdot (p-1)/p$ выборщиков (это крнтнческое значение квоты не может быть снижено). Мы обсудим этот и связанные с ним результаты для простейшей модели голосования, в которой кандидаты образуют подмножество некоторого евклидового пространства, а выборщики имеют сферическне предпочтения (т.е. полезность для выборщика данного кандидата измеряется расстоянием со знаком минус от данного кандидата до идеальной точки для данного выборщика). В разд. 10.4 мы введем усиленное свойство ядра, при котором распределение силы различных коалиций определяется числом кандидатов, которых коалиция данного размера может блокировать (это – так называемая вето-функция). Соответствующее свойство ядра является более сильным, чем только при учете выигрывающих коалиций, и следовательно, множество устойчивых исходов меньше. Существует (единственная) наибольшая анонимная вето-фуикция, дающая непустое ядро при любом профиле. Она наделяет каждую коалицию вето-силой, почти пропорциональной ее размерам (теорема 10.3). Мы рассматриваем этот результат как математическую формулировку "прииципа меньшинства", призванного защитить права малых коалиций и не приписывать диктаторской силы любой коалиции большинства. Наконец, в разд. 10.5 мы сопоставляем наши результаты с обзором литературы по реализации и стратегическому голосованию.

10.1 Теорема Гиббарда – Сэттертуэйта

Предположим, что A – конечное множество исходов (кандидатов), и обозначим через $L(A)$ множество линейных порядков (полных, транзитивных, асимметричных отношений на A). Пусть N – конечное множество агентов (выборщиков) с текущим элементом i. Мнение выборщика i описывается элементом u_i из $L(A)$, т.е. порядком на A (безразличия исключаются). Как обычно, этот порядок будет записываться с помощью функции полезности, например, $u_i(a) > u_i(b) > u_i(c) > u_i(d)$ означает, что a лучше всех, b на втором месте и так далее.

Правило голосования есть однозначное отображение S из $L(A)^N$ *на* A, ставящее в соответствие каждому профилю $u = (u_i,\ i \in N)$ исход выборов $S(u)$. То, что S является однозначным, существенно для определения неманипулируемости (свойство (1)). Предложение о том, что S является отображением на, означает, что никакой кандидат не может быть априори отброшен: для каждого кандидата a существует такой профиль u, что $S(u) = a$. Скажем, что правило голосования S *защищено от манипулирования*, если для любого профиля $u \in L(A)^N$ и всякого агента i выполнено

$$\text{для всех } v_i \in L(A): \quad u_i(S(u)) \geq u_i(S(v_i, u_{-i})) . \tag{1}$$

Здесь v_i – предпочтение (возможно, отличающееся от истинного), которое агент i может сообщить вместо своего истинного предпочтения u_i. Если он так сделает при фиксированных сообщениях остальных, то получится профиль (v_i, u_{-i}), в котором компонента j равна u_j при всех $j \neq i$. Неравенство (1) означает, что неточное сообщение не дает выигрыша.

При бинарном выборе (когда A состоит из двух кандидатов) неманипулируемость эквивалентна монотонности, и поэтому она выполняется для многих недиктаторских правил голосования (например, для правила большинства; подробнее см. в разд. 11.1). Если кандидатов три или более – картина совсем другая.

Теорема 10.1 (Гиббард [1973], Сэттертуэйт [1975]). *Если A содержит по крайней мере три исхода, то правило голосования S защищено от манипулирования* **тогда и только тогда,** *когда оно является диктаторским: $S = S^{i^*}$ для некоторого агента i^* – диктатора, где*

$$\text{для всех } u \in L(A)^N: \quad S^{i^*}(u) = \operatorname{top} u_{i^*} .$$

Доказательство использует вспомогательное понятие строгой монотонности. Нам понадобятся следующие обозначения. При заданных профилях u, v и исходе a скажем, что *a сохраняет или усиливает свою относительную позицию при переходе от u к v,* если

$$u_i(a) > u_i(b) \Rightarrow v_i(a) > v_i(b) \text{ для всех } i \text{ и } b \neq a .$$

Далее скажем, что профиль *v получен из u подъемом a*, если

(i) u и v совпадают на $A \setminus \{a\}$:

$$u_i(b) > u_i(c) \Leftrightarrow v_i(b) > v_i(c) \text{ для всех } i \text{ и всех } b, c \neq a;$$

(ii) a сохраняет свою относительную позицию при переходе от u к v;

(iii) $v \neq u$, значит, позиция a усиливается по крайней мере для одного агента.

Определение 10.1. *Правило голосования S называется*

строго монотонным, *если для всех профилей* u,v *и для любого исхода* a *выполнено*

$$\{v \text{ получен из } u \text{ подъемом } a\} \Rightarrow \{S(v) = S(u) \text{ и/или } S(v) = a\}. \qquad (2)$$

Если правило голосования является строго монотонным, то усиление любого кандидата (который мог быть избранным или не избранным первоначально) может либо подтвердить избрание этого кандидата или оставить в силе избрание предыдущего кандидата, но не может привести к избранию некоторого *третьего* кандидата. Короче говоря, усиление одного кандидата не может помочь другому кандидату.

Сравним свойство (2) со свойством монотонности, введенном в разд. 9.2, которое записывается в виде

$$\{v \text{ получен из } u \text{ подъемом } a \text{ и } S(u) = a\} \Rightarrow \{S(v) = a\}.$$

Значит, из строгой монотонности следует монотоиность. Две следующие леммы показывают, что строгая монотонность в действительности *гораздо* сильнее, чем обычная монотонность.

Лемма 10.1. *Правило голосования* S *является строго монотонным тогда и только тогда, когда для любых* u,v *и любого* a *выполнено*

$$\{a = S(u) \text{ и } a \text{ сохраняет или усиливает свою относительную позицию при переходе от } u \text{ к } v\} \Rightarrow \{a = S(v)\}. \qquad (3)$$

Непосредственное доказательство леммы 10.1 является предметом упражнения 10.2. Сохранение относительной позиции a при переходе от u к v состоит в перемешивании в предпочтении каждого агента тех кандидатов, которые лучше a и отдельно тех кандидатов, которые хуже a. Например, пусть u_i определено так:

$$u_i(b) > u_i(d) > u_i(a) > u_i(e) > u_i(c) > u_i(f),$$

тогда мы можем заменить его на любое v_i, в котором наилучшими двумя кандидатами являются кандидаты b, d (в произвольном порядке), а наихудшие кандидаты – c, e, f. Это уже подчеркивает значимость строгой монотонности. Факт избрания a зависит только от подмножеств кандидатов лучших, чем a, для различных выборщиков.

Лемма 10.2 (Мюллер и Сэттертуэйт [1977]). *Предположим, что A состоит не менее чем из трех исходов. Тогда правило голосования S строго монотонно* **тогда и только тогда**, *когда оно является диктаторским.*

Доказательство. Фиксируем агента i^* и проверим, что диктаторское правило $S(u) = \mathrm{top}(u_{i^*})$ строго монотонно. Этим будет доказана достаточность. Для доказательства необходимости фиксируем строго монотонное правило голосования.

Обозначение: $N(u,a,b)$ – (возможно пустое) подмножество выборщиков, для которых a лучше b по профилю u.

Шаг 1. Для любой коалиции T и для исходов a,b положим $U(T,a,b) = \{u \in L(A)^N \mid$ для $i \in T$ a – наилучший кандидат для профиля u_i, а b – второй; для $i \in N \backslash T$ b – наилучший кандидат для u_i, а a – второй$\}$.

Докажем эквивалентность следующих трех утверждений:

(i) $S(U(T,a,b)) = \{a\}$;

(ii) существует $u \in L(A)^N$: $N(u,a,b) = T$ и $S(u) = a$;

(iii) для всех $u \in L(A)^N$: $N(u,a,b) = T \Rightarrow S(u) \neq b$.

Ясно, что (i) $\Rightarrow$ (ii) (рассмотрите любой $u \in U(T,a,b)$). Предположим далее, что (ii) выполнено, а (iii) – нет. Для некоторого u – $N(u,a,b) = T$ и $S(u) = a$, в то время как для некоторого v выполнено $N(v,a,b) = T$ и $S(v) = b$. Поднимая a и b наверх и сохраняя относительную позицию a по отношению к b, мы преобразуем профиль u в некоторый профиль $u' \in U(T,a,b)$, а v – в $v' \in U(T,a,b)$. Получили противоречие с тем, что при переходе от u' к v' сохраняется относительная позиция a. Предположим, наконец, что выполнено (iii) и рассмотрим профиль u из $U(T,a,b)$. По (iii) $S(u) \neq b$, в то время как при u имеются только два оптимальных по Парето исхода: a,b. Таким образом, если S выбирает оптимального по Парето кандидата, то должно быть $S(u) = a$ и (i) доказано.

Проверим теперь оптимальность по Парето S. Поскольку S является отображением на, то для любого $a \in A$ существует профиль u, такой что $S(u) = a$. Поднимая a на вершину каждого предпочтения в u, мы сохраним его избрание, значит, по строгой монотонности получаем

$$\{a \text{ – наилучший кандидат для каждого } u_i\} \Rightarrow \{S(u) = a\}. \qquad (4)$$

Рассмотрим далее профиль u, при котором a превосходит по Парето b. Если $S(u) = b$, то поднимая a и b наверх при сохранении относительной позиции a по отношению к b, мы не подвергнем сомнению выбор b, что противоречит (4). Это завершает доказательство эквивалентности свойств (i), (ii) и (iii).

Обозначим через $B(a,b)$ множество коалиций, которые удовлетворяют условиям (i) – (iii). Нам нужно доказать, что $N \in B(a,b)$ при всех a,b.

Шаг 2. Доказательство параллельно теореме Эрроу (теорема 11.2). Выберем минимальную по включению коалицию T в $\cup B(x,y)$, $(x,y) \in A \times A$. Пусть T принадлежит $B(a,b)$.

Предположим, что T состоит более, чем из одного элемента. Разобьем T на $T_1 \cup T_2$ так, что ни T_1, ни T_2 не принадлежит $B(x,y)$ ни при каких x,y. Выберем третий исход c, отличный от a и b, и построим следующий профиль:

T_1	T_2	$N \setminus T$
a	c	b
b	a	c
c	b	a

в котором каждый другой исход доминируется по Парето исходами a,b или c. Поскольку $N(u,a,b) = T$ и $T \in B(a,b)$, то из (iii) следует $S(u) \neq b$. Так как $N(u,a,c) = T_1$ и $T_1 \notin B(a,c)$, то из (ii) следует $S(u) \neq a$. Поскольку $N(u,c,b) = T_2$ и $T_2 \notin B(c,b)$, то из (ii) следует $S(u) \neq c$. Таким образом, получаем противоречие с оптимальностью по Парето S. Значит, T одноэлементно, скажем $T = \{1\}$.

Проверим далее, что $\{1\} \in B(x,y)$ для всех $x,y \in A$. Выберем третий исход d и рассмотрим профиль, при котором исходы a,b,d доминируют по Парето любой другой исход и, кроме того:

$$\begin{array}{cc} 1 & N\backslash\{1\} \\ a & b \\ b & d \\ d & a \end{array} \qquad (5)$$

Поскольку $N(u,a,b,d)=\{1\}$ и $\{1\}\in B(a,b)$, то $S(u)\neq b$. Но также $S(u)\neq d$, поскольку d доминируется по Парето b. Значит, $S(u)=a$. Поскольку $N(u,a,d)=\{1\}$, то из (ii) следует $\{1\}\in B(a,d)$. Для доказательства $\{1\}\in B(c,d)$ для всех c используются аналогичные рассуждения (подойдет профиль, как в формуле (7) из гл. 11).

Остается доказать, что агент 1 является диктатором. Фиксируем предпочтение $u_1\in L(A)$ с наилучшим исходом a. Рассмотрим профиль u_1,v_{-1}, при котором для каждого v_i, $i\neq 1$, исход a является наихудшим. Тогда $N(u,a,b)=\{1\}$ при всех $b\neq a$, значит, $S(u_1,v_{-1})\neq b$ по (iii), откуда $S(u_1,v_{-1})=a$.

Наконец, возьмем любой профиль u_{-1} для коалиции $N\backslash\{1\}$. Поскольку a сохраняет или усиливает свою относительную позицию при переходе от (u_1,v_{-1}) к (u_1,u_{-1}), то мы получаем $S(u_1,u_{-1})=a$. Это и доказывает, что агент 1 является диктатором.

QED

Доказательство теоремы 10.1. Достаточность (неманипулируемость диктаторского правила) очевидна. Для доказательства необходимости предположим, что S – неманипулируемое правило. Докажем, что S строго монотонно. Для этого фиксируем профиль u, агента i и некоторое иное предпочтение v_i агента i, полученное из u_i подъемом a. Мы должны доказать, что $S(v_i,u_{-i})$ равно $S(u)$ и/или a.

Предположим сначала, что $S(u)=b\neq a$. Если $S(v_i,u_{-i})=c$ и $c\neq b,a$, то мы получим *либо* $u_i(b)>u_i(c)$ и $v_i(b)>v_i(c)$, *либо* $u_i(b)<u_i(c)$ и $v_i(b)<v_i(c)$ (поскольку относительная позиция b по отношению к c не изменилась). В первом случае

$$v_i(S_i(u_i,u_{-i}))>v_i(S_i(v_i,u_{-i}))\,,$$

значит, агент i манипулирует при (v_i, u_{-i}), сообщая u_i. Во втором случае

$$u_i(S_i(v_i, u_{-i})) > u_i(S_i(u_i, u_{-i})),$$

значит, агент i манипулирует при (u_i, u_{-i}), сообщая v_i.

Предположим далее, что $S(u) = a$. Если $S(v_i, u_{-i}) = b \neq a$, то мы имеем *либо* $u_i(b) > u_i(a)$, *либо* $u_i(b) < u_i(a)$ и $v_i(b) < v_i(a)$ (поскольку v_i получено из u_i подъемом a). В первом случае агент i манипулирует при (u_i, u_{-i}), сообщая v_i. Во втором случае он манипулирует при (v_i, u_{-i}), сообщая u_i.

QED

Замечание 10.1. Теорема 10.1 обобщается для произвольной игровой формы, т.е. для механизма принятия решений, при котором каждому агенту соответствует некоторое пространство сообщений (его сообщение может быть более сложным, чем просто объявление своих предпочтений). Понятие доминирующей стратегии заменяет правдивое сообщение стратегий. Доминирующая стратегия есть сообщение, являющееся наилучшим независимо от сообщений остальных агентов. При заданной игровой форме на A у каждого выборщика существует доминирующая стратегия при любом профиле тогда и только тогда, когда игровая форма является диктаторской (точное определение и доказательство см. в Мулен [1983], гл. 4). Это обобщение полезно при стратегическом анализе игр с голосованием.

Замечание 10.2. Вероятностное голосование. Рассмотрим игровую форму, которая обрабатывает сообщения всех участников об их предпочтениях и выдает сообщение о некоторой *лотерее* на множестве исходов A. Типичным примером является *случайный диктатор*: каждый выборщик пишет имя своего кандидата на бюллетене, и случайно с равной вероятностью вытаскивается один бюллетень, который и определяет победителя. Этот метод является вероятностной версией правила относительного большинства.

При правиле случайного диктатора доминирующая стратегия выборщика состоит в том, чтобы назвать наилучшего для себя кандидата, поэтому этот метод *защищен* от манипулирования.

Заметим также, что он является анонимным и нейтральным. Хотя при вероятностном голосовании неманипулируемость *совместима* со справедливым распределением права принятия решений (каждый выборщик по построению имеет одинаковое влияние на исход лотереи). Метод случайного диктатора не является однако оптимальным по Парето. Если предположить, что у выборщиков функции полезности фон Неймана – Моргенштерна, то равномерная лотерея по наилучшим для выборщиков кандидатам, как правило, доминируема по Парето.

Гиббард [1977,1978] и Хилленд [1980] получили точную характеризацию неманипулируемых вероятностных правил голосования. Оказывается, вероятностные смеси диктаторских правил суть единственные неманипулируемые правила, удовлетворяющие слабому условию достижимости (подробнее см. в упражнении 10.9). Эти методы строятся за счет фиксации произвольного вероятностного распределения $l = (l_i,\ i \in N)$ на N ($l_i \geq 0$ при всех i и $\sum_{i=1}^{n} l_i = 1$). Каждый выборщик i подает голос за одного кандидата, скажем за a_i. Победитель определяется среди a_i случайным образом в соответствии с распределением l.

С другой стороны, Барбера [1979] отбросил условие достижимости и описал все анонимные, нейтральные и неманипулируемые вероятностные правила голосования. Это множество содержит некоторые вероятностные версии методов подсчета очков, методов Копленда и Симпсона. Результаты Хилленда и Барберы описаны (без доказательства) в упражнении 10.9.

10.2 Унимодальные предпочтения и победители по Кондорсе

Если область предпочтений подходящим образом ограничена, то могут существовать недиктаторские правила голосования. Это справедливо, в частности, когда ограниченная область гарантирует существование победителя по Кондорсе.

Лемма 10.3. *Пусть для заданного множества N с нечетным числом агентов и ограниченной области $D \subset L(A)$ победитель по Кондорсе (обязательно единственный) существует для всякого профиля $u \in D^N$. Тогда правило голосования, ставящее* *в соответствие каждому профилю из D^N победителя по Кондорсе, защищено от манипулирования. Оно также защищено от коалиционного манипулирования: никакая коалиция агентов не может за счет совместного сообщения своих предпочтений сделать лучше каждому своему члену.*

Доказательство. Обозначим через $CW(u)$ победителя по Кондорсе для профиля $u \in D^N$.

Предположим, что существуют профиль $u \in D^N$, коалиция T, совместное сообщение $v_T \in D^T$ такие, что

$$CW(u) = a, \quad CW(v_T, u_{N\setminus T}) = b\,,$$

при этом

$$u_i(a) < u_i(b) \quad \text{для всех } i \in T. \tag{6}$$

По определению победителя по Кондорсе $N(u; a, b)$ – строгое большинство и в силу (6) $N((v_T, u_{N\setminus T}); a, b)$ содержит $N(u; a, b)$. Следовательно, b не может быть победителем по Кондорсе для $(v_T, u_{N\setminus T})$.

QED

Основным примером удачного ограничения области является случай унимодальных предпочтений. Предположим, что множество A исходов линейно упорядочено следующим образом: $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$. Скажем, что предпочтение u на A является *унимодальным*, если существует такой исход a^*, называемый пиком для u, что u строго возрастает до a^* и строго убывает после него:

$$\begin{aligned} a < b \le a^* &\;\Rightarrow\; u(a) < u(b) \\ a^* \le a < b &\;\Rightarrow\; u(a) > u(b) \end{aligned} \qquad \text{для всех } a, b. \tag{7}$$

Например, если пик $a^* = a_1$, то соответствующее унимодальное предпочтение в точности противоположно фиксированному порядку на A; если пик $a^* = a_p$, то унимодальное предпочтение совпадает с порядком на A.

Заметим, что можно допустить безразличия внутри пика. Они исключены только для простоты. Обозначим через $SP(a)$ множество всех унимодальных предпочтений при фиксированном порядке $a_1, \ldots, a_p$.

Примеров, когда предположение унимодальности является адекватиым, огромное множество В политических моделях кандидаты часто упорядочиваются по скалярному критерию, например, по шкале левый – правый (см. Блэк [1958]). Предположение унимодальности означает, что каждый выборщик имеет иа шкале левый – правый идеальную точку и ои предпочитает кандидата слева (справа) от этой точки кандидату, который иаходится еще левее (правее) Второй пример связан с размещением объекта в линейиом городе. Предполагается, что большииство потребителей желает, чтобы объект был расположен как можно ближе к их дому, а значит, их предпочтения уиимодальны. Этот пример может быть обобщен иа случай дерева (см. ниже).

В экономических моделях исход, подлежащий голосованию, часто выражается числовым индексом, таким, как ставка налога или количество производимого общественного продукта: см. пример 10.2. Тогда унимодальность следует нз квазнвогнутости предпочтений.

Лемма 10.4. *Пусть заданы порядок на исходах из A и соответствующая область унимодальных предпочтений $SP(A)$. Если число выборщиков нечетно, то для любого профиля и из $SP(A)^N$ существует единственный победитель по Кондорсе. Он является средним пиком индивидуальных предпочтений.*

Доказательство. Обозначим через a_i пик предпочтения агента i и упорядочим агентов по возрастанию пиков в силу заданного порядка на A:

$$a_1^* \le a_2^* \le \ldots \le a_n^* .$$

Если n иечетно, то число $m = \frac{1}{2}(n+1)$ является целым и a_m^* – *средний* пик. Агенты, пик которых ие меньше чем a_m^* (назовем их правыми), образуют строгое большинство (поскольку $m - 1 < \frac{1}{2}n$), а те, у кого пик не больше a_m^* (назовем их левыми), также образуют строгое большинство (поскольку $m > \frac{1}{2}n$).

Заметим, что средний агент m является одновременно и левым, и правым. Сравним теперь исход a_m^* с любым большим исходом a, $a_m^* < a$. По определению унимодальности (7) все левые будут поддерживать a_m^*. При сравнении a_m^* с меньшим исходом выясняется, что все правые поддерживают a^*_m, что и требовалось.

QED

Если число выборщиков четно, то строго победителя по Кондорсе может не существовать, однако выводы лемм 10.3 и 10.4 по существу сохраняются. Рассмотрим следующий пример с 6 выборщиками и 10 исходами:

$$A = \{1,2,\ldots,10\},\ a^*_1 = 1,\ a^*_2 = a^*_3 = 3,\ a^*_4 = 6,\ a^*_5 = a^*_6 = 7.$$

Исход 3 является победителем по Кондорсе в слабом смысле: при парном сравнении по правилу большинства он побеждает исходы 1, 2 и 7–10 и имеет ничейный результат с исходами 4–6 (выборщики 1–3 против выборщиков 4–6). Таким образом, никакой другой исход не побеждает исход 3 по строгому большинству. То же самое справедливо для исходов 4–6.

Лемма 10.5. *Скажем, что исход является* **слабым победителем по Кондорсе,** *если не существует другого исхода, который был бы предпочтительнее для строгого большинства. Для области унимодальных предпочтений $SP(A)$ рассмотрим профиль из $SP(A)^N$ при нечетном числе агентов в N. Ранжируем пики агентов по возрастанию:*

$$a^*_1 \le a^*_2 \le \ldots \le a^*_n .$$

Тогда все исходы между $a^*_{n/2}$ и $a^*_{n/2+1}$ (включая обе границы) являются слабыми победителями по Кондорсе.

Мы опускаем простое доказательство. Легко произвести неманипулируемый выбор на отрезке $[a^*_{n/2}, a^*_{n/2+1}]$ слабых победителей по Кондорсе. Мы можем выбрать, например, $a^*_{n/2}$ (левый победитель по Кондорсе). Это – (коалиционно) неманипулируемое правило голосования, что легко проверить непосредственно или вывести из леммы 10.4, поскольку $a^*_{n/2}$ – строгий победитель по Кондорсе при $(n+1)$ агентах и профиле из $SP(A)^N$, причем агент $(n+1)$ имеет пик a_1. Подробнее см. в упражнении 10.3.

Теперь мы применим лемму 10.5 к знакомой задаче распределения затрат.

Пример 10.1. Производство общественного продукта при фиксированном распределении затрат.

Рассмотрим экономику производства общественного продукта $(b_1,\dots,b_n;c)$ из разд. 7.1 (квазилинейный случай).

Предположим, что функции доходов b_i строго вогнуты, а функция затрат c выпукла.

Рассмотрим правило равномерного распределения затрат. Если уровень общественного продукта $x \geq 0$, то чистая полезность агента i (возможно отрицательная) равна

$$b_i(x) - \frac{1}{n}c(x)\,. \tag{8}$$

Это – строго вогнутая функция по x. Следовательно, на любом интервале $[0,a]$ возможных уровней производства предпочтение агента i является унимодальным, а его пик есть максимум функции (8), единственный по предположению строгой вогнутости. Таким образом, мы имеем очень простой неманипулируемый и сбалансированный по бюджету механизм: попросить каждого агента сообщить свой пик, произвести общественный продукт на уровне, соответствующем среднему из сообщенных пиков (если n четно, то выбрать левого победителя по Кондорсе $a^*_{n/2}$) и поделить затраты на общественный продукт поровну.

Этот механизм, однако, не приводит к производству оптимального по Парето уровня продукта за исключением случая совпадения, и он может привести к чистым потерям индивидуальных агентов (не выполнена индивидуальная рациональность).

Рис. 10.1

Другой областью, гарантирующей существование победителя по Кондорсе (хотя бы в слабом смысле), является профиль из множества унимодальных предпочтений *на дереве* (Деманж [1982]). Предположим, что исходы из A являются вершинами дерева, т.е. связного графа без циклов. Соответствующий пример приведен на рис. 10.1. Если мы выберем две вершины на дереве, то существует единственный путь, их соединяющий. Значит, утверждение "вершина x лежит между вершинами y и z" является корректиым (на рисунке c лежит между e и g, но a – не лежит). Для заданного дерева предпочтение u_i называется унимодальным, если существует такой наилучший исход x^*, что

$$\text{для всех различных } x, y, \text{ не совпадающих с } x^*:$$
$$\{x \text{ между } x^* \text{ и } y\} \Rightarrow \{u_i(x) > u_i(y)\}. \qquad (9)$$

Типичным примером является задача размещения общественного объекта (пример 1.1, упражнение 1.1). Если агент расположен в вершине x^*, то полезность размещения измеряется расстоянием со знаком минус от x^* до точки размещения, а значит, выполнено (9). В противоположность этому предпочтение $f > h > d > c > \ldots$ (см. выше) не является унимодальным.

