

Grundlagen und Methoden der Periodenforschung

Von

Dr. phil. Karl Stumpff

a. o. Professor an der Universität Berlin
Observator am Meteorologischen Institut
der Universität Berlin

Mit 41 Abbildungen im Text



Berlin
Verlag von Julius Springer
1937

ISBN-13:978-3-642-90454-7

e-ISBN-13:978-3-642-92311-1

DOI: 10.1007/978-3-642-92311-1

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

Copyright 1937 by Julius Springer in Berlin.

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1937

Vorwort.

Im vorigen Jahrhundert hat der Forscher, der sich mit periodischen Eigenschaften von Naturvorgängen zu beschäftigen hatte, kaum andere Hilfsmittel besessen, als ihm die Theorie der FOURIERSchen Reihen lieferte. Erst die um die Jahrhundertwende erfolgte Erfindung des *Periodogramms* durch ARTHUR SCHUSTER brachte hierin eine Änderung, die im wesentlichen auf einer grundlegenden Verschiebung der Fragestellung beruhte: Die auf der FOURIERSchen Theorie der trigonometrischen Reihenentwicklung gegründete *Harmonische Analyse* löste die Aufgabe, empirische Funktionen oder Beobachtungsreihen interpolatorisch durch eine Folge von Sinuswellen darzustellen oder anzunähern — die Periodogrammtheorie stellt darüber hinaus die Frage, welchen Realitätswert solche Wellen besitzen, und stellt durch die, wenn auch noch so problematische, Antwort auf diese Frage die Verbindung her, die zwischen der rein mathematischen und der physikalisch-naturwissenschaftlichen Auffassung eines konkreten Problems bisher noch fehlte. Dieser Begriff der physikalischen Realität hat überall dort einen wohlbestimmten Sinn, wo die Gesetzmäßigkeiten eines Naturvorgangs wenigstens ihrer Form nach bekannt sind. In all den zahlreichen Fällen hingegen, wo diese Gesetzmäßigkeit selbst oder ihre Form dem Forscher als Unbekannte entgegentritt, erhält der Realitätsbegriff einen unbestimmten Charakter — es ist dann sinnvoller, von der mehr oder weniger großen *Wahrscheinlichkeit* der Realität, als von Realität schlechthin zu sprechen. Seit SCHUSTER beschränken sich die Aufgaben der Periodenforschung also nicht auf rein analytische Probleme, sondern greifen weit auf das Gebiet der Statistik über.

Die Erweiterung der Grundlagen der Periodenforschung hat zu einer fortschreitenden Verbesserung der Methoden in theoretischer und praktischer Hinsicht geführt. Diese Entwicklung, die durch mannigfache Erfahrung bei der Behandlung akuter wissenschaftlicher Aufgaben unterstützt und gefördert worden ist, kann auch heute noch keineswegs als abgeschlossen gelten. Seitdem ich, vor nunmehr 10 Jahren, in meinem Leitfaden: „*Analyse periodischer Vorgänge*“ eine Zusammenfassung der bis dahin bekannten Methoden der Periodenforschung unternommen habe, ist diese Entwicklung unaufhaltsam fortgeschritten. Es sind nicht nur neue Methoden zur Lösung alter Probleme auf rechnerischem oder instrumentellem Wege gefunden worden, sondern es hat sich auch auf Grund neuer praktischer Erfahrungen die Möglichkeit ergeben, den Zusammenhang zwischen verschiedenartigen Lösungen von höheren Gesichtspunkten aus zu erkennen und zu einer einheitlicheren Gestaltung des

Ganzen zu verwerten. Besonders fruchtbar ist in dieser Hinsicht die große Aufmerksamkeit gewesen, die in neuerer Zeit den ebenso wichtigen wie schwierigen Problemen geschenkt worden ist, die mit dem periodischen Charakter *meteorologischer* Erscheinungen zusammenhängen. Das Interesse an den zeitlich stark begrenzten Schwingungsvorgängen in der Atmosphäre ist besonders durch die Arbeiten von WEICKMANN und seiner Leipziger Schule geweckt worden. Die Einordnung der Theorie des statistischen und analytischen Verhaltens solcher „*quasi-persistenten*“ Schwingungen in die klassische Periodogrammtheorie verdanken wir hauptsächlich den neueren Arbeiten von J. BARTELS, die sich insbesondere auf Erfahrungen bei erdmagnetischen Erscheinungen stützen.

Das dem Meteorologischen Institut der Universität Berlin angegliederte und vom Verfasser geleitete „*Institut für Periodenforschung*“ verfolgt seit 1934 die Aufgabe, die Grundlagen und Methoden der Periodenforschung zusammenzufassen, zu erweitern, zu verbessern und sie insbesondere der Erforschung meteorologischer Perioden nutzbar zu machen. Eine erneute und wegen der Fortschritte der letzten 10 Jahre weit über den Rahmen der oben erwähnten „Analyse periodischer Vorgänge“ hinausgreifende Zusammenfassung dieser Grundlagen und Methoden erschien daher gerechtfertigt. Das neue Werk soll das alte nicht überflüssig machen — es ist im folgenden oft auf die Ausführungen der „Analyse periodischer Vorgänge“ Bezug genommen worden — sondern es vielmehr ergänzen. Es konnten daher manche Einzelheiten, sofern sie nicht gerade für das Verständnis der Grundlagen wichtig waren, hier kurz gefaßt werden, wenn ein Hinweis auf die ausführlichere Darstellung in der „Analyse periodischer Vorgänge“ Ersatz bot. (Solche Hinweise sind unter der Abkürzung *A. p. V.* mit folgender Seitenzahl gegeben.) Dafür ergab sich dann Raum für eine breitere Behandlung neuerer Methoden und grundsätzlicher Überlegungen, auf die ich hier besonderen Wert gelegt habe.

Der gesamte Stoff ist in sechs Kapiteln behandelt, von denen die ersten beiden sich mit Grundlagen, Theorie und Praxis der Harmonischen Analyse beschäftigen. Die beiden nächsten Kapitel behandeln die analytischen und statistischen Grundlagen der Periodogrammrechnung. Das fünfte Kapitel gibt einen kurzen Überblick über diejenigen analytischen Methoden der Periodenbestimmung, die sich neben der Periodogrammrechnung Geltung verschafft haben. Das letzte Kapitel enthält eine Beschreibung der wichtigsten physikalischen Hilfsmittel und Meßmethoden der Periodenforschung, soweit sie nicht, wie die mechanischen Harmonischen Analysatoren und das HOLLERITH-Lochkartenverfahren, schon in den früheren Kapiteln im Zusammenhang mit den dort beschriebenen numerischen Methoden aufgeführt worden sind. Auf die Aufnahme einiger weiterer Abschnitte, die sich auf verwandte Probleme, wie z. B. die Theorie und Praxis der Kugelfunktionen oder spezielle

Fragen der Fehlertheorie und der Korrelationsrechnung bezogen, mußte aus Raummangel verzichtet werden.

Die einzelnen Kapitel sind in Abschnitte unterteilt worden. Hinweise auf Abschnitte früherer oder späterer Kapitel sind in der Form gegeben, daß neben der in römischen Ziffern ausgedrückten Kapitelnummer die Nummer des Abschnitts in arabischen Ziffern steht, z. B. (IV, 5). Formeln sind grundsätzlich nur dann numeriert, wenn an anderer Stelle auf sie Bezug genommen werden mußte. Die Numerierung (eingeklammerte arabische Zahl) erfolgte für jedes Kapitel, mit (1) beginnend, durchlaufend. Bei Bezugnahme auf Formeln anderer Kapitel ist also stets die Kapitelnummer hinzugefügt; fehlt die Kapitelangabe, so ist das laufende Kapitel gemeint.

Literaturhinweise sind durch den Vermerk (Lit.) mit nachfolgender Nummer gegeben und beziehen sich auf das nach Autoren alphabetisch geordnete Literaturverzeichnis am Ende des Buches, das die wichtigsten Abhandlungen des modernen periodographischen Schrifttums umfaßt, ohne auf Vollständigkeit Anspruch zu erheben. Insbesondere konnten von den außerordentlich zahlreichen Anwendungen periodographischer Methoden auf naturwissenschaftliche, namentlich geophysikalische Einzelfragen nur die wichtigsten und methodisch interessantesten aufgenommen werden, ohne daß jedoch mit dieser Auswahl ein Werturteil verbunden sein soll.

Ich hoffe, daß dies Lehrbuch nicht nur dem theoretisch interessierten Leser Anregung zum weiteren Ausbau der Grundlagen und Methoden der Periodographie bietet, sondern daß auch der Praktiker in ihm alles finden wird, was zu einer richtigen und zweckmäßigen Anwendung dieser Methoden auf die in den verschiedensten Forschungsgebieten auftauchenden Periodenprobleme notwendig ist. Leider reichte der zur Verfügung stehende Raum nicht aus, um (mit Ausnahme der im zweiten Kapitel behandelten Praxis der Harmonischen Analyse) überall praktische Rechenbeispiele einzufügen. Es ist jedoch geplant, dies Versäumnis in einer Sammlung von *Hilfstafern, Formeln und Aufgaben der Periodenforschung* nachzuholen, die in Kürze im gleichen Verlage erscheinen soll und sich eng an die theoretischen Ausführungen des vorliegenden Werkes anlehnen wird.

Für die Durchsicht des Manuskripts und der Formeln bin ich Fräulein J. PFAFF, für die Ausführung der zahlreichen photographischen Aufnahmen dem Mechaniker des Instituts für Periodenforschung, Herrn R. ENGLER und für die Hilfe bei der Korrektur Fräulein I. BECK, zu großem Dank verpflichtet. Der Verlagsbuchhandlung Julius Springer danke ich für das Interesse an dem Zustandekommen des Buches und für dessen schöne und sorgfältige Ausgestaltung.

Berlin, März 1937.

K. STUMPF.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Erstes Kapitel: Reihenentwicklung und näherungsweise Darstellung empirischer Funktionen	I
1. Empirische Funktionen	I
2. Annäherung empirischer Funktionen durch Potenzreihen	4
3. Orthogonale Funktionssysteme	7
4. Die orthogonalen Kreisfunktionen	10
5. Harmonische Analyse in beliebigen Grundintervallen	14
6. Rein periodische Funktionen	15
7. Reihenentwicklung von Verteilungsfunktionen	20
8. Allgemeine Bemerkungen über Beobachtungsreihen	25
9. Interpolation und Glättung	27
10. Annäherung von Beobachtungsreihen	32
11. Harmonische Analyse von Beobachtungsreihen	35
12. Mehrdeutigkeit der trigonometrischen Interpolation	38
Zweites Kapitel: Praxis der Harmonischen Analyse und Synthese	46
1. Einige Beispiele für FOURIERSche Reihen	46
2. Harmonische Analysatoren	51
3. Rechenschemata für Harmonische Analyse von Beobachtungsreihen	56
4. Spezielle Rechenschemata	61
5. Analyse der Differenzen	73
6. Analyse von Beobachtungsnetzen	75
7. Symmetrieeigenschaften von Beobachtungsreihen und -netzen	80
Drittes Kapitel: Das Periodogramm	87
1. Das Amplitudenspektrum und die optische Analogie	87
2. Das Spektrum einer einfachen Welle	91
3. Besondere Eigenschaften des Periodogramms einer Sinuswelle	97
4. Das Periodogramm als Funktion der Lage des Analysenintervalls. Das Phasendiagramm	107
5. Das Periodogramm als Funktion der Intervalllänge. Summationsvektor und Irrfahrt	114
6. Die Trennung benachbarter Perioden. Auflösungskraft des Periodogramms	118
7. Das BUYS-BALLOTSche Schema	132
8. Das DARWINSche und das BÖRGENSche Schema	138
9. Einheitsschema für periodographische Durchmusterungen	142
10. Das Lochkartenverfahren als technisches Hilfsmittel bei Periodogrammrechnungen	148
11. Abarten des Periodogramms	152
12. Analyse lückenhafter Beobachtungsreihen	158

	Seite
Viertes Kapitel: Die statistische Behandlung von Perioden- problemen	163
1. Grundbegriffe der Statistik	163
2. Einführung des Expektanzbegriffs	175
3. Beliebige Verteilungsfunktionen. Die BRUNSSche Reihe	182
4. Zweidimensionale Verteilungen. Die Punktwolke	188
5. Elliptische Verteilungen	196
6. Einige Sätze und Begriffe aus der Korrelationsrechnung	202
7. Autokorrelation von Beobachtungsreihen	210
8. Die Expektanz autokorrelierter Beobachtungsreihen	226
9. Irrfahrt, Summationsvektoren und Quasipersistenz	231
10. Statistik des BUYS-BALLOTSchen Schemas	237
Fünftes Kapitel: Andere analytische Methoden der Perioden- bestimmung	242
1. Die LAPLACESche Transformation	242
2. Rationalisierung durch Differential- und Differenzenbeziehungen	248
3. Exhaustionsmethoden	252
4. Periodenbestimmung mit Hilfe der Autokorrelation	259
5. Die Methode von LABROUSTE	263
6. Exhaustionsmethoden und Periodogrammanalyse. Klassifizierung der periodographischen Methoden	268
Sechstes Kapitel: Die physikalischen Hilfsmittel der Perioden- forschung	272
1. Das Momentenprinzip und seine Anwendungsmöglichkeiten	272
2. Das Resonanzprinzip und seine Anwendungen	277
3. Das Interferenzprinzip als Grundlage der optischen Periodographen	281
4. Das optische Bild einer Beobachtungsreihe oder -kurve	286
5. Der Periodograph von A. E. DOUGLASS	288
6. Der photomechanische Periodograph von STUMPF und seine Theorie.	292
7. Photomechanische Analyse langer Beobachtungsreihen	306
8. Der Periodograph zweiter Art	309
9. Das Polarisationsperiodometer	313
Literaturverzeichnis	318
Namen- und Sachverzeichnis	329

Reihenentwicklung und näherungsweise Darstellung empirischer Funktionen.

1. Empirische Funktionen.

Der Begriff einer *Funktion* einer oder mehrerer Veränderlicher ist aus der höheren Mathematik wohlbekannt. Eine Zahl x (Abszisse, Argument, unabhängige Veränderliche genannt) möge innerhalb eines Zahlenbereiches alle oder ausgewählte Werte annehmen können. Vermöge einer gegebenen Vorschrift soll dann jedem dieser Werte x eine Zahl y zugeordnet sein; diese von x abhängige Zahl nennen wir eine Funktion von x ($y = f(x)$), auch wohl Ordinate oder abhängige Veränderliche. Ebenso gibt es Funktionen, die von mehreren Variablen (x, y, z, \dots) abhängen, die also erst dann zahlenmäßig bekannt sind, wenn allen unabhängigen Variablen bestimmte Werte zugeschrieben werden.

Empirisch nennen wir eine Funktion, wenn sie nicht durch einen mathematischen Ausdruck, durch rechnerische oder gedankliche Vorschriften; sondern durch Beobachtung oder Registrierung eines Naturvorgangs oder irgendwelcher der Erfahrung entnommenen Gegebenheiten gewonnen worden ist. Die unabhängige Variable ist in sehr vielen Fällen die *Zeit*; wir sprechen dann von einem *Vorgang*, oder richtiger von der zahlen- oder kurvenmäßigen Wiedergabe eines Vorgangs. Der beobachtete Vorgang sei etwa die Änderung des Luftdrucks an einem bestimmten Beobachtungsort während eines bestimmten Zeitraums. Ist der Vorgang (in diesem Falle durch einen Barographen) fortlaufend graphisch registriert worden, so haben wir eine Beobachtungskurve vor uns; ist der Vorgang nicht fortlaufend, sondern nur an ausgewählten Zeitpunkten (Beobachtungsterminen) durch Ablesung eines Instruments gemessen worden, so sprechen wir von einer Beobachtungsreihe oder *-folge*. Sind die zwischen den einzelnen Beobachtungsterminen liegenden Zeiträume gleich, so heißt die Reihe gleichabständig oder äquidistant. Die Stelle der Zeit als unabhängige Variable kann natürlich auch durch eine räumliche Koordinate vertreten werden. Beispiele für solche räumlichen Funktionen mit einer Veränderlichen: Luftdruckverteilung längs eines Breitenkreises der Erde; Meereshöhe, erdmagnetische Intensität, Schwere längs eines Weges auf der Erdoberfläche

(Straße, Eisenbahnlinie, Geländeprofil). Solche „Ortsfunktionen“ können, den 3 Koordinaten des Raumes entsprechend, auch von zwei oder drei Variablen abhängen; als vierte Variable kommt in manchen Fällen noch die Zeit hinzu. — Beispiele andersartiger Größen, die als unabhängige Variable vorkommen, findet man besonders zahlreich in der *Statistik*. Zum Beispiel gilt dies für Häufigkeits- oder Verteilungskurven, die als empirische Funktionen oft von sehr verschiedenartigen Argumenten abhängen.

Obwohl die empirischen Funktionen demnach sehr mannigfaltig gestaltet sein können, gibt es doch gewisse Eigenschaften, die ihnen ihrer Natur gemäß anhaften und sie aus der viel größeren Mannigfaltigkeit aller denkbaren Funktionen deutlich abgrenzen. Allgemein gilt zunächst:

a) die Grenzen des Arguments, innerhalb derer die empirische Funktion definiert ist, sind endlich,

b) alle empirischen Funktionen sind eindeutig und beschränkt, d. h. zu jeder Stelle des Definitionsbereiches gehört höchstens *ein* Funktionswert, und die Beträge aller Funktionswerte liegen unterhalb einer endlichen Schranke.

Für fortlaufend registrierte Beobachtungsergebnisse (hier dürfen wir uns auf den Fall einer einzigen unabhängigen Variablen beschränken) gilt außerdem:

c) jede in einem stetigen Bereich einer unabhängigen Variablen definierte empirische Funktion ist höchstens an endlich vielen Stellen des Bereiches unstetig. Geometrisch gesprochen: die Funktion läßt sich als Kurve zeichnen, die gegebenenfalls an isolierten Stellen „Sprünge“ aufweisen darf. Für die Sprungstellen gilt die unter b) erwähnte Eindeutigkeit der Funktion eigentlich nicht, sie wird aber wieder hergestellt, wenn wir für die Sprungstelle besondere Festsetzungen treffen. Wir werden später sehen, daß es mathematisch zweckmäßig ist, der Sprungstelle weder den vorderen noch den hinteren Grenzwert der Funktion, sondern das arithmetische Mittel aus beiden als Funktionswert zuzuschreiben.

Aus c) folgern wir noch, daß empirische Funktionen immer *integrierbar* sind. Über ihre *Differenzierbarkeit* ist jedoch nichts ausgesagt. Ist zusätzlich bekannt, daß sie in bestimmten Teilintervallen differenzierbar ist, so wollen wir sie daselbst „*glatt*“ nennen. Stetige Punkte mit unstetiger erster Ableitung bezeichnen wir als *Knicke*.

Auch die hier bemerkten Einschränkungen lassen natürlich noch einen ungeheuren Spielraum für die besondere Gestalt empirischer Funktionen übrig. Aber es ist wichtig, festzustellen, daß in den hier gezogenen Grenzen Singularitäten keinen Platz haben, und daß „ausgefallene“ Funktionen, wie z. B. solche, die Häufungspunkte von Unstetigkeiten besitzen, nicht vorkommen. Durch das Fehlen solcher Ausnahmen wird die mathematische Behandlung empirischer Funktionen

wesentlich erleichtert. Insbesondere werden die Entwicklungssätze, die wir in diesem Teil zu behandeln haben, für alle uns interessierenden Fälle Gültigkeit besitzen. Wir dürfen daher Existenz- und Konvergenzfragen, die in der mathematischen Analysis mit Recht einen breiten Raum einnehmen, stets mit einer kurzen Bemerkung oder mit einem Hinweis auf die Spezialliteratur übergehen.

Sollten dennoch in besonderen Fällen Bedenken über die Anwendbarkeit dieses oder jenes Satzes oder dieser oder jener Operation bestehen bleiben, so werden sie leicht zerstreut, wenn die folgenden Betrachtungen berücksichtigt werden, die für die verständnisvolle Bearbeitung empirischer Funktionen unentbehrlich sind. Zwischen den durch Beobachtung oder Registrierung eines Naturvorgangs gewonnenen Zahlenreihen oder Kurvenbildern und dem gesetzmäßigen Walten der Natur, das sich in ihnen ausspricht oder auch nur hinter ihnen vermutet wird, besteht eine mehr oder weniger breite Spanne, die der Forscher durch seine Untersuchung zu überbrücken hat. Die Naturgesetze oder die naturgesetzlich bedingten Erscheinungen lassen sich in den meisten Fällen auf eine mehr oder weniger einfache Gestalt bringen. Oft ist das Gesetz formal bekannt, und es handelt sich nun darum, unbekannte Konstante oder Parameter, die in der Formulierung des Gesetzes noch offen geblieben sind, numerisch zu bestimmen — oft ist aber auch die mathematische Form selbst nicht gegeben, sondern der Forscher sieht sich vor die Aufgabe gestellt, sie aus der Gestalt seiner Beobachtungsergebnisse zu erschließen. Nun aber werden die Wirkungen der Naturkräfte in den beobachteten Daten selten ganz rein hervortreten, vielmehr oft durch störende Einflüsse überlagert, immer aber durch Beobachtungs- bzw. Registrierungsfehler entstellt, die unvermeidlich sind, da sie aus der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne und der Meßgeräte entspringen. Aus dieser den Beobachtungswerten im allgemeinen anhaftenden Unsicherheit folgt aber, daß es nicht nur nicht erforderlich, sondern sogar nicht einmal wünschenswert ist, den gesuchten mathematischen Ausdruck für den naturgesetzlichen Inhalt der Messungsergebnisse in völlige Übereinstimmung mit diesen Ergebnissen selbst zu bringen. Dieser Umstand bedeutet zunächst eine Erleichterung, da sich häufig glatte und einfache mathematische Funktionen finden lassen, durch die eine empirische Funktion mit solcher Annäherung dargestellt wird, daß die noch übrigbleibenden Abweichungen sich nach Größe und Verteilung so verhalten, wie es von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern oder Störungen, mit denen zu rechnen ist, erwartet werden muß. Dieser Spielraum, innerhalb dessen eine willkürliche kleine Veränderung am Verlauf einer Beobachtungskurve nicht als wesentlich angesehen werden kann, gestattet in den meisten Fällen, die rohe Beobachtungskurve durch eine idealisierte zu ersetzen, die nunmehr von Singularitäten frei ist. Andererseits liegt eine gewisse Erschwerung der Untersuchung darin, daß infolge dieses Spielraumes

auch der idealisierten Funktion noch eine mehr oder weniger große Unsicherheit anhaftet. Es kann eine empirische Funktion durch eine einfache mathematische Formel innerhalb der Fehlergrenzen darstellbar sein, ohne daß man deshalb die Gewißheit besitzt, daß diese Formel auch wirklich den naturgesetzlichen Sachverhalt wiedergibt, denn es ist sehr wohl möglich, daß zwei ihrer Natur nach grundverschiedene Funktionen eine empirische Funktion in deren beschränkten Definitionsbereich gleich gut wiedergeben, während sie außerhalb des Bereiches ein verschiedenes Verhalten zeigen. Erst die Extrapolation der Formel über den ursprünglichen Bereich hinaus und ihr Vergleich mit weiteren oder späteren Beobachtungen (Eintreffen oder Nichteintreffen von Voraussagen) kann hier eine endgültige Entscheidung oder auch nur eine Verdichtung der Gründe herbeiführen, die für eine bestimmte Form der Gesetzmäßigkeit sprechen.

Gerade in der Periodenforschung ist eine besondere Vorsicht in dieser Beziehung sehr am Platze. Wie die Erfahrung lehrt, hat die gute Darstellbarkeit einer Beobachtungsreihe durch eine einfach gebaute periodische Funktion schon oft zur vermeintlichen Entdeckung von Periodizitäten geführt, deren Realität späteren kritischen Untersuchungen nicht standgehalten hat. Trotz dieser Vorbehalte ist das Problem der Annäherung empirischer Funktionen oder Wertereihen durch mathematische Ausdrücke gerade in der Periodenforschung außerordentlich wichtig, weil durch sie das oft sehr spröde Material erst in diejenige Form gebracht wird, die eine Anwendung weiterer Untersuchungsmethoden gestattet.

2. Annäherung empirischer Funktionen durch Potenzreihen.

Die bekannteste Art der Annäherung einer beliebigen Funktion $f(t)$, die im Bereich $a \leq t \leq b$ durch einen Kurvenzug definiert sein möge, ist die durch eine Potenzreihe

$$g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

Bekanntlich gibt es analytische Funktionen, die sich sogar für *alle* t durch eine unendliche Potenzreihe darstellen lassen; z. B. konvergiert die Reihe

$$1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 + \dots + \frac{1}{n!} t^n + \dots$$

für jedes reelle¹ t gegen den Grenzwert e^t und ist daher geeignet, diese Funktion zu repräsentieren. Man kann die Tatsache auch so aussprechen, daß man für jedes t eine endliche Partialsumme der obigen Reihe

$$g_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$

¹ Funktionen komplexen Arguments sollen, wenn nicht ausdrücklich anderes bemerkt ist, immer außer Betracht bleiben.

finden kann, so daß $|e^t - g_n(t)|$ kleiner ist als eine vorgegebene, beliebig kleine positive Schranke. Mit anderen Worten: Durch Mitnahme genügend vieler Glieder der obigen Potenzreihe erzielt man jede gewünschte Annäherung an den Wert e^t , oder auch: Durch die Folge ganzer rationaler Funktionen aufsteigender Ordnung

$$g_0(t), g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t), \dots$$

läßt sich die Funktion e^t beliebig annähern. Diese spezielle Form der Annäherung hat allerdings einige Nachteile, die sie als Vorbild für eine allgemeine Lösung des Problems ungeeignet machen. Erstens geschieht die Annäherung für verschiedene t sehr ungleichmäßig — für sehr kleine Beträge von t konvergiert die Folge sehr rasch, für große t dagegen sehr langsam. Wird ferner die Annäherung in einem positiven Bereich von t verlangt, etwa für $0 < t < T$, so finden wir, daß die übrigbleibenden Abweichungen bei einer Annäherung n -ter Ordnung im ganzen Bereich dasselbe Vorzeichen haben. Die Abweichungen „Funktion minus Näherung“ zeigen also bei keiner noch so hohen Ordnung der Näherung diejenigen Eigenschaften, die den Beobachtungsfehlern charakteristisch sind: gleiche Häufigkeit positiver und negativer Abweichungen und Fehlen systematischer Unterschiede in verschiedenen Teilen des Bereichs.

Vom Standpunkte des praktischen Rechners aus ist es klar, daß wir bei der Bildung fortschreitender Näherungsfunktionen auf diese Erfordernisse Rücksicht zu nehmen haben. Außerdem muß Sorge getragen werden, daß mit jedem neuen Schritt die Näherung soweit wie möglich verbessert wird, d. h. daß die Restbeträge in ihrer Gesamtheit bei jedem Schritt so stark verkleinert werden, wie es die mathematische Gestalt der Näherungsfunktion erlaubt. Alle diese Bedingungen lassen sich am besten dadurch erfüllen, daß man das aus der Fehlerausgleichstheorie bekannte „Prinzip der kleinsten Quadrate“ auf die vorliegende Aufgabe anwendet. Nach diesem Prinzip ist die Näherungsfunktion n -ter Ordnung so zu bestimmen, daß

$$\Phi_n = \int_a^b [f(t) - g_n(t)]^2 dt \quad (1)$$

ein Minimum wird. In unserem Falle sollte $g_n(t)$ eine ganze rationale Funktion n -ten Grades

$$g_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

sein. Die $n + 1$ Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n werden alsdann durch die $n + 1$ linearen Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial a_2} = 0; \dots \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial a_n} = 0$$

ermittelt. Der Minimalwert

$$\Phi_n = \text{Min}$$

selbst, der sich durch Einsetzen der so bestimmten Näherungsfunktion in (I) ergibt, dient als Maß der Güte der Annäherung — er entspricht der „Fehlerquadratsumme“ in der Ausgleichsrechnung. Der Annäherungsprozeß ist durch sukzessive Erhöhung der Ordnungszahl n so lange fortzusetzen, bis die Restfunktion

$$R_n(t) = f(t) - g_n(t)$$

ganz innerhalb des den jeweiligen Umständen entsprechenden Fehlerbereiches verläuft. Das ist erreicht, wenn die Größe

$$\frac{\Phi_n(\text{Min})}{b - a}$$

größenordnungsmäßig mit dem im Beobachtungsbereich $[a, b]$ zu erwartenden mittleren Fehlerquadrat übereinstimmt. Hierbei ist vorausgesetzt, daß dem Bearbeiter der Beobachtungen ein Urteil über ihre innere Genauigkeit möglich ist. Das ist in praktischen Fällen die Regel; andernfalls muß die Näherung so lange fortgesetzt werden, bis die Restfunktion keinen wesentlichen systematischen Gang mehr zeigt. Auf keinen Fall ist es angebracht, das Näherungsverfahren weiter zu treiben, als es auf Grund dieser Prinzipien angezeigt ist. Ein solches Vorgehen wäre nicht nur unökonomisch, da mehr Rechenarbeit auf die Lösung der Aufgabe verwendet werden würde, als nötig erscheint — es wäre auch schädlich, da durch eine solche Mehrarbeit die Fehler der Beobachtungsreihe in unzulässigem Maße mit zur Berechnung der Konstanten herangezogen werden. Durch zu starkes Herabdrücken der Restbeträge unter die Fehlergrenze erzielt man also nur scheinbar eine Erhöhung der Darstellungsgenauigkeit, in Wirklichkeit verfälscht man das Ergebnis. Ein sicheres Urteil über den geeigneten Augenblick, in dem das Näherungsverfahren abzubrechen ist, erfordert vom Bearbeiter oft sehr viel Fingerpitzengefühl, das sich durch die Kenntnis bestimmter Regeln und Vorschriften nicht ersetzen läßt.

Der Gang der Berechnung der Näherungswerte möge an einem einfachen Beispiel gezeigt werden: Es sei eine empirische Funktion $f(t)$ im Bereich $a \leq t \leq b$ durch eine ganz rationale Funktion zweiten Grades

$$g_2(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

dem Prinzip der kleinsten Quadrate gemäß anzunähern. Die Bedingung (I) ergibt dann ein System von 3 linearen Gleichungen:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_\nu} = a_0 \int_a^b t^\nu dt + a_1 \int_a^b t^{\nu+1} dt + a_2 \int_a^b t^{\nu+2} dt - \int_a^b t^\nu f(t) dt = 0 \quad (2)$$

($\nu = 0, 1, 2$),

die wir, dem Sprachgebrauch der Ausgleichsrechnung folgend, als *Normalgleichungen* bezeichnen, und aus denen die Konstanten a_0, a_1, a_2 hervorgehen. Der Minimalwert Φ_2 , der, wie oben gezeigt wurde, ein

unentbehrliches Maß für die Güte der Annäherung darstellt, ergibt sich unmittelbar aus (1) oder aus der gleichwertigen Beziehung

$$\Phi_2(\text{Min}) = \int_a^b [f^2(t) - g_2^2(t)] dt,$$

deren Ableitung man der mathematischen Literatur (z. B. RUNGE-KÖNIG: Numerisches Rechnen, S. 191—192) entnehmen möge.

Die Übertragung dieser Formeln auf den Fall der Annäherung durch ganze rationale Funktionen beliebig hoher Ordnung ist leicht und bedarf keiner näheren Erläuterung. Eine weitere Frage ist aber, ob die so bestimmte Folge $g_n(t)$ sich bei genügend hoher Ordnung der gegebenen Funktion $f(t)$ auch *beliebig* eng annähern wird, d. h. ob die Grenzübergänge

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n(\text{Min}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n=\infty} g_n(t) = f(t) \quad (3)$$

für alle vorkommenden Funktionen $f(t)$ gültig sind. In der Tat kann dies für alle in ihrem endlichen Definitionsbereich eindeutigen, beschränkten und stückweise stetigen Funktionen nachgewiesen werden, also auch für alle empirischen Funktionen. Es ist nur noch zu bemerken, daß an Unstetigkeitsstellen die Entwicklung gegen die mittlere Sprungordinate konvergiert, wodurch die weiter oben getroffene Festsetzung ihre mathematische Rechtfertigung erfährt. Der Entwicklungssatz, dessen Beweis man in den Lehrbüchern nachlesen möge (z. B. Lit. 71), besagt also, daß sich jede empirische Funktion in jedem vorgeschriebenen endlichen Intervall der unabhängigen Variablen t , in dem sie überall definiert ist, durch eine lineare Kombination von genügend vielen Gliedern der Funktionenfolge

$$1, t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots \quad (4)$$

beliebig eng und gleichmäßig annähern läßt. Da dies offenbar nicht mehr allgemein der Fall ist, wenn von der Folge (4) auch nur *ein* Glied ausgeschlossen ist, so bezeichnet man die Folge (4) als ein *vollständiges* System von Funktionen und die Limesbeziehungen (3) als die *Vollständigkeitsbeziehungen*.

3. Orthogonale Funktionssysteme.

Die Formeln des vorigen Abschnittes lassen sich sinngemäß von der Folge (4) auch auf andere Funktionsfolgen

$$h_0(t), h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t), \dots \quad (5)$$

übertragen, sofern für diese ebenfalls die Vollständigkeitsbeziehung gilt. Die Annäherungsfunktion n -ter Ordnung an eine in einem Intervall $[a, b]$ gegebene empirische Funktion $f(t)$ sei eine lineare Kombination

$$g_n(t) = a_0 h_0(t) + a_1 h_1(t) + \dots + a_n h_n(t)$$

der ersten $n + 1$ Glieder dieser Folge. Es darf dabei vorausgesetzt werden, daß die Grundfunktionen $h_\nu(t)$ voneinander linear unabhängig sind, d. h. daß zwischen ihnen keine linearen Identitäten bestehen. Würde nämlich eine solche Identität bestehen, so würde man mit ihrer Hilfe eine der Funktionen durch die anderen ausdrücken, also ohne Verletzung der Vollständigkeit ein Glied der Folge entfernen können.

Die Normalgleichungen zur Bestimmung der $n + 1$ Konstanten a_0, a_1, \dots, a_n werden durch Lösung der Minimumaufgabe

$$\Phi_n = \int_a^b [f(t) - g_n(t)]^2 dt = \text{Min}$$

erhalten und lauten

$$a_0 \int h_\nu h_0 dt + a_1 \int h_\nu h_1 dt + \dots + a_n \int h_\nu h_n dt = \int f h_\nu dt, \quad (6)$$

$(\nu = 0, 1, \dots, n)$

während der Minimalwert selbst durch

$$\Phi_n(\text{Min}) = \int [f^2 - g_n^2] dt$$

dargestellt wird. Als Grenzen der Integrale sind überall die Grenzen des Definitionsbereiches von $f(t)$ einzusetzen.

Die Berechnung der Unbekannten aus den Normalgleichungen wird im allgemeinen um so schwieriger, je größer die Ordnung der Annäherung wird. Bei jeder weiteren Näherung erhöht sich die Zahl der Konstanten um eins — es ist aber beim Übergang von g_n auf g_{n+1} nicht nur eine Konstante a_{n+1} neu zu berechnen, sondern die übrigen $n + 1$ Konstanten ändern sich ebenfalls alle oder zum Teil.

Nur in einem besonderen Fall behalten die einmal berechneten Konstanten a_ν ein für allemal ihre Gültigkeit: dann nämlich, wenn alle Koeffizienten der Normalgleichungen, mit Ausnahme der ihrem Bau nach wesentlich positiven Diagonalglieder, verschwinden. Funktionensysteme, die diese Eigenschaft besitzen, heißen *orthogonal*¹.

¹ Zwei Vektoren in der Ebene, die durch die rechtwinkligen Komponenten (x_1, x_2) und (y_1, y_2) gegeben sind, stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr inneres Produkt verschwindet, wenn also

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

ist. Ebenso lautet die Bedingung für das Senkrechtstehen zweier räumlicher Vektoren mit den Komponenten (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3)

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0.$$

Durch Verallgemeinerung dieser für zwei und drei Dimensionen anschaulichen Verhältnisse auf Vektoren im n -dimensionalen Raum kommt man auch für solche „Vektoren“ auf den Begriff der Orthogonalität. Man sagt also, zwei n -dimensionale Vektoren (x_1, x_2, \dots, x_n) und (y_1, y_2, \dots, y_n) stehen senkrecht aufeinander oder sind orthogonal, wenn die Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^n x_\nu y_\nu = 0$$

erfüllt ist. Durch sinngemäße Übertragung dieses Begriffes auf Funktionen, wobei die Summe durch ein Integral zu ersetzen ist, wird die Bezeichnung „orthogonal“ auch für Funktionen verständlich.

Das System $h_0(t), h_1(t), \dots, h_n(t), \dots$, ist demnach orthogonal, wenn zwischen je zwei verschiedenen Funktionen des Systems die Bedingung

$$\int_a^b \bar{h}_\mu(t) h_\nu(t) dt = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

erfüllt ist, die als *Orthogonalitätsbedingung* zu bezeichnen ist. Hingegen sind die Koeffizienten der Hauptdiagonale des Normalgleichungsschemas von der Form

$$\int_a^b h_\nu^2(t) dt = \lambda_\nu > 0.$$

Unter diesen Umständen zerfallen die Normalgleichungen (6) in die einfacheren Gleichungen

$$a_\nu \int_a^b h_\nu^2(t) dt = \int_a^b f(t) h_\nu(t) dt, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

aus denen, unabhängig vom Grade der Annäherung,

$$a_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu} \cdot \int_a^b f(t) h_\nu(t) dt$$

folgt. Ferner geht der Minimalausdruck

$$\Phi_n(\text{Min}) = \int_a^b f^2(t) dt - \int_a^b (a_0 h_0 + a_1 h_1 + \dots + a_n h_n)^2 dt$$

wegen der Orthogonalitätsbedingungen in

$$\Phi_n(\text{Min}) = \int_a^b f^2(t) dt - \sum_{\nu=0}^n \lambda_\nu a_\nu^2$$

über. Die Orthogonalität bleibt erhalten, wenn man die Glieder der orthogonalen Folge (5) mit beliebigen Konstanten multipliziert. Es ist also auch

$$\bar{h}_0 = \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_0}}; \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_1}}; \quad \dots \quad h_n = \frac{h_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \dots \quad (7)$$

eine orthogonale Folge, für die zudem

$$\int_a^b h_\nu^2(t) dt = 1 \quad (7a)$$

gilt. Wir nennen die Folge (7) *normiert* und die für sie charakteristischen Gleichungen (7a) die *Normierungsbedingungen*. Für die Annäherung einer empirischen Funktion durch normierte orthogonale Funktionen gilt der Minimumausdruck

$$\Phi_n(\text{Min}) = \int_a^b f^2(t) dt - \sum_{\nu=0}^n a_\nu^2$$

und die Vollständigkeitsrelation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_\nu^2 = \int_a^b f^2(t) dt.$$

4. Die orthogonalen Kreisfunktionen.

Aus jedem vollständigen System von nicht verschwindenden linear unabhängigen Funktionen

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$$

läßt sich ein vollständiges *orthogonales* System bilden, indem man

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \varphi_0 \\ h_1(t) &= a_{10}\varphi_0 + \varphi_1 \\ &\dots\dots\dots \\ h_n(t) &= a_{n0}\varphi_0 + a_{n1}\varphi_1 + \dots + a_{n,n-1}\varphi_{n-1} + \varphi_n \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

setzt und die Konstanten $a_{\mu\nu}$ so bestimmt, daß die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_a^b h_\mu(t) h_\nu(t) dt = 0 \quad (\nu \neq \mu)$$

erfüllt sind. So ergeben sich z. B. durch Orthogonalisierung der Elementarfunktionen

$$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = t, \varphi_2 = t^2, \dots, \varphi_n = t^n, \dots,$$

abgesehen von konstanten Faktoren, die bekannten *LEGENDRESchen Polynome*

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 & P_3(t) &= \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \\ P_1(t) &= t & P_4(t) &= \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8} \\ P_2(t) &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} & & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

sofern man die Integrale zwischen den Grenzen -1 und $+1$ nimmt.

Diese Betrachtungen lassen sich sehr leicht auch auf mehrdimensionale Funktionsbereiche übertragen. So kann man z. B. zeigen, daß die Funktionsfolge

$$\left. \begin{aligned} &1, \\ &x, y, \\ &x^2, xy, y^2 \\ &x^3, x^2y, xy^2, y^3 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

den Vollständigkeitsbedingungen genügt, jede in einem zweidimensionalen Bereiche von gegebenen Grenzen definierte Funktion also durch eine nach diesen Elementarfunktionen fortschreitende Reihe dargestellt werden kann. In der Ebene ist die Möglichkeit der Abgrenzung von Bereichen verschiedener Form und Größe außerordentlich mannigfaltig; ebenso vielgestaltig sind demnach die Systeme von orthogonalen Funktionssystemen, die man durch Orthogonalisierung der Funktionen (8)

gewinnen kann. So führt die Orthogonalisierung von (8) in dem quadratischen Bereich $-1 \leq x \leq +1$; $-1 \leq y \leq +1$ auf Polynome, die das zweidimensionale Analogon zu den LEGENDRESchen Polynomen bilden, die Orthogonalisierung in einem Kreise oder Kreisring um den Koordinatenanfang als Mittelpunkt auf andere Orthogonalsysteme, die man als Kreisflächen- bzw. Kreisringfunktionen bezeichnen kann. Andererseits ist es aber auch möglich, eindimensionale Integrationswege in der Ebene zu benutzen. So führt von den orthogonalen Kreisringfunktionen ein einfacher Grenzübergang zu den Kreis- (genauer Kreislinien-) funktionen, indem man den inneren Radius des Kreisringes gegen den festgehaltenen äußeren streben läßt¹. Setzt man den Radius des kreisförmigen Integrationsweges gleich 1 und ersetzt durch die Transformation

$$x = \cos \varphi; \quad y = \sin \varphi$$

die Variablen x und y durch eine einzige neue Variable φ , so ergibt sich das auf diese Weise erzeugte System der orthogonalen Kreisfunktionen in der Gestalt

$$\left. \begin{array}{l} 1, \cos \varphi, \cos 2 \varphi, \cos 3 \varphi, \dots \\ \sin \varphi, \sin 2 \varphi, \sin 3 \varphi, \dots \end{array} \right\} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (9)$$

Von dem ebenfalls an einen endlichen Bereich ($-1 \leq t \leq +1$) der unabhängigen Variablen geknüpften System der LEGENDRESchen Polynome unterscheidet sich dies neue Orthogonalsystem in zweierlei Hinsicht grundlegend: Es ist *transzendent* und *periodisch*. Die letztere Eigenschaft folgt einfach daraus, daß der Integrationsweg eine geschlossene Kurve ist, so daß also die Funktion nach Vermehrung des Arguments um einen vollen „Umlauf“ oder um eine beliebige ganze Zahl von Umläufen wieder den gleichen Wert annimmt. Wir haben es hier eigentlich mit Funktionen zu tun, die für einen unendlich großen Bereich des Arguments definiert sind, also aus dem Rahmen der empirischen Funktionen herausfallen. Trotzdem macht die Anwendung des Entwicklungssatzes hier keine neuen Schwierigkeiten, da zur Beschreibung dieser Funktion eben wegen ihrer Periodizität ein einziger Umlauf genügt. Wir werden über die praktischen Auswirkungen dieser Verhältnisse an späterer Stelle noch mehr zu sagen haben; hier genügt es, auf die fundamentale Bedeutung des neuen Orthogonalsystems für alle Aufgaben der Periodenforschung hinzuweisen.

¹ Die gleichen Überlegungen lassen sich mit Leichtigkeit auch auf mehr als zwei Dimensionen übertragen. Zum Beispiel erhält man durch Orthogonalisierung eines vollständigen Systems von Potenzprodukten $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ auf der Oberfläche der Einheitskugel die bekannten *Kugelflächenfunktionen* (kurz Kugelfunktionen genannt), die eine Entwicklung von Funktionen auf der Kugeloberfläche (etwa von Funktionen der geographischen Länge und Breite auf der Erdoberfläche) gestatten. Aus Raumersparnisgründen mußte hier auf die Behandlung der Kugelfunktionen und ihrer Anwendung verzichtet werden.

Der Entwicklungssatz lautet für das System der *orthogonalen Kreisfunktionen*: Jede in einem Intervall von der Länge 2π , z. B. im Bereich $0 \leq t \leq 2\pi$, definierte empirische Funktion $f(t)$ läßt sich durch eine nach den Funktionen (9) fortschreitende Reihe

$$f(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots + a_n \cos n\varphi + \cdots \left. \begin{array}{l} \\ + b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \cdots + b_n \sin n\varphi + \cdots \end{array} \right\} \quad (10)$$

beliebig gut annähern. Man bezeichnet diese Reihe auch als *FOURIERSché Reihe* oder *Harmonische trigonometrische Reihe*. Die Bestimmung ihrer Koeffizienten heißt *Harmonische* oder *FOURIERSche Analyse*, die Konstanten a_ν , b_ν selbst werden als *Harmonische Konstituenten* oder *FOURIER-Koeffizienten* bezeichnet. Die Orthogonalität der Kreisfunktionen beruht auf den aus der elementaren Analysis bekannten Integralbeziehungen

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos \mu \varphi \cos \nu \varphi \, d\varphi = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin \mu \varphi \sin \nu \varphi \, d\varphi = 0 \end{array} \right\} (\mu \neq \nu)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \mu \varphi \sin \nu \varphi \, d\varphi = 0.$$

Gemäß den Betrachtungen des Abschnitts 3 geschieht die Berechnung der *FOURIER-Koeffizienten* nach den Formeln

$$a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 n\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi.$$

Da ferner

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi; \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\varphi \, d\varphi = \pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

so folgt schließlich:

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \, d\varphi \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Die *Vollständigkeitsrelation* besagt, daß (s. Abschnitt 3)

$$\lim_{n=\infty} 2\pi \left\{ a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right\} = \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) \, d\varphi.$$

Es ist daher das Quadrat des mittleren Restfehlers einer Annäherung der gegebenen Kurve durch eine endliche FOURIERSche Reihe n -ter Ordnung

$$\mu_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) d\varphi - \left\{ a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right\}.$$

Anstatt (10) ist auch eine andere Form der FOURIERSchen Reihe gebräuchlich, die durch Zusammenfassung der cos- und sin-Glieder gleicher Ordnung entsteht. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} a_\nu &= c_\nu \cos \psi_\nu; & a_0 &= c_0 \\ b_\nu &= c_\nu \sin \psi_\nu, \end{aligned}$$

so erhält man¹

$$f(\varphi) = c_0 + c_1 \cos(\varphi - \psi_1) + c_2 \cos(2\varphi - \psi_2) + \dots \quad (12)$$

Die Konstanten c_ν werden *Amplituden*, die Winkel ψ_ν *Phasen* der FOURIERSchen Glieder ν -ter Ordnung genannt.

Die grundsätzliche Bedeutung der Harmonischen Analyse liegt darin, daß sie die Aufgabe der Annäherung streng periodischer Funktionen auf die einfachste Weise löst. Das liegt daran, daß der *Kreis*, der hier als Integrationsgebiet gewählt wurde, die einfachste geschlossene Kurve ist, die es in der Geometrie der Ebene gibt. Natürlich läßt sich das System der elementaren Potenzfunktionen (8) auch für jede andere geschlossene Kurve orthogonalisieren, z. B. für eine den Nullpunkt umschließende Ellipse, wobei im besonderen der Nullpunkt mit ausgezeichneten Punkten innerhalb der Ellipse, etwa mit dem Mittelpunkt oder dem Brennpunkt, zusammenfallen kann. Als Argument der *Belegungsfunktion* kann wieder der von 0 bis 2π fortschreitende Winkel φ dienen, den der vom Nullpunkt ausgehende Strahl mit der positiven X -Achse bildet, oder auch die von einem bestimmten Punkte der Ellipse aus gezählte Weglänge. Die hierbei entstehenden orthogonalen Funktionssysteme stehen in direktem Zusammenhang mit den bekannten *Elliptischen Funktionen*. Diese und andere Entwicklungsmöglichkeiten haben jedoch, ganz im Gegensatz zur Harmonischen Analyse, nur in solchen Fällen praktische Bedeutung, in denen der spezielle Integrationsweg durch die besondere Natur des vorgelegten Problems nahegelegt wird, z. B. bei der Bahnbeschreibung von Himmelskörpern.

¹ Gebräuchlich ist auch die Substitution

$$a_\nu = c_\nu \sin \psi_\nu; \quad b_\nu = c_\nu \cos \psi_\nu,$$

die auf

$$f(\varphi) = c_0 + c_1 \sin(\varphi + \psi_1) + c_2 \sin(2\varphi + \psi_2) + \dots$$

führt. Die Konstanten ψ_ν bedeuten dann die „Anfangsphasen“ der Teilwellen für das Argument $\varphi = 0$. Oft wird auch die Substitution $a_\nu = c_\nu \cos \nu \psi_\nu$; $b_\nu = c_\nu \sin \nu \psi_\nu$ angewandt, die $f(\varphi) = c_0 + c_1 \cos(\varphi - \psi_1) + c_2 \cos 2(\varphi - \psi_2) + \dots$ ergibt. Der Winkel $\varphi = \psi_\nu \pm 2\pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) bezeichnet dann die Lage der Maxima der ν -ten Teilwelle.

5. Harmonische Analyse in beliebigen Grundintervallen.

Die Grundperiode der durch (10) bzw. (12) in eine FOURIERSche Reihe entwickelten Funktion $f(\varphi)$ hat die Länge 2π . Sie ist gleichzeitig die Periode des FOURIERSchen Gliedes erster Ordnung, während die Glieder höherer Ordnungen schon in ganzzahligen Teilen von 2π periodisch sind. Die Folge der Perioden der in der Entwicklung (12) auftretenden FOURIER-Glieder von der ersten Ordnung ab ist demnach

$$2\pi, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \dots, \frac{2\pi}{n}, \dots,$$

während das konstante Glied $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$ dem einfachen Mittel-

wert der Funktion $f(\varphi)$ über das Grundintervall $[0, 2\pi]$ entspricht.

Durch Einführung einer neuen Variablen

$$t = \frac{p}{2\pi} \cdot \varphi$$

läßt sich die Entwicklungsformel auch auf Grundintervalle von beliebiger Länge p ausdehnen. Ist $f(t)$ im Grundintervall $[0, p]$ definiert und (gegebenenfalls) mit der Grundperiode p periodisch, so lautet die Entwicklung, wenn wir $\frac{2\pi}{p} = \alpha$ setzen,

$$f(t) = c_0 + c_1 \cos(\alpha t - \psi_1) + \dots + c_n \cos(n\alpha t - \psi_n) + \dots, \quad (13)$$

und es ist

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt \qquad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos n\alpha t dt \qquad \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin n\alpha t dt.$$

Diese Entwicklung entspricht der Orthogonalisierung der Elementarfunktionen (8) auf einem Kreise um den Nullpunkt der Koordinatenebene, dessen Radius die Länge $\frac{p}{2\pi}$ hat. Die Perioden der Glieder verschiedener Ordnung entsprechen in diesem Falle der Folge

$$p, \frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \dots, \frac{p}{n}, \dots$$

Wir bezeichnen die Grundperiode p auch — insbesondere, wenn die unabhängige Variable t die Zeit bedeutet, — als *Grundschiwingung*, alle übrigen Perioden als *Oberschiwingungen*, ihre Periodenlängen als *Wellenlängen* und die der Wellenlänge umgekehrt proportionalen Größen

$n\alpha = \frac{2\pi n}{p}$ als *Frequenzen*. Für die FOURIER-Glieder $c_n \cos(n\alpha t - \psi_n)$ werden wir in Zukunft öfter die kürzere Bezeichnung „Welle“ der n -ten Ordnung oder noch einfacher n -te (harmonische) Welle gebrauchen.

6. Rein periodische Funktionen.

Wir haben in den letzten Abschnitten gesehen, daß die Entwicklung nach orthogonalen Kreisfunktionen die einfachste Entwicklungsform für solche Funktionen einer Variablen darstellt, die in einem bestimmten endlichen Bereich von der Länge p periodisch sind. Darüber hinaus können wir aber folgende wichtige Erweiterung und Feststellung machen: Die durch die Harmonische Analyse zu erzielende Annäherung durch harmonische Wellen läßt sich praktisch auch auf jede beliebige empirische Funktion anwenden, die in einem Bereich von der Länge p bekannt ist. Die Annäherung der gegebenen Funktion erstreckt sich in diesem Falle ausschließlich auf dieses Intervall — außerhalb des Intervalls, das wir als *Grundintervall* oder *Analysenintervall* bezeichnen, setzt sich die durch die Annäherungsformel bestimmte Näherungsfunktion periodisch fort, während dies für die gegebene empirische Funktion nicht der Fall zu sein braucht; — ja, die letztere braucht außerhalb des Intervalls nicht einmal zu existieren oder, *wenn* sie existiert, nicht bekannt zu sein. Die durch die Entwicklung gegebene Möglichkeit der periodischen Fortsetzung nach vorwärts und rückwärts steht dann a priori in keinerlei Zusammenhang mit dem (naturgesetzlich bedingten) Verhalten der zu untersuchenden Kurve. Wir haben also zwei grundsätzlich voneinander abweichende Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. den soeben beschriebenen Fall, in dem die Harmonische Analyse lediglich zu einer für einen bestimmten endlichen Bereich des Arguments gültigen interpolatorischen Darstellung oder Annäherung der empirischen Funktion führt,

2. den anderen Fall, in dem die empirische Funktion *ihrer Natur nach* periodisch mit der Periode p ist. Für solche Funktionen gilt die Darstellung oder Annäherung durch ihre FOURIERSche Reihe auch für alle Argumente außerhalb des Grundintervalls, sie ist also für die *Extrapolation* geeignet und somit auch, soweit es sich um Funktionen der Zeit handelt, für die Voraussage des künftigen und die Rückwärtsberechnung des früheren Verlaufs des durch die periodische Funktion beschriebenen Vorgangs.

Wir bezeichnen solche Funktionen als *rein periodische* Funktionen. Ist p ihre Periode, so sind sie durch die Funktionalgleichung

$$f(t + k p) = f(t) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (14)$$

charakterisiert. Aus der Gültigkeit dieser Funktionalgleichung folgen sodann noch einige weitere Eigenschaften:

1. Ist p eine Periode von $f(t)$, so sind auch

$$2p, 3p, 4p, \dots, np, \dots$$

Perioden von $f(t)$.

2. Die Funktion $f(t) = \text{const}$ hat jedes beliebige $p > 0$ zur Periode.

3. Ist f nicht konstant, so gibt es eine *kleinste* Periode p_0 , die als *Grundperiode* zu bezeichnen ist. Die Gesamtheit *aller* Perioden von $f(t)$ ist dann durch die Folge kp_0 ($k = 1, 2, 3, \dots$) gegeben. Sind demnach p und p' zwei verschiedene Perioden von $f(t)$, so ist das Verhältnis p/p' *rational*.

4. Aus $f(t + kp) = f(t)$ folgt ferner $f(t + kp + q) = f(t + q)$, wenn q eine beliebige Phasenverschiebung des Grundintervalls anzeigt. Hat $f(t)$ die Grundperiode p_0 , so ist $f(t)$ für alle t bekannt, wenn es in einem beliebigen Intervall $[q, q + p_0]$ mit beliebigem Anfangspunkt q bekannt ist.

5. Sind f_1, f_2, \dots, f_n n rein periodische Funktionen von t , die eine gemeinsame Periode p haben, so hat auch $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$ die Periode p , wenn die c_v beliebige Konstante sind. Die Grundperiode der zusammengesetzten Funktion ist die kleinste gemeinschaftliche Periode der Teilfunktionen und gleichzeitig das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Grundperioden aller Teilfunktionen.

6. Aus (2) und (5) folgt: Ist $f(t)$ rein periodisch (p beliebig), so ist es auch $f(t) + \text{const}$.

Die Frage, ob es im Naturgeschehen Vorgänge oder sonstige der Beobachtung zugängliche Gegebenheiten gibt, die sich durch rein periodische Funktionen beschreiben lassen, ist nur bedingt zu bejahen. Ganz streng ist dies nur dort erfüllt, wo es sich um rein räumliche, als stationäre Wertebelegung auf geschlossenen Wegen zu verstehende Funktionen handelt (Beispiel: Verteilung einer physikalischen Meßgröße auf einem Breitenkreis der Erde zu einem festen Zeitpunkt). Hier ist die reine Periodizität der Beobachtungsfunktion eine Trivialität und lediglich der Ausdruck für einen geometrischen Zusammenhang. Hingegen sind die räumlichen Koordinaten eines Planeten, der sich im Vakuum um einen Zentralkörper in einer KEPLERSchen Ellipse bewegt, bezogen auf den Zentralkörper oder auf den Schwerpunkt des Systems, rein periodische Funktionen der *Zeit*. Hier wird die reine Periodizität als wesentlicher Teil des naturgesetzlichen Inhalts zu bewerten sein, den wir dem Beobachtungsgegenstand zuschreiben. Die Grundperiode dieses Vorganges ist die Umlaufzeit des Planeten. Die Bewegung der Himmelskörper ist das klassische Beispiel dafür, daß in der Natur rein periodische Vorgänge von großer Zuverlässigkeit möglich sind, die infolgedessen auch eine Vorausberechnung auf lange Zeiten gestatten. Aber selbst in diesem Fall, der die reine Periodizität eines Naturvorgangs

in einer Strenge zeigt, wie wir sie von *irdischen* Erscheinungen her nicht gewohnt sind, haben wir einige wesentliche Vorbehalte zu machen. Zunächst treten die geschlossenen KEPLERSchen Bahnen nur dort auf, wo auf die beiden um einander gravitierenden Massen keine Anziehungskräfte von anderen Körpern ausgeübt werden. Wenn dies jedoch — so wie bei den Körpern unseres Sonnensystems — der Fall ist, wird die KEPLERSche Bahn deformiert. Diese mehr oder weniger auffälligen Deformationen (Störungen genannt), haben zwar im wesentlichen auch periodischen Charakter; die Grundperioden sind aber mit der Umlaufzeit des Planeten keineswegs kommensurabel, so daß durch das Hinzu kommen der Störungen das rein periodische Verhalten der Beobachtungsgröße strenggenommen zerstört wird. Immerhin ist in den meisten vorkommenden Fällen die Größenordnung der Störungen beträchtlich geringer als die der ursprünglichen (ungestörten) Bewegung selbst, so daß die Bewegung wenigstens im *Mittel* — d. h. abgesehen von gewissen Abweichungen beschränkten Betrages — noch rein periodisch genannt werden darf. Dazu kommen dann allerdings noch solche Störungsglieder, die eine *unperiodische*, fortschreitende Änderung der Bahnelemente hervorrufen, und die wir als *säkulare Störungen* bezeichnen. Diese wirken sich, wie auch der Name andeutet, in sehr langen Zeiten aus und rufen dann eine sehr merkbliche Umgestaltung der Bahnverhältnisse hervor. Im gleichen Sinne, wenn auch in anderer Form und in noch größeren Zeiträumen wirken andere Störungskräfte, etwa ein selbst im leeren Weltenraum vorhandenes widerstehendes Mittel, ferner der durch die „Gezeitenreibung“ hervorgerufene Verlust an Energie. Durch diese säkularen Veränderungen des periodischen Zustandes wird die Gültigkeit der Funktionsgleichung (14) praktisch auf endliche Zeiträume vor und nach der Ausgangsepoche beschränkt. Dasselbe wäre aber auch aus einem ganz anderen Grunde der Fall, selbst wenn es sich um eine ideale, d. h. störungsfreie rein periodische Schwankung der Beobachtungsgröße handeln würde. Die Grundperiode nämlich, also in unserem Beispiel die Umlaufzeit des Planeten, ist niemals eine a priori gegebene Größe, sondern wird aus Beobachtungsreihen ermittelt, die natürlich endliche Zeiträume umfassen, und in denen die einzelnen Beobachtungswerte mit Fehlern behaftet sind. Somit wird auch die aus den Beobachtungen ermittelte Umlaufperiode mehr oder weniger fehlerhaft sein, und dieser Fehler macht die Extrapolation über den durch die Beobachtungen überdeckten Zeitraum hinaus um so unsicherer, je weiter sie getrieben wird. In der Praxis wird man also schon durch diesen letzteren Umstand gezwungen, die Darstellbarkeit eines Naturvorgangs durch eine rein periodische Zeitfunktion immer nur für endliche Zeiträume und innerhalb gewisser Genauigkeitsgrenzen als erfüllt anzusehen. Unter günstigen Umständen kann dabei der Zeitraum, der durch die Formel überbrückt wird, im Verhältnis zur Grundperiode außerordentlich groß sein.

Wenn also schon in der Astronomie diese Einschränkungen eine Rolle spielen, die nicht übersehen werden darf, so ist dies für irdische Naturvorgänge in noch weit größerem Maße der Fall. Um überhaupt die Möglichkeit zu haben, den so nützlichen und fruchtbaren Begriff der rein periodischen Funktion in der Physik und Geophysik anzuwenden, werden wir bei der *praktischen* Definition dieses Begriffs auf die oben entwickelten Schwierigkeiten von vornherein Rücksicht nehmen. Als rein periodische Funktionen in diesem praktischen Sinne werden wir daher schon solche empirischen Funktionen bezeichnen, für die die Funktionsgleichung (14) innerhalb eines endlichen Zeitraumes erfüllt ist, der im Verhältnis zur Grundperiode groß ist, und ferner auch solche, für die dies nur innerhalb gewisser Genauigkeitsgrenzen der Fall ist, die durch die Wirkung zufälliger Beobachtungsfehler oder störender Einflüsse von außen bestimmt sind. Unter diesen Vorbehalten sind als rein periodische Vorgänge z. B. anzusehen: die Schwingungen eines Pendels; die Änderungen der elektromotorischen Kräfte in einem von Wechselstrom durchflossenen Leiter; die Schwingungen einer Stimmgabel, einer Membran, einer Saite oder der in einer Orgelpfeife eingeschlossenen Luftsäule; allgemein die Schwingungen eines Luftteilchens bei der Entstehung harmonischer Töne oder Akkorde. Der Zusatz „*harmonisch*“ kennzeichnet bei dem letzteren Beispiel bereits diejenigen Schall-schwingungen, deren Schwingungsbilder sich als rein periodische Kurven im obigen Sinne darstellen lassen, im Gegensatz zu solchen, die keine Grundperiode haben (das ist schon dann der Fall, wenn sich eine Schall-schwingung aus zwei oder mehreren rein periodischen Schwingungen zusammensetzt, deren Grundperioden kein rationales Verhältnis zueinander haben; solche Töne heißen *unharmonisch*). Der Ausdruck: „*Harmonische Analyse*“ für die Analyse rein periodischer Vorgänge stammt demnach aus dem Sprachgebrauch der Akustik.

Nach dem oben Gesagten haben wir somit die Klasse der rein periodischen empirischen Funktionen dahin erweitert, daß wir auch solche Funktionen in sie aufnehmen, die innerhalb eines — eventuell sehr großen — Zeitbereiches durch einen Ausdruck

$$f(t) = f_0(t) + s(t) + \varepsilon(t)$$

dargestellt werden können, wobei $f_0(t)$ eine rein periodische Funktion im strengen Sinne, $s(t)$ eine nach Ausschaltung aller erkennbaren Nebeneinflüsse noch übrigbleibende äußere Störung (oder ein „systematischer Fehler“), schließlich $\varepsilon(t)$ den zufälligen Beobachtungsfehler bedeutet. Da es immer Gefühlssache bleibt, welche Grenzen man den Beträgen der Störungsglieder zubilligen will, lassen sich die Methoden der Harmonischen Analyse mit mehr oder weniger Berechtigung auch auf eine große Anzahl von Naturvorgängen anwenden (insbesondere auf geophysikalische), die man sonst nicht zu den rein periodischen zählen

würde — z. B. auf den mittleren jährlichen Verlauf der Temperatur an Beobachtungsorten mit gleichmäßigem Klima. Es ist ohne weiteres klar, daß es nicht genügt, in einem solchen Falle die Ergebnisse der Harmonischen Analyse eines einzigen Grundintervalls als maßgebend für die ganze Beobachtungsreihe anzusehen; man wird vielmehr so verfahren, daß man alle oder möglichst viele der verfügbaren Grundintervalle analysiert und die mittleren Werte der FOURIER-Koeffizienten bestimmt, um auf diese Weise den schädlichen Einfluß der Störungen und der Beobachtungsfehler soweit wie möglich zu erkennen und abzuschätzen. Somit wird die Analyse rein periodischer Vorgänge, die ursprünglich ein *analytisches* Problem ist, durch die Bedürfnisse der praktischen Forschung auch zu einer Angelegenheit der *Statistik*.

An dem Beispiel der unharmonischen Schallschwingungen haben wir oben gesehen, daß es Vorgänge gibt, die sich zwar aus rein periodischen Teilvorgängen additiv zusammensetzen, die aber als Gesamtvorgang nicht rein periodisch genannt werden können, weil die Grundperioden der Teilvorgänge kein rationales Verhältnis zueinander haben, eine Grundperiode des Gesamtvorgangs also nicht existiert. Solche zusammengesetzten Vorgänge sind aber in der Natur außerordentlich viel häufiger anzutreffen als die rein periodischen Vorgänge selbst. Es ist daher von außerordentlicher Tragweite, daß die bequemen Methoden der Harmonischen Analyse auch für die Untersuchung jener ihre grundsätzliche Bedeutung behalten. In der theoretischen Astronomie z. B. kommen solche inkommensurablen Perioden in der Störungsrechnung vor, in der Geophysik lassen sich die *Gezeiten des Meeres* der Hauptsache nach als erzwungene Schwingungen mit den zueinander inkommensurablen Grundperioden des Jahres, der Umlaufzeit des Mondes und der Rotationsdauer der Erde darstellen; ferner die *Polschwankungen* durch eine *jährliche* Periode und die CHANDLERSche Periode von etwa 433 Tagen. Für die Behandlung dieser zusammengesetzten Probleme kommen drei verschiedene Wege in Frage, die man je nach den besonderen Umständen beschreiten wird, um die Lösung nach Möglichkeit auf die Methode der Harmonischen Analyse zurückführen zu können:

1. Man macht von der Einsicht Gebrauch, daß die Länge der Grundperioden der Teilvorgänge nur mit einer gewissen Annäherung bekannt ist und mit Rücksicht auf die bei Voraussagen immer in Rechnung zu stellende Genauigkeitsspanne auch nur innerhalb gewisser Grenzen bekannt zu sein *braucht*. Man hat es daher sehr oft in der Hand, die Grundperioden durch Abrundung innerhalb der zulässigen Genauigkeitsgrenzen in ein rationales Verhältnis zueinander zu bringen. Es wird somit möglich sein, ein Grundintervall zu finden, das wenigstens angenähert als Grundperiode der Gesamtfunktion angesprochen werden darf. Allerdings wird diese behelfsmäßige Grundperiode mitunter sehr lang sein, und es ist eine andere Frage, ob die vorliegende Beobachtungs-

reihe auch nur *eine* solche Grundperiode ausfüllt. Ein sehr bekanntes Beispiel für eine solche behelfsmäßige Grundperiode ist der etwa 18jährige Zyklus der Sonnen- und Mondfinsternisse (der sog. *Saroszyklus*), der immerhin ausreicht, das Eintreffen von Finsternissen auf Jahrhunderte hinaus vorauszusagen, und der darauf beruht, daß die beiden inkommensurablen Hauptperioden der Finsternisse, der drakonitische Monat und das drakonitische Jahr, in 6585 Tagen *ungefähr* ganzzahlig enthalten sind.

2. Ist eine von den Teilschwankungen von überragender Amplitude, so kann man versuchen, die übrigen zunächst als (periodische) Störungen zu behandeln und sie nach verschiedenen Methoden, die wir später kennenlernen werden, zu eliminieren, um zunächst die Hauptperiodizität so rein wie möglich herauszuarbeiten. Die nach ihrer Darstellung übrigbleibenden Reste der Gesamtfunktion werden sodann — eventuell nach der gleichen Methode — weiter untersucht (Exhaustionsmethode).

3. Es wird von vornherein ein theoretischer Ansatz gemacht, der die verschiedenen in der Beobachtungsreihe vorhandenen oder vermuteten Periodizitäten berücksichtigt. Der Lösungsprozeß wird sodann grundsätzlich verschieden sein, je nachdem die Grundperioden der Teilvorgänge ganz oder angenähert bekannt sind oder nicht. Im ersteren Falle läßt sich die Lösung, also die Bestimmung der FOURIER-Koeffizienten der Teilvorgänge, stets durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bewerkstelligen, im anderen Falle ist das Problem transzendent und erfordert besondere mathematische Hilfsmittel (s. Kap. V).

7. Reihenentwicklung von Verteilungsfunktionen.

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir die Möglichkeit kennengelernt, empirische Funktionen von einer oder auch mehreren Variablen durch Reihen anzunähern, die nach gewissen Systemen von Funktionen fortschreiten. Diese Funktionssysteme hatten zwei *wesentliche* Eigenschaften: 1. die lineare Unabhängigkeit ihrer Glieder, 2. die Vollständigkeit, die eine *beliebig enge* Annäherung der gegebenen Funktion durch eine genügend große Anzahl von Gliedern der Reihe gewährleistete. Die dritte Eigenschaft, die *Orthogonalität* des Systems, war zwar für die Entwicklung an sich nicht notwendig, aber in Hinblick auf die Praxis der Koeffizientenberechnung unentbehrlich und jederzeit durch eine lineare Umformung des ursprünglichen Systems zu erreichen.

Wie gezeigt wurde, ist die Mannigfaltigkeit der Orthogonalsysteme, nach denen Reihenentwicklungen durchgeführt werden können, außerordentlich groß. So ergaben sich derartige Systeme von Orthogonalfunktionen einer Variablen, indem die zweidimensionalen Elementarfunktionen (8) auf verschiedenen Wegen durch die Koordinatenebene orthogonalisiert wurden. Als einfachste und gebräuchlichste Systeme dieser

Art erhielten wir die *LEGENDRESchen Polynome* durch Orthogonalisierung längs der X -Achse zwischen den Punkten $+1$ und -1 , sowie die harmonischen Kreisfunktionen (FOURIER-Perioden) durch Orthogonalisierung längs des Einheitskreises oder eines beliebigen dazu konzentrischen Kreises.

Es gibt nun in der Praxis Fälle, in denen diese und ähnliche Arten der Entwicklung der Natur der vorgelegten Funktionen nicht entsprechen. In den späteren Teilen dieses Buches werden wir des öfteren mit Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Statistik und Kollektivmaßlehre¹ zu tun haben, z. B. mit Aufgaben, in denen von der Verteilung gegebener oder beobachteter Größen in bezug auf variable Werte eines Parameters die Rede ist. Beispielsweise sei die Häufigkeit des Auftretens verschiedener Werte des Luftdrucks oder der Temperatur an einem Beobachtungsort gegeben, oder die Verteilung der zufälligen Beobachtungsfehler einer Meßreihe ihrer Größe nach. Solche Verteilungs-, Häufigkeits- oder Wahrscheinlichkeitskurven haben einige besondere Eigenschaften, die sie als ausgezeichnete Klasse des allgemeineren Begriffs der empirischen Funktionen erscheinen lassen:

1. Der Definitionsbereich solcher *Verteilungsfunktionen*, wie wir sie kurz nennen wollen, ist zwar endlich, aber nach beiden Seiten des Arguments oder mindestens nach einer Seite hin nicht bestimmt begrenzt. Beispiel: Es kommt zwar niemals vor, daß ein zufälliger Beobachtungsfehler einen sehr großen positiven oder negativen Wert (etwa den 100fachen mittleren Fehler) erreicht. Der größte in einem endlichen Material vorkommende Fehler kann zwar als Anhaltspunkt für eine ungefähre Begrenzung des Fehlerbereichs dienen, aber keineswegs als eine natürliche Schranke aufgefaßt werden, denn kommt ein Fehler von einem bestimmten Betrage vor, so besteht immer die Möglichkeit, daß er bei genügend langer Fortsetzung der Beobachtungsreihe noch übertroffen werde. Ist das Argument der Verteilung dem Wesen des Kollektivs entsprechend positiv (z. B. Niederschlagsmengen; Körpermaße von Versuchspersonen; sportliche Statistiken), so ist zwar durch den Wert null eine natürliche untere Schranke gegeben, während eine obere Schranke a priori nicht gegeben werden kann (mit anderen Worten: es gibt keinen Rekord, der nicht gebrochen werden könnte).

2. Die Funktion selbst ist (als *Anzahl* der mit einem bestimmten Merkmal behafteten Individuen) immer ≥ 0 .

3. Für große Beträge des Arguments nähert sich die Funktion (einseitig oder zweiseitig) früher oder später der null; es ist praktisch belanglos, ob man den Wert Null schon für endliche Beträge des Arguments als erreicht ansehen will oder ob man eine *asymptotische* Annäherung an null annimmt, falls das Argument gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt.

¹ Siehe Kapitel IV.

Mathematisch ist diese letztere Fassung befriedigender, weil dadurch der Übelstand einer fehlenden Schranke formal beseitigt wird. Es wird also formal der (eigentlich endliche) Definitionsbereich ein- oder zweiseitig ins Unendliche ausgedehnt. Der Erfahrungstatsache, daß von einem gewissen (genügend groß zu wählenden) Betrage des Arguments an Individuen des Kollektivs praktisch nicht mehr vorkommen, wird mathematisch dadurch Rechnung getragen, daß das Integral über die Verteilungsfunktion von jenem Punkte an bis $\pm \infty$ praktisch gegenüber dem Gesamtintegral vernachlässigt werden kann.

Natürlich ist, wenn die Verteilungskurve eines Kollektivs als (evtl. stückweise) stetige Funktion des Arguments gegeben ist, ihre Darstellung auch durch LEGENDRESche Polynome oder durch eine FOURIERSche Reihe in einem den tatsächlichen Bereich der Funktion einschließenden Grundintervall praktisch ohne Schwierigkeiten durchführbar. Eine solche Entwicklung würde aber keinesfalls der inneren Natur der Funktion gerecht werden, da ihre Glieder wesentlich andere Struktur besitzen als die Verteilungsfunktion selbst. Damit dieser Übelstand beseitigt werde, fordern wir, daß auch die Reihenglieder Funktionen sein sollen, die sich mit wachsendem Argument (ein- oder zweiseitig) asymptotisch der Null nähern. Die Eigenschaft der Verteilungskurve, wesentlich positiv zu sein, braucht nur von der *ersten* Näherung erfüllt zu sein — die beste Näherung im Sinne des Prinzips der kleinsten Quadrate läßt ja, wenn überhaupt, positive und negative Reste ohne Bevorzugung eines bestimmten Vorzeichens übrig.

Orthogonale Funktionssysteme der verlangten Art lassen sich erzeugen, indem man irgendein vollständiges System von Elementarfunktionen, z. B. das der Potenzen

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots,$$

mit bestimmten „Gewichtsfunktionen“ multipliziert, bevor man zur Orthogonalisierung schreitet. Diese Gewichtsfunktion kann man nun so festsetzen, daß sie den Elementarfunktionen die gewünschten Eigenschaften verleiht. Sei etwa $\phi(x)$ diese Funktion, dann lautet das „gewichtete“ Elementarsystem

$$\phi(x), x\phi(x), x^2\phi(x), \dots, x^n\phi(x), \dots$$

Für eine nach beiden Seiten der x -Achse unbestimmt begrenzte und gegen null abnehmende Verteilungskurve erweist sich die Gewichtsfunktion

$$\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

als geeignet, da ihr Kurvenbild der idealen Verteilungsform des GAUSSschen Fehlergesetzes ähnlich ist. Die orthogonalisierten Funktionen sind dann offenbar von der Gestalt

$$h_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} G_n(x),$$

wobei $G_n(x)$ noch näher zu bestimmende ganze rationale Funktionen n -ten Grades von x bedeuten. Die Orthogonalitätsbedingungen lauten in diesem Falle, wenn das Integrationsintervall von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} G_\mu(x) G_\nu(x) dx = 0. \quad (\mu \neq \nu)$$

Die Berechnung der Koeffizienten der ganzen rationalen Funktionen $G_n(x)$ ist leicht mit Hilfe der Integrale¹

$$J_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } m \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-1)}{\sqrt{2}^m} \cdot \sqrt{\pi} & \end{cases}$$

$$J_0 = \sqrt{\pi}$$

durchführbar.

Es erweist sich, daß die Funktionen G_n (von willkürlichen konstanten Faktoren abgesehen, durch deren spezielle Wahl man das System auch „normieren“ kann) mit den bekannten *HERMITESchen Polynomen*:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2x \\ H_2 &= 4x^2 - 2 \\ H_3 &= 8x^3 - 12x \\ H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ &\dots \end{aligned}$$

identisch sind, für die eine Rekursionsformel

$$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$$

gilt, oder die durch die Formel

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

direkt definiert werden.

Die Frage nach der *Vollständigkeit* des Funktionssystems

$$h_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

bedarf noch einer besonderen Beantwortung, da hier, entgegengesetzt zu früher, der Integrationsbereich unendlich ausgedehnt ist. Es genügt hier die Angabe, daß in solchen Fällen zu den bereits bekannten

¹ Durch partielle Integration erhält man leicht die Rekursionsformel

$$J_m = \frac{2}{m+1} \cdot J_{m+2}.$$

Da $J_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, $J_1 = 0$, so folgen daraus alle übrigen Integrale.

Bedingungen, denen die zu entwickelnden Funktionen $f(x)$ genügen müssen, nur noch die weitere hinzukommt, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx$$

existieren, also einen endlichen Wert besitzen muß. Die *Normierung* des Systems der $h_n(x)$ geschieht vermitteltst der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

der die HERMITESCHEN Polynome unterworfen sind.

Jede *Verteilungsfunktion* der Statistik erfüllt eo ipso die oben vorgeschriebenen Bedingungen, läßt sich demnach durch eine endliche Reihe

$$(a_0 + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) + \dots + a_n H_n(x)) e^{-\frac{1}{2} x^2}$$

beliebig annähern. Diese Näherungsmethode bildet die Grundlage der Entwicklung von Verteilungskurven nach den statistischen Momenten eines Kollektivs, die von BRUNS gegeben worden ist, und die wir an späterer Stelle¹ ausführlicher behandeln wollen.

Für einseitig asymptotische Verteilungsfunktionen $f(x)$, deren Definitionsbereich also von 0 bis $+\infty$ reicht, und für die das Integral

$$\int_0^{\infty} f^2(x) dx$$

existiert, ist eine Entwicklung nach den HERMITESCHEN Funktionen natürlich auch denkbar — es wäre dazu nur nötig, für $x < 0$ die Erweiterung von $f(x)$ durch eine passende Festsetzung vorzunehmen, z. B. durch $f(-x) = 0$ oder $f(-x) = f(+x)$. Natürlicher und dem Wesen der Verteilungsfunktion entsprechender ist es aber, auf die Einseitigkeit der unendlichen Ausdehnung des Bereiches von vornherein Rücksicht zu nehmen. Das geschieht z. B. durch die Einführung der einseitig asymptotischen Gewichtsfunktion $p(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, also durch Orthogonalisierung des Systems

$$e^{-\frac{x}{2}}, \quad x e^{-\frac{x}{2}}, \quad x^2 e^{-\frac{x}{2}}, \dots$$

zwischen den Grenzen 0 und ∞ . Man kommt sodann auf das orthogonale System

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

¹ Kapitel IV, 3.

wobei $L_n(x)$ die LAGUERRESchen Polynome

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 \\ L_1 &= 1 - x \\ L_2 &= 2 - 4x + x^2 \\ L_3 &= 6 - 18x + 9x^2 - x^3 \\ L_4 &= 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4 \\ &\dots \end{aligned}$$

bedeuten, die der Rekursionsformel

$$L_{n+1} - (2n + 1 - x)L_n + n^2 L_{n-1} = 0$$

genügen, und die durch die Formel

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

erzeugt werden. Zur Normierung dieses Systems dienen die Gleichungen

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n^2(x) dx = (n!)^2.$$

8. Allgemeine Bemerkungen über Beobachtungsreihen.

In den bisherigen Betrachtungen ist stets das Vorhandensein einer empirischen Funktion vorausgesetzt worden, die innerhalb eines stetig zusammenhängenden Bereiches einer (oder mehrerer) unabhängigen Variablen überall definiert und bekannt ist. Im Falle *einer* Variablen ist also ein — gegebenenfalls durch endlich viele Sprünge unterbrochener — Kurvenzug bekannt. In der Praxis ist es jedoch viel häufiger, daß die Funktionswerte nur an gewissen diskreten Stellen des Definitionsbereiches gegeben sind. Die Beobachtungsdaten haben dann die Form einer endlichen Menge von Zahlen, deren jede einem von endlich vielen Punkten des Bereiches zugeordnet ist, z. B. der Folge von Beobachtungsterminen

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$$

oder einer örtlichen Folge von Beobachtungspunkten. Im zweidimensionalen Bereich — etwa auf der Oberfläche einer Kugel — ist die Funktion für ein Netz von mehr oder weniger regelmäßig verteilten Punkten (Beobachtungsorten) gegeben. Wir sprechen in diesen Fällen von diskreten (zeitlichen oder örtlichen) *Beobachtungsreihen* oder von *Beobachtungsnetzen*.

Es ist hierbei eine grundsätzliche Unterscheidung zu machen zwischen solchen Reihen oder Netzen, die durch Auswahl von diskreten Werten einer an sich vorhandenen zusammenhängenden Funktion entstanden sind und solchen, die von vornherein nur für diskrete Argumente einen Sinn haben. Messen wir z. B. an einem Beobachtungsort eine Zeitlang täglich zu einem bestimmten Termin die Lufttemperatur, so haben wir eine Beobachtungsreihe der ersten Art vor uns — wir haben uns von

einer an sich zu allen Zeiten vorhandenen zeitlich veränderlichen physikalischen Größe durch Stichproben eine Werteauswahl verschafft, durch die der wirkliche Verlauf des Vorgangs zwar nicht exakt dargestellt, aber doch in großen Zügen verfolgt werden kann. Es ist sogar denkbar, daß dieser Vorgang — etwa durch die Aufzeichnungen eines Thermographen — auch als stetige Funktion der Zeit bekannt geworden ist. Die diskrete Beobachtungsreihe würde dann nicht nur durch direkte Messung der Temperatur zu den Beobachtungsterminen zu erlangen sein, sondern auch durch Entnahme der betreffenden Ordinaten aus der Registrierkurve. Eine solche Ordinatenauswahl wird immer dann einen praktischen Vorteil für den Rechner bieten, wenn die Untersuchung der Reihe bequemer ist als die der stetigen Funktion selbst, und wenn die Ungenauigkeit, die durch die Nichtberücksichtigung der zwischen den einzelnen Terminen liegenden Funktionswerte hervorgerufen wird, gegenüber jenen Rechenvorteilen nicht ins Gewicht fällt.