Результаты лемм 10.3 и 10.4 обобщаются: для любого профиля, составленного из унимодальных предпочтений на дереве, строгий (слабый) победитель по Кондорсе существует при нечетном (четном) числе агентов. Более того, в случае, если полезности агентов равны расстоянию со знаком минус до их пика, то победитель (победители) по Кондорсе совпадают с решением утилитарной задачи (минимизации суммы расстояний до индивидуальных пиков). Детали см. в упражнении 10.4.

Замечание 10.3. Если предпочтения унимодальны (при заданном порядке на A), то победитель по Кондорсе определяет неманипулируемое правило голосования. Для этой области существует много других неманипулируемых правил. Один из таких примеров – левое правило, при котором каждый агент сообщает свой пик и выбирается наименьший пик (относительно заданного порядка на A).

Класс таких неманипулируемых правил может быть, тем не менее, полностью описан с помощью понятия *обобщенного победителя по Кондорсе* в следующем смысле. К заданным n выборщикам добавим произвольно $n-1$ исходов, представляющих пики n–1 *фиктивных* выборщиков. Затем попросим каждого *реального* выборщика отдать свой голос за некоторый исход по его усмотрению, добавим в урну $n-1$ пиков фиктивных выборщиков, изберем победителя по Кондорсе по всем $2n-1$ бюллетеням (он будет единственным, поскольку $2n-1$ нечетно). Этот метод является коалиционно неманипулируемым для реальных агентов.

Оказывается, что этот класс правил голосования охватывает все неманипулируемые правила в случае унимодальности (Мулен [1980*a*]). Упражнение 10.3 дает еще несколько примеров обобщенных победителей по Кондорсе.

Замечание 10.4. Существуют другие ограниченные области предпочтений, для которых имеется недиктаторское, неманипулируемое правило голосования. Тем не менее характеризация этих областей не приводит к примерам, столь же просто интерпретируемым как унимодальная область. Абстрактные правила из Калаи и Мюллер [1977] и другие рассматриваются в очень хорошей статье Мюллер и Сэттертуэйт [1985]. Там указаны, однако, другие приложения этих правил.

10.3 Устойчивость ядра

Вернемся теперь к неограниченной области предпочтений. Неманипулируемое правило голосования предотвращает манипуляции отдельного отклоняющегося выборщика. Если я знаю, что все остальные сообщили правду, могу ли я найти выгодное неточное сообщение? В силу отрицательного результата Гиббарда – Сэттертуэйта только весьма скромные требования стабильности могут быть выполнены для разумных (в частности, анонимных) правил голосования.

В следующих двух разделах мы полагаем манипуляцию *безопасной*, если игрок (игроки) осознает ее выгодность для себя вне зависимости от того, как будут реагировать неманипулирующие выборщики (т.е. даже если эти выборщики реализуют обоснованные угрозы). Это предположение делает выгодные манипуляции более трудно осуществимыми. С другой стороны, мы позволяем образовываться коалициям и совместно обсуждать неточные сообщения, таким образом расширяется спектр стратегических маневров.

Для заданного правила голосования и заданного профиля предпочтений свойство, по которому никакая коалиция выборщиков не может безопасно и с выгодой для себя отклониться, называется свойством ядра игры с нетрансферабельной полезностью (см. разд. 4.4). Рассмотрим, например, состоятельное по Кондорсе правило. При этом правиле большинство выборщиков, объединившись, может форсировать избрание любого кандидата по своему желанию. Поэтому по существу возможны только два случая. Если (строгий) победитель по Кондорсе существует, то он является единственным исходом из ядра; с другой стороны, если каждый исход проигрывает некоторому другому исходу в парном сравнении по правилу большинства, то ядро пусто. Таким образом, либо ядро состоит из единственного исхода, либо оно пусто.

Определение 10.2. *Рассмотрим произвольное правило голосования S (отображение из $L(A)^N$ в A). Скажем, что коалиция T выборщиков является* **выигрывающей**, *если для любого кандидата a у коалиции T имеется сообщение $v_T \in L(A)^T$, которое форсирует избрание a:*

$$\text{для всех } v_{N\setminus T} \in L(A)^{N\setminus T}: \quad S(v_T, v_{N\setminus T}) = a\,.$$

Обозначим через $W(S)$ множество выигрывающих коалиций для правила голосования S.

Таким образом, выигрывающая коалиция для данного правила голосования обладает всей полнотой права принятия решения в предположении, что члены этой коалиции могут координировать свои сообщения. Конечно, при конкретном профиле предпочтений данная выигрывающая коалиция может образоваться, а может и нет в зависимости от конфликта мнений ее участников.

Как уже отмечалось, для любого состоятельного по Кондорсе правила коалиция T является выигрывающей, если она содержит строгое большинство выборщиков. Сообщая предпочтения

v_T, указывающие на одного и того же кандидата a как на наилучшего для каждого v_i, $i \in T$, коалиция делает a победителем по Кондорсе независимо от сообщений выборщиков из $N \setminus T$. Если $|N|$ нечетно, то коалиции большинства суть единственные выигрывающие коалиции, а если $|N|$ четно, то некоторые коалиции, состоящие ровно из половины всех выборщиков, также могут быть выигрывающими в зависимости от конкретного состоятельного по Кондорсе правила.

В качестве второго примера рассмотрим метод Борда. Для любого профиля он выбирает победителя по Борда. Мы утверждаем, что любая коалиция T, содержащая строго больше *двух третей* выборщиков, является выигрывающей. В самом деле, фиксируем кандидата a и рассмотрим сообщение v_T, при котором a – наилучший кандидат при любом v_i, а все остальные кандидаты расставлены таким образом, что они получают одну и ту же оценку Борда на множестве T. Предположим для простоты, что $|T|$ четно. Тогда припишем половине выборщиков из T некоторое конкретное предпочтение на $A \setminus a$ и припишем другой половине выборщиков прямо противоположное предпочтение. В силу обычного соглашения очки Борда равны $0,1,\dots,p-1$, а поэтому оценка внутри T кандидата a равна $|T| \cdot (p-1)$, в то время как оценка любого другого кандидата равна $|T| \cdot (p-2)/2$. От коалиции $N \setminus T$ кандидат получает не более $(n-|T|) \cdot (p-1)$ очков, следовательно, a всегда будет единственным победителем по Борда, если

$$|T| \cdot (p-2)/2 + (n-|T|) \cdot (p-1) < |T| \cdot (p-1) .$$

Это неравенство выполнено при $\frac{2}{3} \cdot n < |T|$, что и требовалось доказать. В случае, если $|T|$ нечетно, можно построить сообщение коалиции T, при котором a – наилучший кандидат, а все остальные кандидаты получают почти одинаковое количество очков Борда: подробнее см. в упражнении 10.7. Там же показано, что если коалиция содержит менее двух третей избирателей, то она не является выигрывающей.

На теоретико-игровом жаргоне (см. Оуэн [1982], гл. 8) множество $W(S)$ выигрывающих коалиций при правиле S образуют *простую игру*. Если S монотонно (см. разд. 9.2), то выигрывающие коалиции также обладают свойством монотонности

$$\{T \in W(S) \text{ и } T \subset T'\} \Rightarrow \{T' \in W(S)\}. \tag{10}$$

Если S является отображением на A (см. определение 10.1), то максимальная коалиция N является выигрывающей: $N \in W(S)$.

Определение 10.3. *Для заданных правила голосования S и для профиля предпочтений $u \in L(A)^N$ скажем, что кандидат a является* **доминируемым**, *если существуют кандидат b и выигрывающая коалиция T, единогласно считающая, что b лучше a:*

$$\exists T \in W(S),\ \exists b \in A \setminus a\colon\ u_i(b) > u_i(a) \text{ для всех } i \in T.$$

Ядром для S при профиле u назовем (возможно, пустое) множество недоминируемых кандидатов. Обозначим его через $C_S(u)$. Скажем, что правило голосования имеет устойчивое ядро, если его ядро $C_S(u)$ непусто при любом профиле u.

Устойчивость ядра для правила голосования зависит только от простой игры ее выигрывающих коалиций. Существует очень простое правило проверки устойчивости ядра этой игры. Назовем *числом Накамуры* простой игры $W(S)$ минимальное число ν выигрывающих коалиций, которые имеют пустое пересечение. Если все коалиции из $W(S)$ имеют непустое пересечение, то положим $\nu = +\infty$. В противном случае ν – минимальное число, для которого можно найти ν коалиций из $W(S)$, имеющих непустое пересечение.

Теорема 10.2 (Накамура [1975]). *Правило голосования S имеет устойчивое ядро тогда и только тогда, когда число Накамуры соответствующей простой игры строго больше числа кандидатов.*

Мы докажем этот результат в следующей главе, где он будет сформулирован в контексте агрегирования предпочтений (теорема 11.4).

Рассмотрим состоятельное по Кондорсе правило. Его выигрывающие коалиции суть все коалиции с числом выборщиков больше половины. Значит, число Накамуры равно 3, если только $|N| \geq 3$ (за единственным исключением $|N| = 4$ при $\nu = 4$). Таким образом, состоятельные по Кондорсе правила *не* обладают устойчивым ядром, если A состоит по крайней мере из трех кандидатов (другая формулнровка парадокса голосования).

Рассмотрим далее метод Борда, при котором выигрывающая коалиция должна содержать более двух третей всех выборщиков. Тогда при $|N| \geq 10$ число Накамуры равно 4. Любые три коалиции с более чем двумя третями всех выборщиков, должны иметь непустое пересечение, но мы можем найти четыре такие коалиции с пустым пересечением (см. упражнение 10.7 о деталях вычисления числа Накамуры для методов Борда).

Рассмотрим, наконец, анонимную простую игру $W(S)$, т.е. игру с квотой. Коалиция является выигрывающей тогда и только тогда, когда она содержит q выборщиков, где q – заданная *квота*. Для любого анонимного правила голосования (а также для некоторых неанонимных правил) для выигрывающих коалиций получается игра с квотой. Легко посчитать число Накамуры в игре с квотой q:

$$\nu = [n/n - q]\,,$$

где $n = |N|$ и $[x]$ – наименьшее целое число, большее либо равное x. Для того чтобы проверить это, положим $t^* = [n/n - q]$ и заметим, что нахождение (в N) t коалиций размера q с пустым пересечением эквивалентно нахождению t коалиций размера $n - q$, дающих в объединении N. Последнее возможно тогда и только тогда, когда $t(n-1) \geq$ $\geq n \iff t \geq t^*$.

По теореме Накамуры правило голосования с соответствующей квотой q имеет устойчивое ядро тогда и только тогда, когда

$$p < [n/n - q] \iff n \cdot (p-1)/p < q\,,$$

где $p = |A|$. Значит, устойчивость ядра требует достаточно высокой квоты. При трех кандидатах она должна быть не меньше 67 процентов, при пяти кандидатах – не менее 81 процента, а при 20 кандидатах – не менее 96 процентов! При высокой квоте выигрывающая коалиция образуется только в том случае, если агенты почти единогласно признают негодным некоторый исход. Следовательно, ядро, как правило, будет значительным подмножеством множества Парето.

В следующем разделе мы изменим описание силы коалиций (перейдем от игры с выигрывающими коалициями к вето-функции) и уменьшим, таким образом, множество исходов из ядра.

Замечание 10.5. В политологии часто используется *пространственная модель*, описывающая конкуренцию политиков за голоса избирателей. Основными постулатами здесь являются:

(*i*) каждый кандидат представляется точкой в некотором евклидовом пространстве E^K, отражающей его *позицию* по K проблемам, определяющим политическое лицо;

(*ii*) каждый избиратель имеет идеальную точку в E^K, представляющую его собственное мнение по данным вопросам, и сравнивает различных кандидатов по расстоянию (в некоторой метрике в E^K) от его идеальной точки до их позиций. Ядро простой игры (основанной на выигрывающих коалициях) активно изучалось. Мажоритарные игры редко обладают устойчивым ядром (Плотт [1967]), но игры с квотой в этом смысле лучше. Любая квота, большая $\{K/(K+1)\}\cdot n$, приводит к устойчивому ядру (Гринберг [1979]). Эти результаты недавно были существенно обобщены для произвольных простых игр, что привело к аналогу теоремы Накамуры для пространственной модели голосования. Смотри Шофилд [1984], Лебретон [1986], Маккелви и Шофилд [1986].

Замечание 10.6. Были использованы и другие концепции кооперативной устойчивости, такие, как множества решений фон Неймана – Моргенштерна (Уилсон [1971]) и некоторые варианты переговорного множества (Рубинштейн [1980]). При этих более слабых требованиях устойчивости устойчивые исходы существуют даже для правила большинства.

10.4 Принцип меньшинства

Если победитель по Кондорсе не существует, то ядро простой мажоритарной игры пусто. Следовательно, игра, соответствующая голосованию, кооперативно не устойчива. В точных науках неустойчивые образования физического мира обычно (хотя и необязательно) являются переходными и ненаблюдаемыми. В общественных науках основное устремление состоит в том, чтобы рассматривать устойчивость как желательную черту процесса коллективного принятия решений. Неустойчивость плоха, поскольку делает исход менее предсказуемым, а нашу работу как ученых более трудной. Серьезное обоснование желательности устойчивых исходов приведено ниже. Нетрудно понять, что неустойчивость имеет свои привлекательные черты и может быть вполне серьезно более желательной, чем устойчивость. Устойчивость ядра при голосовании является как раз подходящим и очень хорошим примером.

В политической философии плюралистическая и нормативная традиции весьма расходятся в интерпретации парадокса голосования. Плюралистическая традиция (исторические ссылки см. в статье Миллер [1983]) объединяет большинство приверженцев принципа большинства. Она утверждает, что мнение любого большинства избирателей должно быть превалирующим. Формально это соответствует аксиоме состоятельности по Кондорсе (гл. 9) и приводит к кооперативной неустойчивости, если победителя по Кондорсе не существует.

Нормативная традиция (имеющая таких разных приверженцев, как философ Руссо, автор политической утопии Прудон, а также некоторые современные теоретики коллективного выбора) утверждает в противоположность сказанному, что принцип большинства дает возможность однородной коалиции, контролирующей 50 процентов выборщиков, превратиться в настоящего диктатора, что позволяет ей игнорировать противоположное мнение меньшинства, даже если оно составляет 49 процентов. Вполне возможно, что выборщики из этого меньшинства будут испытывать разочарование и попытаются нарушить общественные договоренности, основанные на таком правиле голосования: "Cependant une minorité ne peut pas être à la merci d'une majorité: la justice, qui est la negation de la force, veut que la minorité ait ses garanties" (Прудон [1861], "Однако меньшинство не может быть в полной зависимости от большинства: справедливость, которая является отрицанием силы, требует, чтобы у меньшинства были свои гарантии").

Для того чтобы противопоставить эти две точки зрения, рассмотрим сначала профиль, при котором нет победителя по

Кондорсе. С нормативной точки зрения, если правило голосования действительно наделяет большинство полным правом принятия решения, то циклы Кондорсе порождают кооперативную неустойчивость, угрожающую самим основам общественного консенсуса. Во всяком случае общественные правила должны исключать такие "взрывоопасные ситуации" за счет включения в само правило принятия решений некоторых устойчивых компромиссов, которые позволяют успокоиться коллективным страстям. Однако плюралисты отрицают желательность кооперативной устойчивости. Они утверждают, что циклы Кондорсе являются лучшей защитой для меньшинства, которое всегда может жить надеждой завтра войти во вновь сформированное большинство (Миллер [1983]).

Средством защиты от тирании большинства является *принцип меньшинства*, который требует чтобы *любая* коалиция, сколь малой она ни является, должна располагать хотя бы частичным правом принятия решения. Одним из измерителей силы коалиции является ее способность блокировать то или иное множество исходов (см. теорему 10.2). Мы проиллюстрируем этот принцип на примере, в котором есть победитель по Кондорсе.

Пусть имеются 10 выборщиков и 8 исходов. Две однородные коалиции с 6 и 4 членами соответственно имеют следующие противоположные предпочтения:

Число выборщиков	6	4
	a	h
	b	g
	c	f
	d	e
	e	d
	f	c
	g	b
	h	a

Хотя победителем по Кондорсе является кандидат a (наилучший для большинства), принцип меньшинства позволяет коалиции из четырех членов отвести любые три исхода – a, b, c, а коалиция из 6 выборщиков может отвести (наложить вето) любые четыре исхода – e, f, g, h. Таким образом, d возникает как справедливый компромисс: мнение большинства более влиятельное, но нет тирании.

Формальное определение принципа меньшинства основано на понятии вето-функции.

Определение 10.4. *Для заданного множества исходов A и сообщества N мощности p и n соответственно* **анонимной вето-функцией** *называется неубывающая функция v, действующая из $\{1,\dots,n\}$ в $\{0,\dots,p-1\}$, причем целое число $v(t)=k$ означает следующее: любая коалиция размера t может отвести любое подмножество, содержащее не более k кандидатов.*

Заметим, что анонимная вето-функция не определяет однозначно игровой формы, в которой коалиции агентов наделены распределенной соответствующим образом вето-силой. Мы вернемся к этому моменту после формулировки теоремы 10.3.

Понятие анонимной вето-функции порождает более приемлимое свойство ядра, чем выигрывающие коалиции. Идея состоит в том, что коалиция T блокирует избрание исхода a, если существует такое множество B, не содержащее a, что T может форсировать избрание кандидата из B (T может отвести кандидатов, составляющих дополнение к B) и захочет поступить таким образом, потому что агенты из T считают любого кандидата из B лучше a.

Обозначим через $Pr(T,a,u)$ (возможно, пустое) подмножество исходов, которые строго лучше a для всех членов коалиции T при профиле u. Тогда коалиция блокирует a, если (и только если) T может отвести $A \setminus Pr(T,a,u)$, т.е. $v(|T|) \geq p - |Pr(T,a,u)|$.

Определение 10.5. *Фиксируем A, N и анонимную вето-функцию v. Для заданного профиля $u \in L(A)^N$* **ядро** *для v обозначим через $C_v(u)$. Оно содержит исход a тогда и только тогда, когда*

$$\text{для всех } T \subset N\colon\ |Pr(T,a,u)| + v(t) \leq p-1, \text{ где } t = |T|.$$

Скажем, что анонимная вето-функция v устойчива, если для любого профиля $u \in L(A)^N$ соответствующее ядро непусто:

$$\text{для всех } u \in L(A)^N\text{:}\ C_v(u) \neq \varnothing .$$

Прежде чем охарактеризовать устойчивые вето-функции, найдем вето-функцию в двух принципиально важных случаях.

Пример 10.2. Вето-функция состоятельных по Кондорсе правил голосования

Для любого состоятельного по Кондорсе правила голосования (избирается победитель по Кондорсе, если он существует) строгое большинство выборщиков (такая коалиция T, что $|T| > \frac{1}{2}n$) имеет полный контроль над исходом выборов, а меньшинство ($|T| < \frac{1}{2}n$) не имеет никакого. Следовательно, вето-функция говорит нам ровно то же, что и минимальные коалиции:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \le \frac{1}{2}n , \\ p-1 & \text{при } t > \frac{1}{2}n . \end{cases}$$

Пример 10.3. Вето-функция для метода Борда

Фиксируем A при $|A| = p$ и N при $|N| = n$. Для любого профиля $u \in L(A)^N$ обозначим через $B(u) \subset A$ множество победителей по Борда, т.е. кандидатов, имеющих наибольшую оценку Борда. Скажем, что коалиция T может отвести подмножество C исходов, если существует сообщение $u_T \in L(A)^T$, такое что

$$B(u_T, u_{N\setminus T}) \cap C = \varnothing \quad \text{для всех} \quad u_{N\setminus T} \in L(A)^{N\setminus T}. \tag{11}$$

Поскольку B нейтрально и анонимно, то важен только размер t коалиции T и размер C. Значит, для всякого t, $1 \le t \le n$, существует такое число $v(t)$, $0 \le v(t) \le p-1$, что любая коалиция размера t может отвести любое подмножество размера $v(t)$ и не может отвести подмножество размера $v(t)+1$. В действительности $v(t)$ с ошибкой не более 1 определяется неравенствами:

$$\begin{array}{ll} v(t) = 0 & \text{при } t < \frac{1}{2}n , \\ \lceil z(t) - 1/t \rceil \le v(t) \le \lceil z(t) \rceil & \text{при } \frac{1}{2}n \le t \le \frac{2}{3}n , \\ v(t) = p-1 & \text{при } \frac{2}{3}n < t , \end{array} \tag{12}$$

где $z(t) = 2(2 - n/t)(p-1)$ и $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое число, ограниченное снизу x (x, округленное с избытком). Неравенства (12) доказываются в упражнении 10.7. Строгое меньшинство имеет нулевую силу, а строгое большинство в две трети обладает полной вето-силой.

Охарактеризуем теперь устойчивые анонимные вето-функции.

Теорема 10.3 (Мулен [1981*b*]). *Для фиксированных n,p определим* **пропорциональную вето-функцию** *из условия*

$$v_{n,p}(t) = \left[p \cdot \frac{t}{n} \right] - 1 \quad \text{для всех } t = 1,2,\ldots,n\,1\,, \qquad (13)$$

где $[x]$ – наименьшее целое, ограниченное снизу x. Тогда $v_{n,p}(t)$ – наибольшее целое, строго меньшее чем $p \cdot t/n$. Для любых n,p справедливо:

(*a*) *Пропорциональная вето-функция $v_{n,p}$ устойчива. Обозначим через $C_{n,p}(u)$ соответствующее ядро для профиля u.*

(*b*) *Анонимная вето-функция устойчива тогда и только тогда, когда она ограничена сверху пропорциональной вето-функцией:*

$$\{v \text{ устойчива}\} \Leftrightarrow \{\text{для всех } t = 1,\ldots,n\colon\ v(t) \le v_{n,p}(t)\}\,.$$

Пропорциональное распределение сил (в точности описанное пропорциональной вето-функцией $v_{n,p}$) является оптимальным распределением сил коалиций, если мы хотим, во-первых, гарантировать устойчивость ядра, а во-вторых, сделать множество устойчивых исходов настолько малым, насколько это возможно. Точнее, из $v \le v_{n,p}$ следует, что $C_{n,p}(u)$ является подмножеством $C_v(u)$ при любом профиле u.

При распределении вето-сил между коалициями нужно взвесить выгоды и потери: если мы дадим слишком большую вето-силу, то исчезнут кооперативно устойчивые исходы, а если мы дадим слишком маленькую силу, то устойчивых исходов станет слишком много. Эта дилемма имеет единственное решение, которое мы назвали *принципом меньшинства*: если коалиция состоит из x' процентов выборщиков, то она должна иметь возможность отвести любое подмножество, содержащее менее x процентов кандидатов. Идея состоит в том, чтобы дать *некоторое* право принятии решений (право отвести некоторые исходы) *любой* коалиции, как бы мала она ни была.

Например, пусть $n = p = 5$, тогда пропорциональная вето-функция такова:

$$v_{5,5}(t) = t - 1 \quad \text{для всех } t = 1,2,\ldots,5 .$$

Рассмотрим профиль при 5 кандидатах и 5 выборщиках:

Имя выборщика	1,2	3	4	5	
	a	e	d	c	
	b	a	e	d	(14)
	c	b	a	e	
	d	c	b	a	
	e	d	c	b	

Здесь e блокируется $T = \{1,2\}$, d блокируется $\{1,2,3\}$ (отводится $\{d,e\}$), c блокируется $\{1,2,3,4\}$ (отводится $\{c,d,e\}$), b блокируется N (a превосходит по Парето b). Таким образом, пропорциональное вето-ядро есть $\{a\}$. Отметим, что здесь не существует победителя по Кондорсе.

Для реализации принципа меньшинства нужно построить правило голосования, наделяющее каждую коалицию вето-силой, описываемой пропорциональной вето-функцией.

Рассмотрим для простоты случай $n = p - 1$, при котором пропорциональная вето-функция равна

$$v_{n,n+1}(t) = t .$$

Фиксируем произвольный порядок выборщиков, скажем $N = \{1,2,\ldots,n\}$. Определим следующее правило голосования.

> *Голосование с последовательным вето.* Выборщики полностью сообщают свои предпочтения. Сначала выборщик 1 исключает наименее предпочтительного кандидата, затем исключается наименее предпочтительный кандидат для выборщика 2 из оставшихся и так далее, пока не кончатся выборщики и не останется единственный исход. Этот исход и выбирается

Это правило наделяет любую коалицию T размера t силой отвести любое подмножество C размера t: для того чтобы сделать это, члены коалиции T должны расположить исходы из C внизу своих предпочтений. Заметим, что, хотя правило голосования не является анонимным, вето-сила анонимна.

Для произвольных целых n и p можно адаптировать правило последовательного вето так, чтобы наделить каждую коалицию в точности такой вето-силой, какая ей приписана пропорциональной вето-функцней. Идея состоит в том, чтобы ввести несколько экземпляров кандидатов и дать выборщикам по несколько вето-карточек, причем одна вето-карточка исключает только один экземпляр кандидата: см. упражнение 10.8.

Вето-функции также допускают неанонимные и ненейтральные обобщения, известные как *функции влияния* (Мулен и Пелег [1982]). Главный результат (Пелег [1982]) состонт в характернзации устойчивых функций влияния (с непустым ядром для каждого профиля). Это мощное обобщение теоремы 10.3. По поводу теории функций влняння см. Пелег [1984*а*], Мулен [1983], Ичниши [1986].

10.5 Стратегнческое голосование и теорня реализацни

В этой главе мы рассмотрели две формы стратегической устойчивости: неманипулируемость исключает возможность некооперативных отклонений, а устойчивость ядра отвечает за кооперативные отклоиения. При нашем нормативном подходе оба свойства являются вполне осмысленными аксиомами, выполнение которых для правнла голосования можно только желать.

Более глубокий взгляд на стратегические свойства голосования требует всей совокупности теоретико-игровых понятий. Точка зрения при этом становится позитивной: что можно сказать о конкретном равновесии поведения для заданного правила голосования? Для того чтобы охватить все богатство стратегических манипуляций, приходится расширить множество правил голосования, допустив механизмы, в которых множество стратегий является более сложным по сравнению с простым сообщением своих предпочтений. Например, голосование с последовательным вето (см. разд. 10.4) приводит к игровой форме, в которой агент при подаче очередного голоса полностью информирован о всех предшествующих поданных всеми агеитами голосах, а это может повлиять на его решение на последующнх этапах.

Наиболее плодотворными концепциями равновесия оказываются сложное (или универсальное по подыграм) равновесие и сильное равновесие. Первая концепция равновесия была предложена Фаркуарсоном [1969] и исследовалась Маккелви, Ниеми [1978], Муленом [1979, 1983] и другими. Вторая концепция была предложеиа Пелегом [1978] и в дальнейшем исследовалась Маскиным [1979], Муленом и Пелегом [1982], Дутта [1980].

Наиболее интересиыми методами являются голосование с последовательным сравиеиием по правилу большинства (Миллер [1977, 1980]) и последовательное нсключение кандндатов (голосованне с последовательным вето, предложеиное Мюллером [1978]; см. разд. 10.4). В этих методах сложное равновесие, как правило, единственно и имеет хорошие свойства. Голосование с последовательным вето выбирает исход из ядра.

Равиовесие Нэша, как это ни удивительно, ничего не выделяет при любом конкретном правиле голосования. На самом деле легко показать, что в большинстве известных методов *все* кандидаты могут быть выбраны при некоторых равновесиых по Нэшу сообщениях. Это справедливо для правила относительного большинства, метода Борда и любого состоятельного по Кондорсе метода (когда имеются три или более кандидатов). Для того чтобы получить интересиые результаты для равновесия Нэша, нужио придерживаться более абстрактной точки зрения иа теорию реализации.

Маскин [1977] показал, что равиовесные по Нэшу исходы приводят для любого механизма голосования к строго монотонному отображению и что это свойство почти полностью характеризует отображения, которые могут быть получены данным способом. Это был один из первых результатов в теории реализации, дающий рецепт построения механизма, равновесные по Нэшу исходы которого в точности представляют данное соответствие. Предложеиный механизм, однако, практически бесполезен, поскольку требует от каждого агента сообщения всего профиля предпочтений, а равновесие по Нэшу получается, если только сообщения всех агентов полностью совпадут. Обзор результатов по реализации иа основе равновесия по Нэшу, а также униве рсального по подыграм и сильного равиовесия содержится в блестящей обзорной статье Маскин [1985] и более подробно в книгах Мулен [1983] и Пелег [1984*а*].

Упражнения

10.1 Стратегическое голосование по правилу относительного большинства и по методу Борда

(a) Рассмотрим голосование по правилу относительного большинства с лексикографическим принципом при равенстве голосов (если имеет место равенство кандидатов b и c, то выбирается b). Имеется следующий профиль при семи выборщиках:

Число выборщиков	2	3	2
	a	c	b
	d	b	d
	b	d	a
	c	a	c

Кому выгодно неточно сообщить свои предпочтения и какие предпочтения сообщить? Сначала дайте ответ для индивидуальных агентов, а потом для коалиций. Какие исходы, если есть такие, принадлежат ядру?

(b) Рассмотрим правило Борда опять же с лексикографическим принципом при равенстве. Ответьте на те же вопросы, что и в (a) для случая четырех кандидатов и четырех исходов:

Имя выборщика	1	2	3	4
	d	c	b	a
	b	a	a	d
	c	d	c	b
	a	b	d	c

(c) Пусть выборщиков три или более, а правило голосования – либо относительное большинство, либо метод Борда, либо правило голосования, состоятельное по Кондорсе. Докажите, что для любого профиля *все* исходы являются исходами равновесий Нэша. *Подсказка для метода Борда:* постройте профиль, при котором a – наилучший исход по любому предпочтению, любой другой исход получает не более $\frac{1}{2}n(p-1)$ очков (как обычно исход получает 0 очков за последнее место и $p-1$ очков за первое).

(d) Для каких методов подсчета очков выполнено свойство из вопроса (c)?

10.2 Еще о строгой монотонности

(a) *Доказательство леммы 10.1.* Скажем, что профиль v получен из профиля u *элементарным усилением исхода* a, если v получен из u подъемом a в предпочтении только одного агента, причем a перепрыгивает ровно через один исход (например, из $c > b > a > d$ получаем $c > a > b > d$). Проверьте, что правило голосования S строго монотонно тогда и только тогда, когда (2) имеет место при любом элементарном усилении. Предположим, что S удовлетворяет (3) при любом элементарном усилении a, причем a прыгает через b. Положим $c = S(v)$. Покажите, что c равно $S(u)$ или a в зависимости от того, выполнено ли $c = b$ или $c \neq b$. Предположите, что S строго монотонно и покажите, что если v получено из u элементарным усилением a, при котором a прыгает через b, то из $\{x = S(u)\}$ следует $\{x = S(v)\}$ для всех x, кроме, возможно, b.

(b) Пусть S – состоятельное по Кондорсе правило голосования, и пусть имеются не менее трех исходов и не менее пяти кандидатов. Покажите, не используя лемму 10.2, что S не является строго монотонным. *Подсказка*: выберите три исхода и постройте профиль u только с тремя типами предпочтений

$$a > b > c > x\,,$$
$$c > a > b > x\,,$$
$$b > c > a > x \quad \text{для всех } x \neq a, b, c$$

с циклом Кондорсе по a,b,c. Поднимая c выше b во всех предпочтениях первого типа, покажите, что $S(u)$ не может содержать a. Покажите далее, что $S(u)$ не может содержать также доминируемый по Парето исход; рассмотрите профиль v, полученный из u подъемом исхода a на вершину каждого предпочтения.

(c) Покажите, не используя лемму 10.2, что правило голосования Борда (с произвольным дополнительным правилом при равенстве) не может быть строго монотонным. Предположите, что исходов не менее трех, а выборщиков не менее пяти. *Подсказка*: выберем два целых числа так, чтобы $1 \le n_1 \le n_2$ и $2n_2 + n_1 = n$. Затем рассмотрите профиль, для которого

n_1 выборщиков считает $c > b > a > x$ при всех $x \ne a, b, c$,
n_2 выборщиков считает $a > c > b > x$,
n_2 выборщиков считает $b > a > c > x$.

Определите победителя по Борда. Подннмнте затем исход b над c для n_1 выборщиков первого типа и для n_2 выборщиков с предпочтением $a > c > b$.

10.3 Обобщенные победители по Кондорсе (Мулен [1980*a*])

Рассматриваются упорядоченное множество нсходов $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ и соответствующая область унимодальных предпочтений $SP(A)$. Для данного сообщества N с n выборщиками фиксируем $n-1$ нсходов $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, интерпретируемых как пики предпочтений некоторых фиктивных выборщиков. Определим обобщенное правило большинства следующим образом: каждый агент сообщает свой пик a_i^*. Выбирается средний из $2n-1$ пиков $(a_1^*, \dots, a_n^*, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$.

(*a*) Покажите, что это правило анонимно и коалиционно устойчиво (в частности, эффективно).

(*b*) Покажите, что если $\alpha_j = a_1$ или a_p при всех $j = 1, \dots, n-1$ (каждый фиктивный выборщик является либо левым, либо правым), то соответствующее обобщенное правило большинства является *позиционно диктаторским*: оно выбирает среди всех сообщенных пиков пик ранга $k = 1, \dots, n$. Напрнмер, еслн $k = 1$ мы получаем левое правило, выбирающее наименьший пик относнтельно заданного порядка на A.

(*c*) Предположим, что $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ и имеется 100 выборщиков. Распределим фиктивные пики (почти) равномерно на A. Например, каждый исход берется пять раз, кроме исхода 10, который берется четыре раза.

Предположим, что профиль предпочтений для 100 избирателей состоит из 40 левых $(a_i^* = 1)$ и 60 правых $(a_i^* = 20)$ выборщиков. Покажите, что наше обобщеиное правило большинства выберет исход $a = 8$, а позиционно диктаторский метод выберет лнбо $a = 1$, либо $a = 20$.

Найдите избираемый по нашему правилу обобщенного большинства исход, если имеется x левых и $100-x$ правых выборщиков ($x=1,\dots,99$).

10.4 Унимодальные предпочтения на дереве (Деманж [1982])

Исходами являются вершины дерева (связного графа без циклов), а каждый агент имеет унимодальное (9) предпочтение на этом дереве. Обозначим пик агента i через a_i^*.

(a) Покажите, что леммы 10.4 и 10.5 обобщаются: существует строгий победитель по Кондорсе при нечетном n и по крайней мере один слабый победитель по Кондорсе при четном n. *Подсказка*: используйте индукцию по числу вершин дерева. Найдите терминальную вершину дерева (такая вершина не лежит между двумя другими вершинами), в которой находится не более половины пиков агентов. Отбросьте эту вершину и используйте предположение индукции.

(b) Предположим далее, что полезность для агента измеряется расстоянием (со знаком минус) до его пика. Покажите, что размещение является победителем по Кондорсе тогда и только тогда, когда оно решает утилитарную задачу (минимизация суммы расстояний; см. упражнение 1.1). Сохраняется ли эта эквивалентность для размещений на кольце (см. упражнение 1.2)?

10.5 Неманипулируемое голосование на циклических областях (Ким и Рауш [1980])

Это другой пример ограниченной области предпочтений, для которой существуют недиктаторские защищенные от манипулирования правила голосования. Пусть $A=\{1,2,\dots,p\}$ задано, и пусть Z область, состоящая из следующих линейных порядков:

$$1>2>\dots>p,\quad 2>3>\dots>p>1,$$
$$3>4>\dots>1>2,\quad p>1>\dots>p{-}2>p{-}1\,.$$

Покажите, что правило голосования S для двух игроков на Z (S отображает $Z\times Z$ в A) защищено от манипулирования тогда и только тогда, когда существует последовательность $c_1,c_2,\dots,c_p$ в A, такая, что

$$c_i \le c_{i+1} + 1 \quad \text{для всех } i = 1, \ldots, p \quad (\text{где } p + 1 = 1)$$

и S имеет вид

$$S(a_1, a_2) = a_2 \quad \text{при } a_1 \le a_2 \le a_1 + c_{a_1} - 1 (\mathrm{mod}\ p),$$

где мы отождествили предпочтения из Z с его пиком $a_i \in A$.

10.6 Два примера пропорционального вето-ядра

Для профиля (14) нет победителя по Кондорсе, однако вето-ядро одноэлементно. Покажите, что в следующем примере существует победитель по Кондорсе и существует единственный исход из вето-ядра, однако они не совпадают. Имеются три выборщика и четыре исхода:

d	*a*	*a*
c	*d*	*c*
b	*b*	*b*
a	*c*	*d*

В нашем следующем примере вето-ядро состоит из трех исходов, а победитель по Кондорсе не принадлежит ядру. Найдите эти исходы. Имеется пять выборщиков и шесть исходов:

Число выборщиков	1	1	1	2
	a	*a*	*a*	*f*
	b	*c*	*d*	*e*
	c	*d*	*e*	*d*
	d	*e*	*b*	*c*
	e	*b*	*c*	*b*
	f	*f*	*f*	*a*

10.7 Вето-функция для правила Борда (Мулен [1985*a*])

Мы хотим доказать неравенство (12).

(*a*) Покажите, что вето-сила любого строгого меньшинства равна нулю.

(*b*) Покажите, что любая коалиция T размера t, $t > \frac{2}{3} \cdot n$, имеет полную вето-силу. Если t четно, то мы можем продолжить рассуждения из разд. 10.3. Если t нечетно, покажите, что у T есть сообщение, при котором заданный кандидат является наилучшим по каждому предпочтению, а никакой другой кандидат не набирает больше $t\cdot(p-2)/2+1$ очков. Затем используйте те же рассуждения, что и для четного t.

(c) Предположим теперь $n/2 \le t \le \frac{2}{3}\cdot n$ и докажем левое неравенство в (12). Фиксируем коалицию T размера t и обозначим через $C=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ подмножество исходов, которое T (считаем, что есть одно лицо принимающее решение, которое управляет сообщениями u_T коалиции T) хочет отвести. Наилучший способ это сделать – передать сообщение u_T, в котором C находится внизу каждого предпочтения u_i, а его исходы перемешаны так, чтобы все они получили одну и ту же (или почти одну и ту же) оценку Борда на T.

Предположим, что $t=2t'$ четно. Покажите, что у T имеется сообщение u_T, при котором все исходы из C получают оценку Борда $t'(k-1)$ в то время, как оценка Борда a_p равна $t(p-1)$ (очки Борда приписываются, как обычно, $0,1,\dots, p-1$). Выведите отсюда, что C действительно исключается при u_T, если

$$t'(k-1)+(n-t)(p-1) < 2t'(p-1)\,.$$

Это доказывает левое неравенство из (12), когда t четно.

Предположим далее, что t нечетно. Покажите, что у T имеется сообщение u_T, при котором никакой исход из C не получит более $\frac{1}{2}t(k-1)$ очков, а a_p получит $t(p-1)$ очков.

(d) Используя аналогичный метод доказательства, покажите, что для $n/2 \le t \le \frac{2}{3}\cdot n$ выполнѐно правое неравенство из (12). В частности, если t четно, покажите, что для любого сообщения u_T коалиции T существует по крайней мере один элемент из C с оценкой Борда не мéньше $t'\cdot(k-1)$.

(e) Используйте аппроксимацию (12) для вычисления возможного размера (размеров) выигрывающих коалиций для метода Борда. Проделайте это для любого числа выборщиков $n \ge 3$. Получите отсюда возможные значения числа Накамуры для метода Борда (при всех $n \ge 3$).

10.8 Голосование с дробным вето (Мулен [1980b])

Предположим, что имеется p кандидатов и n выборщиков. Предположим, что d – наибольший общий делитель чисел n и p.

Тогда существуют такие целые R и K, что

$$Rn = Kp - d.$$

Предположим, что имеется K экземпляров каждого исхода, а каждый выборщик имеет R вето-карточек. Для заданного профиля предпочтений исключим сначала R кандидатов, наихудших по u_1 из множества $K \cdot A$ (мощности $K \cdot p$), в котором каждый из p первоначальных исходов представлен K копиями. Заметим, что по предпочтению u_1 две копии одного и того же исхода равноценны.

Затем исключим R наихудших по u_2 элементов из оставшихся во множестве $K \cdot A$ и так далее. После того как каждый выборщик исчерпал свою вето-силу, у нас осталось d исходов из $K \cdot A$, среди которых выбирается окончательный исход. Докажите, что если R и K достаточно велики, то любое такое правило голосования предоставляет каждой коалиции по крайней мере пропорциональную вето-силу (13). Покажите, что при $d = 1$ правило голосования порождает в точности пропорциональную вето-функцию.

10.9 Вероятностные правила голосования (Барбера [1979], Хилленд [1980])

Для данного конечного множества A исходов (кандидатов) обозначим через $P(A)$ множество лотерей на A (единичный симплекс в E^A) и через U – множество функций полезности фон Неймана – Моргенштерна на A (значит, U принадлежит E^A, причем мы отождествляем две функции полезности, которые порождают одно и то же предпочтение на $P(A)$). Для заданного множества N выборщиков вероятностным правилом голосования называется отображение π из U^N в $P(A)$. Скажем, что π *защищено от манипулирования*, если при любых $i \in N$, $u \in U^N$ и $v_i \in U$ имеем

$$u_i \cdot \pi(u_i, u_{-i}) \geq u_i \cdot \pi(v_i, u_{-i}), \tag{15}$$

где точка означает скалярное произведение в E^A. Скажем, что правило голосования π является *диктаторским*, если при любых $u \in U^N$ вероятностное распределение $\pi(u)$ приписывает положительную вероятность только наилучшим по u_i исходам.

(*a*) *Теорема Хилленда.* Скажем, что π удовлетворяет условиям *достижимости*, еслн для каждого исхода a из A существует профиль u из U^N, при котором распределение $\pi(u)$ сосредоточено в a.

Теорема утверждает, что если правило π защнщено от манипулнрования и удовлетворяет условню достижимости, то π является выпуклой комбинацией (вероятностная смесь с фиксированными коэффициентами) диктаторскнх правил голосования.

Покажите обратное свойство: если π – вероятностная смесь диктаторских правил, то это правило защищено от манипулирования при любом профнле, при котором у каждого выборщика есть едннственный наилучший исход, и удовлетворяет условиям достижимости. Можно лн определнть π для тех профилей, при которых некоторые выборщики нмеют более одного наилучшего нсхода, так, чтобы это правило осталось неманипулируемым (т.е. чтобы π удовлетворяло (15) на всей области U)?

(*b*) *Позиционные методы Барбера подсчета очков.* Обозначим через U_0^N множество профнлей полезностей $u \in U$, таких, что в предпочтении любого агента нет безразличия ни для какой пары исходов $(u_i(a) \neq u_i(b))$. Обозначим через U_*^N множество тех профилей полезностей u, для которых каждая функция полезности u_i является взаимнооднозначным отображением из A в $\{0,1,\ldots,p-1\}$. Мы рассматриваем u_i как представление порядкового предпочтения на A.

Фиксируем вектор очков $s \in E^p$ следующим образом:

$$0 \leq s_0 \leq \ldots \leq s_{p-1} \quad \text{и} \quad s_0 + \ldots + s_{p-1} = 1/n$$

и определим вероятностное правило π так: для каждого $u \in U_0^N$ фикснруем $u^* \in U_*^N$, представляющее те же порядковые предпочтения, что и u. Тогда

$$\pi(u)(a) = \sum_{i \in N} s_{u_i^*(a)} \quad \text{для всех} \quad a \in A.$$

Покажнте, что метод позицнонного подсчета очков π защищен от манипулнрования на U_0^N. Проверьте, что в общем случае он нарушает условия достижимости, но является анонимным и нейтральным.

(*c*) *Методы "поддержки размера" по Барбера.* Фиксируем вектор весов $t \in E^{n+1}$ следующнм образом:

$$0 \leq t_0 \leq \ldots \leq t_n \quad \text{и} \quad t_i + t_{n-i} = 2p\,(p-1) \quad \text{для всех} \quad i = 1,\ldots,n$$

и определим вероятностное правило π так:

для всех $u \in U_0^N$: $\pi(u)(a) = \sum_{b \in A \setminus a} t_{|N(u,a,b)|}$ для всех $a \in A$,

где через $N(u,a,b)$ обозначено множество выборщиков, считающих a лучше b при u. Покажите, что метод поддержки размера π защищен от манипулирования на U_0^N, а также является анонимным и нейтральным, хотя и нарушает условие достижимости.

(*d*) *Простые методы Барбера.* Рассмотрим позиционный метод подсчета очков (метод поддержки размера), для которого вектор очков (вектор весов) является арифметической прогрессией. Покажите тогда, что этот метод является также и методом поддержки размера (позиционным методом подсчета очков).

Назовем вероятностное правило голосования на U_0^N *простым*, если оно является одновременно методом позиционного подсчета очков и методом поддержки размера. Покажите, что любое простое правило может быть задано следующей формулой для некоторого фиксированного числа q, $0 \le q \le 2/p\,(p-1)n$:

$$\pi(u)(a) = r + q \cdot \sum_{b \in A \setminus a} |N(u,a,b)| = r + q \cdot \sum_{i \in N} u_i^*(a),$$

где $r = 1/p - n(p-1)q/2$. Заметим, что простой метод, при котором лотерея $\pi(u)$ более всего зависит от u (достигает наибольшего множества исходов), соответствует $\bar{q} = 2/p(p-1)n$. При данном методе даже исход a, который единогласно рассматривается как наилучший исход ($u_i(a) > u_i(b)$ при всех i и при $b \neq a$), выбирается с вероятностью менее $2/p$. Сравнивая этот выбор со случайным исходом при равномерном вероятностном распределении, отметим, что исход может иметь в два раза большие шансы на победу, но только в том случае, если он является наилучшим для всех.

(*e*) *Формулировка результата Барбера о характеризации.* Вероятностное правило на U_*^N является неманипулируемым, анонимным и нейтральным тогда и только тогда, когда оно является вероятностной смесью методов позиционного подсчета очков и поддержки размера (теорема 1 из Барбера [1979]).

Глава 11

Агрегирование предпочтений

Обзор

Правило голосования находит компромисс между конфликтующими претензиями избирателей по выбору единственного исхода при каждом профиле предпочтений. В своей книге, оказавшей большое влияние на развитие теории голосования, Эрроу [1963] поставил более трудную цель перед общественным посредником, а именно сагрегировать профиль предпочтений в полный порядок на множестве исходов. Этот порядок должен отражать уровень коллективного благосостояния для любого исхода, включая субоптимальные исходы. Если внешние ограничения не позволяют посреднику реализовать общественно наилучший исход (т.е. максимальный исход по порядку коллективного благосостояния (ПКБ)), то фиксация коллективного порядка позволяет ему отличить изменения, приводящие к улучшению благосостояния, от изменений, которые приводят к снижению коллективного благосостояния.

Основой подхода Эрроу является его аксиома о независимости от посторонних альтернатив (НПАЭ). Она утверждает, что (коллективные) сравнения благосостояния в пределах заданного подмножества исходов не должны зависеть от индивидуальных предпочтений вне этого подмножества. Следовательно, НПАЭ ограничивает информацию, которая может быть использована при сравнении исходов *a* и *b*. Коллективное предпочтение для пары *a*,*b* должно формироваться только по предпочтениям выборщиков на этой паре (для кого *a* лучше *b*, для кого *b* лучше *a*, а для кого они безразличны). Смысл аксиомы состоит в том, чтобы свести построение порядка для всех исходов к решению всех парных сравнений и проверки того, что они образуют транзитивный ПКБ. Но парные сравнения легко поддаются решению. Например, если потребовать выполнение свойств анонимности и нейтральности, то единственным разумным методом оказывается правило большинства (см. разд.

11.1 о деталях анализа для бинарного случая). Следовательно, возможность парадокса голосования (разд. 9.1) является простейшей версией теоремы Эрроу: нельзя получить транзитивный ПКБ на основе парных сравнений по правилу большинства. Конечно, в настоящей теореме Эрроу не используются предположения об анонимности, нейтральности или монотонности, она основана на гораздо более глубоких математических рассуждениях.

Первая часть гл. 11 посвящена теореме Эрроу о невозможности (теорема 11.2) и ее двум главным вариантам, а именно положительным результатам для квазитранзитивного коллективного благосостояния (теорема 11.3) и для ациклического коллективного благосостояния (АКБ) (теорема 11.4). Мы рассматриваем сначала случай бинарного выбора (только два кандидата) и формулируем теорему Мэя (теорема 11.1) для аксиоматического обоснования правила большинства.

Начиная с разд. 11.2, мы рассматриваем проблемы принятия решений с тремя исходами (кандидатами) или более. В разд. 11.2 мы формулируем и доказываем теорему Эрроу: если мы требуем, чтобы парные сравнения коллективного благосостояния образовывали полный порядок (как строгое предпочтение, так и отношение безразличия должны быть транзитивными), то тогда единственным (оптимальным по Парето) методом агрегирования, удовлетворяющим НПАЭ, является диктаторский метод. В разд. 11.3 мы требуем только, чтобы отношение коллективного благосостояния было квазипорядком (строгое бинарное предпочтение транзитивно, а бинарное отношение безразличия – необязательно). Методы агрегирования, удовлетворяющие НПАЭ, могут быть охарактеризованы как *олигархические*: существует такое подмножество выборщиков (олигархия), что кандидат *a* для сообщества лучше *b* тогда и только тогда, когда для всех олигархов *a* лучше *b* (теорема 11.3).