Ein extremes Beispiel von Beobachtungsreihen der anderen Art haben wir vor uns, wenn wir etwa die Augenzahl einer Reihe von Würfeln mit einem Würfelspiel aufzeichnen. Der Unterschied ist hier der, daß das beobachtete Faktum nicht ein an sich stetiger Vorgang, sondern ein seinem Wesen nach diskretes Ereignis ist, das jedesmal erst durch ein Experiment erzeugt werden muß. Wir können eine Wurfserie von n Würfeln gedanklich als einen „Vorgang“ auffassen, der sich innerhalb einer gewissen Zeit abspielt, müssen ihn dann aber als „wesentlich diskontinuierlich“ ansehen, während die Diskontinuität einer Temperaturbeobachtungsreihe offenbar *unwesentlich* ist, d. h. mit den inneren Eigenschaften des Vorgangs nicht im Zusammenhang steht. Auch in der Natur lassen sich wesentlich diskontinuierliche Vorgänge finden und beobachten. Zeichnet man z. B. die Stärke der an einer seismologischen Station beobachteten Erdstöße als Funktion ihrer Eintrittszeiten auf, so ergibt sich eine diskontinuierliche Wertereihe. Das Kriterium für die wesentliche Diskontinuität ist offenbar, daß es sinnlos ist, eine solche Wertfolge durch einen geschlossenen Kurvenzug zu verbinden oder nach den zwischen den Aufzeichnungen liegenden Werten der Folge zu fragen. Man kann also eine wesentlich diskontinuierliche Wertfolge nicht *interpolieren*, sie läßt sich infolgedessen auch nicht analytisch, sondern nur statistisch behandeln¹.

¹ Zwischen beiden Arten von Wertfolgen gibt es zahlreiche Übergänge. So setzt sich die mit Beobachtungsfehlern behaftete Folge von Temperaturmessungen aus unwesentlich und wesentlich diskontinuierlichen Elementen zusammen. Oft läßt sich auch eine an sich wesentlich diskontinuierliche Folge interpolieren, wenn aus ihr auf einen kontinuierlichen Vorgang geschlossen werden kann, der mit ihr eng zusammenhängt. Zeichnet etwa ein Schütze, der täglich eine feste Zahl von Schüssen auf ein Ziel abgibt, die Zahl der Treffer auf, so ergibt die formale Interpolation (bzw. Glättung) dieser wesentlich diskontinuierlichen Folge den zeitlichen Verlauf der (als stetig veränderlich anzusehenden) „Treffericherheit“.

In den folgenden Abschnitten soll von der *Interpolation* von Wertereihen die Rede sein — daraus geht hervor, daß der Fall der wesentlichen Diskontinuität ausgeschlossen bleibt. Wir haben es also nur mit solchen Wertefolgen zu tun, die als einzelne Ordinaten einer in ihrem Bereich überall definierten empirischen Funktion entnommen worden sind. Bei Wertereihen mit *einer* unabhängigen Veränderlichen haben wir noch zu unterscheiden zwischen solchen Reihen, deren Abszissen gleiche Abstände haben (äquidistante Reihen) und solchen, in denen die Abszissen ungleichförmig über den Beobachtungsbereich verteilt sind.

9. Interpolation und Glättung.

Es sei nun allgemein die Aufgabe gestellt, die durch eine Beobachtungsreihe, also durch eine bestimmte Ordinatenauswahl repräsentierte empirische Funktion innerhalb des Beobachtungsbereichs so gut wie möglich zu rekonstruieren. Damit diese Aufgabe überhaupt lösbar sei, müssen gewisse Vorbedingungen erfüllt sein, die sich mathematisch streng und allgemeingültig nicht formulieren lassen. Die größte Schwierigkeit liegt offenbar darin, daß diese Voraussetzungen sich bis zu einem gewissen Grade auf den als unbekannt angenommenen Verlauf der Funktion zwischen den Beobachtungspunkten erstrecken. Vor allen Dingen ist erforderlich, daß die Beobachtungspunkte *dicht* genug liegen, und zwar so dicht, daß wesentliche Schwankungen der Funktion zwischen den beobachteten Ordinaten nicht zu erwarten sind. Ein sicheres Urteil über diesen Punkt läßt sich aus der Kenntnis der diskreten Wertfolge allein nicht gewinnen, wohl aber aus den Erfahrungen, die dem Bearbeiter darüber hinaus über die Schwankungseigenschaften der Funktion vorliegen. Handelt es sich z. B. um eine äquidistante Beobachtungsreihe des Luftdrucks für eine bestimmte meteorologische Station, so sind — wenn nicht für den gleichen Zeitraum, so doch für frühere Zeiträume, und wenn nicht für dieselbe, so doch für eine klimatisch ähnlich gelegene Station — Barogramme vorhanden, die ein allgemeines Bild von der Änderung des Luftdrucks, von der Größe und der Schnelligkeit seiner Schwankungen zu geben vermögen. Als *Schwankung* wird man dabei einen Kurventeil ansehen, der von einem Teilmaximum der Kurve bis zum nächsten reicht. In Anlehnung an die Bezeichnungsweise bei periodischen Kurven kann man (zunächst ganz provisorisch) das Abszissenintervall (Zeitintervall) zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilmaxima als *Schwankungsperiode* oder Schwankungsdauer, den Ordinatenunterschied zwischen Teilmaximum und nachfolgendem Teilminimum (noch besser den Unterschied zwischen dem arithmetischen Mittel aufeinanderfolgender Maximalordinaten und der dazwischenliegenden Minimalordinate) als *Schwankungsamplitude* bezeichnen. Nun wird im allgemeinen die Dauer sowohl als auch die Amplitude aufeinanderfolgender

Schwankungen starkem Wechsel unterworfen sein. Es wird ferner zu unterscheiden sein zwischen Schwankungen, die durch zufällige Registrierungsfehler oder durch belanglose kleine Störungen hervorgerufen werden, und solchen, die auf wesentlichen Änderungen der Meßgröße selbst beruhen. Die ersteren Schwankungen werden im allgemeinen von kleiner Amplitude und sehr kurzer Periode sein — von diesen Schwankungen wird sich der Bearbeiter tunlichst zu befreien haben, etwa dadurch, daß er die gegebene Kurve *glättet*. Erst die Schwankungen der geglätteten Kurve werden nach Dauer und Amplitude diejenigen Eigenschaften zeigen, die für die Bestimmung des geeignetsten Beobachtungsabstandes maßgebend sind. Der Beobachtungsabstand ist dann auf alle Fälle so klein zu wählen, daß diese wesentlichen Schwankungen in der Beobachtungsreihe deutlich sichtbar bleiben. Ist p die kleinste unter den vorkommenden wesentlichen Schwankungsperioden, so ist zunächst klar, daß ein Beobachtungsabstand $\Delta t \cong p$ zu groß wäre, da die Beobachtungsreihe diese kurzen Schwankungen überhaupt nicht wiedergeben würde. Ein Beobachtungsabstand $\Delta t = \frac{p}{2}$ könnte die Schwankung im vollen Maße zeigen, wenn eine Abszisse gerade das Schwankungsmaximum, die nächste also das Schwankungsminimum trafe. Da aber ebenso wahrscheinlich diese beiden Abszissen gerade in die Mitte zwischen Maximum und Minimum fallen könnten, so liegt auch hier noch die Gefahr vor, daß die Schwankung aus der Reihe herausfällt. Mit Rücksicht auf diesen ungünstigsten Fall würde es nötig werden, zwischen je zwei Beobachtungswerten noch einen weiteren zu besitzen, so daß dann auf einen Bereich von der Länge der kleinsten wesentlichen Schwankungsperiode mindestens vier Beobachtungen kämen. Die Bedeutung dieser, lediglich aus ganz einfachen Überlegungen gewonnenen Erkenntnis für die Aufgaben der Periodenforschung ist unmittelbar einzusehen — es ist plausibel, daß man, um eine Periode von der Länge p durch eine Beobachtungsreihe feststellen zu können, den Beobachtungsabstand tunlichst nicht größer als $\frac{p}{4}$ wählen darf.

Wir haben in den vorhergehenden Bemerkungen zwei Begriffe verwendet, die jedem Bearbeiter von Beobachtungswerten geläufig sind, hier aber noch einer genaueren Bestimmung bedürfen: *Interpolation* und *Glättung*.

Unter *Interpolation* einer Beobachtungsreihe versteht man die Verbindung der in einem Koordinatensystem als Punkte aufgezeichneten diskreten Funktionswerte durch eine stetige, nötigenfalls durch eine stückweise stetige, also höchstens an isolierten Stellen unstetige *Kurve*. Die Art der Kurvenziehung ist an sich *willkürlich*; sobald wir aber die Interpolation als Mittel zur Erreichung eines bestimmten Zieles, nämlich der bestmöglichen Rekonstruktion der empirischen Funktion ansehen, die der Beobachtungsreihe zugrunde liegt, wird diese Willkür durch

starke Einschränkungen gemildert werden müssen. Zumindest werden wir die Art der Interpolation den Voraussetzungen anzupassen haben, denen die Beobachtungsreihe selbst als Repräsentant des unbekanntes Funktionsverlaufes nach den obigen Betrachtungen unterworfen ist: Da der Verlauf der durch die Beobachtungen gegebenen Punktreihe alle wesentlichen Schwankungen der Funktion enthalten soll, darf die Interpolationskurve keine zusätzlichen Schwankungen zeigen, also insbesondere keine ausgeprägten Wellen von der Länge des doppelten Beobachtungsabstandes oder noch kleinerer Länge. Sofern solche kurzperiodische Schwankungen dennoch zugelassen werden, sollen ihre Amplituden jenes Maß nicht überschreiten, das durch die Ungenauigkeit bzw. die Streuung der Beobachtungen selbst oder durch die Genauigkeitsansprüche des Bearbeiters gegeben ist.

Ist von der gegebenen Wertereihe bekannt, daß sie einer analytischen Funktion von mehr oder weniger einfachem Aufbau und glattem Verlauf entnommen ist und an den Entnahmestellen die Funktionswerte bis auf eine bestimmte Dezimalstelle genau angibt, so gibt es strenge Interpolationsverfahren, die es gestatten, auch die dazwischenliegenden Funktionswerte mit der gleichen Genauigkeit zu ermitteln. Die hierzu nötigen Formeln, die in der *Differenzenrechnung* (s. Lit. 221, 312) gelehrt werden, beruhen auf den allgemeinen mathematischen Eigenschaften analytischer Funktionen, insbesondere darauf, daß sie in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches beliebig oft differenzierbar sind. Diese Interpolationsformeln werden z. B. benutzt, wenn Funktionswerte für beliebige Argumente aus *Tafeln* entnommen werden sollen, die die Funktion für diskrete Werte des Arguments enthalten; auf ihnen beruht also die Benutzung von Tafeln der Logarithmen, der trigonometrischen Funktionen usw., aber auch von Tafeln zusammengesetzter Funktionen, wie z. B. der astronomischen Ephemeriden der Himmelskörper.

Die Anwendung der Formeln der Differenzenrechnung auf empirische Wertereihen ist im allgemeinen nicht statthaft, da die oben genannten, für analytische Funktionen gültigen Voraussetzungen für empirische Funktionen meist nicht zutreffen. Selbst wenn die der Beobachtungsreihe zugrunde liegende empirische Funktion ihrer Natur nach als analytisch angesehen werden kann, ist mit dem Auftreten der zufälligen Beobachtungsfehler zu rechnen, die den Einzelwerten der Reihe anhaften und ihren „glatten“ Verlauf mehr oder weniger empfindlich stören.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache und mit dem Ziel, eine Ausgleichung der Beobachtungsfehler herbeizuführen, lassen sich verschiedene Wege einschlagen:

1. Man interpoliert die gegebene Wertereihe zunächst provisorisch auf eine möglichst einfache und vorurteilsfreie Weise. Hierdurch erhält man eine stückweise stetige, sogar stückweise glatte Kurve, die dann nach den Methoden des ersten Teiles durch bekannte Funktionssysteme

so weit anzunähern ist, wie es die Genauigkeit der Beobachtungen erforderlich macht. Für diese provisorische Interpolation kommen insbesondere zwei Methoden in Frage:

a) Die *lineare* Interpolation, die graphisch dadurch erzielt wird, daß man die als Punkte in einem Koordinatensystem aufgetragenen Werte durch gerade Strecken miteinander verbindet (Interpolation durch einen *Polygonzug*).

b) Die Interpolation durch einen *Treppen-* oder *Stufenzug*. Hier wird angenommen, daß die Funktion den gemessenen Wert während eines ganzen Beobachtungsintervalls beibehält. Handelt es sich um eine gleichabständige Reihe mit dem Abstand Δt , so wird die interpolierte Kurve im Intervall

$$t_\alpha - \frac{\Delta t}{2} < t < t_\alpha + \frac{\Delta t}{2}$$

den Wert $f(t_\alpha) = \text{const}$ haben, außerdem in der Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Beobachtungsterminen einen Sprung aufweisen, sofern die dazugehörigen Beobachtungswerte verschieden sind.

2. Die gegebene Wertreihe wird vor ihrer weiteren Behandlung *geglättet*, d. h. durch ihre graphische Darstellung wird ein glatter Kurvenzug hindurchgelegt, so daß die Einzelpunkte möglichst gleichmäßig zu beiden Seiten der Kurve verteilt bleiben, und ihre Abweichungen von der Kurve die Größenordnung der zu erwartenden Fehler innehalten. Am einfachsten geschieht diese Glättung „aus freier Hand“, indessen erfordert diese Art der Behandlung von seiten des Bearbeiters eine gewisse Gefühlssicherheit, die sich in konkreten Fällen oft erst dann einstellt, wenn über das vorliegende Problem genügend Erfahrung gesammelt worden ist.

3. Die gegebene Wertreihe wird in ungeglätteter Form benutzt, und es wird versucht, sie *direkt* durch eine Annäherungsfunktion nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate anzunähern. Die Annäherungsfunktionen verschiedener Ordnung, die dabei erhalten werden, sind als analytische Ausdrücke ihrer Natur nach *glatt*, ihre Kurvenbilder also als *Glättungskurven* anzusehen. Der Glättungsprozeß gilt als abgeschlossen, wenn der mittlere übrigbleibende Fehler der Darstellung der erwarteten Genauigkeit entspricht. Da die gesamte Beobachtungsreihe nur endlich viele Werte enthält, ist es immer möglich, die Quadratsumme der Restfehler nach endlich vielen Annäherungsschritten zum Verschwinden zu bringen — diese letzte Näherungsfunktion wird also die Beobachtungswerte restlos darstellen, sie entspricht daher einer *Interpolation* der Beobachtungsreihe. Da jedoch diese Interpolationskurve die Beobachtungsfehler mit darstellt, braucht sie keineswegs die beste Annäherung an die gesuchte, dem beobachteten Vorgang entsprechende Kurve zu sein. Ja, selbst wenn die „Beobachtungsreihe“ einer analytischen Funktion fehlerfrei entnommen wäre, würde eine derartige Interpolation

keineswegs Gewähr dafür bieten, daß die Zwischenwerte mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmen, denn sie hängen ja noch ganz wesentlich von der Art der verwendeten Annäherungsfunktionen ab: so wird die Interpolation von n Zahlenwerten durch eine Potenzreihe zwar diese Werte ebenso vollkommen darstellen, wie die durch eine trigonometrische Reihe, aber die Zwischenwerte werden in beiden Fällen erheblich voneinander abweichen, und wenn etwa die gegebenen Werte einer Exponentialfunktion entnommen waren, wird keine der beiden Darstellungen eine befriedigende Interpolation gestatten.

Von den unter Punkt 3 genannten analytischen Glättungsverfahren wird in den folgenden Abschnitten noch ausführlich die Rede sein. Im Anschluß an Punkt 2 müssen noch einige Hilfsmittel erwähnt werden, die das Glätten aus freier Hand erleichtern, wenn auch nicht ganz ersetzen können, und dieser Maßnahme wenigstens einen Teil der in ihr enthaltenen Willkür und Gefühlsmäßigkeit nehmen. Der Zweck der Glättung ist ja, die Beobachtungsreihe nach Möglichkeit von der Wirkung der zufälligen Fehler zu befreien. Da zufällige Fehler die statistische Eigenschaft haben, gleich häufig positiv und negativ zu sein, so wird das arithmetische Mittel aus einer größeren Anzahl verschiedener Fehler von um so kleinerem Betrage sein, je größer die Anzahl ist, und zwar nimmt (was hier als bekannt vorausgesetzt sei) der wahrscheinlichste Betrag des arithmetischen Mittels wie die Wurzel der Anzahl ab. Eine Verminderung der Größenordnung der Fehler wird man daher bei Beobachtungsreihen unter gewissen Voraussetzungen dadurch erzielen können, daß man je n aufeinanderfolgende Werte zu ihrem arithmetischen Mittel zusammenfaßt und dieses als geglätteten Funktionswert dem mittleren Argument zuschreibt. Das ist aber nur dann statthaft, wenn man annehmen darf, daß die gedachte (fehlerfreie) Beobachtungskurve in dem Bereich, über den die Mittelbildung erfolgt, keine merkliche Krümmung aufweist, also wenigstens angenähert linear verläuft. Liegen die Beobachtungswerte hinreichend dicht, so wird man diese Methode der Glättung durch übergreifende Mittel oft mit Erfolg anwenden, doch muß man sich sehr hüten, die Mittelbildung auch über solche Intervalle vorzunehmen, die eine offensichtliche sprunghafte Änderung der Funktion oder ihrer Ableitung (Sprünge oder Knicke) enthalten, da die geglättete Reihe die Tendenz hat, diese Eigenschaften zu verwischen¹. Die einfachste Form der Glättung durch Mittelbildung ist die, die Beobachtungsreihe durch die arithmetischen Mittel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Werten zu ersetzen. Dehnt man die Mittelbildung über mehr als zwei Werte aus, so geht man oft so vor, daß man den Werten, die dem mittleren Argument am nächsten liegen, ein größeres Gewicht erteilt als den weiter entfernten. Bei Dreiermitteln ist die Gewichts-

¹ Siehe auch A. p. V. S. 15 bis 16.

verteilung (1, 2, 1) sehr gebräuchlich: Sind also f_1, f_2, f_3 drei aufeinanderfolgende Beobachtungswerte, so lautet der geglättete Wert

$$g_2 = \frac{1}{4} (f_1 + 2f_2 + f_3).$$

Für mehr als drei Werte benutzt man verschiedene Gewichtsverteilungen, z. B. gleichmäßige Abnahme von der Mitte nach den Enden des Intervalls oder ungleichförmige Abnahme gemäß den Binomialkoeffizienten. So erhält man für Vierermittel nach diesen beiden Methoden die Werte

$$g_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \text{ bzw. } g_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} (f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4)$$

für Fünfermittel

$$g_3 = \frac{1}{9} (f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 2f_4 + f_5) \text{ bzw. } g_3 = \frac{1}{16} (f_1 + 4f_2 + 6f_3 + 4f_4 + f_5)$$

usw.

Ist die Beobachtungsreihe ihrem allgemeinen Verlauf nach merklich gekrümmt, d. h. weist sie wesentliche Schwankungen auf, so zeigt die durch übergreifende Mittel gebildete geglättete Reihe eine Neigung, die Amplitude der Schwankungen zu verkleinern, während die Perioden erhalten bleiben. Wird die (ungewichtete) Mittelbildung über ein Intervall von der Länge der Schwankungsperiode ausgeführt, so wird die geglättete Reihe diese Schwankung überhaupt nicht mehr enthalten. Bei der Glättung durch übergreifende Mittel wird man also darauf achten, daß das zur Mittelbildung herangezogene Intervall gegenüber den jeweilig auftretenden Schwankungsperioden hinreichend klein ist — es sollte im allgemeinen den vierten Teil der Schwankungsperiode nicht überschreiten. Andererseits ist durch diesen Umstand die Möglichkeit gegeben, kurzperiodische Schwankungen durch Glättung aus der Beobachtungsreihe zu entfernen, um dadurch Schwankungen von längerer Periode klarer hervortreten zu lassen. Diese Methode wird in der Periodenforschung häufig angewandt, um kurze und lange Perioden voneinander zu trennen¹.

10. Annäherung von Beobachtungsreihen.

Wenn wir eine Beobachtungsreihe vor der weiteren Bearbeitung *glätten*, so setzen wir damit ihrer Annäherung durch eine analytische Funktion oder durch Reihen solcher Funktionen von vornherein eine Schranke, die durch das Quadrat der Abweichungen der Einzelwerte von der Glättungskurve größenordnungsmäßig gegeben ist. Eine fortschreitende Annäherung der Beobachtungswerte mit dem Ziel, die übrigbleibenden Reste *beliebig* klein zu machen, ist dagegen durch die beiden Verfahren ermöglicht, die in Punkt 1 und 3 des vorigen Abschnitts angedeutet worden sind. In der Art, wie diese Annäherung

¹ Siehe z. B. V, 5.

vor sich geht, unterscheiden sich beide Methoden wesentlich voneinander. Durch die provisorische Interpolation der Beobachtungsreihe durch Polygon- oder Treppenzüge (Punkt 1) wird eine stellenweise geknickte bzw. stellenweise unstetige Hilfsfunktion erzeugt, die die Beobachtungswerte selbst als Ordinaten enthält. Die vorgelegte Aufgabe ist daher auf die frühere der Annäherung empirischer *Kurven* zurückgeführt — eine vollständige Darstellung der Beobachtungswerte wird daher im allgemeinen erst nach unendlich vielen Schritten der Annäherung zu erwarten sein, während die in Punkt 3 angeführte direkte Annäherungsmethode schon nach endlich vielen Schritten zur vollständigen Darstellung der Originalwerte führt.

Wir beschränken uns auf den Fall einer eindimensionalen Beobachtungsreihe — der Einfachheit halber nehmen wir als Argument die Zeit (t) an. Die zu den Beobachtungsterminen

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_v, \dots, t_N$$

gemessenen Größen seien

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_v, \dots, y_N.$$

Ist die Beobachtungsreihe *äquidistant*, so wählen wir den konstanten Beobachtungsabstand (etwa Stunde, Tag, Monat, Jahr), als Zeiteinheit — die Folge der Argumente entspricht dann der Folge der ganzen Zahlen, die Null und die negativen Zahlen gegebenenfalls eingeschlossen.

Die zur Annäherung benutzten Funktionen bilden, wie früher, ein linear unabhängiges System von „Elementarfunktionen“

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$$

Die Näherung n -ter Ordnung sei eine lineare Kombination dieser Funktionen:

$$g_n(t) = a_0 \varphi_0(t) + a_1 \varphi_1(t) + \dots + a_n \varphi_n(t)$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten a_0, a_1, \dots, a_n .

Nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate ist dann diejenige Näherung n -ter Ordnung als die beste anzusehen, die der Bedingung

$$\Phi_n = \sum_{v=0}^N (y_v - g_n(t_v))^2 = \text{Min}$$

genügt. Die Lösung dieses Minimumproblems führt sodann auf die Normalgleichungen

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_n}{\partial a_\mu} &= a_0 \sum_{v=0}^N \varphi_\mu(t_v) \varphi_0(t_v) + a_1 \sum_{v=0}^N \varphi_\mu(t_v) \varphi_1(t_v) + \dots \\ &+ a_n \sum_{v=0}^N \varphi_\mu(t_v) \varphi_n(t_v) - \sum_{v=0}^N y_v \varphi_\mu(t_v) = 0, \quad (\mu = 0, 1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

die sich von den früheren nur dadurch unterscheiden, daß anstatt der Integrale *Summen* auftreten.

Für die Bestimmung des Minimumsausdruckes Φ_n erhält man ganz ähnlich wie früher

$$\Phi_n(\text{Min}) = \sum_{\nu=0}^N y_\nu^2 - \sum_{\nu=0}^N g_n^2(t_\nu).$$

Das Quadrat des mittleren Restfehlers ist dann

$$\mu_n^2 = \frac{1}{N} \Phi_n(\text{Min})^1.$$

Etwas tiefergehende Betrachtungen werden nötig, wenn wir versuchen, auch den Begriff der *Orthogonalität* des Systems der Annäherungsfunktionen auf die bei Beobachtungsreihen vorliegenden besonderen Verhältnisse zu übertragen, was mit Rücksicht auf die außerordentliche Vereinfachung der Auflösung der Normalgleichungen im Falle der Orthogonalität sehr wünschenswert ist. Daß wir mit den im ersten Teil gewonnenen Erfahrungen über orthogonale Funktionssysteme allein nicht auskommen, ist klar und liegt einfach daran, daß ja die Ausgangsfunktionen nicht wie dort in ihrem gesamten Verlauf benutzt werden, sondern — ebenso wie die Beobachtungsfunktion selbst — nur für ausgewählte Argumente. Erfüllen also die Funktionen des Systems für ein bestimmtes Intervall $[a, b]$ die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_a^b \varphi_\mu(t) \varphi_\nu(t) dt = 0, \quad (\mu \neq \nu)$$

so ist damit noch nicht gesagt, daß für diskrete Argumente dieses Intervalls auch

$$\sum_{\nu=0}^n \varphi_\mu(t_\nu) \varphi_\nu(t_\nu) = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

ist. Das ist aber offenbar die Forderung, die zu stellen ist, wenn die Lösungen der Normalgleichungen (15) die gleiche einfache Gestalt haben sollen wie früher. Die Befriedigung dieser Forderung, die wir ebenfalls als Orthogonalitätsbedingung bezeichnen wollen, hängt außer von der analytischen Gestalt der Näherungsfunktionen ganz wesentlich von der Wahl der diskreten Argumente, also der Beobachtungszeiten ab, ebenso wie sie im früheren Fall von der Länge und Lage des Beobachtungsintervalls abhing.

So wie wir früher ein gegebenes, nicht orthogonales Funktionssystem für einen bestimmten Bereich der unabhängigen Variablen *orthogonalisieren* konnten, werden wir jetzt die Orthogonalisierung mit Rücksicht auf ein bestimmtes Aggregat von diskreten Argumenten vornehmen müssen. Gehen wir dabei von einem einfachen Elementarsystem aus, z. B. von dem der Potenzen, so werden wir im allgemeinen nicht zu den

¹ Der Nenner N ist um eins kleiner als die Anzahl der Summanden. Die Begründung dieser Tatsache ist aus der Fehlertheorie bekannt.

gleichen Orthogonalsystemen geführt werden, die wir früher kennen- gelernt haben, oder wenn doch, dann nur bei ganz bestimmter Verteilung der Argumente.

11. Harmonische Analyse von Beobachtungsreihen.

Die in Abschnitt 6 gesammelten Bemerkungen über *rein periodische* Funktionen lassen sich ohne Schwierigkeit auf Beobachtungsreihen über- tragen. Wir wollen also eine Beobachtungsreihe

$$\dots y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \quad [y_\nu = f(t_\nu)]$$

rein periodisch nennen, wenn sie aus einer rein periodischen Kurve durch Ordinatenauswahl entstanden ist, wobei für den Begriff der reinen Periodizität die gleichen Vorbehalte gelten wie früher. Geschieht die Ordinatenauswahl in jeder „Grundperiode“ an gleichliegenden Stellen der Abszissenachse, so kann die Funktionalbedingung in der Form

$$f(t_\nu) = f(t_\nu + k p)$$

geschrieben werden. Ist insbesondere die Reihe äquidistant, und ist die Grundperiode ein ganzes Vielfaches des Beobachtungsabstandes $\Delta t = \tau$, so ist — immer abgesehen von Beobachtungsfehlern oder sonstigen störenden Beimischungen —

$$y_\nu = y_{\nu + k p}.$$

Die Harmonische Analyse einer Beobachtungsreihe, die der letzt- genannten Bedingung genügt, ist der in der Praxis bei weitem am häufigsten vorkommende Fall. Es liege ein Grundintervall von der Länge p vor, das durch p gleichabständige Beobachtungen

$$y_1, y_2, \dots, y_p$$

belegt sei. Diese Werte sollen durch eine endliche, nach den Funktionen

$$\begin{aligned} &1, \cos \alpha t, \cos 2 \alpha t, \dots \\ &\sin \alpha t, \sin 2 \alpha t, \dots \end{aligned} \quad \left(\alpha = \frac{2 \pi}{p} \right)$$

fortschreitende Reihe angenähert bzw. interpoliert werden.

Es erweist sich, daß in diesem Falle die in den Normalgleichungen außerhalb der Hauptdiagonale auftretenden Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^p \cos \mu \alpha t_\nu, \cos \varrho \alpha t_\nu \\ &\sum_{\nu=1}^p \sin \mu \alpha t_\nu, \sin \varrho \alpha t_\nu \\ &\sum_{\nu=1}^p \cos \mu \alpha t_\nu, \sin \varrho \alpha t_\nu \end{aligned} \right\} \mu > \varrho$$

sämtlich verschwinden, sofern $\mu + \varrho < p$.

Man beweist diese Behauptung mittels der bekannten Summationsätze der trigonometrischen Funktionen:

$$\sum_{\nu=1}^p \cos(\nu\varphi + \psi) = \frac{\sin p \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos \left[(p+1) \frac{\varphi}{2} + \psi \right]$$

$$\sum_{\nu=1}^p \sin(\nu\varphi + \psi) = \frac{\sin p \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \sin \left[(p+1) \frac{\varphi}{2} + \psi \right].$$

Es ist nämlich, wenn gemäß den obigen Voraussetzungen die gleichabständigen Abszissen

$$t_\nu = q + \nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

eingeführt werden:

$$2 \sum_{\nu=1}^p \cos \mu \alpha t_\nu \cos \varrho \alpha t_\nu = \sum_{\nu=1}^p \{ \cos(\mu + \varrho) \alpha (q + \nu) + \cos(\mu - \varrho) \alpha (q + \nu) \}$$

$$2 \sum_{\nu=1}^p \sin \mu \alpha t_\nu \sin \varrho \alpha t_\nu = \sum_{\nu=1}^p \{ \cos(\mu - \varrho) \alpha (q + \nu) - \cos(\mu + \varrho) \alpha (q + \nu) \}$$

$$2 \sum_{\nu=1}^p \cos \mu \alpha t_\nu \sin \varrho \alpha t_\nu = \sum_{\nu=1}^p \{ \sin(\mu + \varrho) \alpha (q + \nu) - \sin(\mu - \varrho) \alpha (q + \nu) \}.$$

In den vorkommenden cos- und sin-Summen sind also die Frequenzen

$$\varphi = \alpha(\mu \pm \varrho) = \frac{2\pi}{p}(\mu \pm \varrho)$$

zu verwenden. Für $\mu > \varrho$ und $\mu + \varrho < p$ ist stets $\sin \frac{\varphi}{2} > 0$, hingegen $\sin p \frac{\varphi}{2} = 0$. Daraus folgt zunächst die Gültigkeit der Orthogonalitätsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^p \cos \mu \alpha t_\nu \cos \varrho \alpha t_\nu &= 0 \\ \sum_{\nu=1}^p \sin \mu \alpha t_\nu \sin \varrho \alpha t_\nu &= 0 \end{aligned} \right\} \mu \neq 0$$

für $\mu + \varrho < p$, während ersichtlich ist, daß die Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^p \cos \mu \alpha t_\nu \sin \varrho \alpha t_\nu = 0$$

auch für $\mu = \varrho$ noch erfüllt ist.

Für eine Annäherung bis zur m -ten Ordnung:

$$y_\nu = a_0 + a_1 \cos \alpha t_\nu + a_2 \cos 2 \alpha t_\nu + \dots + a_m \cos m \alpha t_\nu \\ + b_1 \sin \alpha t_\nu + b_2 \sin 2 \alpha t_\nu + \dots + b_m \sin m \alpha t_\nu$$

sind $2m + 1$ Koeffizienten zu berechnen; es muß also $2m + 1 \leq p$ sein, damit die Lösung eindeutig bleibt. Die Normalgleichungen reduzieren

sich, da die Orthogonalitätsbedingungen wegen $\mu \leq m$; $q \leq m$, d. h. $\mu + q \leq 2m < p$ sämtlich erfüllt sind, auf

$$\left. \begin{aligned} a_0 \cdot p &= \sum_{v=1}^p y_v \\ a_\mu \sum_{v=1}^p \cos^2 \mu \alpha t_v &= \sum_{v=1}^p y_v \cos \mu \alpha t_v \\ b_\mu \sum_{v=1}^p \sin^2 \mu \alpha t_v &= \sum_{v=1}^p y_v \sin \mu \alpha t_v \end{aligned} \right\} \mu = 1, 2, \dots, m,$$

wobei man zweckmäßig durch Wahl eines geeigneten Anfangspunktes dafür sorgt, daß $t_v = v$ gesetzt werden kann. Da ferner

$$\sum_{v=1}^p \cos^2 \mu \alpha t_v = \sum_{v=1}^p \sin^2 \mu \alpha t_v = \frac{p}{2} \quad \text{für } 2\mu < p,$$

so ergeben sich für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \sum_{v=1}^p y_v \\ a_\mu &= \frac{2}{p} \sum_{v=1}^p y_v \cos \mu \alpha t_v = \frac{2}{p} \sum_{v=1}^p y_v \cos \mu v \alpha \\ b_\mu &= \frac{2}{p} \sum_{v=1}^p y_v \sin \mu \alpha t_v = \frac{2}{p} \sum_{v=1}^p y_v \sin \mu v \alpha. \end{aligned}$$

Die Interpolation der gegebenen Werte ist streng, wenn die Anzahl der Konstanten gleich der Anzahl der Beobachtungen ist. Hier haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem p eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist p ungerade, etwa $p = 2r + 1$, so tritt die strenge Interpolation gerade für die r -te Ordnung ein, und da in diesem Falle stets $2\mu \leq 2r < p$, so behalten die obigen Formeln für die FOURIER-Koeffizienten auch für die höchste Ordnung ihre Gültigkeit. Das ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn p gerade ist. Ist nämlich $p = 2r$, so ist

$$\begin{aligned} \cos r v \alpha &= \cos \pi v = \pm 1; & \sum_{v=1}^p \cos^2 r v \alpha &= p \\ \sin r v \alpha &= \sin \pi v = 0, \end{aligned}$$

woraus erhellt, daß die Bestimmungsgleichung für b_r ihren Sinn verliert, während

$$a_r = \frac{1}{p} \sum_{v=1}^p y_v \cos r v \alpha$$

wird. Die harmonische Welle höchster Ordnung ist also in diesem Falle eine reine cos-Welle.

Für die minimale Fehlerquadratsumme ergibt sich bei Annäherung bis zur m -ten Ordnung:

$$\Phi_m(\text{Min}) = \sum_{\nu=1}^p y_{\nu}^2 - p a_0^2 - \sum_{\mu=1}^m \frac{p}{2} (a_{\mu}^2 + b_{\mu}^2),$$

also für das Quadrat des mittleren Restfehlers der wahrscheinlichste Wert

$$\mu_m^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{\nu=1}^p y_{\nu}^2 - \frac{p}{p-1} \left\{ a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^m (a_{\mu}^2 + b_{\mu}^2) \right\}.$$

12. Mehrdeutigkeit der trigonometrischen Interpolation.

Ist eine empirische Funktion im Bereich $[0, p]$ durch eine Kurve überall definiert, so wird sie durch ihre FOURIERSche Entwicklung eindeutig dargestellt. Es gibt daher eine und nur eine Folge von FOURIER-Koeffizienten

$$\alpha_0; \alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots; \alpha_n, \beta_n; \dots,$$

die für die Annäherung der Funktion maßgebend ist. Ist hingegen die Funktion im gleichen Bereich durch eine (im besonderen äquidistante) Auswahl von p Ordinaten vertreten, so stellt die Interpolation dieser Ordinaten mittels der im vorigen Abschnitt abgeleiteten p ersten Glieder¹ der Folge

$$a_0; a_1, b_1; a_2, b_2; \dots$$

nur eine einzige von unendlich vielen Interpolationsmöglichkeiten dar, und zwar diejenige, die mit möglichst wenig und möglichst langen harmonischen Wellen die betreffende Ordinatenauswahl darzustellen vermag. Dabei ist es keineswegs sicher, daß diese p Konstanten a_{μ}, b_{μ} mit den ersten p FOURIER-Koeffizienten $\alpha_{\mu}, \beta_{\mu}$ auch nur annäherungsweise übereinstimmen; wir wollen aber die Ordinatenauswahl als *hinreichend dicht* bezeichnen, wenn eine genügende Übereinstimmung vorliegt. Völlige Übereinstimmung ist nur dann zu erwarten, wenn die FOURIER-Entwicklung selbst mit dem p -ten Gliede abbricht, alle späteren FOURIER-Koeffizienten also verschwinden. Alsdann folgen die Identitäten

$$a_{\mu} = \alpha_{\mu}; \quad b_{\mu} = \beta_{\mu}$$

aus der Eindeutigkeit der FOURIER-Entwicklung. Genäherte Übereinstimmung zwischen den a_{μ}, b_{μ} und $\alpha_{\mu}, \beta_{\mu}$ ist dann gegeben, wenn die Quadratsumme der FOURIER-Koeffizienten vom $(p+1)$ -ten ab hinreichend klein, d. h. von der Größenordnung des zu erwartenden Fehlerquadratintegrals ist.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den Konstanten a_{μ}, b_{μ} und den FOURIER-Koeffizienten an einigen konkreten Beispielen näher

¹ Also, wenn p ungerade, bis $b_{\frac{1}{2}(p-1)}$; wenn p gerade, bis $a_{\frac{1}{2}p}$.

untersuchen, um an Hand der dabei gewonnenen Erfahrungen einige allgemeinere Regeln über diese Zusammenhänge ableiten zu können.

Von besonderer Wichtigkeit für die Zwecke der *praktischen* Harmonischen Analyse ist es, den Fall zu untersuchen, daß die Beobachtungsreihe provisorisch durch einen Stufenzug oder einen Polygonzug interpoliert wurde. Beide Interpolationsarten werden nämlich sehr häufig vorgenommen, wenn die zur Darstellung der FOURIER-Koeffizienten benutzte Methode das Vorhandensein eines stetigen oder stückweise stetigen Kurvenzuges voraussetzt, wie dies z. B. bei der Verwendung der mechanischen *Harmonischen Analysatoren* (s. II, 2) der Fall ist. Wir haben also hier das Ergebnis der trigonometrischen Interpolation nicht mit der FOURIER-Entwicklung der „wahren“ Beobachtungsfunktion, sondern mit der Entwicklung der provisorisch interpolierten Funktion zu vergleichen, wobei nach wie vor die Frage offen steht, welche von beiden Darstellungen dem wahren Funktionsverlauf am meisten gerecht wird. Ich hebe diese an sich triviale Feststellung besonders hervor, da man in der Literatur mitunter einer verkehrten Interpretation dieses Sachverhaltes begegnet.

Es sei eine empirische Funktion im Bereich $[0, p]$ durch die FOURIER-Reihe

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (\alpha_{\mu} \cos \mu \alpha t + \beta_{\mu} \sin \mu \alpha t) \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{p} \right)$$

dargestellt; aus ihr sei an den gleichabständigen Stellen

$$t = 1, 2, 3, \dots, p$$

eine „Beobachtungsreihe“

$$y_v = f(v) = \alpha_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (\alpha_{\mu} \cos \mu \alpha v + \beta_{\mu} \sin \mu \alpha v) \quad (v = 1, 2, \dots, p)$$

entnommen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf dabei

$$y_0 = y_p$$

angenommen, d. h. die reine Periodizität der Beobachtungsfunktion im Grundintervall $[0, p]$ vorausgesetzt werden. Die provisorische Interpolation der Ordinatenauswahl durch einen *Treppenzug* geschieht dann gestaltet, daß für ein Teilintervall

$$v - \frac{1}{2} < t < v + \frac{1}{2}$$

der provisorische Funktionswert

$$f^*(t) = y_v$$

eingesetzt wird. Setzen wir der Einfachheit halber p als ungerade voraus ($p = 2r + 1$) so lauten die Koeffizienten der trigonometrischen Interpolation

$$a_0 = \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^p y_\nu$$

$$a_\mu = \frac{2}{p} \sum_{\nu=1}^p y_\nu \cos \mu \alpha \nu \quad (\mu = 1, 2, \dots, r)$$

$$b_\mu = \frac{2}{p} \sum_{\nu=1}^p y_\nu \sin \mu \alpha \nu.$$

Die FOURIER-Koeffizienten der Treppenkurve sind hingegen:

$$\alpha_0^* = \frac{1}{p} \int_{\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}} f^*(t) dt = \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^p y_\nu \cdot \int_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^p y_\nu = a_0$$

$$\alpha_\mu^* = \frac{2}{p} \int_{\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}} f^*(t) \cos \mu \alpha t dt = \frac{2}{p} \sum_{\nu=1}^p y_\nu \int_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}} \cos \mu \alpha t dt$$

$$= \frac{2}{p} \cdot \frac{\sin \frac{\mu \alpha}{2}}{\frac{\mu \alpha}{2}} \cdot \sum_{\nu=1}^p y_\nu \cos \mu \alpha \nu = \frac{\sin \frac{\mu \pi}{p}}{\frac{\mu \pi}{p}} \cdot a_\mu$$

$$\beta_\mu^* = \frac{2}{p} \int_{\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}} f^*(t) \sin \mu \alpha t dt = \frac{2}{p} \sum_{\nu=1}^p y_\nu \int_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}} \sin \mu \alpha t dt$$

$$= \frac{2}{p} \cdot \frac{\sin \frac{\mu \alpha}{2}}{\frac{\mu \alpha}{2}} \cdot \sum_{\nu=1}^p y_\nu \sin \mu \alpha \nu = \frac{\sin \frac{\mu \pi}{p}}{\frac{\mu \pi}{p}} \cdot b_\mu.$$

Ist jedoch p gerade ($p = 2r$), so ist wegen $a_r = \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^p y_\nu \cos \mu \alpha r$

$$\alpha_r^* = 2 \frac{\sin \frac{r \pi}{p}}{\frac{r \pi}{p}} a_r = \frac{4}{\pi} \cdot a_r, \text{ w\u00e4hrend } \beta_r^* = b_r = 0.$$

Mit Hilfe der Reduktionsfaktoren

$$q_\mu = \frac{\frac{\mu \pi}{p}}{\sin \frac{\mu \pi}{p}} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, r)$$

kann man also jederzeit die harmonischen Konstituenten der Beobachtungsreihe aus den FOURIER-Koeffizienten der Treppenkurve ableiten, was f\u00fcr die Anwendung der Harmonischen Analysatoren (s. II, 2) von gro\u00dfer Bedeutung ist.

Die Interpolation der Beobachtungsreihe durch einen *Polygonzug* ergibt für jedes der Intervalle

$$\nu - 1 < t < \nu$$

den provisorischen Funktionsverlauf

$$\bar{f}(t) = y_\nu (t - \nu + 1) - y_{\nu-1} (t - \nu).$$

Die Berechnung der FOURIER-Koeffizienten ergibt:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0 &= \frac{1}{p} \int_0^p \bar{f}(t) dt = \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^p \left\{ y_\nu \int_{\nu-1}^\nu (t - \nu + 1) dt - y_{\nu-1} \int_{\nu-1}^\nu (t - \nu) dt \right\} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^p \left\{ y_\nu \int_0^1 \tau d\tau - y_{\nu-1} \int_{-1}^0 \tau d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^p \frac{y_\nu + y_{\nu-1}}{2}. \end{aligned}$$

Wegen der vorausgesetzten reinen Periodizität ist $\sum_{\nu=1}^p y_\nu = \sum_{\nu=1}^p y_{\nu-1}$, daher

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^p y_\nu = a_0.$$

Für $\mu \cong 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_\mu &= \frac{2}{p} \int_0^p \bar{f}(t) \cos \mu \alpha t dt = \\ &= \frac{2}{p} \sum_{\nu=1}^p \left\{ y_\nu \int_{\nu-1}^\nu (t - \nu + 1) \cos \mu \alpha t dt - y_{\nu-1} \int_{\nu-1}^\nu (t - \nu) \cos \mu \alpha t dt \right\} \\ &= \frac{2}{p} \sum_{\nu=1}^p \left\{ y_\nu \int_0^1 \tau \cos \mu \alpha (\tau + \nu - 1) d\tau - y_{\nu-1} \int_{-1}^0 \tau \cos \mu \alpha (\tau + \nu) d\tau \right\} \\ &= \frac{2}{p} \sum_{\nu=1}^p \left\{ y_\nu \cos(\nu - 1) \mu \alpha \cdot \int_0^1 \tau \cos \mu \alpha \tau d\tau - y_\nu \sin(\nu - 1) \mu \alpha \cdot \int_0^1 \tau \sin \mu \alpha \tau d\tau \right. \\ &\quad \left. - y_{\nu-1} \cos \nu \mu \alpha \cdot \int_{-1}^0 \tau \cos \mu \alpha \tau d\tau + y_{\nu-1} \sin \nu \mu \alpha \cdot \int_{-1}^0 \tau \sin \mu \alpha \tau d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Da $\tau \cos \mu \alpha \tau$ eine ungerade, $\tau \sin \mu \alpha \tau$ eine gerade Funktion ist, wird

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau \cos \mu \alpha \tau d\tau &= - \int_{-1}^0 \tau \cos \mu \alpha \tau d\tau \\ \int_0^1 \tau \sin \mu \alpha \tau d\tau &= \int_{-1}^0 \tau \sin \mu \alpha \tau d\tau, \end{aligned}$$

mithin:

$$\bar{\alpha}_\mu = \frac{2}{p} \sum_{v=1}^p \left\{ (y_v \cos(v-1)\mu\alpha + y_{v-1} \cos v\mu\alpha) \int_0^1 \tau \cos \mu \alpha \tau d\tau \right. \\ \left. - (y_v \sin(v-1)\mu\alpha - y_{v-1} \sin v\mu\alpha) \int_0^1 \tau \sin \mu \alpha \tau d\tau \right\}.$$

Ferner ist wegen der reinen Periodizität der y_v und der harmonischen Funktionen

$$\sum_{v=1}^p y_{v-1} \cos v\mu\alpha = \sum_{v=1}^p y_v \cos(v+1)\mu\alpha; \quad \sum_{v=1}^p y_{v-1} \sin v\mu\alpha = \sum_{v=1}^p y_v \sin(v+1)\mu\alpha.$$

Daher ergibt sich schließlich

$$\bar{\alpha}_\mu = \frac{4}{p} \sum_{v=1}^p \left\{ y_v \cos v\mu\alpha \cos \mu\alpha \cdot \int_0^1 \tau \cos \mu \alpha \tau d\tau + y_v \cos v\mu\alpha \sin \mu\alpha \cdot \int_0^1 \tau \sin \mu \alpha \tau d\tau \right\} \\ = \frac{4}{p} \sum_{v=1}^p y_v \cos v\mu\alpha \cdot \int_0^1 \tau \cos \mu \alpha (\tau-1) d\tau \\ = \frac{2}{p} \cdot \sum_{v=1}^p y_v \cos v\mu\alpha \cdot \frac{1 - \cos \mu \alpha}{\frac{1}{2} \mu^2 \alpha^2} = a_\mu \cdot \left(\frac{\sin \frac{\mu \pi}{p}}{\frac{\mu \pi}{p}} \right)^2.$$

Ebenso berechnet man

$$\bar{\beta}_\mu = b_\mu \cdot \left(\frac{\sin \frac{\mu \pi}{p}}{\frac{\mu \pi}{p}} \right)^2.$$

Benutzt man also bei der Ermittlung der harmonischen Konstituenten einer äquidistanten Beobachtungsreihe einen Polygonzug, so sind die erhaltenen FOURIER-Koeffizienten mit dem Reduktionsfaktor

$$q_\mu^2 = \left(\frac{\frac{\mu \pi}{p}}{\sin \frac{\mu \pi}{p}} \right)^2$$

zu multiplizieren.

In beiden betrachteten Fällen sieht man, daß die aus der provisorisch interpolierten Reihe erhaltenen Konstanten um so ungenauer sind, je kleiner die Wellenlänge ist (ungenauer, insofern man die durch Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate erhaltenen wahrscheinlichsten Werte als die genauesten ansehen will). Die Faktoren $\frac{1}{q_\mu}$ bzw. $\frac{1}{q_\mu^2}$, die für $\mu = 0$ den Wert 1 besitzen, betragen für $\mu = \frac{p}{2}$, also

für die kleinste bei der trigonometrischen Interpolation vorkommende Wellenlänge

$$\frac{2}{\pi} = 0,6366 \quad \text{bzw.} \quad \frac{4}{\pi^2} = 0,4053.$$

Die abgeleiteten Formeln für die Konstanten α_μ^* , β_μ^* bzw. $\bar{\alpha}_\mu$, $\bar{\beta}_\mu$ haben übrigens auch für beliebige Frequenzen μ Gültigkeit. So gilt im Falle der Treppenkurve ganz allgemein

$$\alpha_\mu^* = \frac{1}{q_\mu} \cdot \frac{2}{p} \cdot \sum_{v=1}^p y_v \cos \mu \alpha v$$

$$\beta_\mu^* = \frac{1}{q_\mu} \cdot \frac{2}{p} \cdot \sum_{v=1}^p y_v \sin \mu \alpha v,$$

und man sieht leicht, daß die vorkommenden Summenausdrücke sich auch für $\mu > \frac{p}{2}$ auf die Konstanten a , b zurückführen lassen. Ist

$$\begin{aligned} \phi &= 2r \quad \text{oder} \quad \phi = 2r + 1 \quad \text{und} \\ \mu &= k\phi \pm s; \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ & \quad s = 0, 1, 2, \dots, r \quad \alpha = \frac{2\pi}{\phi}, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\sum_{v=1}^p y_v \cos \mu \alpha v = \sum_{v=1}^p y_v \cos (k\phi \pm s) \frac{2\pi v}{\phi} = \sum_{v=1}^p y_v \cos s \alpha v$$

$$\sum_{v=1}^p y_v \sin \mu \alpha v = \sum_{v=1}^p y_v \sin (k\phi \pm s) \frac{2\pi v}{\phi} = \pm \sum_{v=1}^p y_v \sin s \alpha v.$$

Daraus folgt, daß *sämtliche* FOURIER-Koeffizienten einer aus p äquidistanten Beobachtungen entstandenen Treppenkurve sich in einfacher Weise aus den endlich vielen Konstanten a_s , b_s gewinnen lassen. Dasselbe gilt natürlich auch für den Polygonzug und allgemein für jede durch bestimmte geometrische Vorschriften aus der Beobachtungsreihe hervorgehende provisorische Interpolation, sowie auch für jede durch solche Vorschriften festgelegte Glättung, z. B. für Glättung durch arithmetische Mittel benachbarter Beobachtungswerte und nachfolgende Verbindung der Glättungspunkte durch einen Stufenzug.

Die letzten Betrachtungen lassen sich schließlich auch durchführen, wenn es sich darum handelt, das Ergebnis der Harmonischen Analyse der Beobachtungsreihe mit dem *wahren* Funktionsverlauf zu vergleichen. Unabhängig davon, ob dieser Verlauf — etwa durch eine Registrierung, der die äquidistanten Beobachtungswerte entnommen waren — bekannt ist oder nicht, läßt er sich formal durch die FOURIERSche Reihe

$$\begin{aligned} f(t) &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos \alpha t + \alpha_2 \cos 2\alpha t + \dots + \alpha_n \cos n\alpha t + \dots \\ & \quad + \beta_1 \sin \alpha t + \beta_2 \sin 2\alpha t + \dots + \beta_n \sin n\alpha t + \dots \end{aligned}$$

wiedergeben. Die p äquidistanten Werte der Beobachtungsreihe haben dann die Gestalt

$$y_\nu = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \nu \alpha + \alpha_2 \cos 2 \nu \alpha + \dots + \alpha_n \cos n \nu \alpha + \dots \\ + \beta_1 \sin \nu \alpha + \beta_2 \sin 2 \nu \alpha + \dots + \beta_n \sin n \nu \alpha + \dots$$

Da die cos- und sin-Faktoren dieser Reihe periodisch sind, also nach Ablauf einer gewissen Folge immer wieder die gleichen Werte annehmen, lassen sie sich weitgehend zusammenfassen, so daß wir schließlich die endliche Reihe

$$y_\nu = \alpha_0 + \alpha_p + \alpha_{2p} + \dots \\ + \cos \nu \alpha \cdot (\alpha_1 + \alpha_{p-1} + \alpha_{p+1} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \dots) \\ + \sin \nu \alpha \cdot (\beta_1 - \beta_{p-1} + \beta_{p+1} - \beta_{2p-1} + \beta_{2p+1} - \dots) \\ + \cos 2 \nu \alpha \cdot (\alpha_2 + \alpha_{p-2} + \alpha_{p+2} + \alpha_{2p-2} + \alpha_{2p+2} + \dots) \\ + \sin 2 \nu \alpha \cdot (\beta_2 - \beta_{p-2} + \beta_{p+2} - \beta_{2p-2} + \beta_{2p+2} - \dots) \\ + \dots \dots \dots$$

erhalten, deren Koeffizienten unendliche Teilsummen der Folge der FOURIER-Koeffizienten darstellen. Diese endliche Reihe ist mit dem Ergebnis der trigonometrischen Interpolation der Beobachtungsreihe offenbar identisch, die Konstanten der Annäherungsglieder haben also die Form

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 + \alpha_p + \alpha_{2p} + \dots \\ a_\mu &= \alpha_\mu + \alpha_{p-\mu} + \alpha_{p+\mu} + \alpha_{2p-\mu} + \alpha_{2p+\mu} + \dots, \\ b_\mu &= \beta_\mu - \beta_{p-\mu} + \beta_{p+\mu} - \beta_{2p-\mu} + \beta_{2p+\mu} - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (I6)$$

wobei noch zu bemerken ist, daß im Falle $p = 2r$

$$a_r = \alpha_r + \alpha_{3r} + \alpha_{5r} + \dots \\ b_r = 0$$

für die Konstanten der höchsten Oberschwingung herauskommen. Aus dieser Darstellung ist alles abzulesen, was über den Zusammenhang zwischen der empirischen Funktion $f(t)$ und der trigonometrischen Interpolation der Reihe y_ν zu sagen ist. Damit die letztere eine hinreichende Annäherung an den wahren Funktionsverlauf bildet, ist notwendig, daß die ersten Glieder auf den rechten Seiten von (I6) so stark überwiegen, daß alle übrigen Glieder in ihrer Gesamtheit klein sind, und zwar genügt es nicht, daß ihre Summe ganz oder nahezu verschwindet, sondern es ist dies sogar von der Summe der absoluten Beträge oder von der Summe der Quadrate zu fordern. Ist nämlich nur die einfache Summe der Restglieder in (I6) klein, so stellen zwar die a_μ, b_μ die entsprechenden FOURIER-Koeffizienten α_μ, β_μ mit großer Annäherung dar, es sind aber außerdem in der wahren Kurve wesentliche kurzperiodische Schwankungen vorhanden, die durch die getroffene Ordinatenauswahl y_ν nicht erfaßt worden sind, wir haben also den Fall vor uns, der nach den ein-

leitenden Bemerkungen dieses Abschnittes bei hinreichender Ordinaten-
dichte ausgeschlossen sein sollte. Ein besonders krasses Beispiel für
diesen „verbotenen“ Fall würde dann vorliegen, wenn die Beobachtungs-
funktion aus einer einzelnen harmonischen Schwingung besteht, deren
Frequenz $> r$ ist, etwa $\mu = k p \pm s \left(s < \frac{p}{2} \right)$. Alsdann werden alle Kon-
stanten a, b gleich Null, bis auf

$$a_s = \alpha_k p \pm s; \quad b_s = \beta_k p \pm s,$$

und die Beobachtungsreihe wird durch die trigonometrische Inter-
polation

$$y_v = a_s \cos s v \alpha + b_s \sin s v \alpha$$

dargestellt, während die wahre Funktion die Gestalt

$$f(t) = a_s \cos \mu \alpha t + b_s \sin \mu \alpha t$$

hat. Mit anderen Worten: die Beobachtungsreihe täuscht das Vorhanden-
sein einer langwelligen Periodizität vor, während es sich in Wirk-
lichkeit um eine kurzwellige handelt. Ein Beispiel dafür bietet der
in Abb. 1 dargestellte Sachverhalt. Hier ist die Schwingung

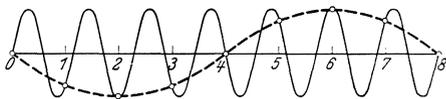


Abb. 1. Vortäuschung einer langperiodischen Schwingung durch äquidistante Ordinaten einer kurzperiodischen Sinuswelle.

$$f(t) = \sin 7 \alpha t$$

im Bereich $0 < t < p = \frac{2\pi}{\alpha}$ einmal als stetige Kurve, sodann durch eine
Auswahl von 9 gleichmäßig über den Bereich verteilten Ordinaten
(Abszissen 0, 1, ..., 8) dargestellt worden — die letztere täuscht eine
lange Welle

$$f_v = -\sin \alpha t_v$$

vor. In der Praxis läßt sich eine Entscheidung über die wahre Wellen-
länge in solchen Fällen nur dadurch herbeiführen, daß man die Ordinaten-
folge durch weitere Zwischenwerte verdichtet, oder daß man außer den
Beobachtungswerten selbst ihre zeitliche Änderung zu den Beobachtungs-
terminen mit heranzieht.

Sind die Beobachtungstermine *ungleichmäßig* über den Bereich der
unabhängigen Veränderlichen verteilt, so gelten die Orthogonalitäts-
bedingungen nicht oder wenigstens nicht alle. Die Näherungswerte für
die harmonischen Konstituenten sind also für jede Ordnung getrennt
und aus allen Normalgleichungen gemeinsam zu berechnen, was ins-
besondere für die höheren Ordnungen eine große Vermehrung der Rechen-
arbeit bedeutet. Da es jedoch in den meisten praktischen Fällen nicht
auf eine strenge Darstellung der Beobachtungswerte ankommt, so wird
man versuchen, diese Schwierigkeit unter Inkaufnahme einer erträg-
lichen Ungenauigkeit zu umgehen. Das wird immer dann möglich sein,

wenn wenigstens die *Dichte* der Beobachtungsreihe an jeder Stelle des Bereiches, wenn auch verschieden, so doch so groß ist, daß sie den im Abschnitt 9 aufgestellten Bedingungen entspricht. Dann ist es nämlich möglich, eine provisorische Interpolation der Reihe durch einen Treppen- oder Polygonzug vorzunehmen und der so erhaltenen Kurve gleichabständige Ordinaten in genügender Dichte zu entnehmen, die dann nach den Methoden des vorigen Abschnitts analysiert werden. Dies Verfahren bedarf keiner näheren Erläuterung — wir werden im dritten Kapitel bei der Erörterung des DARWINSchen Verfahrens Gebrauch davon machen. Kommt es jedoch auf eine strenge Interpolation an, oder ist die Dichte der Ordinaten in einzelnen Abschnitten des Gebietes für eine hinreichend sichere provisorische Interpolation nicht groß genug (wenn dies auch unter allen Umständen von der *mittleren* Dichte verlangt werden muß), so läßt sich die strenge Auflösung der Normalgleichungen schwerlich umgehen. Man wird aber meistens davon Gebrauch machen können, daß die außerhalb der Diagonale stehenden Koeffizienten der Normalgleichungen von geringerer Größenordnung sind als die der Hauptdiagonale. Es läßt sich dann aus der Gleichung

$$a_0 \sum \varphi_0(t_v) \varphi_\mu(t_v) + a_1 \sum \varphi_1(t_v) \varphi_\mu(t_v) + \cdots + a_\mu \sum \varphi_\mu^2(t_v) + \cdots \\ + a_n \sum \varphi_n(t_v) \varphi_\mu(t_v) = \sum \gamma_v \varphi_\mu(t_v)$$

der Koeffizient a_μ zunächst annäherungsweise durch den formal genau so wie früher gebildeten Ausdruck

$$a_\mu^{(0)} \sum \varphi_\mu^2(t_v) = \sum \gamma_v \varphi_\mu(t_v)$$

darstellen. Die so erhaltenen Näherungswerte $a_\mu^{(0)}$ sind dann in den meisten Fällen schon genau genug für die Bestimmung der vernachlässigten Glieder, in denen sie mit sehr kleinen Faktoren multipliziert erscheinen. Unter Umständen muß dies Verfahren mit den korrigierten Werten der harmonischen Konstituenten wiederholt werden, bis sich die Ergebnisse innerhalb der erforderlichen Genauigkeitsgrenzen nicht mehr ändern.

Zweites Kapitel.

Praxis der Harmonischen Analyse und Synthese.

1. Einige Beispiele für FOURIERSche Reihen.

Wir haben die FOURIERSche Reihenentwicklung in doppelter Bedeutung kennengelernt: einmal als trigonometrische Interpolation einer in einem endlichen Bereich $[0, \phi]$ gegebenen empirischen Funktion, sodann als exakte und extrapolationsfähige Darstellung einer in einem

Grundintervall von der Länge p rein periodischen Funktion, deren Geltungsbereich im übrigen beliebig groß, unter Umständen sogar unendlich ausgedehnt sein durfte. Durch lineare Transformation der unabhängigen Variablen ließ sich die Zahl p , ob sie nun die Länge des Definitionsbereichs oder die Grundperiode bedeutete, auf die Normalgröße 2π zurückführen. Im folgenden sollen nun einige Beispiele von FOURIER-Reihen besonders einfach gebauter Funktionen berechnet werden, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß reine Periodizität im Intervall $[0, 2\pi]$ vorliegt. Obwohl gerade diese Beispiele in fast allen Lehrbüchern, die über Harmonische Analyse berichten, zu finden sind, ist es nicht überflüssig, sie auch hier aufzunehmen, da einige der sich ergebenden Formeln in den späteren Betrachtungen verwendet werden.

a) **Gitterfunktion.** Im Grundintervall $[0, 2\pi]$ sei eine Funktion $G(t)$ durch die Festsetzung

$$\begin{aligned} G(0) &= G(\pi) = G(2\pi) = 0 \\ G(t) &= +1 \quad (0 < t < \pi) \\ G(t) &= -1 \quad (\pi < t < 2\pi) \end{aligned}$$

definiert. Die FOURIER-Koeffizienten sind dann:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} dt - \int_{\pi}^{2\pi} dt \right\} = 0 \\ a_{\mu} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(t) \cos \mu t dt = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \cos \mu t dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \mu t dt \right\} = 0 \\ b_{\mu} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(t) \sin \mu t dt = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \sin \mu t dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin \mu t dt \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \mu t dt = \frac{4}{\mu\pi} \cdot \frac{1 - \cos \mu\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (\mu \text{ gerade}) \\ \frac{4}{\mu\pi} & (\mu \text{ ungerade}) \end{cases} \end{aligned}$$

Mithin ist:

$$G(t) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right\}. \quad (1)$$

Wird der Anfangspunkt des Grundintervalls um $\frac{\pi}{2}$ verschoben, so erhält man die Funktion $H(t)$, die folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{aligned} H\left(\frac{\pi}{2}\right) &= H\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \\ H(t) &= 1 \quad \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{3\pi}{2} < t \leq 2\pi\right) \\ H(t) &= -1 \quad \left(\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Offenbar ist $H(t) = G\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, also

$$H(t) = \frac{4}{\pi} \left\{ \cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t \mp \dots \right\}. \quad (2)$$

Bei beliebiger Anfangsphase, etwa für eine Verschiebung des Intervallanfangs um ψ (Abb. 2), ergibt sich

$$F(t) = G(t + \psi) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin(t + \psi) + \frac{1}{3} \sin 3(t + \psi) + \frac{1}{5} \sin 5(t + \psi) + \dots \right\}. \quad (3)$$

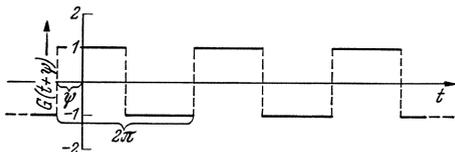


Abb. 2. Gitterfunktion bei beliebigem Intervallanfang (Anfangsphase ψ).

Setzt man die beiden alternierenden Funktionswerte gleich 1 und 0, so erhält man

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{2} (1 + F(t)) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ \sin(t + \psi) + \frac{1}{3} \sin 3(t + \psi) + \dots \right\}. \quad (3a)$$

b) **Sägezahnkurve.** Die Funktion

$$f(0) = f(2\pi) = 0$$

$$f(t) = -\frac{t}{\pi} + 1 \quad (0 < t < 2\pi)$$

liefert die FOURIER-Koeffizienten

$$a_0 = 0$$

$$a_\mu = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \cos \mu t \, dt = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} t \cos \mu t \, dt = 0$$

$$b_\mu = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin \mu t \, dt = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} t \sin \mu t \, dt = \frac{2}{\mu \pi},$$

mithin die Entwicklung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left\{ \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t + \dots \right\}.$$

c) **Zackenkurve.** Die Funktion

$$f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

$$f(t) = -3 + \frac{2t}{\pi} \quad (\pi \leq t \leq 2\pi)$$

ergibt

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_\mu &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\pi \left(1 - \frac{2t}{\pi}\right) \cos \mu t \, dt - \int_\pi^{2\pi} \left(3 - \frac{2t}{\pi}\right) \cos \mu t \, dt \right\} \\
 &= -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi t \cos \mu t \, dt = \frac{8}{\mu^2 \pi^2} \cdot \frac{1 - \cos \mu \pi}{2} \\
 &= \begin{cases} \frac{8}{\mu^2 \pi^2} & (\mu \text{ ungerade}) \\ 0 & (\mu \text{ gerade}), \end{cases} \quad b_\mu = 0
 \end{aligned}$$

mithin

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \left\{ \cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots \right\}.$$

d) Unsymmetrische Zackenkurve (Abb. 3). Es werde gesetzt ($a < 2\pi$)

$$f(t) = 1 - \frac{2t}{a} \quad (0 \leq t \leq a)$$

$$f(t) = -\frac{2\pi + a}{2\pi - a} + \frac{2t}{2\pi - a} \quad (a \leq t \leq 2\pi).$$

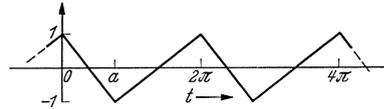


Abb. 3. Unsymmetrische Zackenkurve ($a = \frac{3}{4}\pi$).

Dann ist

$$a_0 = 0$$

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^a \left(1 - \frac{2t}{a}\right) \cos \mu t \, dt + \frac{1}{\pi} \int_a^{2\pi} \left(-\frac{2\pi + a}{2\pi - a} + \frac{2t}{2\pi - a}\right) \cos \mu t \, dt$$

$$b_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^a \left(1 - \frac{2t}{a}\right) \sin \mu t \, dt + \frac{1}{\pi} \int_a^{2\pi} \left(-\frac{2\pi + a}{2\pi - a} + \frac{2t}{2\pi - a}\right) \sin \mu t \, dt$$

oder, mit $b = 2\pi - a$, $t = t' + a$

$$\begin{aligned}
 a_\mu &= \frac{1}{\pi} \int_0^a \left(1 - \frac{2t}{a}\right) \cos \mu t \, dt - \frac{1}{\pi} \int_0^b \left(1 - \frac{2t'}{b}\right) \cos \mu (t' - b) \, dt' \\
 &= \frac{4}{\mu^2 a (2\pi - a)} \cdot (1 - \cos \mu a),
 \end{aligned}$$

ebenso: $b_\mu = -\frac{4}{\mu^2 a (2\pi - a)} \cdot \sin \mu a$, mithin:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{4}{a(2\pi - a)} \left\{ \left(1 - \cos a\right) \cos t + \frac{1 - \cos 2a}{2^2} \cos 2t + \frac{1 - \cos 3a}{3^2} \cos 3t + \dots \right. \\
 &\quad \left. - \sin a \sin t - \frac{\sin 2a}{2^2} \sin 2t - \frac{\sin 3a}{3^2} \sin 3t - \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Diese Formel enthält die Fälle b und c als Spezialfälle. Für c ist dies ohne weiteres abzulesen ($a = \pi$), für b ($a = 2\pi$) ist zu beachten, daß

$$\lim_{a \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos a \mu}{2\pi - a} = 0; \quad \lim_{a \rightarrow 2\pi} \frac{\sin a \mu}{2\pi - a} = -1. \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots)$$

e) Unharmonische Welle. Unter einer unharmonischen Welle wollen wir eine solche Sinusschwingung verstehen, deren Wellenlänge in der Länge des Grundintervalls, 2π , nicht ganzzahlig enthalten ist (Abb. 4). Es sei also

$$f(t) = c \cdot \sin(\alpha t + \beta),$$

wobei α beliebig, also nicht auf die FOURIER-Frequenzen $1, 2, 3, \dots$ beschränkt ist, sondern auch gebrochene Werte annehmen kann. Wird die Funktion in dieser geschlossenen Form über das Grundintervall $[0, 2\pi]$

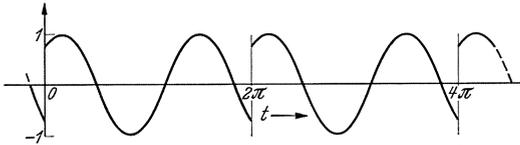


Abb. 4. Unharmonische Welle ($\alpha = \frac{3}{2}$; $\beta = 45^\circ$).

hinaus extrapoliert, so entsteht eine einfache Schwingung, die mit 2π nicht periodisch zu sein braucht. Setzt man dagegen fest, daß die oben definierte Funktion rein

periodisch mit der Grundperiode 2π sein soll, so erhält man einen gebrochenen Wellenzug, der an den Stellen $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ jedesmal den gleichen Phasensprung erleidet. Die Analyse solcher Wellenzüge wird in der später zu behandelnden Periodogrammtheorie eine große Rolle spielen.

Die Analyse ergibt:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{c}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha t + \beta) dt = c \cdot \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \sin(\pi \alpha + \beta) \\ a_\mu &= \frac{c}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha t + \beta) \cos \mu t dt \\ &= \frac{c}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \sin((\alpha + \mu)t + \beta) dt + \int_0^{2\pi} \sin((\alpha - \mu)t + \beta) dt \right\} \\ &= c \cdot \left\{ \frac{\sin(\alpha + \mu)\pi}{(\alpha + \mu)\pi} \sin((\alpha + \mu)\pi + \beta) + \frac{\sin(\alpha - \mu)\pi}{(\alpha - \mu)\pi} \sin((\alpha - \mu)\pi + \beta) \right\} \\ b_\mu &= \frac{c}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha t + \beta) \sin \mu t dt \\ &= \frac{c}{2\pi} \left\{ - \int_0^{2\pi} \cos((\alpha + \mu)t + \beta) dt + \int_0^{2\pi} \cos((\alpha - \mu)t + \beta) dt \right\} \\ &= c \left\{ - \frac{\sin(\alpha + \mu)\pi}{(\alpha + \mu)\pi} \cos((\alpha + \mu)\pi + \beta) + \frac{\sin(\alpha - \mu)\pi}{(\alpha - \mu)\pi} \cos((\alpha - \mu)\pi + \beta) \right\}. \end{aligned} \right\} (4)$$

Eine weniger symmetrische, aber einfachere Form der FOURIER-Koeffizienten wird erhalten, wenn man berücksichtigt, daß

$$\sin((\alpha + \mu)\pi + \beta) = \pm \sin(\alpha\pi + \beta), \text{ usw.}$$

Dann ergibt sich:

$$a_\mu = \frac{2c}{\pi} \cdot \alpha \cdot \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha^2 - \mu^2} \cdot \sin(\pi \alpha + \beta)$$

$$b_\mu = \frac{2c}{\pi} \cdot \mu \cdot \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha^2 - \mu^2} \cdot \cos(\pi \alpha + \beta).$$

2. Harmonische Analysatoren.

Bei der Harmonischen Analyse *empirischer* Funktionen, die durch eine Registrierkurve gegeben sind, sind wir darauf angewiesen, den

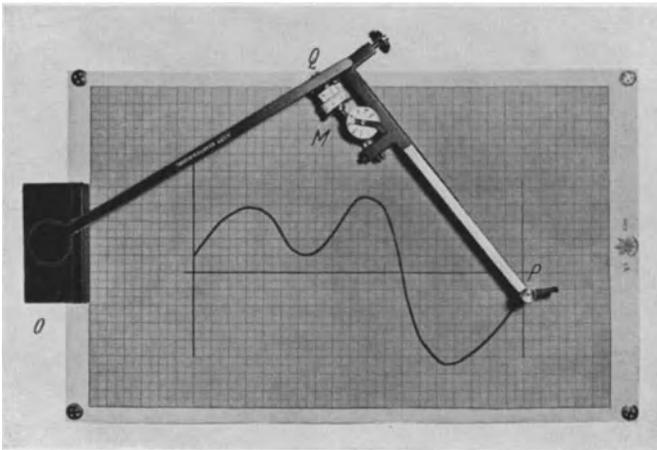


Abb. 5. Polarplanimeter.

geometrischen Verlauf der Kurve selbst zur Bestimmung der Integrale

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt; \quad a_\mu = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{2\pi}{p} \mu t dt; \quad b_\mu = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{2\pi}{p} \mu t dt$$

heranzuziehen, falls wir es nicht vorziehen, die FOURIER-Koeffizienten genähert aus einer äquidistanten Ordinatenauswahl durch Rechnung zu ermitteln. Für die Ausführung bestimmter Integrationen über kurvenmäßig gegebene Funktionen gibt es einen einfachen und bequemen Apparat, das *Polarplanimeter*¹. Dies sehr bekannte und weitverbreitete Instrument besteht im wesentlichen aus zwei Hebeln, einem Fahrstift und einer Präzisionsmeßrolle (Abb. 5). Der eine Hebel ist um einen festen Punkt *O* drehbar, der zweite um den freien Endpunkt *Q* des ersten Hebels. Am freien Endpunkt *P* des zweiten Hebels befindet sich der Fahrstift — in der Nähe des Punktes *Q* ist, fest mit dem Hebel *PQ* verbunden, die Meßrolle *M* angebracht, die um eine zu *PQ* parallele

¹ Die Theorie des Polarplanimeters, die hier nicht entwickelt werden soll, ist unter anderem in F. KLEIN: „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“ (Bd. II, S. 11 ff.) ausführlich beschrieben.

Achse drehbar ist. Umfährt man nun mit dem Fahrstift eine geschlossene Kurve, so rollt dabei die Meßrolle auf der Unterlage ab. Die gesamte Drehung der Meßrolle während dieses Vorgangs ist dann dem von der Kurve umschlossenen Flächeninhalt proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist eine Apparatkonstante; von der zu umfahrenden Fläche wird nur vorausgesetzt, daß sie ganz im Bereich des Fahrstifts liegt und daß sie den festen Drehpunkt O nicht enthält. Es ist klar, daß man

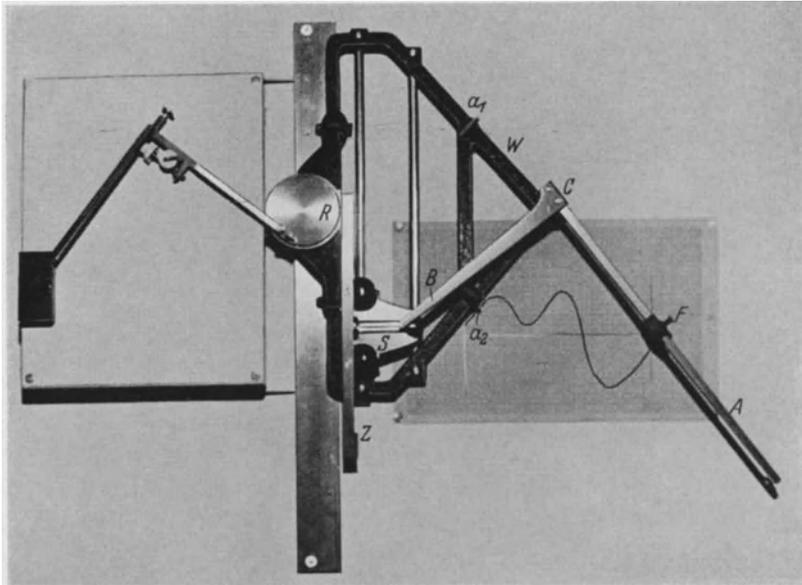


Abb. 6a. Harmonischer Analysator von MADER-OTT.

auf diese Weise jede vorgelegte Kurve in endlichen Bereichen integrieren kann: Der Fahrstift umfährt dann nacheinander Anfangsordinate, Kurve, Endordinate und die Abszissenachse rückwärts bis zum Anfangspunkt. Auf diese Weise läßt sich zunächst ohne weitere Hilfsmittel der FOURIER-Koeffizient nullter Ordnung, a_0 , bestimmen.

Die übrigen FOURIER-Koeffizienten lassen sich mit dem Planimeter direkt nicht messen, es gibt aber zahlreiche Instrumente, die die Multiplikation der Kurvenfunktion mit den harmonischen Faktoren automatisch besorgen und die zu leistende Arbeit im übrigen gleichfalls auf das Umfahren der Kurve mit einem Fahrstift zurückführen. Solche Apparate, die meist in Verbindung mit einem Polarplanimeter gebraucht werden, heißen „*Harmonische Analysatoren*“. Aus der großen Anzahl der vorhandenen Systeme, die im Grunde alle auf dem gleichen Prinzip beruhen, sei hier der Analysator von MADER-OTT herausgegriffen, der

seiner einfachen Konstruktion wegen zur Beschreibung dieses Prinzips sehr geeignet ist.

$y = f(x)$ sei die in einem (x, y) -Koordinatensystem gezeichnete Kurve. Das Grundintervall möge $[0, p]$ sein. Der in Abb. 6a abgebildete und in Abb. 6b schematisch gezeichnete Apparat ist nun folgendermaßen eingerichtet: Ein Wagen W läßt sich, durch eine Schiene geführt, parallel zur Y -Achse bewegen. Ein Winkelhebel ACB , dessen Arme senkrecht aufeinanderstehen, dreht sich um den mit dem Wagen fest verbundenen Punkt C . Der Wagen ist so aufgebaut, daß der Drehpunkt C auf der Mittelsenkrechten der p

Längeneinheiten messenden Grundstrecke OQ der Abszissenachse liegt. Auf dem längeren Hebelarm AC läßt sich der Fahrstift F festklemmen, der kürzere Arm wird durch zwei Anschläge a_1 und a_2 in seiner Bewegungsfreiheit eingeschränkt, so daß auch der lange Hebelarm, dessen Normallage $CD \perp OQ$ ist, sich nach beiden Seiten höchstens um einen bestimmten Winkel (β) aus dieser Lage entfernen kann. Der Fahrstift wird nun so eingestellt, daß er sich bei der Anschlaglage a_1 auf der Y -Achse selbst bewegt, wenn der Wagen rollt. Da der größtmögliche Ausschlag des langen Hebelarms nach rechts ebenso groß ist wie nach links, so beherrscht der Fahrstift bei der anderen Anschlaglage (a_2) die Endordinate (Abszisse p).

Auf dem Wagen ist der Schlitten S , ebenfalls parallel zur Y -Achse, beweglich. Er wird durch den Endpunkt B des kurzen Hebelarms vermittels einer Kulissenführung bewegt und trägt die, wiederum zur Y -Achse parallele, Zahnstange Z , die in ein Zahnrad R eingreift, dessen Achse einen festen Punkt des Wagens bildet. Der Mittelpunkt des Zahnrades möge als Anfangspunkt eines mit dem Wagen beweglichen, parallel zum festen Koordinatensystem (x, y) orientierten zweiten Koordinatensystems (ξ, η) angesehen werden. Das Zahnrad trägt, in der Entfernung r von seinem Mittelpunkt, zwei Vertiefungen s und c , die so angebracht sind, daß in der linken Anschlaglage des Winkelhebels die Vertiefung s sich links vom Mittelpunkt des Zahnrades, c dagegen oberhalb desselben befindet. Die Größe des Zahnrades ist so bemessen, daß während der

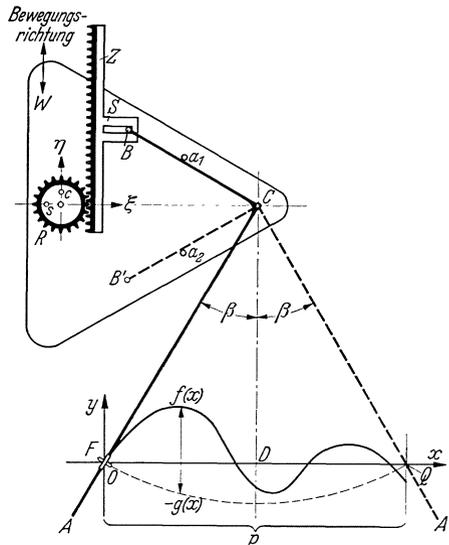


Abb. 6b. Harmonischer Analysator von MADER-OTT. (Schematische Darstellung.) BCA : Winkelhebel in linker Anschlaglage (a_1), $B'CA'$: Winkelhebel in rechter Anschlaglage (a_2).

Bewegung des Winkelhebels von der linken zur rechten Anschlaglage, also durch die größtmögliche Verschiebung der Zahnstange, das Zahnrad eine ganze Anzahl von Umdrehungen erfährt. Durch Auswechseln der Zahnräder ist es möglich, diese Umdrehungsanzahl μ zu variieren.

Da der Punkt C auf der ξ -Achse des beweglichen Koordinatensystems liegt, so ist aus der Abb. 6b unmittelbar einzusehen, daß die η -Koordinate des Punktes B proportional der Entfernung des Fahrstifts F von der Mittelsenkrechten CD sein muß. Wird also der Fahrstift aus der linken Anschlaglage auf irgendeinem Wege in die rechte übergeführt, z. B. längs der Kurve $f(x)$, so ist die Drehung des Zahnrades aus der Anfangslage ständig der Abszisse x proportional. Ist also der Fahrstift bei der Abszisse x angelangt, so haben gleichzeitig die beiden Vertiefungen c und s des Zahnrades im (ξ, η) -System die Koordinaten

$$\xi_c = r \sin \frac{2\pi}{p} \mu x; \quad \eta_c = r \cos \frac{2\pi}{p} \mu x \quad (c)$$

bzw.

$$\xi_s = -r \cos \frac{2\pi}{p} \mu x; \quad \eta_s = r \sin \frac{2\pi}{p} \mu x. \quad (s)$$

Beziehen wir nun die Punkte c und s auf das (x, y) -System, so ist die η -Ordinate noch um die jeweilige Entfernung CD zu vermehren. Bewegt man den Fahrstift längs dem Kreisbogen OQ , so bleibt CD ungeändert. Bezeichnet man also die stets negativen Ordinaten dieses Kreisbogens mit $-g(x)$, so ist, wenn der Fahrstift den Kurvenpunkt $y = f(x)$ berührt, bis auf eine additive Konstante,

$$CD = f(x) + g(x).$$

Mithin haben die Punkte c und s im System (x, y) bis auf eine additive Konstante die Koordinaten

$$\xi_c = r \sin \frac{2\pi}{p} \mu x; \quad \eta_c = r \cos \frac{2\pi}{p} \mu x + f(x) + g(x)$$

bzw.

$$\xi_s = -r \cos \frac{2\pi}{p} \mu x; \quad \eta_s = r \sin \frac{2\pi}{p} \mu x + f(x) + g(x).$$

Wird jetzt die ganze Kurve nach der obigen Vorschrift umfahren, so beschreiben auch die Punkte c und s geschlossene Kurven, deren Integrale

$$\begin{aligned} J_c &= \int \eta_c d\xi_c = \int_0^p \left(r \cos \frac{2\pi}{p} \mu x + f(x) + g(x) \right) r \cdot \frac{2\pi}{p} \mu \cos \frac{2\pi}{p} \mu x dx \\ &\quad - \int_0^p \left(r \cos \frac{2\pi}{p} \mu x + g(x) \right) r \cdot \frac{2\pi}{p} \mu \cos \frac{2\pi}{p} \mu x dx \\ &= r \cdot \frac{2\pi}{p} \mu \cdot \int_0^p f(x) \cos \frac{2\pi}{p} \mu x dx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 J_s &= \int \eta_s \, d\xi_s = \int_0^p \left(r \sin \frac{2\pi}{p} \mu x + f(x) + g(x) \right) r \cdot \frac{2\pi}{p} \mu \sin \frac{2\pi}{p} \mu x \, dx \\
 &\quad - \int_0^p \left(r \sin \frac{2\pi}{p} \mu x + g(x) \right) r \cdot \frac{2\pi}{p} \mu \sin \frac{2\pi}{p} \mu x \, dx \\
 &= r \cdot \frac{2\pi}{p} \mu \cdot \int_0^p f(x) \sin \frac{2\pi}{p} \mu x \, dx
 \end{aligned}$$

sind. Werden also bei den verschiedenen Zahnrädern, die zur Ermittlung der verschiedenen harmonischen Wellen dienen, die Vertiefungen c und s in einer zu μ umgekehrt proportionalen Entfernung vom Mittelpunkt angebracht, so ist für die verschiedenen Wellen

$$r \cdot \mu = \text{const.}$$

mithin, wenn k eine Apparatkonstante bedeutet,

$$J_c = k \cdot \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{2\pi}{p} \mu x \, dx; \quad J_s = k \cdot \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{2\pi}{p} \mu x \, dx.$$

Setzt man daher den Fahrstift eines Polarplanimeters in die Vertiefung c bzw. s , so liest man an der Planimetermeßrolle nach Umfahrung der Kurve die FOURIER-Koeffizienten μ -ter Ordnung direkt ab. Es ist auf diese Weise möglich, die Harmonische Analyse bis zur 25. Ordnung durchzuführen. (Eine einfachere Ausführung des Instruments liefert die FOURIER-Koeffizienten nur bis zur 9. Ordnung.) Für die höheren harmonischen Wellen ($\mu > 6$) sind aus technischen Gründen noch Zwischenzahnräder eingeführt.