В разд. 11.4 мы еще больше ослабляем требования к отношению коллективного благосостояния. Мы только хотим, чтобы оно было ацикличным (его строгая компонента не имела циклов). Это – минимальное требование, которое гарантирует существование по крайней мере одного максимального элемента на любом подмножестве исходов и, таким образом, делает возможным (коллективный) выбор. Множество ациклических методов агрегирования, удовлетворяющих НПАЭ, устроено достаточно сложно, но подмножество его нейтральных и монотонных элементов допускает простую характеризацию (теорема 11.4 Накамуры), то же справедливо для подмножества анонимных методов (упражнение 11.4).

Подход Эрроу к агрегированию предпочтений разочаровывает, поскольку вскрывается неразрешимое противоречие между решительностью (множество максимальных элементов по коллективному порядку должно быть малым, по возможности одноточечным) и анонимностью (предпочтение каждого агента должно оказывать одинаковое влияние на коллективное предпочтение). Полная решительность приводит к диктаторскому методу в то время, как анонимность приводит к очень нерешительному методу, который отклоняет исход a только в том случае, если очень большая доля выборщиков считает некоторый другой исход b лучше a (точная квота устанавливается в следствии из теоремы 11.4). Если кто-то считает, что реальные методы агрегирования предпочтений удовлетворяют или должны удовлетворять НПАЭ, то теоремы 11.2, 11.4 объясняют присущие им пределы.

Одним из путей преодоления отрицательного результата является ограничение области индивидуальных предпочтений. В разд. 11.5 мы рассматриваем абстрактную ограниченную область, в которой метод агрегирования, удовлетворяющий НПАЭ, существует. Мы отмечаем, что этот метод индуцирует (коалиционно) неманипулируемое правило голосования для всякого предмета спора (для любого подмножества исходов). На самом деле это свойство является характеристическим для аксиомы НПАЭ (теорема 11.5). Этот результат объясняет, почему доказательства теоремы Гиббарда – Сэттертуэйта (теорема 10.1) и теоремы Эрроу (теорема 11.2) технически столь похожи.

Разд. 11.6 посвящен наиболее удачной ограниченной области предпочтений, а именно унимодальности. Для нее обычное отношение сравнения по правилу большинства является искомым агрегированием Эрроу. При предположении анонимности и монотонности все агрегирования Эрроу (ПКБ, удовлетворяющие

НПА Эрроу) характеризуются как класс обобщенных мажоритарных отношений (теорема 11.6). Сюда входят позиционные диктаторы и другие методы.

В разд. 11.7 мы по-другому смотрим на рациональность коллективных отношений благосостояния (не на транзитивность, квазитранзитивность или ацикличность). Мы исследуем зависимость множества выбранных исходов от *предмета спора* (допустимого множества исходов), которая формализуется концепцией функции выбора.

Мы завершаем эту главу на более оптимистичной ноте, обсуждая в разд. 11.8 очень привлекательный метод агрегирования, состоятельный по Кондорсе, который лишь незначительно нарушает аксиому НПАЭ. Идея этого метода восходит к самому Кондорсе, однако формально он был определен в 1959 году. Он сводится к поиску ПКБ, который как можно меньше отличается от (взвешенного) турнира бинарных сравнений. Хотя, возможно, этот коллективный порядок трудно построить, этот метод допускает замечательную аксиоматическую характеризацию, сходную с характеризацией методов подсчета очков (теорема 9.4).

11.1 Бинарный выбор: правило большинства и другие методы

Когда имеется только два решения (кандидата) голосование по правилу большинства является единственным справедливым методом. Оно удовлетворяет трем требованиям: анонимности, нейтральности и монотонности

Пусть a,b – два кандидата и $N=\{1,\dots,n\}$ – конечное множество выборщиков. Каждый выборщик строго предпочитает один из исходов (безразличия запрещены; см. замечание 11.1). Следовательно, профиль предпочтений является элементом $u=(u_1,\dots,u_n)$ из $\{a,b\}^N$ Конечно, $u_i=a$ означает, что выборщик i считает кандидата a лучше b.

Правилом голосования является любое отображение S из $\{a, b\}^N$ в $\{a,b\}$, ставящее в соответствие каждому профилю u непустое подмножество $S(u)$ из $\{a,b\}$. Тогда $S(u)$ – *множество выбора* для профиля u. Поэтому $S(u)=\{b\}$ означает, что при профиле u выбирается b, а $S(u)=\{a,b\}$ означает ничью.

Коллективные безразличия допускаются, хотя индивидуальные безразличия не допустимы. В действительности это самая общая формулировка проблемы голосования (см. опять замечание 11.1).

Здесь мы используем два исходных требования равноправия, которые записываются так.

Анонимность: S – симметричное отображение, зависящее от n своих переменных.

Нейтральность: Перестановка в мнении каждого агента приводит к перестановке множества выбора: если σ переставляет a и b, то $S(\sigma(u_1),\dots,\sigma(u_n)) = \sigma(S(u_1,\dots, u_n))$.

Правило голосования анонимно и нейтрально тогда и только тогда, когда принадлежность кандидата к множеству выбора зависит только от числа его приверженцев (эта зависимость является одинаковой для каждого кандидата). Эти условия не исключают даже такие глупые правила голосования: если за a подано от 20 до 40 процентов голосов, то выбирается a, иначе b. Глупые правила отсекаются аксиомой монотонности.

Монотонность: Новый приверженец не приносит вреда. Если два профиля u, v таковы, что $u_j = v_j$ (при $j \neq i$) и $u_i = a$, $v_i = b$, то $\{b \in S(u) \Rightarrow b \in S(v)\}$ и $\{a \in S(v) \Rightarrow a \in S(u)\}$.

Лемма 11.1. *Правило голосования S анонимно, нейтрально и монотонно тогда и только тогда, когда существует целое q, $0 \leq q \leq \frac{1}{2}(n+1)$, для которого при всех $x \in \{a,b\}$ и при всех $u \in \{a,b\}^N$ выполнено*

$$x \in S(u) \iff |\{i \in N \mid u_i = x\}| \geq q. \qquad (1)$$

Очевидное доказательство мы опускаем. Для каждого q свойство (1) определяет правило голосования S_q, которое мы назовем правилом q квоты. Правило большинства S^* является наиболее решительным из этих правил (наименьшим по включению). Более точно, $S^* = S_{n/2}$, если n четно, и $S^* = S_{n+1/2}$, если n нечетно.

Теорема 11.1 (Мэй [1952]). *Существует единственное анонимное, нейтральное и строго монотонное правило голосования.*

Строгая монотонность: *для всех* u,v, *таких, что* $u_j = v_j$ (*для всех* $j \neq i$) *и* $u_i = a$, $v_i = b$: $\{b \in S(u) \Rightarrow S(v) = \{b\}\}$ *и* $\{a \in S(v) \Rightarrow S(u) = \{a\}\}$.

Таким правилом является правило большинства S^*: $x \in S^*(u)$ *тогда и только тогда, когда по крайней мере столько же агентов считает* x *лучше* y, *сколько наоборот, где* $\{x,y\} = \{a,b\}$.

Доказательство. Если n четно, то единственное строго монотонное правило q квоты получается при $q = \frac{1}{2}n$. Если n нечетно, то оно получается при $q = \frac{1}{2}(n+1)$. Заметим, что последнее всегда является однозначным, а первое – нет.

QED

Важным следствием монотонности является *неманипулируемость*: у агента нет (стратегических) побуднтельных мотивов лгать, т.е. сообщать мнение, противоположное истинному. Отметим для примера, что глупое правило 20–40 процентов не защищено от манипулирования: если я считаю a лучше b, но знаю, что a гарантированно получит около 40 процентов голосов, то, чтобы помочь a, я лучше проголосую за b.

Теорема Мэя обобщается на случай, когда мы отбрасываем требования анонимности и нейтральности. Важно рассмотреть случай, когда при коллективном выборе выборщики имеют разные относительные веса (как в Совете безопасности ООН) или когда две альтериатнвы находятся в неравиом положении (скажем, когда требуется большинство в две третих, чтобы изменить *status quo*).

(*i*) *Ослабленная нейтральность*: Рассмотрим обобщенное правило квоты $S_{p,q}$, определенное для всех пар p,q неотрицательных чисел, таких что $p + q \leq n + 1$:

$a \in S_{p,q}(u) \iff$ хотя бы p агентов голосуют за a,
$b \in S_{p,q}(u) \iff$ хотя бы q агентов голосуют за b.

Все $S_{p,q}$ монотонны и анонимны. Справедливо и обратное: все монотонные и анонимные правила голосования могут быть записаны таким способом. Более того, строго монотонные и анонимные правила голосования суть $S_{p,q}$ при $p+q=n$ или $p+q=n+1$. Заметим, наконец, что $S_{p,q}$ является однозначным правилом (выбирает единственного кандидата при любом профиле) тогда и только тогда, когда $p+q=n+1$. Таким образом, свойства строгой монотонности, анонимности и однозначности вполне совместимы.

(*ii*) *Ослабленная анонимность.* Рассмотрим простую игру ω для N, т.е. семейство ω непустых подмножеств из N, причем

$$T \in \omega,\ T \subset T' \Rightarrow T' \in \omega \quad \text{для всех } T, T' \in 2^N \setminus \varnothing. \tag{2}$$

Более того, предположим, что ω удовлетворяет условию

$$T \in \omega \Rightarrow N \setminus T \notin \omega \quad \text{для всех } T \in 2^N \setminus \varnothing. \tag{3}$$

Мы интерпретируем $T \in \omega$ следующим образом: "коалиция T является выигрывающей", т.е. если все выборщики из T поддерживают некоторого кандидата, то только он и выбирается. Типичным примером является *взвешенное большинство*: даны неотрицательные веса $w_1, \dots, w_n$ выборщиков, выбрана квота q и определено:

$$T \in \omega \iff \sum_{i \in T} w_i > q. \tag{4}$$

Это определяет простую игру, удовлетворяющую условию (3) при $2q \geq w_1 + \dots + w_n$. Заметим, что не все простые игры могут быть получены как игры со взвешенным большинством (как взвешенная мажоритарная игра). Для того чтобы построить контрпример, нужно по крайней мере 6 избирателей.

Пусть теперь ω – произвольная простая игра, удовлетворяющая условию (3). Определим правило голосования S_ω следующим образом:

для любого кандидата x и любого профиля u: $x \in S_\omega(u) \iff$

$$\{i \in N \mid u_i = x\} \in \omega.$$

Это правило является монотонным и нейтральным. Обратно, все монотонные и нейтральные правила голосования могут быть описаны таким образом. Более того, монотонное и нейтральное правило голосования является однозначным тогда и только тогда, когда простая игра ω является *строгой*:

$$T \in \omega \iff N \setminus T \notin \omega .$$

Аналогично, строго монотонное и нейтральное правило голосования представляется простой игрой, удовлетворяющей (2), (3) и следующему дополнительному свойству:

$$\{T \notin \omega,\ N \setminus T \notin \omega\} \Rightarrow \{T' \in \omega \text{ для всех } T' \subsetneq T\}.$$

Замечание 11.1. О безразличиях. Все наши последующие правила голосования для трех или более исходов допускают безразличия в коллективном выборе, но исключают их для индивидуальных сообщений. Кому-то возможно захочется допустить безразличие и в индивидуальных сообщениях. Это приведет к *сужению* разумных правил голосования. В самом деле, "новые" правила определены на *большей* области, а потому каждое новое правило голосования определяет некоторое старое правило, но вовсе не обязательно, чтобы каждое старое правило допускало непротиворечивое расширение до нового правила. Если такое расширение возможно, то оно обычно не единственно. В упражнении 11.2 приводится обобщение теоремы Мэя для случая, когда допускаются безразличия в сообщении агентов.

11.2 Упорядочения коллективного благосостояния: диктаторы

Пусть множество A исходов состоит теперь из трех или более элементов. Каждый выборщик имеет предпочтения на A, которые описываются порядком u_i на A. u_i – полное, транзитивное и асимметричное отношение на A (безразличия исключаются). Для удобства u_i записывается как функция полезности. Запись $u_i(a) > u_i(b)$ означает, что a лучше b для агента i. Обозначим через $L(A)$ множество всех порядков на A. Как всегда, множество выборщиков обозначим через N. Профиль предпочтений $u = (u_i)_{i \in N}$ из $L(A)^N$ приписывает каждому агенту i предпочтение u_i.

Упорядочение коллективного благосостояния (УКБ) есть отображение R из множества профилей предпочтений во множество упорядочений на A (упорядочение есть полное и транзитивное отношение на A; допускаются безразличия). Таким образом, R агрегирует профиль u в коллективное предпочтение $R(u)$. Отношение $a\,R(u)\,b$ читается так: исход a не хуже для сообщества, чем исход b.

УКБ имеет то же антропоморфическое преимущество, что и в теории благосостояния (гл. 2). Коллективное предпочтение $R(u)$ есть объект той же природы, что и любое индивидуальное предпочтение (только допускаются безразличия). Вообще говоря, никакой "реальный" агент не наделяется предпочтением, в точности совпадающим с $R(u)$, но, возможно, проницательный политик сумеет привести свою программу в соответствие с этим предпочтением и станет идеальным представителем общественного мнения.

Если коллективные решения всегда основываются на коллективном порядке $R(u)$, то наше сообщество может иметь не одно множество выбора. Предметом спора может быть ***меньшее*** подмножество B, т.е. подмножество B (из A) допустимых исходов. Выбираются те исходы, которые являются наилучшими на B в соответствии с $R(u)$:

$$\max_B R(u) = \{a \in B \mid \text{для всех } b \in B,\ a\,R(u)\,b\}\,. \tag{5}$$

Цель НПАЭ – убедиться в том, что множество выбора $\max_B R(u)$ зависит *только* от профиля предпочтений на B. Исходы вне B (посторонние, поскольку выбор осуществляется внутри B) не должны оказывать никакого влияния на выбор из B. Пример с ранжированием Борда поясняет проблему.

Имеется 4 исхода и 3 избирателя. Для следующего профиля оценки Борда дают коллективный порядок $b > a > d > c$:

Очки	Выборщик 1	Выборщик 2	Выборщик 3	Оценки Борда
3	a	d	b	b : 6
2	b	a	c	a : 5
1	c	b	d	d : 4
0	d	c	a	c : 3

Итак, b – бесспорный победитель на множестве $\{a,b,c,d\}$. Тем не менее если предмет спора сокращается до множества $B = \{a,b,d\}$, то избрание кандидата b (как предлагалось ранее) становится для выборщиков 1 и 2 нежелательным. Они возражают против несправедливого избрания b, поскольку на множестве $\{a,b,d\}$ предпочтения выглядят так:

1	2	3
a	d	b
b	a	d
d	b	a

и *любое* анонимное, нейтральное правило сделает a,b,d победителями, поскольку указанные предпочтения получены одно из другого циклической перестановкой. Если предмет спора будет сокращен до множества $\{a,b\}$, то наши истцы будут иметь даже более сильный аргумент против избрания b, поскольку для большинства выборщиков исход a лучше b.

Для того чтобы сформулировать аксиому, которая устраняет эти несоответствия, нам понадобятся следующие обозначения:

$$\text{для всех профилей } u \in L(A)^N \text{ и всех } a,b \in A,\ a \neq b:$$
$$N(u,a,b) = \{i \in N \mid u_i(a) > u_i(b)\}\,.$$

Определение 11.1. *Пусть R – УКБ для A, N. Скажем, что R удовлетворяет НПАЭ, если*

$$\textit{для всех } a,b \in A \ \textit{ и всех профилей } u,v \in L(A)^N$$
$$N(u,a,b) = N(v,a,b) \ \Rightarrow\ \{a\,R(u)\,b \iff a\,R(v)\,b\}\,.$$

Другими словами, коллективное предпочтение для пары $\{a,b\}$ зависит только от индивидуальных предпочтений для этой пары. Эквивалентным образом, множество выбора при предмете спора V (как множество $\max_B R(u)$, заданное в (5)), зависит только от сужений индивидуальных предпочтений на B.

Если эта аксиома нарушается, то это приводит к манипуляциям УКБ со стороны властей, выбирающих предмет спора, и агентов, не точно сообщающих свои предпочтения для посторонних альтернатив (кандидатов вне предмета спора). Точное утверждение см. в теореме 11.5.

В противоположность этому, если эта аксиома выполняется, то выбор на всем максимальном пространстве A, содержащем все возможные исходы, не является конфликтным: любое ограничение, сужающее множество реальных кандидатов, совместимо с информационной децентрализацией. Таким образом, это приводит к минимальным затратам на выяснение индивидуальных предпочтений, поскольку требуется мнение только по поводу действительных кандидатов.

Обозначение: $P(u)$ обозначает строгую компоненту $R(u)$:

$$a\,P(u)\,b \iff \{a\,R(u)\,b \text{ и не выполнено } b\,R(u)\,a\}.$$

Теорема 11.2 (Эрроу [1951, 1963]). *Пусть A состоит по крайней мере из трех исходов. Пусть R – УКБ, совместимое с отношением Парето, т.е. удовлетворяющее условию*

Единогласие: *для всех профилей u и исходов a,b:*

$$\{N(u,a,b)=N\} \Rightarrow a\,P(u)\,b.$$

Тогда R удовлетворяет аксиоме НПАЭ **в том и только том случае,** *если оно является диктаторским:*

Существует агент $i \in N$ (диктатор), такой, что

$$R(u) = u_i \quad \text{для всех } u.$$

Доказательство. Дано УКБ R, удовлетворяющее условиям НПАЭ и единогласия. Для любых исходов a,b обозначим через $B(a,b)$ следующее подмножество 2^N:

$$T \in B(a,b) \iff \{\text{для всех } u \in L(A)^N\colon\ N(u,a,b) = T \Rightarrow a\,P(u)\,b\}.$$

Из НПАЭ следует эквивалентное определение для $B(a,b)$:

$$T \in B(a,b) \iff \{\text{для некоторого } u \in L(A)^N\colon\ N(u,a,b) = T \text{ и } a\,P(u)\,b\}.$$

Доказательство параллельно доказательству леммы 10.2. Выберем коалицию T, являющуюся минимальной по включению из $\cup_{(x,y)\in A\times A} B(x,y)$. Тогда T принадлежит некоторому $B(a,b)$. Мы утверждаем, что T одноточечно.

Предположим противное. Тогда мы можем разбить T на $T_1 \cup \cup T_2$ так, что ни T_1, ни T_2 не принадлежат $B(x,y)$ при любых x,y. Выберем исход $c \neq a,b$ и построим следующий профиль:

T_1	T_2	$N\backslash T$	
a	c	b	(6)
b	a	c	
c	b	a	

Здесь и далее в доказательстве мы не будем определять профиль на $A \setminus \{a,b,c\}$. При НПАЭ это не имеет значения.

Поскольку $N(u,a,b) = T$, то $a\,P(u)\,b$. Так как

$N(u,a,c)=T_1$ и $T_1 \notin B(a,c)$, то мы имеем $c\,R(u)\,a$. Поскольку $N(u,c,b)=T_2$ и $T_2 \notin B(c,b)$, то получаем $b\,R(u)\,c$, а значит, противоречие. Итак, мы нашли пару $\{a,b\}$ и единственного агента, скажем 1, таких что $\{1\} \in B(a,b)$.

Проверим далее, что $\{1\} \in B(c,d)$ для *всех* исходов c,d. В самом деле, для любого c, отлнчного от a и b, рассмотрим следующий профиль:

$$\begin{array}{cc} 1 & N\backslash\{1\} \\ c & b \\ a & c \\ b & a \end{array} \qquad (7)$$

Из $\{1\} \in B(a,b)$ следует $a\,P(u)\,b$, а из единогласия следует $c\,P(u)\,a$. Следовательно, из $c\,P(u)\,b$ следует $\{1\} \in B(c,b)$, поскольку $N(u,c,b)=\{1\}$. Таким образом, $\{1\}$ принадлежит $B(c,b)$ при всех $c \neq b$. Для того чтобы показать, что оно принадлежит и $B(c,d)$ прн всех $d \neq c$, воспользуйтесь аналогичным профилем (5) из гл. 10.

Остается проверить, что агент 1 является днктатором, т.е. что для любых a,b и при любом профиле u

$$u_1(a) > u_1(b) \Rightarrow a\,P(u)\,b\,.$$

Фиксируем a,b и u такие, что $u_1(a) > u_1(b)$. Выберем третий нсход c и рассмотрим следующий профиль v:

$v_1(a) > v_1(c) > v_1(b)$;
для всех $i \neq 1$, такнх что $u_i(a) > u_i(b)$:
$v_i(c) > v_i(a) > v_i(b)$,
для всех i, таких что $u_i(b) > u_i(a)$:
$v_i(c) > v_i(b) > v_i(a)$.

Поскольку $N(v,a,c)=\{1\}$, то $a\,P(v)\,c$. Поскольку $N(v,c,b)=N$, то нз единогласия следует $c\,P(v)\,b$. Значит, $a\,P(v)\,b$. В силу $N(u,a,b)=N(v,a,b)$ из аксномы НПАЭ следует $a\,P(u)\,b$, что и требовалось доказать. QED

Замечание 11.2. Без предположения об единогласии отрицательный результат по существу сохраняется. В дополнение к диктаторскому УКБ появляется столь же глупое антидиктаторское УКБ. Выбирается агент, мнение которого прямо противоположно коллективному предпочтению. Уилсон [1972] доказал, что нет других ПКБ, удовлетворяющих свойству НПАЭ.

11.3 Квазипорядки коллективного благосостояния: олигархии

Мы даем еще некоторый шанс агрегированию, несколько ослабляя предположение о транзитивности отношения коллективного предпочтения. Теперь мы требуем только, чтобы строгая компонента была транзитивна (а отношение безразличия необязательно), и найдем больше методов агрегирования, удовлетворяющих НПАЭ.

Определение 11.2. *Квазипорядком называется полное бинарное отношение на A с транзитивной строгой компонентой. Квазипорядок коллективного благосостояния есть отображение, ставящее в соответствие каждому профилю $u \in L(A)^N$ коллективный квазипорядок $R(u)$.*

Теорема 11.3. *Фиксируем коалицию $T^* \subset N$ – олигархию – и каждому профилю предпочтений поставим в соответствие коллективный квазипорядок $R_{T^*}(u)$, определенный следующим образом:*

$$a\, R_{T^*}(u)\, b \iff N(u;b,a) \text{ не содержит } T^* .$$

Эквивалентным образом отношение $R_{T^*}(u)$ определяется своей транзитивной строгой компонентой P_{T^*}:

$$a\, P_{T^*}(u)\, b \iff \{\text{для всех } i \in T^*,\ u_i(a) > u_i(b)\} .$$

Квазипорядок коллективного благосостояния R_{T^*} удовлетворяет свойствам НПАЭ и единогласия. Обратно, любой квазипорядок коллективного благосостояния, удовлетворяющий свойствам НПАЭ и единогласия, имеет такой вид.

В некотором смысле этот результат является более обнадеживающим, чем отрицательный результат Эрроу. Квазитранзитивное коллективное благосостояние совместимо с произвольным распределением права принимать решение. Однако, в случае олигархии такое распределение является весьма грубым. Агент либо не имеет такого права совсем, либо обладает полным правом вето. Объявлением, что a не хуже b, олигарх форсирует коллективное мнение, что a не хуже b. В частности, единственный анонимный квазипорядок коллективного благосостояния наделяет всех игроков полным правом вето ($T^* = N$). Этот метод агрегирования удовлетворяет свойству единогласия, и при нем все без исключения оптимальные по Парето исходы объявляются наилучшими.

Таким образом, олигархия достигает решительности ценой анонимности и наоборот.

Доказательство теоремы 11.3. Пусть дан квазипорядок R коллективного благосостояния, удовлетворяющий свойствам НПАЭ и единогласия. Определим $B(a,b)$, как при доказательстве теоремы 11.2. По предположению единогласия максимальная коалиция N принадлежит $B(a,b)$ при любых a,b. Как и в предыдущем доказательстве покажем, что $B(a,b) = B$ независимо от a и b. Рассмотрим, в частности, $B(a,b)$ для всех троек a,b,c. Выберем $T \in B(a,b)$ и рассмотрим следующий профиль:

T	$N\backslash T$
a	b
b	c
c	a

Из $N(u;a,b) = T$ следует $a\,P(u)\,b$, а из $N(u,b,c) = N$ получаем $b\,P(u)\,c$. Следовательно, $a\,P(u)\,c$, а потому $T \in B(a,c)$, что и утверждалось. Доказательство $B(a,b) = B(c,b)$ аналогично.

Обозначим $B = B(a,b)$ при всех a,b. Мы утверждаем, что B устойчиво по пересечению. Выберем T,T' из B и построим следующий профиль u:

$T\cap T'$	$T\backslash T'$	$T'\backslash T$	$N\backslash(T\cup T')$	
a	c	b	c	
b	a	c	b	(8)
c	b	a	a	

Получаем $N(u,a,b) = T$, следовательно, $a\,P(u)\,b$. Также имеет место $N(u,b,c) = T'$ и, следовательно, $b\,P(u)\,c$. Значит,

$a\,P(u)\,c$ в то время, как $N(u;a,c) = T \cap T'$, откуда следует $T \cap T' \in B$, и мы получаем желаемое утверждение.

Обозначим через T^* пересечение всех коалиций из B. Остается проверить, что $R = R_{T^*}$. Для этого нужно доказать, что для всех исходов a, b и профилей u

$$a\,P(u)\,b \iff T^* \subset N(u,a,b)\,.$$

Предположим, что $a\,P(u)\,b$. По определению B имеем $N(u,a,b) \in B$, поэтому $N(u,a,b)$ содержит T^*, поскольку T^* – наименьший элемент из B.

Обратно, предположим, что $T^* \subset N(u,a,b)$. Нам нужно доказать, что $N(u,a,b)$ принадлежит B. Для того чтобы сделать это, выберем третий исход c н построим вспомогательный профиль v:

T^*	$N(u,a,b)\backslash T^*$	$N\backslash N(u,a,b)$
a	a	b
c	b	a
b	c	c

Поскольку $N(v,a,c) = N$, то $a\,P(v)\,c$. Поскольку $N(v,c,b) = T^*$, получаем $c\,P(v)\,b$. Значит, $a\,P(v)\,b$ и таким образом, $N(v,a,b) = N(u,a,b)$ принадлежит B.

QED

Замечание 11.3. Об авторах теоремы 11.3. Сен [1970] первым обнаружил, что существуют анонимные квазитранзитивные коллективные благосостояния. Результат о характеризации впервые был доказан Гиббардом [1969] и затем вновь получен Гухой [1972]. Смотри также Браун [1975].

11.4 Ациклическое коллективное благосостояние

Теперь от коллективного предпочтения мы требуем даже меньше, чем транзитивность его строгой компоненты: требуется только, чтобы строгая компонента не имела циклов, чтобы не было "эффекта Кондорсе". Таким образом, агрегирование теряет некоторую степень "рациональности" (в смысле разд. 11.7), но оно по-прежнему годится для нахождения максимального элемента отношения коллективного благосостояния на любом подмножестве исходов.

Определение 11.3. *Ациклическое отношение на A есть полное бинарное отношение R, у которого строгая компонента P не имеет циклов*:

Не существует последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_T$, такой, что $a_t \, P \, a_{t+1}$, $t = 0, \ldots, T-1$ и $a_T \, P \, a_0$.

Ациклическое коллективное благосостояние (АКБ) есть отображение R, агрегирующее профиль $u \in L(A)^N$ в ациклическое отношение $R(u)$.

Если $R(u)$ – ациклическое отношение, то для любого предмета спора B (подмножества из A) оно имеет по крайней мере один максимальный элемент, т.е. исход a такой, что $a \, R(u) \, b$ при всех $b \in B$. Максимальные элементы $R(u)$ на B образуют множество выбора для коллективного предпочтения (см. разд. 11.7).

Существует множество ациклических коллективных благосостояний, и их трудно описать во всей общности (основные ссылки см. в замечании 11.4). Поэтому интересно и не очень трудно охарактеризовать те из них, которые являются к тому же монотонными и нейтральными (теорема 11.4) или монотонными и анонимными (упражнение 11.4). Заметим, что для квазитранзитивных коллективных благосостояний монотонность и нейтральность следуют из НПАЭ и единогласия.

Монотонность: Для всех a и u, v: $\{u$ и v совпадают на $A \setminus \{a\}$ и $[u_i(a) > u_i(b)$ для всех b и всех $i]\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \{a \, R(u) \, b \;\Rightarrow\; a \, R(v) \, b$ для всех $b\}$. (9)

Другими словами, если единственным изменением от u к v является усиление относительной позиции a, то позиция a в $R(u)$ не ухудшается.

Нейтральность: Для любой перестановки σ множества A $\{a \, R(u^{\sigma}) \, b \iff \sigma(a) \, R(u) \, \sigma(b)$ для всех a, b и $u\}$, где обозначение u^{σ} понимается так: $u^{\sigma}_i(a) = u_i(\sigma(a))$.

Как обычно, нейтральность исключает дискриминацию кандидатов, связанную с их наименованием.

Лемма 11.2. *Пусть R – нейтральное, монотонное коллективное благосостояние, удовлетворяющее НПАЭ. Тогда существует простая игра ω (2), удовлетворяющая условию*

$$T \in \omega \;\Rightarrow\; N \backslash T \notin \omega \quad \textit{для всех } T,$$

которая полностью описывает R в следующем смысле:

$$\textit{для всех } a, b \textit{ и всех } u\text{:} \quad a\,R(u)\,b \iff N(u,b,a) \notin \omega. \tag{10}$$

Доказательство. Коллективное благосостояние R ставит в соответствие каждому профилю $u \in L(A)^N$ полное бинарное отношение $R(u)$. Обозначим через $P(u)$ строгую компоненту $R(u)$. Если R удовлетворяет НПАЭ, то свойство $a\,R(u)\,b$ зависит только от $N(u,b,a)$, и поэтому мы можем определить $\omega \subset 2^N$ следующим образом: ω содержит T тогда и только тогда, когда при любых u, a, b из $N(u,b,a) = T$ следует $b\,P(u)\,a$. Эквивалентным образом, ω содержит T тогда и только тогда, когда существуют такие u, a, b, что $N(u,b,a) = T$ и $b\,P(u)\,a$.

Поскольку $P(u)$ асимметрично, то мы не можем получить, что T и $N \backslash T$ одновременно принадлежат ω. Наконец, из монотонности R следует свойство (2), что и завершает доказательство.

QED

Для данного профиля u строгое коллективное предпочтение также называется *отношением доминирования: a* доминирует b *тогда и только тогда,* когда $N(u,a,b) \in \omega$, т.е. когда агенты, для которых a лучше b, образуют выигрывающую коалицию. Для заданного профиля u и предмета спора B *ядро* игры ω есть множество исходов из B, не доминируемых в B, или максимальных по $R(u)$ исходов из B.

Теперь интерес представляет следующий вопрос: когда для заданной простой игры ω, удовлетворяющей (3), отношение (10) является АКБ (обязательно нейтральным и монотонным)? Этот вопрос легко сводится к следующему: для каких простых игр ω при любом профиле u соответствующее отношение доминирования не имеет циклов?

Эта проблема связана с обобщенной версией парадокса Кондорсе. Предположим, что простая игра является *строгой,* т.е.

из любой пары коалиций (T, $N \setminus T$) ровно одна является выигрывающей:

$$T \in \omega \iff N \setminus T \notin \omega \text{ для всех } T. \qquad (11)$$

(Если количество выборщиков в N нечетно, то коалиции большинства дают пример строгой простой игры).

Лемма 11.3. *Если N состоит из трех агентов или более, то из* (11) *следует, что либо игра ω диктаторская (существует $i^* \in N$, такой, что $T \in \omega$ тогда и только тогда, когда T содержит i^*), либо существует разбиение на три части $N = T_1 \cup T_2 \cup T_3$, такое, что каждая из трех коалиций $T_i \cup T_j$ является выигрывающей.*

Доказательство. Рассмотрим минимальную по включению выигрывающую коалицию T^*. Предположим сначала, что она одноточечная: $T^* = \{i^*\}$. Тогда по (2) каждая коалиция, содержащая i^*, является выигрывающей, а в силу (11) любая коалиция, не содержащая i^*, проигрывает. Значит, игра ω является диктаторской.

Предположим теперь, что T^* не одноточечна, тогда ее можно разбить на две части $T^* = T_1 \cup T_2$ (оба T_i не пусты). В силу минимальности по включению T^* каждая T_i является проигрывающей коалицией, следовательно, по (11) ее дополнение должно быть выигрывающим. Полагая $T_3 = N \setminus T^*$, получаем искомое разбиение на три части.

Отсюда следует, что по крайней мере одно из утверждений леммы должно быть верным. Очевидно, что они не могут быть справедливы одновременно.

QED

Если строгая простая игра не является диктаторской, то мы можем выбрать T_i, $i = 1,2,3$, как в лемме 11.3, и построить профиль u, представляющий парадокс Кондорсе:

T_1	T_2	T_3
a	c	b
b	a	c
c	b	a

По построению a доминирует b, b доминирует c, c доминирует a. Значит, строгое предпочтение, связанное с ω, имеет цикл.

Отсюда мы заключаем, что если отношение доминирования, соответствующее простой игре, всегда ациклично, то либо простая игра является диктаторской, либо она не является строгой. Следующий результат делает это утверждение более точным.

Определение 11.4. *Для данной простой игры ω на N числом Накамуры $\nu(\omega)$ называется минимальное число выигрывающих коалиций с пустым пересечением*:

$$\nu = +\infty \quad \text{при} \quad \bigcap_{T\in\omega} T = \varnothing,$$
$$\nu = \inf\left\{ |J| \;\middle|\; J \subset \omega \text{ и } \bigcap_{T\in J} T = \varnothing \right\}.$$

Теорема 11.4 (Накамура [1975]). *Для заданного A следующие два утверждения об (A,ω) эквивалентны*:

(i) $|A| < \nu(\omega)$,

(ii) *для любого u из $L(A)^N$ отношение $R_\omega(u)$ ациклично на A*: $a\, R_\omega(u)\, b \iff N(u,b,a) \notin \omega$.

Доказательство. Предположим, что $|A| < \nu(\omega)$ и (ii) не выполнено. Для некоторого профиля u строгая компонента отношения $R_\omega(u)$ имеет цикл $a_1,\dots,a_K,a_{K+1}$, т.е.

$$N(u;a_1,a_2) \in \omega,\dots,N(u;a_K,a_{K+1}) \in \omega,\dots,N(u;a_K,a_1) \in \omega.$$

Поскольку $K < \nu$, то существует агент $i \in \bigcap_{k=1,\dots,K} N(u;a_k,\ a_{k+1})$. Отсюда следует противоречие:

$$u_i(a_1) < u_i(a_2) < u_i(a_3) < \dots < u_i(a_K) < u_i(a_1).$$

Обратно, предположим, что $\nu \le |A|$, и построим профиль u, для которого $R_\omega(u)$ имеет цикл. Обозначим $p = |A|$ и найдем последовательность $T_1,\dots,T_p$ выигрывающих коалиций с пустым пересечением:

$$T_k \in \omega \quad \text{для всех } k = 1,\dots,p \quad \text{и} \quad \bigcap_{k=1,\dots,p} T_k = \varnothing.$$

Поскольку $\bigcup_{k=1,\dots,p} T_k^c = N$, то мы можем найти последовательность $R_1,\dots,R_p$ попарно непересекающихся (возможно пустых) коалиций, причем

$$R_k \subset T_k^c,\quad k = 1,\dots,p \quad \text{и} \quad \bigcup_{k=1,\dots,p} R_k = N.$$

Упорядочим далее произвольным образом исходы из $A = \{b_1,\dots,b_p\}$. Поскольку T_k – выигрывающая коалиция, то

$R_k^c = \cup_{k' \neq k} R_{k'}$ также выигрывающая коалиция. Построим теперь следующий профиль u:

$$\begin{aligned}
&\text{на } R_1^*: \quad b_1 < b_2 < \ldots < b_p\,,\\
&\text{на } R_2: \quad b_2 < b_3 < \ldots < b_p < b_1\,,\\
&\text{на } R_k: \quad b_k < b_{k+1} < \ldots < b_p < b_1 < \ldots < b_{k-1}\,,\\
&\text{на } R_p: \quad b_p < b_1 < \ldots < b_{p-1}\,.
\end{aligned}$$

Проверим, что $R_\omega(u)$ имеет цикл:

$$\begin{aligned}
N(u; b_2, b_1) &= R_2^c \quad \Rightarrow \quad b_2\, P_\omega(u)\, b_1\,,\\
N(u; b_k, b_{k+1}) &= R_{k+1}^c \quad \Rightarrow \quad b_{k+1} P_\omega(u)\, b_k\,,\\
N(u; b_p, b_1) &= R_1^c \quad \Rightarrow \quad b_1\, P_\omega(u)\, b_p\,.
\end{aligned}$$

QED

В качестве приложения теоремы 11.4 получим характеризацию АКБ со свойствами анонимности, нейтральности и монотонности. Поскольку анонимая простая игра есть в точности игра с квотой ω_q, $\omega_q = \{T \mid |T| \geq q\}$ при некотором целом q, $0 \leq q \leq n$, то это позволяет вычислить число Накамуры для игры с квотой и подставить его в условие (i) теоремы 11.4. Мы уже проделали это вычисление в гл. 10 (см. замечание после теоремы 10.2 в конце разд. 10.3):

$$\nu(\omega_q) = \left[\frac{n}{n-q}\right],$$

где $[x]$ – наименьшее целое, большее или равное x.

Следствие теоремы 11.4. *Если имеется p исходов и n выборщиков, то отношение доминирования в игре с квотой q ациклично тогда и только тогда, когда*

$$p < \left[\frac{n}{n-q}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad q > n \cdot \frac{p-1}{p}\,. \tag{12}$$

Каждое анонимное, нейтральное и монотонное благосостояние описывается как игра с квотой q (в этом смысле отношение доминирования с квотой q есть строгая компонента отношения коллективного благосостояния, а ядро игры с квотой является множеством максимальных элементов этого отношения). Чем меньше квота, тем меньше ядро и тем более решительным становится коллективное благосостояние. Но ацикличность требует очень высокой нижней границы для квоты.

Например, если имеется пять исходов, то квота q должна быть выше $0.8\,n$ (например, 81 выборщик из 100); при 10 исходах квота должна быть повышеиа до $0.9\,n$ и так далее. В частности, если квота q удовлетворяет (12), то победитель по Борда всегда принадлежит ядру игры с квотой q. (Упражнение: почему?)

Следствие 2 теоремы 11.4. *Предположим, что число p кандидатов не меньше числа n выборщиков: $p \geq n$. Пусть R – нейтральное, монотонное и ацикличное коллективное благосостояние, удовлетворяющее НПАЭ. Тогда существует агент с правом вето, т.е. агент, содержащийся в любой выигрывающей коалиции простой игры ω (определенной по (10)).*

Доказательство. Предположим, что в игре ω нет агеита, обладающего правом вето. Для всех $i \in N$ найдем коалиции T_i из ω так, что T_i не содержит i. Тогда число Накамуры $\nu(\omega)$ ие меньше n (возьмите пересечение всех T_i). Поскольку $n \leq p$, то $\nu(\omega) \leq p$, и по теореме 11.4 R не может быть ациклично.

QED

Агеит с правом вето может блокировать любое строгое коллективное предпочтеиие: для $a\,P(b)\,b$ требуется, чтобы агеит с правом вето также считал a лучше b.

Заметим далее, что можно дать характеризацию аионимиых, монотониых (но ие обязательно иейтральных) АКБ. Этот результат описаи в упражнении 11.4.

Из теорем 11.2, 11.4 следует, что существует противоречие между тремя следующими свойствами: рациоиальиость, решительиость и равеиство (анонимность плюс нейтральность) для методов, удовлетворяющих НПАЭ. Так, например, простые мажоритарные турниры порождают равиоправные и решительиые правила (как в разд. 9.4), но не могут устранить циклов и потому обладают малой рациональиостью (в смысле разд. 11.7).

Обозиачим далее через q^* иаименьшее целое, большее $n\cdot[(p-1)/p]$. Тогда игра с квотой q^* имеет ацикличиое отиошеиие доминирования. Оно является рациональным, равноправиым, но очеиь нерешительным коллективным предпочтеиием.

Диктаторские методы вполне рациональны и решительны, но они полностью игнорируют анонимность. Если мы настаиваем на анонимности, то рациональный и решительный метод либо является навязанным (независимо ни от чего выбирается один и тот же исход) или бинарным (только два исхода могут быть выбраны). Эти методы грубо нарушают нейтральность.

Замечание 11.4. О литературе: Ацикличные коллективные благосостояния впервые начали изучать Мас-Колелл и Зонненшейн [1972] и Браун [1975]. Блау и Деб [1977] доказали следствие 2, а Блэйер и Поллак [1979, 1982] получили дальнейшие результаты об агентах с правом вето. Однако эти работы, выполненные в традициях коллективного выбора, прошли мимо простого результата Накамуры, поскольку они не использовали явного представления АКБ с помощью простых игр.

11.5 Ограниченная область: эквивалентность НПАЭ и неманипулируемости

Доказательство теорем Гиббарда – Сэттертуэйта (теорема 10.1) и Эрроу (теорема 11.2) параллельны. Наш следующий результат объясняет, почему на любой области предпочтений аксиома НПАЭ по существу эквивалентна неманипулируемости функции выбора для любого предмета спора.

Теорема 11.5 (Блэйер и Мюллер [1983]). *Фиксируем множество исходов A, множество агентов N и область предпочтений $D \subset L(A)$. Дан ПКБ R, который ставит в соответствие каждому профилю $u \in D^N$ порядок $R(u) \in L(A)$ (безразличия исключаются). Для каждого предмета спора B (подмножества из A) рассмотрим правило голосования, выбирающее (единственный) максимальный по R элемент из B.*

Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

(i) R монотонно (9) и удовлетворяет НПАЭ,

(ii) для любого фиксированного предмета спора $B \subset A$, правило голосования $S(\cdot, B)$ защищено от манипулирования на D^N.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Фиксируем B и предположим, что $S(\cdot, B)$ не защищено от манипулирования. Для некоторого агента i, некоторых $u_i, v_i \in L(A)$ и некоторого $u_{-i} \in L(A)^{N\setminus i}$ имеем

$$u_i(S((u_i, u_{-i}); B)) < u_i(S((v_i, u_{-i}); B)). \tag{13}$$

Обозначим $a = S((u_i, u_{-i}); B)$ и $b = S((v_i, u_{-i}); B)$. Оба этих обязательно различных исхода принадлежат B. Более того, $a\, R(u_i, u_{-i})\, b$, хотя $b\, R(v_i, u_{-i})\, a$. По (13) $N((u_i, u_{-i}); a, b)$ не содержит i, в то же время i содержится в (или составляет) $N((v_i, u_{-i}); a, b)$. Поскольку $a\, R(u)\, b$ зависит только от $N(u, a, b)$ (НПАЭ), то из монотонности теперь вытекает, что $a\, R(u_i, u_{-i})\, b \Rightarrow a\, R(v_i, u_{-i})\, b$. Желаемое противоречие получено.

Докажем, что $(ii) \Rightarrow (i)$. Предположим сначала, что R не удовлетворяет НПАЭ. Для некоторого предмета спора B мы можем найти два профиля $u, v \in D^N$, такие что u, v совпадают на B, а $R(u)$, $R(v)$ не совпадают на B. В частности, мы можем найти такие a, b из B, что

$$N(u; a, b) = N(v; a, b) \quad \text{и} \quad a\, R(u)\, b,\; b\, R(v)\, a. \tag{14}$$

Поскольку $a\, R(u)\, b$, то $S(u; \{a, b\}) = a$. Мы утверждаем, что $S((v_1, u_{-1}); \{a, b\}) = a$ также имеет место. В самом деле предположим, что $S((v_1, u_{-1}); \{a, b\}) = b$. Поскольку u_1 и v_1 совпадают при сравнении a и b, то защищенность от манипулирования $S(.; \{a, b\})$ будет нарушена: если $u_1(a) > u_1(b)$, то агент 1 с истинными предпочтениями v_1 может успешно манипулировать, сообщая u_1. Если $u_1(a) < u_1(b)$, то агент 1 с истинным предпочтением u_1 манипулирует, сообщая v_1. С помощью аналогичных представлений можно последовательно показать, что

$$a = S((v_1, u_{-1}); \{a, b\}) = S((v_1, v_2, u_{-1,2}); \{a, b\})$$

и так далее, пока $a = S((v_{-n}, u_n); \{a, b\}) = S(v; \{a, b\})$. Это противоречит (14) и доказывает свойство НПАЭ.

Проверим теперь, что R монотонно. Поскольку R удовлетворяет НПАЭ, то для этого достаточно доказать, что для любой пары a, b *не может* быть выполнено следующее:

При профиле u имеем $a\,R(u)\,b$; один агент i, который поддерживал b против a при u $(u_i(b) > u_i(a))$ переключается на поддержку a (в его порядке v_i теперь $v_i(a) > v_i(b)$), тогда для нового профиля (v_i, u_{-i}) имеем $b\,R(v_i, u_{-i})\,a$.

Это действительно противоречит неманипулируемости $S(\cdot,\{a,b\})$, поскольку при истинных предпочтениях v_i агент i предпочтет сообщить u_i.

QED

Замечание 11.5. Если выполнено свойство (i), то правила голосования $S(\cdot, B)$ устойчивы даже при манипулировании коалиций (как в лемме 10.3). Для данного B, профиля $u \in D^N$ и коалиции $T \subset N$ не существует совместного неточного сообщения $v_T \in D^T$, такого что

$$S(u; B) = a, \quad S((v_T, u_{N \setminus T}); B) = b \text{ и } u_i(b) > u_i(a) \text{ для всех } i \in T.$$

Доказательство копирует приведенное выше. Предположим, что коалиция имеет выгодную манипуляцию v_T при профиле u. Тогда $N(u; a, b) \subset N((v_T, u_{N \setminus T}); a, b)$, поскольку для всех агентов из T исход b лучше a. Следовательно, $a\,R(v_T, u_{N \setminus T})\,b$ в силу монотонности и НПАЭ, откуда следует желаемое противоречие.

Заметим также, что коалиционная манипулируемость дает, в частности, оптимальность по Парето, если правило голосования $S(\cdot, B)$ является отображением *на* B (возьмите $T = N$).

Основным примером ограниченной области, где существуют удачные агрегирования Эрроу, является область унимодальных предпочтений, изучаемых в следующем разделе. Еще два примера приведены в упражнениях 11.6 и 11.7. Существует несколько абстрактных характеризаций ограниченных областей, гарантирующих существование недиктаторских УКБ: см. Калаи и Мюллер [1977], Блэйер и Мюллер [1983] и другие работы. Обзор этой литературы содержится в Мюллер и Сэттертуэйт [1985].

Другое направление работ исследует сокращения, гарантирующие транзитивность правила большинства. Первоначальный вклад принадлежит Инада [1969] и Сен и Паттанаик [1969]. Обзор литературы см. в Гэртнер [1979]. Все эти результаты также весьма абстрактны, и никакой из них не приводит к чему-то готовому для приложений и интуитивно понятному, что делает унимодальность столь привлекательной.

11.6 Порядки коллективного благосостояния для унимодальной области

Фиксируем порядок на A, $A=\{a_1,\dots,a_p\}$, и обозначим через $SP(A)$ соответствующую область унимодальных предпочтений (см. условие (7) из гл. 10). Мы уже знаем, что в этой области всегда существует победитель по Кондорсе (леммы 10.4 и 10.5), что приводит к неманипулируемым правилам голосования (лемма 10.3). Покажем теперь, что и пародокс Кондорсе не может проявляться, точнее, правило большинства порождает (квази) порядок коллективного благосостояния.

Определение 11.5. *Для данного профиля и для сообщества N обозначим через $M(u)$ мажоритарное отношение: $a\,M(u)\,b$ тогда и только тогда, когда $|N(u,a,b)|>|N(u,b,a)|$, а через $M^*(u)$ его асимметричную компоненту: $a\,M^*(u)\,b$ тогда и только тогда, когда $|N(u,a,b)|>|N(u,b,a)|$. Скажем, что исход является (слабым) победителем по Кондорсе при профиле u, заданном на A, если он является максимальным элементом по $M(u)$. Обозначим через $CW(u)$ множество победителей по Кондорсе при u.*

Лемма 11.4. *Если число агентов в N* нечетно, *то мажоритарное отношение является* порядком *коллективного благосостояния, удовлетворяющим свойствам НПАЭ и монотонности на $SP(A)^N$. Более того, для любого унимодального профиля $u\in SP(A)^N$ соответствующее мажоритарное отношение $M(u)$ является унимодальным, а его пик – (единственный) победитель по Кондорсе для u.*

Доказательство. Поскольку n нечетно и безразличия в индивидуальных предпочтениях исключены, то строгое мажоритарное предпочтение $M^*(u)$ совпадает с $M(u)$. Проверим сначала его транзитивность. Предположим, что она нарушается. Тогда существует тройка $\{a,b,c\}$, причем $a\,M^*(u)\,b$, $b\,M^*(u)\,c$ и

$c\, M^*(u)\, a$. Поскольку пересечение двух множеств, составляющих строгое большинство, не пусто, то существует по крайней мере один агент, для которого $u_i(a) > u_i(b) > u_i(c)$. Следовательно, при заданном порядке на A, c не может быть между a и b (это противоречило бы унимодальности u_i). Далее существует по крайней мере один агент, для которого $u_j(b) > u_j(c) > u_i(a)$, но a не может быть между b и c, аналогично b не может быть между a и c, и мы получили противоречие.

Проверим, что наилучший по $M^*(u)$ исход является победителем по Кондорсе или средним пиком $a = a_k$. По построению a_k, $\{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_p\}$ содержит строгое большинство пиков, а значит, при $i < j \leq k$ выполнено $a_j\, M^*(u)\, a_i$. С помощью симметричных рассуждений для $k < i < j$ получаем $a_i\, M^*(u)\, a_j$.

Мы доказали, что $M(u) = M(u)$ – унимодальный порядок для всех u. Тогда очевидно, что $M(u)$ удовлетворяет свойствам НПАЭ и монотонности.