Die Genauigkeit dieses Verfahrens ist natürlich beschränkt, aber den praktischen Bedürfnissen gut angepaßt. Im allgemeinen läßt sich darüber sagen, daß die Fehler der Analysenergebnisse von der gleichen Größenordnung sind, wie diejenigen, die durch die Ungenauigkeit der Kurvenziehung selbst zu erwarten sind oder durch die Unsicherheit des Nachführens der Kurve mit dem Fahrstift bedingt werden. Die Genauigkeit hängt daher nicht unwesentlich von dem Maßstab der Kurve ab, aber auch von der manuellen Geschicklichkeit des Bearbeiters. Um die Unsicherheit der Fahrstiftführung herabzumindern und gleichzeitig auch die Arbeitsgeschwindigkeit zu vergrößern, hat J. BARTELS (Lit. 25) einen Hilfsapparat konstruiert, der allerdings für den Sonderfall erdacht ist, daß die Beobachtungskurve durch äquidistante Ordinaten ersetzt wird und somit das Verfahren der provisorischen Interpolation durch einen Treppenzug gegeben ist. BARTELS hat zu diesem

Zwecke einen rechteckigen Rahmen gebaut (Abb. 7), in den vom unteren Rande her schmale rechteckige Zungen hineingeschoben werden. Diese Zungen sind durch Nuten miteinander verbunden und tragen auf ihrer Oberseite Maßstäbe, so daß sie den Beobachtungswerten entsprechend meßbar weit in der Ordinatenrichtung in das Innere des Rahmens hineingeschoben werden können. Der Fahrstift wird sodann längs der inneren, durch die Zungen noch freigelassenen Begrenzung des Rahmens herumgeführt — als Abszissenachse dient die obere innere Rahmenkante.

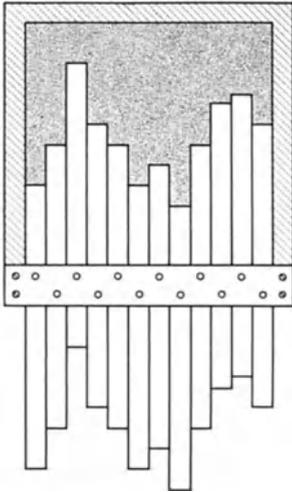


Abb. 7. Analysatorrahmen nach BARTELS (gez. für 12 Ordinaten).

Über andere Systeme von Harmonischen Analysatoren möge man in der mathematischen Literatur nachlesen. Ich erwähne hier die Apparate von CORADI (Lit. 68), HENRICI (Lit. 113), MICHELSON und STRATTON (Lit. 165), sowie den Apparat von WIECHERT und SOMMERFELD, den ich A. p. V., S. 49—50 ausführlich beschrieben habe (siehe auch Lit. 108). Alle diese Apparate arbeiten rein mechanisch und gehen direkt von der graphisch dargestellten Beobachtungskurve aus. Andere Verfahren, die auch elektrische und optische Hilfsmittel benutzen, sollen in einem besonderen Kapitel (VI) behandelt werden, da es zweckmäßig erscheint, sie erst nach der Darlegung der SCHUSTERSchen Theorie des Periodogramms (Kap. III) einzuführen.

3. Rechenschemata für Harmonische Analyse von Beobachtungsreihen.

Die Berechnung der FOURIER-Koeffizienten aus äquidistanten Beobachtungsreihen auf numerischem Wege ist die weitaus verbreitetste Methode und wird es auch wohl immer bleiben, da sie die geringsten Hilfsmittel erfordert. Um so notwendiger ist es, die Umständlichkeit des Rechenverfahrens durch Anlage geeigneter Schemata so weit zu vermindern, wie nur irgend möglich ist. Ein gutes Rechenschema ist besonders dann unerlässlich, wenn eine große Anzahl von Analysen gleichzeitig durchgeführt werden soll oder die zu bearbeitende Beobachtungsreihe sehr lang ist.

Das konstante Glied der FOURIER-Reihe wird durch das arithmetische Mittel der Beobachtungswerte dargestellt; die Berechnung bedarf keiner Erläuterung und Vereinfachung. Die übrigen Glieder enthalten als

wesentlichen Bestandteil die Summen

$$\frac{p}{2} \cdot a_{\mu} = \sum_{\nu=1}^p y_{\nu} \cos \frac{2\pi}{p} \mu \nu; \quad \frac{p}{2} \cdot b_{\mu} = \sum_{\nu=1}^p y_{\nu} \sin \frac{2\pi}{p} \mu \nu.$$

Häufig benutzt man auch, je nach der Lage der ausgewählten Ordinaten im Grundintervall, die Ausdrücke

$$\sum_{\nu=1}^p y_{\nu} \cos \frac{2\pi}{p} \mu \left(\nu - \frac{1}{2}\right)$$

bzw.

$$\sum_{\nu=1}^p y_{\nu} \cos \frac{2\pi}{p} \mu (\nu - 1) \quad \text{oder} \quad \sum_{\nu=0}^{p-1} y_{\nu} \cos \frac{2\pi}{p} \mu \nu.$$

Die letztere Schreibweise, die sich dadurch auszeichnet, daß in jeder Summe das Argument des ersten trigonometrischen Faktors 0° ist, soll in den folgenden Betrachtungen stets angewandt werden.

Die Erleichterungen, die man sich bei der Bildung dieser Summen verschaffen kann, beruhen in erster Linie darauf, daß man gewisse Gruppen von Summanden zusammenfassen kann. Wir untersuchen diese Möglichkeit an den Gliedern erster Ordnung, also an der Grundschwingung (Welle 1) selbst, da sich die bei der Bildung der übrigen Glieder nötigen Summationen stets auf diesen Fall zurückführen lassen, wie anschließend gezeigt werden wird. Es handelt sich also um die Summen

$$\frac{p}{2} a_1 = \sum_{\nu=0}^{p-1} y_{\nu} \cos \nu \alpha; \quad \frac{p}{2} b_1 = \sum_{\nu=0}^{p-1} y_{\nu} \sin \nu \alpha. \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{p}\right)$$

Die trigonometrischen Argumente bilden die gleichabständige Winkelreihe

$$0^{\circ}, \alpha, 2\alpha, \dots, (p-1)\alpha,$$

die das Intervall $[0, 2\pi]$ in p gleiche Abschnitte zerlegt. Wegen der Symmetrie¹ der trigonometrischen Funktionen \cos und \sin in den vier Quadranten, die bei der Zusammenfassung der Glieder die Hauptrolle spielt, ist es nötig, die Symmetrieeigenschaften dieser Winkelreihe in bezug auf die Punkte

$$0^{\circ}, 90^{\circ}, 180^{\circ}, 270^{\circ}$$

zu untersuchen. Es ergeben sich dabei drei verschiedene Möglichkeiten:

1. p ist eine ungerade Zahl. Dann sind 0° und 180° Symmetriepunkte der Folge. Der Punkt 180° kommt selbst in der Folge nicht vor.

2. p ist gerade, aber nicht durch 4 teilbar. Dann ist auch 180° ein Punkt der Folge; 90° und 270° sind Symmetriepunkte, aber nicht selbst in der Folge enthalten.

¹ Über Symmetrie siehe auch Abschnitt 7 dieses Kapitels.

3. p ist durch 4 teilbar. Dann sind auch 90° und 270° Punkte der Folge.

Die Zusammenfassung der Glieder geschieht mit Hilfe eines „Faltungsprozesses“, und zwar im ersten Fall durch eine einfache, in den beiden andern Fällen durch eine doppelte Faltung der gegebenen Wertereihe innerhalb jedes Grundintervalls. An den folgenden einfachen Beispielen läßt sich die Handhabung der Faltung klarer und verständlicher zeigen als durch eine formelmäßige Einkleidung:

1. $p = 9$. $\alpha = 40^\circ$. Einfache Faltung.

$\nu\alpha$	I	II	$C_\nu = I + II$	$S_\nu = I - II$
0°	y_0	—	y_0	—
40°	y_1	y_8	$y_1 + y_8$	$y_1 - y_8$
80°	y_2	y_7	$y_2 + y_7$	$y_2 - y_7$
120°	y_3	y_6	$y_3 + y_6$	$y_3 - y_6$
160°	y_4	y_5	$y_4 + y_5$	$y_4 - y_5$

(1) Die Beobachtungswerte werden nach nebenstehendem Schema zu Summen C_ν und Differenzen S_ν zusammengefaßt, und es ist dann

$$\frac{p}{2} a_1 = \sum C_\nu \cos \nu\alpha;$$

$$\frac{p}{2} b_1 = \sum S_\nu \sin \nu\alpha,$$

wobei die Summation sich über die beiden ersten Quadranten erstreckt.

2. $p = 10$. $\alpha = 36^\circ$. Doppelte Faltung.

$\nu\alpha$	I	II	III	IV
0°	y_0	—	y_5	—
36°	y_1	y_4	y_6	y_9
72°	y_2	y_3	y_7	y_8

3. $p = 12$. $\alpha = 30^\circ$.

$\nu\alpha$	I	II	III	IV
0°	y_0	—	y_6	—
30°	y_1	y_5	y_7	y_{11}
60°	y_2	y_4	y_8	y_{10}
90°	—	y_3	—	y_9

(2; 3) Die Winkel verlaufen symmetrisch in allen vier Quadranten, die Zusammenfassung der y -Werte erfolgt, indem man die nebeneinanderstehenden Werte mit den Vorzeichen $(+ - - +)$ bei der Bildung der \cos -Summe, mit $(+ + - -)$ bei der Bildung der \sin -Summe versieht und addiert. Das geschieht in der Praxis am besten, daß man zunächst die Differenzen $A_\nu = I - III$ und $B_\nu = II - IV$ bildet, sodann ist

$$C_\nu = A_\nu - B_\nu; \quad S_\nu = A_\nu + B_\nu,$$

und man erhält schließlich die Summen

$$\frac{p}{2} a_1 = \sum C_\nu \cos \nu\alpha; \quad \frac{p}{2} b_1 = \sum S_\nu \sin \nu\alpha,$$

die nur noch über den ersten Quadranten zu bilden sind.

Die Vorteile, die sich im Fall (3) — p durch 4 teilbar — gegenüber Fall (2) ergeben, sind doppelter Natur, wie ohne Schwierigkeit einzusehen ist: Einmal wird der Umstand ausgenutzt, daß die trigonometrischen Funktionen für 90° und 270° die Beträge 0 bzw. 1 annehmen; sodann nehmen \cos und \sin für die vorkommenden Winkel die gleichen

numerischen Beträge, wenn auch in umgekehrter Reihenfolge, an. So werden bei $p = 10$ fünf verschiedene Faktoren benutzt (den Faktor null nicht eingerechnet), bei $p = 12$ hingegen nur drei.

Schließlich sei noch ein vollständiges numerisches Beispiel gegeben: Es sei die Aufgabe gestellt, die Koeffizienten der Welle 1 für eine Folge von 24 Luftdruckbeobachtungen (Station Berlin, 1. bis 24. April 1936, 8 Uhr morgens) zu bestimmen. Diese Beobachtungsreihe lautet, in Abweichungen von 1000,0 mb und in zwei Zeilen angeordnet,

10,5 11,0 14,8 15,9 17,1 22,8 6,4 14,8 18,0 17,1 0,1 3,0
 4,9 3,5 2,9 -5,4 -13,1 -10,8 4,5 9,9 -1,8 0,6 4,5 15,4

Rechenschema ($p = 24, \alpha = 15^\circ$, Welle 1).

$\nu \alpha$	I	II	III	IV	A_ν	B_ν	$C_\nu \cdot \cos \nu \alpha$		$S_\nu \cdot \sin \nu \alpha$	
0°	10,5	→	4,9	—	5,6	—	5,6	1,000	—	—
15°	11,0	3,0	3,5	15,4	7,5	-12,4	19,9	0,966	-4,9	0,259
30°	14,8	0,1	2,9	4,5	11,9	-4,4	16,3	0,866	7,5	0,500
45°	15,9	17,1	-5,4	0,6	21,3	16,5	4,8	0,707	37,8	0,707
60°	17,1	18,0	-13,1	-1,8	30,2	19,8	10,4	0,500	50,0	0,866
75°	22,8	14,8	-10,8	9,9	33,6	4,9	28,7	0,259	38,5	0,966
90°	→	6,4	→	4,5	—	1,9	—	—	1,9	1,000

$$\frac{p}{2} a_1 = 54,97 \quad \frac{p}{2} b_1 = 111,60$$

$$a_1 = 4,581 \quad b_1 = 9,300$$

Die Produktsummen lassen sich mit Hilfe einer Rechenmaschine in einem Arbeitsgang erledigen. Steht eine Maschine nicht zur Verfügung, so ist der Gebrauch von Produkttafeln zu empfehlen, z. B. der CRELLEschen Multiplikationstafeln. Sehr erleichtert wird in allen praktisch vorkommenden Fällen die Produktbildung durch die von L. W. POLLAK (Lit. 193) geschaffenen „Rechentafeln zur Harmonischen Analyse“, in denen für nahezu alle bei Grundintervallängen von $p = 3$ bis zu $p = 40$ aufwärts vorkommenden cos- und sin-Faktoren die ersten 1000 Vielfachen enthalten sind. Bei Einzelanalysen ist allerdings der Gebrauch dieser Tafeln umständlich, da beim Übergang von einem Faktor zum nächsten immer wieder umgeblättert werden muß — POLLAK empfiehlt daher, wenn eine größere Anzahl von Analysen nach dem gleichen Schema zu machen ist, ein Gebrauchsexemplar der Tafel in einzelne Blätter zu zerlegen, die dann, dem Schema entsprechend, in die richtige Reihenfolge gelegt werden können. Außerdem ist die Stellenzahl dieser Tafeln für die meisten praktischen Aufgaben unnötig groß.

Die zur Bildung der höheren FOURIER-Glieder nötigen Summen lassen sich, wie schon oben erwähnt, stets so umformen, daß das für Welle 1 gültige Rechenschema verwendet werden kann. Zunächst ist

unmittelbar einzusehen, daß die für die Welle $k = 2, 3, 4, \dots$ gültige Folge der trigonometrischen Argumente

$$0^\circ, k\alpha, 2k\alpha, \dots, (p-1)k\alpha \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{p}\right)$$

keine anderen Winkel enthalten kann als die Winkelfolge der Welle 1. Die Winkelfolge k -ter Ordnung entsteht aus der ursprünglichen, indem man, von 0° ausgehend, immer $k-1$ Werte überspringt. Das Intervall $[0; 2\pi]$, in dem die Grundfolge ja periodisch ist, wird demnach k -mal durchlaufen. Ist k mit p inkommensurabel, d. h. haben k und p außer 1 keinen gemeinschaftlichen Teiler, so werden bei jedem neuen Umlauf immer andere Winkel getroffen, alle Winkel der Grundfolge sind demnach in der neuen Folge enthalten. Andernfalls kommen schon nach weniger als k Umläufen die gleichen Winkel wieder an die Reihe, so daß also gewisse Winkel mehrfach, andere wieder überhaupt nicht belegt werden. Ist allgemein z der größte gemeinschaftliche Teiler von k und p , also etwa $p = az, k = bz$, wobei a und b inkommensurabel sind, so findet nach jedem b -ten Turnus eine Wiederholung statt. Die Zahl der belegten Werte ist a , jeder dieser Werte kommt z -mal vor. Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß im Falle $z = 1$ (p und k inkommensurabel) das Schema für die Welle 1 unmittelbar benutzt werden kann, indem die Beobachtungswerte entsprechend umgeordnet werden. Ist $z > 1$, so werden nur a Felder des Schemas belegt, diese jedoch jeweils mit der Summe von z Beobachtungswerten. Es empfiehlt sich dann, diese Summen vorher zu bilden und die so entstandene Folge von a Summen in das für a Beobachtungswerte gültige Analysenschema einzutragen.

Am einfachsten ist die Summenbildung, wenn $b = 1, k = z$ ist, also die Winkelwerte sich mit jedem Turnus wiederholen. Alsdann lassen sich die Beobachtungen in k Reihen zu je a Werten anordnen:

$$\begin{array}{cccc} y_0, & y_1, & \dots, & y_{a-1} \\ y_a, & y_{a+1}, & \dots, & y_{2a-1} \quad (p = ka = za) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{(z-1)a}, & y_{(z-1)a+1}, & \dots, & y_{za-1} \\ \hline Y_0, & Y_1, & \dots, & Y_{a-1} \end{array}$$

Die Analyse der Summenreihe Y , nach Welle 1 im Schema $p = a$ ergibt dann die gesuchten Koeffizienten der Welle k .

Sind jedoch b und z beide > 1 , so ist die Summenreihe Y_0, Y_1, \dots, Y_{a-1} nach der Welle b im Schema $p = a$ zu analysieren, das jetzt voll ausgefüllt wird, da ja nach Voraussetzung a und b inkommensurabel sind. Als Beispiele für die verschiedenen Möglichkeiten mögen von der obigen Luftdruckreihe ($p = 24$) noch folgende höheren Wellen berechnet werden:

1. Welle 5 ($z = 1, a = 24, b = 5$). Wie immer, wird der Wert y_0 in das erste Feld des Schemas ($p = a = 24$) eingetragen, die folgenden zyklisch je 5 Felder weiter:

$\nu\alpha$	I	II	III	IV	A_ν	B_ν	$C_\nu \cdot \cos \nu\alpha$		$S_\nu \cdot \sin \nu\alpha$	
0°	10,5	→	4,9	—	5,6	—	5,6	1,000	—	—
15°	22,8	14,8	—10,8	9,9	33,6	4,9	28,7	0,966	38,5	0,259
30°	0,1	14,8	4,5	2,9	—4,4	11,9	—16,3	0,866	7,5	0,500
45°	—5,4	0,6	15,9	17,1	—21,3	—16,5	—4,8	0,707	—37,8	0,707
60°	—1,8	—13,1	18,0	17,1	—19,8	—30,2	10,4	0,500	—50,0	0,866
75°	11,0	3,0	3,5	15,4	7,5	—12,4	19,9	0,259	—4,9	0,966
90°	→	6,4	→	4,5	—	1,9	—	—	1,9	1,000

$$\frac{\dot{p}}{2} a_5 = 26,17 \quad \frac{\dot{p}}{2} b_5 = -59,14$$

$$a_5 = 2,181 \quad b_5 = -4,928$$

2. Welle 6 ($z = 6, a = 4, b = 1$). Die Anordnung in $z = 6$ Reihen zu je $a = 4$ Werten ergibt sich, wie nebenstehend:

Die Analyse der 4-gliedrigen Summenreihe nach Welle $b = 1$ ergibt wegen $\alpha = 90^\circ$ in diesem Falle sehr einfach

$$\frac{\dot{p}}{2} a_6 = Y_0 - Y_2 = 2,4;$$

$$a_6 = 0,200$$

$$\frac{\dot{p}}{2} b_6 = Y_1 - Y_3 = -9,4;$$

$$b_6 = -0,783.$$

10,5	11,0	14,8	15,9
17,1	22,8	6,4	14,8
18,0	17,1	0,1	3,0
4,9	3,5	2,9	—5,4
—13,1	—10,8	4,5	9,9
—1,8	0,6	4,5	15,4
35,6	44,2	33,2	53,6
(Y_0)	(Y_1)	(Y_2)	(Y_3)

3. Welle 9 ($z = 3, a = 8, b = 3$). Jetzt werden die Werte in $z = 3$ Reihen zu $a = 8$ Werten angeordnet:

10,5	11,0	14,8	15,9	17,1	22,8	6,4	14,8
18,0	17,1	0,1	3,0	4,9	3,5	2,9	—5,4
—13,1	—10,8	4,5	9,9	—1,8	0,6	4,5	15,4
15,4	17,3	19,4	28,8	20,2	26,9	13,8	24,8

Die Summenreihe ist im Schema für 8 Werte ($\alpha = 45^\circ$) nach Welle $b = 3$ zu analysieren:

	I	II	III	IV	A_ν	B_ν	$C_\nu \cdot \cos \nu\alpha$		$S_\nu \cdot \sin \nu\alpha$	
0°	15,4	→	20,2	—	—4,8	—	—4,8	1,000	—	—
45°	28,8	17,3	24,8	26,9	4,0	—9,6	13,6	0,707	—5,6	0,707
90°	→	13,8	→	19,4	—	—5,6	—	—	—5,6	1,000

$$\frac{\dot{p}}{2} a_9 = 4,82 \quad \frac{\dot{p}}{2} b_9 = -9,56$$

$$a_9 = 0,402 \quad b_9 = -0,797$$

4. Spezielle Rechenschemata.

Wenn man die im vorigen Abschnitt gezeigten Berechnungen der 1. und 5. Welle einer 24-gliedrigen Beobachtungsreihe aufmerksam miteinander vergleicht, wird man finden, daß die Größen C_ν und S_ν in

beiden Fällen bis auf Reihenfolge und Vorzeichen miteinander übereinstimmen. Ein solcher Zusammenhang ergibt sich allgemein für die C_v, S_v jeder mit p inkommensurablen Welle, im Falle $p = 24$ also auch noch für die 7. und 11. Welle. Der Leser möge versuchen, die allgemeine Regel, die dieser Übereinstimmung zugrunde liegt, herauszufinden. Für uns ergibt sich aus dieser Tatsache die weitere Erleichterung, daß die Größen C_v und S_v nur für die Welle 1 explizit bestimmt zu werden brauchen; für alle anderen zu p inkommensurablen Wellen ergeben sich dann die zugehörigen C_v, S_v durch bestimmte Vertauschungen von Vorzeichen und Reihenfolge. Da gezeigt worden ist, daß nach Bildung aller erforderlichen Summenreihen $Y_0, Y_1, Y_2 \dots, Y_{a-1}$, wozu natürlich auch die Beobachtungsreihe selbst ($a = p$) sinngemäß zu rechnen ist, lediglich zu a inkommensurable Wellen zu berechnen sind, so kann von

$$p = 11, \alpha = \frac{360^\circ}{11} = 32^\circ,7272\dots$$

v	$v\alpha$	I	II	C_v	S_v
0	0°	y_0	—	y_0	—
1	α	y_1	y_{10}	$y_1 + y_{10}$	$y_1 - y_{10}$
2	2α	y_2	y_9	$y_2 + y_9$	$y_2 - y_9$
3	3α	y_3	y_8	$y_3 + y_8$	$y_3 - y_8$
4	4α	y_4	y_7	$y_4 + y_7$	$y_4 - y_7$
5	5α	y_5	y_6	$y_5 + y_6$	$y_5 - y_6$

dieser Erleichterung durchweg Gebrauch gemacht werden. Ist p eine Primzahl, so gilt dies sogar für alle Wellen — weitere

Vereinfachungen sind dann nicht mehr möglich. So ergibt z. B. die Analyse einer 11-gliedrigen Beobachtungsreihe nebenstehendes Schema.

Befolgt man die Vorschriften des vorigen Abschnittes, so findet man:

$$\begin{aligned} \text{II } a_0 &= C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 \\ \frac{\text{II}}{2} a_1 &= C_0 + C_1 \cos \alpha + C_2 \cos 2\alpha + C_3 \cos 3\alpha + C_4 \cos 4\alpha + C_5 \cos 5\alpha \\ \frac{\text{II}}{2} a_2 &= C_0 + C_1 \cos 2\alpha + C_2 \cos 4\alpha + C_3 \cos 5\alpha + C_4 \cos 3\alpha + C_5 \cos \alpha \\ \frac{\text{II}}{2} a_3 &= C_0 + C_1 \cos 3\alpha + C_2 \cos 5\alpha + C_3 \cos 2\alpha + C_4 \cos \alpha + C_5 \cos 4\alpha \\ \frac{\text{II}}{2} a_4 &= C_0 + C_1 \cos 4\alpha + C_2 \cos 3\alpha + C_3 \cos \alpha + C_4 \cos 5\alpha + C_5 \cos 2\alpha \\ \frac{\text{II}}{2} a_5 &= C_0 + C_1 \cos 5\alpha + C_2 \cos \alpha + C_3 \cos 4\alpha + C_4 \cos 2\alpha + C_5 \cos 3\alpha \\ \frac{\text{II}}{2} b_1 &= S_1 \sin \alpha + S_2 \sin 2\alpha + S_3 \sin 3\alpha + S_4 \sin 4\alpha + S_5 \sin 5\alpha \\ \frac{\text{II}}{2} b_2 &= S_1 \sin 2\alpha + S_2 \sin 4\alpha - S_3 \sin 5\alpha - S_4 \sin 3\alpha - S_5 \sin \alpha \\ \frac{\text{II}}{2} b_3 &= S_1 \sin 3\alpha - S_2 \sin 5\alpha - S_3 \sin 2\alpha + S_4 \sin \alpha + S_5 \sin 4\alpha \\ \frac{\text{II}}{2} b_4 &= S_1 \sin 4\alpha - S_2 \sin 3\alpha + S_3 \sin \alpha + S_4 \sin 5\alpha - S_5 \sin 2\alpha \\ \frac{\text{II}}{2} b_5 &= S_1 \sin 5\alpha - S_2 \sin \alpha + S_3 \sin 4\alpha - S_4 \sin 2\alpha + S_5 \sin 3\alpha. \end{aligned}$$

Setzt man die numerischen Werte der trigonometrischen Funktionen ein, so erhält man für die Rechnung nachstehendes Normalschema, das die bequeme Ausführung der Produktsummen spaltenweise gestattet; soll eine größere Menge von Analysen dieser Art durchgeführt werden, so ist es praktisch, dies Schema zu vervielfältigen, wobei die beiden Spalten

Welle	1	2	3	4	5	Kontr.
C_0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	5
C_1	0,841	0,415	- 0,142	- 0,655	- 0,959	- 0,5
C_2	0,415	- 0,655	- 0,959	- 0,142	0,841	- 0,5
C_3	- 0,142	- 0,959	0,415	0,841	- 0,655	- 0,5
C_4	- 0,655	- 0,142	0,841	- 0,959	0,415	- 0,5
C_5	- 0,959	0,841	- 0,655	0,415	- 0,142	- 0,5

Welle	1	2	3	4	5	Kontr.
—	—	—	—	—	—	—
S_1	0,541	0,910	0,990	0,756	0,282	3,479
S_2	0,910	0,756	- 0,282	- 0,990	- 0,541	- 0,147
S_3	0,990	- 0,282	- 0,910	0,541	0,756	1,095
S_4	0,756	- 0,990	0,541	0,282	- 0,910	- 0,321
S_5	0,282	- 0,541	0,756	- 0,910	0,990	0,577

für die Größen C_v und S_v für die jeweiligen Eintragungen freizulassen sind. Um eine Rechnungskontrolle zu haben, ist dem Schema noch eine weitere Spalte hinzugefügt, die die Summe der in jeder Zeile stehenden cos- bzw. sin-Faktoren enthält. Multipliziert man die C_v und S_v auch mit der Kontrollspalte, so ergibt die Produktsumme die Summe der übrigen Produktsummen. Bemerkenswert ist dabei die einfache Gestalt der Kontrollgleichung für die cos-Summen:

$$5 C_0 - \frac{1}{2} (C_1 + C_2 + \dots + C_5) = \frac{11}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_5).$$

Ist p keine Primzahl, sondern beliebig, so läßt sich natürlich ein Schema der obigen Art ebenfalls aufstellen, da es lediglich auf dem immer anwendbaren Prinzip der Faltung beruht. Der Unterschied ist nur der, daß dann in den Faktorenspalten die Beträge der vorkommenden Faktoren nicht, wie oben, sämtlich verschieden sind, sondern zum Teil doppelt oder mehrfach vertreten sind, so daß also die Zahl der auszuführenden Multiplikationen sich weiter verringern und durch Additionen bzw. Subtraktionen ersetzen läßt. Die Zahl dieser Möglichkeiten ist für verschiedene Wellen verschieden. Die Ökonomie der Rechnung verlangt ihre völlige Ausnutzung, da Additionen einfacher ausführbar sind als Multiplikationen. Der Rechner wird also zugunsten der

Vereinfachung der Rechenoperationen auf die Einheitlichkeit des Schemas für alle Wellen verzichten.

Die Schemabildung wird daher nach folgenden allgemeinen Regeln vor sich gehen:

1. Bildung aller möglichen Summenreihen.
2. Falten der Summenreihen und Bildung der Faltungssummen C_ν und S_ν .
3. Analyse der Summenreihen nach den zu ihrer Gliederzahl a inkommensurablen Wellen.

Als Beispiel sei der Fall $p = 12$ gewählt. Hier gibt es 5 verschiedene Summenreihen zu $a = 12, 6, 4, 3$ und 2 Gliedern. Die 6 Wellen ergeben sich, wie folgt:

- Welle 1 und 5 aus der Originalreihe ($a = 12$).
- Welle 2 aus der Summenreihe $a = 6$, Welle 1.
- Welle 3 aus der Summenreihe $a = 4$, Welle 1.
- Welle 4 aus der Summenreihe $a = 3$, Welle 1.
- Welle 6 aus der Summenreihe $a = 2$, Welle 1.

Bei der Bildung der Summenreihen $Y_\nu^{(a)}$ ist noch zu beachten, daß man nur die 6- und 4-gliedrige Reihe aus den Originalwerten direkt zu bilden braucht:

$$\begin{array}{cccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \\ \hline Y_0^{(6)} & Y_1^{(6)} & Y_2^{(6)} & Y_3^{(6)} & Y_4^{(6)} & Y_5^{(6)} & & Y_8 & Y_9 & Y_{10} & Y_{11} \\ & & & & & & & \hline & & & & & & & Y_0^{(4)} & Y_1^{(4)} & Y_2^{(4)} & Y_3^{(4)} \end{array}$$

während man die 3- und 2-gliedrige Reihe bequemer durch nochmalige Zerlegung der 6- bzw. 4-gliedrigen erhält:

$$\begin{array}{ccc} Y_0^{(6)} & Y_1^{(6)} & Y_2^{(6)} & Y_0^{(4)} & Y_1^{(4)} \\ Y_3^{(6)} & Y_4^{(6)} & Y_5^{(6)} & Y_2^{(4)} & Y_3^{(4)} \\ \hline Y_0^{(3)} & Y_1^{(3)} & Y_2^{(3)} & Y_0^{(2)} & Y_1^{(2)} \end{array}$$

Bei der Bildung der Faltungssummen $C_\nu^{(\mu)}$ und $S_\nu^{(\mu)}$ beachte man, daß diese sich aus Differenzen zwischen den Gliedern der Summenreihen zusammensetzen. Man erhält zunächst folgende Zusammenstellung, aus der die Bildung der Produktsummen $\sum C_\nu^{(\mu)} \cos \nu \alpha$, $\sum S_\nu^{(\mu)} \sin \nu \alpha$ unmittelbar ersichtlich ist:

		Welle 1		Welle 5	
ν	$\nu \alpha$	$C_\nu^{(1)}$	$S_\nu^{(1)}$	$C_\nu^{(5)}$	$S_\nu^{(5)}$
0	0°	$y_0 - y_6$	—	$C_0^{(1)}$	—
1	30°	$(y_1 - y_7) - (y_5 - y_{11})$	$(y_1 - y_7) + (y_5 - y_{11})$	$- C_1^{(1)}$	$S_1^{(1)}$
2	60°	$(y_2 - y_8) - (y_4 - y_{10})$	$(y_2 - y_8) + (y_4 - y_{10})$	$C_2^{(1)}$	$- S_2^{(1)}$
3	90°	—	$y_3 - y_9$	—	$S_3^{(1)}$

Welle 2

ν	$\nu\alpha$	$C_\nu^{(2)}$	$S_\nu^{(2)}$
0	0°	$Y_0^{(6)} - Y_3^{(6)}$	—
1	60°	$(Y_1^{(6)} - Y_4^{(6)}) - (Y_2^{(6)} - Y_5^{(6)})$	$(Y_1^{(6)} - Y_4^{(6)}) + (Y_2^{(6)} - Y_5^{(6)})$

Welle 3

Welle 4

ν	$\nu\alpha$	$C_\nu^{(3)}$	$S_\nu^{(3)}$	ν	$\nu\alpha$	$C_\nu^{(4)}$	$S_\nu^{(4)}$
0	0°	$Y_0^{(4)} - Y_2^{(4)}$	—	0	0°	$Y_0^{(3)}$	—
1	90°	—	$Y_1^{(4)} - Y_3^{(4)}$	1	120°	$Y_1^{(3)} + Y_2^{(3)}$	$Y_1^{(3)} - Y_2^{(3)}$

Die trigonometrischen Faktoren werden, abgesehen vom Vorzeichen, durch die Werte 0, $\frac{1}{2}$, $q = 0,866 \dots$, 1 dargestellt. Mit Hilfe der

obigen Übersicht läßt sich leicht ein Schema herstellen, das auf die Bequemlichkeit der

Rechnung noch weitere Rücksicht nimmt. So sieht man sofort, daß immer wieder neben den Differenzen zweier Zahlen auch ihre Summen vorkommen — es ist also angebracht, diese Operationen stets gemeinsam zu erledigen. Schließlich erweist sich auch die Bildung der Summenreihe von 4 Gliedern als unnötig, da man die beiden aus ihnen zu bildenden Faltungen auch unmittelbar in der Form

$$C_0^{(3)} = Y_0^{(4)} - Y_2^{(4)} = Y_0^{(6)} - Y_2^{(6)} + Y_4^{(6)}; \quad S_1^{(3)} = Y_1^{(4)} - Y_3^{(4)} = Y_1^{(6)} - Y_3^{(6)} + Y_5^{(6)}$$

schreiben kann. Man gelangt so zu folgendem endgültigen Rechenschema:

Welle 6

ν	$\nu\alpha$	$C_\nu^{(6)}$
0	0°	$Y_0^{(2)} - Y_1^{(2)}$

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
Summe	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Differenz	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
	$s_0 = Y_0 + Y_3$			$d_0 = Y_0 - Y_3$		
	$s_1 = Y_1 + Y_4$			$d_1 = Y_1 - Y_4$		
	$s_2 = Y_2 + Y_5$			$d_2 = Y_2 - Y_5$		
	$Z'_1 = Z_1 - Z_5$			$Z'_5 = Z_1 + Z_5$		
	$Z'_2 = Z_2 - Z_4$			$Z'_4 = Z_2 + Z_4$		

$$\begin{array}{ll}
 12 a_0 = s_0 + s_1 + s_2 & 6 a_2 = d_0 + \frac{1}{2} (d_1 - d_2) \\
 \underline{12 a_6 = d_0 - d_1 + d_2} & \underline{6 b_2 = q (d_1 + d_2)} \\
 6 a_1 = Z_0 + q Z'_1 + \frac{1}{2} Z'_2 & 6 a_4 = s_0 - \frac{1}{2} (s_1 + s_2) \\
 \underline{6 b_1 = Z_3 + q Z'_4 + \frac{1}{2} Z'_5} & \underline{6 b_4 = q (s_1 - s_2)} \\
 6 a_5 = Z_0 - q Z'_1 + \frac{1}{2} Z'_2 & 6 a_3 = Z_0 - Z_2 + Z_4 \\
 6 b_5 = Z_3 - q Z'_4 + \frac{1}{2} Z'_5 & 6 b_3 = Z_1 - Z_3 + Z_5
 \end{array}$$

Der Leser möge sich der Mühe unterziehen, auch für andere Werte p ein möglichst kurzes Rechenschema aufzustellen, z. B. für $p = 16, 24, 30, 36$. Nach einem von RUNGE angegebenen Verfahren ist es übrigens auch möglich, von einem Schema für p Beobachtungswerte direkt auf Vielfache von p überzugehen, d. h. auf eine *verdichtete* Beobachtungsreihe. Liegt etwa das Schema für $p = 12$ vor, und sind $2p = 24$ Beobachtungen gegeben, so läßt sich zunächst rein formal das Schema $p = 12$ auf die beiden ineinandergreifenden Wertfolgen

$$\begin{array}{l}
 y_0, y_2, y_4, \dots, y_{22}, \quad (y'_v) \\
 y_1, y_3, y_5, \dots, y_{23}, \quad (y''_v)
 \end{array}$$

anwenden. Die Analyse ergibt sodann $2p$ FOURIER-Koeffizienten; die mit

$$\begin{array}{ll}
 a'_0, a'_1, \dots, a'_6; & b'_1, b'_2, \dots, b'_5 \\
 a''_0, a''_1, \dots, a''_6; & b''_1, b''_2, \dots, b''_5
 \end{array}$$

bezeichnet werden mögen. Da diese $2p$ Zahlen voneinander unabhängige lineare Kombinationen der gegebenen Beobachtungswerte sind, so muß es möglich sein, die gesuchten Koeffizienten der vollständigen Analyse aller 24 Werte,

$$a_0, a_1, \dots, a_{12}; \quad b_1, b_2, \dots, b_{11}$$

als Funktionen der a'_0, \dots, b''_5 darzustellen. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=0}^{23} y_\nu \cos \mu \nu \alpha &= \sum_{\nu=0}^{11} y_{2\nu} \cos 2\mu \nu \alpha + \sum_{\nu=0}^{11} y_{2\nu+1} \cos (2\nu + 1)\mu \alpha \\
 &= \sum_{\nu=0}^{11} y'_\nu \cos 2\mu \nu \alpha + \cos \mu \alpha \sum_{\nu=0}^{11} y''_\nu \cos 2\mu \nu \alpha \\
 &\quad - \sin \mu \alpha \sum_{\nu=0}^{11} y''_\nu \sin 2\mu \nu \alpha \text{ usw.},
 \end{aligned}$$

da aber (zunächst für $\mu = 1, 2, \dots, 5$)

$$\begin{aligned} \frac{p}{2} a'_\mu &= \sum_{\nu=0}^{11} y'_\nu \cos 2\mu\nu\alpha; & \frac{p}{2} a''_\mu &= \sum_{\nu=0}^{11} y''_\nu \cos 2\mu\nu\alpha \\ \frac{p}{2} b'_\mu &= \sum_{\nu=0}^{11} y \sin 2\mu\nu\alpha; & \frac{p}{2} b''_\mu &= \sum_{\nu=0}^{11} y''_\nu \sin 2\mu\nu\alpha, \end{aligned} \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{24}\right)$$

so können wir schreiben:

$$\begin{aligned} 12 a_\mu &= 6 a'_\mu + 6 (a''_\mu \cos \mu\alpha - b''_\mu \sin \mu\alpha) \\ 12 b_\mu &= 6 b'_\mu + 6 (b''_\mu \cos \mu\alpha + a''_\mu \sin \mu\alpha), \end{aligned} \quad (\mu = 1, 2, \dots, 5)$$

während

$$\begin{aligned} 24 a_0 &= 12 a'_0 + 12 a''_0 \\ 12 a_6 &= 12 a'_6 \\ 12 b_6 &= 12 a''_6. \end{aligned}$$

Schließlich lassen sich auch die restlichen Koeffizienten bestimmen, indem man die Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen berücksichtigt. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} a'_{12-\mu} &= a_\mu & a''_{12-\mu} &= a''_\mu \\ b'_{12-\mu} &= -b_\mu & b''_{12-\mu} &= -b''_\mu. \end{aligned} \quad (\mu = 1, 2, \dots, 5)$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} 12 a_{12-\mu} &= 6 a'_\mu + 6 (a''_\mu \cos (12-\mu)\alpha + b''_\mu \sin (12-\mu)\alpha) \\ 12 b_{12-\mu} &= -6 b'_\mu - 6 (b''_\mu \cos (12-\mu)\alpha - a''_\mu \sin (12-\mu)\alpha) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 12 a_{12-\mu} &= 6 a'_\mu - 6 (a''_\mu \cos \mu\alpha - b''_\mu \sin \mu\alpha) \\ 12 b_{12-\mu} &= -6 b'_\mu + 6 (b''_\mu \cos \mu\alpha + a''_\mu \sin \mu\alpha). \end{aligned}$$

Die Ableitung der Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \bar{a}_\mu &= a''_\mu \cos \mu\alpha - b''_\mu \sin \mu\alpha \\ \bar{b}_\mu &= b''_\mu \cos \mu\alpha + a''_\mu \sin \mu\alpha \end{aligned}$$

läßt sich noch einfacher gestalten, wenn man die zweite Teilreihe nicht mit y_1 , sondern mit y_3 beginnen läßt und, mit Rücksicht auf die reine Periodizität der Beobachtungsreihe, die formal stets angenommen werden darf, $y_{25} = y_1$ setzt. Da die Verschiebung $\mu\alpha$ nunmehr ein Vielfaches von 45° ist, kommen als Faktoren bei der Bildung der \bar{a}_μ, \bar{b}_μ nur 1 und $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707 \dots$ vor. Wir erhalten demnach, unter der Voraussetzung, daß die Analyse der Teilfolgen

$$\begin{aligned} y_0, y_2, \dots, y_{20}, y_{22}, (y'_\nu) \\ y_3, y_5, \dots, y_{23}, y_1, (y''_\nu) \end{aligned}$$

durchgeführt ist und die Konstanten $a'_\mu, b'_\mu; a''_\mu, b''_\mu$ vorliegen, folgendes zusätzliche Rechenschema:

	a'_1	a'_3	a'_5		$\bar{a}_0 = a''_0$		$\bar{b}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot S_1$
	b'_1	b'_3	b'_5		$\bar{a}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot D_1$		$\bar{b}_2 = a''_2$
Summe	S_1	S_3	S_5		$\bar{a}_2 = -b''_2$		$\bar{b}_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot D_3$
Differenz	D_1	D_3	D_5		$\bar{a}_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot S_3$		$\bar{b}_4 = -b''_4$
					$\bar{a}_4 = -a''_4$		$\bar{b}_5 = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot S_5$
					$\bar{a}_5 = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot D_5$		$\bar{b}_6 = a''_6$
	$12 a'_0$	$6 a'_1$	$6 a'_2$	$6 a'_3$	$6 a'_4$	$6 a'_5$	$12 a'_6$
	$12 \bar{a}_0$	$6 \bar{a}_1$	$6 \bar{a}_2$	$6 \bar{a}_3$	$6 \bar{a}_4$	$6 \bar{a}_5$	
Summe	$24 a_0$	$12 a_1$	$12 a_2$	$12 a_3$	$12 a_4$	$12 a_5$	$12 a_6$
Differenz	$24 a_{12}$	$12 a_{11}$	$12 a_{10}$	$12 a_9$	$12 a_8$	$12 a_7$	
		$6 \bar{b}_1$	$6 \bar{b}_2$	$6 \bar{b}_3$	$6 \bar{b}_4$	$6 \bar{b}_5$	$12 \bar{b}_6$
		$6 b'_1$	$6 b'_2$	$6 b'_3$	$6 b'_4$	$6 b'_5$	
Summe	$12 b_1$	$12 b_2$	$12 b_3$	$12 b_4$	$12 b_5$	$12 b_6$	
Differenz	$12 b_{11}$	$12 b_{10}$	$12 b_9$	$12 b_8$	$12 b_7$		

Die Analyse einer 24-gliedrigen Beobachtungsreihe ist eine in der Periodenforschung besonders häufig vorkommende Aufgabe. Das liegt einerseits daran, daß in vielen, insbesondere geophysikalischen, Problemen der *Tag* als Grundintervall der Analyse auftritt, und daß es sich dann als gegeben erweist, *stündliche* Beobachtungswerte heranzuziehen. Andererseits ist 24 eine für die Rechnung sehr bequeme Zahl, die viele Vereinfachungen durch Bildung von Summenreihen gestattet, aber auch nicht zu klein ist. Die Praktiker haben daher den Fall $p = 24$ immer bevorzugt behandelt, und es gibt infolgedessen brauchbare Methoden, solche Analysen mit einem möglichst geringen Aufwand an Zeit und Arbeitskraft auszuführen, was besonders dann notwendig wird, wenn eine große Zahl gleichartiger Rechnungen zu bewältigen ist. Am bequemsten geschieht die Analyse 24-gliedriger Reihen mit Hilfe der von TEREBESI (Lit. 273) eingeführten *Rechenschablonen*. Das ökonomische Prinzip, das durch diese Schablonen befolgt wird, besteht darin, daß jede in der Rechnung vorkommende Zahl nur ein einziges Mal hingeschrieben zu werden braucht. So ist zunächst für die 24 Beobachtungswerte selbst eine bestimmte Anordnung vorgesehen. Der Rechner legt eine „Schablone“, die 24 rechteckige Fenster in bestimmter Anordnung und Numerierung enthält, auf das Rechenpapier und schreibt

die gegebenen Werte in die Fenster hinein. Eine zweite Schablone dient dem nächsten Rechnungsgang: Es werden Summen und Differenzen gebildet — die Stellen, an denen sie niedergeschrieben werden müssen, sind wiederum durch Fenster bezeichnet, die Anleitung ist auf der Schablone durch Pfeile, Vorzeichen und ähnliche Hinweise vermerkt. So werden eine ganze Reihe von Schablonen in bestimmter Reihenfolge benutzt, bis schließlich die FOURIER-Koeffizienten gebildet sind.

Ferner ist auch Sorge für eine durchgreifende Kontrolle der Rechnung zu tragen. Die vollkommenste Kontrolle ist durch die Darstellung der Beobachtungsreihe selbst mit Hilfe der FOURIERSchen Entwicklung gegeben. Auch dieser Prozeß der Rückwärtsberechnung der Beobachtungswerte aus den Konstanten a_μ und b_μ , den wir als „*Harmonische Synthese*“ bezeichnen, läßt sich durch geeignete Rechenschemata erledigen und ist auch bei der TEREBSISchen Schablonenmethode vorgesehen.

Der innere Zusammenhang zwischen den Formeln der Analyse und Synthese wird am klarsten, wenn wir die Beobachtungsreihe zunächst nur *einmal* falten und die Reihe der Summen und Differenzen bilden:

	y_0	y_1	y_2	y_3	\dots
		y_{p-1}	y_{p-2}	y_{p-3}	\dots
Summe	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	\dots
Differenz		δ_1	δ_2	δ_3	\dots

Alsdann sind die FOURIER-Konstanten

$$\begin{aligned} p \cdot a &= \sum y_v &= \sum \sigma_v \\ \frac{p}{2} a_\mu &= \sum y_v \cos \mu v \alpha &= \sum \sigma_v \cos \mu v \alpha \\ \frac{p}{2} b_\mu &= \sum y_v \sin \mu v \alpha &= \sum \delta_v \sin \mu v \alpha . \end{aligned}$$

Andererseits enthalten die Beobachtungswerte, ihrer FOURIERSchen Entwicklung gemäß, einen cos- und einen sin-Term:

$$y_r = \sum_0 a_\mu \cos r \mu \alpha + \sum_1 b_\mu \sin r \mu \alpha = A_r + B_r ,$$

und es ist leicht einzusehen, daß

$$A_{p-r} = A_r; \quad B_{p-r} = -B_r ,$$

also

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0 &= \sigma_0 \\ A_\mu &= \frac{y_\mu + y_{p-\mu}}{2} &= \frac{\sigma_\mu}{2} \\ B_\mu &= \frac{y_\mu - y_{p-\mu}}{2} &= \frac{\delta_\mu}{2} . \end{aligned}$$

Mithin sind die Größen σ_μ, δ_μ , aus denen sich die Beobachtungsreihe unmittelbar rekonstruieren läßt, mit den FOURIER-Konstanten a_μ, b_μ durch die völlig reziproken Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} p \cdot a_0 &= \sum \sigma_\nu & \sigma_0 &= \sum a_\nu \\ \frac{p}{2} \cdot a_\mu &= \sum \sigma_\nu \cos \mu \nu \alpha & \frac{1}{2} \sigma_\mu &= \sum a_\nu \cos \mu \nu \alpha \\ \frac{p}{2} \cdot b_\mu &= \sum \delta_\nu \sin \mu \nu \alpha & \frac{1}{2} \delta_\mu &= \sum b_\nu \sin \mu \nu \alpha \end{aligned}$$

miteinander verknüpft.

Auf Grund dieser Beziehungen lassen sich für den Einzelfall Rechenschemata für die Harmonische Synthese aufstellen, die denen für die Analyse sehr ähnlich sind. Im Falle $p = 12$ erhalten wir folgendes Synthesenschema:

	a_0	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
	a_6	a_5	a_4		b_5	b_4	
Summe	f_0	f_1	f_2	f_3	h_1	h_2	h_3
Differenz	g_0	g_1	g_2		k_1	k_2	
	$F_0 = f_0 + f_3$				$G_0 = f_0 - f_3$		
	$F_1 = f_1 + f_2$				$G_1 = f_1 - f_2$		

$A_1 =$	$g_0 + q g_1 + \frac{1}{2} g_2$	$B_1 =$	$h_3 + q h_2 + \frac{1}{2} h_1$
$A_5 =$	$g_0 - q g_1 + \frac{1}{2} g_2$	$B_5 =$	$h_3 - q h_2 + \frac{1}{2} h_1$
$A_2 =$	$G_0 + \frac{1}{2} G_1$	$B_2 =$	$q (k_1 + k_2)$
$A_4 =$	$F_0 - \frac{1}{2} F_1$	$B_4 =$	$q (k_1 - k_2)$
$A_0 =$	$F_0 + F_1$	$A_3 =$	$g_0 - g_2$
$A_6 =$	$G_0 - G_1$	$B_2 =$	$h_1 - h_3$

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Summe	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
Differenz		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	

Als Rechenbeispiel für eine vollständige Harmonische Analyse und Synthese entnehmen wir der weiter oben gegebenen 24-gliedrigen Luftdruckreihe die Beobachtungen mit geradem Index ($y'_0 = y_0; y'_1 = y_2; \dots, y'_{11} = y_{22}$).

Analyse:

(y'_v)	10,5	14,8	17,1	6,4	18,0	0,1	
	4,9	2,9	-13,1	4,5	-1,8	4,5	
(Y_v)	15,4	17,7	4,0	10,9	16,2	4,6	
(Z_v)	5,6	11,9	30,2	1,9	19,8	-4,4	
$s_0 = 26,3$	$d_0 = 4,5$	$Z_0 + \frac{1}{2} Z'_2 = 10,8$					
$s_1 = 33,9$	$d_1 = 1,5$	$Z_3 + \frac{1}{2} Z'_5 = 5,65$					
$s_2 = 8,6$	$d_2 = -0,6$	$d_1 + d_2 = 0,9$					
$Z'_1 = 16,3$	$Z'_5 = 7,5$	$d_1 - d_2 = 2,1$					
$Z'_2 = 10,4$	$Z'_4 = 50,0$	$s_1 + s_2 = 42,5$					
		$s_1 - s_2 = 25,3$					
	$12 a_0 = 68,8$	$6 a_2 = 5,55$					
	$12 a_6 = 2,4$	$6 b_2 = 0,78$					
	$6 a_1 = 24,9$	$6 a_4 = 5,05$					
	$6 b_1 = 48,95$	$6 b_4 = 21,91$					
	$6 a_5 = -3,3$	$6 a_3 = -4,8$					
	$6 b_5 = -37,65$	$6 b_3 = 5,6$					

Synthese:

(a_v)	5,73	4,15	0,92	-0,80	(b_v)	8,16	0,13	0,93
	0,20	-0,55	0,84			-6,28	3,65	
(f_v)	5,93	3,60	1,76	-0,80	(h_v)	1,88	3,78	0,93
(g_v)	5,53	4,70	0,08		(k_v)	14,44	-3,52	
$F_0 = 5,13$	$G_0 = 6,73$	$g_0 + \frac{1}{2} g_2 = 5,57$		$k_1 + k_2 = 10,92$				
$F_1 = 5,36$	$G_1 = 1,84$	$h_3 + \frac{1}{2} h_1 = 1,87$		$k_1 - k_2 = 17,96$				
(A_v)	10,50	9,65	7,65	5,45	2,45	1,50	4,90	
(B_v)		5,15	9,45	0,95	15,55	-1,40		
(y'_v)	10,5	14,8	17,1	6,4	18,0	0,1	4,9	
		4,5	-1,8	4,5	-13,0	2,9		

Der Leser möge die gleiche Rechnung auch für die Beobachtungen mit ungeradem Index durchführen und die Ergebnisse beider Analysen zu einer vollständigen Analyse der 24 Beobachtungen auf die weiter oben angegebene Art vereinigen.

Harmonische Analyse und Synthese sind zwar reziproke, aber dennoch getrennte Probleme. Werden sie, wie in obigem Zahlenbeispiel, gemeinsam ausgeführt, so hat das nur insofern einen Sinn, als die eine Rechnungsart

die Kontrolle für die Richtigkeit der anderen liefert. So ist die vollständige Synthese die durchgreifendste Kontrolle für die Analyse, die möglich ist; sie erfordert allerdings einen Aufwand an Rechenarbeit, der genau so groß ist, wie der für die Rechnung selbst nötige. Man wird sich daher meistens mit weniger durchgreifenden Kontrollrechnungen begnügen. Es genügt im allgemeinen schon, wenn man einzelne Ordinaten stichprobenartig rückwärts berechnet, wobei man nur darauf achtet, daß in den zu benutzenden Formeln alle kontrollbedürftigen Größen vorkommen. Das ist z. B. der Fall, wenn man (für $p = 12$) nur A_0, A_1, B_1 und daraus y_0, y_1, y_{11} bestimmt.

Weitere Kontrollgleichungen werden durch die „Vollständigkeitsrelation“ geliefert. Es ist nämlich

$$\frac{1}{p} \sum y_v^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (a_\mu^2 + b_\mu^2) \quad (p \text{ ungerade})$$

$$\frac{1}{p} \sum y_v^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (a_\mu^2 + b_\mu^2) + a_{\frac{1}{2}p}^2 \quad (p \text{ gerade}).$$

Alle diese Kontrollen haben zur Voraussetzung, daß die Analyse vollständig durchgeführt worden ist. Sehr häufig liegt aber der Fall vor, daß nur einzelne FOURIER-Koeffizienten bestimmt werden sollen, etwa zu dem Zwecke, das Verhalten einzelner harmonischer Wellen zu untersuchen. Der Rechner ist dann darauf angewiesen, die zur Sicherung der numerischen Ergebnisse notwendigen Kontrollen selbst aufzusuchen und sie geschickt in das Rechenschema einzubauen. Der Weg dazu ist besonders dann sehr leicht gegeben, wenn die gleichen Rechnungen mit einer mehr oder weniger großen Anzahl getrennter Beobachtungsreihen gleichzeitig durchzuführen sind. Sind z. B. n Beobachtungsreihen zu je p Gliedern gegeben und nach einer bestimmten Welle (z. B. der r -ten) zu analysieren, so ordne man diese Reihen in n Zeilen untereinander an:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0^{(1)} & y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdots & y_{p-1}^{(1)} & & \\ y_0^{(2)} & y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_{p-1}^{(2)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \hline y_0^{(n)} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_{p-1}^{(n)} & & \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_{p-1} & & \end{array}$$

und bilde die Kolonnensummen (Summenreihe). Man analysiert dann zur Kontrolle auch die Summenreihe. Die Koeffizienten der r -ten Welle der Summenreihe sind dann den Summen der entsprechenden Koeffizienten der Originalreihen gleich:

$$A_r = a_r^{(1)} + a_r^{(2)} + \cdots + a_r^{(n)}; \quad B_r = b_r^{(1)} + b_r^{(2)} + \cdots + b_r^{(n)}.$$

Ist die Anzahl der zu analysierenden Reihen sehr groß, so empfiehlt es sich, die Summenreihen schon für kleinere Gruppen zu bilden, da es dann leichter ist, etwa auftretende Fehler zu lokalisieren.

5. Analyse der Differenzen.

Eine Beobachtungsreihe

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$$

läßt sich auch dadurch festlegen, daß man außer dem Anfangswert y_0 die $p-1$ Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten aufschreibt. Die Folge

$$y_0, \delta_{\frac{1}{2}} = y_1 - y_0, \delta_{\frac{3}{2}} = y_2 - y_1, \dots, \delta_{p-\frac{3}{2}} = y_{p-1} - y_{p-2}$$

ist demnach der Beobachtungsreihe selbst äquivalent. Wie J. BARTELS (Lit. 25) gezeigt hat, ist es unter Umständen praktisch, die Differenzen an Stelle der Originalbeobachtungen bei der Analyse einzuführen. Es zeigt sich nämlich, daß die Formeln und daher auch die Rechenschemata sich nicht wesentlich ändern. Dafür hat man aber den Vorteil, daß die Größenordnung der Differenzen im allgemeinen kleiner, bei einigermaßen „glatten“ Reihen sogar *wesentlich* kleiner ist als die der Beobachtungswerte selbst. Sehen wir von dem konstanten Glied a_0 ab, das nach wie vor aus der Summe der Beobachtungen zu bestimmen ist, so bleiben die Koeffizienten aller Wellen ungeändert, wenn die Ordinaten um eine beliebige Konstante vermehrt oder vermindert werden. Man kann also, ohne das Analysenergebnis zu verändern, y_0 willkürlich gleich null setzen und behält lediglich die Differenzenfolge

$$\delta_{\frac{1}{2}}, \delta_{\frac{3}{2}}, \dots, \delta_{p-\frac{3}{2}}$$

als Rechnungsgrundlage. Es ist vorteilhaft, diesen $p-1$ Differenzen noch eine p -te

$$\delta_{p-\frac{1}{2}} = y_p - y_{p-1} = y_0 - y_{p-1}$$

hinzuzufügen. Dann ergibt die Analyse dieser Reihe, wenn man als Argumente die Mitten zwischen den Beobachtungsterminen wählt:

$$\begin{aligned} a'_\mu &= \frac{2}{p} \sum_{v=0}^{p-1} (y_{v+1} - y_v) \cos \left(v + \frac{1}{2} \right) \mu \alpha \\ &= \frac{2}{p} \sum_{v=0}^{p-1} y_{v+1} \cos \left\{ (v+1) \mu \alpha - \frac{\mu \alpha}{2} \right\} - \frac{2}{p} \sum_{v=0}^{p-1} y_v \cos \left\{ v \mu \alpha + \frac{\mu \alpha}{2} \right\} \\ &= a_\mu \cos \frac{\mu \alpha}{2} + b_\mu \sin \frac{\mu \alpha}{2} - a_\mu \cos \frac{\mu \alpha}{2} + b_\mu \sin \frac{\mu \alpha}{2} = 2 b_\mu \sin \frac{\mu \alpha}{2} \\ b'_\mu &= \frac{2}{p} \sum_{v=0}^{p-1} (y_{v+1} - y_v) \sin \left(v + \frac{1}{2} \right) \mu \alpha \\ &= \frac{2}{p} \sum_{v=0}^{p-1} y_{v+1} \sin \left\{ (v+1) \mu \alpha - \frac{\mu \alpha}{2} \right\} - \frac{2}{p} \sum_{v=0}^{p-1} y_v \sin \left\{ v \mu \alpha + \frac{\mu \alpha}{2} \right\} \\ &= -2 a_\mu \sin \frac{\mu \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Die Amplituden der FOURIER-Glieder der Beobachtungsreihe werden demnach aus denen der Differenzreihe durch Multiplikation mit einem Faktor

$$q = \frac{1}{2 \sin \frac{\mu \alpha}{2}}$$

erhalten, während die Phasen gegen die der Differenzreihe um einen Viertelumlaf gedreht erscheinen.

Noch einfacher werden die Formeln, wenn man die Folge der *zweiten* Differenzen analysiert, wobei, wie immer, die Beobachtungsreihe als rein periodisch betrachtet wird. Diese Folge ist

$$2 y_0 - (y_{p-1} + y_1); \quad 2 y_1 - (y_0 + y_2); \quad \dots; \quad 2 y_{p-1} - (y_{p-2} + y_0),$$

ihre Glieder werden dem Argument der mittleren der drei benutzten Beobachtungen zugeschrieben. Die Analyse ergibt:

$$\begin{aligned} a''_{\mu} &= \frac{2}{p} \sum_{v=0}^{p-1} (2 y_v - y_{v-1} - y_{v+1}) \cos v \mu \alpha \\ &= \frac{4}{p} \sum_{v=0}^{p-1} y_v \cos v \mu \alpha - \frac{2}{p} \sum_{v=0}^{p-1} y_{v-1} \cos \{(v-1) \mu \alpha + \mu \alpha\} \\ &\quad - \frac{2}{p} \sum_{v=0}^{p-1} y_{v+1} \cos \{(v+1) \mu \alpha - \mu \alpha\} \\ &= 2 a_{\mu} - a_{\mu} \cos \mu \alpha + b_{\mu} \sin \mu \alpha - a_{\mu} \cos \mu \alpha - b_{\mu} \sin \mu \alpha \\ &= 2 a_{\mu} (1 - \cos \mu \alpha) = 4 a_{\mu} \sin^2 \frac{\mu \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Ebenso:

$$b''_{\mu} = 4 b_{\mu} \sin^2 \frac{\mu \alpha}{2}.$$

Hier tritt eine Verschiebung der Phasen nicht ein.

Man wird die Methode der Differenzenanalyse immer dann anwenden, wenn durch die Verringerung der Größenordnung der Ordinaten eine wesentliche Erleichterung der Rechenarbeit erzielt wird. Das ist z. B. der Fall, wenn zur Bildung der trigonometrischen Produkte Tafeln herangezogen werden. Solche Tafeln der Vielfachen der trigonometrischen Faktoren lassen sich leicht und übersichtlich herstellen, wenn der Multiplikand klein, etwa nur zweistellig ist, oder wenn gar sein Betrag sich auf die Zahlen von 1—50 beschränkt. Eine derartige Produkttafel würde auf wenigen Blättern unterzubringen sein und daher bedeutend bequemer zu benutzen sein, als etwa die für die Faktoren von 1—1000 geschaffenen Rechentafeln von POLLAK oder wie die CRELLESCHEN Tafeln.

Die für die Analyse der ersten bzw. zweiten Differenzen abgeleiteten Formeln stehen übrigens in einem sehr einfachen Zusammenhang mit den Formeln, die man für die Harmonische Analyse geglätteter Reihen erhält. Glättet man z. B. eine Beobachtungsreihe durch übergreifende Mittel benachbarter Beobachtungen oder durch gewichtete Mittel aus je drei aufeinanderfolgenden Werten, so erhält man die FOURIER-Konstanten aus ganz ähnlichen Formeln wie oben, da sich die Ansätze nur durch Vorzeichenvertauschungen von den obigen unterscheiden.

6. Analyse von Beobachtungsnetzen.

Die Aufzeichnung von geophysikalischen Vorgängen kann auf zweierlei Weise erfolgen: Zunächst läßt sich für eine und dieselbe Beobachtungsstation der Vorgang (z. B. die Variation des Luftdrucks, der Temperatur, der erdmagnetischen Komponenten usw.) als Funktion der Zeit auftragen; ferner läßt sich aber auch für einen und denselben Zeitpunkt (Beobachtungstermin) die Verteilung der Beobachtungsergebnisse über ein mehr oder weniger ausgedehntes Gebiet der Erdoberfläche zeichnen, falls gleichzeitig Beobachtungen oder Registrierungen der Erscheinung an verschiedenen Orten gemacht worden sind, die ein Netz von bestimmter Ausdehnung und Dichte bilden. Diese gleichzeitigen Beobachtungsergebnisse stellen ausgewählte Ordinaten einer Fläche dar, die ihrer Natur nach meist überall stetig ist oder höchstens an bestimmten Stellen, etwa längs gewisser singularer Linien, Unstetigkeiten (Sprünge, Verwerfungen) aufweist. Die graphische Darstellung dieser Fläche erfolgt durch Einzeichnen von Linien gleicher Funktionswerte (Isoplethen; insbesondere Isobaren, Isothermen, Isallobaren, Isohypsen u. a.) in eine das gesamte Stationsnetz umfassende geographische Karte. Diese Darstellungsart, die man als die *synoptische* bezeichnet, ist aus der Meteorologie hinreichend bekannt (Wetterkarten). Interessieren örtliche und zeitliche Variationen der Beobachtungsfunktion gleichermaßen, so werden die letzteren dadurch der Bearbeitung zugänglich gemacht, daß man die synoptische Darstellung für eine Reihe genügend dicht aufeinanderfolgender Beobachtungszeiten wiederholt und nun die (meist stetige) Veränderung des synoptischen Bildes und seiner Einzelheiten in der Zeit verfolgt.

Wird nun eine periodographische Untersuchung einer solchen räumlich und zeitlich veränderlichen Beobachtungsfunktion verlangt, so kann man wiederum auf zweierlei Weise vorgehen, je nachdem man von den Darstellungen des zeitlichen Funktionsverlaufs an den verschiedenen Punkten des Stationsnetzes oder von den synoptischen Darstellungen des örtlichen Funktionsverlaufs zu den verschiedenen Beobachtungsterminen seinen Ausgang nimmt. Im letzteren Falle könnte man etwa so vorgehen, daß man das synoptische Bild durch eine Entwicklung nach

Kugelfunktionen zu beschreiben sucht (sofern sich die synoptische Darstellung über die gesamte Erdoberfläche erstreckt, bedarf diese Methode keiner besonderen Erläuterung mehr — andernfalls hätte man die fehlenden Gebiete nach irgendeinem Prinzip zu ergänzen, etwa so, daß man die Funktion dort willkürlich gleich einem konstanten mittleren Wert setzt: die Darstellung durch Kugelfunktionen hätte dann lediglich für das eigentliche Beobachtungsgebiet einen interpolatorischen Sinn); die so gewonnenen Entwicklungskonstanten werden dann als Funktionen der Zeit zu betrachten und periodographisch zu untersuchen sein. Dies Verfahren hat aber nur dann einen praktischen Wert, wenn die Entwicklung nach Kugelfunktionen schon bei verhältnismäßig kleinen Ordnungen abgebrochen werden kann. Würde man nämlich die Forderung erheben, daß alle Beobachtungswerte des Netzes exakt dargestellt werden sollen, so wäre die Zahl der Entwicklungskoeffizienten ebenso groß wie die der Beobachtungswerte selbst. Man hätte also lediglich erreicht, daß die gegebenen Werte in ebenso viele andere umgeformt wären, und zwar mit Hilfe einer recht komplizierten Transformation. Das würde sich nur dann lohnen, wenn sich etwa herausstellen sollte, daß die zeitliche Variation der Kugelfunktionskoeffizienten *wesentlich* einfacher verläuft als die der Stationsbeobachtungen selbst, oder, daß Periodizitäten in den transformierten Größen reiner hervortreten als in den ursprünglichen. Da dies aber im allgemeinen nicht erwartet werden kann, wird man in den meisten Fällen den anderen Weg beschreiten, der von der Analyse der einzelnen Beobachtungsreihen ausgeht. Man lege also der Rechnung ein bestimmtes Analysenintervall für das gesamte Netz zugrunde, dessen Länge und dessen Grenzen den jeweiligen Verhältnissen angemessen sind. Die Harmonische Analyse der zu N Punkten des Beobachtungsnetzes gehörigen gleich langen und sich auf den gleichen Zeitraum beziehenden Beobachtungsreihen liefert dann N Folgen von FOURIER-Koeffizienten

$$a_0^{(\mu)}; a_1^{(\mu)}, a_2^{(\mu)}, \dots; \quad b_1^{(\mu)}, b_2^{(\mu)}, \dots \quad (\mu = 1, 2, \dots, N)$$

bzw. N Folgen von Amplituden und Phasen

$$a_0^{(\mu)}; c_1^{(\mu)}, c_2^{(\mu)}, \dots; \quad \psi_1^{(\mu)}, \psi_2^{(\mu)}, \dots$$

Sind die Beobachtungsreihen selbst stetige Funktionen der Zeit mit nicht allzu kurzperiodischen Schwankungen, so wird man die Entwicklungen schon nach verhältnismäßig wenigen Gliedern, etwa nach der r -ten Ordnung, abbrechen dürfen. Die Synthese, d. h. die Rückwärtsberechnung der Beobachtungswerte aus den Harmonischen Wellen bis zur r -ten Ordnung, wird alsdann einen geglätteten Verlauf der Beobachtungsreihen ergeben, durch den die Schwankungen längerer Periode gut dargestellt werden, während kurzperiodische Schwankungen, sofern solche doch vorkommen sollten, unberücksichtigt bleiben, desgleichen zufällige Beobachtungsfehler. (Natürlich kann man, falls die vorliegende

Aufgabe dies erfordern sollte, die Analyse auch bis zur vollständigen Darstellung der Beobachtungsreihen durchführen, doch wird dies in den meisten praktisch vorkommenden Fällen schon deshalb nicht notwendig und nicht einmal erwünscht sein, weil erfahrungsgemäß die ganz kurzen Schwankungen von Beobachtungsfehlern oder sonstigen Unregelmäßigkeiten untrennbar sind und auch, soweit sie überhaupt reell im physikalischen Sinne sind, eine meist sehr kurze Lebensdauer besitzen.) Nachdem die Analyse der N Einzelreihen bis zu der erforderlichen Ordnung durchgeführt worden ist, lassen sich synoptische Karten für die einzelnen Entwicklungsglieder sehr leicht herstellen. So ergibt z. B. die synoptische Darstellung der konstanten Entwicklungsglieder a_0 ein Bild von der geographischen Verteilung der Funktionsmittelwerte über das gewählte Zeitintervall. Ist z. B. das Analysenintervall ein Jahr, so ergibt (etwa für Luftdruck oder Temperatur) die synoptische Darstellung der Konstanten a_0 die bekannten Jahres-Isobaren bzw. -Isothermen. Auch für kürzere Intervalle (z. B. bestimmte Monate) ergibt die synoptische Darstellung der konstanten Glieder aufschlußreiche und in der Klimatologie unentbehrliche Verteilungskarten (z. B. Januar- oder Juli-Isothermen). Was die zu Wellen endlicher Periode gehörigen Konstanten anbelangt (Grundschiwingung und Oberschiwingungen im Analysenintervall), so kann man natürlich die zu der Harmonischen Welle r -ter Ordnung gehörigen Konstanten a_r, b_r gesondert zu einer synoptischen Darstellung verwenden. Wichtiger und aufschlußreicher sind aber solche synoptischen Karten, die alle zu einer bestimmten Welle gehörigen Angaben gleichzeitig enthalten. Es ist dann der Anschaulichkeit wegen angezeigt, diese Angaben in der Gestalt von Amplituden und Phasen zu benutzen. Auf einer solchen synoptischen Karte werden alsdann die Gebiete großer und kleiner Amplituden durch ein System von Linien gleicher Amplitude (*Isamplituden*) hervorgehoben werden. Man erkennt also die geographische Verteilung der Gebiete, in denen die betreffende Welle stark ausgeprägt ist (*Aktionsgebiete*) und solcher, in denen diese Welle gar nicht oder fast gar nicht vorhanden ist. Es zeigt sich dann, daß das System der Linien gleicher Phase (*Isophasen*) in sehr engem Zusammenhang mit dem System der Isamplituden steht. Dort, wo die Amplituden klein sind, drängen sich die (z. B. von 30° zu 30° oder von 45° zu 45° gezogenen) Isophasen stark zusammen, während über den Gebieten größter Aktivität die örtliche Variation der Phasen gering zu sein pflegt. An manchen Stellen des Kartenbildes, nämlich überall dort, wo sich isolierte Punkte mit verschwindender Amplitude zeigen, schneiden sich alle Isophasen in einem Punkt. Man nennt solche Isophasenschnittpunkte *Amphidromien* oder *Wirbel*. An anderen Stellen *berühren* sich die Isophasen. Man kann diese Stellen, die natürlich auch nur in Gebieten verschwindender Amplitude auftreten, als singuläre Punkte auffassen, die durch das Zusammentreffen zweier benachbarter

Wirbel mit entgegengesetztem Phasendrehungssinn gedeutet werden können. Mitunter laufen auch die Isophasen eines größeren Phasenintervalls längs bestimmter Linien des synoptischen Bildes gedrängt parallel und bilden ein *Isophasenbündel*, das in einer *Rinne* kleiner Amplituden verläuft. Ein typisches Bild, die synoptische Analyse¹ von

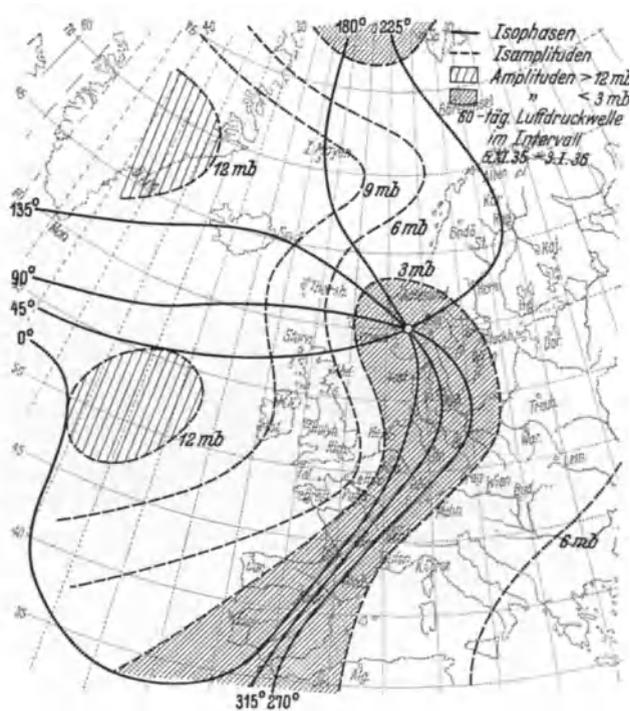


Abb. 8. Wellenbild der 60täg. Luftdruckwelle im Intervall 5. 11. 35 bis 3. 1. 36.

Luftdruckkurven betreffend, ist in Abb. 8 gezeichnet¹. Zur Technik des Zeichnens der Isophasenlinien sei noch bemerkt, daß man zweckmäßig damit beginnt, neben jeden Punkt des Beobachtungsnetzes zunächst die Konstanten a_r , b_r der darzustellenden Welle einzutragen. Die Linien (Isoplethen) $a_r = 0$; $b_r = 0$ sind dann mit den Isophasen für 0° und 180° , bzw. für 90° und 270° identisch, wie unmittelbar einzusehen ist. Die Schnittpunkte (oder auch Berührungspunkte) dieser Linien ergeben sodann sämtliche im Kartenbild zu erwartenden Wirbel und singulären Punkte, durch die auch die übrigen Isophasen hindurchgehen müssen. Will man außerdem die Zeichnung der Isophasen für 45° , 135° , 225°

¹ Zahlreiche Beispiele findet man unter anderem Lit. 261, 262.

und 315° zeichnen, so ergibt sich folgende praktische Regel: Ist die Welle r -ter Ordnung in der Form

$$c_r \sin(\alpha_r \nu + \psi_r) = a_r \cos \alpha_r \nu + b_r \sin \alpha_r \nu$$

$$(a_r = c_r \sin \psi_r; b_r = c_r \cos \psi_r)$$

gegeben, so erkennt man leicht, daß für

$$\psi_r = 45^\circ, 225^\circ: a_r - b_r = 0$$

$$\psi_r = 135^\circ, 315^\circ: a_r + b_r = 0.$$

Um die noch fehlenden Isophasen zu zeichnen, braucht man also nur noch die Differenz und Summe der beiden FOURIER-Komponenten a_r und b_r neben den Beobachtungsort zu schreiben — die gewünschten Isophasen werden dann durch die Isoplethen

$$a_r - b_r = 0; a_r + b_r = 0$$

geliefert.

Wir haben nun noch einen Fall zu betrachten, der in der geophysikalischen Praxis wohl niemals rein auftritt, aber als Idealfall ein großes Interesse für die Periodenforschung besitzt: den Fall nämlich, daß das gewählte Analysenintervall für das gesamte Beobachtungsgebiet oder wenigstens für einen größeren Teil desselben als Grundintervall einer reinen Periodizität aufzufassen ist. Die einfachste Annahme ist die, daß jede von den N Beobachtungsreihen des Netzes eine einfache Sinusschwingung von der gleichen Periode und konstanter, aber für verschiedene Orte verschiedener Amplitude und Phase darstellt. Analysiert man diese Reihen in einem Intervall von der Länge dieser Welle (oder einem Vielfachen davon), so ergibt sich für die betreffende Harmonische ein synoptisches Wellenbild von bestimmter Beschaffenheit, das — und das ist das Entscheidende — unabhängig von der *Lage* des Analysenintervalls auf der Zeitachse ist, sofern wir als Anfangspunkt der Phasenzählung einen konstanten Zeitpunkt wählen. Wir nennen den Schwingungsvorgang dann zeitlich *stationär*. Verschieben wir also (vgl. die Ausführungen in III, 4 über das *Phasendiagramm*) bei konstantem Anfangspunkt der Phasenzählung das Analysenintervall stetig auf der Zeitachse, so ändert sich das durch die Systeme der Isophasen und Isamplituden gegebene Wellenbild nicht. Während also der Beobachtungsvorgang selbst (etwa das von Tag zu Tag gezeichnete System der Isobaren) sich ständig in periodischer Weise ändert, bleibt das Wellenbild unverändert, solange die Schwingung stationär ist. Durch die Umwandlung des Beobachtungsaggregats in ein Aggregat von Amplituden und Phasen ist demnach die zeitlich veränderliche Isoplethendarstellung in eine zeitlich unveränderliche übergeführt, die somit für die Dauer des stationären Schwingungszustandes charakteristisch ist. Das System der Isophasen charakterisiert dabei den Schwingungszustand zu einer bestimmten Anfangszeit — die Isophasen selbst stellen die *Wellenfronten*

dar. So verbindet die Isophase $\psi_r = 90^\circ$ offenbar alle Orte, die zur Anfangszeit ein Wellenmaximum zeigen — diejenigen Orte, die auf der Isophase $\psi_r = 0^\circ$ liegen, erreicht das Wellenmaximum erst nach Ablauf einer Viertelperiode; es ist also klar, daß die Fortpflanzung der Wellen senkrecht zu den Isophasen in derjenigen Richtung vor sich geht, die durch *abnehmende* Phasen bezeichnet wird. Eine Amphidromie bedeutet eine Rotation der Welle um einen Punkt — je nachdem, ob um einen Wirbel herum die Phasenwerte im Uhrzeigersinn oder entgegengesetzt abnehmen, erfolgt auch diese Drehung der Wellenfronten in dem einen oder anderen Sinne. Man kann also von *positiven* oder *negativen Wirbeln* sprechen.

In der Praxis (Erfahrungen liegen in größerem Umfang nur für Luftdruckanalysen vor) sind solche stationären Schwingungen sehr selten und gelten dann höchstens für beschränkte Gebiete und für kurze Zeiten. Im allgemeinen ändert sich also das Wellenbild bei Verschiebung des Analysenintervalls mit der Zeit. Immerhin ergibt aber diese synoptische Darstellung der Harmonischen Konstituenten den beachtlichen Vorteil, daß die schnelle Veränderlichkeit der Originalbeobachtungen durch die Transformation mittels der Harmonischen Analyse in eine langsame übergeführt wird. Die langsame zeitliche Veränderlichkeit der synoptischen Wellenbilder macht sie zu einem geeigneten Hilfsmittel bei allen Versuchen, einen zweidimensionalen Beobachtungsvorgang auf Grund der in ihm vorhandenen Periodizitäten über das Analysenintervall hinaus zu extrapolieren. Die Konstruktion synoptischer Wellenbilder wird daher auch bei der Analyse meteorologischer Beobachtungsreihen eine große Rolle spielen, nicht nur, sofern es sich um das Studium der periodischen Eigenschaften der meteorologischen Elemente selbst handelt, sondern auch bei allen Versuchen, diese zu einer kurz- oder langfristigen Wettervorhersage heranzuziehen.

7. Symmetrieeigenschaften von Beobachtungsreihen und -netzen.

Eine der hervorstechendsten Eigenschaften der einfachen trigonometrischen Funktionen ist neben ihrer reinen Periodizität ihre *Symmetrie* in bezug auf bestimmte Abszissen. Beide Eigenschaften können, wie das Beispiel der Sinuswelle ja lehrt, in einer und derselben Funktion vereinigt sein, sind aber trotzdem unabhängig voneinander. Es gibt rein periodische Funktionen, die keine Symmetrieeigenschaften besitzen, und es gibt symmetrische Funktionen, die nicht rein periodisch sind.

Wir kennen zwei verschiedene Arten von Symmetrie: die spiegelbildliche und die verkehrt-spiegelbildliche Symmetrie. Eine reine Sinuswelle ist spiegelbildlich-symmetrisch in bezug auf die Phasen 90° , 270° usw. und verkehrtspiegelbildlich-symmetrisch in bezug auf die Phasen

0° , 180° usw. und die Abszissenachse als Bezugslinie. Man kann das auch so ausdrücken: Die Funktion

$$f(t) = c + a \cos \alpha t$$

ist in bezug auf die Phasen 0° , 180° , ... spiegelbildlich-symmetrisch, die Funktion

$$f(t) = c + a \sin \alpha t$$

in bezug auf die gleichen Phasen und auf $y = c$ als Bezugslinie verkehrtspiegelbildlich-symmetrisch. Da \cos eine gerade, \sin eine ungerade Funktion ist, bezeichnet man die beiden Arten von Symmetrie sinngemäß auch als gerade bzw. ungerade Symmetrie. Allgemein spricht man von gerader Symmetrie, wenn, in bezug auf die Abszisse $t = t_0$, die Funktionalgleichung

$$f(t_0 + t) = f(t_0 - t)$$

erfüllt ist. Ungerade Symmetrie herrscht, wenn

$$f(t_0 + t) - c = -[f(t_0 - t) - c],$$

wobei c eine den Funktionsmittelwert darstellende Konstante bedeutet.