QED

Если число агентов в сообществе четное, то мажоритарное отношение не обязательно является транзитивным, как показывает следующий пример с четырьмя избирателями и тремя исходами:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$	- Число выборщиков	1	1	2
		c	b	a
		b	c	b
		a	a	c

Для мажоритарного отношения исходы a и c безразличны, то же справедливо для a и b, но b строго лучше c.

Легко показать, что строгая компонента M^* мажоритарного отношения транзитивна и в том случае, когда число агентов четно (упражнение 11.5). Таким образом, мажоритарное отношение всегда порождает на $SP(A)^N$ квазипорядок коллективного благосостояния, удовлетворяющий свойствам НПАЭ и монотонности. Для того чтобы обнаружить ПКБ при четном n, необходимо при равенстве голосов поступать некоторым систематическим образом. Например, мы можем решить всегда отдавать предпочтение наименьшему исходу относительно заданного порядка на A. Это приводит к левому мажоритарному правилу:

$$a\,M_l(u)\,b \iff \{\,|N(u;a,b)| > |N(u;b,a)| \text{ или } |N(u,a,b)| = |N(u;b,a)| \text{ и } a \text{ перед } b\}. \qquad (15)$$

Это отношение является унимодальным порядком, а $M_l(u)$ – ПКБ на $SP(A)^N$, удовлетворяющий свойствам НПАЭ и монотонности. Подводя итоги, скажем, что мажоритарное отношение является методом агрегирования со следующими замечательными свойствами.

(α) Оно агрегирует любой профиль унимодальных предпочтений в унимодальное коллективное предпочтение.

(β) Оно монотонно и удовлетворяет НПАЭ, и следовательно, индуцирует неманипулируемые правила голосования для каждого предмета спора (теорема 11.5)

(γ) Оно анонимно и удовлетворяет свойству единогласия (если для всех агентов a лучше b при u, то это же справедливо и по $R(u)$).

Заметим, что нейтральность бессмысленна в рамках унимодальности, поскольку порядок на исходах уже задан. Имеет ли место результат, аналогичный теореме Мэя (теорема 11.1) для унимодальных предпочтений? Другими словами, является ли правило большинства единственным ПКБ (в области SP), удовлетворяющим свойствам α,β,γ?

Строго говоря, ответ отрицателен. Однако класс всех методов агрегирования, характеризующийся α,β,γ, состоит из простых обобщений правила большинства.

Определение 11.6 (Мулен [1984*b*]). *Для данного сообщества N размера n* **обобщенным мажоритарным отношением** *A назовем отношение M_v вида*

$$M_v(u) = M(u_1,\ldots,u_n;v_1,\ldots,v_{n-1}) \quad \text{для всех } u \in SP(A)^N,$$

где $v_1,\ldots,v_{n-1} \in SP(A)^N$ – **$n-1$ фиксированных** *унимодальных предпочтений, соответствующих* **фиктивным выборщикам.**

Для данного u обобщенный победитель по Кондорсе, соответствующий M_v, является средним среди пиков $u_1,\ldots,u_n$, $v_1,\ldots,v_{n-1}$.

Таким образом, с M_v связано весьма простое (неманипулируемое) правило голосования: каждый агент голосует за свой пик, затем еще $n-1$ фиксированных бюллетеней (с предпочтениями $v_1,\dots,v_{n-1}$) опускаются в урну и, наконец, избирается общее среднее (см. упражнение 11.3).

Пример 11.1. Позиционные диктаторы

Назовем r правым предпочтением в $SP(A)$, если оно совпадает с порядком $a_1 < a_2 < \dots < a_p$. Назовем l левым предпочтением, если оно совпадает с обратным порядком $a_p < a_{p-1} < \dots < a_1$.

Предположим сначала, что все фиктивные выборщики являются правыми $v_1 = \dots = v_{n-1} = r$. Тогда $M_v(u)$ есть следующее отношение: $a\,M(v)\,b$ тогда и только тогда, когда $\{a > b$ и хотя бы один агент считает a лучше $b\}$ или $\{a < b$ и для всех агентов a лучше $b\}$. Его обобщенный победитель по Кондорсе является наибольшим из пиков реальных выборщиков по заданному порядку. Этот ПКБ называется правым диктатором. Симметрично, если все выборщики левые $v_1 = \dots = v_{n-1} = 1$, то мы получаем левого диктатора.

Предположим далее, что фиктивные выборщики подразделяются на $k-1$ левых и $n-k$ правых. Это – k-позиционный диктатор. Избираемый исход имеет ранг k среди пиков агентов по заданному порядку на A. В самом деле, имеется k по крайней мере столь же правых агентов и $n-k+1$ по крайней мере столь же левых агентов. При добавлении бюллетеней фиктивных выборщиков это дает n голосов по крайней мере столь же правых и n голосов по крайней мере столь же левых.

Другие примеры обобщенных мажоритарных отношений получаются при распределении фиктивных избирателей по всем возможным унимодальным порядкам: см. упражнение 11.3, вопрос (c).

По лемме 11.4 обобщенное мажоритарное правило M_v есть ПКБ на $SP(A)^N$, удовлетворяющий требованиям α,β,γ. Справедливо и обратное.

Теорема 11.6. *Пусть на A задан порядок и дано сообщество N. Пусть R – ПКБ на унимодальных предпочтениях (отображение $u \longrightarrow R(u)$ из $SP(A)^N$ в $SP(A)$). Предположим, что R удовлет-*

воряет условиям единогласия, анонимности, монотонности и НПАЭ. Тогда R является обобщенным мажоритарным отношением, т.е. существуют $v_1,\ldots,v_{n-1} \in SP(A)$, *при которых*

$$R(u) = M(u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_{n-1}) \quad \text{для всех} \quad u \in SP(A)^N .$$

Этот результат обобщает полученные до этого результаты из Мулен [1984*b*]. Его оригинальное доказательство приводится во всей полноте.

Доказательство. Пусть R – ПКБ на $SP(A)^N$, удовлетворяющий условиям теоремы. Во-первых, как в ненейтральной версии теоремы Мэя (см. разд. 11.1), из НПАЭ, анонимности и монотонности мы выводим, что для каждой пары исходов a,b существует целое $n_{a,b}$, для которого

$$\text{для всех } u \in SP(A)^N\text{:} \ a\, R(u)\, b \iff |N(u,a,b)| \geq n_{a,b} . \tag{16}$$

Поскольку $R(u)$ – порядок, получаем

$$|N(u,a,b)| \geq n_{a,b} \iff |N(u,b,a)| < n_{b,a} . \tag{17}$$

Поскольку у агентов нет безразличий, то $|N(u,a,b)| + |N(u,b,a)| = n$. Значит, из (17) вытекает

$$n_{a,b} + n_{b,a} = n+1 \quad \text{для всех} \quad a \neq b . \tag{18}$$

Поскольку R удовлетворяет условию единогласия, то для любой пары a,b имеем

$$n_{a,b} \leq n \quad \text{для всех } a \neq b . \tag{19}$$

Используем теперь унимодальность $R(u)$. Фиксируем три исхода a,b,c, причем $a < b < c$. Тогда получаем

$$a\, R(u)\, b \Rightarrow a\, R(u)\, c , \tag{20}$$

$$c\, R(u)\, b \Rightarrow c\, R(u)\, a . \tag{21}$$

Рассмотрим профиль u с $n_{a,b}$ левыми и $n - n_{a,b}$ правыми выборщиками. Тогда $N(u,a,b) = N(u,a,c) = n_{a,b}$ и из (20) получаем $n_{a,b} \geq n_{a,c}$. Аналогично, рассмотрим профиль u' с $n_{c,b}$ правыми и $n - n_{c,b}$ левыми выборщиками, тогда $N(u',c,b) = N(u',c,a) = n_{c,b}$. Значит, из (21) следует $n_{c,b} \geq n_{c,a}$. В силу (17) это эквивалентно $n_{a,c} \geq n_{b,c}$. Таким образом, мы доказали

$$a < b < c \;\Rightarrow\; n_{a,b} \geq n_{a,c} \text{ и } n_{a,c} \geq n_{b,c}. \tag{22}$$

Теперь рассмотрим обобщенное мажоритарное отношение $u \longrightarrow M(u,v)$ при фиксированных $n-1$ фиктивных выборщиках $v = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in SP(A)^{n-1}$. По определению для всех исходов a, b выполнено

$$a\, M(u,v)\, b \iff |N(u,a,b)| + |N(v,a,b)| \geq n. \tag{23}$$

Сравнивая (16) и (23), получаем, что R является обобщенным мажоритарным отношением в том и только том случае, если мы найдем $v \in SP(A)^{n-1}$, при котором

$$\text{для всех } a,b,\ a \neq b\text{:} \quad |N(v,a,b)| = n - n_{a,b}.$$

Положим $m_{a,b} = n - n_{a,b}$. Соберем все свойства $m_{a,b}$. Предположим для простоты, что $A = \{1,2,\dots,p\}$, т.е. что естественный порядок совпадает с нашим фиксированным порядком на A. В силу (18), (19) и (22) целые $m_{k,l}$, $k \neq l$, удовлетворяют

$$\begin{aligned} &0 \leq m_{k,l} \leq n-1, && m_{k,l} + m_{l,k} = n-1, \\ &k > l \;\Rightarrow\; m_{k,l} \geq m_{k,l+1} \text{ и } m_{k-1,l} \geq m_{k,l}. \end{aligned} \tag{24}$$

Для завершения доказательства мы должны построить $n-1$ фиктивных выборщиков $v_1, \dots, v_{n-1}$ (все они должны быть уннмодальными), для которых $|N(v,k,l)| = m_{k,l}$ для всех k, l. Сделаем это индукцией по p.

При $p = 2$ конструкция очевидна. Предположим теперь, что утверждение доказано вплоть до p, и рассмотрим множество A из $p+1$ исходов с коэффициентами $m_{k,l}$, $1 \leq k, l \leq p+1$, удовлетворяющими (24). Ограничение $m_{k,l}$, $1 \leq k, l \leq p$, определяет $n-1$ фиктивных выборщиков $v_1, \dots, v_{n-1}$ на $\{1, \dots, p\}$, причем $|N(v,k;l)| = m_{k,l}$ для $1 \leq k, l \leq p$. Остается расширить v_k на $\{1, \dots, p+1\}$ с сохранением этого равенства.

Заметим сначала, что $m_{p+1,p}$ – число фиктивных выборщиков с пиками в $p+1$. Среди $v_1, \dots, v_{n-1}$ над $\{1, \dots, p\}$ существует $m_{p,p-1}$ выборщиков с пиками в p. По (24) $m_{p+1,p} \leq$ $\leq m_{p,p-1}$, поэтому мы можем выбрать $m_{p+1,p}$ фиктивных выборщиков с пиками в p и расширить их до правых выборщиков на $\{1,\ldots,p+1\}$. Оставшиеся $r_p = m_{p,p-1} - m_{p+1,p}$ имеют пики в p. Обозначим через r_l число выборщиков с пиками в l, $1 \le l \le p$. По унимодальности получаем

$$r_l = m_{l,l-1} - m_{l+1,l} \quad \text{для всех } l = 1,\ldots,p$$

(при соглашении $m_{1,0} = n - 1$).

Для завершения построения наших фиксированных бюллетеней нам нужно определить выборщика с пиком в l, что, скажем, является относительной позицией $p+1$ по отношению к исходам $1,\ldots,k-1$. Тогда для всех $k = 1,\ldots,p$ и всех $l = 1, \ldots, k$ обозначим через $r_{l,k}$ число агентов с пиком в l и исходом $p+1$, ранжированным между $k-1$ и k. (Конечно, под $r_{l,1}$ мы подразумеваем тех агентов, у которых пик в l и $p+1$ находится внизу предпочтения.)

Поскольку все числа $r_{l,k}$ выбраны в соответствии с заданными $m_{l,k}$, то фиктивные выборщики полностью определены на $\{1,\ldots,p+1\}$. Формула индукции, связывающая $m_{p+1,k}$, $k = 1, \ldots, p$ с этими неизвестными числами, имеет вид

$$m_{p+1,k} = m_{p+1,k+1} + \sum_{l=k+1}^{p} r_{l,k} \quad \text{для всех } k = 0,\ldots,p-1$$

(при соглашении $m_{p+1,0} = n - 1$). Эта система вместе с уравнениями

$$\sum_{k=0}^{l-1} r_{l,k} = r_l \quad \text{для всех } l = 1,\ldots,p$$

представляет единственные ограничения в выборе $p(p+1)/2$ неизвестных $r_{l,k}$ (при $1 \le l \le p$, $0 \le k \le p-1$ и $k+1 \le l$). Определим целые β_k (по (24) неотрицательные):

$$\beta_k = m_{p+1,k} - m_{p+1,k+1}\,.$$

Теперь мы должны доказать существование решения следующей системы в неотрицательных целых числах:

$$\sum_{k=0}^{l-1} r_{l,k} = r_l \quad \text{для всех } l = 1,\ldots,p\,,$$

$$\sum_{l=k+1}^{p} r_{l,k} = \beta_k \quad \text{для всех } k = 0,\ldots,p-1\,.$$

Непосредственная проверка показывает, что решение существует тогда и только тогда, когда

$$\sum_{l=1}^{p} r_l = \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k \tag{25}$$

и

$$\sum_{l=1}^{l^*} r_l \le \sum_{k=0}^{l^*-1} \beta_k \qquad \text{для всех} \qquad l^* = 1,\ldots,p\,. \tag{26}$$

Вычислим $\sum_{l=1}^{l^*} r_l = m_{1,0} - m_{l^*+1,l^*} = n - 1 - m_{l^*+1,l^*}$.

Кроме того, $\sum_{k=0}^{l^*-1} \beta_k = m_{p+1,0} - m_{p+1,l^*} = n - 1 - m_{p+1,l^*}$.

Значит, неравенство (26) и равенство (25) следуют из (24).

QED

11.7 Рационализируемые функции выбора[*]

Требуя, чтобы коллективное предпочтение было упорядочением, квазипорядком или ациклическим отношением, мы существенным образом влияем на класс НПАЭ методов агрегирования. Таким образом, важно понять во всей глубине различие в степени рациональности выбора при этих трех предположениях. Для этого нам понадобится формализм функций выбора.

Сообщество имеет дело с конечным множеством A рассматриваемых исходов. Экзогенные ограничения определяют подмножество $B \subset A$ реальных кандидатов; B – предмет спора. Внутри множества B нужно определить множество выбора $S(B) \subset B$. Множество выбора должно состоять по крайней мере из одного исхода. Если оно состоит более, чем из одного исхода, то все они считаются одинаково хорошим выбором (исходы одинаковой исключительности; один из них может быть выбран только в результате дополнительной неопределенной процедуры). Отображение S называется *функцией выбора*.

Простейший способ построения функции выбора состоит в введении порядка на элементах из A. Пусть R – порядок на A, т.е. полное, асимметричное и транзитивное бинарное отношение на A. Порядок приводит к ранжированию кандидатов из A. Соответствующая функция выбора выбирает из B единственный исход с наивысшим рангом. Однако необязательно, чтобы R был порядком, чтобы интерпретировать его как предпочтение в бинарных сравнениях. Достаточно, чтобы для всех предметов спора B подмножество максимальных по R элементов было бы не пусто.

Лемма 11.5. *Для данного полного бинарного отношения на A множество его максимальных элементов на предмете спора B задано условием*

$$\max_B R = \{a \in B \mid \text{для всех } b \in A\text{:} \quad a\, R\, b\} = \{a \in B, \text{ не существует } b \in A\text{: } b\, P\, a\}. \tag{27}$$

Подмножество $\max_B R$ *не пусто для всех предметов спора B* **тогда и только тогда, когда** *отношение Rациклично.*

Очевидное доказательство опускается.

Для ациклического отношения R определена соответствующая функция выбора $S(B) = \max_B R$. Интерес представляет обратный вопрос: можно ли по заданной функции выбора S найти бинарное отношение, при котором $S(B) = \max_B R$ при всех $B \subset A$? Если мы можем это сделать, то будем говорить, что R *рационализирует* S. Рационализируемые функции выбора представляют интерес (i) потому, что они легко описываются (бинарное отношение на A задается всего $p \cdot (p-1)/2$ парными сравнениями, а функция выбора содержит около 2^p свободных параметров при $p = |A|$); (ii) потому, что они легко интерпретируются.

Начнем с такого замечания. Если функция S в целом является рационализируемой, то должно существовать отношение R_S, называемое *базовым* отношением для S, определенное условием

$$a\, R_S\, b \iff a \in S(ab) \quad \text{для всех} \quad a, b \in A\,.$$

Для того чтобы проверить это, используем (27) при $B = \{a, b\}$.

Поскольку S имеет непустое значение, то отношение R_S – полное. Однако оно не всегда ациклично. Даже если это так, то оно необязательно рационализирует S.

Введем два основных свойства функций выбора.

Чернофф: $B \subset B' \;\Rightarrow\; S(B') \cap B \subset S(B)$ для всех B, B'.

Эта аксиома говорит о том, что наилучший выбор для некоторого предмета спора остается наилучшим, если предмет спора сужается. Из этого, в частности, следует, что $S(S(B)) = S(B)$ при всех B. Это условие первоначально было предложено в Чернофф [1954]. Упражнение 11.8 предлагает несколько эквивалентных формулировок этого свойства.

Расширение: $S(B) \cap S(B') \subset S(B \cup B')$ для всех B, B'.

Если a – наилучший выбор для двух различных предметов спора, то он остается наилучшим выбором для их объединения. Сложение сил против a не имеет значения.

Теорема 11.7 (Сен [1971]). *Функция выбора является рационализируемой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет свойствам Чернова и расширения.*

Доказательство. Необходимость доказывается непосредственно. Проверим, например, свойство расширения. Пусть S рационализируема с помощью R и $a \in S(B) \cap S(B')$. Это означает, что для $b \in B$ и $b \in B'$ не выполнено $b\,P\,a$. Значит, $a \in S(B \cup B')$. В действительности мы доказали большее, а именно для $a \in B \cap B'$ включение $a \in S(B) \cap S(B')$ справедливо тогда и только тогда, когда $a \in S(B \cup B')$. Это свойство само по себе характеризует рациональность (см. упражнение 11.10).

Достаточность. Пусть S удовлетворяет свойствам Чернова и расширения. Возьмем сначала $B \subset A$ и $a \in S(B)$. Если $a \notin S(ab)$ при некоторых $b \in B$, то в силу свойства Чернова $S(B) \cap \{ab\} \subset S(ab) = \{b\}$; противоречие. Это доказывает, что $a\,R_S\,b$ при всех $b \in B$. Предположим далее, что a таково, что $a\,R_S\,b$ при всех $b \in B$ или, эквивалентно, $a \in S(ab)$ при всех $b \in B$. Применяя последовательно свойство расширения, получим

$$a \in S(ab) \cap S(ac) \quad \Rightarrow \quad a \in S(abc)\,,$$
$$a \in S(abc),\ a \in S(ad) \quad \Rightarrow \quad a\,S(abcd) \quad \text{и т. д.}$$

Это доказывает $a \in S(B)$. Следовательно, R_S рационализирует S. В заключение приведем эквивалентную формулу для расширения:

$$\bigcap_{1 \le k \le K} S(B_k) \subset S\,\Big[\bigcup_{1 \le k \le K} S(B_k)\Big]$$

QED

В случае однозначных функций выбора получается более простой результат. Если S однозначно, то его базовое отношение асимметрично:

$$\text{для } a \neq b\text{: } a\, R_S\, b \Rightarrow a \in S(ab) \Rightarrow b \notin S(ab) \Rightarrow a\, P_S\, b.$$

Полное, асимметричное, ациклическое бинарное отношение есть в точности порядок. Значит, мы получаем

Следствие теоремы 11.7. *Пусть S – однозначная функция выбора. Тогда S рационализируема в том и только в том случае, когда она удовлетворяет свойству Чернова. В этом случае его базовое отношение является порядком.*

Доказательство. При однозначности свойство Чернова переписывается в виде

$$B \subset B' \text{ и } S(B') \in B \Rightarrow S(B) = S(B'). \tag{28}$$

Аналогично, свойство расширения теперь имеет вид

$$S(B) = S(B') = \{a\} \Rightarrow S(B \cup B') = \{a\}. \tag{29}$$

Проверьте, что из (28) следует (29).

QED

Обратимся теперь к функциям выбора, рационализируемым с помощью упорядочений и/или квазипорядков. Сначала будет дана характеризация рационализируемости в упорядочениях. Она потребует усиления свойства Чернова:

$$\text{НПАН: } \{B \subset B',\ S(B') \cap B \neq 0 \Rightarrow S(B') \cap B = S(B)\}$$
$$\text{для всех } B, B'.$$

Если предмет спора сужается и меньший предмет спора содержит некоторые элементы из первоначального множества выбора, то новое множество выбора составлено только из этих элементов. В противоположность свойству Чернова НПАН не позволяет новым исходам входить во множество выбора, когда предмет спора сокращается. (Эта аксиома уже использовалась для функций коллективного выбора благосостояния; см. разд. 3.2.)

Лемма 11.6. *Аксиома НПАН эквивалентна слабой аксиоме выявления предпочтений (САВП):*

$$\{a \in S(B), \quad b \in B \backslash S(B)\} \Rightarrow$$
не выполнено $\{a \in B', \ b \in S(B')\}$ *для всех* a, b, B, B' .

САВП утверждает, что если исход b однажды был отвергнут при выборе a, то b не может быть избран, если в предмет спора входят a и b.

Доказательство. Предположим, что S удовлетворяет НПАН, и пусть $a \in S(B)$, $b \in B \backslash S(B)$. Тогда $\{ab\} \subset B$ и $S(B) \cap \{ab\} \neq \varnothing$, поэтому по НПАН $S(ab) = S(B) \cap \{ab\} = \{a\}$. Предположим далее, что $a \in B'$ и $b \in S(B')$ для некоторого другого предмета спора B'. Тогда (опять по НПАН)
$$\{\{ab\} \subset B' \text{ и } S(B') \cap \{ab\} \neq \varnothing\} \Rightarrow S(ab) = S(B') \cap \{ab\},$$
значит, $S(ab)$ содержит b – противоречие. Обратно, предположим, что S удовлетворяет САВП, и пусть $B \subset B'$, $S(B') \cap B \neq \varnothing$. Обозначим через a^* элемент из $C = S(B') \cap B$. Предположим, что существует $a \in S(B)$, $a \notin C$. Тогда $a \notin S(B')$, значит, $\{a^* \in S(B'), a \in B' \backslash S(B')\}$, однако $\{a^* \in B, \ a \in S(B)\}$, противоречие с САВП. Это доказывает $S(B) \subset C$. Обратно, предположим, что $a \in C$, $a \notin S(B)$, и выберем некоторое $b \in S(B)$. Имеем $\{b \in S(B), \ a \in B \backslash S(B)\}$, однако $\{b \in B', \ a \in S(B')\}$, опять получили противоречие с САВП.

QED

Теорема 11.8 (Эрроу [1959]). *Функция выбора удовлетворяет НПАН тогда и только тогда, когда она рационализируема с помощью упорядочений.*

Доказательство. Заметим сначала, что из НПАН следует свойство расширения. Для любых B, B' $S(B \cup B')$ пересекается с B и/или B'. Пусть $S(B \cup B') \cap B \neq \varnothing$. Тогда из НПАН следует, что $S(B) = S(B \cup B') \cap B$, а значит, $S(B) \subset S(B \cup B')$, поэтому $S(B) \cap S(B') \subset S(B \cup B')$. Случай $S(B \cup B') \cap B' \neq \varnothing$ рассматривается аналогично.

Пусть S – функция выбора, удовлетворяющая НПАН. Поскольку S удовлетворяет свойствам Чернова и расширения, то она рационализируема с помощью базового отношения R_S (теорема 11.7). Мы только должны доказать, что R_S транзитивно. Предположим, что это не так Выберем a, b, c, для которых

$$a \in S(ab), \quad b \in S(bc), \quad \{c\} = S(ac) .$$

Рассмотрим $S(abc)$. Оно не содержит a. В противном случае по свойству Чернова

$$a \in S(abc) \cap \{ac\} \subset S(ac) ,$$

что противоречит $a \notin S(ac)$. Оно не содержит b; в противном случае по НПАН

$$S(abc) \cap \{ab\} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad S(ab) = S(abc) \cap \{ab\} .$$

Значит, нз $a \in S(ab)$ следует $a \in S(abc)$ – противоречие. Оно не содержит также c. В противном случае по НПАН

$$S(abc) \cap \{bc\} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad S(bc) = S(abc) \cap \{bc\} .$$

Значнт, из $b \in S(bc)$ следует $b \in S(abc)$ – противоречие. Это доказывает, что R_S транзитивно. Оставим читателю проверку того, что функцня выбора соответствует некоторому упорядочению, удовлетворяющему НПАН.

QED

Наша следующая аксиома опять является свойством, связывающим множество выбора для некоторого предмета спора с множеством выбора для меньшего предмета спора.

Айзерман: $\{S(B') \subset B \subset B'\} \quad \Rightarrow \quad \{S(B) \subseteq S(B')\}$

для всех B, B' .