Bei empirischen Funktionen sind die Symmetriebedingungen, wenn überhaupt, niemals rein erfüllt, schon wegen der in fast allen vorkommenden Fällen vorhandenen Beobachtungsfehler. Man wird also hier, um den Symmetriebegriff überhaupt nutzbringend anwenden zu können, ähnliche Einschränkungen machen müssen, wie sich das auch bei der Anwendung des Begriffs der reinen Periodizität (s. I, 9) als notwendig herausgestellt hatte. Wir wollen demnach im erweiterten Sinne auch dann von „Symmetrie“ reden, wenn die Funktionalbedingungen nur innerhalb gewisser Fehlergrenzen erfüllt sind, überdies aber auch dann, wenn die Symmetrie sich nur auf einen endlichen Bereich zu beiden Seiten des Symmetriemittelpunktes (Abszisse t_0) erstreckt, darüber hinaus aber nicht mehr vorhanden ist. Diese „zeitlich begrenzte Symmetrie“ könnte sich so äußern, daß die Grenzen des Symmetriebereiches scharf ausgeprägt sind — in der Praxis ist aber eher der Fall zu erwarten, daß mit wachsender Entfernung vom Symmetriemittelpunkt (der auch kurz als *Symmetriepunkt* bezeichnet wird) die anfangs geringen Widersprüche gegen die Symmetriebedingung immer größer werden, bis sie schließlich die zulässige Grenze überschreiten. Wo diese Grenze zu suchen ist, wird immer bis zu einem gewissen Grade willkürlich bleiben. Solche nicht scharf begrenzten Symmetriegebiete hat L. WEICKMANN in Luftdruckkurven gesucht und gefunden — die Ausdehnung derselben beträgt in Einzelfällen bis zu 50 Tagen vor- und rückwärts vom Symmetriepunkt aus gerechnet. Die Häufigkeit gerader und ungerader Symmetriepunkte scheint ungefähr gleich groß zu sein.

Da die Sinuswelle zugleich die einfachste rein periodische als auch die einfachste symmetrische Funktion ist (die sogar unendlich viele

gerade und ungerade Symmetriepunkte besitzt), so ist, trotzdem die Begriffe der Periodizität und der Symmetrie voneinander unabhängig sind, doch eine gewisse Beziehung zwischen ihnen zu erwarten. Diese Beziehung wird aufgedeckt, wenn wir eine symmetrische Funktion beliebiger Gestalt in eine FOURIERSche Reihe entwickeln, und zwar in einem Analysenintervall, dessen Mittelpunkt der Symmetriepunkt ist, und das ganz innerhalb des Symmetriebereiches liegt. Ist die allgemeine Form der FOURIERSchen Reihe

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \alpha(t - t_0) + a_2 \cos 2\alpha(t - t_0) + \dots \\ + b_1 \sin \alpha(t - t_0) + b_2 \sin 2\alpha(t - t_0) + \dots,$$

so folgt auf Grund der Symmetriebedingungen, daß, abgesehen von dem konstanten Glied a_0 , bei *gerader* Symmetrie nur *cos*-Glieder, bei *ungerader* Symmetrie nur *sin*-Glieder auftreten. Ist $t = t_0$ ein Symmetriepunkt, und liegt die (äquidistante) Ordinatenfolge

$$f(t_{-n}); f(t_{-n+1}); \dots, f(t_{-1}); f(t_0); f(t_1); \dots, f(t_{n-1}); f(t_n)$$

ganz innerhalb des Symmetriegebietes, so folgt in der Tat aus den Funktionalgleichungen bei gerader Symmetrie

$$b_\mu = \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{v=-n}^{+n} f(t_v) \sin \alpha_\mu(t_v - t_0) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

und bei ungerader Symmetrie

$$a_\mu = \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{v=-n}^{+n} f(t_v) \cos \alpha_\mu(t_v - t_0) = 0.$$

Das Ergebnis läßt sich auch so ausdrücken, daß bei Symmetrie die Elementarwellen, aus denen sich die Beobachtungskurve zusammensetzt, im Symmetriepunkt in bestimmter Weise „in Phase“ sein müssen, und zwar so, daß in einem geraden Symmetriepunkt alle Elementarwellen Extrema (Maxima oder Minima), in einem ungeraden Symmetriepunkt dagegen Nullstellen aufweisen müssen. Ist die Symmetrie unvollkommen, so wird diese Bedingung entsprechend ungenau erfüllt sein; die Phasen werden also im Symmetriepunkt von ihrem Idealwert mehr oder weniger abweichen, wobei zu bemerken ist, daß eine Abweichung um so weniger ins Gewicht fällt, je kleiner die Amplitude der betreffenden Schwingung ist. Auf Grund dieser Bemerkung, deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet, läßt sich ein numerisches Maß für die Güte und Art (gerade oder ungerade) eines Symmetriepunktes konstruieren. Ist das Amplitudenquadrat der μ -ten Welle der obigen harmonischen Entwicklung

$$c_\mu^2 = a_\mu^2 + b_\mu^2,$$

so ergibt sich nach dem Gesagten für die Intervallmitte ein gerader Symmetriepunkt, wenn

$$S_n = \frac{\sum_{\mu=1}^n b_{\mu}^2}{\sum_{\mu=1}^n c_{\mu}^2} = 0; \quad C_n = \frac{\sum_{\mu=1}^n a_{\mu}^2}{\sum_{\mu=1}^n c_{\mu}^2} = 1 - S_n = 1$$

und ein ungerader Symmetriepunkt, wenn umgekehrt

$$S_n = 1; \quad C_n = 0.$$

Jede der beiden Funktionen S_n oder C_n läßt sich mithin als „Symmetrieindex“ benutzen — bei unvollständiger Symmetrie wird man nicht verlangen, daß der Symmetrieindex genau gleich 0 oder 1 ist, sondern wird gewisse Schranken festsetzen, oberhalb oder unterhalb derer er liegen muß, und deren Feststellung der Erfahrung des Rechners überlassen bleiben muß. Statt der Größen S_n oder C_n kann man auch — wie es K. LEHMANN (Lit. 156) in bezug auf Symmetriepunkte des Luftdrucks getan hat — den mit ihnen eng zusammenhängenden Ausdruck

$$K_n = 1 - 2 S_n = 2 C_n - 1$$

als Symmetriekriterium benutzen, der für gerade Symmetrie den Wert + 1, für ungerade Symmetrie den Wert - 1 annimmt. Mathematisch stellt das letztere Kriterium nichts anderes dar, als den Korrelationskoeffizienten¹ zwischen der auf ihren Mittelwert

$$a_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{v=-n}^{+n} f(t_v)$$

bezogenen Beobachtungsreihe und der um den Symmetriepunkt umgeklappten Reihe, der ja die gleichen Eigenschaften zeigen muß.

Natürlich ist es nicht unbedingt nötig, zur Feststellung einer Symmetrie auf die Harmonischen Konstanten zurückzugehen. Legt man auf die Ableitung einer Maßzahl für die Güte der Symmetrie keinen Wert, so wird schon ein bloßer Vergleich der Beobachtungskurve mit ihrem Spiegelbild bezüglich der im Symmetriepunkt gezogenen Ordinate in den meisten Fällen eine klare Entscheidung bringen. Ein numerisches Maß für die Symmetrie erhält man ferner schon auf Grund der Funktionalbedingungen für die Symmetrie direkt. Sei die gegebene Folge der Kürze wegen mit

$$f_{-n}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_n$$

bezeichnet, und sei ferner das konstante Entwicklungsglied null, also

$$\sum_{v=-n}^{+n} f_v = 0,$$

so erhalten wir, nach dem Vorschlag von C. REINSBERG (Lit. 215) ein Symmetriendiagramm, indem wir die Quadratsumme

$$\sum_{v=-n}^{+n} (f_v - f_{-v})^2$$

¹ Siehe IV, 6.

in Beziehung zu der Streuung der Beobachtungen setzen. Offenbar ist für den Fall der geraden Symmetrie ($f_v = f_{-v}$)

$$\frac{\sum_{v=-n}^{+n} (f_v - f_{-v})^2}{\sum_{v=-n}^{+n} (f_v + f_{-v})^2 + \sum_{v=-n}^{+n} (f_v - f_{-v})^2} = \frac{\sum_{v=-n}^{+n} (f_v - f_{-v})^2}{4 \sum_{v=-n}^{+n} f_v^2} = 0,$$

dagegen nimmt dieser Ausdruck bei ungerader Symmetrie ($f_v = -f_{-v}$) den Wert 1 an. Es läßt sich leicht zeigen, daß der so gewonnene Ausdruck mit dem Symmetrieindex S_n identisch ist, sofern bei dessen Bildung sämtliche FOURIER-Koeffizienten der Entwicklung herangezogen worden sind. Es könnte also scheinen, daß die Rückwärtsberechnung des Symmetrieindex aus den FOURIER-Konstanten einen umständlichen Umweg darstellt, der lediglich theoretisch interessant ist, aber praktische Bedeutung nicht besitzt. Das ist vielleicht im allgemeinen auch der Fall — bei dem einzigen praktischen Problem der Geophysik, in dem Symmetriebetrachtungen bisher in größerem Stil durchgeführt worden sind, nämlich bei der Bearbeitung der WEICKMANNschen Symmetriepunkte des Luftdrucks, kann diese Bevorzugung der einen vor der anderen Methode nicht aufrechterhalten werden. Die Untersuchungen von WEICKMANN, MILDNER u. a. haben nämlich gezeigt, daß die (im allgemeinen sehr unvollkommene) Symmetrie der Luftdruckkurven sich hauptsächlich auf die Schwingungen größerer Wellenlänge erstreckt, während sie für die kurzen Schwingungen ($< 7^d$) seltener oder gar nicht vorhanden ist. Das hängt offenbar mit der Erfahrungstatsache zusammen, daß die Lebensdauer der Luftdruckschwingungen (sofern man überhaupt von Schwingungen reden darf) um so kürzer ist, je kleiner die Wellenlänge ist. Es werden also die kleineren Oberschwingungen in einem mäßig großen Analysenintervall im allgemeinen keinen reellen Schwingungen entsprechen, die durch das ganze Intervall hindurch persistent sind, während dies für größere Schwingungen sehr wohl der Fall sein kann. Symmetrien werden also meist dann entstehen, wenn wenige Wellen von längerer Periode und dominierender Amplitude in Phase sind, während dies für die große Menge der kleineren und kleinsten Oberschwingungen nur gelegentlich (zufällig) erfüllt ist. Man wird also die Symmetrie eines Kurvenstückes schon dann ausschöpfen, wenn man die Entwicklungskoeffizienten bei einer mäßig hohen Ordnung abbricht. Bricht man etwa bei der r -ten Ordnung ab, so hat man für den Symmetrieindex sinngemäß zu setzen:

$$S_r = \frac{\sum_{\mu=1}^r b_{\mu}^2}{\sum_{\mu=1}^r c_{\mu}^2}.$$

Dieser Ausdruck, der ein Symmetriemaß für eine mehr oder weniger stark *geglättete* Kurve darstellt, also, mit anderen Worten, auf kurz-

periodische Schwankungen der Beobachtungsreihe keine Rücksicht nimmt, ist sehr leicht zu gewinnen, da die Summen nur eine beschränkte Anzahl von Gliedern enthalten. (Bei einem Analysenintervall von 60 Tagen hat Verfasser an Luftdruckkurven die Erfahrung gemacht, daß Symmetrien auf diese Weise schon befriedigend erhalten werden, wenn man sich auf die ersten 6 Harmonischen Glieder beschränkt und

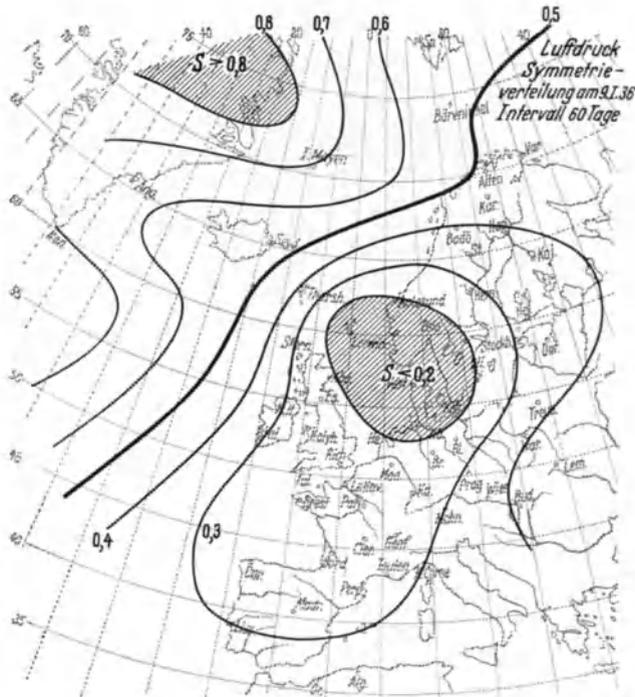


Abb. 9. Luftdruck. Symmetrieverteilung am 9. I. 36. Intervall 60 Tage.

verlangt, daß für gerade Symmetrie $S_6 < 0,2$ und für ungerade Symmetrie $S_6 > 0,8$ sein soll.) Die Berechnung von Symmetrieindices aus FOURIER-Koeffizienten wird also immer dann von Vorteil sein, wenn entsprechende trigonometrische Entwicklungen bis zu einer mäßig hohen Ordnung schon zum Zwecke anderweitiger periodographischer Untersuchungen vorgenommen worden sind. Die Symmetrieindices bilden dann ein wertvolles und leicht zu erhaltendes Nebenprodukt der Rechnung.

Die Symmetriekriterien kann man — einerlei, auf welche Weise sie entstanden sind — nach verschiedener Richtung hin auswerten. Hier seien drei verschiedene Untersuchungsarten angeführt:

1. Das Analysenintervall wird konstant gehalten, aber gleitend längs der Zeitachse verschoben. Der sich jeweils auf die Intervallmitte beziehende Symmetrieindex ergibt sich dann als Funktion der Zeit. Die Maxima und Minima dieser Funktion ergeben dann — sofern sie hinreichend extrem sind, die Lage und Art der Symmetriepunkte.

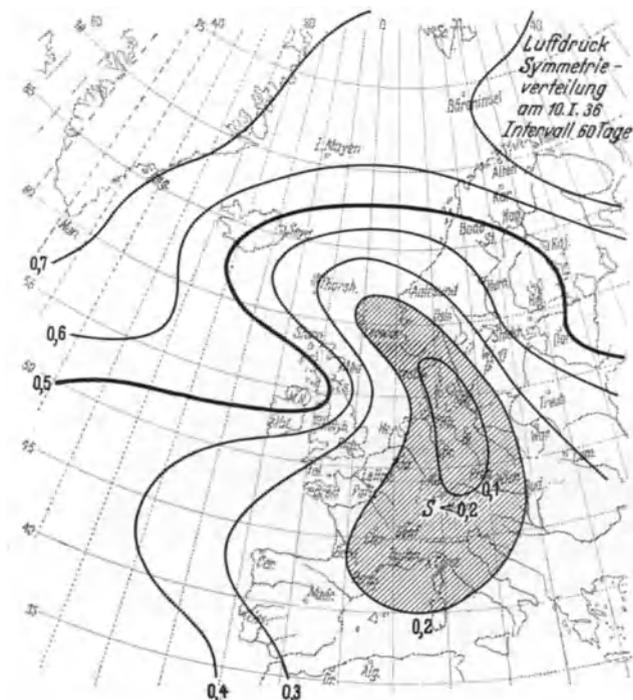


Abb. 10. Luftdruck. Symmetrieverteilung am 10. I. 36. Intervall 60 Tage.

2. Ist ein Symmetriepunkt gefunden, so läßt sich der ihm zugeordnete Symmetriebereich ermitteln, indem man den Symmetrieindex für Intervalle verschiedener Länge ermittelt, die den Symmetriepunkt als Mittelpunkt enthalten.

3. Ist ein Beobachtungsnetz vorhanden, so kann man die Untersuchungen für alle Stationen des Netzes gemeinsam durchführen und die Ergebnisse in der üblichen Weise synoptisch aufzeichnen. Für ein festes Zeitintervall ergibt sich auf diese Weise ein System von Linien gleicher Symmetrie. In Abb. 9 und 10 ist ein Beispiel dargestellt, das sich auf ein 60tägiges Zeitintervall und die auf seine Mitte bezogenen Symmetrieindices des Luftdruckes bezieht. Es handelt sich um den (in Leipzig zuerst aufgefundenen) Symmetriepunkt vom 9. und 10. Jan. 1936.

Die synoptische Verteilung zeigt, daß am 9. I. einem Gebiet gerader Symmetrie über Norddeutschland, Dänemark und Südkandinavien ein Gebiet ungerader Symmetrie über Ostgrönland gegenübersteht. Die Symmetrieverteilung für den nächsten Tag (Abb. 10) zeigt die rasche Veränderlichkeit der Symmetriemaßzahlen.

Drittes Kapitel.

Das Periodogramm.

1. Das Amplitudenspektrum und die optische Analogie.

Im Jahre 1898 hat A. SCHUSTER ein neues Hilfsmittel in die Periodenforschung eingeführt, das er als „*Periodogramm*“ (mitunter auch weniger glücklich als Periodograph) bezeichnet. Im Grunde genommen handelt es sich hierbei um nichts anderes als eine Verallgemeinerung der in der Harmonischen Analyse angewandten Überlegungen, die dadurch erzielt wird, daß die strenge Bindung an die ursprüngliche Fragestellung der Harmonischen Analyse in bestimmter Weise aufgelockert wird. Dafür wird der Schwerpunkt des Problems nach einer anderen, für die Bedürfnisse der periodographischen Praxis außerordentlich wichtigen Seite verschoben: es wird nicht mehr gefragt nach der interpolatorischen oder näherungsweise Darstellung der gegebenen Beobachtungsreihe durch periodische Funktionen, sondern nach der Existenz von Periodizitäten überhaupt, nach den Möglichkeiten, sie aus einer Menge von andersperiodischen und unperiodischen Bestandteilen herauszusuchen, ihre Eigenschaften zu bestimmen und gegebenenfalls auch ihre physikalische Bedingtheit unter Beweis zu stellen oder wenigstens wahrscheinlich zu machen. Die Periodogrammtheorie löst daher einesteils Aufgaben, wie sie im fünften Kapitel behandelt werden, aber unter größerer Anlehnung an die Methoden der Harmonischen Analyse, darüber hinaus aber führt sie auf Begriffe wie „physikalische Realität“, die nur im engen Zusammenhang mit der Erfahrung selbst und ihren Gesetzen einen Sinn haben. Sie ist daher keineswegs eine geschlossene Theorie, sondern ist eher als ein *Programm* zu betrachten, nach dem gewisse Probleme anzugreifen sind, und das in seinen Auswirkungen, je nach der Art des Gegenstandes, zu außerordentlich verschiedenartigen Spezialmethoden und Gedankengängen führen kann. So hat denn auch die Erfahrung der 40 Jahre, die seit dem Erscheinen der ersten SCHUSTERSCHEN Arbeit verfließen sind, eine erhebliche Veränderung des Bildes bewirkt, das die Periodogrammtheorie im Rahmen der Periodenforschung darstellte. Die Art, wie sie von den verschiedenen Forschern, die sich ihrer bedient

haben, angewandt wurde, war genau so individuell bedingt wie das Urteil über ihre Zweckmäßigkeit, das auch in den letzten 10 Jahren noch auffallend geschwankt hat.

In der folgenden Darstellung der Periodogrammtheorie, die sich über zwei Kapitel dieses Buches erstrecken wird, sollen die rein analytischen Betrachtungen von den wahrscheinlichkeitstheoretisch-statistischen nach Möglichkeit getrennt werden — die ersteren werden in diesem, die letzteren im nächsten Kapitel behandelt. Die Darstellung selbst wird von denjenigen Gesichtspunkten ausgehen, die dem heutigen Stand der Forschung am besten angepaßt sind — es werden daher manche Gedankengänge eingeflochten und von vornherein eingeführt werden, die dem Schöpfer der Theorie noch fernelegen haben.

Wir beginnen mit den Betrachtungen, die dazu führen, aus einem gegebenen Beobachtungsmaterial Periodizitäten abzuleiten und zu isolieren, wobei die Frage nach ihrer physikalischen Bedingtheit einstweilen noch offen zu lassen ist. Unter einer *Periodizität* möge ein Bestandteil der Kurve oder Beobachtungsreihe verstanden werden, der mathematisch in seiner einfachsten Gestalt durch eine Sinuswelle

$$a \cos \alpha t + b \sin \alpha t = c \cdot \cos (\alpha t - \psi) = c \sin (\alpha t + \psi')$$

wiedergegeben werden kann. Eine solche einfache Periodizität oder „Schwingung“ ist durch drei unabhängige Konstante

$$\alpha; a, b \text{ bzw. } \alpha; c, \psi (\psi')$$

bestimmt, also durch den Parameter $\frac{2\pi}{\alpha}$ (Wellenlänge, Periode) oder auch α (Frequenz) und durch einen Vektor mit den rechtwinkligen Komponenten a, b bzw. mit der Amplitude c und der Phase ψ bzw. ψ' . Ist nun die Aufgabe gestellt, eine in einem Beobachtungsmaterial verborgene Periodizität aufzusuchen, so ist klar, daß neben der Wellenlänge oder Frequenz der *Amplitude* eine erhöhte Bedeutung zukommt, während die Phase zunächst eine untergeordnete Rolle spielt. Denn, wenn die Frage gestellt wird, ob in einer beobachteten Naturerscheinung eine Periode *existiert*, wird in erster Linie ihre Amplitude darüber Auskunft geben, während die Phase lediglich die zeitliche Lage der Maxima und Minima der Schwingung in dem gewählten Koordinatensystem feststellt. In der Tat kann man schreiben

$$c \cdot \cos (\alpha t - \psi) = c \cdot \cos (\alpha (t - t_0) - (\psi - \alpha t_0)),$$

woraus ersichtlich ist, daß lediglich die *Phase* von dem willkürlichen Anfangspunkt der Zeitkoordinate abhängt, die Amplitude aber nicht, ebensowenig wie die Frequenz.

Zerlegt man eine (endlich ausgedehnte) Kurve oder Beobachtungsreihe, in ihrem Definitionsbereich $[0, p]$ als Grundintervall, in eine

FOURIERSche Reihe, so stellt die Folge der Amplituden der Teil-
schwingungen

$$c_1, c_2, c_3, \dots$$

eine vorläufige Beantwortung der Frage nach den periodischen Eigen-
schaften des Beobachtungsmaterials dar: sie sagt aus, daß sich der
beobachtete Vorgang als Summe von Einzelschwingungen mit den
Frequenzen

$$\alpha_\nu = \frac{2\pi}{p} \cdot \nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

bzw. den Wellenlängen

$$p, \frac{1}{2}p, \frac{1}{3}p, \dots$$

darstellen läßt, während die Folge der Amplituden, die endlich (Beob-
achtungsreihe) oder unendlich (Kurve) sein kann, über die relative
Bedeutung der einzelnen Schwingungen Auskunft gibt. Ragt eine
einzelne (oder mehrere) dieser Amplituden aus der Menge der übrigen
deutlich hervor, so ist damit gezeigt, daß sich die Beobachtungen durch
eine (oder mehrere) Schwingungen angenähert darstellen lassen. —
Nehmen wir an, daß die analysierten Beobachtungen bereits Ab-
weichungen von Gesamtmittel $a_0 = \frac{1}{p} \sum y_\nu$ darstellen, daß also das
konstante FOURIER-Glied a_0 , auf das es bei Periodizitätsbetrachtungen
nicht ankommt, vorher eliminiert sei, so lautet nämlich die „Vollständig-
keitsrelation“

$$\frac{1}{p} \sum y_\nu^2 \left(\text{bzw. } \frac{1}{p} \int_0^p f^2(t) dt \right) = \frac{1}{2} \sum_1 c_\nu^2,$$

es ist also ersichtlich, daß die wenigen Amplituden hervorragenden
Betrages an der Bildung der Quadratsumme einen größeren Anteil
haben, als selbst eine bedeutende Menge von Amplituden kleiner und
kleinster Größenordnung. Zeichnet man demnach die Folge der Ampli-
tuden als Funktion ihrer Frequenzen auf, so ergibt dies Diagramm ein
graphisches Bild von den allgemeinen periodischen Eigenschaften des
Materials. Noch besser ist es, den Anteil der Amplituden an der „Voll-
ständigkeit“ in dem Diagramm auszudrücken. Das geschieht entweder
dadurch, daß man das *Quadrat der Amplituden* statt der Amplituden
selbst in das Diagramm einträgt, oder aber das Verhältnis

$$\frac{c_\nu^2}{2\sigma^2} = \frac{\frac{1}{2}c_\nu^2}{\frac{1}{p} \sum y_\nu^2},$$

das den Prozentsatz direkt angibt, mit dem jedes Amplitudenquadrat
an der Erfüllung der Vollständigkeitsbedingung beteiligt ist. σ ist dabei

die „*Streuung*“ der Beobachtungen um ihren Mittelwert. Die Aufzeichnung der Amplituden oder ihrer Quadrate als Funktion der Wellenlänge oder der Frequenz wollen wir allgemein als „*Spektrum*“ bezeichnen.

Das Spektrum in einer der drei hier angegebenen Gestalten kann also gegebenenfalls dazu dienen, dem Bearbeiter einer Beobachtungsreihe Aufschluß zu geben über das Vorhandensein von Periodizitäten überhaupt, über die Zahl und die ungefähre Wellenlänge der Perioden und über ihren Anteil an dem Gesamtaufbau des Materials. Alle übrigen Aufgaben — die genaue Festlegung der Periodenlänge, der Amplitude und Phase — bleiben weiteren Untersuchungen vorbehalten. Nur in *einem* Falle ist die Bestimmung der Wellenlängen und Amplituden bereits abgeschlossen, dann nämlich, wenn die Beobachtungsreihe *rein periodisch* war und ihre Grundperiode oder ein Vielfaches von ihr als Analysenintervall gewählt war. Diesen Fall wollen wir in Zukunft immer ausschließen, da er bereits früher vollständig erledigt worden ist. Sonst aber stellt das Spektrum lediglich eine *vorläufige Durchmusterung* des Materials nach Periodizitäten dar. Wie wichtig ein solcher Überblick über Zahl und Bedeutung etwaiger Periodizitäten für die weitere Untersuchung ist, zeigen die Betrachtungen des fünften Kapitels, in denen es häufig vorkommen wird, daß vor Anwendung einer Methode der Periodenbestimmung die Kenntnis der Periodenzahl gefordert werden muß, da sonst die Gefahr eines falschen Rechnungsansatzes allzu groß ist.

Andererseits kann die Durchmusterung eines Beobachtungsmaterials mit Hilfe des Spektrums auch ergeben, daß Amplituden von hervorstechender Größe nicht vorhanden sind, oder daß sich große Amplituden in breiteren Bereichen des Spektraldiagramms stark häufen. In beiden Fällen wird der Bearbeiter von der Möglichkeit einer einfachen Zerlegung des Vorgangs in Einzelschwingungen nicht überzeugt sein — er wird infolgedessen die weitere Untersuchung nicht von vornherein auf einer solchen Annahme aufbauen, sondern — je nach den Umständen — andere Maßnahmen ergreifen.

SCHUSTER hat zur Verständlichmachung der Eigenschaften des Amplitudendiagramms einen sehr treffenden physikalischen Vergleich angeführt, der es erlaubt, diese Eigenschaften mit der periodischen Struktur des Materials unmittelbar und sehr anschaulich in Verbindung zu bringen. Die von uns gewählte Bezeichnung „Spektrum“ deutet auf diese Analogie bereits hin. Das *Licht* besteht bekanntlich aus einer Menge von Elementarschwingungen der verschiedensten Wellenlängen. Durch ein *Prisma* werden diese in einem Lichtstrahl gesammelten Schwingungen voneinander getrennt: es entsteht ein (farbiges) Band, das *Spektrum*, in dem jede einzelne Stelle einer bestimmten Wellenfrequenz entspricht und durch ihre Helligkeit die Intensität der betreffenden Elementarschwingungen anzeigt. Das Spektrum liefert die Schwingungsintensitäten der Elementarwellen als Funktion ihrer Frequenzen, leistet

also für die Analyse des Lichts genau dasselbe wie das oben beschriebene und ebenso bezeichnete Diagramm für die Analyse der Beobachtungsfunktion. Je nach der Schwingungsart der Lichtquelle kann das Spektrum verschiedenartige Struktur besitzen: ein leuchtendes Gas, das nur Schwingungen bestimmter und diskreter Frequenzen aussendet, gibt ein *diskontinuierliches* Spektrum, das aus einzelnen isolierten „Linien“ besteht. Eine Lichtquelle hingegen, in der Schwingungen aller Wellengattungen ohne Bevorzugung einzelner Frequenzen vertreten sind, liefert ein „*kontinuierliches*“ Spektrum“. Dazwischen gibt es alle möglichen Kombinationen und Übergänge: Linienspektren, die auf kontinuierlichem Untergrunde erscheinen, entsprechen periodischen Vorgängen, die mit unperiodischen vermischt sind. Ferner gibt es „*Bandenspektren*“, in denen bestimmte endlich ausgedehnte Teile des Spektralbereiches hell, andere wieder dunkel sind — solche Banden lassen sich als verbreiterte Spektrallinien bezeichnen, sie kommen immer dann vor, wenn der Vorgang zwar Frequenzen von bestimmter Größenordnung bevorzugt, diese aber dem Werte nach mehr oder weniger starken Streuungen unterworfen sind.

Diese optische Analogie ist insofern ein unvollkommener Vergleich, als es sich bei der FOURIER-Analyse endlicher Beobachtungsreihen eigentlich immer um Linienspektren handelt, da ja die vorkommenden Perioden auf die Grundperiode und ihre Oberschwingungen beschränkt bleiben. Je länger aber die Grundperiode gewählt wird, um so größer ist auch die Dichte der „Linien“. Dehnt man also das Analysenintervall beliebig aus, so erfolgt eine fortschreitende Verdichtung des Spektrums. Das kontinuierliche Spektrum stellt dann den Grenzfall für unendliche Ausdehnung der Beobachtungsreihe dar. Nur wenn der Beobachtungsvorgang rein periodisch ist oder sich streng durch Addition endlich vieler Wellenbewegungen von konstanter Periode, Amplitude und Phase zusammensetzen läßt, wird an dem Bilde eines Linienspektrums bei noch so großer Ausdehnung des Untersuchungsmaterials nichts Wesentliches geändert — im Gegenteil, die Festlegung der Linien im Spektralbereich wird bei fortschreitender Verdichtung immer sicherer.

2. Das Spektrum einer einfachen Welle.

Die analytischen Grundlagen der Periodogrammtheorie lassen sich am besten an Hand des einfachsten Beispiels herausarbeiten, das die Periodenforschung kennt: einer gewöhnlichen und *persistenten*, d. h. beständig fortschreitenden und in bezug auf ihre charakteristischen Konstanten unveränderlichen Sinuswelle. Die persistente Sinus-schwingung ist ein rein periodischer Vorgang und bietet somit kein Problem mehr, wenn ihre Wellenlänge bekannt ist. In der Periodogrammtheorie ist hingegen die Wellenlänge als unbekanntes Größe zu betrachten.

Nun läßt sich zwar eine einzelne ungestörte oder nur wenig gestörte Sinuswelle aus dem Kurvenbilde direkt als solche erkennen, so daß eine unmittelbare Bestimmung dieser Unbekannten keine besonderen Schwierigkeiten machen würde. In der Praxis liegt dieser Fall aber selten vor, da meist unperiodische und andersperiodische Störungen größeren Betrages das Wellenbild verzerren oder ganz verwischen. Wir werden also die Möglichkeit einer trivialen Bestimmung der Grundperiode — etwa aus dem Abstand der Maxima und Minima der vorliegenden Kurve — hier ganz außer acht lassen. Soll daher die Harmonische Analyse als Rechnungsmittel herangezogen werden, so ist das Analysenintervall, mit dem wir zu arbeiten haben, nicht vorgeschrieben oder natürlich bedingt, sondern mehr oder weniger der Willkür des Rechners überlassen. Es besteht lediglich eine obere Schranke für das Analysenintervall, die durch die Ausdehnung des tatsächlich vorhandenen Beobachtungsmaterials gegeben ist.

Die Analyse einer einfachen Sinusschwingung

$$f(t) = c \sin(\alpha t + \beta)$$

in einem Grundintervall, das mit der Wellenlänge nicht in Beziehung steht, ist in Abschnitt (II, 1) unter der Bezeichnung „Unharmonische Welle“ [letztes Beispiel (e)] behandelt worden. Die Länge des Grundintervalls war dort 2π , die Übertragung der Formeln auf ein beliebig langes Intervall $[0, p]$ würde die FOURIER-Koeffizienten in der allgemeineren Form:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt = c \cdot \frac{\sin \frac{p\alpha}{2}}{\frac{p\alpha}{2}} \cdot \sin\left(\frac{p\alpha}{2} + \beta\right) \\ a_\mu &= \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos x_\mu t dt \\ &= c \cdot \left\{ \frac{\sin(\alpha - x_\mu) \frac{p}{2}}{(\alpha - x_\mu) \frac{p}{2}} \cdot \sin\left((\alpha - x_\mu) \frac{p}{2} + \beta\right) + \frac{\sin(\alpha + x_\mu) \frac{p}{2}}{(\alpha + x_\mu) \frac{p}{2}} \sin\left((\alpha + x_\mu) \frac{p}{2} + \beta\right) \right\} \\ b_\mu &= \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin x_\mu t dt \\ &= c \cdot \left\{ \frac{\sin(\alpha - x_\mu) \frac{p}{2}}{(\alpha - x_\mu) \frac{p}{2}} \cdot \cos\left((\alpha - x_\mu) \frac{p}{2} + \beta\right) - \frac{\sin(\alpha + x_\mu) \frac{p}{2}}{(\alpha + x_\mu) \frac{p}{2}} \cos\left((\alpha + x_\mu) \frac{p}{2} + \beta\right) \right\} \\ &\quad \left(x_\mu = \frac{2\pi}{p} \cdot \mu; \mu = 1, 2, 3, \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2c}{p} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{p\alpha}{2} \cdot \sin \left(\frac{p\alpha}{2} + \beta \right) \\ a_\mu &= \frac{4c}{p} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 - x_\mu^2} \cdot \sin \frac{p\alpha}{2} \cdot \sin \left(\frac{p\alpha}{2} + \beta \right) \\ b_\mu &= \frac{4c}{p} \cdot \frac{x_\mu}{\alpha^2 - x_\mu^2} \cdot \sin \frac{p\alpha}{2} \cdot \cos \left(\frac{p\alpha}{2} + \beta \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ergeben.

Um die Spektralfunktion aufzustellen, berechnen wir

$$h_\mu^2 = a_\mu^2 + b_\mu^2.$$

Auf Grund der Formeln (1) erhalten wir

$$h_\mu^2 = c^2 \{ P_\mu^2 + Q_\mu^2 - 2 P_\mu Q_\mu \cos(p\alpha + 2\beta) \},$$

wobei

$$P_\mu = \frac{\sin(\alpha - x_\mu) \frac{p}{2}}{(\alpha - x_\mu) \frac{p}{2}}; \quad Q_\mu = \frac{\sin(\alpha + x_\mu) \frac{p}{2}}{(\alpha + x_\mu) \frac{p}{2}}$$

gesetzt ist. Dies läßt sich auch in der Form

$$h_\mu^2 = c^2 P_\mu^2 \{ 1 + \varepsilon_\mu^2 - 2 \varepsilon_\mu \cos(p\alpha + 2\beta) \}$$

schreiben, wobei

$$\varepsilon_\mu = \frac{Q_\mu}{P_\mu} = \frac{\alpha - x_\mu}{\alpha + x_\mu} \cdot \frac{\sin(\alpha + x_\mu) \frac{p}{2}}{\sin(\alpha - x_\mu) \frac{p}{2}} = \frac{\alpha - x_\mu}{\alpha + x_\mu}$$

wegen

$$\sin(\alpha + x_\mu) \frac{p}{2} = \sin(\alpha - x_\mu) \frac{p}{2} = \pm \sin \alpha \frac{p}{2}. \quad \left(x_\mu \frac{p}{2} = \pi \cdot \mu \right)$$

Da immer $|\varepsilon_\mu| < 1$, so folgt weiter, daß der Klammerausdruck

$$1 + \varepsilon_\mu^2 - 2 \varepsilon_\mu \cos(p\alpha + 2\beta)$$

niemals verschwindet. Infolgedessen kann die Amplitude h_μ selbst nur dann verschwinden, wenn

$$P_\mu = 0,$$

d. h. wenn

$$\alpha - x_\mu = \frac{2\pi}{p} \cdot k. \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

Das ist dann und nur dann der Fall, wenn α eine der Harmonischen Frequenzen ist, die zum Grundintervall p gehören. Nur dann besteht also das Spektrum aus einer einzigen Linie, andernfalls liefert die Analyse ein „Serienspektrum“, in dem alle möglichen Linien mit von null verschiedenen Intensitäten vertreten sind. In diesem Serienspektrum ist keine Linie vorhanden, die der „wahren“ Periode ihrer Lage nach entspricht: die an der Stelle α des Spektrums zu erwartende Linie ist vielmehr in die genannte Serie aufgespalten; die beiden der wahren

Schwingung zu beiden Seiten benachbarten Linien haben allerdings die größten Intensitäten, so daß die wahre Periode durch die Folge der Amplituden wenigstens ungefähr angezeigt wird.

Der tiefere Grund für diese Erscheinung ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß die FOURIERSche Zerlegung für eine im Intervall $[0, \phi]$ gegebene Funktion diese über das Intervall hinaus mit der Grundperiode ϕ periodisch fortsetzt. Unser Spektrum ist also identisch mit dem Spektrum einer rein periodischen Funktion mit der Grundperiode ϕ , die innerhalb $[0, \phi]$ eine Sinusschwingung mit der in ϕ nicht ganzzahlig enthaltenen Periode $\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\phi}{k}$ (k gebrochen) darstellt, die also an den Stellen

$$t = 0, \pm \phi, \pm 2\phi, \pm 3\phi, \dots$$

einen *Phasensprung* erleidet. Die im Spektrum beobachtete Aufspaltung der der wahren Periodizität entsprechenden isolierten Linie in eine Serie ist demnach die natürliche Folge der willkürlichen Wahl des Analysenintervalls, die der naturgesetzlich bedingten Form des beobachteten Schwingungsvorgangs nicht gerecht wird.

Wir ziehen nun aus den obigen Betrachtungen einige Schlußfolgerungen, die für die weiteren Überlegungen wichtig sind.

1. Die Harmonische Analyse einer in einem endlichen Intervall gegebenen Beobachtungsfunktion liefert ein diskontinuierliches Spektrum, dessen Liniendichte von der Länge des Analysenintervalls abhängt. Es entspricht dem Linienspektrum einer rein periodischen, also für einen unendlichen Bereich der unabhängigen Variablen definierten Funktion, die aus der gegebenen durch periodische Fortsetzung erhalten wird.

2. Nur solche Funktionen, die in einem unendlichen Bereich definiert und in keinem endlichen Intervall rein periodisch sind, können ein kontinuierliches Spektrum ergeben.

3. Ist die Beobachtungsfunktion, wie es in der Praxis immer der Fall ist, außerhalb des Beobachtungsbereiches unbekannt, so ist jede Verdichtung des Spektrums, die durch eine willkürliche Fortsetzung der Funktion über den ursprünglichen Bereich hinaus erzielt wird, die Ursache einer mehr oder weniger starken Verfälschung des Sachbestands, der durch den naturgesetzlichen Inhalt des Beobachtungsvorganges dargestellt wird. Unter allen denkbaren Fortsetzungen der Funktion würde nur diejenige ein richtiges Spektrum liefern, die den (unbekannten) Verlauf des Vorgangs für alle Zeiten wiedergeben würde. Auch die bei der Harmonischen Analyse bewußt oder unbewußt vorgenommene periodische Fortsetzung der Funktion stellt also eine Fiktion dar, die dem wahren Sachverhalt nicht zu entsprechen braucht.

4. Aus diesem Grunde ist es nicht von der Hand zu weisen, daß auch andere Fortsetzungen als die periodische, sofern sie hinreichend einfach sind und die Einführung willkürlicher Größen tunlichst vermeiden, ein

Spektrum liefern könnten, das die Aufsuchung der verborgenen Periodizität erleichtert. Dies Spektrum wird sogar kontinuierlich sein, wenn die Fortsetzung ins Unendliche ausgedehnt wird und in keinem endlichen Intervall periodisch ist. Wir können uns daher die Aufgabe stellen, die Fortsetzung etwa so vorzunehmen, daß die entstehende kontinuierliche Spektralfunktion an der Stelle, die der Frequenz der wahren Periodizität entspricht, ein ausgesprochenes Intensitäts- bzw. Amplitudenmaximum besitzt.

Die einfachste und voraussetzungsärmste Fortsetzung der Beobachtungsfunktion außer der periodischen ist die durch eine fingierte Funktion $F(t)$, die innerhalb des Beobachtungsbereiches mit der Beobachtungsfunktion $f(t)$ identisch, außerhalb desselben aber überall null ist. Wir können dann, zunächst für ein endliches, aber beliebig großes, den Beobachtungsbereich $[0, p]$ einschließendes Analysenintervall

$\left[-\frac{\omega}{2}, +\frac{\omega}{2}\right]$ ($\omega > 2p$), die FOURIERSche Entwicklung von $F(t)$ in der Form

$$F(t) = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi}{\omega} t + A_2 \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} t + A_3 \cos 3 \cdot \frac{2\pi}{\omega} t + \dots \\ + B_1 \sin \frac{2\pi}{\omega} t + B_2 \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} t + B_3 \sin 3 \cdot \frac{2\pi}{\omega} t + \dots$$

ansetzen, wobei

$$A_0 = \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} F(t) dt = \frac{1}{\omega} \int_0^p f(t) dt \\ A_\mu = \frac{2}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} F(t) \cos \mu \cdot \frac{2\pi}{\omega} t dt = \frac{2}{\omega} \int_0^p f(t) \cos \mu \cdot \frac{2\pi}{\omega} t dt \\ B_\mu = \frac{2}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} F(t) \sin \mu \cdot \frac{2\pi}{\omega} t dt = \frac{2}{\omega} \int_0^p f(t) \sin \mu \cdot \frac{2\pi}{\omega} t dt \\ (\mu = 1, 2, 3, \dots)$$

ist. Wir erhalten also anstatt des früheren Linienspektrums mit der Folge der Elementarperioden

$$p, \frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \dots$$

ein dichteres mit den Perioden

$$\omega, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \dots$$

Lassen wir ω beliebig anwachsen, so erreichen wir offensichtlich, daß in dem uns am meisten interessierenden Spektralbereich, der die Wellenlängen zwischen 0 und p umfaßt, die Linien beliebig dicht liegen.

Ist z. B. $\omega = n \cdot \phi$ ein ganzes Vielfaches von ϕ , so enthält der Spektralbereich zwischen zwei benachbarten Linien des früheren Spektrums, etwa zwischen den Wellenlängen $\frac{\phi}{r}$ und $\frac{\phi}{r+1}$, nunmehr die Wellenlängen

$$\frac{\omega}{nr}, \frac{\omega}{nr+1}, \frac{\omega}{nr+2}, \dots, \frac{\omega}{n(r+1)},$$

also außer den alten Linien

$$\frac{\phi}{r} = \frac{\omega}{nr}; \quad \frac{\phi}{r+1} = \frac{\omega}{n(r+1)}$$

noch $n-1$ neue. Der Grenzübergang $\omega \rightarrow \infty$ ergibt demnach eine beliebig große Liniendichte, d. h. ein kontinuierliches Spektrum. Die Frequenzen

$$x = \frac{2\pi\mu}{\omega}$$

laufen dann stetig von 0 bis ∞ . Der „Zerstreuungsfaktor“ $\frac{1}{\omega}$, der für $\omega \rightarrow \infty$ verschwindet, hat lediglich die Bedeutung einer Proportionalitätskonstante, auf die es bei der Herstellung der Spektralfunktion nicht ankommt. Wir normieren daher die Ordinaten des Spektrums dadurch, daß wir

$$a(x) = \frac{\omega}{\phi} A_\mu = \frac{2}{\phi} \int_0^{\phi} f(t) \cos xt \, dt$$

$$b(x) = \frac{\omega}{\phi} B_\mu = \frac{2}{\phi} \int_0^{\phi} f(t) \sin xt \, dt$$

$$(0 < x < \infty)$$

setzen. Da für die diskreten Frequenzen

$$x = \alpha, \quad 2\alpha, \quad 3\alpha, \quad \dots, \quad \mu\alpha, \quad \dots, \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{\phi}\right)$$

die Funktionswerte $a(x)$, $b(x)$ mit den FOURIER-Koeffizienten a_μ , b_μ übereinstimmen, stellt die stetige Funktion

$$h^2(x) = a^2(x) + b^2(x)$$

eine *Interpolation* des Amplitudendiagramms

$$h_\mu^2 = a_\mu^2 + b_\mu^2$$

dar. Diese stetige Funktion bezeichnen wir im engeren Sinne als das *Periodogramm* der Beobachtungsfunktion $f(t)$. Das Periodogramm einer einfachen Sinusschwingung von beliebiger Frequenz, die im Intervall $[0, \phi]$ beobachtet worden ist, wird daher durch die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} a(x) &= c \left\{ P(x) \sin \left((\alpha - x) \frac{\phi}{2} + \beta \right) + Q(x) \sin \left((\alpha + x) \frac{\phi}{2} + \beta \right) \right\} \\ b(x) &= c \left\{ P(x) \cos \left((\alpha - x) \frac{\phi}{2} + \beta \right) - Q(x) \cos \left((\alpha + x) \frac{\phi}{2} + \beta \right) \right\} \\ P(x) &= \frac{\sin(\alpha - x) \frac{\phi}{2}}{(\alpha - x) \frac{\phi}{2}}; & Q(x) &= \frac{\sin(\alpha + x) \frac{\phi}{2}}{(\alpha + x) \frac{\phi}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

charakterisiert, die wir als *Periodogrammkomponenten* bezeichnen, und setzt sich aus ihnen in der Form

$$h^2(x) = c^2 \{ P^2(x) + Q^2(x) - 2 P(x) Q(x) \cos(\alpha p + 2\beta) \}$$

zusammen.

3. Besondere Eigenschaften des Periodogramms einer Sinuswelle.

Die am Schluß des vorigen Abschnitts getroffene Festsetzung des Begriffs „Periodogramm“ entspricht nicht genau der von SCHUSTER eingeführten Bezeichnungsweise. In der Tat läßt sich dieser Begriff in der verschiedensten Art erweitern; auch wir wollen diesen Möglichkeiten nachgehen und uns im Hinblick auf die eigentlichen sehr allgemeinen Aufgaben der Periodogrammtheorie von einer allzu engen Fassung der Begriffe befreien. In diesem Sinne verstehen wir unter Periodogramm nicht nur die durch $h^2(x)$ oder $h(x)$ gegebene Interpolation des Spektrums, sondern allgemeiner die durch die Komponenten $a(x)$ und $b(x)$ bestimmte Vektorfunktion. Für die Praxis ist es ferner erwünscht, nicht nur diese stetigen Funktionen, sondern auch jede genügend und beliebig dichte Ordinatenauswahl aus ihnen als Periodogramm anzusehen, denn in der praktischen Analyse wird es immer nur möglich sein, eine endliche Menge von Periodogrammkomponenten zu berechnen. In diesem Sinne ist auch die Menge der FOURIER-Koeffizienten und das aus der Folge der harmonischen Amplituden gebildete „Spektrum“ als ein spezielles Periodogramm anzusehen. Schließlich dürfen wir auch von der Voraussetzung absehen, daß die Beobachtungsfunktion in Gestalt einer Kurve gegeben sei. Auch die harmonischen Konstituenten einer durch (gleichabständige) Ordinaten gegebenen diskreten Beobachtungsreihe lassen sich somit zur Erzeugung eines Periodogramms verwerten. In diesem Falle haben die Periodogrammkomponenten die Summenform

$$a(x) = \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} y_{\nu} \cos \nu x$$

$$b(x) = \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} y_{\nu} \sin \nu x$$

und stellen somit eine Interpolation der Folgen

$$a_{\mu} = \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} y_{\nu} \cos \nu x_{\mu} \quad x_{\mu} = \frac{2\pi}{p} \cdot \mu$$

$$b_{\mu} = \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} y_{\nu} \sin \nu x_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots)$$

dar. Die analytische Gestalt des Periodogramms einer einfachen Sinuswelle, die durch die Ordinatenauswahl

$$y_\nu = c \cdot \sin(\alpha \nu + \beta)$$

gegeben ist, weicht von der früheren ein wenig ab: man erhält nämlich

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{2c}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} \sin(\alpha \nu + \beta) \cos x \nu = \frac{c}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} \{ \sin((\alpha-x)\nu + \beta) + \sin((\alpha+x)\nu + \beta) \} \\ &= c \left[\frac{\sin(\alpha-x) \frac{p}{2}}{p \cdot \sin \frac{\alpha-x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{p-1}{2}(\alpha-x) + \beta\right) + \frac{\sin(\alpha+x) \frac{p}{2}}{p \cdot \sin \frac{\alpha+x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{p-1}{2}(\alpha+x) + \beta\right) \right] \\ b(x) &= \frac{2c}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} \sin(\alpha \nu + \beta) \sin x \nu = \frac{c}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} \{ \cos((\alpha-x)\nu + \beta) - \cos((\alpha+x)\nu + \beta) \} \\ &= c \left[\frac{\sin(\alpha-x) \frac{p}{2}}{p \cdot \sin \frac{\alpha-x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{p-1}{2}(\alpha-x) + \beta\right) - \frac{\sin(\alpha+x) \frac{p}{2}}{p \cdot \sin \frac{\alpha+x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{p-1}{2}(\alpha+x) + \beta\right) \right] \end{aligned}$$

Man hat also

$$P(x) = \frac{\sin(\alpha-x) \frac{p}{2}}{p \cdot \sin \frac{\alpha-x}{2}}; \quad Q(x) = \frac{\sin(\alpha+x) \frac{p}{2}}{p \cdot \sin \frac{\alpha+x}{2}};$$

zu setzen und erhält dann

$$\begin{aligned} a(x) &= c \left\{ P(x) \sin\left(\frac{p-1}{2}(\alpha-x) + \beta\right) + Q(x) \sin\left(\frac{p-1}{2}(\alpha+x) + \beta\right) \right\} \\ b(x) &= c \left\{ P(x) \cos\left(\frac{p-1}{2}(\alpha-x) + \beta\right) - Q(x) \cos\left(\frac{p-1}{2}(\alpha+x) + \beta\right) \right\} \\ h^2(x) &= c^2 \{ P^2(x) + Q^2(x) - 2P(x)Q(x) \cos((p-1)\alpha + 2\beta) \}. \end{aligned}$$

Aus den bisherigen Überlegungen ist ersichtlich, daß die analytische Gestalt des Periodogramms als der Spektralfunktion einer endlichen Beobachtungsreihe selbst dann verhältnismäßig kompliziert ist, wenn der Beobachtungsvorgang eine einfache Sinuswelle darstellt. Diese Tatsache ist oft zum Anlaß genommen worden, die Konstruktion eines Periodogramms als einen Umweg zu betrachten, durch den die Analyse des Beobachtungsvorgangs unnötig erschwert wird. Es ist tatsächlich nicht von der Hand zu weisen, daß die Beschreitung dieses Umweges bei der Lösung vieler konkreter Aufgaben in der Periodenforschung vermieden werden kann, und auch der insbesondere von TURNER (Lit. 289, 290) erhobene Einwand, daß die Ergebnisse der Harmonischen Analyse, die ja eine vollständige interpolatorische Beschreibung einer Beobachtungsreihe gestatten, und die nach dem Obigen als Spezialfall der Periodogrammberechnung anzusehen sind, schon alle periodischen Eigenschaften

des Beobachtungsvorgangs — teils explizit, teils implizit — enthalten und daher als Grundlage für die Erforschung dieser periodischen Eigenschaften ausreichen, hat seine Berechtigung. Wenn trotzdem das Periodogramm, als mathematischer Begriff wie als praktisches Hilfsmittel der Forschung, seine Bedeutung nicht eingebüßt hat, so liegt dies daran, daß die Vorteile, die es bietet, auf einem ganz anderen Felde liegen als die Gedankengänge, die zu seiner Anfechtung geführt haben. Sie liegen zum Teil sehr in der Tiefe und sind nicht dadurch zu erfassen, daß gewisse praktische Regeln, die zur Lösung gewisser Probleme dienen sollen, aufgezählt und ausgearbeitet werden. Sie lassen sich vielmehr dadurch begründen, daß die strenge Bindung an die Regeln der Harmonischen Analyse aufgelockert wird, und daß es dadurch möglich wird, nicht zum Schaden für die Entwicklung der periodographischen Wissenschaft überhaupt, neues Leben und neue Gedanken in einen alten Schematismus hineinzubringen. Der Satz, daß in der FOURIERSchen Reihe alle periodischen Eigenschaften einer Beobachtungsreihe zum Ausdruck kommen, ist zweifellos richtig, da ja die FOURIERSche Reihe nichts anderes ist als eine der Beobachtungsreihe völlig äquivalente Umordnung der Daten. Viel fruchtbarer als dieser Satz ist aber die Erkenntnis, daß auch andere Folgen von Periodogrammordinaten, bzw. von Vektoren mit ihren Komponenten, die zu anderen als den harmonischen Wellen gehören, imstande sind, die verborgenen periodischen Eigenschaften aufzuzeigen. Von dem Begriff der harmonischen Welle, deren Frequenz immer ein ganzes Vielfaches der (willkürlichen oder durch die zufällige Länge des zur Verfügung stehenden Beobachtungszeitraums gegebenen) Grundfrequenz ist, gelangen wir somit zu dem allgemeineren Begriff der „Versuchswelle“, die innerhalb des gesamten Spektralbereichs beliebig variieren kann, und die somit nicht mehr an ein Grundintervall gebunden ist.

Wir werden diese Betrachtungen grundsätzlicher Natur an gegebener Stelle fortzuführen haben; die folgenden Untersuchungen über die Eigenschaften des Periodogramms einer einfachen Sinusschwingung sollen den Weg dazu vorbereiten.

Die Funktionen $a(x)$, $b(x)$, die zunächst in der Form (3), also als Integrale, gegeben sein sollen, hängen außer von den Konstanten c , α , β der vorgelegten Schwingung (Amplitude, Frequenz, Phase) noch von der Länge des Analysenintervalls, p , und von der Frequenz der Versuchswelle, x (Versuchsfrequenz), ab. Das Periodogramm läßt sich, wie schon weiter oben gesagt wurde, als Vektor \mathfrak{P} mit den Komponenten $a(x)$, $b(x)$ auffassen; als solcher läßt es sich durch geometrische Addition zweier Teilvektoren

$$\mathfrak{P}(x) = p(x) + q(x)$$

erzeugen; die Komponenten dieser Teilvektoren sind

$$\begin{aligned} \text{(p)} \quad & \left\{ \begin{aligned} c \cdot P(x) \sin\left(\left(\alpha - x\right) \frac{p}{2} + \beta\right) &= c \cdot P(x) \cos\left(\left(x - \alpha\right) \frac{p}{2} + \gamma\right) \\ c \cdot P(x) \cos\left(\left(\alpha - x\right) \frac{p}{2} + \beta\right) &= c \cdot P(x) \sin\left(\left(x - \alpha\right) \frac{p}{2} + \gamma\right) \end{aligned} \right\} \\ \text{(q)} \quad & \left\{ \begin{aligned} c \cdot Q(x) \sin\left(\left(\alpha + x\right) \frac{p}{2} + \beta\right) &= c \cdot Q(x) \cos\left(\left(x + \alpha\right) \frac{p}{2} - \gamma\right) \\ -c \cdot Q(x) \cos\left(\left(\alpha + x\right) \frac{p}{2} + \beta\right) &= c \cdot Q(x) \sin\left(\left(x + \alpha\right) \frac{p}{2} - \gamma\right) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad \left(\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

Führt man die Phasenkonstante $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$ statt β ein, so entspricht dies der Schreibweise

$$f(t) = c \cdot \cos(\alpha t - \gamma)$$

für die Beobachtungsfunktion. Die Vektoren p und q haben demnach die (je nach der Quadrantenlage der Winkel $(x - \alpha) \frac{p}{2}$ und $(x + \alpha) \frac{p}{2}$

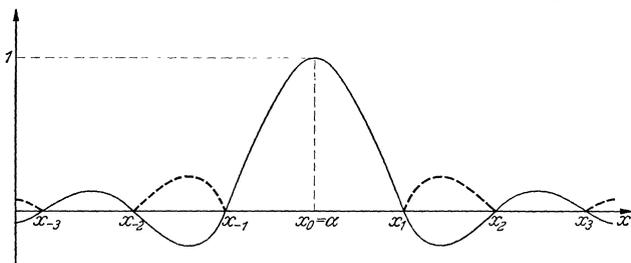


Abb. 11. $P(x)$ und $|P(x)|$.

positiv oder negativ zu rechnenden) Längen $c \cdot P(x)$ bzw. $c \cdot Q(x)$ und die Richtungswinkel (Phasen) $(x - \alpha) \frac{p}{2} + \gamma$ bzw. $(x + \alpha) \frac{p}{2} - \gamma$. Anstatt der Vektorendarstellung ist es mitunter angebracht, eine Darstellung durch komplexe Zahlen anzuwenden. Man schreibt dann

$$\begin{aligned} p(x) &= c \cdot P(x) e^{i\left(\left(x - \alpha\right) \frac{p}{2} + \gamma\right)} \\ q(x) &= c \cdot Q(x) e^{i\left(\left(x + \alpha\right) \frac{p}{2} - \gamma\right)}. \end{aligned}$$

J. BARTELS hat für die geometrische Veranschaulichung des Periodogrammvektors die Bezeichnung „Periodenuhr“ eingeführt. Eine Periodenuhr ist also ein Polarkoordinatensystem, in das die Periodogrammvektoren als „Zeiger“ von bestimmter Länge und Richtung eingetragen werden.

Läßt man nun die *Versuchsfrequenz* x als unabhängige Variable den Bereich $0 \dots \infty$ stetig durchlaufen, so entspricht die Veränderung der Vektoren $p(x)$ und $q(x)$ einer gleichmäßigen Drehung der „Zeiger“ der Periodenuhr im positiven Sinn unter gleichzeitiger stetiger Änderung der Zeigerlänge, die $P(x)$ bzw. $Q(x)$ proportional ist. Diese beiden Funktionen sind in bezug auf $x = 0$ spiegelbildlich zueinander, da $P(x) = Q(-x)$. Die geometrische Gestalt der Funktion $P(x)$ wird durch Abb. 11

wiedergegeben. $P(x)$ hat ein Hauptmaximum vom Betrage 1 bei $x = \alpha$ und ist in bezug auf diese Abszisse symmetrisch. Nullstellen sind überall dort vorhanden, wo

$$(x - \alpha) \frac{p}{2} = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

ist. Die beiden zu $x = \alpha$ symmetrisch liegenden Nullstellen

$$x_{\pm k} = \alpha \pm \frac{2\pi}{p} k$$

sollen *Nullstellen k -ter Ordnung* genannt werden. Zwischen den Nullstellen k -ter und $(k + 1)$ -ter Ordnung liegt ein *Extremum k -ter Ordnung*, und zwar ein Maximum, wenn k gerade, ein Minimum, wenn k ungerade ist. Da

$$\frac{dP}{dx} = \frac{(x - \alpha) \frac{p}{2} \cos(x - \alpha) \frac{p}{2} - \sin(x - \alpha) \frac{p}{2}}{\left[(x - \alpha) \frac{p}{2} \right]^2} \cdot \frac{p}{2},$$

so ergibt sich die Lage der Extrema höherer Ordnung aus der transzendenten Gleichung

$$\operatorname{tg}(x - \alpha) \frac{p}{2} = (x - \alpha) \frac{p}{2}.$$

Die Extremalwerte selbst sind durch

$$P_{\text{extr.}} = \cos(x - \alpha) \frac{p}{2}$$

gegeben, wenn hierin für x die Wurzeln der transzendenten Gleichung eingesetzt werden. Eine Abschätzung der Extremalbeträge läßt sich durch die Ungleichung

$$|P(x)| = \left| \frac{\sin(x - \alpha) \frac{p}{2}}{(x - \alpha) \frac{p}{2}} \right| \leq \frac{1}{|x - \alpha| \frac{p}{2}}$$

leicht durchführen, wobei $P(x)$ in der Form (3) angenommen werde. Da das Extremum k -ter Ordnung zwischen den Nullstellen k -ter und $(k + 1)$ -ter Ordnung liegt, ergibt sich nämlich:

$$|x - \alpha| \frac{p}{2} > |x_k - \alpha| \frac{p}{2} = \pi k,$$

mithin für den Betrag des Extremums k -ter Ordnung die Abschätzung

$$|P_{\text{extr.}}^{(k)}| < \frac{1}{\pi k},$$

woraus erhellt, daß die Nebenextrema zunächst rasch, später langsamer, im ganzen ungefähr hyperbolisch, gegen null abnehmen. So ist bereits das Extremum 3. Ordnung kleiner als der zehnte Teil des Hauptmaximums.

$Q(x)$ hat die gleiche geometrische Gestalt wie $P(x)$, nur mit dem Unterschied, daß das Hauptmaximum bei $x = -\alpha$, also außerhalb des

durch $x > 0$ gekennzeichneten Spektralbereichs liegt. Hieraus folgt, daß $Q(x)$ im Spektralbereich selbst gegenüber $P(x)$ eine untergeordnete Rolle spielt; da die Beträge dieser Funktionen für die „Zeigerlängen“ der Vektoren p und q in der „Periodenuhr“ maßgebend sind, können wir aus diesem Grunde p als *Hauptvektor* und q als *Störungsvektor* bezeichnen.

Die obigen Ergebnisse lassen sich nun, wie folgt, bei der Diskussion des Periodogramms einer Sinuswelle verwerten: Der Hauptvektor $p(x)$, als Funktion der Versuchsfrequenz x angesehen, erreicht das Hauptmaximum seiner Länge, wenn x mit der Frequenz α der untersuchten Welle übereinstimmt. Seine Länge ist dann gleich der Amplitude c der Welle, seine Richtung entspricht der Phase γ . Das Hauptmaximum des Vektorbetrages zeigt also durch seine Lage im Spektrum die Periode der untersuchten Schwingung an; tritt es bei $x = \alpha$ ein, so ist die gesuchte Wellenlänge $\frac{2\pi}{\alpha}$. Die Festlegung der Wellenlänge ist auf diese Weise zunächst nur ungenau möglich, da das Maximum mehr oder weniger flach ist. Es ist um so schärfer, je geringer der Abstand der beiden dem Hauptmaximum benachbarten Nullstellen erster Ordnung ist. Dieser Abstand, der als *Maximumbreite* bezeichnet wird, beträgt

$$x_1 - x_{-1} = \frac{4\pi}{p},$$

ist also von der Wellenlänge unabhängig und der Länge des Analysenintervalls p umgekehrt proportional. Für die Bestimmung der Periodizität ist demnach derjenige Bereich des als Funktion der variablen Versuchsfrequenz betrachteten Hauptvektors p maßgebend, der zwischen den beiden Nullstellen 1. Ordnung liegt und das Hauptmaximum enthält. Zu beiden Seiten des Hauptmaximums liegen in bestimmten Abständen Nebenextrema¹ von geringerem und mit fortschreitender Ordnung abnehmendem Betrage — diese können bei unkritischer Betrachtung Anlaß zur Verwechslung mit wirklichen Periodizitäten geben. SCHUSTER nannte diese Nebenerscheinung „spurious periodicities“, ein Ausdruck, den man mit „Unechte Periodizitäten“ übersetzen könnte. L. W. POLLAK bezeichnet sie auch als „Gespensterperioden“. Sie lassen sich im Rahmen der optischen Analogie am besten mit den Beugungserscheinungen vergleichen, die an Spalten endlicher Breite auftreten. Ihr wesentlicher Unterschied gegenüber den echten Periodizitäten besteht darin, daß sie bei Veränderung der Länge des Analysenintervalls ihre Lage im Spektrum verändern, während die Lage des Hauptmaximums von der Intervalllänge unabhängig ist.

Nun setzt sich der Periodogrammvektor $\mathfrak{P}(x)$ durch geometrische Addition aus dem Hauptvektor $p(x)$ und dem Störungsvektor $q(x)$

¹ In dem Diagramm der Amplituden oder Intensitäten erscheinen diese Extrema sämtlich als *Maxima* (siehe die gestrichelten Teile der Abb. 11).

zusammen; wir haben also noch abzuschätzen, bis zu welchem Betrage das durch den Hauptvektor gegebene Bild durch das unvermeidliche Hinzutreten des Störungsvektors verwischt wird. Da es, wie wir gesehen haben, bei der Diskussion des Periodogramms hauptsächlich auf die nächste Umgebung des Hauptmaximums von $p(x)$ ankommt, so genügt es, die störende Wirkung von $q(x)$ an dieser Stelle festzulegen. An der Stelle $x = \alpha$ ist aber [vgl. (3)]

$$|Q(\alpha)| = \frac{|\sin p\alpha|}{p\alpha} \cong \frac{1}{p\alpha}.$$

Ist nun die Frequenz der Beobachtungsfunktion $\alpha = \frac{2\pi}{p} \cdot r$, also die Wellenlänge in der Intervalllänge p r -mal enthalten (wobei r auch eine gebrochene Zahl sein darf), so ergibt sich $|Q(\alpha)| \cong \frac{1}{2\pi r}$. Ist z. B. $r \cong 3$, sind also in p mindestens drei vollständige Wellen der zu untersuchenden Schwingung vorhanden, so wird an der Stelle des Hauptmaximums der Periodogrammffunktion $|Q(\alpha)| \cong \frac{1}{6\pi}$, also höchstens von der Größenordnung $\frac{1}{20} P(\alpha)$.

Man sieht also, daß, wenn mindestens drei vollständige Wellen vorliegen, der Einfluß des Störungsvektors an der entscheidenden Stelle des Periodogramms sehr gering ist und den Verlauf der Periodogrammffunktion nicht wesentlich verzerrt. Das ist um so bedeutungsvoller, als das Periodogramm nach unseren bisherigen Überlegungen sowieso nur zu einer ungefähren Feststellung der Wellenlänge benutzt werden kann. Eine erhebliche Vermischung der Einflüsse von Haupt- und Störungsvektor tritt nur in dem Bereich der langen Wellen des Spektrums, also bei kleinen Frequenzen, ein. Hier werden die Verhältnisse sehr unübersichtlich; es ist somit bei Periodogrammuntersuchungen (übrigens auch aus anderen Gründen, die später [S. 134] ersichtlich werden) immer ratsam, das Analysenintervall so groß zu wählen, daß der besonders interessierende Spektralbereich nur solche Wellen umfaßt, die gegenüber p hinreichend kurz sind. Für diese läßt sich dann die Periodogrammffunktion in der Nähe ihres Hauptmaximums durch den Hauptvektor ersetzen. Man kann also genähert setzen:

$$|\mathfrak{P}(x)| \sim |p(x)| = c \cdot |P(x)|$$

und man erhält als Amplitudenfunktion einfach

$$h(x) \sim c \cdot \left| \frac{\sin(x - \alpha) \frac{p}{2}}{(x - \alpha) \frac{p}{2}} \right|$$

bzw. eine Auswahl diskreter Ordinaten dieser Funktion als Amplitudendiagramm.

Die Folge der durch die Harmonische Analyse in einem Intervall von der Länge p erhaltenen FOURIER-Amplituden stellt, wie schon

mehrfach erwähnt, einen Spezialfall einer solchen Ordinatenauswahl dar. Der Abstand der Versuchsfrequenzen ist dann konstant gleich $\frac{2\pi}{p}$, also gleich der halben Maximumbreite. Ist speziell α ein *ganzzahliges* Vielfaches von $\frac{2\pi}{p}$, die zu untersuchende Welle also eine harmonische Welle des Analysenintervalls, so trifft *eine* der Versuchsfrequenzen der Auswahl genau mit α zusammen, also mit dem Hauptmaximum des Hauptvektors, alle übrigen hingegen mit seinen Nullstellen, während vom Störungsvektor überhaupt *nur* Nullstellen getroffen werden. Das harmonische Spektrum enthält also, wie auch zu erwarten war, nur eine einzige von null verschiedene Ordinate, die gleich der Schwingungsamplitude (bzw. gleich ihrem Quadrat) ist. In allen anderen Fällen, also wenn α die Frequenz einer im Grundintervall *unharmonischen* Welle ist, wird der Hauptteil des harmonischen Spektrums, also der $\frac{4\pi}{p}$ breite Bereich zwischen den Nullstellen 1. Ordnung des Hauptvektors, in dessen Mitte die Wellenfrequenz α liegt, mit *zwei* benachbarten und von null verschiedenen Ordinaten belegt. Es ist ferner klar, daß die größere dieser beiden Ordinaten mindestens den Betrag

$$c \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2c}{\pi} = 0,6366 \cdot c$$

aufweist, so daß also die Gewähr dafür besteht, daß eine Periodizität nicht übersehen werden kann¹.

Aus diesen Überlegungen folgt, daß die spezielle durch die Harmonische Analyse gegebene Belegung des Periodogrammbereichs die Aufgabe der Durchmusterung einer Beobachtungsreihe nach isolierten Periodizitäten befriedigend löst. Genau das gleiche läßt sich aber auch von jeder anderen Ordinatenauswahl sagen, die an jeder Stelle des Periodogramms mindestens ebenso dicht ist wie die der harmonischen Amplituden. Für den Praktiker ist es aber mitunter von erheblichem Vorteil, bei der Durchmusterungsarbeit (denn um eine solche handelt es sich bis jetzt ausschließlich) nicht streng an die Einhaltung der FOURIER-Frequenzen gebunden zu sein. Wir haben vielmehr gezeigt, daß jede beliebige Folge von Versuchsfrequenzen die gleichen Dienste tut, vorausgesetzt, daß der Abstand benachbarter Frequenzen, der durchaus nicht überall der gleiche zu sein braucht, nirgends größer ist als die halbe Maximumbreite, die durch den Wert $\frac{2\pi}{p}$ gegeben ist.

Der hauptsächlichste Vorteil, der aus dieser Möglichkeit entspringt, ist der, daß die Bildung von *Summenreihen*, die wir bei der praktischen Harmonischen Analyse als bequemes und nützliches Hilfsmittel empfunden

¹ Siehe auch A. p. V., S. III.

haben, nunmehr in weit größerem Umfange als bei der eigentlichen Harmonischen Analyse nutzbar gemacht werden kann. Dies Verfahren bestand darin, daß die p gegebenen Beobachtungswerte in Zeilen von der Länge der Versuchsperiode untereinander angeordnet wurden, und der eigentliche Analysenprozeß auf die Spaltensummen dieses Schemas, also auf eine erheblich geringere Anzahl von Einzelwerten, beschränkt wurde. Die Möglichkeit der Bildung solcher Summenreihen blieb dabei auf jene Fälle beschränkt, in denen aus den p Einzelwerten der Beobachtungsreihe eine volle Anzahl (n) von Zeilen zu je r Einzelwerten gebildet werden konnte, also auf jene Versuchsperioden r , die selber ganzzahlig und in p ganzzahlig enthalten sind. Hier dagegen wird lediglich die Ganzzahligkeit von r gefordert, es sind also auch solche Zeilenanordnungen zugelassen, in denen die letzte Zeile nicht voll belegt ist. Es können demnach für beliebige ganzzahlige r die Schemata

$$\begin{array}{ccccccc}
 y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{r-1} & & \\
 y_0 & y_{r+1} & y_{r+2} & \dots & y_{2r-1} & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & (y_{p-1}) & \dots & \\
 \hline
 Y_0 & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_{r-1} & &
 \end{array}$$

zur Bildung von „Summenreihen“ (Y_0, \dots, Y_{r-1}) benutzt werden, wobei die Anzahl der Summanden in den einzelnen Summen Y_ν nicht notwendig die gleiche zu sein braucht. Die Periodogrammkomponenten berechnen sich sodann durch die Formeln

$$\begin{aligned}
 a_r &= \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} y_\nu \cos \frac{2\pi}{r} \nu = \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{r-1} Y_\nu \cos \frac{2\pi}{r} \nu \\
 b_r &= \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} y_\nu \sin \frac{2\pi}{r} \nu = \frac{2}{p} \sum_{\nu=0}^{r-1} Y_\nu \sin \frac{2\pi}{r} \nu,
 \end{aligned}$$

und man erhält alle möglichen „Versuchswellen“, die auf diese Weise gebildet werden können, indem man r die Folge aller ganzen Zahlen durchlaufen läßt, von der kleinsten Wellenlänge an, die noch in Betracht gezogen werden soll, bis zu p aufwärts. Hierbei ist nun aber zu beachten, daß ein derartiges „Periodogramm“ eine Ordinatenauswahl aus der stetigen Periodogrammfunktion darstellt, deren Dichte sich in den einzelnen Teilen des Spektralbereichs stark von der Dichte der FOURIER-Perioden unterscheidet, da hier nicht die Versuchsfrequenzen x , sondern die Versuchsperioden $\frac{2\pi}{x} = r$ eine gleichabständige Folge bilden. Soll also der durch die Maximumbreite vorgeschriebenen Abstandsbedingung der Versuchsfrequenzen genügt werden, so ergibt sich die Forderung

$$x_{r-1} - x_{r+1} = \frac{2\pi}{r-1} - \frac{2\pi}{r+1} = \frac{4\pi}{r^2-1} \leq \frac{4\pi}{p}.$$

Die Abstandsbedingung ist demnach nur dann erfüllt, wenn $r^2 - 1 \geq \phi$, also $r \geq \sqrt{\phi + 1}$ ist. Sind z. B. $\phi = 360$ Beobachtungswerte zu einem Periodogramm zu verarbeiten, so ist die Abstandsbedingung für alle Perioden von der Länge $r \geq 19$ streng erfüllt, und man kann mit Hilfe des Schemas alle *langen* Wellen bis zur Stelle der 19. Harmonischen erfassen, während für die kürzeren Wellen das Spektrum nicht genügend dicht belegt ist. Dafür ist wiederum im langwelligen Bereich die Ordinatendichte zum Teil erheblich größer, als die Mindestforderung verlangt, es ist also aus ökonomischen Gründen angebracht, unter ständiger Beachtung der Dichteregeln nicht mehr Ordinaten zu bilden, als nötig erscheint. Für den kurzwelligen Bereich besteht hingegen die Notwendigkeit, weitere Ordinaten einzuschalten, und zwar um so mehr, je kürzer die Wellen werden. Da aber auch hier nur die *Dichte* maßgebend ist, nicht aber die Länge der Wellen selbst, so läßt sich dies in weitestem Umfange dadurch erreichen, daß man auch Harmonische höherer Ordnung aus den Summenreihen des langwelligen Bereichs zur Auffüllung des kurzwelligen Spektralteils heranzieht. Ein Beispiel möge dies deutlich machen: Es sei, wie oben, $\phi = 360$. Im kurzwelligen Bereich liefert das Schemaschema z. B. die beiden benachbarten Versuchswellen

$$\text{Periode } r = 12, \text{ Frequenz } x = \frac{2\pi}{12}$$

$$\text{Periode } r = 11, \text{ Frequenz } x = \frac{2\pi}{11}.$$

Der Abstand der Frequenzen ist demnach $\frac{2\pi}{132}$, während die Regel erfordert, daß er höchstens eine halbe Maximumbreite, also $\frac{2\pi}{360}$ sein sollte. Damit das Spektrum dicht genug sei, ist also erforderlich, noch zwei weitere Versuchsperioden zwischen $r = 11$ und $r = 12$ einzuschalten. Nun ist aber z. B.

$$r = 11 \frac{1}{3} \text{ die 3. Harmonische von } r = 34$$

$$r = 11 \frac{2}{3} \text{ die 3. Harmonische von } r = 35,$$

woraus sich sofort das einzuschlagende Verfahren ergibt. Für noch kleinere Versuchsperioden ist die Zahl der notwendigen Einschaltungen entsprechend größer, es wird also auch die Ordnung der harmonischen Wellen, die wir aus den langwelligen Summenreihen zu bilden haben, entsprechend anwachsen. Dieser die Rechnung etwas erschwerende Umstand wirkt sich aber in der Praxis nicht so sehr aus, da man selten die Berechnung des Periodogramms bis in das Gebiet der ganz kurzen Wellen hinein fortsetzt, sondern in diesen Fällen lieber eine Verkürzung der Beobachtungsreihe vornimmt. So würde die Verkürzung der oben-erwähnten Reihe auf $\phi = 120$ Beobachtungen die Berechnung von Versuchsperioden bis $r = 11$ abwärts *ohne* Zwischenschaltung ermöglichen. In praktischen Fällen ist eine solche Verkürzung des Analysenintervalls

schon aus dem Grunde immer ratsam, weil man selten die Gewähr dafür hat, daß Periodizitäten, wenn sie überhaupt vorhanden sind, auch *persistent* sind, d. h. lange genug andauern. Man muß vielmehr immer damit rechnen, daß eine Welle nur eine verhältnismäßig kurze Anzahl von Schwingungen erlebt, um dann zu versiegen.

Was die Bildung der Summenreihen anbelangt, so ist darüber noch einiges zu sagen. Der Umstand, daß die letzte Reihe des Schemas, wenn r nicht gerade ein Teiler von p ist, nicht voll belegt ist, hat viele Periodogrammberechner gestört. SCHUSTER selbst hat sich durch diese Unsymmetrie bewegen lassen, die letzte Reihe einfach zu streichen. Andere Periodogrammrechner beseitigen die Unsymmetrie des Schemas dadurch, daß sie nicht die Summen der Spalten, sondern die *arithmetischen Mittel* der weiteren Analyse unterwerfen. Dadurch erhalten die Einzelwerte der Summenreihe gleiche Gewichte. In Wirklichkeit liegt die Sache so, daß keines dieser Verfahren einen nennenswerten Vorteil in theoretischer wie in praktischer Hinsicht bietet; selbst im Fall einer einfachen Sinuswelle wird durch diese Maßnahmen keineswegs erreicht, daß etwa der „Störungsvektor“ q durch solche Maßnahmen unterdrückt wird. Vielmehr wird eine neue „Störung“ durch die Elimination der Restreihe bzw. ihre Verteilung auf die übrigen Reihen hervorgerufen, deren Einfluß noch untersucht werden müßte. Der einzige wirkliche Vorteil, der sich auf diese Weise ergeben könnte, ist der, daß der störende Einfluß einer *additiven Konstante*, der bei unvollständiger Belegung der letzten Reihe mehr oder weniger merklich ist, durch diese Methoden zum Verschwinden gebracht wird. Man müßte also dafür sorgen, daß die zu bearbeitende Beobachtungsreihe von additiven Konstanten (wie auch praktischerweise von säkularen oder sehr langperiodischen Gliedern) vor Inangriffnahme der Rechnung befreit wird.

4. Das Periodogramm als Funktion der Lage des Analysenintervalls. Das Phasendiagramm.

In seiner bisher gezeigten Form als Funktion der variablen Versuchsfrequenz diente uns das Periodogramm lediglich zur oberflächlichen Durchmusterung eines gegebenen Beobachtungsmaterials auf verborgene Periodizitäten. Die Aufgabe, die analytischen Eigenschaften des Periodogramms bei Vorhandensein mehrerer persistenter Schwingungen verschiedener Wellenlänge zu untersuchen, werden wir in einem späteren Abschnitt behandeln — nach den bisherigen Erfahrungen ist aber auch jetzt schon einzusehen, daß es möglich sein muß, Perioden verschiedener Wellenlänge durch das Periodogramm zu trennen, wenn ihre „Hauptmaxima“ im Spektrum einen genügenden Abstand haben, wenigstens dann, wenn ihre Frequenzen mindestens um eine „Maximumbreite“

voneinander getrennt sind. Die genauere Bestimmung der unbekanntenen Wellenlängen stößt hingegen auf verschiedene Schwierigkeiten. Man könnte zwar versuchen, durch *Verdichtung* der Versuchsperioden oder -frequenzen im Bereich des Hauptmaximums die genaue Lage des Maximums festzustellen, man darf aber nicht vergessen, daß durch den Einfluß des „Störungsvektors“ eine Verschiebung des Maximums aus seiner Normallage $x = \alpha$ um kleine Beträge bewirkt werden kann, und daß noch größere Verzerrungen des Bildes zu befürchten sind, wenn mehrere Perioden oder gar unperiodische Bestandteile im Beobachtungsmaterial zu erwarten sind, abgesehen davon, daß aus dem Verlauf einer Kurve die Lage eines Maximums immer sehr viel unsicherer zu ermitteln ist als etwa seine Höhe. Aus dem Verlauf des Hauptvektors allein wäre die Lage des Hauptmaximums viel genauer durch die Feststellung seiner *Nullstellen* möglich: die Frequenz der gesuchten Periodizität liegt genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen 1. Ordnung. Aber auch die Nullstellen werden durch den Störungsvektor wie durch die Einflüsse fremder Periodizitäten zerstört, so daß dieser Weg nicht gangbar ist.

Zu brauchbaren Methoden der Periodenbestimmung gelangen wir aber, wenn wir berücksichtigen, daß das Periodogramm nicht nur eine Funktion der Versuchsfrequenz ist, sondern auch die zur Festlegung des Beobachtungsintervalls nötigen Konstanten als Parameter enthält. Diese Parameter können nämlich bei festgehaltener Versuchsfrequenz auch die Rolle von unabhängigen Variablen übernehmen.

Das Beobachtungs- oder Analysenintervall ist durch zwei unabhängige Konstante bestimmt: die *Intervalllänge* p , die in den Formeln für die Periodogrammkomponenten einer Sinuswelle explizit vorkommt, und der in der Phase der zu untersuchenden Schwingung verborgene *Intervallanfang*. In bezug auf den Intervallanfang bzw. die Lage des Grundintervalls auf der Zeitachse läßt sich das Periodogramm wiederum auf zwei verschiedene Arten variieren, je nachdem die „Versuchswelle“ mit dem variablen Grundintervall oder mit der Zeitachse fest verbunden bleibt.

Es sei also eine Beobachtungsfunktion von der Gestalt

$$f(t) = c \cdot \cos(\alpha t - \gamma)$$

in einem beliebig langen Zeitbereich gegeben. Aus diesem Bereich sei ein Intervall von der Länge p und der (variablen) Anfangszeit q herausgegriffen. Die Versuchswelle (Frequenz x) sei mit dem Grundintervall verbunden, dergestalt, daß ihre Phase am Anfang des Grundintervalls 0° ist. Wir erhalten dann die Periodogrammkomponenten, indem wir die neue Zeitvariable

$$\tau = t - q$$

einführen und

$$f(t) = f(\tau + q) = c \cdot \cos(\alpha \tau - \gamma + \alpha q)$$

zwischen den Grenzen $\tau = 0$ und $\tau = p$ in der früheren Weise analysieren. Für ein festes x ist dann

$$\left. \begin{aligned} a(x, q) &= \frac{2}{p} \int_0^p f(\tau + q) \cos x \tau \, d\tau \\ b(x, q) &= \frac{2}{p} \int_0^p f(\tau + q) \sin x \tau \, d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und man erkennt sofort, daß die neuen Ergebnisse sich von den früheren nur dadurch unterscheiden, daß an die Stelle der alten Phasenkonstante γ die neue $\gamma - \alpha q$ tritt, die eine lineare Funktion des als variabel betrachteten Intervallanfangs q ist. Die beiden Periodogrammvektoren haben also die Gestalt

$$\begin{aligned} p(x, q) &= c \cdot P(x) e^{i\left((x-\alpha)\frac{p}{2} + \gamma - \alpha q\right)} \\ q(x, q) &= c \cdot Q(x) e^{i\left((x+\alpha)\frac{p}{2} - \gamma + \alpha q\right)}. \end{aligned}$$

Bei festgehaltener Versuchsfrequenz x bleiben also die Beträge der Vektoren ungeändert, während ihre Richtung sich mit q gleichmäßig ändert, und zwar dreht sich, während der Anfangspunkt des Analysenintervalls auf der Zeitachse gleichmäßig fortschreitet, $p(x, q)$ mit der Geschwindigkeit α im Uhrzeigersinn, $q(x, q)$ mit der gleichen Geschwindigkeit im entgegengesetzten Sinn. Die Geschwindigkeit der Zeigerbewegung in der „Periodenuhr“ liefert demnach unmittelbar die gesuchte Frequenz.

Bei der zweiten Methode ist die Versuchswelle mit der Zeitachse fest verknüpft, also auch mit der Beobachtungsfunktion. Wir haben demnach, um die Periodogrammkomponenten zu erhalten, die [für den gesamten Definitionsbereich von $f(t)$ gegebenen] Funktionen

$$f(t) \cos x t \quad \text{und} \quad f(t) \sin x t$$

über den variablen Abschnitt $[q, q + p]$ zu integrieren. Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \bar{a}(x, q) &= \frac{2}{p} \int_q^{q+p} f(t) \cos x t \, dt = \frac{2}{p} \int_0^p f(\tau + q) \cos x(\tau + q) \, d\tau \\ &= \frac{2}{p} \left\{ \cos x q \cdot \int_0^p f(\tau + q) \cos x \tau \, d\tau - \sin x q \int_0^p f(\tau + q) \sin x \tau \, d\tau \right\} \\ \bar{b}(x, q) &= \frac{2}{p} \int_q^{q+p} f(t) \sin x t \, dt = \frac{2}{p} \int_0^p f(\tau + q) \sin x(\tau + q) \, d\tau \\ &= \frac{2}{p} \left\{ \sin x q \cdot \int_0^p f(\tau + q) \cos x \tau \, d\tau + \cos x q \int_0^p f(\tau + q) \sin x \tau \, d\tau \right\} \end{aligned}$$

also, wenn wir für die Integrale die aus der ersten Methode resultierenden Werte (4) einsetzen:

$$\begin{aligned}\bar{p}(x, q) &= c \cdot P(x) \cdot e^{i\left((x-\alpha)\frac{p}{2} + \gamma + (x-\alpha)q\right)} \\ \bar{q}(x, q) &= c \cdot Q(x) \cdot e^{i\left((x+\alpha)\frac{p}{2} - \gamma + (x+\alpha)q\right)}.\end{aligned}$$

Wir erhalten auch hier eine gleichmäßige Drehung der Vektoren, aber mit den verschiedenen Geschwindigkeiten $x-\alpha$ bzw. $x+\alpha$. Ist nun aus einer vorangegangenen Durchmusterung des Spektrums die gesuchte Periode ungefähr bekannt, so ist man in der Lage, den eben beschriebenen Versuch mit einer festen Versuchsfrequenz x zu unternehmen, die sich von der wahren Frequenz α nicht viel unterscheidet. In diesem Falle hat also der Hauptvektor p einen von c nur wenig verschiedenen Betrag — die Drehung des Hauptvektors ist wegen der Kleinheit von $x-\alpha$ langsam. Ist (zufällig) genau $x=\alpha$, so bleibt der Hauptvektor auch der Richtung nach konstant, ist $x<\alpha$, so dreht sich der Vektor langsam im Uhrzeigersinn, hingegen im umgekehrten Sinn, wenn $x>\alpha$. Aus der Geschwindigkeit der Drehung ist ferner die Abweichung $x-\alpha$ selbst, damit auch die genaue Lage der Periode im Spektrum zu ermitteln. Der Störungsvektor q , dessen Betrag gegenüber dem von p klein ist, dreht sich im positiven Sinn mit großer Geschwindigkeit.

Fassen wir den Endpunkt des Periodogrammvektors $\mathfrak{P} = p + q$ als Punkt in der (komplexen) Ebene auf, so lassen sich diese Ergebnisse auch folgendermaßen formulieren: Ist $x=\alpha$, so beschreibt der Punkt \mathfrak{P} bei stetig veränderlichem q einen kleinen Kreis um den festen Punkt p mit großer Geschwindigkeit. Der Mittelpunkt dieses Kreises charakterisiert durch seine Lage zum Anfangspunkt Amplitude und Phase der Schwingung. Ist x von α wenig verschieden, so erfolgt die Bewegung des Periodogrammpunktes \mathfrak{P} auf einer Epizykloide, setzt sich also zusammen aus einer langsamen Umkreisung des Koordinatenanfangs durch den Endpunkt des Hauptvektors und aus einer gleichzeitigen schnellen Umkreisung dieses Endpunktes durch einen zweiten Punkt in geringer Entfernung. In Anlehnung an den Sprachgebrauch der antiken Astronomie können wir den Hauptvektor in Hinsicht dieser Bewegungsart auch als „Deferenten“, den Störungsvektor als „Epizykel“ bezeichnen.

Die zuletzt beschriebene Methode ist in der Periodenforschung allgemein als die Methode der *Phasendiagramme* bekannt. Trägt man nämlich die Richtung des Periodogrammvektors, die aus den Komponenten

$$a(x, q) = h(x, q) \cdot \cos \psi(x, q); \quad b(x, q) = h(x, q) \cdot \sin \psi(x, q)$$

durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \psi(x, q) = \frac{b(x, q)}{a(x, q)}$$

gegeben ist, als Funktion des variablen Intervallanfangs auf¹, so erkennt man leicht, daß sie sich von der Richtung des Hauptvektors

$$\psi_0(x, q) = (x - \alpha) \left(\frac{p}{2} + q \right) + \gamma$$

nur wenig unterscheidet. Genauer gesagt: ψ oszilliert um ψ_0 . Abgesehen von diesen Oszillationen stellt ψ also eine lineare Funktion von q dar, deren „Richtungskonstante“ $x - \alpha$ ist. Die Oszillationen lassen sich leicht eliminieren, wenn eine genügend dichte Ordinatenauswahl des Phasendiagramms nach der Methode der kleinsten Quadrate durch eine Gerade angenähert wird. Es ist noch darauf zu achten, daß das Phasendiagramm eine unendlich vieldeutige Funktion darstellt, da jeder Wert um beliebige ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert werden darf. Bei einer nicht sehr engen Ordinatenauswahl mit konstanten Abszissenabständen entsteht somit als Phasendiagramm ein weitmaschiges Netz von Punkten, dessen Verbindung oder Ausgleichung durch Systeme paralleler Geraden auf verschiedene Weise möglich ist. In Zweifelsfällen läßt sich stets durch Berechnung von Zwischenordinaten feststellen, welche von den verschiedenen Möglichkeiten die richtige ist.

Die erstere der beiden hier beschriebenen Methoden zur Berechnung eines Phasendiagramms, die eine Deferentengeschwindigkeit $-\alpha$ lieferte, und die weniger gebräuchlich ist als die zweite, läßt sich leicht auf die zweite zurückführen, indem man die berechneten Periodogrammphasen ψ um xq vermehrt. Es gibt nämlich einen Fall, in dem die erstere Methode die natürlichere ist: dann nämlich, wenn die Analyse mit Hilfe eines *Harmonischen Analysators*, etwa des in II, 2 beschriebenen MADERSCHEN Analysators ausgeführt werden soll. Hier ist tatsächlich die „Versuchswelle“ fest mit dem jeweiligen Analysenintervall verbunden, da die Anfangsphase 0° der Versuchswelle immer auf den Intervallanfang fällt. Die Versuchsfrequenz ist bei der Benutzung dieses Instruments natürlich immer eine harmonische. Die Aufstellung eines Phasendiagramms wird so durchgeführt, daß man die Kurve in ihrer gesamten Ausdehnung auf einen langen Streifen Millimeterpapier aufträgt und diesen durch Verschiebung längs der Abszissenachse so orientiert, daß die Abszisse q jeweilig den Anfang des Analysenintervalls bildet. Man wiederholt die Analyse bei gleichbleibender Versuchswelle für eine äquidistante Folge q_1, q_2, \dots der Intervallanfänge, bis die gesamte Kurve durch die sich überdeckenden Intervalle belegt ist.

Bei Ermittlung der Periodogrammkomponenten durch *Rechnung* ist dagegen immer die *zweite* Methode anzuwenden, da hier bei beliebiger Verschiebung des Intervalls $[q \dots q + p]$ die einzelnen Ordinaten der

¹ Für die graphische Aufzeichnung von Phasendiagrammen empfiehlt es sich, die Phasenwinkel in *Zentesimalgraden* (1 Quadrant $= \frac{\pi}{2} = 100^\circ$) auszudrücken, da sich diese Einteilung für die Benutzung von Millimeterpapier am besten eignet.

Beobachtungsfunktion immer mit den gleichen Ordinaten der Versuchswelle multipliziert bleiben. Angenommen, es sei jede einzelne Ordinate einer beliebig langen äquidistanten Beobachtungsreihe mit den Ordinaten einer bestimmten Versuchswelle multipliziert worden, so daß also die beiden Folgen

$$y_\nu \cos \nu x; \quad y_\nu \sin \nu x \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

berechnet vorliegen. Die Periodogrammkomponenten, die zu einem beliebigen Analysenintervall innerhalb des Gesamtbereichs der Beobachtungsreihe gehören, sind dann

$$a(x, q) = \frac{2}{p} \sum_{\nu=q}^{q+p-1} y_\nu \cos \nu x$$

$$b(x, q) = \frac{2}{p} \sum_{\nu=q}^{q+p-1} y_\nu \sin \nu x,$$

ergeben sich also, von dem konstanten Faktor $\frac{2}{p}$ abgesehen, der übrigens bei der Berechnung der Periodogrammphasen herausfällt, durch Bildung der Summen von p aufeinanderfolgenden Gliedern der obigen Produktfolgen. Das dichteste Phasendiagramm, das auf diese Weise erzeugt werden kann, entspricht der Folge $q = 1, 2, 3, \dots$. Ist x speziell eine harmonische Frequenz, also

$$x = \frac{2\pi}{p} r, \quad (r \text{ ganz})$$

so lassen sich die zu den einzelnen Intervallen gehörigen Periodogrammkomponenten sukzessive berechnen, wenn diese Größen für das Anfangsintervall ($q = 0$) vorliegen. Ist nämlich

$$\frac{p}{2} a(x, 0) = \sum_{\nu=0}^{p-1} y_\nu \cos \nu x$$

$$\frac{p}{2} b(x, 0) = \sum_{\nu=0}^{p-1} y_\nu \sin \nu x$$

gegeben, so ist einfach

$$\frac{p}{2} a(x, q+1) = \frac{p}{2} a(x, q) + (y_{q+p} - y_q) \cos q x$$

$$\frac{p}{2} b(x, q+1) = \frac{p}{2} b(x, q) + (y_{q+p} - y_q) \sin q x.$$

Bei der Herstellung eines möglichst dichten Phasendiagramms benutzt man also die Differenzen $y_{q+p} - y_q$ zwischen je zwei um p Termine auseinanderliegenden Beobachtungen. Ist außerdem das Periodogramm für getrennte, also sich nicht überdeckende Intervalle

$$[0, \dots, p-1], [p, \dots, 2p-1], [2p, \dots, 3p-1], \dots$$

nach den früheren Methoden berechnet, so können diese Werte zu einer Kontrolle dienen, die nach je p Schritten der oben angedeuteten Rechnung wirksam wird.

Oft erscheint es nicht notwendig, das Phasendiagramm in seiner größtmöglichen Dichte zu berechnen. Umfaßt die Versuchswelle eine ganze Anzahl r von Beobachtungen, und ist sie in p oft genug und ganzzahlig enthalten, so ist es mitunter praktisch, die Berechnung der Teilsommen

$$\varkappa_k = \sum_{\nu = kr}^{(k+1)r-1} y_\nu \cos \nu \cdot \frac{2\pi}{r}; \quad \sigma_k = \sum_{\nu = kr}^{(k+1)r-1} y_\nu \sin \nu \cdot \frac{2\pi}{r} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

durchzuführen, die ganz nach den Regeln der Berechnung der Grundwelle in einem Analysenintervall von r Beobachtungen vor sich geht. Ist $p = nr$, so ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{p}{2} a(x, q) &= \sum_{k = \frac{q}{r}}^{\frac{q}{r} + n - 1} \varkappa_k \\ \frac{p}{2} b(x, q) &= \sum_{k = \frac{q}{r}}^{\frac{q}{r} + n - 1} \sigma_k \end{aligned} \quad \left(x = \frac{2\pi}{r} \right)$$

für die Folge $q = 0, r, 2r, 3r, \dots$

In diesen Überlegungen wird wiederum deutlich, in welcher Weise die Periodogrammtheorie sich von den Vorstellungen der Harmonischen Analyse befreit hat, und welcher Gewinn daraus entspringt. Für die Harmonische Analyse ist die Intervalllänge p eine feste Grundzahl, die die Festlegung der Wellenlängen aller Oberschwingungen nach sich zieht. Wir haben schon früher gesehen, wie unbequem es für die Rechnung ist, bei großen Intervallen mit Versuchsperioden zu arbeiten, die nicht ganzzahlig in p aufgehen. In der Periodogrammtheorie hatten wir erkannt, daß Versuchswellen mit ganzzahliger Wellenlänge auch dann brauchbar sind, wenn sie nicht ganzzahlig in p enthalten sind. Im Phasendiagramm haben wir darüber hinaus die Möglichkeit, uns auch von dem Zwang, ein bestimmtes, wenn auch willkürlich gewähltes p der gesamten Analyse zugrunde zu legen, in gewissem Umfange zu befreien. Das Periodogramm und damit das Amplituden- bzw. Intensitätenspektrum war noch an ein bestimmtes, für alle Wellen gültiges p gebunden — je nach der Größe von p ergab sich die Maximumbreite und damit die Auflösungskraft des Spektrums und die Möglichkeit, isolierte Wellen voneinander zu trennen. Ist auf diese Weise in bestimmten Teilbereichen der Beobachtungsfunktion der Verdacht auf die Existenz einer

Periodizität erhärtet worden, so dient das sich über die gesamte Beobachtungsreihe erstreckende Phasendiagramm zur näheren Untersuchung dieser Periodizität und ihrer Eigenschaften. Bei dieser Untersuchung sind wir aber keineswegs mehr an das gleiche Grundintervall gebunden, das bei der Durchmusterung des Spektrums benutzt wurde. Sind z. B. die für eine Versuchsperiode τ gültigen Größen \varkappa_k, σ_k berechnet worden, so läßt sich durch Bildung von übergreifenden Summen das Phasendiagramm für Analysenintervalle von der Länge eines beliebigen Vielfachen von τ bilden — maßgebend für die Wahl der Intervalllänge ist lediglich die Forderung, daß der Betrag des Hauptvektors, der ja von p wesentlich abhängt, nicht zu klein sein soll, gemessen an seinem Hauptmaximum. Wir werden auf diese Verhältnisse noch näher in dem späteren Abschnitt eingehen, der von der Trennung verschiedener Periodizitäten handelt (III, 6).

5. Das Periodogramm als Funktion der Intervalllänge. Summationsvektor und Irrfahrt.

Zum Begriff des Phasendiagramms gelangten wir, indem wir das Periodogramm bei festgehaltenem x und p nach der Anfangszeit q des Analysenintervalls variierten. Umgekehrt kann auch $q=0$ neben x festgehalten und dafür die Intervalllänge p als variabel angesehen werden. Für eine einfache Sinus- bzw. Cosinusschwingung als Beobachtungsfunktion erhalten wir dann einen Hauptvektor von der Form

$$p(x, p) = c \cdot \frac{\sin(x - \alpha) \frac{p}{2}}{(x - \alpha) \frac{p}{2}} \left\{ \cos \left((x - \alpha) \frac{p}{2} + \gamma \right) + i \sin \left((x - \alpha) \frac{p}{2} + \gamma \right) \right\}$$

und den Störungsvektor.

$$q(x, p) = c \cdot \frac{\sin(x + \alpha) \frac{p}{2}}{(x + \alpha) \frac{p}{2}} \left\{ \cos \left((x + \alpha) \frac{p}{2} - \gamma \right) + i \sin \left((x + \alpha) \frac{p}{2} - \gamma \right) \right\}.$$

Die Abhängigkeit dieser Vektoren von p wird deutlicher, wenn wir den p -fachen Vektor in einen von p abhängigen und einen konstanten Teil zerlegen. Es ist nämlich

$$p \cdot p(x, p) = \frac{c}{x - \alpha} \left\{ e^{i \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right)} - e^{i \left(\frac{\pi}{2} + (x - \alpha) p + \gamma \right)} \right\}$$

$$p \cdot q(x, p) = \frac{c}{x + \alpha} \left\{ e^{i \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right)} - e^{i \left(\frac{\pi}{2} + (x + \alpha) p - \gamma \right)} \right\}.$$

Der p -fache Hauptvektor läßt sich demnach ersetzen durch einen bei wachsendem p sich mit der Winkelgeschwindigkeit $x - \alpha$ gleichmäßig um den Endpunkt des von p unabhängigen Vektors

$$\frac{c}{x - \alpha} \cdot e^{i \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right)}$$

drehenden Vektor. Der Endpunkt des p -fachen Hauptvektors durchläuft daher einen durch den Anfangspunkt der komplexen Ebene gehenden Kreis mit dem Radius $\frac{c}{x-\alpha}$. Ist genau $x = \alpha$, so artet dieser Kreis in eine vom Nullpunkt in die Richtung γ führende Gerade aus. Der Störungsvektor vollführt ähnliche Kreisbewegungen, aber mit großer Winkelgeschwindigkeit und mit einem Radius, der, wenn x von α hinreichend wenig verschieden ist, im Vergleich zu dem Radius der Bewegung des Hauptvektors zu klein ist. Vernachlässigen wir also die durch den Vektor q gegebene Störung, so folgt über das Periodogramm einer einfachen Schwingung der Satz: Ist die Versuchsfrequenz der wahren Frequenz gleich, so wächst das p -fache Periodogramm mit wachsendem p in einer bestimmten, durch die Anfangsphase der Schwingung gegebenen Richtung. Ist x von α verschieden, so kehrt es periodisch immer wieder zum Nullpunkt zurück.

Diese Dinge lassen sich besonders anschaulich wiedergeben, wenn wir annehmen, daß die Beobachtungsfunktion durch eine äquidistante Folge

$$y_v = c \cos(v\alpha - \gamma) \quad (v = 0, 1, 2, \dots)$$

dargestellt ist, die mit $\frac{p}{2}$ multiplizierten Periodogrammkomponenten also direkt durch die Produktsummen

$$\sum_{v=0}^{p-1} y_v \cos v x; \quad \sum_{v=0}^{p-1} y_v \sin v x$$

gegeben sind. Der Periodogrammvektor $\frac{p}{2} \cdot \mathfrak{P}(x, p)$ erscheint dann als Resultante eines aus p Einzelvektoren

$$y_v e^{i v x}$$

bestehenden *Vektorenzuges*. Diese Elementarvektoren haben nacheinander als Beträge die Beobachtungswerte y_0, y_1, y_2, \dots , als Richtungen die Argumente der Versuchswelle, wobei noch zu bemerken ist, daß, wenn der Beobachtungswert das negative Vorzeichen besitzt, die Richtung um 180° zu drehen, d. h. umzukehren ist. Besonders einfache und symmetrische Formen der zu einer einfach periodischen Funktion gehörigen Vektorenzüge erhält man, wenn die Versuchsfrequenz zu der wahren Frequenz in einem einfachen rationalen Verhältnis steht. Einige Beispiele mögen diese Zusammenhänge, auf die meines Wissens zuerst von J. BARTELS (Lit. 26) hingewiesen wurde, veranschaulichen. Die Beobachtungsfunktion möge etwa die in Einheiten des Beobachtungsabstandes ausgedrückte Periode 10 haben. Die (im Periodogramm gesuchte) Frequenz ist demnach $\alpha = 36^\circ$. Ist nun die Versuchsfrequenz die gleiche, so ergibt sich der in Abb. 12 gezeichnete Vektorenzug A , der deutlich zeigt, daß sich der Hauptvektor fortschreitend in der gleichen

Richtung verlängert, während der Störungsvektor bewirkt, daß sich dieser fortschreitenden Bewegung eine kurzperiodische „Störung“ von der Frequenz $x + \alpha = 2\alpha$ überlagert, die also mit der Periode $\frac{360^\circ}{2\alpha} = 5$ immer wieder die gleichen Formen annimmt. Ist $x \neq \alpha$, so ergibt sich eine kreisförmige Krümmung dieses Vektorenzuges; haben x und α ein rationales Verhältnis zueinander, so wird auch die epizykloidsche Störung nach einer ganzen Anzahl von „Umläufen“ des Vektorenzuges

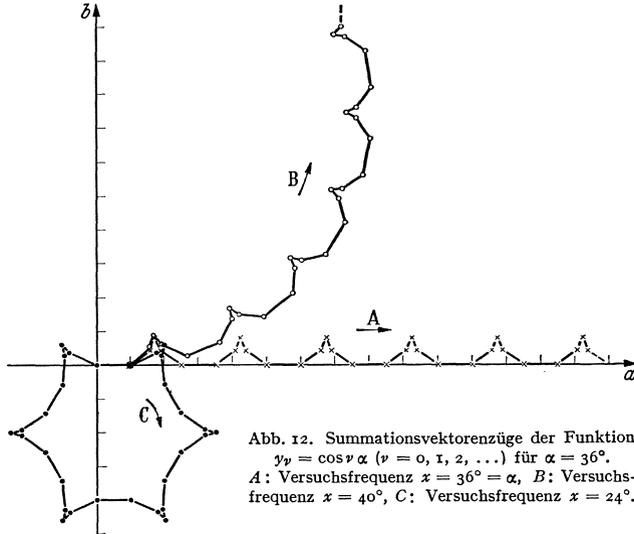


Abb. 12. Summationsvektorenzüge der Funktion $y_p = \cos p \alpha$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) für $\alpha = 36^\circ$.
A: Versuchsfrequenz $x = 36^\circ = \alpha$, B: Versuchsfrequenz $x = 40^\circ$, C: Versuchsfrequenz $x = 24^\circ$.

eine ganze Anzahl von Perioden vollenden, so daß also bei beliebigem Anwachsen von p nach einer endlichen Zahl von Umläufen immer wieder die gleiche Bahn durchlaufen wird. Das geometrische Ergebnis dieses Versuchs sind regelmäßige stern- oder rosettenartige Figuren. In Abb. 12, B und C, sind solche Streckenzüge für die Versuchsfrequenzen $x = 40^\circ$, $x = 24^\circ$ gezeichnet. Haben x und α ein irrationales Verhältnis zueinander, so werden die Störungsepizykeln nach beliebig vielen Umläufen des „Deferenten“ immer wieder an anderen Stellen des Kreises zu liegen kommen, es ergibt sich also eine Art „Knäuelkurve“, die immer innerhalb eines ringförmigen Bereiches verläuft, aber niemals wieder in sich zurückläuft.

An dem geometrischen Bild eines solchen Vektorenzuges läßt sich der innere Aufbau des Periodogrammvektors, der ja nichts anderes als die durch $\frac{p}{2}$ dividierte Resultante dieses Vektorenzuges darstellt, in sehr instruktiver Weise darlegen. Sei p wieder, wie früher, eine feste Zahl von Beobachtungswerten, so besteht der Vektorenzug aus p Gliedern verschiedener Länge. Die Richtungsänderung aufeinanderfolgender

Glieder ist bei vorgelegter Versuchsfrequenz immer die gleiche — bei jedem Vorzeichenwechsel der Beobachtungsreihe springt die Richtung der Elementarvektoren außerdem um 180° . Würde man nun die Versuchsfrequenz eine sehr enge Folge von gleichabständigen Werten durchlaufen lassen und das Bild der zugehörigen Vektorenzüge für jeden dieser Werte zeichnen, so ließe sich daraus ein „Trickfilm“ erzeugen, der in seinem Ablauf das Wesen der Periodogrammfunktion einer Sinusschwingung außerordentlich anschaulich machen würde. Im Anfang, d. h. bei sehr kleinen Versuchsfrequenzen, ist der Vektorenzug, der eine bestimmte, der Betragssumme der p Beobachtungswerte gleiche Gesamtlänge hat, in mehr oder weniger zahlreichen Windungen „aufgewickelt“. Wächst jetzt die Versuchsfrequenz, so „entwickelt“ sich der Vektorenzug allmählich. An der Stelle der Nullstelle r -ter Ordnung, die dem Hauptmaximum vorangeht, ist er noch in r Windungen aufgewickelt, bei der Nullstelle 1. Ordnung schließt er sich mithin gerade zu einem vollen Kreis zusammen. Wächst nun die Versuchsfrequenz weiter, so öffnet sich dieser Kreis, da die Krümmung des Vektorenzuges nunmehr zur Belegung eines vollen Kreises nicht mehr ausreicht. Schließlich, bei $x = \alpha$, streckt sich der Vektorenzug nach einer bestimmten durch die Phase der Schwingung gegebenen Richtung, um sich dann, wenn x den Wert α überschritten hat, nach der anderen Seite wieder zu einem Kreise zusammenzubiegen und entsprechend aufzuwickeln. Auch das Entstehen der „spurious periodicities“ SCHUSTERS wird auf diese Weise unmittelbar der Anschauung zugänglich gemacht. Abb. 12 enthält einige Phasen dieses Prozesses in bezug auf einen konkreten Fall.

In der periodographischen Praxis wird man wegen der großen Zahl der Elementarvektoren die Aufzeichnung eines vollständigen Vektorenzuges kaum jemals ausführen. Hingegen ist es für viele Aufgaben von großem Wert, diese Vektorenzüge in größeren Schritten darzustellen, etwa indem man die Elementarvektoren über jede vollendete Versuchsperiode summiert. Ist die Versuchsperiode r , so sind die Komponenten dieser Teilsummen die im vorigen Abschnitt gebildeten Größen \varkappa_k, σ_k . Ebenso, wie dort das *Phasendiagramm* durch Bildung von übergreifenden Summen gleicher Summandenanzahl aus den Folgen dieser Größen erzeugt wurde, werden jetzt *fortschreitende Summen*

$$\frac{p}{2} a(x, p) = \sum_{k=0}^{\frac{p}{r}} \varkappa_k; \quad \frac{p}{2} b(x, p) = \sum_{k=0}^{\frac{p}{r}} \sigma_k$$

für $p = 0, r, 2r, 3r, \dots$

gebildet, indem jeder vorhergehenden Summe beim nächsten Schritt die folgende Teilsumme angefügt wird. Die Folge der so entstehenden Vektoren bezeichnet man als Folge der *Summationsvektoren* oder kurz als *Summenfunktion*. Sie besteht aus einem Zuge von aneinandergefügten

Vektoren, die, wenn $x = \alpha$, eine bestimmte Richtung bevorzugen, so daß also ein ständiges Fortschreiten des Summationsvektors in derselben Richtung das Kriterium für das Vorhandensein einer persistenten Periode ist.

Ist dagegen die vorgelegte Beobachtungsfunktion gänzlich unperiodisch, also etwa durch willkürliche Zusammenstellung von zusammenhangslosen, einem gegebenen Vorrat entnommenen Zahlen zustande gekommen, so sind auch die Teilvektoren der Summenfunktion zusammenhangslos und bevorzugen vor allem keine bestimmte Richtung. Der Vektorenzug wird also der Bewegung eines Punktes vergleichbar sein, der längere oder kürzere Strecken hindurch geradlinige Bahnen beschreibt, von Zeit zu Zeit aber seine Richtung plötzlich in willkürlicher Weise ändert; also etwa der Bewegung eines Moleküls in einem ruhenden Gase. Eine derartige Bewegung soll als „*Irrlauf*“ bezeichnet werden.

Zwischen der im großen und ganzen geradlinigen Fortpflanzung der Summenfunktion bei persistent periodischen Vorgängen im Falle $x = \alpha$, dem Kreislauf im Falle, daß x nahezu $= \alpha$, und dem Irrlauf bei mangelnder Periodizität gibt es eine große Menge von Übergängen. Der wichtigste Übergangsfall ist der, daß der wandernde Endpunkt des Summationsvektors *zeitweilig* eine bestimmte Richtung bevorzugt. Auf diesen Fall, den BARTELS als „*Quasipersistenz*“ bezeichnet, und der überall dort, wo Schwingungsvorgänge von kurzer Lebensdauer auftreten und einander ablösen (z. B. in der Meteorologie), eine große Rolle spielt, werden wir im nächsten Kapitel ausführlicher zurückkommen.

6. Die Trennung benachbarter Perioden. Auflösungskraft des Periodogramms.

Obwohl die Analyse einer einzelnen Sinusschwingung durch das Periodogramm als Aufgabe der praktischen Periodenforschung bedeutungslos ist, haben wir uns dennoch mit ihr so ausführlich beschäftigen müssen, weil sie die Grundlage für die Behandlung komplizierterer Probleme bildet.

Setzt sich die Beobachtungsfunktion aus einer endlichen Zahl persistenter Periodizitäten zusammen, ist sie etwa ihrem inneren Gesetz nach durch die Formel

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 \cos(\alpha_1 t - \gamma_1) + c_2 \cos(\alpha_2 t - \gamma_2) + \cdots + c_n \cos(\alpha_n t - \gamma_n) \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t) \end{aligned}$$

darstellbar, so ist sofort einzusehen, daß ihr Periodogrammvektor sich durch geometrische Addition aus den Periodogrammvektoren der

n Teilschwingungen zusammensetzt, da die Komponenten des Periodogramms die Form

$$a(x) = \frac{2}{p} \int_0^p f_1(t) \cos xt \, dt + \frac{2}{p} \int_0^p f_2(t) \cos xt \, dt + \cdots + \frac{2}{p} \int_0^p f_n(t) \cos xt \, dt$$

$$b(x) = \frac{2}{p} \int_0^p f_1(t) \sin xt \, dt + \frac{2}{p} \int_0^p f_2(t) \sin xt \, dt + \cdots + \frac{2}{p} \int_0^p f_n(t) \sin xt \, dt$$

haben, also durch Summierung der Komponenten der Teilperiodogramme gebildet werden. Im einfachsten Fall sind *zwei* Teilschwingungen verschiedener Frequenz vorhanden. Sind

$$\left. \begin{aligned} p_\nu(x) &= c_\nu \cdot \frac{\sin(x - \alpha_\nu) \frac{p}{2}}{(x - \alpha_\nu) \frac{p}{2}} \cdot e^{i\left((x - \alpha_\nu) \frac{p}{2} + \nu\right)} \\ q_\nu(x) &= c_\nu \cdot \frac{\sin(x + \alpha_\nu) \frac{p}{2}}{(x + \alpha_\nu) \frac{p}{2}} \cdot e^{i\left((x + \alpha_\nu) \frac{p}{2} - \nu\right)} \end{aligned} \right\} \quad (\nu = 1, 2)$$

die Hauptvektoren und Störungsvektoren der beiden Teilschwingungen, so ist der Periodogrammvektor der zusammengesetzten Schwingung

$$\mathfrak{P}(x) = p_1(x) + q_1(x) + p_2(x) + q_2(x).$$

Sind die Perioden der Teilschwingungen harmonische Perioden in p , so ist für $x = \alpha_1$ (bzw. $x = \alpha_2$) $p_1(x) = c_1$ (bzw. $p_2(x) = c_2$), während jeweils die drei übrigen Bestandteile des Periodogramms verschwinden. Sind die Teilschwingungen in p nicht harmonisch, was im allgemeinen erwartet werden darf, und ist α_1 von α_2 hinreichend verschieden, so werden sich die von den beiden Teilperioden stammenden Beiträge gegenseitig nur wenig stören: Für $x = \alpha_1$ oder für ein x , das im Bereich des Hauptmaximums von $p_1(x)$ liegt, ohne genau mit α_1 übereinzustimmen, wird der Hauptvektor der zweiten Schwingung gegen den der ersten klein sein, wenn nicht gerade die Amplitude der zweiten Schwingung die der ersten sehr stark übertrifft. Somit läßt sich der Einfluß der zweiten Schwingung als eine weitere Störung betrachten, die zu den beiden eigentlichen Störungsvektoren hinzukommt. Das „Spektrum“, das die Quadrate der Periodogrammbeträge als Funktion der variablen Versuchsperiode gibt, wird somit bei $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$ zwei deutlich getrennte Maxima besitzen. Das wird in vollem Umfange noch dann der Fall sein, wenn der Abstand der beiden Frequenzen eine volle Maximumbreite, also $\frac{4\pi}{p}$ beträgt. Dann haben nämlich die beiden Hauptvektoren in der Mitte zwischen den Abszissen α_1 und α_2 des Spektrums Nullstellen, so daß das Periodogramm an dieser Stelle lediglich durch die beiden dem Betrage nach stets kleinen Störungsfunktionen gebildet wird. Das

Spektrum wird also zwischen den beiden periodenanzeigenden Maximalstellen einen sehr tiefen Einschnitt zeigen. Rücken die beiden Frequenzen α_1 und α_2 immer dichter aneinander heran, so werden an der Bildung der Zwischenordinaten des Spektrums die Hauptteile der beiden Teilperiodogramme einen immer größeren Anteil gewinnen. Ist der Abstand eine halbe Maximumbreite, unterscheiden sich die beiden Frequenzen also um den gleichen Betrag wie zwei benachbarte harmonische Frequenzen, so ist an der Stelle $x = \alpha_1$ der Hauptvektor der anderen Periodizität null und umgekehrt. Die beiden Maxima werden also noch durch einen kleinen Einschnitt im Spektrum getrennt erscheinen, der aber nicht mehr bis nahe an null herunterreicht. Überwiegt die Amplitude der einen Schwingung die der anderen sehr merklich, so wird dieser Einschnitt nicht immer deutlich ausgeprägt sein, sondern das zweite (kleinere) Maximum wird eventuell nur als buckelartige Ausbuchtung und Verbreiterung der Spektralkurve links oder rechts vom Hauptmaximum der größeren Periodizität bemerkt werden. Beträgt der Unterschied der beiden Frequenzen noch weniger als $\frac{2\pi}{p}$, so fließen die beiden Maxima immer mehr ineinander.

Aus diesen zunächst ganz qualitativen und der Anschauung entnommenen Betrachtungen geht hervor, daß die „Trennbarkeit“ benachbarter Perioden oder, wie man in Anlehnung an die optische Analogie auch sagt, die „Auflösungskraft“ des Periodogramms wesentlich von der Länge des Analysenintervalls bzw. von der Maximumbreite abhängt. Die Erhöhung der zur Analyse benutzten Beobachtungszahl p bewirkt eine Verminderung der Maximumbreite bzw. eine Verschmälerung der „Spektrallinien“. Sind also die Periodizitäten persistent, so ist es im Hinblick auf die Trennung eng benachbarter Perioden vorteilhaft, das Analysenintervall recht lang zu wählen. Erscheint allerdings die Persistenz nicht garantiert, so ist es nicht ratsam, diesen Weg zu beschreiten, sondern sich mit kleineren Intervallen zu begnügen. Dafür aber ergibt sich dann in um so größerem Maße die Möglichkeit zur Benutzung derjenigen Methoden, die auf einer Variation der Lage des Analysenintervalls innerhalb des gesamten Beobachtungsbereiches (Phasendiagramm) bzw. der Länge des Analysenintervalls (Summenfunktion) beruhen.

Wir wollen also annehmen, daß die Beobachtungsfunktion aus zwei Periodizitäten mit benachbarten Frequenzen α_1 und α_2 und den beiden größenordnungsmäßig nicht allzu verschiedenen Amplituden c_1 und c_2 besteht. Ist c_1 die größere Amplitude, so wird die größte Ordinate des Spektrums die ungefähre Lage von α_1 angeben. Nun werde nach dem Verfahren des Abschnitts 4 ein Analysenintervall von der Länge p stetig durch den gesamten Beobachtungsbereich hindurch bewegt, und es werde der Periodogrammvektor $\mathfrak{P}(x, q)$ als Funktion des variablen Intervallanfangs q aufgezeichnet. Im wesentlichen wird sich \mathfrak{P} dann

aus den beiden Hauptvektoren p_1 und p_2 zusammensetzen, während die beiden Störungsvektoren lediglich eine kurzperiodische epizykloide Schwankung des Periodogrammvektors von kleinem Betrage hervorrufen, die wir vernachlässigen, bzw. durch Glättung des durch die Störungen etwas „gekräuselten“ Weges des Vektorendpunktes eliminieren können. Dieser Weg wird also im wesentlichen bestimmt sein

1. durch eine Umwanderung des Koordinatenanfangs durch den Endpunkt des Vektors p_1 auf einem Kreise mit dem Radius $|\Phi_1| = c_1 |P_1(x)|$ und mit der Umlaufgeschwindigkeit $x - \alpha_1$;

2. durch Umwanderung dieses Punktes durch einen zweiten Punkt auf einer Kreisbahn mit dem Radius $|\Phi_2| = c_2 |P_2(x)|$ und mit der Umlaufgeschwindigkeit $x - \alpha_2$. Die Bewegung ist daher wiederum eine epizyklische, nur daß wir die Bewegung im Epizykel nicht, wie wir es bei dem Störungsvektor getan haben, gegen die Bewegung im Deferenten vernachlässigen können, falls der Radius des Epizykels größenordnungsmäßig nicht viel kleiner ist als der des Deferenten, d. h. wenn

$$|\Phi_2| = c_2 \cdot \left| \frac{\sin(x - \alpha_2) \frac{\dot{p}}{2}}{(x - \alpha_2) \frac{\dot{p}}{2}} \right|$$

im Vergleich mit

$$|\Phi_1| = c_1 \cdot \left| \frac{\sin(x - \alpha_1) \frac{\dot{p}}{2}}{(x - \alpha_1) \frac{\dot{p}}{2}} \right|$$

noch beachtlich ist.

Die Trennung der beiden Perioden läßt sich auf verschiedene Arten durchführen: durch Diskussion der epizyklischen Wegkurve des Periodogrammvektors selbst, durch das „Intensitätsdiagramm“

$$H^2(q) = a^2(q) + b^2(q)$$

gemeinsam mit dem Phasendiagramm

$$\psi(q) = \arctg \frac{b(q)}{a(q)} \pm 2k\pi$$

oder durch die gemeinsame Diskussion der Komponenten $a(q)$ und $b(q)$ direkt.

Das Intensitätsdiagramm hat, wenn wir die Kräuselung durch die Störungsglieder außer Betracht lassen, die mathematische Gestalt

$$H^2(q) = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + 2\Phi_1\Phi_2 \cos \left[(\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\dot{p}}{2} + \gamma_2 - \gamma_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)q \right],$$

$H^2(q)$ schwankt also um den Mittelwert $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ sinusförmig mit der Amplitude $2\Phi_1\Phi_2$ und der Frequenz $\alpha_2 - \alpha_1$. Sind die Wellenlängen der beiden zu trennenden Schwingungen

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1}; \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{\alpha_2},$$

so ergibt sich die Wellenlänge der Schwankung des Intensitätsdiagramms zu

$$\sigma = \frac{2\pi}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2}.$$

Diese Wellenlänge entspricht einer vollendeten „Schwebung“¹ zwischen den beiden benachbarten Periodizitäten.

Etwas kompliziertere Formeln ergeben sich bei der Bestimmung des Phasendiagramms. Geometrisch ist jedoch einzusehen, daß die Phase $\psi(q)$ des Periodogrammvektors $\mathfrak{P}(q)$ während des Vorgangs der

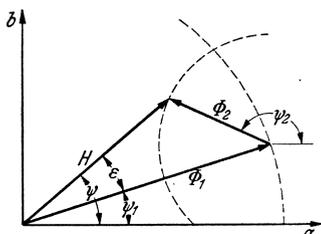


Abb. 13. Geometrische Addition der Hauptvektoren zweier benachbarter Schwingungen.

Epizykelbewegung mit der gleichen Periode um die Phase $\psi_1(q)$ des Hauptvektors $p_1(q)$ schwankt, wie der Betrag des Periodogrammvektors, also mit der oben abgeleiteten Schwebungsperiode σ . Die Phase $\psi(q)$ setzt sich also aus der gleichmäßig fortschreitenden Phase von $p_1(q)$ und einem periodisch um null schwankenden Zusatzwinkel ε zusammen, dessen Elongationen um so kleiner sind, je kleiner das Verhältnis der Beträge von p_2 und p_1 zueinander ist. In Abb. 13 ist die geometrische Addition von p_1 und p_2 veranschaulicht. Φ_1 und Φ_2 seien die Beträge der beiden Teilvektoren, ψ_1 und ψ_2 ihre Phasen. Dann erkennt man leicht (Sinussatz) die Gültigkeit der Beziehung

$$\Phi_1 \sin \varepsilon + \Phi_2 \sin (\varepsilon - (\psi_2 - \psi_1)) = 0,$$

aus der ε durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\Phi_2 \sin (\psi_2 - \psi_1)}{\Phi_1 + \Phi_2 \cos (\psi_2 - \psi_1)}$$

bestimmt wird. Ist nun $\Phi_2 \ll \Phi_1$, so findet man durch Reihenentwicklung

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \sin (\psi_2 - \psi_1) \left\{ 1 - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \cos (\psi_2 - \psi_1) + \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right)^2 \cdot \cos^2 (\psi_2 - \psi_1) - \dots \right\}.$$

Bei sehr kleinem $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ ist angenähert $\varepsilon = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \sin (\psi_2 - \psi_1)$, im übrigen

¹ Als „Schwebung“ bezeichnet man die periodische Erscheinung, die eintritt, wenn zwei Schwingungen von gleicher (oder annähernd gleicher) Amplitude und annähernd gleichen Wellenlängen sich überlagern. So ist

$$\cos \alpha_1 t + \cos \alpha_2 t = 2 \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} t \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} t.$$

Der Superpositionseffekt läßt sich also deuten als eine kurzperiodische Schwingung von der Frequenz $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, deren Amplitude langperiodisch veränderlich ist. Als „Schwebungsperiode“ bezeichnet man den Abstand derjenigen Abszissen, bei denen infolge dieses Effekts die Amplituden verschwinden. Die Schwebungsperiode ist demnach halb so groß wie die Periode des langwelligen Faktors, ihre Frequenz also $|\alpha_1 - \alpha_2|$.

ist die Schwankung nicht genau sinusförmig, weicht vielmehr von der Sinusform um so mehr ab, je größer das Verhältnis $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ wird. Hin- gegen ist die *Periode* der Schwankung streng durch die Veränderlichkeit des Winkels

$$\psi_2 - \psi_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\phi}{2} + \gamma_2 - \gamma_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) q,$$

also, wie oben, durch σ gegeben.

Die Bestimmung der beiden Perioden geschieht in zwei Schritten. Nachdem durch die Wegkurve die epizyklische Form¹ der Veränderung des Periodogrammvektors mit q festgestellt ist, bestimmt man zunächst die Hauptperiode durch lineare Ausgleichung des Phasendiagramms. Aus den periodischen Schwankungen des Phasendiagramms und des Intensitätsdiagramms, die von gleicher Wellenlänge sein müssen, wird sodann die Differenz $\alpha_2 - \alpha_1$ abgeleitet, wodurch auch die zweite Frequenz wenigstens ungefähr bekannt wird. Eine Wiederholung der Rechnung mit $x \sim \alpha_2$ liefert die zweite Schwingung genauer.

Ohne besondere Erläuterung ist einzusehen, daß zur genauen Trennung der Perioden nach dieser Methode erforderlich ist, daß mindestens ein voller Epizykelumlauf stattfindet, weil andernfalls die Ermittlung der Schwebungsperiode wie auch die lineare Ausgleichung der Phasenkurve zu ungenau wird. Es muß also die zur Verfügung stehende Beobachtungsreihe mindestens so lang sein, daß ein Analysenintervall von der Länge ϕ um den Betrag σ verschoben werden kann. Das heißt aber, daß die Beobachtungsreihe mindestens $\phi + \sigma$ Beobachtungswerte umfassen sollte. Entsprechen etwa die beiden Schwingungsperioden zwei benachbarten harmonischen Wellen im Analysenintervall ϕ , ist also

$$\tau_1 = \frac{\phi}{r}; \quad \tau_2 = \frac{\phi}{r+1},$$

so ergibt sich

$$\sigma = \phi,$$

mithin für die Mindestlänge der Beobachtungsreihe der Wert 2ϕ . In einem Spektrum für das Analysenintervall 2ϕ würden also die beiden Schwingungen durch eine volle Maximumbreite voneinander getrennt sein, d. h. die Beobachtungsreihe selbst muß mindestens *zwei* volle Schwebungen umfassen. Das ergibt eine Folgerung, die auf den ersten Blick sehr gegen die Zweckmäßigkeit der Periodogramm- methode zu sprechen scheint: Aus der Beobachtungsreihe selbst läßt sich ihre Zusammensetzung aus zwei Schwingungen mit benachbarten Wellenlängen schon aus einer einzigen vollendeten Schwebung erkennen, während die

¹ Liegen die Frequenzen α_1 und α_2 im Spektrum zu gleichen Seiten der Versuchsfrequenz x , haben also $x - \alpha_1$ und $x - \alpha_2$ das gleiche Vorzeichen, so zeigen die Schleifen der resultierenden Epizykloide nach dem Innern des Deferentenkreises. Liegt dagegen x zwischen α_1 und α_2 , so zeigen sie nach außen.

Periodogrammanalyse eine doppelt so lange Reihe notwendig macht, abgesehen davon, daß erst eine erhebliche Rechenarbeit zum Ziele führt. Gegen diesen Gedankengang ist aber einzuwenden, daß der eigentliche Gegenstand der Periodogrammanalyse nicht diese einfachen periodischen Funktionen sind, die wir den bisherigen Betrachtungen zugrunde gelegt haben, und die natürlich durch geschlossene Methoden von großer Strenge und Kürze analysiert werden könnten. Vielmehr handelt es sich in der Praxis fast immer um empirische Funktionen, deren periodische Eigenschaften aus der bloßen Betrachtung ihres Verlaufs keineswegs ersichtlich sind, sondern aus einer Menge von teils systematischen, teils auch ganz irregulären Bestandteilen erst herausgesucht werden müssen. In diesem Sinne erscheint ein Verfahren gerechtfertigt, durch das eine Beobachtungsreihe erst für die spezielle Untersuchung eines bestimmten und eng begrenzten Spektralteils zurechtgemacht wird. Nehmen wir nur den Fall an, daß eine Beobachtungsreihe ein Spektrum ergibt, das an mehreren Stellen beträchtliche Intensitäten aufweist, das also den Verdacht auf eine größere Anzahl von Periodizitäten rechtfertigt, die noch dazu unter unperiodischen Bestandteilen verborgen sein können. Das Periodogramm erlaubt dann eine vorurteilslose Teiluntersuchung jedes einzelnen dieser „verdächtigen“ Spektralabschnitte, die darauf beruht, daß die Einflüsse aller weiter entfernten Perioden so stark herabgedrückt werden, daß sie unter der Menge der unperiodischen Einflüsse verschwinden. Mit anderen Worten: Fremde Perioden werden abgeblendet. Die obigen Betrachtungen über benachbarte Periodizitäten treten in der Praxis der Periodogrammrechnung also immer nur dann in Erscheinung, wenn an irgendeiner Stelle des Spektrums zwei „Linien“ so dicht zusammenliegen, daß die „Abblendung“ der einen Linie nicht mehr ganz möglich ist. In diesem Fall haben wir aber durch die Abblendung des übrigen Spektrums auf das Niveau des Unperiodischen (also gewissermaßen auf die Intensität des kontinuierlichen Spektrums) erreicht, daß nur diese beiden Linien noch eine wesentliche Rolle spielen. Wir haben also den einfachen Fall einer Schwebungskurve erst durch die Konstruktion des Periodogramms wieder hergestellt und sind nunmehr in der Lage, uns seiner Vorteile zu bedienen. Besteht das Spektrum *nur* aus zwei Linien, wie oben zur Ableitung der Gebrauchsformeln der Einfachheit halber angenommen wurde, so ist keine Abblendung fremder Linien nötig und somit auch kein Periodogramm; wir können diesen Fall auch einfacher erledigen. *Ist* sie aber erforderlich, so darf es nicht befremden, daß die Anwendung dieses Hilfsmittels von einem größeren Verbrauch an Beobachtungsmaterial begleitet ist. Die Dinge liegen hier ganz ähnlich wie bei der „Glättung“ von Beobachtungsreihen, die ja eigentlich auch nichts anderes ist als eine Abblendung aller kurzperiodischen Schwankungen. In der Tat wird bei der Glättung durch übergreifende Mittel die Beobachtungsreihe verkürzt; ist das Intervall der

Mittelbildung \bar{p} , so gehen nach der Glättung \bar{p} Beobachtungen verloren. Nichts anderes geschieht aber bei der Bildung der Phasen- und Intensitätsdiagramme mit einem Analysenintervall von der Länge \bar{p} .

Die Auffassung einiger Autoren, die der Periodogramm- methode eine „zu geringe Auflösungskraft“ zuschreiben, ist damit richtig gestellt worden. Die Bedenken lassen sich noch weiter aus dem Wege räumen, wenn man berücksichtigt, daß der Fall persistenter Periodizitäten in der Praxis bei weitem der seltenere ist. Andernfalls ist die Periodogramm- methode in irgendeiner ihrer vielen Formen die einzige, oder wenigstens die natürlichste, die ohne vorgefaßte Meinung an das Problem heranzugehen gestattet. Die Herausblendung eines bestimmten Spektral- teils, der aus irgendwelchen Gründen — etwa auf Grund einer vorher- gegangenen Durchmusterung oder aus theoretischen Erwägungen oder Vermutungen — interessant und daher einer Spezialuntersuchung bedürftig erscheint, gibt stets die Möglichkeit, solche Untersuchungen unbeeinflußt oder nur geringfügig beeinflußt von dem Verhalten der Funktion in anderen Teilen des Spektrums durchführen zu können. Im folgenden sollen einige besondere Fälle beschrieben werden, in denen eine Abweichung von der Norm (einfache sinusförmige und durch den ganzen Beobachtungsbereich persistente Wellen) stattfindet. Solche Abweichungen sind nicht nur denkbar, sondern kommen in der Praxis der Periodenforschung, insbesondere bei der Untersuchung geophysika- lischer und astronomischer Periodenprobleme außerordentlich häufig vor.

1. Zwei oder mehrere benachbarte Perioden kommen nicht in persi- stenter Form und gleichzeitig vor (Überlagerung, Schwebung), sondern sind quasipersistent und lösen einander zeitlich ab. *Persistent* soll eine Welle heißen, wenn sie während der gesamten Beobachtungsdauer konstante Periode, Amplitude und Phase besitzt, *quasipersistent*, wenn dies nur während eines Teils der Beobachtungsdauer der Fall ist. Es möge also, um ein Beispiel zu geben, in der Zeit $[0, \dots, t]$ eine Sinus- schwingung mit den Konstanten α_1, c_1, γ_1 bestehen, die in der Zeit $[t, \dots, T]$ durch eine andere mit den Konstanten α_2, c_2, γ_2 abgelöst wird. Es soll ferner angenommen werden, daß die beiden Frequenzen im Sinne unserer früheren Überlegungen „benachbart“ seien. Die Spektraldurchmusterung im Grundintervall $[0, \dots, T]$ ergibt unter anderem zwei mehr oder weniger gut getrennte und benachbarte Maxima, so daß zunächst Verdacht auf zwei sich überlagernde und eine Schwebung bildende Wellen besteht. Das Phasendiagramm mit einem kleineren Analysenintervall \bar{p} (es sei $\bar{p} \ll t$ und $\bar{p} \ll T - t$ angenommen) ergibt aber keineswegs für eine in der Nähe einer der beiden Frequenzen gelegene Versuchsfrequenz x den erwarteten linearen Verlauf, der durch eine regelmäßige, von der benachbarten Periodizität herrührende Welle deformiert wird, sondern besteht aus mehreren linearen Teilen verschiedener Neigung. Das Phasendiagramm zeigt drei verschiedene Abschnitte. Für $q = 0, \dots, t - \bar{p}$ ergibt sich eine

konstante Neigung $x - \alpha_1$, für $q = t, \dots, T - p$ eine konstante Neigung $x - \alpha_2$. In dem kleinen Zwischenstück $q = t - p, \dots, t$ vollzieht sich ein allmählicher Übergang zwischen beiden Teilen des Phasendiagramms. Dies Übergangsstück hat für die Analyse keine unmittelbare Bedeutung. Es entspricht der Erscheinung, die bei der Glättung einer Kurve durch übergreifende Mittel eintreten würde, wenn diese an irgendeiner Stelle eine Unstetigkeit oder einen Knick aufweist. Im vorliegenden Falle würde man die beiden linearen Hauptteile des Phasendiagramms bis zur Mitte des Zwischenstücks verlängern. Treffen sich beide Gerade

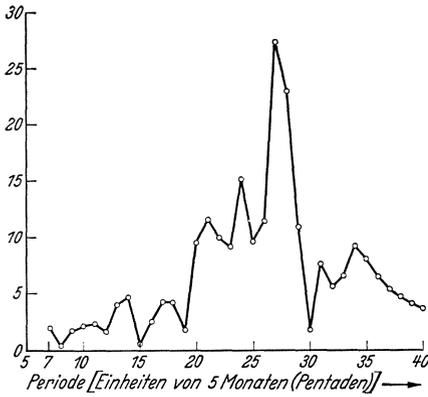


Abb. 14. Amplitudenspektrum der Sonnenfleckenrelativzahlen von 1749–1928.

dort, so würde das bedeuten, daß die Phase des Vorgangs sich beim Übergang auf die nachfolgende Welle stetig fortsetzt — andernfalls findet ein Phasensprung statt. Es ist natürlich auch denkbar, daß die Periode der Welle erhalten bleibt und nur die Phase einen Sprung erleidet; dann sind die beiden Hauptteile des Diagramms parallel gegeneinander verschoben. Ändert sich auch die Amplitude bei der Ablösung der ersten Schwingung durch die zweite, so ist dies aus dem Amplituden- oder Intensitätsdiagramm unmittelbar abzulesen.

Das klassische Beispiel für den hier schematisch dargestellten Fall bietet die Analyse der großen Beobachtungsreihe der Sonnenfleckenrelativzahlen von 1750 bis zur Gegenwart. Aus dem Spektrum der Gesamtreihe sind mehrere große und dicht aufeinanderfolgende Maxima im Bereich der Versuchsperioden von 9–12 Jahren zu entnehmen (Abb. 14). Das Phasendiagramm zeigt einen deutlich linearen Verlauf, der durch zwei Sprungstellen mit nachfolgender Richtungsänderung unterbrochen ist. Die Sprünge treten etwa in den Jahren 1793 und 1831 auf und teilen die Beobachtungskurve in drei Abschnitte, in denen die Hauptperiode der Sonnenflecken die Länge von 9,5, 12,5 und 11,4 Jahren aufweist. In dem mittleren Zeitabschnitt sind auch die Amplituden der Schwankungen auffallend kleiner gewesen als in den beiden angrenzenden (Abb. 15).

Bei der Darstellung des Periodogramms in Gestalt der *Summenfunktion* ergibt eine sprunghafte Änderung der Periodizitätskonstanten folgendes Bild: Tritt lediglich ein Phasenwechsel ein, so erleidet der Weg des Summenvektors eine plötzliche Richtungsänderung unter Beibehaltung seines geradlinigen ($x = \alpha$) bzw. schwach gekrümmten (x nahezu $= \alpha$) Verlaufs. Ist außerdem eine Änderung der Periode zu verzeichnen,

so ändert sich auch die Wegkrümmung. Ist die Periodenänderung sehr groß, so daß die Versuchsperiode sich nach der Änderung außerhalb des Hauptmaximums befindet, so geht die systematisch fortschreitende Bewegung in einen „Irrlauf“ über, bzw. in eine schnelle Bewegung in kleinen Kreisen, die von dem praktisch stets vorhandenen Irrlauf verdeckt wird.

2. Periodische Schwankungen von kurzer Andauer. Das Phasendiagramm ist ein ausgezeichnetes Mittel, um Änderungen im periodischen

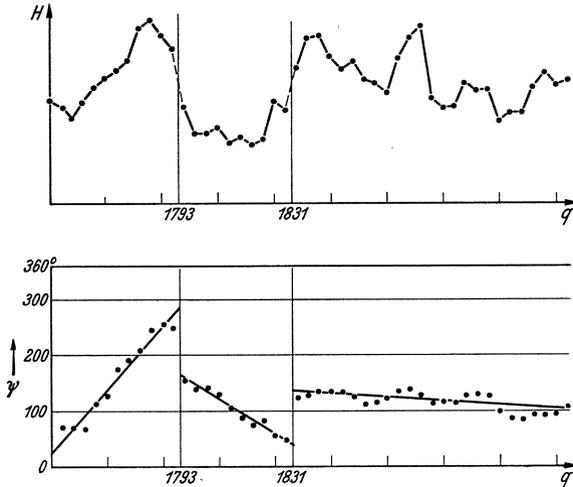


Abb. 15. Amplituden- und Phasendiagramm der Sonnenfleckenrelativzahlen für die Versuchsperiode 11,25 Jahre und ein gleich großes Analysenintervall.

Charakter der Beobachtungsreihe erkennen zu lassen, falls diese in genügend großen Abständen eintreten, und in der Zwischenzeit die Periodizität ungeändert bleibt. Es ist deswegen oben ausdrücklich angenommen worden, daß die Andauer der periodischen Schwankungen größer ist als das Analysenintervall. Ist das nicht der Fall, so gelten die bisherigen Überlegungen nicht mehr — das Phasendiagramm wird dann als Hilfsmittel zur Periodenbestimmung ungeeignet und kann sogar zu falschen Schlüssen führen. Angenommen, eine Beobachtungsreihe sei in einem die Versuchsfrequenz x enthaltenden Spektralbereich frei von Periodizitäten. Das Periodogramm für ein Vielfaches von x als Analysenintervall würde also, bei Verschiebung des Intervallanfangs längs der Zeitachse, keine wesentlichen Amplituden ergeben; die Phasen würden dementsprechend schnell und unregelmäßig wechseln. Nun sei an irgendeiner Stelle der Zeitachse dieser Funktion eine sinusförmige Schwankung von einer von $\frac{2\pi}{x}$ nicht sehr verschiedenen Wellenlänge hinzugefügt, die aber nur eine einzige Schwingung umfassen soll (etwa eine plötzlich

auftretende und stark gedämpfte Schwingung). In bezug auf das Periodogramm und die Versuchsfrequenz x verhält sich die Beobachtungsfunktion annähernd so, als wenn sie — von dieser kurzdauernden Störung abgesehen — überall konstant, also etwa gleich null wäre. Die Periodogrammkomponenten reduzieren sich mithin im wesentlichen auf Integrale über den kurzen Störungsbereich. Würden wir also jetzt ein Amplituden- und Phasendiagramm konstruieren, indem wir den Anfang des Analysenintervalls stetig verändern, so würden die Amplituden erst dann zu beachtlichen Werten ansteigen, wenn die störende Welle in den Bereich des Analysenintervalls eingetreten ist. Wegen der festen Verknüpfung der Versuchswelle mit der Beobachtungsfunktion behalten die Periodogrammkomponenten und damit Amplitude und Phase ihren Wert, solange die Welle im Analysenintervall eingeschlossen ist. Amplituden- und Phasendiagramm zeigen demnach eine Zeitlang Konstanz, woraus ein unkritischer Rechner schließen würde, daß während dieser (nahezu ein Analysenintervall umfassenden) Zeit eine Periode von genau der Frequenz x vorhanden gewesen sei, während es sich in Wirklichkeit um eine periodische Störung von der Andauer eines Bruchteils des Analysenintervalls, aber um so größerer Amplitude handelte, und um eine von der Versuchsperiode vielleicht merklich abweichende Periode.

Es zeigt sich hier eine Mehrdeutigkeit des Phasendiagramms, die bisher kaum beachtet worden ist, die aber überall eine Rolle spielen wird, wo Schwankungen von kurzer Dauer erwartet werden dürfen, z. B. bei der Untersuchung meteorologischer Perioden. Eine Unterscheidung der beiden Möglichkeiten, von denen hier die Rede war, wird auf Grund des Phasen- und Amplitudendiagramms allein nicht gelingen — hier ist es unerlässlich, die *Summenfunktion* zu Hilfe zu nehmen. In dem oben angenommenen Falle würde sich anfangs ein „Irrlauf“ ergeben, sodann — so lange, bis die periodische Störung voll in die fortschreitende Summierung eingegangen ist — ein geradliniger oder schwach gekrümmter Vektorenzug, danach wieder ein Irrlauf. Die Summenfunktion gibt hier — im Gegensatz zum eigentlichen Periodogramm — die tatsächlichen Verhältnisse deswegen besser wieder, weil sie nicht von einem willkürlichen Analysenintervall abhängt. Dem Leser sei es überlassen, sich den Unterschied an einem einfachen konkreten Beispiel klar zu machen.

Überhaupt erweist sich die Summenfunktion infolge ihrer Eigenschaft, von einem „Analysenintervall“ unabhängig zu sein, als eine geeignete Grundlage für alle Nachforschungen, die sich auf einen Spektralbereich in der Umgebung einer bestimmten Versuchsperiode erstrecken. Man kann dem graphischen Bild der Summenfunktion unmittelbar die Periodogrammvektoren für Intervalle von beliebiger Lage und Länge entnehmen — es enthält also implizit alle Möglichkeiten für die Wahl von Analysenintervallen und erleichtert diese Wahl durch seine anschauliche und übersichtliche Gestalt.

Trotzdem darf nicht übersehen werden, daß die Summenfunktion auch gewisse Nachteile hat, die wiederum das auf ein festes Analysenintervall bezügliche Periodogramm vermeidet. Ist z. B. ein konstantes Glied in der Beobachtungsreihe enthalten, das vor der Analyse nicht eliminiert wurde, so ist leicht einzusehen, daß der Summationsvektorenzug, soweit er von diesem konstanten Glied herrührt, ein reguläres Polygon bildet, dessen Seiten den Betrag des konstanten Gliedes zur Länge haben, und dessen Seitenzahl gleich der Anzahl der auf eine Versuchswelle gehenden Zeiteinheiten ist. Der Vektorenzug beschreibt also eine kreisförmige Bewegung mit der Versuchsperiode als Umlaufsperiode und mit einem Radius, der dem konstanten Glied proportional ist. Hieraus ist ersichtlich, daß die normale Periodogrammfunktion durch das konstante Glied nicht beeinflußt wird, sofern das Analysenintervall ein ganzes Vielfaches der Versuchswelle ist, da dann die Periodogrammvektoren von einem Punkt des Vektorenzuges zu einem anderen reichen, der um einen oder mehrere volle Kreisumläufe von ihm entfernt ist — diese Entfernung ist aber null, solange keine anderen Bestandteile als das konstante Glied wirksam waren.

Der Summationsvektorenzug enthält demnach unter Umständen Bestandteile, die seine Gestalt merklich beeinflussen, aber für die Analyse wenig Bedeutung haben. So wird auch ein säkular wachsendes oder abnehmendes Glied die Form der Summenfunktion beeinflussen — man überlegt sich leicht, daß es *spiralförmige* Vektorenzüge erzeugt. Auch langperiodische Schwankungen, die oft beträchtliche Amplituden und stark wechselnde Perioden haben, machen sich störend bemerkbar. Es ist daher unter allen Umständen anzuraten, konstante, säkulare und langperiodische Glieder vor der Bildung der Summenfunktion zu eliminieren, soweit dies durch Glättung der Beobachtungsreihe ohne Willkür möglich ist. Trotzdem werden auch die kleinen, bei der Elimination zurückgebliebenen Reste dieser Bestandteile noch merkliche Einflüsse zeigen, da sie durch Summierung vergrößert werden. In dieser Hinsicht hat die Summenfunktion ähnliche unangenehme Eigenschaften, wie wir sie im fünften Kapitel bei der Methode von GALITZIN (V, 3) kennenlernen werden, die ebenfalls eine Integralmethode ist und auf Integrationen mit fester unterer und variabler oberer Grenze beruht. Während dort aber die nicht oder unvollständig eliminierten säkularen oder konstanten Beimengungen wiederum säkulare Glieder von sehr verschiedener und unübersichtlicher Form erzeugen, besteht ihre Wirkung auf die Summenfunktion in kreis-, schleifen- oder spiralförmigen Vektorenzügen, deren Windungen als Umlaufsperiode die Versuchsperiode oder eine benachbarte haben, während die gesuchten Perioden des Beobachtungsmaterials gerade als säkulare oder langperiodische Effekte in Erscheinung treten.

3. Elliptische Epizykeln. Häufig ergibt die komplexe Funktion

$$\mathfrak{F}(x, q) = a(x, q) + i b(x, q),$$

die wir auch kurz als „Weg des Periodogrammvektors“ bei veränderlichem q bezeichnet haben, eine epizykloidenartige Kurve, die nicht durch Kombination zweier Kreisschwingungen erklärt werden kann. Eliminiert man etwa die Bewegung im Deferenten, also die Hauptschwingung, so bleibt ein Vektor p_2 übrig, dessen Endpunkt nicht, wie bei der Superposition zweier Sinusschwingungen, einen Kreis beschreibt, sondern eine geschlossene Kurve anderer Art, im einfachsten Fall eine Ellipse. Der Vektor p_2 ließe sich dann etwa in der komplexen Form

$$p_2(x, q) = A \cos((x - \alpha_2)q + \xi) + i B \cos((x - \alpha_2)q + \eta) \quad (5)$$

schreiben, während bei kreisförmiger Bewegung

$$p_2(x, q) = A \{ \cos((x - \alpha_2)q + \xi) + i \sin((x - \alpha_2)q + \xi) \},$$

also der Spezialfall $B = A$, $\eta = \xi - \frac{\pi}{2}$ erfüllt wäre. Nach Abzug der Deferentenbewegung zeigt sich also, daß die restlichen Komponenten $a(q)$ und $b(q)$ Sinuswellen von der gleichen Frequenz, aber mit verschiedenen Amplituden darstellen, und daß ihre Phasen, statt wie im Falle der Kreisbewegung um 90° , um einen beliebigen Betrag gegeneinander verschoben sind. Diese elliptische Bewegung ist die gleiche, wie sie bei der Schwingung eines elliptischen Pendels bekannt ist; sie läßt sich stets als Kombination zweier Kreisbewegungen von verschiedener Amplitude, gleicher Frequenz, aber entgegengesetztem Umlaufssinn darstellen. Der oben angegebene Vektor läßt sich daher als Summe zweier Vektoren

$$p_2 = \left. \begin{aligned} &\Phi_1 \{ \cos((x - \alpha_2)q + \delta) + i \sin((x - \alpha_2)q + \delta) \} + \\ &+ \Phi_2 \{ \cos((x - \alpha_2)q + \varepsilon) - i \sin((x - \alpha_2)q + \varepsilon) \} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

darstellen. Durch Vergleichung der Formeln (5) und (6) ergibt sich leicht, daß

$$\begin{aligned} A \cos \xi &= \Phi_1 \cos \delta + \Phi_2 \cos \varepsilon & B \cos \eta &= \Phi_1 \sin \delta - \Phi_2 \sin \varepsilon \\ A \sin \xi &= \Phi_1 \sin \delta + \Phi_2 \sin \varepsilon & -B \sin \eta &= \Phi_1 \cos \delta - \Phi_2 \cos \varepsilon \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} 2 \Phi_1 \cos \delta &= A \cos \xi - B \sin \eta & 2 \Phi_2 \cos \varepsilon &= A \cos \xi + B \sin \eta \\ 2 \Phi_1 \sin \delta &= A \sin \xi + B \cos \eta & 2 \Phi_2 \sin \varepsilon &= A \sin \xi - B \cos \eta \end{aligned}$$

ist. Ferner bemerkt man, daß

$$4 \Phi_1^2 = A^2 + B^2 + 2 A B \sin(\xi - \eta) \quad 4 \Phi_2^2 = A^2 + B^2 - 2 A B \sin(\xi - \eta).$$

Haben also die beiden erzeugenden Kreisbewegungen gleiche Amplitude ($\Phi_1 = \Phi_2$), so muß $\xi = \eta$ sein, der resultierende Vektor läßt sich mithin durch die Formel

$$p_2 = (A + i B) \cos((x - \alpha_2)q + \xi)$$

darstellen, wobei $A + i B$ eine konstante komplexe Zahl bedeutet. Die Epizykelbewegung artet damit in eine geradlinige harmonische Bewegung aus („Geradföhrung“ durch zwei geometrisch summierte

Kreisbewegungen von gleicher Amplitude und entgegengesetzt gleicher Umlaufgeschwindigkeit).

Ein elliptischer Epizykel oder der Grenzfall einer Geradföhrung läßt sich also gegebenenfalls durch das Vorhandensein *zweier* der Hauptperiode benachbarter Periodizitäten erklären, deren Frequenzen im Spektrum zur Versuchsfrequenz x beiderseitig symmetrisch liegen, und zwar an den Stellen $x - y$ und $x + y$, wenn $y = |x - \alpha_2|$ gesetzt wird. Liegen diese beiden Frequenzen nicht zu x , sondern zu einer x benachbarten Frequenz, etwa zu α_1 , symmetrisch, so findet man leicht, daß die Epizykelbewegung dann auf einer Ellipse vor sich geht, deren große Halbachse (Apsidenlinie) einer beständigen langsamen Drehung unterworfen ist¹, also etwa der Schwingung eines FOUCAULTSchen Pendels zu vergleichen wäre.

Auch die soeben besprochenen Fälle sind in der Praxis häufig anzutreffen. Bei der Analyse der periodischen Verlagerung der Erdpole (Polbewegung) bleibt nach Eliminierung der bekannten CHANDLERSchen Periode eine Reststörung übrig, die — soweit die bisher genauer untersuchte 30jährige Beobachtungsreihe Schlüsse gestattet — einer elliptischen Epizykelbewegung entspricht. Die beiden, im Frequenzspektrum symmetrisch zur CHANDLERSchen Periode von 433 Tagen gelegenen Nebenperioden sind zuerst von WITTING entdeckt worden und durch eine Untersuchung des Verfassers (Lit. 258) mit Hilfe der obigen Methode bestätigt worden, soweit dies aus einer so kurzen Reihe möglich war. (Die Epizykelbewegung umfaßte einen vollen Umlauf.) Bei der Untersuchung der Sonnenfleckenrelativzahlen der letzten hundert Jahre (Lit. 260) ergab sich, mit der großen Periode von $11\frac{1}{4}$ Jahren als Versuchsperiode, ein Pendeln des Periodogrammvektors längs einer Geraden, so daß also zwei symmetrische Nebenperioden mit gleicher Amplitude zu existieren scheinen. Eine ausgesprochen elliptische Bewegung mit deutlicher Apsidendrehung fand Verfasser bei der Untersuchung der Lichtwechselperioden des veränderlichen Sterns R Scuti (Lit. 265).

Das verhältnismäßig häufige Auftreten solcher elliptischen Störungen bei der Untersuchung der Periodogramme kosmischer oder terrestrischer Beobachtungsreihen erweckt den Verdacht, daß hier Ursachen formaler Natur vorliegen. Die Merkwürdigkeit, daß die Hauptperioden einer Erscheinung so oft von paarweise auftretenden Nebenperioden begleitet werden, könnte man als *partielle Symmetrie* des Spektrums bezeichnen. Eine der häufigsten Ursachen der partiellen Symmetrie ist in einer

¹ Haben die beiden elementaren Epizykelbewegungen bei gleicher Amplitude die Frequenzen nq und $-(n + \varepsilon)q$, so stützt sich die Berechnung der resultierenden Bewegung auf die Formel

$$e^{in q} + e^{-i(n + \varepsilon)q} = e^{-\frac{1}{2}i\varepsilon q} \left\{ e^{i\left(n + \frac{1}{2}\varepsilon\right)q} + e^{-i\left(n + \frac{1}{2}\varepsilon\right)q} \right\} = 2e^{-\frac{1}{2}i\varepsilon q} \cos\left(n + \frac{1}{2}\varepsilon\right)q.$$

gewissen Ungleichmäßigkeit der Beobachtungskurven selbst zu suchen, die sich darin äußert, daß die Maxima und Minima der Kurven statistisch ein verschiedenes Verhalten zeigen. Das ist sowohl bei der Sonnenfleckenkurve als auch bei den Lichtkurven von Veränderlichen wie R Scuti der Fall. Die Sonnenfleckenminima sind flach und gehen bis an den Wert null herunter, der zugleich ein absolutes Minimum darstellt, während die Maxima spitzer und von sehr verschiedener Höhe sind. Bei R Scuti und anderen veränderlichen Sternen sind umgekehrt die Maxima flach und von nahezu der gleichen Größe, während die Minima sehr verschieden tief und oft sehr spitz sind. Ähnliche Verhältnisse, wenn auch nicht ganz so kraß, treten bei den Luftdruckkurven für diejenigen Stationen auf, die im Bereich der Zugstraßen der Zyklonen liegen. Bei den Sonnenflecken liegt die natürliche Erklärung für dies formale Verhalten der Kurve auf der Hand: Im Sonnenfleckenminimum ist die Amplitude der periodisch wirksamen fleckenbildenden Kräfte null. Die Relativzahlen selbst geben nicht die Ausschläge der flecken-erzeugenden Kräfte an, die ja von dem Ruhewert null aus sowohl ins Positive wie ins Negative gehen müßten, sondern ihr wesentlich positives Quadrat; sie stellen also „Intensitäten“ dar. Sofern die Schwingungen „kohärent“ sind, beobachten wir also die Zusammenwirkung zweier kombinierter Schwingungen

$$c_1 \cos \alpha_1 t + c_2 \cos \alpha_2 t$$

in der Form

$$\begin{aligned} (c_1 \cos \alpha_1 t + c_2 \cos \alpha_2 t)^2 &= c_1^2 \cos^2 \alpha_1 t + 2 c_1 c_2 \cos \alpha_1 t \cos \alpha_2 t + c_2^2 \cos^2 \alpha_2 t \\ &= \frac{c_1^2 + c_2^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} \cos 2 \alpha_1 t + \frac{c_2^2}{2} \cos 2 \alpha_2 t + c_1 c_2 (\cos (\alpha_1 + \alpha_2) t + \cos (\alpha_1 - \alpha_2) t). \end{aligned}$$

Das Spektrum enthält vier Schwingungen mit den Frequenzen $2 \alpha_1$, $2 \alpha_2$, $\alpha_1 \pm \alpha_2$. Sind also α_1 und α_2 nahezu gleich ($\alpha_1 - \alpha_2 = \varepsilon$), so ergibt sich eine lange Periode (Frequenz ε) und eine kurze Periode (Frequenz $\eta = \alpha_1 + \alpha_2$), die zu beiden Seiten im Abstand ε von symmetrischen Nebenlinien ($2 \alpha_1 = \eta + \varepsilon$ und $2 \alpha_2 = \eta - \varepsilon$) begleitet wird. Aus dieser Überlegung folgt aber, daß Kurven formal ähnlichen Verhaltens, selbst wenn der Intensitätsansatz aus physikalischen Gründen nicht gerechtfertigt ist, ein ähnliches Spektrum und ähnliche Erscheinungen in der Gestaltung der Periodogrammfunktion liefern müssen.

7. Das Buys-Ballotsche Schema.

Jede vollständige Periodogrammanalyse, besonders wenn es sich um Beobachtungsreihen handelt, die — wie die meisten geophysikalischen — aus sehr heterogenen Elementen zusammengesetzt sind, erfordert eine ungeheure Rechenarbeit. Viele Aufgaben der Periodenforschung sind bisher ungelöst geblieben, viele nicht einmal in Angriff genommen worden, weil diese Arbeit mehr Zeit und Mittel erforderte, als zur

Verfügung standen. Die Entwicklung der praktischen Arbeitsmethoden in ökonomischer Beziehung ist daher neben der Lösung konkreter Probleme ein Ziel, das seit längerer Zeit unablässig verfolgt worden ist.

Die Periodogrammrechnung arbeitet mit Elementen, die nach Art der FOURIER-Koeffizienten als Produktsummen zwischen der Folge der äquidistanten Beobachtungswerte und den Folgen trigonometrischer Funktionswerte (Versuchswellen) gebildet werden. Sofern sich diese Produktsummen über mehr als eine vollendete Versuchswelle erstrecken, haben wir als erleichterndes Hilfsmittel bereits die Bildung von „Summenreihen“ kennengelernt, durch die jene Beobachtungswerte, die mit trigonometrischen Faktoren gleicher Phase zu multiplizieren waren, vor der Produktbildung additiv zusammengefaßt werden konnten. Das bei der Bildung der Summenreihen zu benutzende Schema von Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{cccc}
 y_0 & y_1 & y_2 & \dots y_{r-1} \\
 y_r & y_{r+1} & y_{r+2} & \dots y_{2r-1} \\
 y_{2r} & y_{2r+1} & y_{2r+2} & \dots y_{3r-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \hline
 y_{(k-1)r} & y_{(k-1)r+1} & \dots & y_{kr-1} \\
 \hline
 Y_0 & Y_1 & Y_2 & \dots Y_{r-1}
 \end{array}$$

ist seit langer Zeit unter dem Namen „Schema von BUYS-BALLOT“ bekannt. Von BUYS-BALLOT stammen auch jene Regeln, die die Beziehungen zwischen wirklicher Periode und Versuchsperiode klarstellen und einige der hauptsächlichsten Erkenntnisse, die wir in den vorhergehenden Abschnitten gewonnen haben, unmittelbar anschaulich machen. Diese BUYS-BALLOTSchen Regeln seien in der nachstehenden Form wiedergegeben:

1. Enthält eine Beobachtungsreihe eine (persistente) Periode von der Länge r (r sei eine ganze Anzahl von Zeiteinheiten, die Zeiteinheit sei gleich dem Beobachtungsabstand), so enthält jede Spalte des r -spaltigen Schemas nur Beobachtungen der gleichen Phase. Die Summenreihe enthält also die Schwingung von der Periode r unverändert in ihrer ersten Harmonischen.

2. Ist die wahre Periode der Beobachtungsreihe etwas größer als r , so verschiebt sich das Maximum der Schwingung mit jeder Zeile ein wenig nach rechts, und zwar mit um so größerer „Geschwindigkeit“ pro Zeile, je größer der Unterschied der wahren Periode von der Versuchsperiode r ist. Sind so viel Zeilen vorhanden, daß die fortschreitende Verschiebung des Maximums in der letzten Zeile eine ganze Zeilenlänge erreicht hat, so ist die Periode in der Summenreihe ausgelöscht, desgleichen jedesmal, wenn die Verschiebung mehrere volle Zeilenlängen beträgt (Nullstellen des Periodogramms).

3. Ist die wahre Periode etwas kürzer als die Versuchsperiode, so verschiebt sich das Maximum fortschreitend nach links.

4. Ist die Zeilenanzahl so groß, daß die Verschiebung des Maximums mehr als n , aber weniger als $n + 1$ Zeilenlängen nach rechts oder links beträgt, so enthält die Summenreihe nur den Anteil der letzten Zeilen, die den Überschuß der Verschiebung über n Zeilenlängen enthalten, an der Periodizität mehr oder weniger vollständig. Die Periode ist also nicht vollständig eliminiert, wird aber bei der Bildung von Spaltenmittelwerten um so mehr herabgedrückt, je größer n ist (spurious periodicity n -ter Ordnung). Durch Summenbildung über eine genügend große Anzahl von Reihen läßt sich also eine Periode, die von der Versuchsperiode verschieden ist, zerstören (abblenden).

5. Ist die Zeilenanzahl so gering, daß die Verschiebung des Maximums einer von r nicht sehr verschiedenen Periodizität nur einen Bruchteil der Zeilenlänge beträgt, so bleibt die Periodizität in der Summenreihe zum größten Teil erhalten. Es erfolgt nur eine geringe Verkleinerung der Amplitude und eine Phasenverschiebung des Maximums an die Stelle, die der mittleren Zeile entspricht. Ist die Anzahl der zur Verfügung stehenden Zeilen groß genug, so läßt sich die (unbekannte) Periodenlänge dadurch ermitteln, daß man das Reihenschema in (eventuell übergreifende) Gruppen von wenigen Zeilen zerlegt und von jeder dieser Gruppen die Summenreihe bildet. Aus der Verschiebung der Maxima von Gruppe zu Gruppe läßt sich dann sofort der Unterschied zwischen Versuchsperiode und gesuchter Periode angeben (Phasendiagramm), vorausgesetzt, daß die Zeilenzahl jeder Gruppe doch so groß ist, daß nach Punkt 4 fremde Periodizitäten noch genügend stark abgeblendet werden.

6. Irreguläre Bestandteile der Kurve (z. B. Beobachtungsfehler) werden in den Spaltenmitteln nach dem Gesetz der Fehlerfortpflanzung herabgedrückt.

Man sieht, daß die BUYS-BALLOTSchen Regeln unmittelbar einige der wichtigsten Gesetze erkennen lassen, die die analytische Auswertung der Periodogramme beherrschen. In manchen Fällen, besonders da, wo die Periodogrammanalyse vorbehaltlich eines genaueren Einzelstudiums zunächst nur eine erste Orientierung über die periodischen Eigenschaften einer empirischen Funktion zum Ziele hat, wird man ohne genauere Rechnung aus der direkten Betrachtung der Summenreihen, nötigenfalls ihrer graphischen Aufzeichnungen, den gewünschten Überblick gewinnen und sogar Näherungen für die gesuchten Periodizitätskonstanten ableiten können, die nicht allzu scharfen Ansprüchen genügen und für eine spätere Detailuntersuchung eine nützliche Grundlage ergeben. Genau so, wie es möglich ist, aus dem geometrischen Verlauf einer einfachen Welle durch Ausmessung der Maxima und Minima nach Höhe, Abszisse und gegenseitigem Abstand Amplitude,

Phase und Wellenlänge ohne jede Rechnung mit großer Annäherung zu bestimmen, so wie es ferner möglich ist, sogar die Überlagerung zweier benachbarter Perioden an der Gestalt der „Schwebungskurve“ festzustellen und die Perioden der beiden Wellen durch Ausmessung der Schwebungsperiode zu bestimmen, wird es oftmals möglich sein, die geometrischen Bilder der Summenreihen rein graphisch auszuwerten und dadurch ihre exakte Analyse zu umgehen. Die Aussicht auf einen praktischen Erfolg dieser rohen, aber sehr schnellen Methode ist um so größer, als ja in der Summenreihe nicht nur der Anteil der irregulären Störungen prozentual herabgedrückt erscheint, sondern auch fremde Perioden mehr oder weniger stark durch den Summationsprozeß zerstört worden sind. Das gilt nur dann nicht, wenn außer einer Welle von einer um r herum liegenden Wellenlänge noch solche eine Rolle spielen, die eine in r ganzzahlig enthaltene Wellenlänge besitzen. Solche „Oberschwingungen“ werden in der Summenreihe ebenfalls als Oberschwingungen auftreten und würden erst durch Ausführung der Analyse der Summenreihe nach ihrer ersten Harmonischen zum Verschwinden gebracht werden. Immerhin läßt aber der Anblick des graphischen Bildes der Summenreihe schon erkennen, ob eine solche Maßnahme notwendig ist oder nicht. Diese Notwendigkeit wird insbesondere dann nicht bestehen, wenn die Oberschwingungen mit der betrachteten Welle als ihrer Grundschwingung in einem gesetzmäßigen Verhältnis stehen, wenn etwa der Fall vorliegt, daß die zu untersuchende Periodizität nicht sinusförmig, sondern irgendwie verzerrt ist, und wenn diese Verzerrung das Wellenbild durch die ganze Beobachtungsreihe hindurch charakterisiert. In solchen Fällen wird auch das Bild der Summenreihe, abgesehen von seiner fortschreitenden Verschiebung von Zeile zu Zeile, bzw. von Gruppe zu Gruppe, erhalten bleiben, und diese Verschiebung, aus der ja die wahre Länge der Grundwelle folgt, an dem regelmäßigen Fortschreiten charakteristischer Merkmale der Summenreihe meßbar zu erkennen sein.