Удаление из задаиного предмета спора нсходов вне множества выбора не может привести к выбору новых исходов. Хотя эта аксиома была известна в литературе (см., например, Фишберн [1973]), ее определяющая роль была осознана недавно (Айзерман и Малишевский [1981]). Вместе с аксномами Чернова и расширения эта аксиома характеризует все функцни выбора, которые рационализируемы с помощью квазипорядков.

Теорема 11.9 (Шварц [1976]). *Функция выбора удовлетворяет аксиомам Чернова, расширения и Айзермана тогда и только тогда, когда она рационализируема с помощью квазипорядка.*

Доказательство. Необходимость. По теореме 11.6 достаточно доказать, что если S рацнонализируема с помощью базового отношения R_S и S удовлетворяет аксиоме Айзермана, то R_S –

квазипорядок. Другими словами, мы хотим, чтобы

$$[S(ab) = \{a\},\ S(bc) = \{b\}] \Rightarrow [S(ac) = \{a\}]. \qquad (30)$$

Поскольку S рационализируема, $S(ab) = \{a\}$ и $S(bc) = \{b\}$, откуда $S(abc) = \{a\}$. Далее, по аксиоме Айзермана

$$S(abc) \subset \{ac\} \subset \{abc\} \Rightarrow S(ac) \subset S(abc) = \{a\},$$

что доказывает (30). Обратно, пусть S – рационализируема с помощью квазипорядка R; докажем, что она удовлетворяет аксиоме Айзермана. Фиксируем предмет спора B' и выберем $a \in B' \backslash S(B') = B' \backslash \max_{B'} R$. По определению максимальных элементов существует $a_1 \in B'$, для которого $a_1 P a$. Мы утрверждаем, что a_1 не может быть взят из $S(B')$. Докажем это, построив по нндукции последовательность $a = a_0, a_1, \ldots, a_t$ при $a_t \in B'$ и $a_t P a_{t-1}$. По транзитивности P эта последовательность не имеет цикла, поэтому в силу конечности A она должна оборваться. Когда оиа оборвется, мы достигнем максимального по R элемента иа B', а имеино $a_t \in S(B')$. По транзитивности P заключаем, что $a_t P a$. Утверждеиие доказано.

Теперь возьмем некоторый новый предмет спора B, такой что $S(B') \subset B \subset B'$. Из предшествующих рассуждений следует, что любой исход $a \in B \backslash S(B')$ таков, что $b P a$ при некотором $b \in S(B')$. Следовательно, a лежит вне $\max_B R = S(B)$. Это доказывает

$$B \backslash S(B') \subset B \backslash S(B) \Rightarrow S(B) \subset S(B').$$

QED

Интересно, что квазипорядок R всегда может быть представлеи как отношение Парето для некоторого конечного иабора порядков на A: существует целое ν и ν порядков $R_1, \ldots, R_\nu$, таких что

$$a R b \Rightarrow \{\text{для некоторого } i = 1, \ldots, \nu,\ a R_i b\}$$

(см. например, Ф. Робертс [1979]). Следовательно, рационализируемость с помощью квазипорядков эквивалеитна некоторой рационализируемости по Парето. Заметим, что коллективное благосостояиие при олигархии (теорема 11.3) есть в точиости отиошение Парето для предпочтений олигархов.

Аксиомы Чериова, расширения и Айзермаиа по сути одиой природы, однако оии логически независимы (если A состоит по крайией мере из трех исходов). Можно иайти функции выбора, в точиости удовлетворяющие только любому наперед заданиому подмножеству из этих трех аксиом (см. Айзермаи и Малишевский [1981]). Эти восемь примеров для миожества A размера 3 легко могут быть построены терпеливым читателем. Заметим одиако, что для одиозиачных функций выбора аксиомы Чернова и Айзермана совпадают и из иих следует аксиома расширения (см. следствие теоремы 11.7).

11.8 Метод агрегирования Кондорсе

Этот раздел осиоваи на замечательной интерпретации книги Коидорсе, предложеиной Янгом [1986]. Обращаясь к задаче выбора иекоторого коллективного предпочтения, Кондорсе всегда предполагал, что существует некоторое *объективное* ранжирование каидидатов, которое может быть извлечеио из профилей иидивидуальных предпочтений. Ои предложил простую биномиальиую модель ошибок выборщика. Для любого биарного сравиения для каждого выборщика задаиа иекоторая большая половииы вероятиость того, что кандидаты будут упорядочены правильио. Предполагается, что выборщики имеют равные возможиости и ие существует корреляции между сравнениями в различных парах. В случае бииарного выбора выбор по наибольшему правдоподобию является, очевидио, правилом большинства. Из этого наблюдеиия, принадлежащего Коидорсе, вытекает главное обоснование прииципа большинства.

Заметим, что если различиые выборщики - эксперты - имеют разиую компетеитность в сравнении исходов, то правильиый выбор по иаибольшему правдоподобию не столь очевиден. Оказывается, что иужно определить взвешеиное большинство миеиий агеитов, при котором веса экспертов изменяются как $\log[p_i/(1-p_i)]$, если p_i - вероятность правильного ответа для эксперта i (см. Нитзаи и Паруш [1982] и Шепли и Грофмаи [1984]).

Для случая, когда все выборщики имеют равную компетеитиость, опишем идею Коидорсе объединения различиых мнеиий иаших выборщиков, если кандидатов три или более. Исходя из бинарного случая он заключил, что все относящиеся к делу данные содержатся в мажоритарном турнире, который получается при всех парных голосованиях с фиксацией поданных голосов. Затем он предложил, чтобы кандидаты ранжировались в соответствии с "наиболее вероятной комбинацией мнений" (см. его *Эссе*, 1785, с. 125). В терминологии современной статистики – это критерий максимального правдоподобия (см. Янг [1986]).

Если мажоритарное отношение транзитивно для некоторого профиля, то оно, очевидно, является наиболее вероятным порядком. А что если мажоритарное отношение имеет цикл? В этом случае нужно построить порядок кандидатов, который поддерживал бы максимальное число парных мнений. Рассмотрим, например, оригинальный вариант парадокса голосования Кондорсе:

Число выборщиков	23	17	2	10	8
	a	b	b	c	c
	b	c	a	a	b
	c	a	c	b	a

Здесь a побеждает b, 33 против 27; b побеждает c, 42 против 18; c побеждает a, 35 против 25. В соответствии с критерием максимального правдоподобия этот цикл должен быть разбит по самому слабому звену (a лучше b), что приводит к порядку $b > c > a$, который набирает $42 + 35 + 27 = 104$ очков, в то время, как, скажем, порядок $a > b > c$ набирает только $33 + 42 + 25 = 100$ очков, а любой другой порядок набирает еще меньше очков.

Кондорсе, однако, неверно предположил, что идея удаления самого слабого парного сравнения по большинству может быть успешно применена при любом количестве кандидатов для нахождения наиболее правдоподобного порядка. Его эвристическое рассуждение несправедливо для четырех или более кандидатов. Рассмотрим следующий пример с четырьмя кандидатами и 100 выборщиками из Янг [1986]. Приводимая таблица показывает число выборщиков, которые поддерживают кандидата в строке против кандидата в столбце:

	a	b	c	d
a	–	76	38	34
b	24	–	36	68
c	62	64	–	30
d	66	32	70	–

Мажоритарные сравнения приводят к циклу $a > b > d > c > a$. В соответствии с эвристикой Коидорсе разбиваем в этом цикле самое слабое звено (c лучше a, 62), оставляя $a > c$ в окончательиом порядке. У иас остается теперь два цикла $a > b > d > a$ и $b > d > c > b$. Наиболее слабое предположеиие $c > b$ (его поддерживает только 64 выборщика). Таким образом, заменяем его на обратное $b > c$ для окончательного порядка. Наконец, разрываем цикл $a > b > d > a$ по $d > a$ (поддерживается только 66 выборщиками), что приводнт к окоичательному порядку $a > b > d > c$. Заметим, что общая поддержка этого порядка, т.е. число бииарных голосов, согласованиых с одним из 6 биариых предположений этого порядка, равно 322. Однако порядок $d > c > a > b$ собирает в сумме 370 голосов в свою поддержку и потому должен быть выбран по методу нанбольшего правдоподобия.

Корректный метод максимизации суммариой поддержки для $p\cdot(p-1)/2$ бинариых предположений сводится к порядку, который иногда связывают с работой Кемени [1959], однако наиболее ясное его изложение прииадлежит Янгу. Он может быть охарактеризован аксиоматически на основе комбинации аксиомы пополиения (см. разд. 9.3) и ослабленного варианта НПАЭ; см. Янг и Левенглик [1978]. Единственным недостатком этого метода агрегирования является сложность иахождения порядка при возрастании числа кандидатов.

Упражнения

11.1 Ранжирование Борда и аксиома НПАЭ (Фишберн [1984])

Этот пример показывает, что ранжирование Борда может весьма драматическим образом зависеть от посторонних альтернатив. Для этого поиадобятся 4 кандидата и 7 выборщиков:

Число выборщиков	3	2	2
	c	b	a
	b	a	d
	a	d	c
	d	c	b

Покажите, что ранжирование Борда таково: $a > b > c > d$. Покажите, что если устраняется неудачник d и оценки Борда заново вычисляются среди оставшихся трех кандидатов, то порядок на a, b, c изменяется на прямо противоположный.

11.2 Сообщение безразличий при бинарном выборе (обобщение теоремы Мэя)

Пусть выборщики сообщают a, b или $*$ (означает безразличие между a и b). Профиль u является теперь элементом $\{a, b, *\}^N$, а правило голосования отображает профили в непустые подмножества $\{ab\}$. Определение монотонности становится несколько более сложным. Фиксируем выборщика i, кандидата $x \in \{ab\}$ и два профиля u, v, причем $u_j = v_j$ при $j \neq i$, $u_i = x$, $v_i = *$:

$$\{x \in S(v) \Rightarrow x \in S(u)\} \text{ и } \{y \in S(u) \Longrightarrow y \in S(v)\},$$

где $\{x, y\} = \{a, b\}$. Аналогично, при строгой монотонности при тех же предположениях требуем

$$\{x \in S(v) \quad \Rightarrow \quad S(u) = \{x\}\} \text{ и } \{y \in S(u) \quad \Rightarrow \quad S(v) = \{y\}\}.$$

(a) Покажите, что теорема Мэя (теорема 11.1) обобщается. Покажите, что существует единственное правило голосования, которое является анонимным, нейтральным и строго монотонным, а именно правило большинства S^*:

$x \in S^*(u) \iff$ за x голосует по крайней мере столько же агентов, сколько голосует за y.

(b) Если отказаться от строгой монотонности, картина становится более сложной. Для профиля u обозначим через n_x число агентов, голосующих за x, $x = a, b$. Обозначим
$E = \{(l, m) \mid l, m$ – неотрицательные целые числа и $l + m \leq n\}$.
Фиксируем подмножество F из E так, что

$l \geq m \Rightarrow (l, m) \in F$ и $\{(l, m) \in F,\ l \leq l',\ m \geq m'\} \Rightarrow \{(l', m') \in F\}$.

Подмножеству F соответствует следующее правило голосования:

$$x \in S(u) \iff (n_x, n_y) \in F, \quad \text{где} \quad \{x,y\} = \{a,b\}.$$

Докажите, что это правило анонимно, нейтрально и монотонно (обратно, докажите, что все анонимные, нейтральные и монотонные правила имеют такой вид).

11.3 Вариант теоремы Эрроу

Пусть R – АКБ, причем имеет место НПАЭ и строгая монотонность (это означает: если единственным изменением при переходе от u к v является усиление относительной позиции a и изменение действительно происходит ($u \neq v$), то $a\,R(u)\,b \Rightarrow a\,P(v)\,b$). Докажите, что R – диктаторское отношение, если A содержит по крайней мере три исхода.

11.4 Ациклическое и анонимное коллективное благосостояние (Мулен [1985*c*])

В этом упражнении мы фиксируем R, которое является анонимным и монотонным АКБ, удовлетворяющим НПАЭ. Предположим, что R не навязано: для любых a,b существует u, такое что $a\,R(u)\,b$.

(a) Покажите, что для любых a,b существует целое $\pi_{a,b}$,

$$0 \le \pi_{a,b} \le n, \quad n = |N|, \text{ такое что}$$
$$a\,R(u)\,b \iff |N(u,a,b)| \ge \pi_{a,b} \quad \text{для всех } u. \tag{31}$$

Таким образом, в каждом парном сравнении a против b мы имеем блокирующую *квоту* $\pi_{a,b}$.

(b) Зададим обратный вопрос: при каких условиях на целые ($\pi_{a,b}$; $a,b \in A$, $a \neq b$) гарантируется ацикличность отношения коллективного благосостояния, определенного по (31)?

Фиксируем отображение π, ставящее в соответствие каждой паре (a,b) различных исходов неотрицательное целое число $\pi_{a,b}$. Определим целое $\lambda(\pi)$ следующим образом:

$$\lambda(\pi) = \sup\left\{ \left[\sum_{k=1}^{K} \pi_{a_k a_{k+1}} \right] - K \right\},$$

где супремум берется по всем $K \le |A|$ и всем последовательностям $a_1, \ldots, a_K$ различных элементов из A при соглашении $a_{K+1} = a_1$.

Покажите, что если $\lambda(\pi)$ строго меньше n, то отношение коллективного благосостояния R, определенное по (31), является ациклическим.

Подсказка: проверьте сначала, что $\pi_{a,b} \le n+1$, и выведите отсюда полноту $R(u)$. Предположим далее, что строгая компонента $P(u)$ имеет цикл $a_1, \dots, a_K$:

$$a_{k+1}\, P(u)\, a_k \qquad \text{для всех } k=1,\dots,K, \text{ где } a_{K+1}=a_1.$$

Выведите из этих предположений неравенство

$$\sum_{k=1}^{K} |N(u,a_k,a_{k+1})| \le n-1$$

и получите противоречие.

(c) Обратно, докажите, что если отношение коллективного благосостояния, определенное по (31), является ациклическим при всех u, то мы должны иметь $\lambda(\pi) < n$.

Подсказка: проверьте сначала, что $\pi_{a,b} + \pi_{b,a} - 2 < n$. Затем выберите конечную последовательность $a_1, \dots, a_K$ и предположите, что

$$\sum_{k=1}^{K} (\pi_{a_k a_{k+1}} - 1) \ge n.$$

Докажите существование K попарно различных коалиций $R_1, \dots, R_k$, для которых

$$\bigcup_{k=1}^{K} R_k = N \text{ и } |R_k| \le \pi_{a_k a_{k+1}} - 1 \quad \text{для всех } k=1,\dots,K.$$

Затем постройте профиль u, для которого $N(u,a_k,a_{k+1}) = R_{k+1}$ при всех $k=1,\dots,K$, и получите противоречие.

(d) Пример для $|A|=4$ иллюстрирует этот результат. Здесь $n=100$, а на пересечении строки x и столбца y стоит $\pi_{x,y}$.

	a	b	c	d
a	–	20	10	15
b	60	–	21	33
c	30	8	–	22
d	40	11	20	–

Для принадлежности множеству выбора от a требуется, чтобы оно было не хуже b по крайней мере у 20 агентов, не хуже c не менее чем у 10 агентов и не хуже d не менее чем у 15 агентов. Проверьте, что ограничение $\lambda(\pi) < n$ является точным для всех циклов длины 4. Таким образом, нельзя увеличить *ни одно* число $\pi_{x,y}$ без нарушения ацикличности.

(e) Вместо квот блокирования $\pi_{a,b}$ используем выигрывающие квоты $w_{a,b}$:

$$a\, P(u)\, b \iff |N(u,a,b)| \geq w_{a,b}.$$

Покажите, что данное условие определяет ациклическое отношение тогда и только тогда, когда для любого цикла длины K (в A) сумма выигрывающих квот не меньше $kn - n + 1$ (эта принадлежащая Д. Блэйеру интерпретация сообщена автору в личной беседе).

11.5 Еще о мажоритарном отношении и унимодальных сравнениях предпочтений

Даны порядок на A, $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$, и $SP(A)$ – соответствующая область унимодальных предпочтений. Покажите, что если размер N четный, то мажоритарное отношение $M(u)$ при каждом профиле $u \in SP(A)^N$ является квазипорядком (определение 11.2). *Подсказка*: обозначим через $M_l(u)$, $M_r(u)$ соответственно левое и правое мажоритарные отношения (см. (15)). Покажите, что $M(u)$ есть отношение Парето, полученное из M_l, M_r:

$$a\, M(u)\, b \iff a\, M_l(u)\, b \text{ и/или } a\, M_r(u)\, b.$$

11.6 Достаточное условие транзитивности мажоритарного отношения

Задан порядок $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ на множестве агентов. Рассмотрим профиль $u \in L(A)^N$, удовлетворяющий следующему свойству. Для любых $i, j, k \in N$ и любых $a, b \in A$

$$\{i < k < j \text{ и } u_i(a) > u_i(b),\ u_j(a) > u_j(b)\} \Rightarrow \{u_k(a) > u_k(b)\}.$$

Покажите, что соответствующее мажоритарное отношение является порядком, если n нечетно, и квазипорядком, если n четно.

11.7 Дихотомические предпочтения и голосование с одобрением (Брамс и Фишберн [1978])

Пусть $D(A)$ – множество дихотомических предпочтений на A, а именно упорядочение с ровно двумя классами безразличия:

$u_i \in D(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторого подмножества B_i, $\varnothing \neq B_i \subset A$, u_i постоянна на B_i, а также на $A \backslash B_i$ и $u_i(B_i) > u_i(A \backslash B_i)$.

Для данного сообщества N назовем голосованием с одобрением следующее УКБ:

$$a\,R(u)\,b \iff |\{i \in N \mid a \in B_i\}| \geq |\{i \in N \mid b \in B_i\}| \,.$$

Покажите, что существует единственное УКБ на $D(A)^N$, которое является анонимным, нейтральным, НПАЭ и строго монотонным (дайте соответствующее определение).

11.8 Эквивалентные формулировки аксиомы Чернова

Свойство Чернова эквивалентно одному из восьми следующих свойств:

(i) $S(B \cup B') \subset S(B) \cup B'$ для всех B, B' ,

(ii) $S(B \cup B') \subset S(B) \cup S(B')$,

(iii) $S(B \cup B') \subset S(S(B) \cup B')$,

(iv) $S(B \cup B') \subset S(S(B) \cup S(B'))$,

(v) то же, что выше, но для *непересекающихся* подмножеств B, B' из A.

11.9 Следствие из аксиомы Чернова

Пусть S – функция выбора, удовлетворяющая аксиоме Чернова. Докажите существование по крайней мере одного порядка R, для которого

$$\text{для всех } B \subset A\text{: } \max_B R \in S(B) \,.$$

Подсказка: постройте последовательность $a_1 \in S(A)$, $a_2 \in S(A \backslash \{a_1\})$, $a_3 \in S(A \backslash \{a_1, a_2\})$ и т.д. Определим тогда R как порядок с a_1 на первом месте, a_2 – на втором и т.д.

11.10 Еще одна характеризация рационализируемости (Шварц [1976])

Докажите, что S рационализируема тогда и только тогда, когда

$$S(B) \cap S(B') = S(B \cup B') \cap B \cap B' \quad \text{для всех } B, B'.$$

11.11 Еще одна характеризация рационализируемости для упорядочений (Сен [1971])

Докажите, что S рационализируема с помощью упорядочения тогда и только тогда, когда выполнено свойство Чернова и следующее условие:

$$\text{Сен: } \{B \subset B' \text{ и } S(B') \cap S(B) \neq \varnothing\} \Rightarrow S(B) \subset S(B') \quad \text{для всех } B, B'.$$

11.12 Независимость от пути по Плотту (Плотт [1973])

Рассмотрим следующее свойство функции выбора S, называемое независимостью от пути:

$$S(B \cup B') = S(S(B) \cup B') \quad \text{для всех } B, B'.$$

Это позволяет нам представить проблему выбора для (большого) предмета спора через выборы для малых предметов спора. Мы можем отрезать любой фрагмент от первоначального предмета спора и заменить его на его собственное множество выбора. Таким образом, исходная проблема выбора может быть сведена к произвольной совокупности меньших проблем.

(i) Фиксируем целое $K \geq 2$. Покажите, что независимость от пути эквивалентна следующему условию

$$S\left[\bigcup_{1 \leq k \leq K} B_k\right] = S\left[\bigcup_{1 \leq k \leq K} S(B_k)\right] \quad \text{для всех } B_1, \ldots, B_K.$$

(ii) Докажите, что S не зависит от пути тогда и только тогда, когда она удовлетворяет аксиомам Чернова и Айзермана.

Литература

Aczel J.
1966. Lectures on Functional Equations and Their Applications. New York: Academic.

Aizerman M.A., and A.V. Malishevski.
1981. General theory of best variant choice, IEEE Transaction on Automatic Control, 26, 1030–41. [Русский вариант: Айзерман М.А., Малишевский А.В. Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов. Автоматика и телемеханика, 2, 65–83.]

Arrow K.
1959. Rational choice functions and orderings. Econometrica, 26, 121–7.
1963. Social Choice and Individual Values, 2nd ed. (1st ed., 1951). New York: John Wiley.

Arrow K., and M. Intriligator, eds.
1981. Handbook of Mathematical Economics. Amsterdam: North-Holland.

d'Aspremont C.
1985. Axioms for social welfare orderings. In Social Goals and Social Organizations, L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein, eds. Cambridge: Cambridge University Press.

d'Aspremont C., and L. Gevers.
1977. Equity and the informational basis of collective choice. Review of Economic Studies, 44(2), 199–209.

Atkinson A.B.
1970. On the measurement of inequality. Journal of Economic Theory, 2, 244–63.

Aumann R.J.
1976. Lectures on Game Theory. Mimeo, Stanford University.
1985. An axiomatization of the non-transferable utility value. Econometrica, 53(3), 667–78.

Aumann R.J., and M. Maschler.
1985. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. Journal of Economic Theory, 36, 195–213.

Aumann R.J., and L. Shapley.
1974. Values of Non-atomic Games. Princeton, NJ: Princeton University Press. [Имеется перевод: Ауман Р., Шепли Л. Значения для неатомических игр. – М.: Мир, 1977.]

Banker R.
1981. Equity consideration in traditional full-cost allocation practices: an axiomatic perspective. In Joint Cost Allocations, S. Moriatry, ed. Norman: University of Oklahoma.

Banks J.S.
1985. Sophisticated voting outcomes and agenda control. Social Choice and Welfare, 1(4), 295–306.

Barbera S.
1979. Majority and positional voting in a probabilistic framework. Review of Economic Studies, 46, 389–97.

Baumol W., J. Panzar, and R. Willig.
1982. Contestable Markets and the Theory of Industry Structure. New York: Harcourt Brace Jovanovich.

Binmore K., A. Rubinstein, and A. Wolinsky.
1986. Nash bargaining solution in economic modelling. Rand Journal of Economics, 17, 176–88.

Black D.
1958. The theory of committees and elections. Cambridge: Cambridge University Press.

Blackorby C., and D. Donaldson.
1984. Social criteria for evaluating population change. Journal of Public Economics, 25, 13–33.

Blackorby C., D. Primont, and R. Russell.
1978. Duality, Separability and Functional Structure. Amsterdam: North-Holland.

Blair D., and E. Muller.
1983. Essential aggregation procedures on restricted domains of preferences. Journal of Economic Theory, 30, 34–53.

Blair D., and R. Pollak.
1979. Collective rationality and dictatorship: the scope of the Arrow theorem. Journal of Economic Theory, 21, 186–94.
1982. Acyclic collective choice rules. Econometrica, 50, 931–4.

Blau D., and R. Deb.
1977. Social decision functions and the veto. Econometrica, 45, 871–9.

Бондарева О.Н.
1962. Теория ядра в игре *n* лиц. Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астрон., 13, 3, 141–2.

Borda J.C. de.
1781. Mémoire sur les élections au Scrutin. Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Paris.

Border K.
1985. Fixed Points Theorems with Application to Economics and Game Theory. Cambridge: Cambridge University Press.

Brams S., and P. Fishburn.
1978. Approval voting. American Political Science Review, 72(3), 831–47.
1983. Paradoxes of preferential voting. Mathematics Magazine, 56(5), 207–14.

Brown D.J.
1975. Aggregation of preferences. Quarterly Journal of Economics, 89, 456–69.

Champsaur P., and J.C. Rochet.
1983. On planning procedures which are locally strategy-proof. Journal of Economic Theory, 30(2), 283–99.

Chernoff H.
1954. Rational selection of decision functions. Econometrica, 22, 422–43.

Chun Y.
1986. The solidarity axiom for quasi-linear social choice problems. Social Choice and Welfare, 3, 297–310.
1988. The proportional solution for rights problems. Mathematical Social Sciences, 15(3).

Chun Y., and W. Thomson.
1987. Bargaining Problems with Uncertain Disagreement Points. Mimeo, University of Rochester.

Clarke E.H.
1971. Multipart pricing of public goods. Public Choice, 11, 17–33.

Condorcet Marquis de.
1785. Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des decisions rendues à la pluralité des voix, Paris.

Dasgupta P., P. Hammond, and E. Maskin.
1979. The implementation of social choice rules. Review of Economic Studies, 46, 185–216.

Debreu G.
1960. Topological methods in cardinal utility theory. In Mathematical Methods in the Social Sciences, K. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes, eds. Stanford: Stanford University Press.