Immerhin wird man eine derartige graphische Untersuchung nur mit großer Vorsicht vornehmen können. Sie wird aber gute Dienste leisten, wenn es darauf ankommt, eine oberflächliche spektrale Durchmusterung vorzunehmen, die den Zweck hat, wichtige und unwichtige Teile des Spektrums voneinander zu trennen oder das Vorhandensein isolierter Perioden, ihre ungefähren Frequenzen und ihre Anzahl festzustellen. In diesem Falle wird man für eine geeignete Folge von Zeilenlängen r die Summenreihen bilden und die Amplituden ihrer ersten Harmonischen abschätzen. Viele Periodogrammrechner, wie z. B. GIBB (Lit. 110) bei seiner Untersuchung des unregelmäßigen Veränderlichen SS Cygni, gehen dabei so weit, daß sie von jeder Summenreihe einfach den halben Unterschied zwischen Maximum und Minimum als eine genügende Abschätzung ansehen. Das ist natürlich unstatthaft; wie man sich

leicht überlegen kann, würde auf diese Weise ein glatter sinusförmiger Verlauf der Summenreihe, der auf eine ausgeprägte Periodizität hinweist, genau dieselbe Amplitude ergeben, wie die gleiche Summenreihe mit willkürlich in ihrer Reihenfolge vertauschten Gliedern, deren Amplitude daher unter Umständen in Wirklichkeit null sein kann. Eine Abschätzung der Amplituden muß also mit einer wenn auch noch so oberflächlichen Glättung der Summenreihe verbunden werden. Andererseits ist klar, daß durch das GIBBSsche Verfahren eine obere Grenze für die Amplituden bestimmt wird.

In Abschnitt 3 wurde gezeigt, daß ganzzahlige Versuchsperioden nur im langwelligen Teil des Spektrums ($r > \sqrt{p}$) genügend dicht liegen, und daß daher im Bereich der kurzen Wellen die ganzzahligen Versuchsperioden, die zur Verfügung stehen, durch gebrochene Perioden ergänzt werden müssen, damit die Bedingung der Maximumbreite erfüllt wird. Die Versuchswellen mit gebrochenen Perioden ließen sich aber aus Summenreihen des langwelligen Bereichs ableiten, indem man diese nach Harmonischen höherer Ordnung untersuchte. Die genaue Abschätzung der Amplituden von Oberschwingungen einer Summenreihe aus der graphischen Aufzeichnung ist aber schwieriger und unsicherer als die der ersten Welle. Wie man sich bei der Ausführung einer provisorischen Durchmusterung auch in diesen Fällen hilft, möge an Hand des gleichen Beispiels gezeigt werden, das in Abschnitt 3 gegeben wurde. Es war dort eine Beobachtungsreihe von $p = 360$ Werten zu analysieren, und es wurde festgestellt, daß im kurzperiodischen Teil des Spektrums zwischen den beiden ganzzahligen Versuchsperioden $r = 11$ und $r = 12$ noch zwei weitere Versuchsperioden eingeschaltet werden mußten. Wir erhielten nun die hierfür geeigneten Perioden $r = 11\frac{1}{3}$ und $r = 11\frac{2}{3}$, indem wir die Harmonischen 3. Ordnung von den Summenreihen $r = 34$ und $r = 35$ bildeten. Nun lassen sich diese Summenreihen nicht genau in drei Zeilen schreiben, wohl aber lassen sich aus $r = 34$ Werten drei Reihen zu je $s = 11$ Werten mit einem überschüssigen Wert bilden, und aus $r = 35$ Werten drei Reihen zu je $s = 12$ Werten, wobei der letzte ausfällt. Wir betrachten gewissermaßen die Summenreihen $r = 34$ bzw. 35 erneut als Ausgangsmaterial für eine weitere Spektralzerlegung, wobei uns lediglich der Bereich um die dritte Harmonische interessiert. Diese Harmonische liegt aber im langwelligen Bereich des neuen Spektrums, in dem, wie wir wissen, die ganzzahligen Versuchsperioden dichter liegen, als die Maximumbreite verlangt. So ist für $r = 34$ z. B. die zweite Welle von der Länge 17, die dritte umfaßt $11\frac{1}{3}$, die vierte $8\frac{1}{2}$ Einheiten. Das Hauptmaximum einer Periodizität von der Wellenlänge $11\frac{1}{3}$, die uns hier allein interessiert, würde also ungefähr den Bereich von $s = 9$ bis $s = 17$ umfassen, die Maximalamplitude würde also aus einer Versuchswelle $s = 11$ nur wenig anders herauskommen als aus $s = 11\frac{1}{3}$. Man sieht also, daß es

bei der Zerlegung der Summenreihe $r = 34$ in drei Wellen in Anbetracht der geringen Genauigkeit, die bei der beabsichtigten Amplitudenschätzung erforderlich ist, ohne weiteres statthaft ist, eine weitere Zerlegung in ein BUYS-BALLOTSches Schema von 3 Zeilen zu je 11 Werten vorzunehmen; der überschüssige Wert ist entweder fortzulassen, oder es ist dadurch ein Ausgleich herbeizuführen, daß die Summe der ersten Zeile, die vier statt drei Einzelwerte enthält, mit dem Gewichtsfaktor $\frac{3}{4}$ multipliziert wird.

Diese Art der Konstruktion von behelfsmäßigen Summenreihen für gebrochene Versuchsperioden läßt sich noch auf eine andere Weise darstellen, die sich besser in das ursprünglich nur für ganzzahlige Versuchsperioden gedachte BUYS-BALLOTSche Schema eingefügt: Sind $p = 360$ Beobachtungswerte nach einer Versuchsperiode $r = 11\frac{1}{3}$ zu analysieren, so ordne man sie nach folgendem 11spaltigem Schema an:

y_0	y_1	y_{10}
y_{11}	y_{12}	y_{21}
y_{22}	y_{23}	y_{32}
y_{33}			
y_{34}	y_{35}	y_{44}
y_{45}	y_{46}	y_{55}
.....			

Dies Schema entspricht offenbar völlig der soeben geschilderten Methode. Andererseits bleibt die Form des allgemeinen BUYS-BALLOTSchen Schemas gewahrt, nur daß bei der fortlaufenden Eintragung der Beobachtungswerte in das Schema nach je 34 Werten eine Spalte mit zwei Beobachtungswerten statt mit einer einzigen belegt wird. Die dadurch hervorgerufene ungleiche Gewichtsverteilung der Spalten läßt sich entweder, wie oben, dadurch beseitigen, daß man die einzelnen Glieder der Summenreihe durch einen Gewichtsfaktor korrigiert oder dadurch, daß man anstatt der Doppelbelegung die Belegung der betreffenden Felder durch das arithmetische Mittel der beiden Werte einführt. Ebenso wird bei der Berechnung der Summenreihe für $r = 11\frac{1}{3}$ ein 12spaltiges Schema zu wählen sein, wobei nach je 35 Werten ein Feld des Schemas auszulassen bzw. durch das arithmetische Mittel der beiden angrenzenden Felder zu belegen ist. Dies Verfahren läßt sich weiter ausbauen und auch auf Versuchsperioden ausdehnen, die zum Analysenintervall p ein weniger einfaches rationales, ja sogar ein irrationales Verhältnis haben. Man kann diese Methode als „Schaltverfahren“ bezeichnen, sie entspricht durchaus der Einführung von „Schalttagen“ im Kalender. Dort handelt es sich nämlich darum, jeden Tag des Jahres einer Phase der mit dem Tage inkommensurablen Jahresperiode zuzuordnen. Diese Einordnung entspricht der Belegung eines Schemas von 365 Spalten, wobei von

Zeit zu Zeit Doppelbelegungen notwendig werden, um die „Versuchsperiode“ von 365 Tagen mit der wahren ($365^d,24$) in Einklang zu bringen. Ein ähnliches Schaltverfahren wird im Kalender bei der Einteilung des Jahres in 12 Monate vorgenommen, wobei ein Schema von 30 Spalten benutzt werden könnte, das in 12 Zeilen 5–6 Doppelbelegungen notwendig machen würde. Es ist bekannt, daß der bestehende Kalender statt dessen 7 Doppelbelegungen und dafür 2 (bzw. 1) Lücken (Februar) vorsieht. Die Beseitigung dieser geschichtlich entstandenen Unsymmetrie ist eines der hauptsächlichsten Ziele der Kalenderreform.

8. Das DARWINSche und das BÖRGENSche Schema.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, daß das Schaltverfahren besonders dann eine ausschlaggebende Erleichterung der Rechnung bedeutet, wenn Perioden zu behandeln sind, die zu der Länge des Analysenintervalls oder gar zu dem als Zeiteinheit dienenden Beobachtungsabstand ein irrationales Verhältnis haben. Dieser Fall ist von besonderer Bedeutung bei der Analyse und Synthese der *Meereszeiten*. Er liegt allerdings insofern abseits der in der Periodogrammtheorie zu behandelnden Aufgaben, als dort die Perioden ihrer Länge nach durch die kosmischen Bewegungen von Sonne, Mond und Erde gegeben und daher bekannt sind. Die Berechnung der Amplituden und Phasen der einzelnen (Tiden genannten) Wellen vollzieht sich aber auf die gleiche Weise wie bei der Periodogrammrechnung; da nun die Gezeitenanalyse ihrer unmittelbaren Wichtigkeit für die Seefahrt zufolge schon frühzeitig eine praktische Wissenschaft geworden ist, hat die Durchbildung vieler Methoden der Periodenforschung gerade von dort aus ihren Ausgang genommen. Auch das Schaltverfahren stammt daher und ist besonders durch die auf Gezeitenrechnung bezüglichen Arbeiten von G. H. DARWIN und C. BÖRGEN (s. Lit.-Verz.) praktisch durchgebildet worden.

Die Anwendung der Schaltmethode bei der Trennung von Gezeitenperioden und der Bestimmung ihrer Amplituden und Phasen für irgendein gegebenen Beobachtungsort, also bei der Bestimmung der Tidenkomponenten für die Wasserstände irgendeines Hafens, führt auf ein Rechenschema von der Art des nachstehend beschriebenen: Es seien z. B. die harmonischen Konstituenten der beiden Haupttiden, also der halbtägigen Sonnentide und der halbtägigen Mondtide gesucht. Die Beobachtungen seien, wie üblich, stündliche Wasserstandsmessungen (Pegelstände). Die halbtägige *Sonnentide* läßt sich dann einfach durch ein BUYS-BALLOTSches Schema von 12 Spalten ableiten — die Mondtide fällt heraus, wenn die Zeilenanzahl einem halben synodischen Mondumlauf entspricht. Da jede Zeile einem halben Sonnentag entspricht und der synodische Mondumlauf $29\frac{1}{2}$ Sonnentage umfaßt, ist dies bereits bei einem Schema von rund 30 Zeilen der Fall. Für die Berechnung der

halbtägigen *Mondtide* kann unter Anwendung des Schaltprinzips das gleiche Schema verwendet werden — die Spalten bedeuten dann eigentlich Mondstunden, die ein wenig länger sind als Sonnenstunden. Die strenge Analyse würde also erfordern, daß die Beobachtungswerte in Abständen von je einer Mondstunde gegeben wären. Da aber nicht immer kontinuierliche Wasserstandsregistrierungen vorliegen, aus denen mondständige Werte entnommen werden können, sondern die sonnenständlichen Beobachtungen verwendet werden müssen, werden die Eintragungen immer in diejenige Spalte vorgenommen, die der nächstgelegenen Mondstunde entspricht. Da sonnenständige Beobachtungen etwas dichter aufeinanderfolgen, als mondständige, so wird von Zeit zu Zeit eine doppelte Belegung erforderlich sein. Da ungefähr 1 Mondstunde = 1,0351 Sonnenstunden ist, wird dies durchschnittlich nach je $28\frac{1}{2}$ Sonnenstunden eintreten. Bei einer großen Anzahl von Beobachtungen verteilen sich die doppelt belegten Felder des Schemas ziemlich gleichmäßig über alle 12 Spalten, auch überlegt man sich leicht, daß die Fehler, die man infolge der falschen Phasenzuordnung bei den einzelnen Beobachtungswerten begeht, gleich häufig positiv und negativ ausfallen, wenn die Anzahl der Werte in jeder Spalte sehr groß ist. BÖRGEN zieht es daher vor, die Doppelbelegungen unkorrigiert beizubehalten, während DARWIN an Stelle der Doppelbelegung das arithmetische Mittel der beiden Werte in das betreffende Feld einträgt oder einen der beiden Werte ausläßt. Ebenso entstehen, wenn in anderen Fällen (bei der Berechnung anderer Tiden) der durch das Spaltenschema gegebene Phasenabstand der Tidenperiode kleiner ist als der Beobachtungsabstand, in periodischen Abständen Lücken. Auch hier behält BÖRGEN die Lücken bei, unter der Voraussetzung, daß sie sich gleichmäßig über alle Spalten verteilen, während DARWIN entweder den vorhergehenden Wert noch einmal oder das Mittel aus den Belegungen der beiden angrenzenden Felder einträgt. In der Praxis sind beide Methoden statthaft, die DARWINSche (Fortlassung eines Wertes an Doppelstellen und Auffüllung der Lücken durch Wiederholung) hat dagegen aus folgenden Gründen eine besondere Rechtfertigung erfahren: Man stelle sich vor, daß eine Wasserstandskurve durch sonnenständige Beobachtungen festgelegt sei und interpoliere diese Wertereihe durch eine Treppenkurve in der früher (I, 9) beschriebenen Art. Entnimmt man nun der so hergestellten Treppenkurve mondständig je eine Ordinate, so wird man genau die Bedingungen schaffen, die bei der Konstruktion des DARWINSchen Schemas gegeben sind: im allgemeinen trägt man in jedes Feld des mondständlichen Schemas die zur benachbarten Sonnenstunde gültige Beobachtung ein — da aber der Beobachtungsabstand etwas größer ist als die Länge der stetigen Kurvenabschnitte, so kommt es von Zeit zu Zeit vor, daß eine Treppenstufe überschlagen wird. Ist umgekehrt der Fall gegeben, daß die Treppenstufen breiter sind als das Intervall der entnommenen Ordinaten, so werden von Zeit

zu Zeit zwei aufeinanderfolgende „Schritte“ auf die gleiche Stufe fallen, so daß also durch Wiederholung des gleichen Wertes eine sonst entstehende Lücke im Schema vermieden wird. Gelegentlich kann es auch vorkommen, daß eine Auswahlordinate auf eine Sprungstelle der Treppenkurve trifft, alsdann gilt das arithmetische Mittel zwischen den benachbarten Stufenwerten. Somit entspricht das DARWINSche Schema genau der provisorischen Interpolation durch einen Stufenzug; die durch das Schaltverfahren begangenen Fehler sind also von der gleichen Größenordnung wie die durch diese Interpolationsart erzeugten Fehler überhaupt.

Um den Unterschied zwischen der Art der Fehlerentstehung im DARWINSchen und im BÖRGENSchen Schaltverfahren einzusehen, machen wir folgende Überlegung: Seien y'_1, y'_2, \dots, y'_n mondstündlich gemessene Werte und $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n$ die nach Mondstunden fortschreitenden Argumente der Mondtide, so wird beispielsweise die a -Komponente der Mondtide aus der Produktsumme

$$y'_1 \cos \varphi'_1 + y'_2 \cos \varphi'_2 + \dots + y'_n \cos \varphi'_n$$

abgeleitet, wobei alle zur gleichen Phase gehörigen Produkte zu einer Spaltensumme

$$\cos \varphi'_r \sum y'_r$$

zusammengefaßt werden. Im DARWINSchen Schema werden die Ordinaten y'_r durch die benachbarten sonnenstündlich gemessenen Ordinaten der Folge

$$y_1, y_2, \dots, y_m$$

ersetzt. In gleicher Weise könnte man die gesuchte Produktsumme auch direkt aus den sonnenstündlichen Werten ableiten, indem man

$$y_1 \cos \varphi_1 + y_2 \cos \varphi_2 + \dots + y_m \cos \varphi_m$$

berechnet, wobei jetzt $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ die sonnenstündlich fortschreitenden Phasen der Mondtide bedeuten. Will man nunmehr die Summanden spaltenweise nach Mondstunden ordnen, so fallen in eine Spalte alle diejenigen Summanden $y_r \cos \varphi_r$, bei denen φ_r der zu dieser Spalte gehörigen Mondstunde benachbart ist. Das eine Mal (DARWIN) ist der \cos -Faktor einer Spaltensumme streng, die Beobachtungswerte sind dagegen fehlerhaft, da sie sich auf eine benachbarte Phase beziehen. Das andere Mal (BÖRGEN) sind die in einer Spalte vereinigten Beobachtungswerte streng, aber die \cos -Faktoren fehlerhaft. Merkliche Fehler im Rechenergebnis werden sich immer dann einstellen, wenn die Summe der Fehler einer Spalte von null sehr verschieden ist, d. h. wenn die Fehler systematisch ein bestimmtes Vorzeichen bevorzugen. Beim DARWINSchen Schema sind solche systematischen Abweichungen an sich unwahrscheinlich, ihr Vorkommen hängt wesentlich von der besonderen Art der Beobachtungskurve ab. Beim BÖRGENSchen Schema hängt der Fehler in erster Linie von der Verteilung der in einer Spalte vereinigten

Phasen φ ab, die durch eine konstante Phase φ' ersetzt werden. Diese Verteilung aber wird durch die Art des Schemas selbst geregelt und gilt dann für alle möglichen Beobachtungsreihen. Beide Schemata haben somit ihre Vor- und Nachteile: Das DARWINSche Schema enthält in jeder Spalte die gleiche Anzahl von Beobachtungswerten, die mit dem richtigen trigonometrischen Faktor multipliziert werden, aber selbst fehlerhaft sind. Das BÖRGENSche Schema enthält in jeder Spalte strenge Beobachtungswerte, die aber mit abweichenden trigonometrischen Faktoren multipliziert werden und, wegen der Lücken und Doppelbelegungen, auch nicht immer in gleicher Anzahl aufzutreten brauchen. Der Fehler wird aber in diesem Falle auf ein Minimum herabgedrückt, wenn es gelingt, die Lücken oder Doppelbelegungen im Schema über alle Spalten gleichmäßig zu verteilen und dafür zu sorgen, daß die Fehler der trigonometrischen Faktoren sich in einer Spalte möglichst die Waage halten. Das läßt sich aber, wie wir sehen werden, durch eine geeignete Wahl des Schemas immer erreichen.

Bevor diese Betrachtungen durch Beispiele erläutert werden, soll gezeigt werden, welche Rolle das Schaltverfahren in der Praxis der Periodogrammanalyse zu spielen berufen ist. Es ist klar, daß ein Schaltverfahren immer dann am Platze ist, wenn es sich darum handelt, ein größeres Ausgangsmaterial nach Versuchsperioden zu analysieren, die so beschaffen sind, daß ein hinreichend einfaches BUYS-BALLOTSches Schema nicht angesetzt werden kann, oder, wenn dies doch möglich sein sollte, daß die Spaltenzahl des Schemas unbequem groß ist. So ist z. B. ein Schema von 11 oder 12 Spalten, wie es bei der provisorischen Berechnung einer $11\frac{1}{3}$ - oder $11\frac{2}{3}$ gliedrigen Welle nach dem Schaltverfahren benutzt werden konnte, zweifellos bequemer als ein Schema von 34 oder 35 Spalten. Natürlich muß der Rechner, der ein solches Schaltschema benutzt, gewisse Vernachlässigungen in Kauf nehmen. Das ist aber ein Nachteil, der bei der periodographischen Durchmusterung eines umfangreicheren Materials gegenüber dem Vorteil der Zeit- und Arbeitersparnis kaum ins Gewicht fällt. Beim Gebrauch eines Spaltenschemas einerlei welcher Art zerfällt die Rechenarbeit in zwei Hauptteile: erstens in die Konstruktion der Summenreihe, die lediglich durch Umordnung der Beobachtungsreihe und durch Aufsummierung der Spalten, also allein durch Additionen gebildet wird, und zweitens in der Bildung der Komponenten der zu der Summenreihe gehörigen Grundwelle, bei der Multiplikationen nötig sind. Die gewünschte Vereinfachung der Rechnung läßt sich am besten dadurch erzielen, daß die Zahl der Multiplikationen so sehr wie möglich eingeschränkt wird. Es wird bei Durchmusterungen immer darauf ankommen, den sinusförmigen Verlauf der Summenreihe festzustellen und ihre beste Annäherung durch eine nach Amplitude und Phase zu bestimmende Grundwelle zu erreichen. Das ist natürlich um so genauer möglich, je mehr Glieder die Summenreihe enthält; bei

Beschränkung der Genauigkeit auf das erforderliche Mindestmaß wird man sich aber mit einer beschränkten Anzahl von Gliedern immer begnügen dürfen. Es bleibt nun dem Rechner im Einzelfalle überlassen, wieviel Glieder er für die sichere Bestimmung der Periodizität der Summenreihe noch für nötig hält: bei mäßigen Genauigkeitsansprüchen wird eine Gliederanzahl von etwa 12 immer ausreichend sein, da dann jeder Quadrant durch etwa 3 Einzelwerte belegt ist.

Das Schaltverfahren setzt uns in die Lage, sogar für die Berechnung beliebig vieler und beliebig verschiedener Versuchswellen ein Einheits-schema von vorgegebener fester Spaltenzahl anzusetzen. Diese Möglichkeit bedeutet aber bei umfangreichen Rechnungen eine große Vereinfachung des Analysenvorgangs und schafft vor allem die Vorbedingung für eine weitgehende Mechanisierung des gesamten Prozesses.

9. Einheitsschemata für periodographische Durchmusterungen.

Die am Schluß des vorigen Abschnitts aufgezeigten Möglichkeiten sollen nunmehr auf ihre Ausführbarkeit näher untersucht werden. Hierbei wird auch die Entscheidung fallen, ob für diese erweiterten Zwecke die DARWINSche oder die BÖRGENSche Schaltungsart die geeignetere ist, was bei ihrer Anwendung auf die speziellen Aufgaben der Gezeitenanalyse nicht hervortrat. In dem im vorigen Abschnitt behandelten Gezeitenproblem war der Beobachtungsabstand, also die Zeiteinheit, die *Sonnenstunde*, während die Versuchsperiode einen halben Mondtag oder 12 Mondstunden umfaßte. Diese 12 Mondstunden bildeten die Phasen der zwölf Spalten des Schaltungsschemas — der Beobachtungsabstand war also von dem zeitlichen Abstand benachbarter Spaltenphasen nur wenig verschieden, und zwar etwas kleiner. Wir befreien uns jetzt von diesen besonderen Voraussetzungen ganz und gar, indem wir unter Beibehaltung der Festsetzung Beobachtungsabstand = Zeiteinheit Versuchsperioden von beliebiger Länge ω annehmen und diese Versuchsperioden in eine vorgegebene Anzahl von „Spalten“, etwa in m gleiche Abschnitte, zerlegen, die von 0 bis $m-1$ numeriert werden mögen und die Breite $\frac{\omega}{m}$ haben. Die Beobachtungsreihe selbst umfasse eine größere Anzahl (n) Beobachtungen. Die Zeit sei nun die Abszisse eines ebenen Koordinatensystems, die Abszissenachse werde auf zwei Arten eingeteilt: Den Punkten $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ werden die Beobachtungswerte $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ zugeordnet. Außerdem werde die Zeitachse in gleiche Abschnitte von der Breite $\frac{\omega}{m}$ eingeteilt, und zwar so, daß der Punkt $t = 0$ in den ersten dieser Abschnitte fällt. Wenn $\alpha < \frac{\omega}{m}$, so wird also der erste Abschnitt von $t = -\alpha$ bis $t = \frac{\omega}{m} - \alpha$ reichen. Im besonderen erweist es sich als

praktisch, $\alpha = \frac{1}{2} \frac{\omega}{m}$ zu setzen, also dafür zu sorgen, daß der Anfangswert y_0 der Beobachtungsreihe in die Mitte des ersten Abschnitts fällt. Man nummeriere nun die Abschnitte fortlaufend mit 0, 1, . . . , $m-1$, 0, 1, . . . , $m-1$, 0, 1, . . . und so periodisch fort. Dann ist jedem Beobachtungswert damit eine Nummer zugeordnet, die angibt, in welche Spalte des Schaltschemas er einzutragen ist. Fällt der Beobachtungswert seiner Abszisse nach gerade auf die Grenze zwischen zwei Abschnitten, so ist er mit der Hälfte seines Wertes in jede der beiden benachbarten Spalten einzutragen. Wir werden später sehen, daß dieser Ausnahmefall gerade bei den für die Praxis wichtigen Formen des Schemas völlig vermeidbar ist.

Die hier getroffene Anordnung entspricht dem BÖRGENSchen Schema. Sollte das DARWINSche Schema angewendet werden, so wäre die Beobachtungsreihe durch die Treppenkurve zu interpolieren und in jedes Feld des Schemas derjenige Wert einzutragen, der der Mitte des zugehörigen Abschnitts der Zeitachse entspricht. Das BÖRGENSche Schema enthält jeden vorkommenden Beobachtungswert, und zwar jeden nur einmal — das DARWINSche Schema zeichnet sich dadurch aus, daß jedes Feld, und zwar jedes nur einmal, besetzt ist. Ist die Abschnittsbreite von der Zeiteinheit beträchtlich verschieden, so kann der Unterschied zwischen beiden Methoden erheblich sein. Beim BÖRGENSchen Schema ist die Gesamtzahl der Eintragungen immer gleich, und zwar gleich der Zahl n der Beobachtungen; im DARWINSchen Schema kann die Zahl der Eintragungen ein Vielfaches von n betragen, wenn die Abschnittsbreite klein gegen die Zeiteinheit ist. Ist umgekehrt die Zeiteinheit klein gegen die Abschnittsbreite, so wird nur ein Teil der Beobachtungen benutzt. Beide Fälle sind für die Genauigkeit der Resultate ungünstig — das eine Mal werden viele Beobachtungswerte mit Faktoren multipliziert, die erheblich von den strengen Faktoren, die ihnen zukommen, abweichen können, das andere Mal wird nur ein geringer Teil der Beobachtungen nach einem gewissen Auswahlprinzip ausgenutzt, was ebenfalls zu großen Fehlern führen kann. Ist hingegen die Zeiteinheit nahezu gleich der Spaltenbreite, so unterscheiden sich die Ergebnisse nach beiden Methoden nur geringfügig voneinander. Das aber war der Fall, der bei der Gezeitenanalyse vorlag. Damals ließ sich eine Entscheidung über die Zweckmäßigkeit der einen oder der anderen Methode infolge dieses Umstandes nicht treffen — der Vorteil der DARWINSchen Schaltmethode, der in der gleichmäßigen Belegung des Schemas bestand, gab sogar zugunsten dieser Methode den Ausschlag. In der Periodogrammanalyse, wo dieser Fall nur in einem sehr kleinen Ausschnitt des Spektrums gegeben ist, kommt nur die BÖRGENSche Form des Schemas in Betracht. Wir haben aber nunmehr darauf Bedacht zu nehmen, daß die beim BÖRGENSchen Schema notwendigerweise

auftretenden Lücken oder Doppel- bzw. Mehrfachbelegungen symmetrisch über das Schema verteilt werden.

Früher ist gezeigt worden, daß die *Dichte* eines Periodogramms mindestens so groß sein muß wie die der FOURIERSchen Perioden, da sonst die Bedingung, daß jede Maximumbreite durch mindestens zwei Ordinaten belegt sein sollte, nicht erfüllt ist. Da wir bei der Konstruktion eines Schaltschemas nicht mehr wie früher darauf zu achten haben, daß die Versuchsperioden möglichst ganze Vielfache der Zeiteinheit sein sollen, ist es möglich, als Folge der Versuchsperioden direkt die FOURIERSchen Perioden zu wählen, da wir dann die Gewähr haben, daß die Dichtebedingung tatsächlich erfüllt ist. Eine weitere Verdichtung des Spektrums wollen wir uns aber ausdrücklich vorbehalten.

Umfaßt nun die zu analysierende Reihe n Beobachtungen, so schreiten die Argumente der trigonometrischen Faktoren des ersten harmonischen Gliedes gemäß der Folge

$$0^\circ, \frac{360^\circ}{n}, 2 \cdot \frac{360^\circ}{n}, \dots$$

fort, beispielsweise bei $n = 24$ um je 15° . Die 24 Winkel $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, \dots, 345^\circ$ sind dann zugleich die einzigen, die auch bei den höheren Gliedern als Argumente auftreten können. Die Argumentenfolge für die r -te Harmonische lautet z. B.

$$0^\circ, r \cdot 15^\circ, r \cdot 30^\circ, \dots,$$

wobei der Phasenraum $0^\circ, \dots, 360^\circ$ insgesamt r -mal durchlaufen wird. Die exakte Analyse würde also ein Schema von 24 Spalten erfordern — bei der Berechnung der r -ten Harmonischen würde, wenn stets die erste Beobachtung in das erste Feld der ersten Zeile eingetragen wird, jede folgende Beobachtung r Felder weiter eingetragen werden, so daß sich also die Eintragungen über r Zeilen erstrecken. Da die Ordnung r von 1 bis 12 variiert, ergeben sich die 12 verschiedenen Eintragungsbilder, die in Abb. 16 gezeichnet sind, und in denen die Punkte die 24 Einzelbeobachtungen versinnbildlichen sollen. Offenbar können nun zwei Fälle eintreten: Ist r zu n teilerfremd, so wird *jede* der 24 Spalten und dann natürlich nur durch *je eine* Beobachtung belegt. Die Summenreihe enthält also n Glieder, die durch eine bestimmte Vertauschung der Beobachtungsfolge hervorgegangen sind. Haben jedoch r und n einen gemeinsamen größten Teiler k , so daß etwa $n = a k$, $r = b k$, so kehrt die gleiche Reihenfolge der Phasen schon nach b Reihen wieder. Es muß also jede Spalte, die überhaupt Werte enthält, mit k Werten belegt sein, und es kann somit nur jede k -te Spalte Beobachtungen enthalten. Insgesamt sind also a Spalten von den vorhandenen n belegt, die anderen nicht.

Die Erleichterung der Rechnung, die — unter Verzicht auf höchste Genauigkeit — erstrebt werden soll, besteht nun darin, daß die Spaltenzahl des Schemas so stark herabgesetzt werden soll, wie zulässig erscheint.

Man erreicht das, indem man die n Spalten zu Gruppen zusammenfaßt und für jede Gruppe eine mittlere Phase verwendet. So könnte man die 24 Spalten in 12 Gruppen zu je 2 Spalten einteilen oder in 8 Gruppen zu je 3 oder in 6 Gruppen zu je 4 Spalten. Statt der 24-gliedrigen Summenreihe würden dann solche zu 12, 8 oder 6 Gliedern entstehen. In Abb. 16

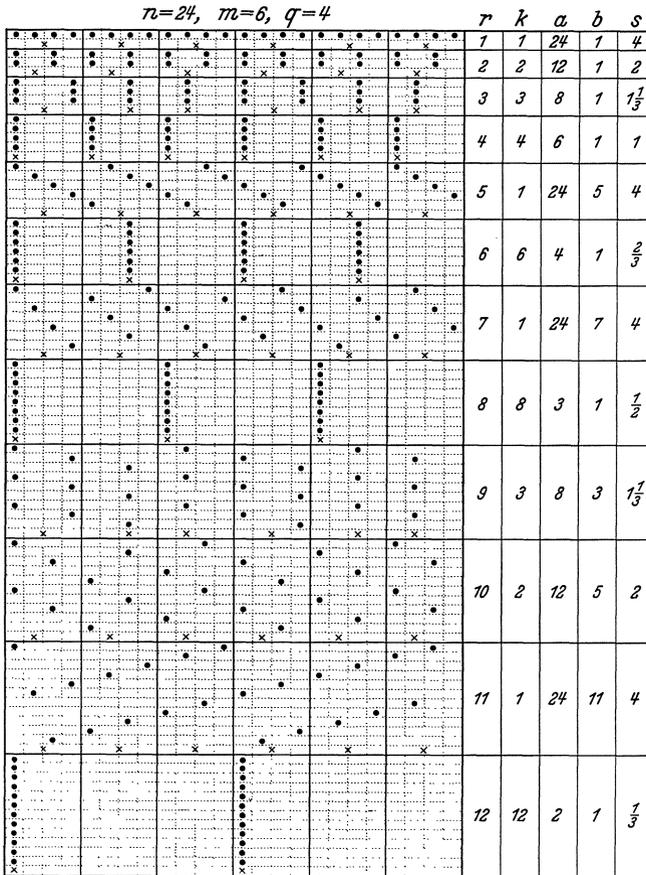


Abb. 16. Schaltschema für die 12 Wellen einer 24-gliedrigen Beobachtungsreihe und 6 Hauptspalten.
 r = Ordnung der Welle,
 k = Abstand der belegten Unterspalten,
 a = Zahl der belegten Unterspalten,
 b = Periode der Wiederkehr gleichartig belegter Zeilen,
 s = Durchschnittliche Zahl der in jeder Hauptspalte belegten Unterspalten.

ist der letztere Fall angenommen, es sind also je 4 „Unterspalten“ zu 6 Hauptspalten vereinigt worden. Die Abbildung zeigt nun deutlich, daß die Verteilung der Beobachtungswerte auf diese Hauptspalten bedeutend unregelmäßiger ist als vorher. Die Kreuze unterhalb jedes

Schemas zeigen den Mittelwert der in jeder Gruppenspalte vorkommenden Beobachtungsabszissen an. Nur wenn $k = 1$, also n und r teilerfremd, liegt die mittlere Phase in der Mitte der Gruppenspalte und sind gleichzeitig alle Gruppenspalten mit der gleichen Zahl von Werten belegt. In allen anderen Fällen sind die Phasenmittel gegen die Spaltenmitte verschoben, zum Teil liegen sie in verschiedenen Spalten an verschiedenen Stellen, auch kommt es vor, daß einzelne Gruppen überhaupt keine Werte enthalten oder die Zahl der Werte in den einzelnen Gruppen verschieden ist.

Man erkennt leicht die Gültigkeit folgender Regeln:

Es sei n die Anzahl der Beobachtungen, ferner $n = qm$, wobei m die Anzahl der Gruppen, q die Zahl der zu einer Gruppe vereinigten Unterspalten bedeutet. r sei, wie oben, die Ordnung der Harmonischen und k der größte gemeinsame Teiler von n und r ($n = ak$, $r = bk$, a und b teilerfremd). Ist dann

1. $k = 1$ (n und r teilerfremd), so enthält jede Gruppe q Werte, das Phasenmittel liegt in der Mitte der Gruppe (in unserem Beispiel ist dies erfüllt für $r = 1, 5, 7, 11$). Ist

2. $k > 1$, aber in q ganzzahlig enthalten ($q = sk$), so sind in jeder Gruppe s Spalten mit je k Werten belegt. Das Phasenmittel weicht von der Spaltenmitte ab, liegt aber in jeder Spalte an der gleichen Stelle. (In der Abbildung bei $r = 2, 4, 10$). Diese Fälle würden für die Ausführung der Analyse ebenfalls brauchbar sein, wenn man für eine symmetrische Belegung der Gruppenspalten Sorge tragen würde, was stets dadurch geschehen kann, daß man die Eintragungen in der Mitte der ersten Gruppe beginnt.

3. Ist k zwar nicht in q , wohl aber in $2q$ ganzzahlig enthalten, so liegt das Phasenmittel in der Mitte der Gruppe, aber die Zahl der Beobachtungen alterniert von Gruppe zu Gruppe. Dieser Fall kann natürlich nur eintreten, wenn q ungerade ist, er ist daher in unserem Beispiel ($q = 4$) unmöglich, würde aber eintreten, wenn man 8 Gruppen zu je 3 Spalten bilden würde, und zwar dann für $r = 2$ oder 10.

4. In allen anderen Fällen ist die Verteilung der Beobachtungen auf die Gruppenspalten ungleichförmig.

Man leitet aus diesen Überlegungen leicht ab, daß der günstigste Fall für die Bildung eines für alle Harmonischen symmetrischen Schemas dann eintritt, wenn k möglichst für alle vorkommenden Wellen 1 ist. Strenggenommen wäre es also erforderlich, daß n eine Primzahl sei; das ist aber unmöglich, da ja n in eine ganze Anzahl gleicher Gruppen zerlegt werden soll. Die nächst günstige Möglichkeit ist demnach die, daß q und m Primzahlen sind, alsdann ist nur für die beiden Fälle $r = q$ und $r = m$ ein Ausnahmefall zu erwarten; beginnt man aber die Eintragungen in der Mitte der ersten Hauptspalte, so ergibt auch der Fall $r = q$ eine symmetrische Phasenverteilung; es fallen *alle* Beobachtungen

jeder Gruppe in die Mittelspalte, so daß hier die Analyse sogar strenge Werte ergibt. Als einziger Ausnahmefall bleibt somit $r = m$ bestehen — hier ergibt das Schema q vollbesetzte Unterspalten, die aber über die Gruppen sowohl nach Phase als auch nach Anzahl ungleichmäßig verteilt sind. *Nur wenn $n = m^2$, also die Beobachtungsanzahl gleich dem Quadrat der Spaltenzahl und diese eine Primzahl ist*, geht dieser Ausnahmefall wegen $q = m$ in $r = q$ über. Ein Schema von den gleichen günstigen Eigenschaften erhält man, wenn $n = m^3$ oder einer höheren Potenz von m gesetzt wird, da dann k entweder 1 oder gleich einem ganzzahligen Teiler von q ist.

Für die praktische Periodogrammanalyse nach dem Schaltverfahren kommt ein einheitliches Schema von 11, 13, 17 oder 19 Hauptspalten in Frage, je nach den Genauigkeitsansprüchen und dem Umfang der zu analysierenden Reihe. Die Bedingung, daß n eine Potenz von m sein soll, ist lästig, da der Analysenbereich meistens durch die Umstände vorgeschrieben ist oder jedenfalls in engeren Grenzen zur Auswahl steht. Kann man die Beobachtungszahl nicht so wählen, daß die obigen Überlegungen gelten, so stehen verschiedene Auswege zur Verfügung. Entweder man setzt, wie zuerst vorgeschlagen wurde, für n das Produkt zweier verschiedener Primzahlen ($n = qm$) und ermittelt dann die Welle $r = m$ statt aus einem m -spaltigen aus einem q -spaltigen Schema. Oder man wählt $q = mx$, wo x eine *kleine* Primzahl bedeutet. Dann ist $n = m^2x$ und besitzt die Teiler m , x , m^2 und mx . Der gemeinsame Teiler k zwischen n und r kann also außer 1 nur einen dieser vier Werte annehmen, die aber alle, bis auf m^2 , ganzzahlig in $q = mx$ enthalten sind. Der Ausnahmefall $r = m^2$ betrifft dann eine Welle sehr hoher Ordnung, und wenn x klein ist, auch relativ hoher Ordnung, bis zu der man die Analyse in den seltensten Fällen durchzuführen hat.

Ist q eine Primzahl > 2 , so ist die Zahl der Unterspalten in einer Hauptspalte ungerade, es wird also in jeder Hauptspalte eine mittlere Unterspalte geben. In diesen Fällen läßt sich also die Vorschrift, daß der erste Beobachtungswert in die Mitte der ersten Hauptspalte eingetragen werden soll, ohne Schwierigkeit durchführen — es folgt weiter, daß kein Beobachtungswert auf die Grenze zwischen zwei Hauptspalten fallen kann. Etwas anderes tritt ein, wenn q gerade ist. Auch dieser Fall liegt im Bereich der oben als günstig-erkannten Möglichkeiten — da nämlich 2 eine Primzahl ist, so gelten alle Vorteile auch, wenn etwa n eine beliebige Potenz von 2 ist und somit auch q und m Zweierpotenzen darstellen. Wird nun der erste Beobachtungswert in die Mitte der ersten Hauptspalte eingetragen, so fällt er auf die Grenze zwischen zwei Unterspalten, jeder folgende Wert also auch, und es kommt immer wieder vor, außer bei bestimmten Wellen, daß ein Wert auf die Grenze zwischen zwei Hauptspalten trifft. Nach unserer Vorschrift wird jeder solche Wert zur Hälfte seines Betrages den beiden angrenzenden Spalten

zugerechnet. Dadurch wird die Verteilung der Werte auf das Schema etwas umständlicher, man gewinnt dafür den nicht zu unterschätzenden Vorteil, daß die Spaltenzahl keine Primzahl zu sein braucht, sondern daß auch Schemata von 8 oder 16 Hauptspalten, die eine bequeme Analyse der Summenreihen gestatten, benutzt werden können. Für ganz oberflächliche Durchmusterungen, bei denen es nur darauf ankommt, die Amplituden der FOURIER-Glieder größenordnungsmäßig abzuschätzen, empfiehlt sich sogar ein Schema von 4 Spalten. Die trigonometrischen Faktoren sind dann entweder 0, +1 oder -1, die gesamte Periodogrammrechnung besteht also lediglich aus Additionen und Subtraktionen.

Wir haben somit die Zahl der Möglichkeiten zur Bildung eines Einheitsschemas für alle Wellen durch die letzten Betrachtungen stark vermehrt. Findet sich trotzdem ein den Ansprüchen einer konkreten Aufgabe genügendes Schema nicht, so hat man natürlich immer noch die Möglichkeit, sich von der bisher gewährten Bindung an die FOURIERschen Perioden zu befreien. Entspricht die Zahl n der Beobachtungen nicht den obigen Anforderungen, so ergänze man die Beobachtungsreihe, die in Form von Abweichungen von einem Mittelwert gegeben sein möge, deren arithmetisches Mittel also null ist, durch Nullen so weit, bis die geforderte Beobachtungszahl erreicht ist. Will man z. B. ein Periodogramm aus 100 Beobachtungswerten berechnen und ein 11-spaltiges Einheitsschema zugrunde legen, so füge man 21 Nullen (oder, wenn der Mittelwert der Reihe von null verschieden ist, 21mal diesen Mittelwert) hinzu. Oder wenn man etwa von den Vorteilen eines 8- oder 16-spaltigen Schemas Gebrauch machen will, ergänze man die Reihe durch Nullen bis $512 = 2^9$ und berechne von den Wellen, die dieses Schema liefert, nur jede fünfte. Das so erzeugte Spektrum wird nur ganz wenig dichter sein als das harmonische Spektrum der 100 Beobachtungswerte selbst. Die letzte Zeile des Schemas wird bei der Mehrzahl der Wellen unvollständig besetzt sein, die Spaltensummen werden daher ein ungleiches Gewicht besitzen. Wegen der Frage, ob man diese Gewichtsunterschiede durch Anbringung von Reduktionsfaktoren beseitigen soll oder nicht, verweise ich auf das früher (Abschnitt 3) Gesagte. Natürlich ist auf diese Weise auch jede beliebige Verdichtung der Versuchswellenfolge über die Folge der FOURIER-Perioden hinaus möglich.

10. Das Lochkartenverfahren als technisches Hilfsmittel bei Periodogrammrechnungen.

Das Einordnen der Beobachtungswerte in die einzelnen Spalten eines Schemas — welcher Art dieses auch sei — muß für jede zu berechnende Welle besonders vorgenommen werden. Jede Welle erfordert daher ein Abschreiben der gesamten Beobachtungsreihe, wobei es noch

große Aufmerksamkeit erfordert, daß jeder Wert in die richtige Spalte eingetragen wird. Dieser ganze Arbeitsprozeß nimmt den größten Teil der aufzuwendenden Zeit und Kraft für sich in Anspruch. Es hat daher nicht an Versuchen gefehlt, ihn zu mechanisieren. Man hat zunächst danach gestrebt, praktische Methoden zu ersinnen, die es erlauben, alle Rechnungsgänge nach *einmaligem* Aufschreiben der Ausgangswerte zu erledigen. Am bekanntesten ist der Gebrauch von *Schablonen*. Man schreibt die Beobachtungsreihe in ein rechteckiges Schema von bestimmter Spalten- und Zeilenzahl. Die Spaltensummen liefern bereits die Summenreihe für eine der gewünschten Versuchswellen. Für die übrigen Wellen wäre eine Umordnung nötig. Man vermeidet sie, indem man für jede Spaltensumme, die zu bilden ist, eine Schablone konstruiert, die, auf das Schema gelegt, alle Werte, die zu summieren sind, durch Fenster sichtbar läßt, während alle übrigen verdeckt bleiben. Sind r Wellen zu berechnen und ist ein m -spaltiges Einheitsschema vorgesehen, so würde man $m r$ verschiedene Schablonen brauchen. Man kommt aber — wenigstens, wenn man ein Primzahlenschema von der Art des im vorigen Abschnitt beschriebenen verwendet — schon mit r Schablonen aus, die entsprechend größer sein müssen und bei der Berechnung verschiedener Spaltensummen der gleichen Welle nur in bestimmter Weise verschoben werden, so daß nacheinander immer andere Kombinationen von Beobachtungswerten sichtbar werden. Die Arbeit reduziert sich dann auf das Summieren der jeweils in den Fenstern sichtbar werdenden Zahlen. Gewisse Schwierigkeiten ergeben sich nur, wenn — wie z. B. bei gerader Zahl von Unterspalten — Beobachtungswerte auf zwei benachbarte Spalten verteilt werden müssen. In diesem Falle ist es besser, von der bisher geübten Regel, die erste Beobachtung immer in die Mitte der ersten Spalte einzutragen, Abstand zu nehmen, und statt dessen, wie in Abb. 16, immer mit der ersten Unterspalte zu beginnen. Bezieht man dann die Winkelargumente der Summenreihen auf die Spaltenmitte, so wird man einen Fehler begehen, der in einer Phasenverschiebung der errechneten Welle besteht, und zwar für jede Welle in einer durch die Art des Schemas gegebenen besonderen Verschiebung. Die Amplituden dagegen werden von dieser Abweichung nicht betroffen. Kommt es also nur auf die Amplituden an, wie bei jeder vorläufigen Spektraldurchmusterung, so wird das Ergebnis von dieser Maßnahme nicht berührt. Sollen hingegen auch die Phasen ermittelt werden, so ist die Phase jeder Welle um einen nur von der Art des Schemas abhängigen Betrag zu verbessern.

L. W. POLLAK¹ hat zuerst vorgeschlagen, die Umordnung des Materials und gleichzeitig das Aufaddieren der Spalten mit Hilfe des in der Statistik gebräuchlichen, von dem Deutschamerikaner HOLLERTH erfundenen

¹ Siehe Lit. 197—199, 203—205.

Lochkartenverfahrens zu mechanisieren. Das Lochkartenverfahren hat im letzten Jahrzehnt so weitreichende Verbesserungen erfahren und sein Anwendungsbereich sich so vergrößert, daß es sich lohnt, hier eine kurze Schilderung der Methode und der für die Periodogrammanalyse in Betracht kommenden Apparateformen einzuflechten, sowie einen Ausblick zu eröffnen, der den Nutzen dieses Verfahrens für die Erledigung periodographischer Programme großen und größten Umfanges, wie sie z. B. in der Meteorologie gestellt worden sind, aufzeigt.

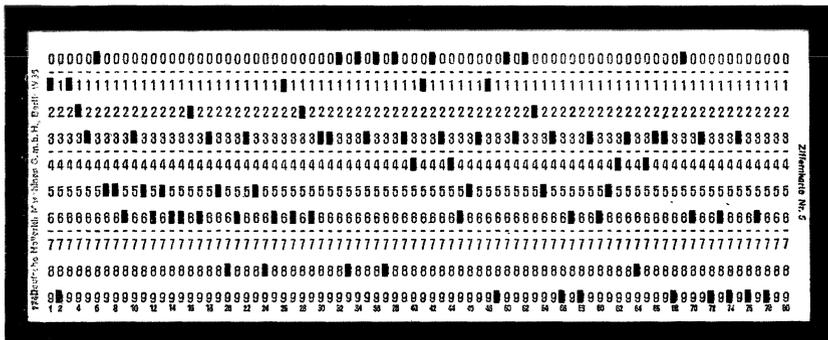


Abb. 17. HOLLERITH-Lochkarte.

Das mit dem Lochkartenverfahren zu verarbeitende Zahlenmaterial — seien es nun statistische Angaben irgendwelcher Art oder Beobachtungswerte — wird, wie der Name des Verfahrens schon sagt, auf Ziffernkarten durch Lochung vermerkt. Diese Ziffernkarten (s. Abb. 17) enthalten eine Anzahl von Spalten (gebräuchlich sind Karten von 45 oder 80 Spalten), in denen die Ziffern 0, 1, . . . , 9 untereinander stehen. Mit Hilfe von elektromagnetisch arbeitenden „Lochern“ läßt sich in jeder Spalte eine dieser 10 Ziffern lochen (durch runde oder rechteckige Stempel ausstanzen), so daß auf diese Weise die 45- oder 80-spaltige Karte einer ebensoviel Ziffern umfassenden Zahlenreihe gleichbedeutend gemacht werden kann. Dabei hat jede Spalte bzw. Spaltengruppe ihre besondere Bedeutung, die vor Inangriffnahme der Arbeit durch Aufstellung eines „Schlüssels“ genau festgelegt werden muß. Zum Beispiel lassen sich die meteorologischen Ablesungen einer bestimmten Beobachtungsstation zu einem bestimmten Termin auf einer Lochkarte unterbringen, die etwa folgendem Schlüssel entsprechen würde:

- Spalte 1— 3: Nummer der Station im Beobachtungsnetz.
- „ 4— 9: Datum.
- „ 10: Beobachtungstermin.
- „ 11—13: Luftdruck in Zehntelmillimeter über 700,0.
- „ 14—16: Lufttemperatur; — usw.

Eine über ein gewisses räumliches und zeitliches Gebiet vollständige Sammlung solcher Lochkarten bedeutet zunächst nur eine Registrierung von Beobachtungen in Karteiform. Durch die HOLLERITHSchen *Sortier-* und *Tabelliermaschinen* läßt sich aber das so gesammelte Material in jeder gewünschten Weise statistisch auswerten. Die *Sortiermaschinen* gestatten es, das Kartenmaterial gemäß den Ziffern einer beliebigen Spalte zu trennen. Besitzt man z. B. nach obigem Schlüssel ein langjähriges Beobachtungsmaterial für eine und dieselbe Station, so ist es auf diese Weise möglich, eine Verteilungskurve des Luftdrucks herzustellen. Man geht etwa so vor, daß man das gesamte Material zunächst nach Spalte 11 sortiert und jeden der so erhaltenen Kartenhaufen wiederum nach Spalte 12. Da die Maschine die Karten nicht nur sortiert, sondern gleichzeitig die auf jede Ziffer entfallenden Karten *zählt*, ergibt sich auf diese Weise die Anzahl der Beobachtungen, die auf jeden ganzen Millimeterwert des Luftdrucks entfallen. Die *Tabelliermaschinen* ermöglichen es, die Zahlenwerte bestimmter Spalten oder Spaltengruppen zu addieren. Benötigt man z. B. die Mittelwerte des Luftdrucks und der Temperatur für die einzelnen Monate und über einen langjährigen Zeitraum, so sortiert man zunächst das Kartenmaterial nach Spalte 6 und 7, die die Monatsziffern enthalten, und läßt die Tabelliermaschine für jeden der so entstehenden 12 Haufen die Summen für die Spaltengruppen 11—13 bzw. 14—16 bilden. Die zur Zeit gebräuchlichen Maschinen gestatten die gleichzeitige Summierung von 5 Spaltengruppen zu je 6—8 Spalten, also die Addition von 6—8-stelligen Zahlen.

Für besondere Zwecke gibt es noch Spezialmaschinen, z. B. den *Kartendoppler*, der von einmal gelochten Karten automatisch Duplikate in beliebiger Zahl herstellt oder auch bestimmte Teile der Karte „abschreibt“. Ferner sind *Multiplikationsmaschinen* konstruiert worden, die das Produkt von zwei Spaltengruppen von beschränkter Spaltenzahl bilden und gleichzeitig in eine dafür vorgesehene Spaltengruppe einlochen. Schließlich gibt es auch Maschinen, die subtrahieren und dividieren.

Die Verwendungsmöglichkeiten des Lochkartenverfahrens in der Periodenforschung, insbesondere bei der Berechnung von Periodogrammen, sind sehr vielseitig. Eine praktische Erprobung hat bereits in einer Reihe von Fällen stattgefunden — die Erfolge berechtigen zu der Vermutung, daß das Lochkartenverfahren bei umfangreichen periodographischen Programmarbeiten in der Zukunft eine Hauptrolle spielen wird. Jedoch sind die bisher gemachten Erfahrungen noch zu gering, als daß endgültige Vorschriften über die zweckmäßige Organisation einer solchen Arbeit schon jetzt gegeben werden könnten. In konkreten Fällen ist hier vor allem die Kostenfrage maßgebend, über die an dieser Stelle keine Angaben gemacht werden können. Es soll hier nur darauf

hingewiesen werden, daß die bei Periodogrammrechnungen nötigen Produktbildungen mit Hilfe der Lochkartenmaschinen auf vollautomatischem Wege zwar möglich sind, aber in ökonomischer Hinsicht bisher wenig vorteilhaft erscheinen. Soweit sich zur Zeit übersehen läßt, wird man sich daher in nächster Zukunft darauf beschränken müssen, den Lochkartenmaschinen bei der Ausführung von Periodogrammarbeiten der Hauptsache nach das Sortieren und Addieren zu überlassen und darüber hinaus bewußt danach streben, die übrigbleibende Multiplikationsarbeit auf ein Mindestmaß zurückzuführen.

11. Abarten des Periodogramms.

In diesem Abschnitt sollen einige besondere Begriffsbildungen beschrieben werden, die sich im Laufe der Zeit innerhalb der Periodogrammtheorie eingebürgert haben.

Sind Periodogramme (oder auch einfach Folgen von FOURIER-Amplituden) für verschiedene Teilintervalle einer und derselben Beobachtungsreihe berechnet worden, so liegt es nahe, die Ergebnisse dieser Teilanalysen miteinander zu vergleichen. Ist insbesondere eine *persistente* Periode oder sind mehrere solche vorhanden, so werden gewisse Periodogrammordinaten (Spektrallinien) in *jedem* Teilintervall große Beträge zeigen, während andere im allgemeinen klein und höchstens vereinzelt (zufällig) größer sind. Man berücksichtigt diese Möglichkeiten rechnerisch, indem man die zu gleichen Frequenzen gehörigen Amplituden aller Teilintervalle durch Mittelbildung zusammenfaßt. Geschieht die Mittelbildung linear:

$$H = \frac{1}{n} (h_1 + h_2 + \cdots + h_n),$$

so spricht man von einem *durchschnittlichen Periodogramm*, mittelt man dagegen die Quadrate der Amplituden (Intensitäten), so entsteht das *mittlere Periodogramm*

$$H^2 = \frac{1}{n} (h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2).$$

Abgesehen davon, daß durch die Analyse von Teilbereichen die Frage der Persistenz oder Quasipersistenz von Periodizitäten geklärt wird, wendet man die Konstruktion eines mittleren (oder durchschnittlichen) Periodogramms häufig deswegen an, weil dadurch — bei voller Ausnutzung des gegebenen Beobachtungsmaterials — die Breite der Spektrallinien (Maximumbreite) vergrößert und somit die Mindestzahl der zu berechnenden Wellen verkleinert wird. Die Maximumbreite des *mittleren* Periodogramms ist natürlich gleich der eines Teilbereichs, also, wenn die Gesamtreihe in n gleiche und sich nicht überdeckende Teilbereiche zerlegt war, n -mal so groß wie die des Gesamtbereichs selbst. Auf diese Weise läßt sich die Suche nach persistenten Perioden erleichtern, da die notwendige Dichte der Versuchswellen n -mal so klein ist wie im

vollständigen Periodogramm des Gesamtbereichs. Diese Erleichterung wirkt sich besonders im Bereich der kleineren und kleinsten Wellen vorteilhaft aus. Dafür entsteht der Nachteil, daß „Linien“, die im Spektrum der Gesamtkurve noch getrennt erscheinen würden, im mittleren Periodogramm zusammenfließen. Dieser Nachteil ist aber ohne Belang, wenn man bedenkt, daß die Trennung solcher Wellen dann immer durch Phasendiagramme möglich ist; falls es sich als wünschenswert herausstellt, läßt sich die Verdichtung des Gesamtperiodogramms nachträglich immer noch durchführen, was dann nur in einem kleinen Bereich des Spektrums zu erfolgen braucht, der durch das breite Maximum des mittleren Periodogramms angezeigt wurde.

Ein zweiter Nachteil, der mit dem mittleren Periodogramm verbunden ist, läßt sich schwerer umgehen. Er besteht darin, daß das „kontinuierliche Spektrum“ des mittleren Periodogramms durchschnittlich größere Ordinaten enthält, als das bei dem dichteren Spektrum des Gesamtperiodogramms der Fall wäre. Diese Eigentümlichkeit folgt einfach aus der Vollständigkeitsrelation der FOURIERSchen Amplituden, die besagt, daß die Quadratsumme aller Amplituden proportional dem Quadrat der Streuung der Beobachtungen, also bei Beobachtungsreihen von gleichmäßiger Streuung unabhängig von der *Anzahl* der Beobachtungen ist. Bei einer langen Beobachtungsreihe mit dichtem Spektrum verteilt sich dieser Betrag also über eine größere Anzahl von Spektralordinaten, als bei Teilintervallen mit einem Spektrum von entsprechend geringerer Ordinaten-dichte. Der Mittelwert der Amplitudenquadrate nimmt daher wie $\frac{1}{N}$, der quadratische Mittelwert der Amplituden selbst wie $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ab, wenn N die Gesamtzahl der Beobachtungswerte bedeutet. Das Mittel der Amplitudenquadrate eines mittleren Periodogramms, das aus n unabhängigen und aufeinanderfolgenden Teilbereichen berechnet worden ist, wird somit n -mal so groß sein wie das aus der ungeteilten Reihe berechnete. Somit liegt die Gefahr nahe, daß reelle und persistente Perioden von geringerer Amplitude, deren Ordinaten aus dem schwachen kontinuierlichen Spektrum der Gesamtreihe noch deutlich hervorragen, in dem verstärkten kontinuierlichen Spektrum des mittleren Periodogramms verschwinden und somit unentdeckt oder wenigstens zweifelhaft bleiben.

Um diese letztere Gefahr abzuschwächen, ohne des Vorteils der größeren Maximumbreite bei Intervallteilung verlustig zu gehen, habe ich in einer früheren Arbeit (Lit. 256) ein „*Periodogramm neuer Art*“ vorgeschlagen, bei dessen Konstruktion außer den Amplituden der Periodogrammvektoren der Teilbereiche auch ihre Richtungswinkel (Phasen) herangezogen werden. Es wird dabei die Tatsache mitbenutzt, daß in der Nähe der Periodogrammaxima (also in einem Spektralgebiet,

das ein periodenanzeigendes Maximum nahezu in der Ausdehnung einer „Maximumbreite“ umgibt), die Phasen — abgesehen von den störenden Einflüssen benachbarter Perioden oder unperiodischer Bestandteile — von Intervall zu Intervall linear fortschreiten. Ergeben sich also für n aufeinanderfolgende Teilintervalle die Amplituden

$$h_1, h_2, \dots, h_n$$

und die Phasen

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$$

für eine in der Nähe der persistenten wahren Periode liegenden Versuchswelle, so sind nicht nur die h_v , von gewissen Störungen abgesehen, konstant, sondern auch die Differenzen

$$\varphi_1 = \psi_2 - \psi_1$$

$$\varphi_2 = \psi_3 - \psi_2$$

.....

$$\varphi_{n-1} = \psi_n - \psi_{n-1}$$

benachbarter Phasenwerte (wobei natürlich eine Vermehrung oder Verminderung um 2π nicht als Veränderung gilt). Da die φ_v jeweils zu zwei benachbarten Teilintervallen gehören, benutzt man zweckmäßig an Stelle der h_v die $n-1$ Werte

$$g_1 = \frac{1}{2} (h_2 + h_1)$$

$$g_2 = \frac{1}{2} (h_3 + h_2)$$

.....

$$g_{n-1} = \frac{1}{2} (h_n + h_{n-1}),$$

die im Falle der Periodizität die gleichen Konstanzeigenschaften besitzen wie die h_v selbst, oder aber man bestimmt Amplituden g_1, g_2, \dots, g_{n-1} aus Teilintervallen derselben Länge, deren *Mitten* mit den $n-1$ Übergangstellen zwischen den ursprünglichen n Intervallen zusammenfallen. In beiden Fällen erhält man zwei Folgen

$$g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$$

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1},$$

aus denen sich ein Spektrum neuer Art mit den Ordinaten

$$\xi = \frac{1}{n-1} \sqrt{\left(\sum_{v=1}^{n-1} g_v \cos \varphi_v\right)^2 + \left(\sum_{v=1}^{n-1} g_v \sin \varphi_v\right)^2}$$

bilden läßt. Dies Spektrum zeigt Maximalordinaten von der Größenordnung der h_v nur für den Fall, daß sowohl die g_v als auch die φ_v hinreichend konstant sind. Würden nämlich bei konstanten g_v die φ_v beliebig streuen, so würde die Ordinate ξ stark verkleinert werden, möglicherweise sogar verschwinden.

Eine Anwendung dieses Verfahrens ist in der Originalarbeit gezeigt worden. Es muß aber bemerkt werden, daß diese Anwendung nur dann zweckmäßig ist, wenn die zur Diskussion stehenden Periodizitäten tatsächlich persistent sind, während nicht persistente Perioden durch das Verfahren mehr oder weniger zerstört werden, was nicht immer erwünscht ist. So erwies sich das Periodogramm neuer Art bei der Analyse der Sonnenfleckenrelativzahlen (Lit. 260) als ungeeignet — ebensowenig würde es bei der Analyse meteorologischer Beobachtungsreihen, in denen quasi-persistente Perioden vermutet werden dürfen, als Untersuchungsmethode brauchbar sein. Hingegen könnte es bei der Gezeitenanalyse vortreffliche Dienste leisten.

Zum Schluß soll noch über eine Abart des Periodogramms berichtet werden, die mehr theoretisches als praktisches Interesse erweckt, aber der Vollständigkeit wegen nicht übergangen werden darf: das „*Exponentialperiodogramm*“.

Im Verlauf unserer Ausführungen über die Bildung des Periodogramms und seiner besonderen Formen als Phasen- und Amplitudendiagramm, als „Wegkurve“ oder „Epizykeldiagramm“ und als „Summationsvektor“ ist eine fundamentale Eigenschaft dieses analytischen Hilfsmittels immer deutlicher hervorgetreten, auf der letzten Endes seine Wirksamkeit bei der Aufsuchung verborgener Periodizitäten beruht: Durch eine besondere Art von „Glättung“ wird mit Hilfe des Periodogramms ein bestimmter Spektralbereich aus der Gesamtheit der in der Beobachtungsreihe vorhandenen periodischen und unperiodischen Erscheinungsformen herausgeblendet und somit einer Spezialuntersuchung zugänglich gemacht. Die innere Verwandtschaft der Periodogramm-methode mit der „Glättung durch übergreifende Mittel“ läßt sich am besten zeigen, wenn man die letztere auf eine reine Sinuswelle anwendet. Es sei eine Schwingung von der Form

$$f(t) = c \cdot \cos(\alpha t - \gamma)$$

vorgelegt und einer Glättung durch übergreifende Mittelbildung bzw. Integration über ein verschiebbares Intervall von der Länge p unterworfen. Die so geglättete Kurve hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} i(q; p) &= \frac{1}{p} \int_{q - \frac{p}{2}}^{q + \frac{p}{2}} f(t) dt = \frac{c}{p} \int_{q - \frac{p}{2}}^{q + \frac{p}{2}} \cos(\alpha t - \gamma) dt \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha p}{2}}{\frac{\alpha p}{2}} \cdot c \cdot \cos(\alpha q - \gamma). \end{aligned}$$

Man erkennt, daß die geglättete Kurve eine Schwingung der gleichen Frequenz und Phase ergibt, daß aber die Amplitude durch den „Glättungsfaktor“

$$G(p) = \frac{\sin \frac{\alpha p}{2}}{\frac{\alpha p}{2}}$$

herabgedrückt wird. Dieser Faktor hat aber die gleiche analytische Form wie die in der Periodogrammanalyse von Sinuswellen auftretenden Funktionen P und Q (s. Abschnitt 2 und 3), zeigt also ebenso wie diese Nullstellen und Extrema verschiedener Ordnung, also die gleichen Erscheinungen, die wir im Falle des Periodogramms als „spurious periodicities“ bezeichnet haben. Das Auftreten der Scheinperioden war im Periodogramm in gewisser Hinsicht störend — die Analogie mit der Glättung weist aber auf einen Weg hin, es zu vermeiden. Bei der Glättung ist nämlich die Beseitigung der Nebenextrema möglich, wenn eine „gewichtete“ Glättung in der Art durchgeführt wird, daß

$$f(q; h) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(t-q)^2} f(t) dt = e^{-\frac{\alpha^2}{4h^2}} \cdot c \cdot \cos(\alpha q - \gamma)$$

gesetzt wird. Die Gewichtsverteilung entspricht hier einer GAUSSschen Fehlerkurve mit dem Genauigkeitsmaß h , an dessen Stelle auch die „Streuung“ $\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ zweckmäßig verwendet werden kann. Bei Einführung von μ würde die Glättungsformel lauten:

$$f(q; \mu) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-q)^2}{2\mu^2}} f(t) dt = e^{-\frac{1}{2}\mu^2\alpha^2} \cdot c \cdot \cos(\alpha q - \gamma).$$

Der Glättungsfaktor nimmt demnach die Gestalt einer quadratischen Exponentialkurve an und nimmt mit wachsendem μ asymptotisch und monoton gegen null ab.

Damit ist der Weg angezeigt, der zur Konstruktion eines Periodogramms führt, das die Begleiterscheinung der „spurious periodicities“ vermeidet. Ein solches „Exponentialperiodogramm“ (siehe auch Lit. 215 u. 216), wie es schon 1922 vom Verfasser (Lit. 253) vorgeschlagen wurde, läßt sich folgendermaßen definieren: Der Vektor $\mathfrak{F}(x, q)$ werde durch die Komponenten

$$a(x, q) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(t-q)^2} f(t) \cos xt dt$$

$$b(x, q) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(t-q)^2} f(t) \sin xt dt$$

gegeben. Im Falle, daß $f(t)$ eine einfache Welle $c \cdot \cos(\alpha t - \gamma)$ ist, erhält man dann

$$a(x, q) = c \left\{ e^{-\frac{1}{2}\mu^2(\alpha-x)^2} \cos((\alpha-x)q - \gamma) + e^{-\frac{1}{2}\mu^2(\alpha+x)^2} \cos((\alpha+x)q - \gamma) \right\}$$

$$b(x, q) = c \left\{ e^{-\frac{1}{2}\mu^2(\alpha-x)^2} \sin((\alpha-x)q - \gamma) - e^{-\frac{1}{2}\mu^2(\alpha+x)^2} \sin((\alpha+x)q - \gamma) \right\}.$$

Wie ersichtlich, bleibt auch hier die Zusammensetzung des Periodogrammvektors aus einem „Hauptvektor“ und einem „Störungsvektor“ bestehen — sie ist unvermeidlich, da sie offenbar auf der Identität

$$\cos(\alpha t - \gamma) \equiv \cos(-\alpha t + \gamma)$$

beruht, also auf der Tatsache, daß jede Welle von der Frequenz α sich auch durch eine solche von der Frequenz $-\alpha$ ersetzen läßt, das auf negative Frequenzen ausgedehnte Spektrum also zwei zur Frequenz null symmetrisch liegende „Linien“ zeigt, die sich gegenseitig, wenn auch nur geringfügig, stören. Dagegen sind die sekundären Extrema verschwunden.

Wesentliche Vorteile, die aus dem Fehlen der Scheinperioden entspringen, sind für die Praxis nur bei der Konstruktion von *Spektral*kurven zu erwarten, und auch da nur, sofern es sich um ein hinreichend streng aus einer größeren Anzahl von Sinuswellen zusammengesetztes Beobachtungsmaterial handelt. Praktische Versuche sind nicht bekannt geworden — in der Geophysik würden sich solche Versuche wohl nur an Gezeitenkurven lohnen, und auch da nur, sofern man andere Versuchswellen als die durch die Harmonische Analyse vorgeschriebenen benutzt. Es muß nämlich in diesem Zusammenhang festgestellt werden, daß auch die gewöhnliche Harmonische Analyse einer Sinuswelle beliebiger Frequenz eine Ordinatenfolge ergibt, die so ausgewählt ist, daß Nebenmaxima in ihr nicht sichtbar werden. Es ist demnach kaum zu erwarten, daß die vermehrte Arbeit, die mit der Konstruktion eines Exponentialperiodogramms verbunden ist, sich in konkreten Fällen lohnt. Dagegen sind mehrere Nachteile vorhanden: z. B. gehen — der Gewichtsfunktion $e^{-h^2(t-q)^2}$ entsprechend — die Beobachtungswerte mit sehr ungleichem Gewicht in die Rechnung ein, so daß also Fehler derjenigen Beobachtungswerte, die mit dem Scheitelpunkt der Gewichtsfunktion verbunden sind, besonders stark hervorgehoben werden. Außerdem erfordert die Theorie eigentlich das Vorhandensein einer beiderseitig ins Unendliche ausgedehnten Beobachtungsreihe, wie sie in der Praxis niemals zur Verfügung steht. Dieser letztere Nachteil wiegt allerdings weniger schwer, da die Gewichtsfunktion zu beiden Seiten des Scheitelwertes $t = q$ schon in endlichem Abstand dem Nullwert so nahekommt, daß alle außerhalb eines gewissen Bereichs um den Scheitelwert liegenden Beobachtungen praktisch das Gewicht null erhalten, also in die Rechnung nicht eingehen. Die Multiplikation der Beobachtungsreihe

mit der Gewichtsfunktion entspricht demnach der Auswahl eines Teilbereiches der Reihe, dessen Länge durch die Maßzahl μ gekennzeichnet wird. (Die Gewichtsfunktion ist in der Entfernung 3μ vom Scheitel schon so klein, daß durch sie ein Intervall von höchstens 6μ Länge der Beobachtungsreihe entnommen wird; bei geringeren Genauigkeitsansprüchen kann man sogar schon alle Werte außerhalb $[q - 2\mu; q + 2\mu]$ vernachlässigen.)

12. Analyse lückenhafte Beobachtungsreihen.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß das zu analysierende Beobachtungsmaterial aus einer vollständigen Reihe äquidistanter Beobachtungen besteht. Diese Voraussetzung ist in der Praxis nicht immer erfüllt. Große Schwierigkeiten bestehen in dieser Hinsicht bei *astronomischen* Beobachtungsreihen (z. B. Beobachtungen des Lichtwechsels veränderlicher Sterne, die für periodographische Untersuchungen besonders häufig in Frage kommen). Die Unregelmäßigkeiten in der Beobachtungsfolge beruhen bei derartigen Reihen auf verschiedenen Ursachen: z. B. auf der Abhängigkeit der Beobachtungen vom Wetter und auf der Unmöglichkeit, bestimmte Gestirne um die Zeit ihrer Konjunktion mit der Sonne zu beobachten. Die letztere Ursache, die nur für Zirkumpolarsterne in gemäßigten Breiten unwirksam bleibt, erzeugt zum Teil sehr breite Lücken in den Beobachtungsreihen, die jährlich wiederkehren. Bei bewegten Gestirnen (Mond, Planeten) treten auch periodische Lücken von anderer als jährlicher Periode auf (synodische Umlaufszeit, beim Mond synodischer Monat). Bei periodischen Kometen, die allerdings zu periodographischen Problemen kaum Anlaß bieten, erreichen die periodischen Beobachtungslücken oft enorme Ausdehnungen, da diese Gestirne während ihres Umlaufs um die Sonne meist nur eine sehr kurze Zeitspanne hindurch (während ihres Perihels bzw. ihrer größten Erdnähe) beobachtet werden können. Alles in allem lassen sich die Unregelmäßigkeiten in der Folge der Beobachtungszeiten folgendermaßen klassifizieren:

1. Die Beobachtungen sind ohne eigentliche Lücken, aber nur angenähert äquidistant (z. B. wenn täglich eine Beobachtung, diese aber zu wechselnden Beobachtungszeiten, vorliegt).
2. Die Beobachtungsreihe ist genau oder annähernd äquidistant, doch sind an vereinzelt Stellen kleinere Lücken vorhanden.
3. Die Lücken sind annähernd so häufig, wie die Beobachtungen selbst, aber ganz regellos über den Beobachtungszeitraum verteilt.
4. Die Lücken herrschen vor, es sind also nur sporadische Beobachtungen vorhanden, die nur stellenweise eine zusammenhängende Folge bilden.
5. Die Lücken treten periodisch mit größerer Häufigkeit (Dichte) auf.

Die ersten beiden Fälle bieten bei der Anwendung der Periodogramm-analyse meist keine großen Schwierigkeiten. Besonders dann, wenn der Beobachtungsvorgang stetig ist und es auf Schwankungen von sehr kurzer Periode nicht ankommt, besteht die Möglichkeit, die vorhandene Beobachtungsfolge graphisch zu interpolieren und der interpolierten, eventuell geglätteten Kurve äquidistante Folgen zu entnehmen. Auch wenn stellenweise größere Lücken auftreten, läßt sich eine Überbrückung durch Interpolation rechtfertigen, sofern ihre Ausdehnung gegenüber der Länge der zu untersuchenden Welle klein genug ist. Was Fall 3 anbetrifft, so wird die Verwendbarkeit der Reihe für eine Periodenuntersuchung wesentlich von der Verteilung der Lücken und von der Gesamtlänge des durch Beobachtungen überhaupt belegten Zeitraums abhängen. Die Beurteilung der jeweils vorliegenden Verhältnisse geschieht am besten, indem man die Beobachtungen in der Art des BUYS-BALLOTSchen oder des BÖRGENSchen Schemas nach den gewünschten Versuchsperioden anordnet. Ist die Verteilung der Lücken von „zufälligem“ Charakter, so wird bei genügender Länge der Beobachtungsreihe die Anzahl der in jeder Spalte des Schemas vorhandenen Beobachtungswerte zwar nicht gleich, aber doch größenordnungsmäßig nicht sehr voneinander verschieden sein. Es ist also eine einigermaßen gleichmäßige Verteilung der Lücken über die verschiedenen Spalten des Schemas zu erwarten. Die noch bestehende Ungleichmäßigkeit in der Belegungsziffer der Spalten könnte man dadurch auszugleichen suchen, daß man der Analyse der Summenreihe nicht die Spaltensummen selbst, sondern die arithmetischen Mittel der in jeder Spalte vorhandenen Werte zugrunde legt. Doch spricht mehr dafür, auf die Mittelbildung zu verzichten, besonders dann, wenn einzelne Spalten nur sehr wenige oder gar keine Beobachtungen aufweisen. Die direkte Analyse der Spaltensummen würde einer Ausgleichung mit Gewichten entsprechen, wobei jeder Spaltensumme ein Gewicht zugeordnet wird, das der Summe der vorhandenen Beobachtungen proportional ist. Spalten, die nur Lücken und keine einzige Beobachtung enthalten, würden bei diesem Verfahren automatisch das Gewicht null bekommen. Auch der extreme Fall 4 läßt sich unter Umständen auf diese Weise behandeln, nur wird bei sporadischen Beobachtungen die Gesamtlänge der Beobachtungsreihe, bzw. die Zahl der gesamten verfügbaren Beobachtungen hinreichend groß sein müssen, so groß nämlich, daß (für alle zu untersuchenden Wellen) das Spaltenschema noch hinreichend dicht besetzt ist.

Alle diese Schwierigkeiten, die auf dem Vorhandensein von Lücken beruhen, sind demnach überwindbar, sofern nur genügend viel Beobachtungsmaterial verfügbar ist. Unregelmäßig verteilte Lücken wirken sich weniger auf das Analyseergebnis selbst, als auf seine Genauigkeit aus. Das wird bis zu einem gewissen Grade anders, wenn die Wiederkehr größerer Lücken oder auch nur größerer Lückenhäufigkeit selbst

periodisch ist, wie dies an den obigen astronomischen Beispielen gezeigt wurde. Es läßt sich nämlich zeigen, daß periodische Lücken das Ergebnis der Analyse durch Erzeugung von Scheinperioden wesentlich zu beeinflussen vermögen.

Die Notwendigkeit und die Art dieses Einflusses ist auch ohne Rechnung unmittelbar einzusehen. Nehmen wir einmal den einfachsten Fall periodischer Lückenverteilung an, der sich konstruieren läßt: Ein Gestirn, z. B. ein veränderlicher Stern von nicht zu kurzer Periode, sei lange Jahre hindurch beobachtet worden, aber während jedes Jahres nur 6 Monate lang regelmäßig, während die übrigen sechs wegen der Nähe der Sonne keine oder nur vereinzelte Beobachtungen enthalten. Die Beobachtungsreihe ist also durch periodisch (jährlich) wiederkehrende Lücken von halbjähriger Dauer unterbrochen. Allein aus der Anschauung dieser intermittierenden Beobachtungskurve lassen sich einige Schlüsse über die Möglichkeit von Irrtümern bei der Periodenbestimmung ziehen. Gesetzt, die Beobachtungsreihe lasse, abgesehen von unregelmäßigen Schwankungen, keinen periodischen Lichtwechsel erkennen. Dann besteht trotzdem die Möglichkeit, daß Extrema (z. B. Bedeckungsminima) regelmäßig in die Konjunktionsepoche fallen und daher nicht beobachtbar sind. Eine jährliche Periode bliebe also unter Umständen unentdeckt. Hat die Lichtwechselperiode nicht genau, aber angenähert die Länge eines Jahres, so wird durch den Anblick der intermittierenden Kurve eine *langperiodische* Änderung vorgetäuscht. Diese Täuschung wird um so vollkommener, je kürzer der durch Beobachtungen belegte Zeitraum im Verhältnis zu der periodischen (jährlichen) Lücke ist — der Grenzfall ist offenbar dann gegeben, wenn in periodischen (jährlichen) Abständen jeweilig nur eine Beobachtung vorliegt. Diesen Grenzfall haben wir schon früher behandelt; er liegt überall vor, wo eine stetige Beobachtungskurve durch eine Folge diskreter und äquidistanter Einzelwerte ersetzt wird. Die durch periodische Lücken hervorgerufene Mehrdeutigkeit der periodographischen Ergebnisse beruht also auf den gleichen Ursachen wie die (in I, 12 beschriebene) Mehrdeutigkeit der trigonometrischen Interpolation von äquidistanten Beobachtungsreihen, die in Gegensatz steht zu der Eindeutigkeit der FOURIERSchen Entwicklung zusammenhängender Funktionen. Zwischen beiden Extremen bilden also die Beobachtungskurven mit periodisch wiederkehrenden Lücken ein Zwischenglied.

Mathematisch läßt sich das Problem der Periodogrammanalyse lückenhafter Beobachtungsreihen auf das vollständiger (äquidistanter) Reihen zurückführen, wenn man die Lücken nach einem geeigneten Prinzip ausfüllt. Soweit die Überbrückung der Lücken durch Interpolation ohne Willkür möglich ist, wird man auf diese Weise eine Vervollständigung der Beobachtungsreihe anstreben. Das wird aber nur dann statthaft sein, wenn die Lücken klein sind und die Beobachtungsreihe

glatt und ohne wesentliche kurzperiodische Schwankungen verläuft. Sind die Lücken größer, oder scheint aus anderen Gründen die Interpolation unmöglich oder zweifelhaft, so ist es zweckmäßig, die Lücken provisorisch durch einen konstanten Wert (z. B. null oder den Gesamtmittelwert der Reihe) aufzufüllen. Durch diese Auffüllung wird die Beobachtungsreihe in einer Weise verändert, die einerseits einfach und vorurteilsfrei ist, andererseits — namentlich im Falle periodisch wiederkehrender Lücken — eine leichte Übersicht über die auftretenden Scheinperioden gestattet.

Ist z. B. der oben diskutierte Fall gegeben, daß die Lückenperiode (der Beobachtungsabstand als Zeiteinheit genommen) λ ist und abwechselnd $\frac{\lambda}{2}$ Beobachtungen und $\frac{\lambda}{2}$ Lücken aufeinanderfolgen, so wird dadurch, daß man die fehlenden Beobachtungen durch den konstanten Wert null auffüllt, die wirkliche Beobachtungsreihe y_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) durch eine fingierte Reihe $y_\nu \cdot g_\nu$ ersetzt, wobei die „Gewichte“ g_ν , je nachdem, ob die ν -te Beobachtung existiert oder nicht, die Werte $+1$ oder 0 annehmen. Die Gewichtsfunktion g_ν besteht also aus den äquidistanten Ordinaten einer *Gitterfunktion* (siehe II, 1)

$$g_\nu = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ \sin(\lambda \nu + \psi) + \frac{1}{3} \sin 3(\lambda \nu + \psi) + \frac{1}{5} \sin 5(\lambda \nu + \psi) + \dots \right\} \\ \left(\lambda = \frac{2\pi}{\lambda} \right).$$

Hat nun die Beobachtungsfunktion selbst die Gestalt

$$f_\nu = c_0 + c \sin(\alpha \nu + \beta),$$

so ist die fingierte Funktion von der Form

$$f_\nu \cdot g_\nu = \frac{1}{2} \{c_0 + c \sin(\alpha \nu + \beta)\} \\ + \frac{2c_0}{\pi} \left\{ \sin(\lambda \nu + \psi) + \frac{1}{3} \sin 3(\lambda \nu + \psi) + \frac{1}{5} \sin 5(\lambda \nu + \psi) + \dots \right\} \\ + \frac{c}{\pi} \left\{ \cos((\alpha - \lambda)\nu + \beta - \psi) + \frac{1}{3} \cos((\alpha - 3\lambda)\nu + \beta - 3\psi) + \dots \right. \\ \left. - \cos((\alpha + \lambda)\nu + \beta + \psi) - \frac{1}{3} \cos((\alpha + 3\lambda)\nu + \beta + 3\psi) - \dots \right\}.$$

Sofern also das konstante Glied c_0 vor der Bearbeitung nicht oder nur unvollständig eliminiert werden konnte, treten Scheinperioden mit den Frequenzen

$$\lambda, 3\lambda, 5\lambda, \dots$$

und den Amplituden

$$\frac{2c_0}{\pi}, \quad \frac{2c_0}{3\pi}, \quad \frac{2c_0}{5\pi}, \dots$$

auf. Außerdem ergeben sich Scheinperioden mit den Frequenzen

$$\alpha - \lambda, \alpha - 3\lambda, \alpha - 5\lambda, \dots$$

$$\text{bzw. } \alpha + \lambda, \alpha + 3\lambda, \alpha + 5\lambda, \dots$$

und den Amplituden

$$\frac{c}{\pi}, \quad \frac{c}{3\pi}, \quad \frac{c}{5\pi}, \quad \dots$$

Die erste Serie von Scheinperioden fällt aus, wenn $c_0 = 0$, also die additive Konstante vor der Analyse aus dem Beobachtungsmaterial entfernt worden ist. Diese Elimination ist allerdings dann unmöglich, wenn eine wahre Periode vorhanden ist, deren Länge mit der der Lückenperiode übereinstimmt. In bezug auf derartige Perioden versagt also die Analyse, was auch aus dem weiter oben Gesagten verständlich ist (A. p. V. S. 127 bis 133, sowie Lit. 253—254, 265).

Wir können den Fall intermittierender Beobachtungsreihen, wie den oben beschriebenen, unter dem Gesichtspunkt betrachten, daß die Lückenhäufigkeit Perioden von den Frequenzen

$$A, 3A, 5A, \dots, (2m + 1)A, \dots$$

besitzt. Jede dieser Lückenperioden bewirkt also, daß neben jeder Frequenz α im Periodogramm zwei Scheinperioden mit den Frequenzen

$$\alpha - (2m + 1)A; \quad \alpha + (2m + 1)A$$

auftreten. Es ist also zweckmäßig, sich vor der Analyse lückenhafter Beobachtungsreihen über das Vorhandensein von Perioden der Lückenhäufigkeit zu unterrichten. Bei intermittierenden Reihen sind diese bekannt, während bei unregelmäßiger Lückenverteilung Zweifel über den periodischen Charakter der Lückenhäufigkeit aufkommen können. Diese Zweifel lassen sich durch eine der eigentlichen Analyse vorhergehende Periodogrammanalyse der Gewichtsfunktion g , beheben, die sich auf sämtliche Versuchswellen erstrecken sollte, die auch für die eigentliche Analyse benutzt werden. In den meisten Fällen genügt es, die in den Spalten des BUYS-BALLOTSchen Schemas erscheinenden Beobachtungen ohne Rücksicht auf ihren Wert zu zählen und die Kurve der Belegungshäufigkeit zu untersuchen. Daß auch Lückenverteilungen mit nur einer Periode in der Praxis vorkommen, habe ich bei Gelegenheit einer Untersuchung von *Mondbeobachtungen* der Greenwicher Sternwarte gezeigt (A. p. V. S. 127f.): Das „Lückenperiodogramm“ zeigte nur ein einziges Maximum von Bedeutung an der Stelle der Periode des synodischen Monats.

Die Ausgleichung einer gewichteten Beobachtungsreihe ist natürlich nicht der einzige Weg, den der Bearbeiter lückenhafter Beobachtungsreihen beschreiten kann. Strenger, aber auch wesentlich komplizierter, ist diejenige Lösung, die einer direkten Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate durch eine trigonometrische Reihe entsprechen würde. Man setzt die Entwicklung in eine FOURIERSche Reihe bis zu einer bestimmten Oberschwingungsordnung und in bezug auf ein bestimmtes Grundintervall für alle verfügbaren Beobachtungen an. Die Bestimmung der unbekanntenen Konstanten erfordert dann die Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen, wobei nun aber der

Vorteil der Orthogonalität nicht mehr besteht. Soll die Orthogonalität wiederhergestellt werden, so wird es für eine bestimmte Verteilung der Beobachtungszeiten (z. B. auch für intermittierende Beobachtungsreihen) und für das System der Grundfunktionen

$$\begin{aligned} &1, \cos \varphi, \cos 2 \varphi, \dots \\ &\sin \varphi, \sin 2 \varphi, \dots \end{aligned}$$

immer möglich sein, ein für diese Verteilung orthogonales System von linearen Kombinationen dieser Grundfunktionen zu finden. Dieser Ausweg, der meines Wissens noch nicht beschritten worden ist, würde sich vielleicht für den Fall der intermittierenden Beobachtungsreihen lohnen. Er würde gleichzeitig den Übergang gestatten von den stetigen über die intermittierenden Kurven zu den diskreten Beobachtungsreihen, indem der Lückenanteil während einer Lückenperiode gegenüber dem durch Beobachtungen zusammenhängend belegten Kurvenstück, von null ausgehend, stetig vergrößert wird, bis schließlich das Beobachtungsstück in einen Punkt zusammenschrumpft. Die im Falle diskreter Beobachtungswerte auftretenden Mehrdeutigkeiten könnte man dann in einen Zusammenhang mit den Mehrdeutigkeiten bringen, die auch die intermittierenden Kurven zeigen.

Viertes Kapitel.

Die statistische Behandlung von Periodenproblemen.

1. Grundbegriffe der Statistik.

Die mathematische Untersuchung von empirischen Funktionen und Beobachtungsreihen ist niemals oder nur in ganz seltenen Fällen ein rein analytisches Problem. Schon das Vorhandensein von zufälligen Beobachtungsfehlern, mit denen der Bearbeiter von Beobachtungsdaten immer zu rechnen hat, zwingt zur Einführung von Begriffen wie „Genauigkeit“, „Streuung“, „mittlerer, durchschnittlicher oder wahrscheinlicher Fehler“ usw., wie sie in der Statistik, der Fehlertheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebraucht werden. Haben wir zudem die Aufgabe vor uns, Periodizitäten bekannter oder unbekannter Wellenlänge in Beobachtungsreihen festzustellen oder gar zu entscheiden, ob eine vorgelegte empirische Funktion überhaupt als periodisch angesprochen werden darf oder nicht, so läßt sich diese Feststellung nur sehr selten mit absoluter Sicherheit treffen — meist wird sich der Forscher mit der Angabe begnügen müssen, daß sein Rechnungsergebnis mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf das Bestehen eines periodischen Grundgesetzes

hinweist. Nur in den verhältnismäßig selten vorkommenden Fällen, in denen die Anwendung eines empirisch gefundenen periodischen Gesetzes sich bei der Vorausberechnung des künftigen Verlaufs der Erscheinung bewährt, läßt sich die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit des analytischen Befundes, der gegebenenfalls bei dieser Gelegenheit fortschreitend verbessert werden kann, bis zur Gewißheit steigern. Es wird in folgedessen notwendig sein — ohne daß hier eine vollständige Darlegung der statistischen Methoden und Begriffsbildungen gegeben werden kann — die hauptsächlichsten Begriffe, Methoden und Gesetze der Statistik zu beschreiben und ihre Anwendung auf die Aufgaben der Periodenforschung, insbesondere auf die Periodogrammrechnung, zu zeigen. Wegen besonderer Einzelheiten, insbesondere der Beweise verschiedener Sätze und der Theorie der Grundlagen der Statistik, verweise ich auf die im Literaturverzeichnis aufgeführten zahlreichen Lehr- und Handbücher, die diesen Gegenstand betreffen (z. B. Lit. 52, 75—77).

Eine der wichtigsten Unterscheidungen, die in der Statistik gemacht werden, und die auch in den späteren Anwendungen auf die Periodenforschung häufig gebraucht werden, ist die zwischen *Kollektiv* und *Individuum*. Unter „Individuum“ verstehen wir ein konkretes Objekt mit einer oder mit mehreren meßbaren oder wenigstens benennbaren Eigenschaften. Ein Individuum kann also z. B. ein Mensch sein, von dem wir verschiedene Kennzeichen besitzen — zahlenmäßig bestimmte (quantitative, meßbare), wie Größe, Gewicht, Alter, oder qualitative, wie Geschlecht, Volks- oder Rassenzugehörigkeit, Haarfarbe usw. Als Individuum im erweiterten Sinne bezeichnen wir aber auch schon eine reine oder benannte Zahl (in diesem Fall ist die Zahl selbst oder ihre Abweichung von einem Normalwert oder eine Funktion von ihr als quantitative Eigenschaft zu bezeichnen) oder auch eine Folge von Zahlen, etwa das Ergebnis einer Beobachtungsreihe. Das *Kollektiv* hingegen ist eine beschränkte oder unbeschränkte Menge von Individuen der gleichen Art; die Eigenschaften des Kollektivs sind durch die Gesamtheit der Eigenschaften aller Individuen bedingt, die zu dem Kollektiv gehören.

Wir wollen weiterhin von einem *vollständigen* Kollektiv sprechen, wenn es alle existierenden Individuen umfaßt, die ihrer Art nach zu ihm gehören. Jede Auswahl von Individuen aus einem vollständigen Kollektiv bildet ein *partiell*es oder *Teilkollektiv*. Ist die Auswahl nach bestimmten Grundsätzen erfolgt, so kann das Teilkollektiv unter Umständen wieder als ein vollständiges, aber andersartiges, betrachtet werden. So bilden etwa alle zu einem bestimmten Zeitpunkt in Berlin lebenden Menschen ein vollständiges Kollektiv, dessen Umfang durch das Kennwort: „Berliner Bevölkerung zur Zeit t “ festgelegt ist. Innerhalb dieses Kollektivs ist die Gesamtheit aller männlichen Einwohner ein Teilkollektiv, diese bildet aber ihrerseits ein vollständiges Kollektiv unter der engeren

Bezeichnung: „männliche Bevölkerung von Berlin zur Zeit t “. Andererseits ist es aber auch möglich, Teilkollektive auf folgende Art zu bilden: Man schreibt die Namen aller Einwohner bzw. ihre individuellen Charakteristiken auf Zettel (Karteikarten, Lose), legt diese Zettel gut durchmischt in eine Urne und entnimmt dieser Urne willkürlich eine bestimmte Anzahl von Zetteln. Diesen Vorgang bezeichnet man als „Auslosung“ oder „Stichprobenerhebung“. Das Ergebnis einer solchen Stichprobenerhebung ist dann ein Teilkollektiv, das man höchstens auf Grund einer willkürlichen Festsetzung, nicht aber durch ein naturgegebenes zusätzliches Kennwort als ein vollständiges Kollektiv engerer Art ansehen könnte. Allgemein wollen wir Teilkollektive der erstgenannten Art als „*systematische Auswahlen*“ bezeichnen, die durch Stichproben erzeugten aber als „*zufällige* oder *willkürliche Auswahlen*“.

Von den Eigenschaften eines Kollektivs interessieren uns in der Folge hauptsächlich diejenigen, die man unter dem Namen „*statistische Eigenschaften*“ zusammenzufassen pflegt. Wir verstehen darunter diejenigen Charakteristika eines vollständigen Kollektivs, deren zahlenmäßige Werte schon durch Stichprobentnahme angenähert festgestellt werden können. So ist z. B. die durchschnittliche Körperlänge oder das durchschnittliche Alter einer Bevölkerung eine statistische Eigenschaft. Dagegen ergeben systematische Auswahlen unter Umständen erhebliche Abweichungen: die durchschnittliche Länge der männlichen Bevölkerung ist z. B. merklich von der der Gesamtbevölkerung unterschieden. Noch deutlicher würde dieser Unterschied hervortreten, wenn wir in diesem Falle als systematische Auswahl die Aussonderung aller Individuen vornehmen würden, deren Alter unter 10 Jahren liegt.

Natürlich ist eine praktisch hinreichende Übereinstimmung zwischen den statistischen Eigenschaften des Gesamtkollektivs und denen willkürlicher Auswahlen nur zu erwarten, wenn die Zahl der Stichproben hinreichend groß ist, da bei geringer Anzahl von Stichproben immer die Gefahr besteht, daß durch sie „zufällig“ Individuen mit extremen Eigenschaften erfaßt werden, während bei Vermehrung der Zahl die Wahrscheinlichkeit der Bevorzugung von Extremen immer geringer wird. Aus diesem Grunde wird man auch von einem Kollektiv überhaupt nur dann reden, wenn die Anzahl der Individuen hinreichend groß ist, und wird man auch eine Auswahl von wenigen Elementen noch nicht als ein Teilkollektiv bezeichnen. Wo hierbei die Grenze liegt, muß von Fall zu Fall entschieden werden.

Die letzteren Betrachtungen zeigen schon deutlich genug, daß man ohne den Begriff der *Wahrscheinlichkeit* in diesem Zusammenhange nicht auskommt. In der Tat läßt sich die Definition dieses Begriffes in enger Anlehnung an die obigen Betrachtungen durchführen. Als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bezeichnet man bekanntlich das Verhältnis zwischen der Zahl der Fälle, die dem Eintreten des Ereignisses günstig

sind, zu der Gesamtzahl aller Möglichkeiten. Wünschen wir mit zwei Würfeln die Summe 12 zu werfen, so erkennen wir, daß unter allen 36 Möglichkeiten, die der Wurf bietet, nur eine einzige, nämlich der Wurf $6 + 6$, dem Ereignis günstig ist. Die Wahrscheinlichkeit, die Summe 12 zu werfen, ist daher $1:36$. Dagegen bestehen für den Wurf 6 fünf Möglichkeiten ($1 + 5$, $2 + 4$, $3 + 3$, $4 + 2$, $5 + 1$); die Wahrscheinlichkeit, 6 zu werfen, ist also $5:36$. Die 36 möglichen Kombinationen zwischen den Augenzahlen zweier Würfel können nun als ein vollständiges Kollektiv angesehen werden, die Gesamtheit derjenigen „Individuen“, die eine bestimmte Augensumme ergeben, also die Gesamtheit der „günstigen“ Fälle, aber als durch systematische Auswahl entstandene Teilkollektive. Führen wir diese Auswahl für alle möglichen Augensummen, also für die Summen 2, 3, . . . , 12 durch, so ist damit das vollständige Kollektiv in eine Anzahl (11) von Teilkollektiven zerlegt worden, die einander ausschließen und, jedes für sich, nur Elemente mit gleicher Eigenschaft enthalten. Die Zahl der Elemente (Individuen) jedes dieser Teilkollektive, als Funktion der Charakteristik des Teilkollektivs (in diesem Falle also der Augensumme) aufgetragen, heißt die *Verteilungsfunktion* des Hauptkollektivs in bezug auf die zur Auswahl benutzte Eigenschaft. Beziehen wir die Ordinaten der Verteilungsfunktion auf die Gesamtsumme der in dem vollständigen Kollektiv enthaltenen Individuen als Einheit, so erhalten wir eine Funktion, die für jeden möglichen Zahlenwert der „Eigenschaft“ (Augensumme) die Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens angibt, also eine *Wahrscheinlichkeitsfunktion*. Die Summe aller Wahrscheinlichkeitsordinaten ist immer gleich der Einheit.

Ist, wie in diesem Beispiel, jedes Element des Kollektivs nur durch eine einzige Eigenschaft gekennzeichnet, so enthält die Verteilungsfunktion des Kollektivs alle seine statistischen Eigenschaften. In diesem Falle ist also das Kollektiv durch seine Verteilungskurve hinreichend beschrieben, in dem Sinne, daß wir aus ihr alle das Kollektiv betreffenden statistischen Eigenschaften ablesen können. Die Begriffe „Wahrscheinlichkeit“, „Zufall“ usw. erhalten aber erst dann ihren eigentlichen lebendigen Sinn, wenn wir dazu übergehen, an die Stelle einer mathematischen Anordnung der „Möglichkeiten“ das *Experiment* und die *Beobachtung* setzen. Es sei also eine sehr große Anzahl von Würfeln mit zwei Würfeln ausgeführt und ihre Augensummen notiert. Das „Kollektiv“ besteht sodann aus der Gesamtheit der möglichen Beobachtungen, die praktisch unendlich viele „Individuen“ enthält. Jede Serie von endlich vielen Würfeln, deren Länge nach dem früher Gesagten nicht allzu kurz sein soll, ist sodann als „Stichprobe“ oder als willkürlich ausgewähltes Teilkollektiv anzusehen. Jede unabhängige Wurfserie ergibt für jede der 11 Augensummenmöglichkeiten eine „*empirische Wahrscheinlichkeit*“, die sich — unter der Voraussetzung natürlich, daß die Würfel

einwandfrei gearbeitet waren und vor jedem Wurf genügend geschüttelt wurden, so daß die einzelnen Würfe voneinander unabhängig sind — von der oben bestimmten theoretischen Wahrscheinlichkeit um so weniger unterscheidet, je länger die Serien sind. Völlige Übereinstimmung braucht unter diesen Voraussetzungen bei endlich vielen Würfeln niemals einzutreten, doch lehrt die Erfahrung, daß schon verhältnismäßig kurze Serien genügen, um die ersten Dezimalstellen der Wahrscheinlichkeitszahlen zu sichern. Die theoretisch bestimmte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nennt man auch „Wahrscheinlichkeit *a priori*“, die auf Grund von Versuchen oder Stichproben, kurz durch Beobachtung bestimmte: „Wahrscheinlichkeit *a posteriori*“. Die erstere bildet den Grenzwert der letzteren bei beliebiger Vermehrung der Versuche, falls die Versuchsbedingungen mit den zur Ableitung der Wahrscheinlichkeit *a priori* benutzten Voraussetzungen streng übereinstimmen.

Die Abweichung, die bei beschränkter Versuchszahl zwischen empirischer und theoretischer Wahrscheinlichkeit besteht, führt auf den Begriff des „*Fehlers*“. Unter „Fehler“ verstehen wir die Differenz zwischen beobachtetem und wahren Wert, während wir die umgekehrte Differenz (Rechnung minus Beobachtung) als „Korrektur“ bezeichnen. Die experimentelle Wahrscheinlichkeitsbestimmung lehrt uns auch, den Unterschied zwischen zufälligen und systematischen Fehlern begrifflich festzulegen. Der Fehler einer empirischen Wahrscheinlichkeitsbestimmung ist *zufällig*, wenn das bei dem Versuch herangezogene Auswahlkollektiv ein zufälliges war — er ist *systematisch* zu nennen, wenn das Auswahlkollektiv ebenfalls systematisch war. In der Praxis haben wir es zumeist mit einer Vermischung beider Fehlerarten zu tun — es handelt sich dann um ein Auswahlkollektiv, das gewisse Werte oder Wertebereiche der Meßgröße systematisch bevorzugt. Einen solchen gemischten Fehler würde man z. B. erhalten, wenn man die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln die Augensumme s zu werfen, durch eine Versuchsreihe mit ungenau gearbeiteten Würfeln bestimmen würde.

Ein weiterer Unterschied, der gleichfalls an diesem Beispiel hervortritt, ist der zwischen *wahren* und *scheinbaren* Fehlern. In der Regel ist die Bestimmung einer Meßgröße *nur* auf empirischem Wege möglich, wir haben also, mit anderen Worten, von der Verteilungsfunktion des vollständigen Kollektivs keine unmittelbare Kenntnis, sondern können uns diese nur auf dem Umwege über Auswahlkollektive mit endlicher Individuenanzahl verschaffen, wobei die Möglichkeit beliebig häufiger Wiederholung des Versuchs besteht. Greifen wir aus dem unerschöpflichen Vorrat der naturgegebenen Möglichkeiten nacheinander n zufällige Teilkollektive heraus, die je m Individuen enthalten mögen, dann wird jedes dieser Teilkollektive eine bestimmte statistische Eigenschaft des Gesamtkollektivs mit einem gewissen *wahren* Fehler anzeigen, der aber unbekannt bleibt, weil wir ja nach Voraussetzung die

Eigenschaften des vollständigen Kollektivs nicht kennen. Wir sind dann darauf angewiesen, von unserer Erkenntnis Gebrauch zu machen, daß durch Vergrößerung des Teilkollektivs eine bessere Annäherung der Verteilungseigenschaften an die wirklichen erzielt wird. Setzen wir also an Stelle der unbekanntenen Verteilungseigenschaften des vollständigen Kollektivs die des größten (zufälligen) Auswahlkollektivs, das wir besitzen und das in dem beschriebenen Falle $N = n \cdot m$ Werte umfaßt, so ergeben sich an Stelle der wahren Fehler „scheinbare Fehler“.

Die Gesamtheit aller möglichen Fehler bildet wiederum ein Kollektiv mit bestimmten statistischen Eigenschaften, deren Ableitung Gegenstand der *Fehlertheorie* ist. In der Fehlertheorie wird insbesondere die Aufgabe gelöst, unter den allgemeinsten Voraussetzungen über die Art der Fehlerentstehung die mathematische Gestalt der Verteilungsfunktion zufälliger Beobachtungsfehler abzuleiten. Es ist hier nicht der Ort, die Ableitung des Fehlergesetzes in ihren Einzelheiten wiederzugeben und die prinzipiellen Grundlagen, auf denen sie beruht, genau zu diskutieren; es muß aber wenigstens der Weg dazu in einer solchen Form beschrieben werden, daß die vielfachen Anwendungen der Fehlerverteilungsgesetze auf die statistischen Probleme der Periodenforschung ohne Mißverständnisse möglich sind.

Alle aus endlichen Kollektiven abgeleiteten Verteilungsgesetze, demnach auch alle empirischen Verteilungsfunktionen, sind diskreter Natur, bestehen daher aus Ordinaten (Auszählungsergebnissen oder empirischen Wahrscheinlichkeiten), die endlich vielen und diskreten Argumenten als Funktion zugeordnet sind, während dies bei Kollektiven mit unendlicher Individuenanzahl nicht der Fall zu sein braucht. Dieser Unterschied wird am deutlichsten erkennbar, wenn wir ihn durch Beispiele aus der Praxis belegen. Ein endliches Kollektiv bestehe etwa aus den Augensummen von n Würfelversuchen mit zwei Würfeln. Die Verteilungsfunktion besteht dann aus 11 Ordinaten n_2, n_3, \dots, n_{12} , die die Anzahl der auf jede der 11 möglichen Augensummen entfallenden Versuchsergebnisse bezeichnen, die Wahrscheinlichkeitsfunktion aus den 11 Quotienten

$$w_2 = \frac{n_2}{n}, \quad w_3 = \frac{n_3}{n}, \quad \dots, \quad w_{12} = \frac{n_{12}}{n},$$

deren Summe 1 ist. Die Zahl der Ordinaten ist in diesem Falle naturgegeben und von der Zahl n der Versuche unabhängig, sie ändert sich auch nicht, wenn wir n über alle Grenzen wachsen lassen — in diesem Falle konvergieren lediglich die empirischen Wahrscheinlichkeiten (Homogenität der Würfel vorausgesetzt) gegen die apriorischen Werte

$$\frac{1}{36}, \quad \frac{2}{36}, \quad \frac{3}{36}, \quad \frac{4}{36}, \quad \frac{5}{36}, \quad \frac{6}{36}, \quad \frac{5}{36}, \quad \frac{4}{36}, \quad \frac{3}{36}, \quad \frac{2}{36}, \quad \frac{1}{36}.$$

Dasselbe geschieht im Prinzip, wenn das Kollektiv aus Einzelbeobachtungen eines Naturvorgangs besteht, der durch eine meßbare oder

sonstwie zahlenmäßig angebbare Eigenschaft beschrieben wird, z. B. aus Messungen des Luftdrucks oder eines anderen meteorologischen Elements am gleichen Beobachtungsort und zu verschiedenen Zeiten. Werden etwa die Messungen des Luftdrucks auf ganze Millimeter abgerundet, so enthält die Verteilungsfunktion von mm zu mm Ordinaten in einem durch die Natur des Vorgangs bestimmten Abszissenintervall, das etwa zwischen 720 und 780 mm liegt, dessen Grenzen aber nicht scharf ausgeprägt sind. Vermehrt man nun die Zahl der Beobachtungen durch Ausdehnung des Beobachtungszeitraums stark, so ist es möglich, die Dichte der Wahrscheinlichkeitsordinaten dadurch zu vergrößern, daß man die Beobachtungen nicht nur nach ganzen Millimeterintervallen, sondern nach Zehntelmillimetern auszählt. Praktisch ist man damit an eine Grenze der Intervalleinteilung angelangt, da eine genauere Messung der Luftdruckwerte (etwa auf Hundertstel von mm) aus technischen Gründen illusorisch und im übrigen auch uninteressant ist. Theoretisch könnte aber bei entsprechender Vermehrung der Beobachtungszahl und der Beobachtungsgenauigkeit eine beliebig enge Einteilung des Abszissenbereichs vorgenommen werden. Man könnte sich demnach vorstellen, daß ein ideales Kollektiv von unendlichem Umfang eine Wahrscheinlichkeitsfunktion besäße, deren Ordinaten unendlich dicht liegen. In diesem Falle würde also die Auszählung der Individuen nach Merkmalsintervallen von differentieller Breite erfolgen. Sei etwa das meßbare Merkmal (z. B. der Luftdruckwert) durch die Variable x gekennzeichnet, so würde man unter der zu x gehörigen Funktion $\varphi(x) dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür zu verstehen haben, daß ein beliebig dem Kollektiv entnommener individueller Wert seiner Größe nach in das differentielle Abszissenintervall

$$\left[x - \frac{dx}{2}, \quad x + \frac{dx}{2} \right]$$

oder, was praktisch dasselbe ist, in

$$[x, x + dx]$$

zu liegen komme. Die allen Wahrscheinlichkeitsfunktionen zukommende Bedingung, daß die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich der Einheit sein muß, würde dann in die Integralbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1 \quad (I)$$

übergehen, woraus folgt, daß die „Verteilungsfunktion“ $\varphi(x)$ integrierbar sein muß. Die Annahme, daß $\varphi(x)$ auch stetig sei, läßt sich hingegen nicht allgemein rechtfertigen, noch weniger die Annahme ihrer Differenzierbarkeit. Für die Praxis ist aber die Frage der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $\varphi(x)$ durchaus von untergeordneter Bedeutung, da ja schon die Stetigkeit des Arguments x eine Fiktion ist, die nach dem oben Gesagten bei empirischen Kollektiven niemals realisierbar ist.

In einigen Fällen ist jedoch die Annahme, daß die ideale Verteilungsfunktion eines Kollektivs stetig und sogar überall differenzierbar sei, aus Plausibilitätsgründen gerechtfertigt. Diese Annahme, in Verbindung mit anderen plausiblen Voraussetzungen, macht z. B. GAUSS bei seiner Deduktion des idealen Verteilungsgesetzes der zufälligen Fehler:

Von einer unbekanntem, aber der Messung zugänglichen Größe X seien eine große Anzahl von Messungen

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

vorgenommen worden, deren wahre Fehler

$$\varepsilon_1 = x_1 - X; \varepsilon_2 = x_2 - X; \dots, \varepsilon_n = x_n - X; \dots$$

seien. Unter der Voraussetzung, daß die Messungen voneinander unabhängig sind, keine systematischen Fehler enthalten und von gleicher Genauigkeit sind, dürfen wir — unterstützt durch mannigfache Erfahrungen — annehmen, daß das Kollektiv der wahren Fehler folgende Eigenschaften besitze:

1. Die Verteilungsfunktion der Fehler verläuft symmetrisch zu null, d. h. positive und negative Fehler gleichen Betrages sind gleich wahrscheinlich.

2. Fehler größeren Betrages sind weniger wahrscheinlich als solche geringeren Betrages. Die Verteilungsfunktion $\varphi(\varepsilon)$ besitzt also bei $\varepsilon = 0$ ein Maximum und nimmt für wachsende Fehlerbeträge gegen null ab.

Aus der gleichmäßigen Verteilung der Fehler um null folgt, daß der wahrscheinlichste Wert für die Summe endlich vieler willkürlich dem Kollektiv entnommener Fehler null ist. Das bedeutet mit anderen Worten, daß das arithmetische Mittel aus endlich vielen Beobachtungen der plausibelste Wert ist, den man aus diesen Beobachtungen für die unbekanntem Größe X erhält. Aus diesem „Prinzip des arithmetischen Mittels“ läßt sich nun die ideale Form des Fehlerverteilungsgesetzes leicht herleiten:

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ n Fehler mit den Wahrscheinlichkeiten

$$\varphi(\varepsilon_1) d\varepsilon_1, \dots, \varphi(\varepsilon_n) d\varepsilon_n,$$

so ist nach dem multiplikativen Gesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$\Phi d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_n = \varphi(\varepsilon_1) \cdot \varphi(\varepsilon_2) \dots \varphi(\varepsilon_n) d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_n$$

die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Fehlerkombination. Diese Gesamtwahrscheinlichkeit hat nach dem Obigen einen Maximalwert, wenn die Bedingung

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = 0$$

erfüllt ist.

Unter dieser Annahme muß also auch

$$\lg \Phi = \lg \varphi(\varepsilon_1) + \lg \varphi(\varepsilon_2) + \dots + \lg \varphi(\varepsilon_n)$$

ein Maximum sein, mithin, wenn für $\varphi(\varepsilon)$ der Ansatz einer differenzierbaren Funktion gemacht wird,

$$\frac{\varphi'(\varepsilon_1)}{\varphi(\varepsilon_1)} + \frac{\varphi'(\varepsilon_2)}{\varphi(\varepsilon_2)} + \dots + \frac{\varphi'(\varepsilon_n)}{\varphi(\varepsilon_n)} = 0$$

sein. Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$\frac{\varphi'(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \varphi(\varepsilon_1)} \cdot \varepsilon_1 + \frac{\varphi'(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 \varphi(\varepsilon_2)} \cdot \varepsilon_2 + \dots + \frac{\varphi'(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n \varphi(\varepsilon_n)} \cdot \varepsilon_n = 0,$$

so erkennt man, daß sie *allgemein* nur dann mit der Bedingung $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 0$ vereinbar ist, wenn

$$\frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varepsilon \varphi(\varepsilon)} \equiv k = \text{const}$$

ist. Das ist aber eine Differentialgleichung, deren Integration

$$\varphi(\varepsilon) = C \cdot e^{\frac{k}{2} \cdot \varepsilon^2}$$

ergibt: Bedenken wir noch, daß φ für wachsende $|\varepsilon|$ abnehmen soll, so muß k negativ sein; wir dürfen also die Funktion in der Form

$$\varphi(\varepsilon) = C \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

schreiben. Die Integrationskonstante C folgt aus der Bedingung (1), und zwar ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{C}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{C \sqrt{\pi}}{h} = 1,$$

so daß also die endgültige Form des „GAUSSschen Fehlerverteilungsgesetzes“

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{2}$$

lautet.

Charakteristisch für diese Verteilungsform, die man auch als die „normale“ bezeichnet, und die außer für zufällige Fehler auch für eine große Anzahl andersartiger Kollektive als idealisierte Verteilung gelten kann, ist ihre Abhängigkeit von nur einer einzelnen Konstante (h). Ist h klein, so ist der Kurvenverlauf flach; je größer h ist, um so steiler fällt die Kurve gegen null ab, bei um so kleineren Abszissen (Fehlerbeträgen) wird also praktisch der Nullwert erreicht. Je größer h ist, um so kleiner ist also der Spielraum, den die „Fehler“ erfüllen. Man bezeichnet h deswegen auch als das „Genauigkeitsmaß“ des Fehlerkollektivs.

Da nach früheren Bemerkungen alle statistischen Eigenschaften eines Kollektivs von unabhängigen Werten mit nur einer Eigenschaft durch die Gestalt der Verteilungsfunktion gegeben sind, so ergibt sich, daß alle statistischen Eigenschaften zufälliger Fehler von normaler Verteilung Funktionen von h sein müssen. So ergeben sich z. B. folgende statistische Charakteristika:

1. *Mittelwert* der Fehlerquadrate:

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2 h^2}.$$

Die Größe μ , die dem Genauigkeitsmaß h umgekehrt proportional ist, bildet ein brauchbares Maß für die Breite des Ausdehnungsbereichs der Fehler. Sie wird in der Fehlertheorie als „*mittlerer Fehler*“, in der Statistik beliebiger Kollektive allgemein als „*Streuung*“ (standard deviation) bezeichnet. Geometrisch bedeutet μ den Abstand der beiden Wendepunkte der Verteilungskurve vom Nullpunkt der Abszissenachse, also den Betrag derjenigen Abszissen, für die der zweite Differentialquotient verschwindet. Es ist nämlich

$$\frac{d^2 \varphi}{d \varepsilon^2} = \frac{2 h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2} \{2 h^2 \varepsilon^2 - 1\},$$

also in der Tat

$$\frac{d^2 \varphi}{d \varepsilon^2} = 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon = \pm \frac{1}{h \sqrt{2}} = \pm \mu.$$

2. *Statistische Momente* verschiedener Ordnung: Als statistisches Moment der Ordnung r bezeichnet man die Größe

$$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^r \varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Im Falle der GAUSSSchen Verteilung ist $m_r = 0$ für ungerade r , und für gerade r ($r = 2n$)

$$m_{2n} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{2n} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n h^{2n}}.$$

Speziell ist

$$m_0 = 1; \quad m_2 = \frac{1}{2 h^2} = \mu^2.$$

Man setzt auch oft $m_r = \mu_r'$; dann ist $\mu_2 = \mu = \sqrt{m_2}$ die Streuung.

3. *Durchschnittlicher Fehler*: Unter durchschnittlichem Fehler versteht man den Mittelwert der absoluten Fehlerbeträge, also die Größe

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| \varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Für die GAUSSSche Verteilung ergibt sich

$$\vartheta = \frac{2 h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \varepsilon \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h \sqrt{\pi}}.$$

4. *Wahrscheinlicher Fehler*: Der wahrscheinliche Fehler teilt das gesamte Fehlergebiet in zwei Teilgebiete gleicher Wahrscheinlichkeit; er ist so definiert, daß

$$\int_{-r}^{+r} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß $|\varepsilon| < r$, ebenso groß wie die für $|\varepsilon| > r$. Für das GAUSSsche Gesetz liefert die transzendente Gleichung

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-r}^{+r} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{rh} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$$

den Wert $rh = 0,476936 \dots$ bzw. $r = 0,67449 \dots \mu$. Bei Überschlagsrechnungen wird gewöhnlich der wahrscheinliche Fehler gleich $\frac{2}{3}$ des mittleren gesetzt.

5. *Maximaler Fehler*: Dieser Begriff ist einer vorurteilslosen Definition nicht zugänglich. Die ideale Fehlerverteilungsfunktion räumt sogar dem Auftreten beliebig großer Fehler eine positive, wenn auch verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit ein. Hiermit setzt sich die ideale Verteilungskurve in einen gewissen Widerspruch zur Erfahrung, die lehrt, daß Fehler von einer gewissen Größenordnung aufwärts nicht mehr vorkommen oder, wenn dies doch einmal geschehen sollte, nicht als zum Kollektiv der zufälligen Fehler gehörig betrachtet, sondern als „grobe Fehler“ ausgedeutet werden. Wo allerdings die Grenze zwischen zufälligen und groben Fehlern liegt, kann nicht mit Bestimmtheit angegeben werden, sondern muß der Beurteilung des kritischen Beobachters von Fall zu Fall überlassen bleiben. Der heuristische Begriff der „Zufalls-grenze der Fehler“ ist aber gerade im Hinblick auf seine spätere Übertragung auf Periodenkollektive so wichtig, daß es notwendig ist, ihn genauer zu betrachten.

Jedes reale Kollektiv, ob es nun endlich oder unendlich viele Individuen enthalte, ist beschränkt und enthält ein Glied (oder endlich viele Glieder) größten Betrages. Dieser größte Betrag ist aber keineswegs als eine statistische Eigenschaft des Kollektivs anzusprechen, sondern durchaus individuell, weil er sich auf ein einziges oder höchstens auf wenige Individuen stützt. Damit wird verständlich, warum die ideale Fehlerverteilungskurve für wachsende Fehlerbeträge eine asymptotische Annäherung an null zeigt, anstatt wie die reale Kurve bei endlichen Beträgen abzubrechen. Durch das asymptotische Verhalten wird lediglich dargetan, daß große Fehler (allgemein Kollektivglieder extremen Betrages) nur sporadisch auftreten, und daß die in reellen Fällen immer vorhandene tatsächliche Grenze a priori unbestimmt ist. Praktisch hat die Diskrepanz zwischen tatsächlicher und idealer Verteilung keinerlei Bedeutung, denn die Wahrscheinlichkeiten, die z. B.

auf Grund des GAUSSschen Fehlergesetzes Fehlern zukommen, die außerhalb des Bereiches eines empirischen Kollektivs mit gleichem Genauigkeitsmaß liegen, sind so klein, daß sie weit unterhalb derjenigen Grenzen liegen, die durch zahlenmäßige Rechnung noch erfaßt werden könnten. Mathematisch ausgedrückt: Das Integral

$$P(\omega) = \int_{-\omega}^{+\omega} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

ist, wenn ω von der Ordnung der maximalen Fehlerbeträge ist, von der Einheit so wenig verschieden, daß der Unterschied für die praktische Rechnung belanglos ist, also unbedenklich vernachlässigt werden kann. Allgemein gibt — für beliebige ω — das Integral $P(\omega)$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß ein beliebiger Fehler dem Betrage nach kleiner als ω sei. Ebenso ist

$$Q(\omega) = 1 - P(\omega)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $|\varepsilon| > \omega$. Als „Zufallsgrenze“ ließe sich demnach derjenige Wert ω bezeichnen, für den diese Wahrscheinlichkeit gerade noch klein genug erscheint, je nach den Ansprüchen, die im Einzelfalle gemacht werden und ziemlich verschieden sein können. Wird $\omega = k \cdot \mu = \frac{k}{h\sqrt{2}}$ gesetzt, so findet man für den Fall der GAUSSschen Verteilung

$$Q = \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_{k\mu}^{\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{k}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Die Zufallsgrenze erweist sich demnach als eine reine Zahl (k), die angibt, um ein Wievielfaches ein individueller Fehler den mittleren Fehler höchstens überschreiten darf, um noch als zufälliger Fehler angesehen zu werden. Fehler, die größer als $k\mu$ sind, werden daher als *grobe Fehler* bezeichnet werden können. Die folgende Tabelle zeigt, wie sich $P(k\mu)$

Tabelle 1.

k	P	Q	$N = \frac{1}{Q}$	k	P	Q	$N = \frac{1}{Q}$
0,2	0,15852	0,84148	1	2,2	0,97220	0,02780	36
0,4	0,31078	0,68922	1	2,4	0,98360	0,01640	61
0,6	0,45150	0,54850	2	2,6	0,99068	0,00932	107
0,8	0,57628	0,42372	2	2,8	0,99488	0,00512	195
1,0	0,68268	0,31732	3	3,0	0,99730	0,00270	370
1,2	0,76986	0,23014	4	3,2	0,99862	0,00138	725
1,4	0,83848	0,16152	6	3,4	0,99932	0,00068	1471
1,6	0,89040	0,10960	9	3,6	0,99968	0,00032	3125
1,8	0,92814	0,07186	14	3,8	0,99986	0,00014	7143
2,0	0,95450	0,04550	22	4,0	0,99994	0,00006	16667

¹ Die Zahlenwerte P sind aus E. CZUBER: Die statistischen Forschungsmethoden (Wien 1927) entnommen (Lit. 77).

mit k ändert. In einer weiteren Spalte ist $Q = 1 - P$ angegeben. Die dritte Spalte gibt den auf ganze Zahlen abgerundeten reziproken Wert von Q , der angibt, unter wieviel individuellen Fehlern dem GAUSSschen Gesetz zufolge das Auftreten *eines* Fehlers zu erwarten wäre, der den mittleren Fehler um mindestens das k -fache überschreitet.

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, daß ein Fehler, der den mittleren um das vierfache übertrifft, erst unter weit mehr als 10000 Fällen einmal zu erwarten ist, aber auch um einen zufälligen Fehler vom Betrage des *dreifachen* mittleren erwarten zu dürfen, ist ein Kollektiv von mindestens 370 Werten notwendig. Man wird also berechtigt sein, die Grenze des Zufalls je nach den Umständen bei $k = 3$ oder $k = 4$ anzusetzen oder bei einer dazwischenliegenden Stelle. Bei großem Beobachtungsmaterial ist es ratsam, die Zahl N bei der Festsetzung der Zufallsgrenze direkt heranzuziehen. Ist z. B. die Zahl der Fehler 1000, so sind Fehler vom Betrage 3,4 oder darüber weniger als einmal zufallsmäßig zu erwarten. Man wird also nicht Gefahr laufen, das Kollektiv systematisch zu verfälschen, wenn man solche Fehler als grobe betrachtet und, sofern sie wirklich auftreten, aus dem Kollektiv entfernt. Bei kleineren Kollektiven ist es aber nicht ratsam, die Zufallsgrenze unter $k = 3$ herabzusetzen, da nicht anzunehmen ist, daß in ihnen die idealen statistischen Kollektiveigenschaften, wie sie im GAUSSschen Gesetz vorausgesetzt werden, hinreichend gut verwirklicht sind.

2. Einführung des Expektanzbegriffs.

Die Überlegungen des vorigen Abschnitts sind, obwohl durchaus unvollständig, doch so weit geführt worden, daß eine erste Anwendung der dargelegten statistischen Begriffe auf periodographische Fragen möglich wird. Bevor die weitere Vertiefung der angeschnittenen allgemein statistischen Fragen, die noch notwendig sein wird, durchgeführt werden soll, mögen die speziellen Probleme der Periodenforschung, soweit sie statistischer Natur sind, wieder in den Vordergrund gerückt werden, damit der innere Zusammenhang unserer Betrachtungen mit ihrem eigentlichen Zweck gewahrt bleibt.

Der Zusammenhang, aber auch der Unterschied zwischen der statistischen und der analytischen, insbesondere periodographischen Behandlung einer Beobachtungsreihe, wird am besten durch folgende Überlegung klargestellt: Einerseits lassen sich die Glieder einer Beobachtungsreihe, also die — meist äquidistanten — Einzelbeobachtungswerte, als Individuen eines (endlichen) Kollektivs ansehen. Dabei werden die Beobachtungswerte aus ihrem zeitlichen Zusammenhang gelöst, denn für die statistischen Eigenschaften eines Kollektivs sind nur die zahlenmäßig gegebenen Bewertungen der Individuen, nicht aber ihre Reihenfolge (Numerierung) maßgebend. Andererseits kann man aber auch

willkürlich oder nach bestimmten Vorschriften die Individuen eines statistischen Kollektivs numerieren und dergestalt das Kollektiv in eine *Folge* auflösen, die sich dann äußerlich von einer „Beobachtungsreihe“ nicht unterscheidet, und auf die man rein mechanisch alle möglichen Operationen, wie z. B. auch die Harmonische Analyse, anwenden kann, falls man sich einen Erfolg davon verspricht.

Im allgemeinen ist die Verwandlung einer Beobachtungsfolge in ein Kollektiv mit der Zerstörung wesentlicher Eigenschaften verbunden, der umgekehrte Prozeß aber mit dem Aufbau fiktiver Eigenschaften, die dem Material von Natur aus nicht zukommen. Nur in einem besonderen Falle tritt dies nicht ein: dann nämlich, wenn es sich um eine Folge oder ein Kollektiv von zufälligen Fehlern oder von solchen Werten handelt, die ähnliche Unabhängigkeitseigenschaften wie zufällige Fehler besitzen. Fehler, d. h. Abweichungen einer gemessenen Größe von dem wahren oder dem wahrscheinlichsten Wert dieser Größe, lassen sich zweifellos als Funktion der Zeit ansehen, da sie zu bestimmten Zeiten und somit in bestimmter Reihenfolge gemacht worden sind. Sofern es sich aber um *zufällige* Fehler handelt (und ohne bessere Kenntnis wird man dies *a priori* immer annehmen dürfen), ist ihre Reihenfolge oder Numerierung trotzdem für alle Betrachtungen, die sich mit ihnen anstellen lassen, ohne Belang; ihre Eigenschaften erschöpfen sich also — soweit sie überhaupt Interesse beanspruchen — mit den statistischen Eigenschaften des von ihnen gebildeten Kollektivs. Eine Folge von zufälligen Fehlern läßt sich daher auch beliebig umnummerieren, was der Rückverwandlung des Kollektivs in eine beliebige Reihenfolge entsprechen würde, ohne daß sie damit ihren Charakter als zufällige Fehler verlieren würden. Wesentlich bei dieser Umnummerierung ist allerdings, daß diese wiederum als Zufallsprodukt in Erscheinung tritt, daß also jede mögliche Umnummerierung, d. h. jede Permutation der ursprünglichen Fehlerfolge die gleiche Wahrscheinlichkeit für sich habe.

Nun sind aber unter allen diesen Permutationen auch solche vorhanden, die einen *systematischen Gang* der Fehlerfolge zeigen, z. B. solche, in denen die Fehler ihrer Größe nach geordnet auftreten, oder solche, die in bestimmten Rhythmen positive und negative Werte miteinander abwechseln lassen, also ausgesprochen periodischen Charakter haben. Trotzdem muß eine derartige Folge, obwohl ein unbefangener Beobachter sie als systematisch ansprechen würde, als Zufallsprodukt angesehen werden, sofern sie wirklich — etwa durch Auslosung — aus dem Kollektiv der Permutationen zufällig herausgegriffen wurde. Dies paradoxe Ergebnis ist, wie die meisten Paradoxa, nur ein scheinbares und findet seine Erklärung in der auch durch die Erfahrung nachprüfbareren Tatsache, daß willkürliche Zusammenstellungen unabhängiger Größen unter Umständen auch „durch Zufall“ regelmäßige, gesetzmäßig anmutende Konstellationen zeigen können, wenn auch die

Wahrscheinlichkeit, daß dies eintritt, meist sehr gering sein wird. (So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kartenspiel nach gründlicher Durchmischung sich als nach Farben geordnet erweist, außerordentlich klein, aber immerhin nicht gleich null.)

Diese Betrachtung lehrt also, daß bestimmte systematische Eigenschaften von Beobachtungsreihen, z. B. Periodizitäten, nicht unbedingt Ausdruck eines dem Beobachtungsobjekt innewohnenden Naturgesetzes zu sein brauchen (wenn nicht gerade zwingende Gründe für eine solche Annahme vorhanden sind), sondern, daß sie auch möglicherweise das eigenartige Produkt eines reinen Zufalls sein können. Man wird daher, falls die oben genannten zwingenden Gründe für das Zustandekommen einer periodischen Struktur einer Beobachtungsfolge fehlen oder a priori unbekannt sind, aus der analytischen Feststellung einer Periodizität niemals mit voller Sicherheit auf ihre „Realität“ im physikalischen Sinne schließen dürfen, sondern immer nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, die den Spielraum des Zufalls beim Zustandekommen des fraglichen Ergebnisses gebührend berücksichtigt. Diesen Spielraum nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie aus den vorgegebenen Bedingungen zu berechnen oder wenigstens abzuschätzen, ist die Hauptaufgabe, deren Lösung der statistischen Periodenforschung vorbehalten ist.

Der einfachste Fall dieses in seiner Allgemeinheit sehr verwickelten Problems liegt dann vor, wenn die Beobachtungsfolge den Charakter zufälliger Fehler besitzt, oder wenn dies wenigstens a priori, d. h. bis zur einwandfreien Feststellung des Gegenteils, angenommen werden darf. So kommt es bei der Diskussion einer Fehlerfolge, die dem Anblick zufolge keine systematischen Eigenschaften (kurz „Gänge“ genannt) zu haben scheint, sehr häufig vor, daß nachträglich (a posteriori) die Existenz eines periodischen Ganges vermutet wird, der aber durch stark streuende zufällige Fehlerbestandteile verdeckt wird. Die vermutete Periode wird sich bei der Analyse der Folge durch eine besonders große Amplitude an der entsprechenden Stelle des Spektrums verraten. Die statistische Betrachtungsweise lehrt sodann, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Amplitude von derartiger Größenordnung durch Zufall erwartet werden durfte. Ist diese Zufallswahrscheinlichkeit sehr klein, so werden wir geneigt sein, den Zufall als alleiniges Entstehungsmoment auszuschließen und eine außerhalb des Zufalls liegende Ursache, d. h. in diesem Falle ein Naturgesetz oder einen periodischen systematischen Fehler, mit um so größerer Wahrscheinlichkeit als gegeben ansehen.

Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Amplituden bestimmter Größe wird nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch das Verhältnis der Zahl aller dem Entstehen solcher Amplituden günstigen Fälle zu der Gesamtzahl aller vorhandenen Möglichkeiten überhaupt gegeben. Die Zahl aller vorhandenen Möglichkeiten ließe sich nach dem

oben Gesagten etwa durch die Zahl aller Permutationen der gegebenen n Einzelfehler angeben, also durch $n!$. Das entspricht aber eigentlich nicht den tatsächlich vorliegenden Voraussetzungen und ließe sich allenfalls nur dann rechtfertigen, wenn n eine sehr große Zahl ist. Die *Umordnung* eines endlichen Kollektivs ergibt nämlich nur einen Teil der in der Natur der Sache begründeten Variationsmöglichkeiten der Fehlerreihenfolge. Sie umfaßt nur solche Fehlerkombinationen, in denen die Fehler ihrer Größe nach in einem ganz bestimmten (durch das Kollektiv einer konkreten Beobachtungsfolge gegebenen) Mischungsverhältnis auftreten, während eigentlich das Verhältnis der Zahl der Fehler von bestimmter Größe zur Gesamtzahl nur als *Wahrscheinlichkeit* auftritt. Anders ausgedrückt: Die verschiedenen Umordnungen einer gegebenen Fehlerfolge entstehen durch Auslosung aus dem Kollektiv, indem man diesem nacheinander alle Einzelwerte entnimmt, ohne sie wieder zurückzulegen. Der Vorgang, der zu einer konkreten Fehlerreihe in Wirklichkeit führt, ist dagegen einer Auslosung aus einem (gegebenenfalls unendlichen) Kollektiv der Fehlermöglichkeiten zu vergleichen, wobei der ausgeloste und notierte Wert nach jeder „Ziehung“ wieder in das Kollektiv zurückgegeben wird, so daß also alle Fehler voneinander unabhängig sind, und somit jeder Beobachtung die gleichen Fehlerchancen zukommen. Bei dieser letzteren Art der Fehlerauslosung ist also z. B. auch die Möglichkeit berücksichtigt, daß zufällig alle Fehler den gleichen Wert zeigen, während dies bei der Umordnung ausgeschlossen ist.

Vorausgesetzt, daß wir berechtigt sind, eine vorliegende Beobachtungsreihe a priori in bezug auf ihre statistischen und sonstigen Eigenschaften als gleichwertig mit einer Folge zufälliger Fehler von bestimmtem idealem Verteilungsgesetz anzusehen, läßt sich das Problem, die Wahrscheinlichkeit von Perioden mit bestimmten Amplituden zu ermitteln, im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung streng lösen. Der Einfachheit halber wollen wir zunächst annehmen, daß die ideale Verteilung des Kollektivs, aus dem die Einzelwerte der Reihe durch Auslosung entnommen seien, die Form des GAUSSschen Gesetzes habe. Die Berechtigung dieser Annahme läßt sich in jedem konkreten Falle nachprüfen, indem man die Verteilung des endlichen Auswahlkollektivs, das durch die Glieder der Beobachtungsreihe gegeben ist, mit der Form des idealen Gesetzes vergleicht. Damit die Hauptbedingung — gleiche Wahrscheinlichkeit für positive und negative Werte — erfüllt sei, ist es notwendig, die Beobachtungswerte vorher auf ihr arithmetisches Mittel zu beziehen, also anstatt der Originalbeobachtungen ihre Abweichungen von ihrem arithmetischen Mittel zu benutzen. Seien diese Abweichungen

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

und läßt sich die Verteilung der y_v mit genügender Genauigkeit durch eine GAUSSsche Verteilung mit dem Genauigkeitsmaß h ersetzen, so

wird die Wahrscheinlichkeit, daß n Beobachtungen nacheinander in die differentiellen Intervalle

$$\left[y_1 - \frac{dy_1}{2}, y_1 + \frac{dy_1}{2} \right], \dots, \left[y_n - \frac{dy_n}{2}, y_n + \frac{dy_n}{2} \right]$$

fallen, nach dem multiplikativen Gesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$\Phi(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \varphi(y_1) \dots \varphi(y_n) dy_1 \dots dy_n$$

sein, wobei allgemein

$$\varphi(y_r) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 y_r^2}$$

sein soll. Aus dieser Form der komplexen Wahrscheinlichkeit geht zugleich, auf Grund des kommutativen Gesetzes der Multiplikation, hervor, daß beliebige Umordnungen der Beobachtungsreihe von gleicher Wahrscheinlichkeit sind.

Nun sei aus jeder möglichen y -Kombination das r -te FOURIER-Glied nach den bekannten Formeln

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^n y_\nu \cos \alpha_r \nu \\ b_r &= \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^n y_\nu \sin \alpha_r \nu \end{aligned} \quad \left(\alpha_r = \frac{2\pi r}{n} \right)$$

berechnet. Um also die zweidimensionale Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daß den Komponenten a_r und b_r bestimmte numerische Werte zufallen, gilt es, aus der Gesamtheit der durch die n -dimensionale Verteilung $\Phi(y_1, \dots, y_n)$ gegebenen Möglichkeiten dasjenige Teilgebiet auszusondern, das diesem Ergebnis günstig ist. Die Rechnung (s. Lit. 267) ergibt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit den Ausdruck

$$W(a_r, b_r) da_r db_r = da_r db_r \cdot \frac{n h^2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} n h^2 (a_r^2 + b_r^2)}. \quad (3)$$

Anstatt der rechtwinkligen Koordinaten (a_r, b_r) lassen sich durch eine einfache Transformation dieses Ausdrucks die Polarkoordinaten (H_r, ψ_r) einführen. Da

$$a_r = H_r \cos \psi_r; \quad b_r = H_r \sin \psi_r$$

und die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_r}{\partial H_r} & \frac{\partial a_r}{\partial \psi_r} \\ \frac{\partial b_r}{\partial H_r} & \frac{\partial b_r}{\partial \psi_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi_r & -H_r \sin \psi_r \\ \sin \psi_r & H_r \cos \psi_r \end{vmatrix} = H_r,$$

mithin

$$da_r db_r = H_r dH_r d\psi_r$$

ist, so ergibt sich

$$W(H_r, \psi_r) dH_r d\psi_r = \frac{dH_r d\psi_r}{2\pi} n h^2 H_r e^{-\frac{1}{2} n h^2 H_r^2}$$

als Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen einer Amplitude H_r und einer Phase ψ_r . Da uns im Augenblick nur die Verteilung der Amplituden interessiert, integrieren wir diesen Ausdruck über alle ψ_r , die einen Bereich $[0, 2\pi]$ überdecken. Es ergibt sich also

$$W(H_r) dH_r = n h^2 H_r e^{-\frac{1}{2} n h^2 H_r^2} dH_r,$$

mithin als Verteilungsfunktion der Amplituden über das Gebiet $[0, +\infty]$

$$W(H_r) = n h^2 H_r e^{-\frac{1}{2} n h^2 H_r^2}. \quad (4)$$

Man erkennt aus dieser Formel, daß die Verteilung der Amplituden von der Versuchsfrequenz α_r unabhängig ist. Im Spektrum einer Reihe zufälliger Fehler sind also Perioden gleicher Amplitude für alle Spektralgebiete gleich wahrscheinlich. Dies Ergebnis war auch von vornherein zu erwarten, da ja beliebige Umordnungen der Beobachtungswerte gleich wahrscheinlich sind, und, wie wir von früher her wissen, der rechnerische Zusammenhang zwischen Versuchsperioden verschiedener Ordnung auf einer bestimmten Art der Umordnung der Beobachtungswerte beruht.

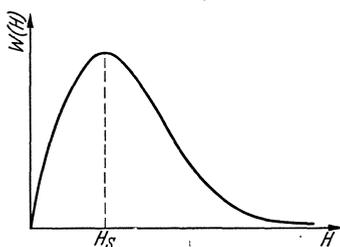


Abb. 18.
Normale Amplitudenverteilung.

Aus der geometrischen Gestalt der Amplitudenverteilung (s. Abb. 18) erkennt man ferner, daß mit wachsender Amplitude die Häufigkeit zunächst bis zu einem Maximum (Scheitelwert) zu und dann asymptotisch gegen null abnimmt. Als statistische Eigenschaften des Kollektivs der zufälligen Amplituden sind als besonders wichtig hervorzuheben:

1. *Scheitelwert* (häufigste Amplitude): Man erhält ihn als Lösung der Gleichung

$$\frac{dW(H)}{dH} = n h^2 e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2} (1 - n h^2 H^2) = 0.$$

Der Scheitelwert H_S ergibt sich also aus:

$$H_S^2 = \frac{1}{n h^2} = \frac{2\mu^2}{n}; \quad H_S = \mu \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

2. *Durchschnittliche Amplitude*: Sie entspricht dem einfachen Mittelwert aller möglichen Amplituden

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(H) &= \int_0^{\infty} H W(H) dH = n h^2 \int_0^{\infty} H^2 e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2} dH \\ &= \sqrt{\frac{2}{n h^2}} \cdot \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \mu \sqrt{\frac{\pi}{n}}. \end{aligned}$$

3. *Mittelwert der Intensitäten* (Amplitudenquadrate).

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(H^2) &= \int_0^\infty H^2 W(H) dH = n h^2 \int_0^\infty H^3 e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2} dH = \frac{2}{n h^2} \cdot \int_0^\infty t e^{-t} dt \\ &= \frac{2}{n h^2} = \frac{4 \mu^2}{n}. \end{aligned}$$

Die Quadratwurzel aus diesem Mittelwert kann man als „mittlere Amplitude“ oder als den quadratischen Mittelwert aller möglichen Amplituden bezeichnen. Die mittlere Amplitude ist demnach

$$\bar{H} = \sqrt{\mathfrak{M}(H^2)} = \frac{2 \mu}{\sqrt{n}}.$$

Es gelten ferner die Ungleichungen:

$$H_S < \mathfrak{M}(H) < \bar{H}.$$

In ähnlicher Weise, wie dies im vorigen Abschnitt für die Beträge von zufälligen Fehlern selbst geschehen ist, wird es nun möglich sein, auch für das Auftreten von FOURIER-Amplituden bestimmter Größenordnung ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Zufallsmaß und damit auch eine plausible *Zufallsgrenze* zu schaffen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Reihe von n aus einem Kollektiv von GAUSSscher Verteilungsform willkürlich entnommenen Werten eine FOURIER-Amplitude (beliebiger Ordnung) ergibt, die größer als eine vorgegebene Zahl S ist, berechnet sich zu

$$\int_S^\infty W(H) dH = n h^2 \int_S^\infty H e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2} dH = \int_{\frac{1}{2} n h^2 S^2}^\infty e^{-t} dt = e^{-\frac{1}{2} n h^2 S^2}.$$

Benutzen wir nun als Maßstab für die Zahl S die durchschnittliche oder die mittlere Amplitude, setzen wir also $S = s \cdot \mathfrak{M}(H)$ oder $S = s \cdot \bar{H}$, so ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für das Überschreiten der s -fachen durchschnittlichen Amplitude

$$w_s = e^{-\frac{1}{4} \pi s^2}$$

und für das Überschreiten der s -fachen mittleren Amplitude

$$\bar{w}_s = e^{-s^2},$$

beide Male also eine Funktion von s allein. Nebenstehende Tabelle gibt den numerischen Wert dieser beiden Funktionen für verschiedene Werte von s an.

Es zeigt sich also, daß die Wahrscheinlichkeit, die durchschnittliche oder mittlere Amplitude um das 3–4fache zu übertreffen, bereits sehr klein ist. Wird also in einem konkreten Falle eine dies Maß überschreitende

S	e^{-s^2}	$e^{-\frac{1}{4} \pi s^2}$
0,5	0,778804	0,821726
1,0	0,367880	0,454938
1,5	0,105400	0,170820
2,0	0,018316	0,043214
2,5	0,001930	0,007382
3,0	0,000123	0,000850
3,5	0,000005	0,000066
4,0	10^{-7}	0,000003

Amplitude dennoch erzielt, so haben wir mit einer gewissen Sicherheit die Berechtigung, dies Ergebnis *nicht* für ein Zufallsprodukt zu halten, sondern andere, außerhalb des Zufalls liegende Ursachen dafür verantwortlich zu machen — in diesem Falle also die Existenz einer *Periodizität*. A. SCHUSTER, der diese Betrachtungen zuerst durchführte, hat für den als Vergleichsmaßstab benutzten Mittelwert der Amplituden die Bezeichnung „*Expektanz*“ eingeführt. Er hat ursprünglich darunter den linearen Mittelwert, also

$$E_1 = \mathfrak{M}(H) = \mu \sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad (5)$$

verstanden. Später hat man aus Gründen, die in der Folge noch verständlich gemacht werden sollen, der Definition der Expektanz als des quadratischen Mittelwertes der Amplituden:

$$E_2 = \sqrt{\mathfrak{M}(H^2)} = \frac{2\mu}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

den Vorzug gegeben.

3. Beliebige Verteilungsfunktionen. Die BRUNSSche Reihe.

Aus gewissen allgemeinen Voraussetzungen über die Natur der zufälligen Fehler hatten wir die GAUSSSche Fehlerverteilungsfunktion abgeleitet. Die Erfahrung bestätigt, daß sich auch die Verteilungsfunktionen endlicher Kollektive von Beobachtungsgrößen sehr häufig dieser Normalform anschmiegen, falls für die Entstehung dieser Größen ähnliche Voraussetzungen geltend gemacht werden können, und zwar dann um so mehr, je größer die Zahl der erfaßbaren individuellen Werte ist. Oft sind aber diese Voraussetzungen nicht erfüllt; es ergeben sich dann empirische Verteilungskurven, die von der normalen Form mehr oder weniger deutlich abweichen. Wir wollen dabei stets annehmen, daß die Beobachtungsgrößen selbst als Abweichungen von ihrem arithmetischen Mittelwert gegeben sind. Die Verteilungsfunktion $V(x)$ ist dann den beiden Bedingungen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx = 1 \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x V(x) dx = 0 \quad (8)$$

unterworfen; die erste besagt lediglich, daß die Ordinaten $V(x)$ so normiert sind, daß sie das Verhältnis der auf das Intervall $[x, x + dx]$ entfallenden Individuenzahl zum Gesamtumfang des Kollektivs, also die „*Wahrscheinlichkeitsdichte*“ angeben, während die zweite Bedingung das Verschwinden des arithmetischen Mittels garantiert. Darüber hinaus kann aber $V(x)$ jede beliebige Gestalt haben, abgesehen von der in der Natur der Sache liegenden Einschränkung, daß Werte großen

Betrages selten sein sollen, $V(x)$ also außerhalb eines den Nullpunkt einschließenden Intervalls $[-\omega_2, +\omega_1]$ verschwindet. An Stelle dieser Forderung läßt sich auch die andere verwenden, daß $V(x)$ sich mit wachsendem Betrage von x (eventuell für positive und negative x verschieden schnell) der Abszissenachse asymptotisch nähern soll. Es wird dann verlangt, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{-\omega_2} V(x) dx; \quad \int_{\omega_1}^{\infty} V(x) dx$$

für bestimmte Werte der Schranken ω_1 und ω_2 so klein sind, daß sie gegen das Gesamtintegral (7) unbedenklich vernachlässigt werden dürfen. Diese aus dem GAUSSschen Fehlergesetz bekannte Formulierung erleichtert die analytische Darstellung und Annäherung empirischer Verteilungskurven ganz wesentlich.

Oft sind die Abweichungen der Verteilung von der normalen Form zwar unverkennbar, aber doch nicht, größer, als daß sich nicht eine GAUSSsche Verteilung als erste Annäherung mit Erfolg verwenden ließe. Die gesuchte Entwicklung von $V(x)$ soll also eine Form haben, in der die GAUSSsche Funktion als erstes Annäherungsglied erscheint. Wir knüpfen daher an die in (I, 7) gegebene Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach HERMITESchen Polynomen an, die für diesen Zweck geeignet ist.

Sei $f(u)$ eine beliebige Funktion von u , für die

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(u) du$$

existiert, so läßt sich nach (I, 7) die Entwicklung

$$f(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2} \{a_0 + a_1 H_1(u) + a_2 H_2(u) + \dots\}$$

ansetzen, wobei $H_\mu(u)$ die HERMITESchen Polynome und die a_μ noch zu bestimmende Entwicklungskoeffizienten bedeuten, deren numerische Werte sich aus den Normalgleichungen in der Form

$$a_\mu = \frac{1}{2^\mu \mu! \sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) H_\mu(u) e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

ergeben. Durch die Festsetzung

$$u = h(x - A); \quad du = h dx$$

werde nun die neue Variable x eingeführt, während die Konstanten h und A noch zur freien Verfügung bleiben sollen. Die Verteilungsfunktion $V(x)$ denken wir uns nun aus $f(u)$ durch die Operation

$$V(x) = f(u) e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

entstanden. Die Entwicklung für $V(x)$ wird also die Form

$$V(x) = e^{-u^2} \{a_0 + a_1 H_1(u) + a_2 H_2(u) + \dots\}$$

haben, und die Koeffizienten a_μ werden mittels der Vorschriften

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) H_0(u) \, du = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) \, dx$$

$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) H_1(u) \, du = \frac{h^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2(x-A) V(x) \, dx$$

$$a_2 = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) H_2(u) \, du = \frac{h}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \{4h^2(x-A)^2 - 2\} V(x) \, dx$$

.....

zu berechnen sein.

Führen wir nun die beiden Bedingungen (7) und (8) ein, so erhalten wir

$$a_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

$$a_1 = \frac{h^2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x V(x) \, dx - A \right\} = -A \cdot \frac{h^2}{\sqrt{\pi}}.$$

Setzen wir also

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} x V(x) \, dx = 0,$$

d. h. für A den arithmetischen Mittelwert der Kollektivbestandteile, so wird $a_1 = 0$. Der Koeffizient zweiter Ordnung erhält unter diesen Umständen die einfachere Form

$$a_2 = \frac{h}{4\sqrt{\pi}} \left\{ 2h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 V(x) \, dx - 1 \right\};$$

er wird ebenfalls verschwinden, wenn der quadratische Mittelwert der Kollektivgrößen der Bedingung

$$\mu_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 V(x) \, dx = \frac{1}{2h^2}$$

genügt. μ_2 ist aber diejenige statistische Kollektivkonstante, die wir allgemein als „*Streuung*“ (bei Fehlerkollektiven als „mittleren Fehler“) bezeichnet haben. Die Gleichung $a_2 = 0$ ist demnach befriedigt, wenn wir die noch verfügbare Konstante h so bestimmen, daß

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}},$$

mithin h sich aus der Streuung des Kollektivs in der gleichen Weise berechnet, wie das Genauigkeitsmaß der zufälligen Fehler aus dem mittleren Fehler.

Mit der Festsetzung $A = 0$, $h = \frac{1}{\mu \sqrt{2}}$ lassen sich dann die übrigen Entwicklungskoeffizienten leicht berechnen.

Die Entwicklung unserer Verteilungsfunktion hat nunmehr die Gestalt

$$V(x) = e^{-h^2 x^2} \{ a_0 + a_3 H_3(hx) + a_4 H_4(hx) + \dots \}.$$

H. BRUNS hat diese Entwicklung in eine etwas andere Form gebracht, und zwar mit Rücksicht darauf, daß die HERMITESchen Funktionen sich durch die Ableitungen der normalen Verteilungsfunktion ausdrücken lassen, die in vielen Tafelsammlungen¹ zugänglich sind.

Setzt man

$$\varphi(u) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \quad \text{und} \quad \varphi^{(r)}(u) = \frac{d^r \varphi(u)}{d u^r},$$

so erhält man die BRUNSSche Reihe in der Form

$$V(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} + \frac{D_3}{2^2} \varphi^{(3)}(hx) + \frac{D_4}{2^3} \varphi^{(4)}(hx) + \frac{D_5}{2^4} \varphi^{(5)}(hx) + \dots$$

mit den Konstanten D_3, D_4, \dots . Bei solchen Verteilungen, deren Form verhältnismäßig wenig von der des GAUSSschen Gesetzes abweicht, ist die Art der Abweichung meist schon durch die beiden ersten Glieder höherer Ordnung, also durch die Konstanten D_3 und D_4 , genügend gekennzeichnet. Die Art der Korrektionsglieder 3. und 4. Ordnung wird durch die in Abb. 19 wiedergegebene typische Form der Funktionen $\varphi^{(3)}(u)$ und $\varphi^{(4)}(u)$ angezeigt. Man erkennt leicht, daß ein Zusatzglied der 3. Ordnung eine Verschiebung des Verteilungsmaximums nach rechts oder links bewirkt, je nach dem Vorzeichen von D_3 . Man bezeichnet daher D_3 auch als „*Schiefe*“. Ebenso bewirkt das Glied 4. Ordnung eine Überhöhung oder Einsenkung bzw. Abflachung des Verteilungsmaximums. Die Konstante D_4 heißt daher auch „*Exzeß*“.

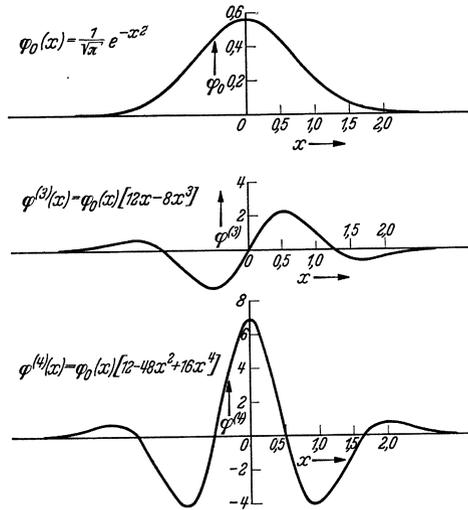


Abb. 19. Fehlerverteilungsfunktion $\varphi_0(x)$, für $h = 1$, und ihre dritte und vierte Ableitung.

¹ Siehe z. B. JAHNKE-EMDE: Funktionentafeln. Wien: B. G. Teubner 1933.

In Ergänzung der Betrachtungen des vorigen Abschnitts haben wir uns nunmehr die Frage vorzulegen, welche Änderungen die Theorie der *Expektanz* erfährt, wenn an Stelle der GAUSSschen Verteilung der Kollektivgrößen eine beliebig gestaltete Verteilungsfunktion eingeführt wird. Dies für die Periodenstatistik außerordentlich wichtige und grundlegende Problem ist durch die Arbeiten verschiedener Autoren hinreichend geklärt worden, und zwar dahin, daß die Expektanz als der quadratische Mittelwert der Amplituden, also in der Form E_2 , von den höheren statistischen Momenten, also auch von den BRUNSSchen Konstanten D_3, D_4, \dots völlig unabhängig ist. Dagegen sind sowohl E_1 als auch die durch die Wahrscheinlichkeit w_s für das Überschreiten der s -fachen Expektanz festzulegende Zufallsgrenze eine Funktion dieser Konstanten. Es zeigt sich aber, daß für wachsendes n die aus dieser Abhängigkeit sich ergebenden Korrektionsglieder gegen null streben, daß also die Verteilung der Amplituden gegen die aus dem GAUSSschen Gesetz folgende Verteilung konvergiert, wenn die Zahl der (a priori als statistisch unabhängig anzusehenden) Beobachtungswerte, aus denen diese Amplituden berechnet werden, beliebig wächst.

In der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie (s. z. B. Lit. 130) wird gezeigt, daß diesem asymptotischen Gesetz eine sehr viel allgemeinere Gültigkeit zukommt, als dies aus dem bisher Gesagten erkennbar ist. Hier soll wenigstens der Gedankengang verfolgt werden, der zu den oben angedeuteten Ergebnissen der Expektanztheorie führt. Im Falle der Gültigkeit des GAUSSschen Verteilungsgesetzes für das Kollektiv der statistisch unabhängigen Elementarwerte (Beobachtungen) erhielten wir die Verteilung der Amplituden — unabhängig von der Ordnung der FOURIER-Periode — in der Normalform (4). Diese Verteilung unterscheidet sich von der primären (GAUSSschen) Verteilung grundsätzlich dadurch, daß die Einzelwerte wesentlich positive Größen darstellen. Der Beweis für die obigen Behauptungen wird nun darauf hinauskommen, zu zeigen, daß die Amplitudenverteilung bei beliebiger Form des ursprünglichen Kollektivs sich bei einigermaßen großem n nur wenig von dieser Normalform unterscheidet und im $\lim n = \infty$ gegen sie konvergiert. Um dies zu zeigen, wird es nützlich sein, eine der BRUNSSchen Entwicklung entsprechende Reihendarstellung auch für solche einseitig asymptotischen Verteilungsfunktionen anzugeben, in der dann das erste Glied von der Gestalt (4) sein muß. In (I, 7) haben wir bereits als geeignete Entwicklungsform einseitiger Verteilungsfunktionen die nach den LAGUERRESchen Funktionen erkannt, und zwar sahen wir, daß sich jede empirische Funktion, für die

$$\int_0^{\infty} f^2(u) \, du$$

existiert, in die Reihe

$$f(u) = e^{-\frac{1}{2}u} \{b_0 + b_1 L_1(u) + b_2 L_2(u) + \dots\}$$

entwickeln ließ, wobei $L_\mu(u)$ die LAGUERRESchen Polynome bedeuteten, die Koeffizienten b_μ aber durch die Gleichungen

$$b_\mu \cdot (\mu!)^2 = \int_0^\infty f(u) L_\mu(u) e^{-\frac{u}{2}} du$$

bestimmbar waren.

Nehmen wir jetzt an, daß die Verteilungsfunktion $W(H)$ einer gleichfalls positiven und mit u durch die Beziehung

$$u = \frac{1}{2} n h^2 H^2$$

verbundenen Variablen H aus $f(u)$ durch Multiplikation mit $e^{-\frac{u}{2}}$ hervorgehe, so können wir schreiben:

$$\begin{aligned} W(H) dH &= e^{-\frac{1}{2}u} f(u) du \\ &= e^{-u} \{b_0 + b_1 L_1(u) + b_2 L_2(u) + \dots\} du \\ &= n h^2 H e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2} \left\{ b_0 + b_1 L_1\left(\frac{1}{2} n h^2 H^2\right) + \dots \right\} dH \end{aligned}$$

und erhalten für die Koeffizienten allgemein

$$b_\mu = \frac{1}{(\mu!)^2} \cdot \int_0^\infty W(H) L_\mu\left(\frac{1}{2} n h^2 H^2\right) dH$$

und insbesondere

$$\begin{aligned} b_0 &= \int_0^\infty W(H) dH = 1 \\ b_1 &= \int_0^\infty W(H) \left\{ 1 - \frac{1}{2} n h^2 H^2 \right\} dH = 1 - \frac{1}{2} n h^2 \int_0^\infty H^2 W(H) dH. \end{aligned}$$

Andererseits ist es möglich, die Entwicklung von $W(H)$ direkt aus dem schon früher benutzten Ansatz für $\Phi(y_1, \dots, y_n)$ abzuleiten, indem für die $\varphi(y_\nu)$ eine BRUNSSche Reihe mit den Konstanten $h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}$ und D_3, D_4, \dots angesetzt wird. Diese Rechnung ist von STUMPF (Lit. 267) ausgeführt worden und führt, wie zu erwarten, auf eine Entwicklung von der obigen Form und mit Koeffizienten b_μ , die sich als Funktionen der BRUNSSchen Konstanten schreiben lassen. Und zwar ergibt sich insbesondere

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0.$$

Der Vergleich beider Formen der Koeffizienten b_μ ermöglicht es, die statistischen Konstanten der Verteilung $W(H)$ direkt als Funktionen der BRUNSSchen Konstanten abzuleiten; insbesondere ergibt sich aus $b_1 = 0$:

$$0 = 1 - \frac{1}{2} n h^2 \int_0^\infty H^2 W(H) dH = 1 - \frac{1}{2} n h^2 \mathfrak{M}(H^2),$$

also die (quadratische) Expektanz unabhängig von der Verteilung der Originalbeobachtungen zu

$$E_2 = \sqrt{\mathfrak{M}(H^2)} = \sqrt{\frac{2}{n h^2}} = \frac{2\mu}{\sqrt{n}},$$

wie früher (6). Die übrigen b -Koeffizienten streben mit wachsendem n gegen null, wodurch die Tatsache der fortschreitenden Annäherung von $W(H)$ an die durch das erste Entwicklungsglied bedingte Normalform (4)

$$W_0(H) = n h^2 H e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2}$$

in weitem Umfange gewährleistet ist. Aus dieser Assimilierung an die Normalform folgt aber ohne weiteres, daß auch die Betrachtungen über die Zufallsgrenze der Amplituden ihre Gültigkeit behalten, wenn nur die Zahl der unabhängigen Beobachtungen (n), aus denen die Amplituden gebildet werden, einigermassen groß ist.

4. Zweidimensionale Verteilungen. Die „Punkt wolke“.

Die bisher behandelte Anwendung der Statistik auf Ergebnisse der Periodenrechnung bezog sich ausschließlich auf die Amplituden. Da nämlich die Phase einer errechneten Periode (FOURIER-Glied) wesentlich von dem willkürlich wählbaren Anfangspunkt der Zeitskala abhängt, die Amplitude dagegen nicht, so ist klar, daß die Phasen bei der Beantwortung der Frage nach der Realität von Perioden nur eine untergeordnete Rolle spielen. In der Tat haben wir gesehen, daß die Größe einer errechneten Amplitude, bzw. das Verhältnis derselben zur Expektanz für die statistische Beurteilung der Realität der zugehörigen „Welle“ ausschlaggebend ist.

Erst, wenn wir dazu übergehen, die Analysenergebnisse mehrerer Teilbereiche des Beobachtungszeitraums getrennt zu untersuchen und miteinander zu vergleichen, gewinnt auch die Phase eine entscheidende Bedeutung für den Gang der Untersuchung, wie die Diskussion der *Phasendiagramme* ergeben hat. Wir haben im vorigen Kapitel zur geometrischen Veranschaulichung der Ergebnisse der Periodogramm-analyse den Begriff des *Periodogrammvektors* eingeführt, dessen Betrag durch die Amplitude, und dessen Richtung durch die Phase der zugehörigen Schwingung gegeben war. Der Periodogrammvektor war mithin

gegeben durch die Polarkoordinaten (H, φ) oder die rechtwinkligen Koordinaten (a, b) seines Endpunktes oder auch durch einen Punkt

$$\mathfrak{P} = a + i b = H e^{i \varphi}$$

in der komplexen \mathfrak{P} -Ebene.

Waren nun die Beobachtungsreihen willkürlich aus einem Kollektiv von Einzelwerten zusammengestellt, das eine GAUSSsche Verteilung aufweisen möge, so ergab sich für die Verteilung der Punkte (a, b) in der Koordinatenebene eine normale Form (3)

$$W(a, b) = \frac{n h^2}{2 \pi} e^{-\frac{1}{2} n h^2 (a^2 + b^2)},$$

die eine zum Koordinatenanfangspunkt radial-symmetrische, glockenförmige Fläche darstellt. Eine endliche Anzahl dieser Verteilung willkürlich entnommener Punkte ergibt eine Punktmenge, deren Dichte erwartungsgemäß in der Nähe des Verteilungsmaximums, also des Koordinatenanfangs, am größten ist und mit wachsender Entfernung vom Koordinatenanfang abnimmt. Die tatsächliche Verteilung dieser endlichen Punktmenge wird, immer unter der Voraussetzung ihrer willkürlichen Entnahme aus der Gesamtheit der Möglichkeiten, mit wachsender Anzahl der durch die Glockenfläche gegebenen idealen Verteilung immer ähnlicher werden — ist das nicht der Fall, so ist das als ein sicheres Zeichen dafür anzusehen, daß die Auswahl systematisch beeinflusst worden ist. J. BARTELS hat für eine solche Zusammenstellung von (a, b) -Punkten die ungemein anschauliche Bezeichnung: „Punktwolke“ eingeführt.

Eine zufällige Punktwolke wird sich demnach radial-symmetrisch um den Anfangspunkt anordnen und (eventuell mit wenigen Ausnahmen) innerhalb eines Kreises von bestimmtem Radius um den Koordinatenanfangspunkt enthalten sein. Sie wird etwa den gleichen Anblick bieten, wie die Schußlöcher auf einer Schießscheibe, die ein Schütze nach einer Serie von N Schüssen erhalten hat, vorausgesetzt, daß ein systematischer Zielfehler nicht vorliegt. Die Ausdehnung der Punktwolke wird in diesem Falle ein Maß für die Zielsicherheit des Schützen abgeben.

Stellt die Punktwolke, wie oben, das Ergebnis von N unabhängigen Berechnungen von Periodogrammpunkten aus je n Werten dar, so läßt sich als Maß für die Ausdehnung derselben die mittlere, durchschnittliche oder wahrscheinliche Entfernung der Punkte vom Anfangspunkt betrachten. Die mittlere Entfernung oder der mittlere „Radius“ der Punktwolke ergibt sich als der quadratische Mittelwert der Amplituden, dessen idealer Wert die quadratische Expektanz (6)

$$E_2 = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{2 \mu}{\sqrt{n}}$$

ist, während die lineare Expektanz (5)

$$E_1 = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \mu \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

dem Durchschnittswert der Amplituden oder dem „durchschnittlichen Radius“ entspricht. Unter dem „wahrscheinlichen Radius“ verstehen wir (in Anlehnung an den Begriff des wahrscheinlichen Fehlers) den Radius desjenigen Kreises um den Anfangspunkt, der so beschaffen ist, daß ebenso viele Punkte der Wolke in seinem Innern wie außerhalb liegen. Der ideale Wert des wahrscheinlichen Radius H_w wird demnach durch die Gleichung

$$\int_0^{H_w} W(H) dH = n h^2 \int_0^{H_w} H e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2} dH = \frac{1}{2}$$

gegeben sein. Um diese Gleichung zu lösen, setzen wir

$$t = \frac{1}{2} n h^2 H^2; \quad dt = n h^2 H dH; \quad t_w = \frac{1}{2} n h^2 H_w^2$$

und erhalten

$$\int_0^{t_w} e^{-t} dt = 1 - e^{-t_w} = \frac{1}{2}; \quad t_w = \lg 2$$

und demnach

$$H_w^2 = \frac{2}{n h^2} \cdot \lg 2 = E_2^2 \cdot \lg 2; \quad H_w = E_2 \sqrt{\lg 2} = 0,8326 \cdot E_2.$$

Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen des vorigen Abschnitts ergaben, daß zufällige Punkte außerhalb eines Kreises mit dem 3fachen Expektanzwert als Radius sehr selten und außerhalb eines solchen mit dem 4fachen mittleren Radius so gut wie gar nicht vorkommen.

Eine sehr wichtige Eigenschaft der Punktwolken, die unter den obigen Vorbedingungen zustande gekommen sind, ist die, daß ihr Radius — gleichviel, ob es sich dabei um den durchschnittlichen, mittleren oder wahrscheinlichen handeln möge — umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus n ist, also mit wachsendem n wie $\frac{1}{\sqrt{n}}$ abnimmt. Wird also die Anzahl der zur Berechnung jedes Periodogrammvektors benutzten Beobachtungswerte (wie immer unter der Voraussetzung willkürlicher Entnahme aus dem ursprünglichen Kollektiv) fortlaufend erhöht, so schrumpft die Punktwolke immer mehr um den Koordinatenanfang als Konvergenzzentrum zusammen. Führt dieser Vorgang auf ein Schrumpfungszentrum, das außerhalb des Koordinatenanfangs liegt, oder vollzieht sich die Schrumpfung langsamer als nach dem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz, so ist dies das sicherste Zeichen dafür, daß die statistischen Eigenschaften der Punktmenge von den vorausgesetzten wesentlich verschieden sind.