Debreu G., and H. Scarf.
1963. A limit theorem on the core of an economy. International Economic Review, 4, 235–46.

Demange G.
1982. Single peaked orders on a tree. Mathematical Social Sciences, 3(4), 389–96.
1986. Non Manipulable Cores. Mimeo, Escole Polytechnique, Paris.

Dubins L.F.
1977. Group decision devices. American Mathematical Monthly, May, 350–6.

Dummett M.
1984. Voting Procedures. Oxford: Oxford University Press.

Dutta B.
1980. On the possibility of consistent voting procedures. Review of Economics Studies, 47, 603–16.

Erdös P., and Moser L.
1964. On representation of directed graphs as unions of orderings. Publication of the Mathèmatics Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 9, 125–32.

Farquharson R.
1969. Theory of Voting. New Haven: Yale University Press.

Faulhaber G.
1975. Cross-subsidization: pricing in public enterprises. American Economics Review, 65, 966-77.

Feldman A.
1980. Welfare Economics and Social Choice Theory. Boston: Kluwer, Nijhoff.

Fishburn P.C.
1973. The theory of social choice. Princeton: Princeton University Press.
1982. Monotonicity paradoxes in the theory of elections. Discrete Applied Mathematics, 4, 119-34.
1984. Discrete mathematics in voting and group choice. SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods, 5, 263-75.

Foley D.
1967. Resource allocation and the public sector. Yale Economic Essays, 7(1), 45-98.
1970. Lindahl's solution and the core of an economy with public goods. Econometrica, 38, 66-72.

Foster J.
1985. Inequality measurement . In Fair Allocation, H.P. Young, ed., AMS Short Course Lecture Notes, Vol.33. Providence: The American Mathematical Society.

Gaertner W.
1979. An analysis and comparison of several necessary and sufficient conditions for transitivity under the majority rule. In Aggregation and Revelation of Preferences, J.J. Laffont, ed. Amsterdam: North Holland.

Gehrlein W., B. Gopinath, J.C. Lagarias, and P. C. Fishburn.
1982. Optimal pairs of score vectors for positional scoring rules. Applied Mathematics and Optimization, 8, 309-24.

Gibbard A.
1969. Social Choice and Arrow Condition. Mimeo.
1973. Manipulation of voting schemes: a general rezult. Econometrica, 41, 587-601.
1977. Manipulation of schemes that mix voting with chance. Econometrica, 45, 665-81.
1978. Straightforwardness of game forms with lotteries as outcomes, Econometrica, 46, 595-614.

Gillies D.B.
1959. Solution to general non-zero sum games. In Contribution to the Theory of Games *IV*, Tucker and Luce, eds., Annals of Mathematics Studies, Vol. 40. Princeton: Princeton University Press, 47-85.

Gorman W.M.
1968. The structure of utility functions. Review of Economic Studies, 35, 369-90.

Green J., E. Kohlberg, and J.J. Laffont.
1976. Partial equilibrium approach to the free rider problem. Journal of Public Economics, 6, 375–94.

Green J., and J.J. Laffont.
1979. Incentives in public decision making. In Studies in Public Economics, Vol. 1. Amsterdam: North Holland.

Greenberg J.
1979. Consistent majority rules over compact sets of alternatives. Econometrica, 47, 627–36.

Groves T.
1973. Incentives in teams. Econometrica, 41, 617–63.

Groves T., and J. Ledyard.
1977. Optimal allocation of public goods: a solution to the free rider problem. Econometrica, 45, 783–809.

Groves T., and M. Loeb.
1975. Incentives and public inputs. Journal of Public Economics, 4, 211–26.

Guha A.S.
1972. Neutrality, monotonicity and the right of veto. Econometrica, 40, 821–6.

Hammond P.
1976. Equity, Arrow's conditions and Rawls' difference principle. Econometrica, 44(4), 793–804.

Hardy G.H., J.E. Littlewood, and G. Polya.
1934/1952. Inequalities. Cambridge: Cambridge University Press. [Имеется перевод: Харди Г., Литтльвуд Дж. и др. Неравенства. – М.: ИЛ, 1948.]

Harsanyi J.C.
1955. Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons of utility. Journal of Political Economy, 63, 309–21.
1963. A simplified bargaining model for *N*–person cooperative games. International Economic Review, 4, 194–220.
1975. Can the maximin principle serve as a basis for morality? American Political Science Review, 69, 594–606.
1977. Rational Behaviour and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations. Cambridge: Cambridge University Press.

Hart S.
1985. An axiomatization of Harsanyi's non-transferable utility solution. Econometrica, 53(6), 1295–1314.

Hart S., and A. Mas-Colell.
In press. Potential, value, and consistency. Econometrica.

Hurwicz L.
1979. Outcome functions yielding Walrasian and Lindahl allocations at Nash equilibrium points. Review of Economic Studies, 46, 217–25.

Hylland A.
1980. Strategy-Proofness of Voting Procedures with Lotteries as Outcomes and Infinite Sets of Strategies. Mimeo, University of Oslo.

Ichiishi T.
1981. Super modularity: applications to convex games and to the greedy algorithm for LP. Journal of Economic Theory, 25, 283-6.
1983. Game Theory for Economic Analysis. New York: Academic.
1986. The effectivity function approach to the core. In Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gerard Debreu, W. Hildenbrand and A. Mas-Colell, eds. Amsterdam: North-Holland.
Forthcoming. On Peleg's theorem for stability of convex effectivity functions. European Journal of Political Economy, Special Issue on Economic Design.

Inada K.
1969. The simple majority decision rule. Econometrica, 32, 490-506.

Kalai E.
1977. Proportional solutions to bargaining situations: interpersonal utility comparisons. Econometrica, 45(7), 1623-30.
1985. Solutions to the bargaining problem. In Social Goals and Social Organization, L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein, eds. Cambridge: Cambridge University Press.

Kalai E., and E. Muller.
1977. Characterization of domains admitting nondictatorial social welfare functions and nonmanipulable voting procedures, Journal of Economic Theory, 16, 457-69.

Kalai E., and D. Samet.
1985. Monotonic solutions to general cooperative games, Econometrica, 53(2), 307-28.

Kalai E., and M. Smorodinsky.
1975. Other solutions to Nash's bargaining problem. Econometrica, 43(3), 513-18.

Kaneko M.
1977. The ratio equilibrium and a voting game in a public good economy. Journal of Economic Theory, 16(2), 123-36.
1984. Reformulation of the Nash social welfare function for a continuum of individuals. Social Choice and Welfare, 1, 33-43.

Kelly J.S.
1986. Condorcet winner proportions. Social Choice and Welfare, 3, 311-14.

Kemeny J.
1959. Mathematics without numbers. Daedalus, 88, 571-91.

Kern R.
1985. The Shapley transfer value without zero weight. International Journal of Game Theory, 14(2), 73–92.

Kim K.W., and F. Roush.
1980. Special domains and nonmanipulability. Mathematical Social Sciences, 1(1), 85–92.

Kim T.
1986. A Stable Nash Mechanism Implementing Lindahl Allocations for Quasi-Linear Environments. Mimeo, University of Minnesota.

Kolm S.C.
1968. The optimal production of social justice. In Public Economics, H. Guitton and J. Margolis, eds. London: Macmillan.
1972. Justice et Equité. Monograph of the CNRS, Paris, CNRS.
1976. Unequal inequalities. Journal of Economic Theory, 12(3), 416–42; 13(1), 82–111.

Laffont J.J., and E. Maskin.
1980. A differential approach to dominant strategy mechanisms, Econometrica, 48(6), 1507–20.

Lebreton M.
1986. On the Core of Voting Games. Mimeo, Université de Rennes.

Legros P.
1981. A Note on the Nucleolus of Three Person Games. Mimeo, University of Paris.

Lensberg T.
1987. Stability and collective rationality. Econometrica, 55(4), 935–62.

Littlechild S.C., and G. Owen.
1973. A simple expression for the Shapley value in a special case. Management Science, 20, 370–2.

Loehman E., and A. Whinston.
1974. An axiomatic approach to cost allocation for public investment. Public Finance Quarterly, 2, 236–51.

McGarvey D.C.
1953. A theorem on the construction of voting paradoxes. Econometrica, 21, 608–10.

McKelvey R.D., and R.G. Niemi.
1978. A multistage game representation of sophisticated voting for binary procedures. Journal of Economic Theory, 18, 1–22.

McKelvey R.D., and N. Schofield.
1986. Generalized Symmetry Conditions at a Core Point. Mimeo, Washington University, St. Louis.

Maschler M., and M.A. Perles.
1981*a*. The super-additive solution for the Nash bargaining game. International Journal of Game Theory, 10(3/4), 163–93.

1981*b*. The present status of the super-additive solution. In Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern, R.J. Aumann, ed. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Mas-Colell A.
1980. Remarks on the game-theoretic analysis of a simple distribution of surplus problem. International Journal of Game Theory, 9(3), 125-40.

Mas-Colell A., and J. Silvestre.
1985. Cost Share Equilibria: A Lindahlian Approach. Mimeo, Univtrsity of California, Davis.

Mas-Colell A., and H. Sonnenschein.
1972. General possibility theorems for group ndecision functions, Review of Economic Studies, 39, 185-92.

Maskin E.
1977. Nash Equilibrium and Welfare Optimality. Mimeo, Massachusetts Institute of Technology.
1979. Implementation and strong Nash equilibrium. In Aggregation and Revelation of Preferences, J.J. Laffont, ed. Amsterdam: North-Holland.
1985. The theory of implementation in Nash equilibrium. In Social Goals and Social Organizations, L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein, eds. Cambridge: Cambridge University Press.

May K.
1952. A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision. Econometrica, 20, 680-4.

Megiddo N.
1974. On the nonmonotonicity of the bargaining set, the kernel, and the nucleolus of a game, SIAM Journal on Applied Mathemathics, 27, 355-8.

Меньшикова О.Р.
1976. О вычислении обобщенного *N*-ядра. Журнал вычислительной математики и математической физики, 16, 1121-35.

Menshikova O., and I. Menshikov.
1983. The generalized nucleolus as a solution of a cost allocation problem. IIASA, Laxenburg, Austria.

Miller N.
1977. Graph-theoretical approaches to the theory of voting. American Journal of Political Science, 21, 769-803.
1980. A new solution set for tournaments and majority voting: further graphtheoretical approach to the theory of voting. American Journal of Political Science, 24, 68-9.
1983. Pluralism and social choice. American Political Science Review, 77, 734-5.

Milleron J.C.
1972. Theory of value with public goods: a survey article. Journal of Economic Theory, 5, 419-77.

Mirman L.J., Y. Tauman, and I. Zang.
1985. Supportability, sustainability and subsidy-free prices. Rand Journal of Econômics, 16(1), 114-26.

Mirrlees J.
1974. Notes on welfare economics, information and uncertainty. In Essays on Economic Behaviour under uncertainty, T. Balch, D. McFadden, and S. Wu, eds. Amsterdam: North-Holland.

Moulin L.
1953. Les origines religieuses des techniques electorales et delibêratives modernes. Revue d'Histoire Politique et Constitutionnelle.

Moulin H.
1979. Dominance solvable voting schemes. Econometrica, 47(6), 1337–51.
1980*a*. On strategy-proofness and single peakedness. Public Choice, 35, 437–55.
1980*b*. Implementing efficient, anonymous and neutral social choice functions. Journal of Mathematical Economics, 7, 249–69.
1981*a*. Implementing just and efficient decision making. Journal of Public Economics, 16, 193–213.
1981*b*. The proportional veto principle. Review of Economic Studies, 48, 407–16.
1983. The Strategy of Social Choice. Advanced Textbooks in Economics, No. 18. Amsterdam: North Holland.
1984*a*. The conditional auction for sharing a surplus. Review of Economic Studies, 51, 157–70.
1984*b*. Generalized Condorcet winners for single peaked and single plateau preferences. Social Choice and Welfare, 1, 127–47.
1985*a*. Fairness and strategy in voting. In Fair Allocation, H.P.Young, ed., AMS Short Course Lecture Notes, Vol. 33. Providence, RI: American Mathematical Society.
1985*b*. Egalitarianism and utilitarianism in quasi-linear bargaining. Econometrica, 53(1), 49–67.
1985*c*. From social welfare orderings to acyclic aggregation of preferences. Mathematical Social Sciences, 9, 1–17.
1985*d*. The separability axiom and equal sharing methods. Journal of Economic Theory, 36(1), 120–48.
1986*a*. Game Theory for the Social Sciences, 2nd ed. New York: New York University Press.
1986*b*. Characterizations of the pivotal mechanism. Journal of Public Economics, 31, 53–78.
1986*c*. Choosing from a tournament. Social Choice and Welfare, 3, 271–91.
1987*a*. Equal or proportional division of a surplus, and other methods. International Journal of Game Theory, 16(3), 161–86.
1987*b*. Egalitarian equivalent cost-sharing of a public good. Econometrica, 55(4), 963–77.
1987*c*. A core selection for pricing a single output monopoly. Rand Journal of Economics, 18(3), 397–407.
1987*d*. The pure compensation problem: egalitarianism versus laissez-fairism. Quarterly Journal of Economics, 102, 769–83.
Forthcoming. Common property of resouces: can everyone benefit from qrowth? Journal of Mathematical Economics.

In press. Condorcet's principle implies the no show paradox. Journal of Economic Theory, 45.

Moulin H., and B. Peleg.
1982. Core of effectivity functions and implementation theory. Journal of Mathematical Economics, 10, 115–45.

Mueller D.
1978. Voting by veto. Journal of Public Economics, 10, 57–75.
1979. Public Choice. Cambridge Surveys of Economic Literature. Cambridge: Cambridge University Press.

Muller E., and M. Satterthwaite.
1977. The equivalence of strong positive association and strategy–proofness. Journal of Economic Theory, 14, 412–18.
1985. Strategyproofness: the existence of dominant strategy mechanisms. In Social Goals and Social Organisation, L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein, eds. Cambridge: Cambridge University Press.

Musgrave R, and Peacock A., eds.
1958. Classics in the Theory of Public Finance. London: Macmillan.

Myerson R.
1977. Graphs and cooperation in games. Mathematics of Operations Research, 2, 225–9.
1981. Utilitarianism, egalitarianism and the timing effect in social choice problems. Econometrica, 49(4), 883–97.

Nakamura K.
1975. The core of the simple game without ordinal preferences. International Journal of Game Theory, 4, 95–104.

Nash J.F.
1950. The bargaining problem. Econometrica, 28, 155–62.

Nitzan S., and J. Paroush.
1982. Optimal decision rules in uncertain dichotomous choice situations. International Economic Review, 23(2), 289–97.

O'Neill B.
1982. A problem of rights arbitration in the Talmud. Mathematical Social Science, 2, 345–71.

Owen G.
1982. Game Theory, 2nd ed. New York: Academic.

Peleg B.
1978. Consistent voting systems. Econometrica, 46, 153–61.
1982. Convex Effectivity Functions. Mimeo, The Hebrew University of Jerusalem.
1984*a*. Game Theoretic Analysis of Voting in Committees. Cambridge: Cambridge University Press.
1984*b*. A proof That the Core of an Ordinal Convex Game is a Von Neumann Morgenstern Solution. Mimeo, The Hebrew University of Jerusalem.

1985. An Axiomatization of the Core of Cooperative Games Without Side Payments. Mimeo, The Hebrew University of Jerusalem.
1986. On the reduced game property and its converse. International Journal of Game Theory, 15(3), 187–200.

Peters H.
1986*a*. Simultaneity of issues and additivity in bargaining. Econometrica, 54, 153–69.
1986*b*. Characterizations of Bargaining Solutions by Properties of Their Status Quo Sets. Mimeo, Rijksuniversiteit Limburg, The Netherlands.
1986*c*. Bargaining Game Theory. Ph.D. Thesis, Catholic University of Nijmegen, The Netherlands.

Peters H., and P. Wakker.
1987. Independence of Irrelevant Alternatives and Revealed Group Preferences. Mimeo, Limburg Rijksuniversiteit.

Plott C.R.
1967. A notion of equilibrium and its possibility under majority rule. American Economic Review, 57, 787–806.
1973. Path independence, rationality and social choice. Econometrica, 41(6), 1075–91.

Proudhon P.J.
1861. Essais de Philosophie pratique. Paris.

Rawls J.
1971. A theory of Justice. Cambridge, MA: Belknap.

Riker W.
1982. Liberalism Against Populism. San Francisco: Freeman.

Rob R.
1982. Asymptotic efficiency of the demand-revealing mechanism. Journal of Economic Theory, 28, 208–20.

Roberts F.J.
1979. Measurement theory. In Encyclopedia of Mathematics and Applications, Vol. 7, F. Rota, ed. London: Addison-Wesley.

Roberts K.
1979. The characterization of implementable choice rules. In Aggregation and Revelation of Preferences, J.J. Laffont, ed. Studies in Public Economics. Amsterdam: North-Holland.
1980*a*. Possibility theorems with interpersonally comparable welfare levels. Review of Economic Studies, 47, 409–20.
1980*b*. Interpersonal comparability and social choice theory. Review of Economic Studies, 47, 421–39.

Rockafellar R.T.
1970. Convex analysis. Princeton: Princeton University Press.

Roth A.
1979. Axiomatic Models of Bargaining. Berlin and New York: Springer-Verlag.

Rubinstein A.
1980. Stability of decision systems under majority rule. Journal of Economic Theory, 23, 150–9.
1982. Perfect equilibrium in a bargaining model. Econometrica, 50, 97–109.

Satterthwaite M.A.
1975. Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. Journal of Economic Theory, 10, 198–217.

Scarf H.
1967. The core of an *N* person game. Econometrica, 35, 50–69.
1986. Notes on the core of a productive economy. In Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gerard Debreu, W. Hildenbrand and A. Mas-Colell, eds. Amsterdam: North Holland.

Schmeidler D.
1969. The nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal on Applied Mathematics, 17, 1163–70.

Schofield N.
1984. Social equilibrium and cycles on compact sets. Journal of Economic Theory, 33, 59–71.

Schokkaert E., and B. Overlaet.
1986. Moral Intuitions and Economic Models of Distributive Justice. Mimeo, K.V. Leuven.

Schwartz T.
1976. Choice functions, rationality conditions and variations on the weak axiom of revealed preferences. Journal of Economic Theory, 13, 414–27.

Sen A.K.
1970. Collective Choice and Social Welfare. San Francisco: Holden Day.
1971. Choice functions and revealed preferences. Review of Economic Studies, 38, 307–17.
1973. On Economic Inequality. Oxford: Claredon.
1977. On weights and measures: informational constraints in social welfare analysis. Econometrica, 45(7), 1539–72.

Sen A.K., and P.K. Pattanaik.
1969. Necessary and sufficient conditions for rational choice under majority decision. Journal of Economic Theory, 1, 178–202.

Sen A.K., and B. Williams, eds.
1982. Utilitarianism and Beyond. Cambridge: Cambridge University Press.

Shapley L.S.
1953. A value for *N*-person games. In Contributions to the Theory of Games *II*, H.W. Kuhn and A.W. Tucker, eds. Annals of Mathematics Studies No. 28. Princeton: Princeton University Press, 307–17.

1969. Utility comparison and the theory of games. In La Decision, G.Th. Guilbaud, ed. Paris: CNRS, 251-63.
1971. Core of convex games. International Journal of Game Theory, 1, 11-26.*

Shapley L., and B. Grofman.
1984. Optimizing group judgmental accuracy in the presence of interdependencies, Public Choice, 43(3), 329-44.

Sharkey W.W.
1979. Existence of a core when there are increasing returns. Econometrica, 47(4), 869-76.
1981. Convex games without side-payments. International Journal of Game Theory, 11, 101-6.
1982. The Theory of Natural Monopoly. Cambridge: Cambridge University Press.

Sharkey W.W., and L.G. Telser.
1978. Supportable cost functions for the multiproduct firm. Journal of Economic Theory, 18, 23-37.

Shepsle K., and B. Weingast.
1984. Uncovered sets and sophisticated voting outcomes, with implications for agenda institutions. American Journal of Political Science, 28(1), 49-75.

Shorrocks A.F.
1984. Inequality decomposition by population subgroups. Econometrica, 52, 1369-86.
1985. Aggregation Issues in Inequality Measurement. Mimeo, the Australian National University, Canberra.

Shubik M.
1962. Incentives, decentralized controls, the assignment of joint costs and internal pricing. Management Science, 8(3), 325-43.

Smith J.
1973. Aggregation of preferences with variable electorate. Econometrica, 41(6), 1027-41.

Соболев *А.И.*
1975. Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх посредством функциональных уравнений. В кн. Математические методы в социальных науках, под ред. Н.Н. Воробьева, вып. 6, Вильнюс, 92-151.

Stearns R.
1959. The voting problem. American Mathematics Monthly, 66, 761-3.

Straffin P.D.
1980. Topics in the Theory of Voting. The UMAP Expository Monograph Series. Boston: Birkhaüser.

Straffin P.D., and J.P. Heaney.
1981. Game Theory and the Tennessee Valley Authority. International Journal of Game Theory, 10(1), 35-43.

Suzumura K.
1983. Rational Choice, Collective Decision, and Social Welfare. Cambridge: Cambridge University Press.

Thomson W.
1983*a*. The fair division of a fixed supply among a growing population. Mathematics of Operations Research, 8, 319–26.
1983*b*. Problems of fair division and the egalitarian solution. Journal of Economic Theory, 31, 211–26.
Forthcoming. Bargaining Theory: the Axiomatic Approach, New York: Academic.

Thomson W., and R.B. Myerson.
1980. Monotonicity and independence axioms. International Journal of Game Theory, 9, 37–49.

Thomson W., and H. Varian.
1985. Theories of justice based on symmetry. In Social goals and Social Organization, L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein, eds. Cambridge: Cambridge University Press.

Tideman T.N., and G. Tullock.
1976. A new and superior principle for collective choice. Journal of Political Economy, 84, 1145–59.

Tocqueville A. de.
1860. De la Démocratie en Amérique. Paris.

Вилков В.Б.
1977. Выпуклые игры без побочных платежей. Вестник Ленинградского Университета, 7, 21–4.

von Neumann J., and O. Morgenstern.
1947. Theory of Games and Economic Behaviour, 2nd ed. Princeton: Princeton University Press. [Имеется перевод: фон Нейман Дж. и Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.]

Weber R.J.
1978. Reproducing Voting Systems. Mimeo, Cowles Foundation, New Haven.

Wilson R.J.
1971. Stable coalition proposals in majority rule voting. Journal of Economic Theory, 3, 254–71.
1972. Social choice without the Pareto principle. Journal of Economic Theory, 5, 478–86.

Yaari M.
1978. Separably concave utilities and the principle of diminishing eagerness to trade. Journal of Economic Theory, 18, 102–18.
1981. Rawls, Edgeworth, Shapley, Nash: theories of distributive justice reexamined. Journal of Economic Theory, 24(1), 1–39.

Yaari M., and M. Bar-Hillel.
1984. On dividing justly. Social choice and Welfare, 1, 1–24.

Young H.P.
1974. An axiomatization of Borda's rule. Journal of Economic Theory, 9, 43–52.

1975. Social choice scoring functions. SIAM Journal of Applied Mathematics, 28, 824–38.

1985*a*. Monotonic solutions of cooperative games. International Journal of Game Theory, 14(2), 65–72.

1985*b*. Cost allocations. In Fair Allocation, H.P. Young, ed., AMS Short Course Lecture Notes, Vol. 33. Providence: American Mathematical Society.

1986. Optimal ranking and choice from pairwise comparisons. In Information Pooling and Group Decision-Making, B. Grofman and G. Owen, eds. Greenwich, CT: JAI.

1987. On dividing an amount according to individual claims or liabilities. Mathematics of Operation Research, 12, 397–414.

1988. Condorcet's Theory of Voting. Mimeo, University of Maryland.

Young H.P., and A. Levenglick.

1978. A consistent extension of Condorcet's election principle. SIAM Journal of Applied Mathematics, Part C, 35, 285–300.

Именной указатель

Предметный указатель

Примечание переводчика. При составлении русского варианта предметного указателя использовался принцип оригинала, подчеркивающий смысловую взаимосвязь основных терминов.

Оглавление

Научное издание

Эрве Мулен
Кооперативное принятие решений:
Аксиомы и модели

Заведующий редакцией академик В И Арнольд
Зам зав редакцией А С Попов
Ст научный редактор А А Бряндинская
Художественный редактор В И Шаповалов
Художник О С Василькова
Корректор М Е Савина

ИБ № 7399

Оригинал-макет подготовлен на персональном
компьютере и отпечатан на лазерном
принтере в издательстве "Мир"

Подписано к печати 12.04.91. Формат 60 x 90 1/16.
Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Гарнитура
литературная. Объем 14,50 бум.л. Усл. печ. л.
29,00. Усл. кр.-отт. 29,00. Уч.-изд. л. 24,42.

Изд. 1/7002. Тираж 6300 экз. Зак. № 282. Цена 6 р.

Издательство "Мир" В/О "Совэкспорткнига" Госкомпечати СССР
129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер , 2

Тульская типография Государственного комитета СССР по печати.
300600, Тула, проспект им. В.И.Ленина, 109.