Angenommen z. B., die Beobachtungsfolge (von der wir a priori annehmen mußten, daß sie regellos, also auch unperiodisch sei) enthalte eine unter zufälligen Schwankungen verborgene persistente Periodizität in Gestalt einer reinen Sinuswelle von bestimmter Periode ϕ . Es werde nun die sehr lange Beobachtungsreihe in Abschnitte von der Länge $r\phi$ (r ganz) zerlegt und jeder dieser Abschnitte nach der r -ten Harmonischen analysiert. Die so entstehenden Periodogrammvektoren setzen sich dann aus einem von dem periodischen Anteil der Beobachtungsreihe herrührenden *konstanten* Vektor und einem zufälligen Vektor, der dem üblichen Verteilungsgesetz unterworfen ist, zusammen. Die Eintragung der berechneten Vektorendpunkte (a, b) in ein ebenes Koordinatensystem wird demnach eine Punktwolke, gegebenenfalls eine solche von normalen Verteilungseigenschaften ergeben, deren Mittelpunkt (Schwerpunkt) aber nicht, wie früher, mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, sondern mit dem Endpunkt des konstanten Vektors. Bei Vermehrung der Zahl r und damit auch von $n = r\phi$ wird die Punktwolke um diesen außerhalb des Koordinatenanfangs liegenden Punkt nach dem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz zusammenschrumpfen. Die Polarkoordinaten des Schrumpfungszentrums liefern dann Amplitude und Phase der persistenten Periodizität von der Wellenlänge ϕ .

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß in dieser Gegenüberstellung der normalen Punktwolke mit dem zuletzt beschriebenen Fall, vom Standpunkt der praktischen Statistik aus gesehen, zwei wesentlich verschiedene Vorgänge enthalten sind, die nicht miteinander verwechselt werden dürfen. Die normale Punktwolke ergab sich, unserem Gedankengang zufolge, als Bild eines idealen Kollektivs von Periodogrammpunkten, das aus dem Ausgangskollektiv normal verteilter „Beobachtungswerte“ abgeleitet wurde, indem N Gruppen von je n Individuen dem Ausgangskollektiv willkürlich entnommen und nach einer beliebigen Versuchswelle analysiert wurden. Unter der Voraussetzung normaler Verteilung des Ausgangskollektivs ergab sich dabei eine normale Punktwolke, deren mittlerer Radius (Expektanz genannt) eine einfache Funktion

$$E = \frac{2\mu}{\sqrt{n}}$$

der Streuung μ des Ausgangskollektivs und der Zahl n war. Der Kreis mit dem Radius $3E$ ließ sich sodann mit hinreichender Berechtigung als äußere Begrenzung der Punktwolke und damit als „Zufallsgrenze“ deuten, da die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt der Wolke zufällig außerhalb dieses Kreises zu liegen kam, als verschwindend gering anzusehen war. Die eigentliche Anwendung dieser Überlegungen beginnt aber erst, wenn eine konkrete Beobachtungsreihe von n Einzelwerten mit bestimmter (zeitlicher) Reihenfolge vorliegt. Diese Einzelwerte y_1, \dots, y_n , die als Abweichungen von ihrem arithmetischen Mittel gegeben

sein mögen, zeigen, unabhängig von ihrer Reihenfolge, eine statistische Verteilung ihrer Größe nach und eine Streuung, die durch

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\sum y_v^2}{n}}$$

gegeben ist. Die Analyse der Beobachtungsreihe ergibt sodann für eine bestimmte Versuchswelle einen Periodogrammpunkt (a, b) . Unser erster Schluß war nun offenbar folgender: *Wäre* die Beobachtungsreihe durch *willkürliche* Auswahl von n Werten aus einem Kollektiv un-

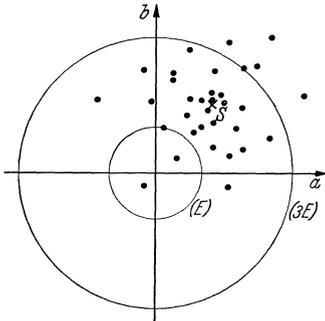


Abb. 20. Punktwolke (Periodogrammvektoren aus unabhängigen Intervallen einer Beobachtungsreihe). S Schwerpunkt der (empirischen) Punktwolke, (E) Expektanzkreis der idealen Verteilung, (3 E) Grenzkreis der idealen Verteilung.

abhängiger Werte von normaler Verteilung und der Streuung $\mu = \mu_0$ entstanden, so wäre mit einer an Gewißheit grenzenden Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß der Punkt (a, b) in das Innere des Zufallskreises fällt. Liegt (a, b) dennoch außerhalb dieses Kreises, so ist die Annahme wahrscheinlichkeitstheoretisch berechtigt, daß den Beobachtungen ein periodisches Bildungsgesetz zugrunde liegt. — Anders ist hingegen die Schlußweise im zweiten Fall. Hier haben wir nicht aus theoretischen Erwägungen heraus die statistischen Konstanten einer idealen Punktwolke konstruiert, sondern haben die einzelnen Punkte der Wolke aus einem vorliegenden Beobachtungsmaterial nach einer ganz bestimmten Vorschrift ge-

bildet. Die entstehende Wolke ist daher wesentlich mit denjenigen individuellen Eigenschaften der Beobachtungsreihe behaftet, die durch die vorgeschriebenen Rechenoperationen nicht zerstört werden, in dem beschriebenen Falle also mit den Eigenschaften, die sich aus dem Vorhandensein einer persistenten Periodizität von der Länge der Versuchswelle ergeben müßten. Nur, wenn das vorgelegte Beobachtungsmaterial eine persistente Periode von der fraglichen Länge *nicht* enthält, wird die berechnete Punktwolke ihrer Lage und Verteilung nach mit dem idealen Periodogrammkollektiv übereinstimmen, soweit dies überhaupt von einer endlichen Punktmenge erwartet werden darf.

Die Zweckmäßigkeit der Bildung solcher empirischer Punktwolken zur Feststellung der Existenz einer persistenten Periode liegt auf der Hand. Allerdings ist diese Methode nur anwendbar, wenn das Beobachtungsmaterial sehr umfangreich ist, so daß eine Zerlegung in eine genügend große Anzahl genügend großer, sich nicht überdeckender Teilbereiche möglich ist. Es ist nun noch die statistische Theorie dieser Punktwolken mit der Theorie der Expektanz zu vergleichen und in sie einzuordnen. In Abb. 20 ist als Beispiel eine Punktwolke von N Periodogrammpunkten gezeichnet, die aus N unabhängigen Teilbereichen von

der Länge n gewonnen sein sollen. Um den Nullpunkt ist der Expektanzkreis und der Grenzkreis mit dem Radius $3 \cdot E(n)$ gezeichnet, der die ideale Punktwolke enthält. Wie man sieht, fällt der größte Teil der berechneten Periodogrammpunkte in den Grenzkreis hinein. Das würde also (in diesem speziellen Fall) besagen, daß — mit wenigen Ausnahmen — die Analyse der Teilbereiche Ordinaten ergeben hat, die — jede für sich — im Sinne der Expektanztheorie als zufällig angesprochen werden müßten. Wenn wir insbesondere einen bestimmten Punkt herausgreifen und für den Augenblick annehmen, daß die übrigen Punkte nicht bekannt seien, so würde sich mit sehr großer Wahrscheinlichkeit die Amplitude als so klein herausstellen, daß die Realität einer Periode von der fraglichen Länge wahrscheinlichkeits-theoretisch nicht gewährleistet werden könnte. Wir hätten also einen der in der Praxis sehr häufig vorkommenden Fälle vor uns, daß die wirklich vorhandene Periodizität durch unperiodische Bestandteile (Fehler, Störungen) so sehr überlagert wird, daß ihre Verifizierung nicht gelingt. Selbst wenn in einem Einzelfalle die Wirkung der unperiodischen Bestandteile auf die berechneten Periodogrammkomponenten in ihrer Summe verschwindet, also der berechnete Punkt in den Mittelpunkt der Wolke oder in seine unmittelbare Nähe fällt, der Periodogrammvektor also nach Betrag und Richtung die wahre Periode genau oder mit großer Annäherung darstellt, ist es möglich, daß das Expektanzkriterium versagt — dann nämlich, wenn, wie in der Figur, der Mittelpunkt der Wolke ebenfalls in das Innere des Zufallskreises fällt. Andererseits ergibt sich die Merkwürdigkeit, daß diejenigen Punkte der Wolke, die in das Äußere des Zufallskreises fallen, diese Tatsache nur dem Umstand verdanken, daß die Resultante der unperiodischen Störungen *zufällig* in die gleiche oder eine ähnliche Richtung fällt, wie der Vektor der wahren Periode. Allerdings wird durch das tatsächliche Vorhandensein einer Periodizität die Möglichkeit einer solchen zufälligen Verstärkung der Amplitude wesentlich vergrößert, so daß man trotz dieses günstigen Zufalls das Ergebnis als empirische Bestätigung einer vermuteten Periode werten darf. Man ist sogar berechtigt, die aus diesem zufällig so günstig liegenden Punkte folgende *Phase* innerhalb eines gewissen Spielraums als die der vermuteten Periode anzusehen, während man in bezug auf die Amplitude annehmen darf, daß der berechnete Wert eher zu groß als zu klein ist.

Alles in allem kann man sagen, daß selbst das völlige Fehlen einer durch das Expektanzkriterium gesicherten Periodizität in einem beschränkten Abschnitt einer Beobachtungsreihe noch kein Beweis für das Fehlen eines persistenten periodischen Bestandteils überhaupt ist, da immer die Möglichkeit besteht, daß in dem betrachteten Abschnitt diese Periode durch ungünstige Verteilung zufälliger Fehler oder sonstiger Störungen zufällig kompensiert wird. Eine Entscheidung über die

Frage nach Existenz oder Nichtexistenz einer Periode wird sich daher erst dann ermöglichen lassen, wenn die Analysenergebnisse einer genügend großen Zahl von Beobachtungsabschnitten vorliegen, mit anderen Worten, wenn eine genügend dichte Punktwolke vorhanden ist. Sei die Versuchsperiode p und die Länge der einzelnen Abschnitte $n = rp$, so läßt sich die Konstruktion der Punktwolke von N Punkten aus N Abschnitten mit insgesamt $Nn = Nr p$ Beobachtungen auch durch eine Einzelanalyse des gesamten Beobachtungsbereichs nach einer FOURIER-Welle von der Ordnung Nr ersetzen. Diese Analyse liefert sodann, wie unmittelbar einzusehen ist, als Periodogramm den Schwerpunkt der Wolke selbst als nunmehr einziges empirisches Prüfungsobjekt. Zur Entscheidung, ob dieses Ergebnis nunmehr wahrscheinlichkeitsgemäß als Beweis für das Vorhandensein der Periode p gewertet werden darf, dient sodann das Expektanzkriterium für Reihen von der Zahl Nn . Da wir aber wissen, daß die Expektanz wie die reziproke Quadratwurzel der Anzahl abnimmt, wird der Radius des Zufallskreises \sqrt{N} -mal so klein sein, wie der für die Beobachtungsanzahl n gültige. Die Punktwolke wird also dann die Realität einer Periode mit genügender Sicherheit anzeigen, wenn ihr Schwerpunkt außerhalb eines Kreises mit dem Radius

$$\frac{6\mu}{\sqrt{Nn}}$$

um den Anfangspunkt des Koordinatensystems liegt.

Man sieht also, daß die Theorie der Punktwolke zwangsläufig wieder auf den alten Expektanzbegriff zurückführt. Ihre Einführung wäre also, wenigstens unter der Annahme idealer Verhältnisse, kein besonderer Gewinn; ihr Vorzug ist aber die große Anschaulichkeit, mit der sie die reichlich abstrakten statistischen Überlegungen dieser Art zu illustrieren vermag. Wir werden daher auch im folgenden immer wieder auf dies Anschauungsmittel zurückgreifen.

Ihrem Ursprung gemäß ist die Punktwolke als das statistische Analogon zu den im vorigen Abschnitt durchgeführten analytischen Betrachtungen über Periodogrammvektoren anzusehen. Wir hatten auch dort eine Zerlegung der Beobachtungsreihe in Teilreihen vorgenommen, die allerdings — eben des analytischen Charakters der Untersuchungen zufolge — sich auch überdecken, ja sogar durch stetige Intervallverschiebung auseinander hervorgehen durften. Das Ergebnis war — unter Voraussetzung des Vorhandenseins persistenter Perioden — die bekannte, durch Überlagerung von Kreisbewegungen entstehende Epizykloide. Im Falle der Überdeckung einer periodischen Funktion durch starke unregelmäßige Schwankungen erscheinen in diesem geometrischen Bild die aus unabhängigen Teilintervallen hervorgehenden Epizykloidenpunkte durch Störungen zufälliger Art verfälscht. Ist, wie

auch oben angenommen wurde, der periodische Teil der Beobachtungsfunktion lediglich durch eine einzige, mit der Versuchswelle genau übereinstimmende Periode in diesem Bild vertreten, so ergibt sich die Punktwolke, die sich um den Endpunkt des konstanten Periodogrammvektors herum gruppiert, und deren Streuung gleich der Streuung der um ihren periodischen Bestandteil verminderten Beobachtungsfolge ist. Je geringer diese übrigbleibende Streuung ist, desto kleiner wird der Umfang der Punktwolke sein. Ist nun die Versuchswelle von der wahren Periode ein wenig verschieden, so kreist, wie wir wissen, der analytische Periodogrammpunkt auf einem „Deferenten“ um den Koordinatenanfang. Bei Überlagerung durch zufällige Störungen wird in diesem Falle die „Punktwolke“ auf dem Deferenten mitgeführt, sie wird sich in mehr oder weniger großer Breite über die Bahn verteilen, die der analytische Punkt beschreibt. Ist der Unterschied zwischen wahrer und Versuchsperiode sehr gering und somit der analytische Punkt auf dem Deferenten während des ganzen verfügbaren Beobachtungszeitraums nur ein kurzes Stück vorgeschritten, so äußert sich dieser Umstand oft nur in einer elliptischen Verzerrung der Punkt- wolke mit tangentialer Richtung der großen Achse. Andererseits kann auch während des Gesamtzeitraums eine Schwankung im Betrage der Schwingungsamplitude aufgetreten sein, die entweder durch die besondere Natur des Schwingungsvorganges bedingt und auch unregelmäßig sein kann, oder die, wie (III, 6) gezeigt wurde, auch durch Zusammenwirken zweier benachbarter Schwingungen entstehen kann, deren Frequenzen im Spektrum zur Versuchsfrequenz symmetrisch liegen. In solchen Fällen werden wir eine Verzerrung der Punkt- wolke in radialer Richtung konstatieren. Durch das Zusammenwirken beider Ursachen (oder andersartiger Ursachen mit ähnlicher Wirkung) kann eine elliptische Deformation der Punkt- wolke in beliebiger Richtung zustande kommen. Natürlich kann die Verzerrung infolge einer „Mitführung“ auch beliebig andere Formen annehmen, z. B. kann bei vollem Umlauf des Deferenten eine ringwulstförmige Verteilungsfläche entstehen. Es wird aber in diesem Falle stets möglich sein, die Entstehungs- art dieser Punktverteilung richtig zu ermitteln, da ja die Punkte dieser „Wolke“ nicht nur durch ihre örtliche Verteilung in der Ebene, sondern auch durch die zeitliche Aufeinanderfolge der Teilintervalle, aus denen sie hervorgegangen sind, also durch eine bestimmte Numerierung unterschieden sind. In diesem Falle wird sich also erweisen, daß die Punkte nicht willkürlich über den Ringwulst verteilt sind, sondern daß eine statistische lineare Abhängigkeit zwischen ihrer Nummer und ihrer Phase besteht. Diese statistische Beziehung wird erst dann bis zur Unkenntlichkeit verwischt werden, wenn die eigentliche (erst durch Mitführung verzerrte) Punkt- wolke so ausgedehnt ist, daß sie weit über den Koordinatenanfang hinübergreift.

5. Elliptische Verteilungen.

Im vorigen Abschnitt ist gezeigt worden, daß elliptische Verteilungen von Periodogrammpunkten unter Umständen Anzeichen für eine systematische Eigenschaft der Beobachtungen sind. Sie können aber auch aus rein statistischen Gründen entstehen. Aus den Überlegungen des Abschnitts 2 ging hervor, daß die Verteilung $W(a, b)$ sich streng ableiten läßt, sobald die n -dimensionale Verteilungsfunktion

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

einer Wertegruppe (y_1, y_2, \dots, y_n) gegeben ist. Statistische Unabhängigkeit der y_v und normale Verteilung derselben vorausgesetzt, ergab sich unter der Annahme, daß

$$\sum_{\nu=1}^n \cos^2 \nu \alpha = \sum_{\nu=1}^n \sin^2 \nu \alpha = \frac{n}{2}; \quad \sum_{\nu=1}^n \cos \nu \alpha \sin \nu \alpha = 0 \quad (9)$$

gesetzt werden konnte (Versuchswelle = FOURIER-Periode), die radial-symmetrische Form (3)

$$W(a, b) = \frac{n h^2}{2 \pi} e^{-\frac{1}{2} n h^2 (a^2 + b^2)}.$$

Solange die übrigen Voraussetzungen beibehalten werden, kann also eine Abweichung von dieser Form nur dann zustande kommen, wenn die Winkel $\alpha \nu$, also die Phasen der Versuchswelle, nicht gleichförmig über den Bereich $[0, 2\pi]$ verteilt sind. Das ist z. B. der Fall, wenn die Versuchswelle im gewählten Analysenintervall nicht ganzzahlig enthalten ist, also nicht mit einer der FOURIER-Wellen des Analysenintervalls zusammenfällt. Es ergibt sich sodann anstatt (9)

$$\sum_{\nu=1}^n \cos^2 \nu \alpha = \sum \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \nu \alpha) = \frac{n}{2} + \frac{\sin n \alpha}{2 \sin \alpha} \cos (n+1) \alpha = \frac{n}{2} + \varepsilon = R \cdot \frac{n}{2}$$

$$\sum_{\nu=1}^n \sin^2 \nu \alpha = \sum \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \nu \alpha) = \frac{n}{2} - \frac{\sin n \alpha}{2 \sin \alpha} \cos (n+1) \alpha = \frac{n}{2} - \varepsilon = S \cdot \frac{n}{2}$$

$$\sum_{\nu=1}^n \cos \nu \alpha \sin \nu \alpha = \sum \frac{1}{2} \sin 2 \nu \alpha = \frac{\sin n \alpha}{2 \sin \alpha} \sin (n+1) \alpha = T \cdot \frac{n}{2} \quad (\varepsilon, T \neq 0)$$

und die weitere Auswertung des Ausdrucks $W(a, b)$ führt auf

$$W(a, b) = \frac{n h^2}{2 \pi \sqrt{RS - T^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} n h^2 \frac{a^2 S - 2 a b T + b^2 R}{RS - T^2}}, \quad (10)$$

der in die alte symmetrische Form übergeht, wenn $R = S = 1$ und $T = 0$ wird. Da nach Definition

$$R = 1 + \frac{1}{n} \sum \cos 2 \nu \alpha; \quad S = 1 - \frac{1}{n} \sum \cos 2 \nu \alpha; \quad T = \frac{1}{n} \sum \sin 2 \nu \alpha, \quad (11)$$

so erkennt man leicht, daß R , S und T um die Werte 1 bzw. 0 um so enger schwanken, je größer die Ordnungszahl der Versuchswelle ist, also je mehr Wellen auf das Versuchsintervall gehen.

Die Form (10) kann als die Normalform einer elliptischen Verteilung angesehen werden, wobei die Konstanten h , R , S , T nunmehr beliebige Bedeutung haben können. Die Bezeichnung „elliptisch“ ist darauf zurückzuführen, daß die Linien gleicher Verteilungsdichte die Form

$$a^2 S - 2 ab T + b^2 R = \text{const}$$

haben, also Ellipsen darstellen, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfang liegt. Eine einfache Rechnung ergibt für den Positionswinkel der Hauptachsen (γ) die Gleichung

$$\text{tg } 2\gamma = \frac{2 T}{R - S}.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} T &= P \sin 2\gamma \\ \frac{R - S}{2} &= P \cos 2\gamma, \end{aligned}$$

so ergibt sich für die auf Hauptachsen transformierte Ellipsenschar

$$x^2 \left(\frac{R + S}{2} - P \right) + y^2 \left(\frac{R + S}{2} + P \right) = \text{const},$$

woraus man für die Exzentrizität e die Bestimmungsformel

$$e^2 = \frac{2 P}{\frac{R + S}{2} + P}$$

ableitet.

Soll die Verteilungsformel zur Grundlage von Expektanzbetrachtungen dienen, so können zwei verschiedene Wege eingeschlagen werden, je nachdem, ob man auf die Verschiedenheit der Verteilung der Periodogrammvektoren ihrer Phase nach Rücksicht nehmen will oder nicht. Der letztere Fall wird dann gegeben sein, wenn die Elliptizität gering und die Lage der Hauptachsen unsicher ist, oder wenn man aus anderen Gründen lediglich nach dem statistischen Mittelwert der *Amplituden* sucht. Die Rechnung erfolgt dann so, daß man zunächst durch die Transformation

$$\begin{aligned} a &= H \cos \psi; & b &= H \sin \psi \\ da db &= H dH d\psi \end{aligned}$$

aus (10) die Verteilung nach Polarkoordinaten (Amplituden und Phasen) bildet.

Man erhält zunächst

$$W(H, \psi) dH d\psi = \frac{n h^2}{2\pi} \cdot \frac{H dH d\psi}{\sqrt{RS - T^2}} e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2 F(\psi)}, \quad (12)$$

wobei

$$F(\psi) = \frac{S \cos^2 \psi - T \sin 2\psi + R \sin^2 \psi}{RS - T^2}$$

eine durch die Verteilungskonstanten R , S , T bedingte Funktion der Phase ψ bedeutet.

Die weitere Rechnung (siehe Lit. 267, S. 20—22) ergibt schließlich:

$$E^2 = \int_0^{\infty} H^2 W(H) dH = \frac{R+S}{n h^2}$$

als den von der Phase unabhängigen mittleren Wert der Expektanz.

Eine sehr wichtige Schlußfolgerung vermögen wir aus dieser einfachen Formel sogleich zu ziehen: Im Falle unserer Ausgangsbetrachtungen hatten R und S die speziellen Werte (11), und es war daher $R + S = 2$. Benutzen wir also in einer Periodogrammanalyse Versuchswellen, die mit keiner FOURIER-Periode übereinstimmen, so ergibt sich unter Voraussetzung statistischer Unabhängigkeit der Beobachtungswerte zwar eine mehr oder weniger elliptische Verzerrung der Verteilung der Periodogrammpunkte, der *mittlere* Expektanzbetrag erfährt aber keine Veränderung.

Kommt es uns nun darauf an, bei einer normalen elliptischen Verteilung die *Abhängigkeit der Expektanz von der Phase* in Betracht zu ziehen, so haben wir die Amplitudenwahrscheinlichkeit für jeden unendlich schmalen Sektor der Periodogrammebene zu bilden, der zwischen den Strahlen mit den Richtungen ψ und $\psi + d\psi$ eingeschlossen ist. Die Gesamtheit der in diesem Sektor enthaltenen Amplituden besitzt die aus (12) folgende von ψ abhängige Verteilung

$$V_{\psi} dH = \frac{d\psi}{2\pi} \cdot \frac{n h^2 H dH}{\sqrt{RS - T^2}} e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2 F(\psi)}$$

Die Zahl der „möglichen Fälle“ ist mithin durch das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} V_{\psi} dH &= \frac{d\psi}{2\pi} \frac{n h^2}{\sqrt{RS - T^2}} \int_0^{\infty} H e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2 F(\psi)} dH \\ &= \frac{d\psi}{2\pi} \cdot \frac{1}{F(\psi) \sqrt{RS - T^2}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{d\psi}{2\pi} \cdot \frac{1}{F(\psi) \sqrt{RS - T^2}} \end{aligned}$$

gegeben, während die Zahl der für das Eintreffen einer Amplitude zwischen H und $H + dH$ günstigen Fälle

$$V_{\psi} dH$$

beträgt. Der Vergleich zwischen beiden ergibt die für Periodogrammvektoren von der Richtung ψ gültige Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$W_{\psi}(H) = n h^2 H F(\psi) e^{-\frac{1}{2} n h^2 H^2 F(\psi)},$$

die nunmehr, wie der Vergleich mit der normalen Amplitudenverteilung (4)

ergibt, von der gleichen mathematischen Form ist, wie diese. Es ist lediglich an Stelle von h^2 der neue Ausdruck

$$h_\psi^2 = h^2 \cdot F(\psi)$$

einzuführen. Das „Genauigkeitsmaß“ erweist sich also längs verschiedener Radien als verschieden.

Daß die Expektanzbetrachtungen für jeden ψ -Sektor auf die normalen Formeln führen, ist nach dem obigen ohne weiteres einzusehen. Die Expektanz als Funktion der Phase genügt demnach der Beziehung

$$E_\psi^2 = \frac{2}{n h^2 F(\psi)} = \frac{2}{n h^2} \frac{R S - T^2}{S \cos^2 \psi - T \sin^2 \psi + R \sin^2 \psi};$$

$$\begin{aligned} \text{da } S \cos^2 \psi - T \sin^2 \psi + R \sin^2 \psi &= \frac{R+S}{2} - \frac{R-S}{2} \cos 2\psi - T \sin 2\psi \\ &= \frac{R+S}{2} - P \cos 2(\psi - \gamma), \end{aligned}$$

wobei

$$P^2 = \left(\frac{R-S}{2}\right)^2 + T^2 = \left(\frac{R+S}{2}\right)^2 - (R S - T^2)$$

und

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2T}{R-S}$$

gesetzt wurde, erhält man nach kurzer Umformung:

$$E_\psi^2 \left(1 - \frac{2P}{R+S} \cos 2(\psi - \gamma)\right) = \frac{2}{n h^2} \frac{R+S}{2} \left(1 - \left(\frac{2P}{R+S}\right)^2\right).$$

Beziehen wir die rechtwinkligen Komponenten der Expektanz auf die Hauptachsen, setzen wir also

$$E_\psi \cos(\psi - \gamma) = \xi, \quad E_\psi \sin(\psi - \gamma) = \eta,$$

so ergibt sich als Normalform der Expektanzellipse, mit $\varkappa = \frac{2P}{R+S}$,

$$\xi^2 (1 - \varkappa) + \eta^2 (1 + \varkappa) = \frac{2}{n h^2} \cdot \frac{R+S}{2} (1 - \varkappa^2)$$

oder, wenn wir die oben ermittelte „mittlere Expektanz“ durch

$$\bar{E}^2 = \frac{2}{n h^2} \cdot \frac{R+S}{2}$$

einführen:

$$\frac{\xi^2}{\bar{E}^2 (1 + \varkappa)} + \frac{\eta^2}{\bar{E}^2 (1 - \varkappa)} = 1. \tag{I3}$$

Als „Zufallsgrenze“ oder als die Begrenzungslinie der elliptischen Punkt- wolke ergibt sich dann die im Maßstab $s : 1$ vergrößerte Expektanzellipse, wobei etwa $s = 3$ gesetzt werden kann.

Die Bezeichnung dieser das elliptische Kollektiv charakterisierenden Ellipse als „Expektanzellipse“ ist nur dann sinnvoll, wenn das Kollektiv die Gesamtheit der Möglichkeiten a priori zur Bildung der Periodogrammvektoren darstellt. Wir wollen in diesem Falle immer von einem „idealen Kollektiv“ reden, im Gegensatz zu realen Konstruktionen, die

durch ein mehr oder weniger umfangreiches, aber immer endliches empirisches Material dargestellt werden. Solche realen Kollektive (Punktwolken) können, wie wir gesehen haben, oft sehr erheblich von dem idealen Kollektiv abweichen, zu dem man sie ihrer a priori zu übersehenden allgemeinen statistischen Beschaffenheit zufolge (als willkürliche Auswahl) rechnen müßte. Eine solche Abweichung wird eben immer dann festzustellen sein, wenn die Auswahl, entgegen unserer Kenntnisse a priori, einen systematischen Charakter hat, z. B. dann, wenn eine persistente Periodizität vorlag, deren Existenz dann a posteriori aus der beobachteten Abweichung des realen vom idealen Kollektiv vermöge des Expektanzkriteriums feststellbar ist. Hieraus geht aber hervor, daß die Bezeichnung „Expektanzellipse“ wohl beim idealen Kollektiv einen Sinn hat, falls dies als elliptisch erkannt wird, nicht aber ohne weiteres bei einem realen, sondern höchstens dann, wenn dieses als empirische Annäherung an die idealen Verhältnisse gelten kann. Trotzdem kann die statistische Struktur einer empirischen Punktwolke von elliptischen Verteilungseigenschaften durch eine Ellipse von der Form (13) hinreichend beschrieben werden; man wird in diesem Falle die allgemeinere Bezeichnung „mittlere Ellipse“ anstatt „Expektanzellipse“ gebrauchen. Die Expektanzellipse ist demnach die mittlere Ellipse eines idealen elliptischen Kollektivs.

Die Aufgabe, die mittlere Ellipse einer Punktwolke zu bestimmen, gehört dem Problemkreis der Entwicklung empirischer Funktionen an. Sie bildet das zweidimensionale Analogon zu der Entwicklung einer eindimensionalen Verteilungsfunktion in eine BRUNSSsche Reihe, deren Hauptglied von der Gestalt der normalen GAUSSschen Verteilungsfunktion war. Um nicht zu sehr ins einzelne zu gehen, müssen wir darauf verzichten, die Entwicklung zweidimensionaler Verteilungen explizit durchzuführen, und uns mit der plausiblen Feststellung begnügen, daß die normale elliptische Verteilung in einer solchen (orthogonalen) Entwicklung als Hauptglied erscheint. Die Orthogonalität der Entwicklung bewirkt die Unabhängigkeit der Rechenoperationen, die zur Bestimmung der Verteilungskonstanten verschiedener Ordnung führen — wir dürfen daher stets, auch wenn die reale Verteilung nur sehr angenähert als normal elliptisch angesehen werden kann, zur Bestimmung der sich dem tatsächlichen Verlauf am besten anschmiegenden elliptischen Verteilung, also auch zur Berechnung der mittleren Ellipse, die gleichen Formeln benutzen, die für die normale Verteilung maßgebend waren.

Im Falle einer normalen elliptischen Verteilung (10)

$$\frac{da db n h^2}{2\pi \sqrt{RS - T^2}} e^{-\frac{1}{2} n h^2 \frac{S a^2 - 2 T a b + R b^2}{RS - T^2}}$$

erhält man durch Integration die Mittelwerte von a^2 , ab und b^2 , wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(a^2) = \sigma_a^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 W(a, b) da db = \frac{R}{n h^2} \\ \mathfrak{M}(ab) = \sigma_{ab} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} ab W(a, b) da db = \frac{T}{n h^2} \\ \mathfrak{M}(b^2) = \sigma_b^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b^2 W(a, b) da db = \frac{S}{n h^2}. \end{aligned}$$

Nach dem oben Gesagten werden also auch aus einem endlichen Kollektiv von Wertepaaren (a, b) die Konstanten der mittleren Ellipse aus den Mittelwerten

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N a_\nu^2; \quad \sigma_{ab} = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N a_\nu b_\nu; \quad \sigma_b^2 = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N b_\nu^2$$

in der Form

$$R = n h^2 \sigma_a^2; \quad T = n h^2 \sigma_{ab}; \quad S = n h^2 \sigma_b^2$$

erhalten werden, vorausgesetzt, daß der Koordinatenanfang im Schwerpunkt der Wolke liegt. Die Größen σ_a und σ_b bezeichnen wir sinngemäß als partielle Streuungen, während wir die Deutung der statistischen Konstante σ_{ab} späteren Überlegungen vorbehalten wollen.

Der einer mittleren Expektanz entsprechende „mittlere Radius“ der Punktwolke erhält nach Einführung der σ -Konstanten die einfache Form

$$\bar{E} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}.$$

Die Neigung der Hauptachsen $(\gamma; \gamma + \frac{\pi}{2})$ ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2 \sigma_{ab}}{\sigma_a^2 - \sigma_b^2},$$

die halben Achsen selbst haben die Länge

$$\bar{E} \sqrt{1 \pm \kappa} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 \pm \sqrt{4 \sigma_a^2 \sigma_b^2 + (\sigma_a^2 - \sigma_b^2)^2}}.$$

Führt man die neuen Konstanten an Stelle von R, T, S in die normale Verteilungsformel ein, so ergibt sich

$$W(a, b) da db = \frac{da db}{2 \pi \sigma_a \sigma_b \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a \sigma_b}\right)^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{a}{\sigma_a}\right)^2 - 2 \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a \sigma_b} \cdot \frac{a}{\sigma_a} \cdot \frac{b}{\sigma_b} + \left(\frac{b}{\sigma_b}\right)^2}{1 - \left(\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a \sigma_b}\right)^2}}$$

eine Formel, die in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert ist. Zunächst ist ersichtlich, daß sich eine Vereinfachung ergibt, wenn man an Stelle von a und b die Koordinaten

$$u = \frac{a}{\sigma_a}; \quad v = \frac{b}{\sigma_b}$$

eingführt, also die Komponenten auf ihre partiellen Streuungen als Einheit bezieht. Ferner kommt σ_{ab} nur in der Verbindung

$$k = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a \cdot \sigma_b} = \frac{T}{\sqrt{RS}}$$

vor. Die Verteilung hat dann die Form

$$W(u, v) du dv = \frac{du dv}{2\pi \sqrt{1-k^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2 - 2kuv + v^2}{1-k^2}}, \quad (\text{I4})$$

die nur noch von dem Parameter k abhängt, und deren Hauptachsen die Quadranten halbieren. Man bezeichnet k als den „Korrelationskoeffizienten“ zwischen den beiden Folgen u_v und v_v . Man erhält ihn aus N vorgelegten zusammengehörigen Wertepaaren (u_v, v_v) mittelst der Formel

$$k = \frac{\sum u_v v_v}{\sqrt{\sum u^2 \cdot \sum v_v^2}}.$$

6. Einige Sätze und Begriffe aus der Korrelationsrechnung.

Der Korrelationskoeffizient, auf den die obigen Betrachtungen über den Aufbau elliptischer Punktwolken zwangsläufig geführt haben, ist einer der wichtigsten Grundbegriffe der *Korrelationsrechnung*, die die statistischen Zusammenhänge zwischen Kollektiven behandelt. Die Verwandtschaft zwischen den Theorien der Korrelation und der mehrdimensionalen Verteilungen ist so eng, daß beide geradezu miteinander identifiziert werden können. Es leuchtet daher ohne weiteres ein, daß die Begriffe der Korrelationsrechnung auch in der statistischen Periodenforschung nicht entbehrt werden können. Es wird daher notwendig sein, einige ihrer Grundlagen hier zu entwickeln, soweit sie für unsere besonderen Zwecke notwendig sind. Auf Vollständigkeit braucht dabei um so weniger Gewicht gelegt zu werden, als es gute Lehrbücher¹ dieses wichtigen Zweiges der angewandten Mathematik in genügender Zahl gibt.

Es seien zwei Folgen von je N Zahlen,

$$\begin{aligned} u_1, u_2, \dots, u_N \\ v_1, v_2, \dots, v_N \end{aligned}$$

vorgelegt, die aus irgendwelchen Gründen als paarweise zusammengehörig betrachtet werden können, z. B. wenn u_v, v_v zwei zur gleichen Zeit t_v erhaltene Beobachtungen zweier verschiedener Ereignisse u und v bedeuten, oder auch, wenn die (zeitlich äquidistante) Folge u durch Verschiebung um r Einheiten auf der Zeitachse in die Folge v übergeht.

Es läßt sich nun denken, daß beide Folgen, die wir uns stets als auf ihren arithmetischen Mittelwert als Nullpunkt bezogen denken wollen, einen gemeinschaftlichen systematischen Bestandteil enthalten. Dieser Fall liegt z. B. dann vor, wenn die beiden beobachteten Naturvorgänge u

¹ Über Korrelationsrechnung unterrichtet ausführlicher Lit. 39, 217, 281.

und v auf die gleiche natürliche Ursache zurückzuführen sind, wenn auch der Einfluß dieser gemeinsamen Ursache auf beide Vorgänge von verschiedener Stärke, ja unter Umständen sogar von verschiedenem Vorzeichen sein kann. Als eines der bekanntesten Beispiele für solche durch eine gemeinsame Ursache „korrelierten“ Naturvorgänge seien die Schwankungen der Sonnenfleckenrelativzahlen und der erdmagnetischen Deklinationen erwähnt. Um einen Idealfall zu konstruieren, wollen wir annehmen, daß die gemeinsame Ursache sich zahlenmäßig durch eine Funktion der Zeit oder des der Zeit proportionalen Index ν , $[f(t)$ bzw. $f_\nu]$, darstellen läßt. Es mögen dann die von dieser gemeinsamen Ursache abhängenden Beobachtungsreihen

$$\begin{aligned} u_\nu &= c_u f_\nu + \varepsilon_\nu \\ v_\nu &= c_v f_\nu + \eta_\nu \end{aligned} \quad (\nu = 1, 2, \dots, N)$$

sein, wobei c_u und c_v zwei Proportionalitätskonstanten (die gegebenenfalls auch verschiedenes Vorzeichen haben dürfen) und die Zusätze ε_ν und η_ν Störungen bedeuten, von denen wir annehmen wollen, daß sie sich nach der Art zufälliger Fehler mit den Streuungen σ_ε bzw. σ_η verhalten. Bilden wir jetzt die zur Konstruktion des Korrelationskoeffizienten nötigen Mittelwerte, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(u^2) &= c_u^2 \frac{\sum f_\nu^2}{N} + 2 c_u \frac{\sum f_\nu \varepsilon_\nu}{N} + \frac{\sum \varepsilon_\nu^2}{N} \\ \mathfrak{M}(u v) &= c_u c_v \frac{\sum f_\nu^2}{N} + c_u \frac{\sum f_\nu \eta_\nu}{N} + c_v \frac{\sum f_\nu \varepsilon_\nu}{N} + \frac{\sum \varepsilon_\nu \eta_\nu}{N} \\ \mathfrak{M}(v^2) &= c_v^2 \frac{\sum f_\nu^2}{N} + 2 c_v \frac{\sum f_\nu \eta_\nu}{N} + \frac{\sum \eta_\nu^2}{N}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun, um durchschnittliche Verhältnisse heranzuziehen, an Stelle der Mittelwerte

$$\frac{\sum f_\nu \varepsilon_\nu}{N}, \quad \frac{\sum f_\nu \eta_\nu}{N}, \quad \frac{\sum \varepsilon_\nu \eta_\nu}{N}.$$

ihre wahrscheinlichsten Werte (mathematischen Erwartungen), die offenbar unter den gemachten statistischen Voraussetzungen null sind, ferner

$$\frac{\sum f_\nu^2}{N} = \bar{f}^2; \quad \frac{\sum \varepsilon_\nu^2}{N} = \sigma_\varepsilon^2; \quad \frac{\sum \eta_\nu^2}{N} = \sigma_\eta^2,$$

so ergibt sich offensichtlich

$$\begin{aligned} \frac{\sum u_\nu^2}{N} &= c_u^2 \bar{f}^2 + \sigma_\varepsilon^2; \quad \frac{\sum u_\nu v_\nu}{N} = c_u c_v \bar{f}^2; \quad \frac{\sum v_\nu^2}{N} = c_v^2 \bar{f}^2 + \sigma_\eta^2 \quad \text{und daher} \\ k &= \frac{\sum u_\nu v_\nu}{\sqrt{\sum u_\nu^2} \sqrt{\sum v_\nu^2}} = \frac{c_u c_v \bar{f}^2}{\sqrt{(c_u^2 \bar{f}^2 + \sigma_\varepsilon^2)(c_v^2 \bar{f}^2 + \sigma_\eta^2)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{c_u \bar{f}}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{\sigma_\eta}{c_v \bar{f}}\right)^2\right)}}. \end{aligned}$$

Aus dieser Form des Korrelationskoeffizienten ist folgendes abzulesen:

1. Der Betrag des Korrelationskoeffizienten ist stets ≤ 1 .
2. Das Vorzeichen von k ist positiv oder negativ, je nachdem, ob c_u und c_v gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben, d. h. je nachdem,

ob die gemeinsame Ursache in beiden Vorgängen in gleicher oder entgegengesetzter Richtung wirkt.

3. Der Korrelationskoeffizient ist ± 1 nur dann, wenn die beiden Streuungen σ_ε und σ_η *gleichzeitig* verschwinden, d. h. wenn die beiden Vorgänge u und v durch die Funktionalgleichung

$$c_v u_v = c_u v_v$$

streng verknüpft sind. Es genügt also nicht etwa, daß *irgendeine* Funktionsbeziehung zwischen ihnen streng erfüllt ist, sondern diese Beziehung muß die besondere Form einer Proportionalität haben, also *linear* sein.

4. Der Korrelationskoeffizient ist nur dann null, wenn mindestens eine der beiden Proportionalitätskonstanten c_u und c_v verschwindet, d. h. wenn mindestens eine der beiden Beobachtungsreihen keinen merklichen Bestandteil enthält, der der Ursachenfunktion f_v proportional wäre.

5. Ist $c_v = 1$, $\sigma_\eta = 0$, so stellt die zweite Reihe eine durch die Funktion $f(t)$ charakterisierte Gesetzmäßigkeit streng dar. Hat dann die erste Reihe die oben gezeigte Form, so bedeutet das, daß die Werte u_v durch ein ursächliches Gesetz $f(t)$ mit mehr oder weniger Wirksamkeit mitbestimmt werden. Der Korrelationskoeffizient lautet dann

$$k = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{c_u f}\right)^2}},$$

er ist also $= \pm 1$, wenn $\sigma_\varepsilon = 0$, der Zusammenhang also streng linear ist, und er verschwindet, wenn $c_u = 0$ ist.

6. Ist der Zusammenhang zwischen den Reihen u und v *nicht* linear, so sagt die Größe des Korrelationskoeffizienten über den Grad der „Strammheit“ der Beziehungen nichts aus, wie ein einfaches Gegenbeispiel lehrt: Ist etwa

$$\begin{aligned} u_v &= \sin v \alpha \\ v_v &= \cos v \alpha, \end{aligned} \quad \left(v = 1, 2, \dots, N; \quad \alpha = \frac{2\pi r}{N} \right)$$

so ergibt sich, falls r eine ganze Zahl, also die Bedingung $\sum u_v = \sum v_v = 0$ erfüllt ist,

$$k = \frac{\sum \sin v \alpha \cos v \alpha}{\sqrt{\sum \sin^2 v \alpha \cdot \sum \cos^2 v \alpha}} = 0,$$

obwohl die beiden Reihen in aller Strenge die allerdings quadratische Funktionalgleichung

$$u_v^2 + v_v^2 = 1$$

erfüllen.

Es ist somit nötig, vor dem Gebrauch des Korrelationskoeffizienten zu prüfen, ob die mutmaßliche Beziehung zwischen den vorgelegten Reihen als linear angesehen werden darf oder nicht. Im letzteren Falle werden andere Maßzahlen für die Strammheit der in Frage stehenden Abhängigkeiten gesucht werden müssen. Die Grundlage für eine solche

Untersuchung bildet eine graphische Aufzeichnung der vorgelegten Punktpaare (u_v, v_v) in einem (u, v) -Koordinatensystem. Ein strenger funktioneller Zusammenhang wird sich dadurch zu erkennen geben, daß die Punkte der Aufzeichnung einen mehr oder weniger regelmäßig geformten Linienzug ergeben. Die Gleichung dieser Kurve, $f(u, v) = 0$, ergibt dann unmittelbar die Form des Zusammenhangs. Andernfalls erfüllen die Punkte ein flächenhaft ausgedehntes Gebiet, eine Punktwolke von beliebiger Gestalt. In diesem Falle wird der Zusammenhang zwischen den u_v und v_v , soweit er überhaupt vorhanden ist, als „stochastisch“ bezeichnet. Während bei funktioneller Verbundenheit zu jedem u nur *ein* wohlbestimmter Wert von v gehört (bei mehrdeutigen Funktionen auch mehrere), so ist bei stochastischer Verbundenheit zu jedem u ein ganzer Bereich gegeben, in dem die zugehörigen v -Werte liegen können. Läßt sich die Punktwolke durch eine Verteilungsfunktion $W(u, v)$ annähern, die zu jedem Rechteck $(u + du, v + dv)$ die relative Häufigkeit der in ihm anzutreffenden Punkte angibt, so erfüllen die zu einem bestimmten Wert von u gehörigen v die „bedingte Verteilung“

$$W_u(v) = \int_u^{u+du} W(u, v) du.$$

Die Gesamtmenge der in dem Streifen $(u, u + du)$ zu erwartenden Punkte wird durch

$$W_u = \int_{-\infty}^{+\infty} W_u(v) dv$$

gegeben. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß ein in diesem Streifen liegender Punkt eine Ordinate zwischen v und $v + dv$ besitzt, ist demnach

$$\varphi_u(v) dv = \frac{W_u(v) dv}{W_u}$$

und die Durchschnittsordinate aller dieser Punkte hat den Wert

$$\bar{v}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} v \varphi_u(v) dv;$$

ebenso läßt sich ihre Streuung um den Durchschnittswert durch

$$\sigma_v^2(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (v - \bar{v}(u))^2 \varphi_u(v) dv$$

berechnen. Um ein einfaches Beispiel zu haben, wollen wir annehmen, daß die Punktwolke (u, v) normale elliptische Gestalt habe, und daß die Größen u und v auf ihren Mittelwert bezogen und durch ihre relativen Streuungen als Einheit gemessen seien. Es ist dann, nach Abschnitt 5, (14)

$$W(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-k^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2 - 2kuv + v^2}{1-k^2}}$$

$$\text{also: } W_u = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-k^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2 - 2kuv + v^2}{1-k^2}} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2}$$

mithin:

$$\begin{aligned} \varphi_u(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-k^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(v-ku)^2}{1-k^2}} \\ \bar{v}(u) &= ku \\ \sigma_v^2(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (v-ku)^2 \varphi_u(v) dv = 1-k^2. \end{aligned}$$

Dieselben Betrachtungen lassen sich natürlich auch für die andere Koordinate durchführen, und wir erhalten als Durchschnittswert aller u -Werte, die in einem horizontalen Streifen von der Begrenzung ($v, v+dv$) liegen:

$$\bar{u}(v) = kv$$

und für die bedingte Streuung gleichfalls den konstanten Wert

$$\sigma_u^2(v) = 1-k^2.$$

Die Durchschnittswerte $\bar{v}(u)$ bzw. $\bar{u}(v)$ stellen die mathematischen Erwartungen der v bzw. u dar; unter der Voraussetzung, daß die Werte u bzw. v schon festliegen. Sie erfüllen zwei durch den Koordinatenanfang gehende Gerade mit den Gleichungen

$$v = ku \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{1}{k} u.$$

Diese beiden Geraden heißen die „Regressionslinien“ von v in bezug auf u bzw. umgekehrt. Sie fallen dann und nur dann zusammen, wenn $k = \pm 1$ ist, und verlaufen dann in der Richtung $\pm 45^\circ$. Gleichzeitig ist dann die bedingte Streuung überall null, d. h. die Punkte liegen nur auf dieser gemeinsamen Regressionsgeraden, die daher in diesem Falle den funktionellen Zusammenhang zwischen den u und v versinnbildlicht. Ist hingegen $k = 0$, so fallen die Regressionslinien mit den beiden Koordinatenachsen zusammen, bilden also einen Winkel von 90° miteinander. Die Verteilung der Punktwolke ist dann radialsymmetrisch, die bedingten Streuungen sind 1, also den partiellen Streuungen der u , und v , gleich.

Interessant ist es noch, die Lage der Regressionslinien in bezug auf die mittlere Ellipse der Verteilung festzustellen. Die mittlere Ellipse, deren Hauptachsen die Richtungen $\pm 45^\circ$ haben, wird durch ihre Gleichung

$$u^2 - 2kuv + v^2 = \text{const}$$

dargestellt. Die Tangenten dieser Ellipse haben die Gleichungen

$$u u_1 - k(u v_1 + v u_1) + v v_1 = u(u_1 - k v_1) + v(v_1 - k u_1) = \text{const},$$

wenn (u_1, v_1) die Koordinaten ihres Berührungspunktes sind. Aus dieser Gleichung liest man unmittelbar ab, daß die Berührungspunkte

derjenigen Tangenten, die den Koordinatenachsen parallel sind, der Bedingung

$$v_1 = \frac{1}{k} u_1 \quad \text{bzw.} \quad v_1 = k u_1$$

genügen, also die Gleichungen je einer der beiden Regressionsgeraden befriedigen. Im Zusammenhang mit bekannten Sätzen aus der Geometrie der Kegelschnitte besagt dies, daß die Regressionslinien nichts anderes sind als die konjugierten Durchmesser zu den beiden Koordinatenachsen.

Die normale elliptische Verteilung, die nach unseren früheren Erkenntnissen für viele empirische Verteilungen nach zwei Dimensionen als brauchbare Annäherung zu gelten hat, ist nach dem Obigen ein Musterbeispiel für eine lineare Korrelation zwischen zwei Variablen, in der also der Korrelationskoeffizient ein brauchbares Maß für die „Strammheit“ des stochastischen Zusammenhangs der beiden Variablen bildet. Überall da, wo man also die Verteilung einer Punktwolke annäherungsweise als elliptisch ansehen kann, lassen sich die Korrelationsbetrachtungen in ähnlicher Weise durchführen.

Sei eine Anzahl (N) zusammengehöriger Punktpaare (a , b) gegeben, so wird die Untersuchung zweckmäßigerweise mit einer graphischen Darstellung der Punktwolke beginnen. Um die Verteilung (Häufigkeit oder Dichte) der Punktwolke zahlenmäßig festlegen zu können, teilt man die Koordinatenebene in ein Netz von Quadraten ein, dessen Dichte sich nach der Dichte der Punktwolke selbst richtet. Im allgemeinen soll das Netz so weitmaschig sein, daß in den dichteren Teilen der Wolke eine größere Anzahl von Punkten auf jedes Quadrat entfällt. Man zählt dann die in jedem Quadrat enthaltenen Punkte und gibt diese Häufigkeitszahlen in einer Tabelle mit zwei Eingängen wieder, die nach den Koordinaten der Quadratmitten beziffert werden. Statt der Häufigkeitszahlen selbst kann man auch die *Dichten* oder *relativen Häufigkeiten* angeben, die aus den ersteren durch Division durch die Gesamtzahl der Punkte entstehen. Diese Dichtezahlen stellen gleichzeitig die empirischen Wahrscheinlichkeiten dafür dar, daß ein beliebig herausgegriffener Punkt sich in dem betreffenden Quadrat befinde; ihre Summe ist natürlich 1. Eine solche Häufigkeits- oder Dichtetabelle kann man auch als Korrelationstabelle bezeichnen; sie ist aus der ursprünglichen Punktwolke durch einen zweidimensionalen Glättungsprozeß hervorgegangen, der um so stärker ist, je weitmaschiger das Netz gewählt war. Punkte, die zufällig auf einer Begrenzungslinie zwischen zwei Quadraten liegen, pflegt man dabei mit halbem Gewicht jedem der beiden angrenzenden Felder zuzurechnen; liegt ein Punkt auf einer Quadratecke, so ist sein Wert über vier Felder mit je einem Viertel zu verteilen.

Kennzeichnet man nun die *Spalten* der so gewonnenen Korrelationstabelle durch den Index μ , die *Zeilen* durch den Index ν , so ist $n_{\mu\nu}$ die

Anzahl der auf das Feld (μ, ν) entfallenden Punkte, deren Koordinaten infolge der vorgenommenen Glättung durch die der Feldmitte $u = \mu$, $v = \nu$ zu ersetzen sind. Die Zahl der in den Spalten bzw. Zeilen der Tabelle enthaltenen Punkte ist

$$\bar{n}_\mu = \sum_\nu n_{\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \bar{n}_\nu = \sum_\mu n_{\mu\nu},$$

wobei die Summen stets über den gesamten belegten Bereich von ν bzw. μ zu erstrecken sind. Die Gesamtzahl der Punkte ist

$$\sum_\mu \bar{n}_\mu = \sum_\nu \bar{n}_\nu = \sum_\mu \sum_\nu n_{\mu\nu} = N.$$

Die bedingten mathematischen Erwartungen \bar{v}_μ bzw. \bar{u}_ν entsprechen den „Schwerpunkten“ der Spalten bzw. Zeilen. Es ist demnach

$$\bar{n}_\mu \bar{v}_\mu = \sum_\nu \nu n_{\mu\nu}; \quad \bar{n}_\nu \bar{u}_\nu = \sum_\mu \mu n_{\mu\nu},$$

wobei die Anzahlen der zu diesen Schwerpunkten vereinigten Punkte, also \bar{n}_μ bzw. \bar{n}_ν , den mathematischen Erwartungen als „Gewichte“ zuzuschreiben sind.

Die bedingten mathematischen Erwartungen der Spalten in Abhängigkeit von μ und die der Zeilen in Abhängigkeit von ν bilden je eine Punktfolge, deren Verlauf über die Natur der stochastischen Beziehungen zwischen u und v Auskunft gibt. Dabei muß allerdings noch angenommen werden, daß die Schwerpunkte jeder Zeile und Spalte auch wirklich als *Häufungszentren* der in ihnen enthaltenen Punkte betrachtet werden dürfen. Andernfalls, z. B. in einer kreisringförmig angeordneten Punktmenge, in der die Punkte jeder Spalte und Zeile sich um zwei mehr oder weniger deutlich getrennte Zentren häufen, kann der Schwerpunkt nicht als „mathematische Erwartung“ angesehen werden. Diese Fälle, die, wie unschwer einzusehen ist, auf Regressionslinien führen, deren Gleichungen in den rechtwinkligen Koordinaten mehrdeutige Funktionen enthalten, bedürfen einer besonderen mathematischen Behandlung, auf die hier nicht ausführlich eingegangen werden kann. So wäre bei einer ringförmigen Verteilung etwa ein Polarkoordinatensystem geeignet, dessen Zentrum im Innern des Ringes liegt; diesem System entsprechend wären dann auch die Felder der Tabelle anzuordnen. In jedem Falle läßt sich aus dem Anblick der Punktwolke, vorausgesetzt, daß die Anzahl der Punkte überhaupt genügend groß ist, unmittelbar entscheiden, welche Methode bei der Konstruktion der Regressionslinien anzuwenden ist. Die Aufzeichnung der Punktwolke bzw. die Bildung einer Korrelationstabelle erweist sich daher als eine unerläßliche Maßnahme, wenn man nicht Gefahr laufen will, durch kritiklose Anwendung von Rechenvorschriften Maßzahlen (z. B. Korrelationskoeffizienten) zu erhalten, die zu dem wahren statistischen Verhalten des vorgelegten Materials in

keiner Beziehung stehen und daher zu irreführenden Vorstellungen Anlaß geben.

Sind die Vorbedingungen für die eindeutige Bestimmbarkeit der bedingten mathematischen Erwartungen durch Mittelung der in den Spalten und Zeilen enthaltenen v - und u -Werte erfüllt, so ergeben die obigen Formeln zwei Folgen von Punkten, durch deren Verlauf die Form und Lage der beiden Regressionslinien hinreichend gekennzeichnet wird. Da allerdings jeder Punkt dieser Folgen nur aus einer beschränkten Anzahl von Einzelwerten des (u, v) -Kollektivs hervorgeht, so wird die Verbindung dieser Punkte zu einem Linienzug nur ein unvollkommenes Bild der idealen Regression vermitteln. Man hat sich vorzustellen, daß die empirisch gegebene Punktwolke eine endliche und willkürliche Auswahl aus einem idealen Kollektiv darstellt, das als Träger der statistischen Eigentümlichkeiten des beobachteten Wertekomplexes anzusehen ist. Nehmen wir etwa an, daß dies ideale Kollektiv eine normale elliptische Verteilung hat, so sind die idealen Regressionslinien Gerade, die sich unter einem gewissen Winkel schneiden. Die beiden aus dem verfügbaren Auswahlkollektiv berechneten Punktfolgen werden sodann —, und zwar um so enger, je größer die Zahl der benutzten Wertepaare gewesen ist — dem Zuge dieser idealen Geraden folgen, aber mehr oder weniger starke Abweichungen von ihm zeigen. Aus einer endlichen Zahl von Punkten wird daher die ideale Lage der Regressionslinien nur mit einer gewissen Unsicherheit hervorgehen. Die wahrscheinlichste Lage der Regressionslinien wird, vorausgesetzt, daß ihre mathematische Form aus der Punktfolge mit genügender Sicherheit erkennbar ist, durch die Methode der kleinsten Quadrate zu ermitteln sein. So wird durch die Aufzeichnung der errechneten bedingten mathematischen Erwartungen als Punktfolge zu entscheiden sein, ob ihre Ausgleichung nach einer linearen Regressionslinie gerechtfertigt ist oder nicht. Zeigt der Kurvenzug deutliche Krümmungen, die man nicht als zufällige Abweichungen von einem linearen Verlauf ansehen kann, so wird unter Umständen eine Ausgleichung nach einer parabolischen Funktion zweiter, dritter oder gar höherer Ordnung zu erfolgen haben. Ist die Krümmung nur schwach, so wird eine lineare Ausgleichung — wenn auch nicht zu einer vollständigen Darstellung der Regressionseigenschaften — doch zu ihrer genäherten Wiedergabe ausreichend sein. Für die Darstellung der Regressionslinien aus einem beschränkten Material gilt demnach alles, was im ersten Kapitel über die Annäherung von empirischen Funktionen und Beobachtungsreihen durch gegebene Funktionen gesagt worden ist: Die Lösung dieser Aufgabe ist mitunter nur möglich, wenn dem Bearbeiter ein gewisser Spielraum in der Auffassung zugestanden wird, und sie wird nur dann erfolgreich sein, wenn er seine Entscheidungen mit dem nötigen durch Erfahrung und genaue Kenntnis des Gegenstandes geschärften Feingefühl treffen kann.

7. Autokorrelation von Beobachtungsreihen.

Wir haben im Abschnitt 6 festgestellt, daß der Korrelationskoeffizient zwischen zwei Wertefolgen u_r und v_r unter gewissen Voraussetzungen über die Struktur der zweidimensionalen Verteilung zusammengehöriger Wertepaare (u_r, v_r) als Maß für die statistische Abhängigkeit dieser beiden Folgen voneinander angesehen werden konnte. Darüber hinaus ist natürlich die *formale* Bildung des Korrelationskoeffizienten nach der Formel

$$k = \frac{\sum (u_r - u_0)(v_r - v_0)}{\sqrt{\sum (u_r - u_0)^2 \cdot \sum (v_r - v_0)^2}}; \quad \left(u_0 = \frac{1}{n} \sum u_r; \quad v_0 = \frac{1}{n} \sum v_r \right)$$

oder, wenn der Schwerpunkt der „Wolke“ (u_0, v_0) durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems in den Koordinatenanfang verlegt wurde, nach der einfacheren Formel

$$k = \frac{\sum u_r v_r}{\sqrt{\sum u_r^2 \cdot \sum v_r^2}}$$

immer möglich, ohne daß damit über die statistische Bedeutung dieser Größe etwas ausgesagt wird. Die Größe k ist dann als eine nach bestimmten Regeln gebildete Funktion der gegebenen Werte zu betrachten, die gewisse, im Einzelfall noch näher zu diskutierende Eigenschaften des vorgelegten Wertevorrats repräsentiert. So führt z. B. die Korrelation zwischen einer äquidistanten Beobachtungsreihe

$$y_1, y_2, \dots, y_n \quad \left(\sum_{v=1}^n y_v = 0 \right)$$

und jeder der beiden Folgen

$$\begin{aligned} & \cos \alpha, \cos 2\alpha, \dots, \cos n\alpha \\ & \sin \alpha, \sin 2\alpha, \dots, \sin n\alpha \end{aligned} \quad \left(\alpha = \frac{2\pi r}{n}; \quad r \text{ ganz} \right)$$

zu den formalen Korrelationskoeffizienten

$$k = \frac{\sum y_v \cos v\alpha}{\sqrt{\sum y_v^2 \cdot \sum \cos^2 v\alpha}} = \frac{\frac{2}{n} \sum y_v \cos v\alpha}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum y_v^2 \cdot \sqrt{2}}} = \frac{a_r}{\sigma \sqrt{2}}$$

$$\text{bzw.} \quad k' = \frac{\sum y_v \sin v\alpha}{\sqrt{\sum y_v^2 \cdot \sum \sin^2 v\alpha}} = \frac{b_r}{\sigma \sqrt{2}},$$

die, wie man sieht, den FOURIER-Koeffizienten r -ter Ordnung der Beobachtungsreihe proportional und der Streuung der Beobachtungswerte umgekehrt proportional sind. Der formale Korrelationskoeffizient wird also in diesem Falle eine Aussage über den Anteil vermitteln, den eine bestimmte Versuchswelle an dem Aufbau der zeitlichen Schwankungen der Beobachtungsgrößen hat. Ein anderes Beispiel für die Bildung formaler Korrelationen führt ebenfalls auf Betrachtungen, die in der Periodenforschung eine besondere Rolle spielen; es umfaßt die schon

früher erwähnten Korrelationen einer Beobachtungsreihe mit sich selbst, die man als „Autokorrelationen“ bezeichnet.

Trivial ist der Fall, daß die Reihe

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

unverändert mit sich selbst korreliert werde: Hier ergibt sich der Korrelationskoeffizient $k_0 = 1$, den man auch den „Autokorrelationskoeffizienten nullter Ordnung“ nennt. Dies Ergebnis ist natürlich völlig unabhängig von der besonderen Form der Reihe, es tritt insbesondere auch dann auf, wenn die Beobachtungswerte ganz ungeordnet sind, etwa eine Reihe zufälliger Fehler darstellen. Anders wird es, wenn wir die obige Reihe mit der um s Einheiten verschobenen Reihe

$$y_{s+1}, y_{s+2}, \dots, y_{s+n}, \dots$$

in Beziehung setzen. Das Ergebnis ist allgemein

$$k_s = \frac{\sum_{\nu=1}^n (y_\nu - \delta_0)(y_{\nu+s} - \delta_s)}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^n (y_\nu - \delta_0)^2 \cdot \sum_{\nu=1}^n (y_{\nu+s} - \delta_s)^2}}; \delta_0 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n y_\nu; \delta_s = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n y_{\nu+s} \quad (15)$$

und wird als „Autokorrelationskoeffizient s -ter Ordnung“ bezeichnet. Er kann, je nach der Art der Beobachtungsreihe, beliebige Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen. Das Wesentliche ist dabei, daß er, im Gegensatz zu k_0 , gegen eine Vertauschung der Reihenfolge der Beobachtungswerte, von besonderen Ausnahmefällen abgesehen, nicht mehr invariant ist. Bei der Bildung der höheren Autokorrelationskoeffizienten ist demnach die zeitliche Aufeinanderfolge der Beobachtungen, also ihr funktioneller Charakter, maßgebend beteiligt. Diese Größen sind also unter Umständen zur Beschreibung von Eigenschaften eines Beobachtungskollektivs geeignet, die durch die rein statistische Verteilungskurve nicht erfaßt werden. So besteht die Möglichkeit, die Folge der Autokorrelationskoeffizienten

$$k_0, k_1, k_2, \dots$$

zu den funktionellen Eigenschaften der Beobachtungsreihe, z. B. zu ihren Perioden, in Beziehung zu bringen.

An die Formel (15) müssen zunächst folgende Bemerkungen geknüpft werden:

1. Zur Berechnung eines Autokorrelationskoeffizienten s -ter Ordnung aus n Wertepaaren ist die Kenntnis von $n + s$ Werten der Originalreihe erforderlich. Nennen wir die Zahl der benutzten Wertepaare das „Gewicht“ des Autokorrelationskoeffizienten, so folgt daraus, falls von einer Beobachtungsreihe nur N Werte verfügbar sind, daß der Autokorrelationskoeffizient s -ter Ordnung höchstens mit dem Gewicht $N - s$ ermittelt werden kann.

2. Die in der Formel auftretenden Mittelwerte δ_0 und δ_s sind im allgemeinen voneinander verschieden und verändern sich auch, wenn man etwa das Gewicht durch Hinzunahme weiterer Beobachtungen erhöht oder, wie es bei beschränkter Beobachtungsanzahl notwendig werden kann, beim Übergang auf eine höhere Ordnung herabsetzt. Ist die Anzahl der benutzten Beobachtungen sehr groß, so wird die Änderung der Mittelwerte bei einer im Verhältnis zu n geringfügigen Änderung des Gewichts nur klein und unter Umständen zu vernachlässigen sein. Die Berücksichtigung der Mittelwärtsänderung ist bei der praktischen Berechnung einer größeren Zahl von Autokorrelationskoeffizienten verschiedener Ordnung sehr zeitraubend und umständlich. Es ist daher angebracht, sofern es die Genauigkeitserfordernis zuläßt, diese Änderungen nach Möglichkeit zu vernachlässigen. Das kann z. B. dadurch geschehen, daß man an Stelle der Mittelwerte δ_0 und δ_s , die aus zwei verschiedenen, wenn auch sich stark überdeckenden Teilbereichen der verfügbaren Beobachtungsreihe gewonnen werden, einheitlich den Mittelwert der gesamten Reihe benutzt. Man kann sogar, wenn sehr viel mehr Beobachtungswerte vorhanden sind, als im Augenblick gebraucht werden, das Gesamtmittel der Reihe benutzen, vorausgesetzt, daß sie statistisch homogen ist, also insbesondere ihr Gesamtmittel auch für kleinere Bereiche als charakteristisch angesehen werden darf. Ist dies nicht der Fall, d. h. zeigt die Beobachtungskurve eine „säkulare“ Veränderlichkeit ihres mittleren Verlaufs, so empfiehlt es sich, die Originalreihe durch Elimination des säkularen Gliedes homogen zu machen. Die Mittelwerte δ_0 bzw. δ_s weichen dann von dem Gesamtmittel, das wir als die beste verfügbare Annäherung an den idealen Mittelwert ansehen können, nur um Beträge ab, die in den Grenzen der zufälligen Fehler liegen, die für die Mittelbestimmung aus n Einzelwerten zu erwarten sind. Sind also die Beobachtungswerte als Abweichungen von einem Gesamtmittel gegeben und von einem etwaigen säkularen Gang befreit, so werden die Größen als klein im Verhältnis zur Streuung der Beobachtungen zu betrachten sein — ihre Größenordnung wird gleich der durch \sqrt{n} dividierten Streuung sein¹. Die strenge Formel für den Autokorrelationskoeffizienten läßt sich dann nach Potenzen der δ in folgender Weise entwickeln: Zunächst ist

$$\begin{aligned} \sum (y_v - \delta_0)(y_{v+s} - \delta_s) &= \sum y_v y_{v+s} - \delta_0 \sum y_{v+s} - \delta_s \sum y_v + n \delta_0 \delta_s \\ &= \sum y_v y_{v+s} - n \delta_0 \delta_s \end{aligned}$$

$$\sum (y_v - \delta_0)^2 = \sum y_v^2 - n \delta_0^2; \quad \sum (y_{v+s} - \delta_s)^2 = \sum y_{v+s}^2 - n \delta_s^2.$$

Setzen wir also die empirischen Streuungen um δ_0 bzw. δ_s

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum y_v^2} = \sigma_0; \quad \sqrt{\frac{1}{n} \sum y_{v+s}^2} = \sigma_s,$$

¹ Über alle Fragen, die mit der Theorie der zufälligen Fehler zusammenhängen, sei auf die Literatur verwiesen (s. Lit. 52, 75).

so ergibt sich

$$k_s = \frac{\sum y_v y_{v+s} - n \delta_0 \delta_s}{n \sigma_0 \sigma_s \sqrt{\left(1 - \frac{\delta_0^2}{\sigma_0^2}\right) \left(1 - \frac{\delta_s^2}{\sigma_s^2}\right)}},$$

also bei einer Entwicklung bis zur zweiten Ordnung der kleinen Verhältnisse $\frac{\delta_0}{\sigma_0}$ und $\frac{\delta_s}{\sigma_s}$:

$$k_s = \frac{\sum y_v y_{v+s}}{n \sigma_0 \sigma_s} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_0^2}{\sigma_0^2} + \frac{\delta_s^2}{\sigma_s^2}\right) \dots\right) - \frac{\delta_0 \delta_s}{\sigma_0 \sigma_s}.$$

Es ist demnach

$$k'_s = \frac{\sum y_v y_{v+s}}{n \sigma_0 \sigma_s}$$

ein Näherungswert des Korrelationskoeffizienten, der brauchbar ist, wenn die arithmetischen Mittel δ_0 und δ_s im Verhältnis zur Streuung sehr klein sind. Eine weitere Vereinfachung der Formel läßt sich erzielen und unter Umständen rechtfertigen, wenn statt der Streuungen σ_0 und σ_s eine mittlere Streuung σ gesetzt wird. Es ist dann

$$k'_s = \frac{\sum y_v y_{v+s}}{n \sigma^2}.$$

Ist z. B. eine N -gliedrige und statistisch homogene Beobachtungsreihe gegeben, und ist die Aufgabe gestellt, alle Autokorrelationskoeffizienten bis zur Ordnung r zu bilden, unter Benutzung der größtmöglichen Anzahl von Einzelwerten, so wird man, wenn der Mittelwert der Reihe null und die Gesamtstreuung

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N y_v^2}$$

ist, die gesuchten Korrelationskoeffizienten genähert in der Form

$$k_s = \frac{\sum_{v=1}^{N-s} y_v y_{v+s}}{(N-s) \sigma^2} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, r)$$

schreiben dürfen. Die Ordnung der Autokorrelation kann nicht beliebig weit getrieben werden, sondern ist an die unerläßliche Forderung gebunden, daß $N-s$, die Zahl der Summierungen bei der Bildung des Korrelationskoeffizienten höchster Ordnung, nicht zu klein sein darf. Die hierbei einzuhaltende Grenze wird aber stets von der Eigenart des zu behandelnden Materials und der zu lösenden Aufgabe abhängen.

Über die verschiedenen Möglichkeiten, die durch die Methode der Autokorrelation für die Erforschung der gesetzmäßigen Struktur von Beobachtungsreihen eröffnet werden, läßt sich schon durch heuristische Betrachtungen ein ziemlich vollständiges Bild gewinnen. Am einfachsten liegen die Dinge, wenn als Beobachtungsreihe eine Folge von Zahlen gegeben ist, die sich wie zufällige Fehler verhalten. Wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit der y_v ist dann, abgesehen von dem trivialen

Fall $k_0 = 1$, die mathematische Erwartung der k_s für jede Ordnung null. Die empirischen Werte der Folge k_1, k_2, k_3, \dots werden also um den Mittelwert null schwanken, ihre Streuung wird durch den m. F. des Korrelationskoeffizienten im Falle der Unabhängigkeit gegeben sein, der für normale Korrelation

$$\mu_{k_s} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

zu setzen ist¹. Übrigens gilt dieser genäherte Streuungswert für den Fall der Unabhängigkeit auch bei beliebigem Verteilungsgesetz, also auch dann, wenn die Wertepaare (y_v, y_{v+s}) nicht normal korreliert sein sollten (siehe Lit. 28r).

Ganz anders liegen jedoch die Dinge, wenn die Beobachtungswerte eine zeitliche Abhängigkeit voneinander zeigen, etwa von der Art, daß ihre graphische Aufzeichnung in der gegebenen Reihenfolge einen mehr oder weniger glatten Kurvenzug ergibt oder gar eine periodische Wiederholung zeigt. Ein sehr einfaches Beispiel für die letztere Möglichkeit bietet die Folge

$$+1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots,$$

deren zeitliche Abhängigkeit durch das Gesetz der alternierenden Vorzeichen gekennzeichnet wird. Die Folge k_0, k_1, k_2, \dots der Autokorrelationskoeffizienten ist hier offenbar ebenfalls

$$+1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots,$$

und zwar unabhängig von der Zahl der zu ihrer Bildung benutzten Einzelwerte. Allgemein gibt eine *rein periodische* Folge

$$y_1, y_2, \dots, y_p, y_1, y_2, \dots, y_p, y_1, y_2, \dots, y_p, y_1, \dots$$

mit der Grundperiode p für die Autokorrelationskoeffizienten von der Ordnung $0, p, 2p, 3p, \dots$ den gemeinsamen Wert $+1$, falls die benutzte Summandenzahl (das Gewicht) n ein beliebiges ganzes Vielfaches von p ist. Die übrigen k_s können wieder, je nach der Art der Beobachtungsreihe, alle möglichen Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen. Der Wert -1 (entgegengesetzte funktionelle Abhängigkeit) wird nur dann entstehen, wenn die Folgen

$$y_1, y_2, y_3, \dots \\ -y_{s+1}, -y_{s+2}, -y_{s+3}, \dots$$

identisch sind. Man findet leicht, daß dies nur dann eintreten kann, wenn die Grundperiode aus zwei zur Abszissenachse spiegelbildlich gleichen Hälften besteht. Dazu ist notwendig, daß p eine gerade Zahl ($p = 2m$) sei, und es wird dann der Autokorrelationskoeffizient $k_s = -1$

¹ Der m. F. eines Korrelationskoeffizienten k ist im Falle der normalen Korrelation genähert $\mu_k = \frac{1 - k^2}{\sqrt{n}}$ (s. Lit. 28r). Für $k = 0$ ist also $\mu_k = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

stets eintreten, wenn die Verschiebung s ein ungerades Vielfaches von m darstellt. Das einfachste Beispiel für diesen Fall bietet die Folge

$$c \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} + \gamma\right), c \cdot \cos\left(2\frac{\pi}{m} + \gamma\right), \dots, c \cdot \cos\left((2m-1)\frac{\pi}{m} + \gamma\right), c \cdot \cos(2\pi + \gamma), \dots,$$

deren Periode $2m$ beträgt. Ist n ein Vielfaches von $2m$, so erhalten wir als Streuung

$$\sigma = \sqrt{\frac{c^2}{2m} \sum_{\nu=1}^{2m} \cos^2\left(\nu \frac{\pi}{m} + \gamma\right)} = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

mithin

$$\begin{aligned} k_s &= \frac{\sum y_\nu y_{\nu+s}}{2m\sigma^2} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{2m} \cos\left(\nu \frac{\pi}{m} + \gamma\right) \cos\left((\nu+s) \frac{\pi}{m} + \gamma\right) \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{\nu=1}^{2m} \left\{ \cos\left((2\nu+s) \frac{\pi}{m} + 2\gamma\right) + \cos s \frac{\pi}{m} \right\} = \cos s \frac{\pi}{m}. \end{aligned}$$

Die Folge der Autokorrelationskoeffizienten bildet demnach eine cos-Folge von gleicher Periode, aber der Amplitude 1 und der Anfangsphase 0.

Wir wollen diese konstruierten Beispiele von Autokorrelation periodischer Beobachtungsreihen noch um zwei weitere vermehren, um daraus einige wichtige Schlüsse zu ziehen. Zuerst wollen wir annehmen, daß die vorgelegte Reihe außer der Cosinuswelle von der Periode $2m$ noch eine andere von kleinerer Periode enthalte. Wenn wir für die Bildung der Autokorrelationskoeffizienten nicht gerade eine Wertzahl n zugrunde legen, die einer Schwebungsperiode zwischen den beiden Elementarperioden entspricht oder einem Vielfachen dieser Zahl, wird sowohl der Mittelwert als auch die Streuung der Folge von n abhängen. Wir wollen daher, um die Rechnung zu vereinfachen, für Mittelwert und Streuung den idealen Wert setzen, gegen den jede dieser Größen strebt, wenn n beliebig wächst, und der jedesmal, wenn n einer Schwebungslänge oder einem Vielfachen derselben gleich wird (vorausgesetzt, daß die Perioden kommensurabel sind), durch die formale Rechnung auch tatsächlich erreicht wird. Der ideale Mittelwert ist in diesem Falle, wie unmittelbar einzusehen ist, null; lautet das allgemeine Glied der Reihe

$$y_\nu = c_1 \cos(\alpha\nu + \gamma) + c_2 \cos(\beta\nu + \delta), \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

so ist das Quadrat der Streuung

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum y_\nu^2 &= \frac{c_1^2}{n} \sum \cos^2(\alpha\nu + \gamma) + \frac{2c_1c_2}{n} \sum \cos(\alpha\nu + \gamma) \cos(\beta\nu + \delta) \\ &\quad + \frac{c_2^2}{n} \sum \cos^2(\beta\nu + \delta). \end{aligned}$$

Die Streuung schwankt also um den idealen Wert

$$\sigma^2 = \frac{c_1^2 + c_2^2}{2}.$$

Der Zähler des Autokorrelationskoeffizienten s -ter Ordnung erhält die Form:

$$\begin{aligned} n \sigma^2 k_s &= \sum y_\nu y_{\nu+s} = c_1^2 \sum \cos(\alpha \nu + \gamma) \cos(\alpha(\nu+s) + \gamma) \\ &\quad + c_1 c_2 \sum \cos(\alpha \nu + \gamma) \cos(\beta(\nu+s) + \delta) + c_1 c_2 \sum \cos(\beta \nu + \delta) \\ &\quad \cos(\alpha(\nu+s) + \gamma) + c_2^2 \sum \cos(\beta \nu + \delta) \cos(\beta(\nu+s) + \delta). \end{aligned}$$

Bei beliebiger Vermehrung von n schwankt dieser Betrag, wie man nach Auflösung der \cos -Produkte leicht feststellt, immer enger um den Idealwert

$$c_1^2 \frac{n}{2} \cos \alpha s + c_2^2 \frac{n}{2} \cos \beta s,$$

der in allen denjenigen Fällen tatsächlich erreicht wird, in denen n eine ganze Anzahl von Schwebungen der beiden Elementarschwingungen umfaßt, da dann sämtliche einfachen Cosinussummen verschwinden, weil sie sich stets über eine volle Zahl von Perioden erstrecken. Andernfalls sind die hier vernachlässigten Glieder klein, wenn n hinreichend groß ist, und wenn nicht gerade die Differenz zwischen den Frequenzen α und β sehr klein ist, die Elementarperioden also sehr benachbart sind. Der Idealwert des Autokorrelationskoeffizienten s -ter Ordnung ist demnach

$$k_s = \frac{1}{2} \left\{ \frac{c_1^2}{\sigma^2} \cos \alpha s + \frac{c_2^2}{\sigma^2} \cos \beta s \right\},$$

so daß sich also die Folge der k_s aus zwei Cosinusgliedern von den Perioden der Originalreihe zusammensetzt, deren Amplitudenverhältnis gleich dem Quadrat des Amplitudenverhältnisses der Originalschwingungen ist. Sind also die beiden Amplituden verschieden, so wird in der k -Folge die größere dieser Amplituden stark bevorzugt. Die Herabdrückung des Gewichts der kleineren Amplituden ist die am meisten hervortretende Eigentümlichkeit dieses Ergebnisses. Wir werden später (V, 4) sehen, daß auf dieser Eigenschaft der k_s -Folge eine neuerdings viel benutzte Methode der Trennung sich überlagernder Periodizitäten beruht.

Das zweite Spezialbeispiel bezieht sich auf den Fall, daß die Beobachtungsreihe außer einer einfachen Welle noch eine zufällig-variable Funktion enthält, etwa einen Beobachtungsfehler von bestimmter Streuung μ . Es sei also

$$y_\nu = c \cos(\alpha \nu + \gamma) + \varepsilon_\nu \quad [\mathfrak{M}(\varepsilon) = 0; \mathfrak{M}(\varepsilon^2) = \mu^2],$$

dann ist bei hinreichend großem n der Mittelwert der Reihe null, und die Streuung zu berechnen aus:

$$\begin{aligned} n \sigma^2 &= \sum_{\nu=1}^n y_\nu^2 = c^2 \sum \cos^2(\alpha \nu + \gamma) + 2c \sum \varepsilon \cos(\alpha \nu + \gamma) + \sum \varepsilon_\nu^2 \\ &\sim \frac{n}{2} c^2 + n \mu^2. \end{aligned}$$

Für den Zähler erhält man

$$\sum y_\nu y_{\nu+s} = c^2 \sum \cos(\alpha\nu + \gamma) \cos(\alpha(\nu + s) + \gamma) + c \sum \varepsilon_\nu \cos(\alpha(\nu + s) + \gamma) \\ + c \sum \varepsilon_{\nu+s} \cos(\alpha\nu + \gamma) + \sum \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+s},$$

also für $s \geq 1$ den Idealwert

$$n \sigma^2 k_s = \frac{c^2}{2} \left\{ \sum \cos(\alpha(2\nu + s) + 2\gamma) + \sum \cos \alpha s \right\} \sim \frac{c^2}{2} \cdot n \cos \alpha s$$

und somit für den idealen Verlauf der k_s -Folge neben $k_0 = 1$

$$k_s = \frac{\frac{c^2}{2} \cos \alpha s}{\frac{c^2}{2} + \mu^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\mu^2}{c^2}} \cdot \cos \alpha s,$$

also eine Cosinuswelle mit einer um so stärker herabgesetzten Amplitude, je größer die Streuung der zufälligen Fehler im Vergleich zur Amplitude der Originalwelle ist.

Diese Beispiele, die sich leicht vermehren und detaillieren ließen, bezogen sich auf Fälle, in denen die Beobachtungsreihe — eventuell neben unperiodischen Bestandteilen — persistente Perioden enthielt. Unter solchen Umständen zeigte sich, daß die Folge der Autokorrelationskoeffizienten gleichfalls periodisch aufgebaut war und u. a. die gleichen Perioden, allerdings in anderem Amplitudenverhältnis aufwies. Das Vorhandensein irregulärer Bestandteile bewirkte eine Herabdrückung der Amplituden in der k_s -Folge und vor allem die Unmöglichkeit, daß für $s > 0$ die Extremwerte ± 1 irgendwo erreicht werden könnten.

Wie verhält sich nun die k_s -Folge, wenn persistente Periodizitäten in der ursprünglichen Reihe nicht vorhanden sind? Offenbar stellt dieser Fall ein Mittelding zwischen den extremen Annahmen dar, daß einerseits persistente Perioden vorhanden sind, andererseits die Beobachtungsreihe aus statistisch unabhängigen Einzelwerten, z. B. aus reinen Beobachtungsfehlern oder aus Werten, die sich wie solche verhalten, besteht. Man kann diesen allgemeinen Fall, der sich je nach den gegebenen Umständen dem einen oder dem andern der genannten Extreme nähern kann, als den der „*Quasipersistenz*“ bezeichnen. Dieser Begriff, dem wir bereits im vorigen Kapitel bei der analytischen Behandlung der Periodogramme von Beobachtungsreihen begegnet sind, gewinnt durch die statistische Betrachtung und besonders im Hinblick auf die Autokorrelation eine eigenartige Bedeutung.

Quasipersistente Perioden kommen in zahlreichen Naturvorgängen vor; in manchen lassen sie sich mit einer Deutlichkeit aufzeigen, die an ihrer „physikalischen Realität“ kaum einen Zweifel läßt, in anderen ist diese Realität ein heiß umstrittenes Problem. Was die ersteren anbetrifft, so stellt die Periode der Sonnenflecken das klassische Beispiel für sie dar: Hier, ebenso in dem Lichtwechsel mancher „halbregelmäßiger“ veränderlicher Sterne, haben wir einen periodischen Vorgang vor uns,

dessen Frequenz, Amplitude und Phase zeitlichen und oft sprunghaft auftretenden Veränderungen unterworfen sind. Immerhin sind diese periodischen Schwankungen selbst so in die Augen fallend, daß ihre Realität auch ohne Heranziehung der statistischen Expektanzbetrachtungen deutlich ist. Anders ist dies bei den wesentlich komplizierter aufgebauten Vorgängen, die wir etwa in der Meteorologie antreffen: die Frage nach der Realität der periodischen Luftdruckschwankungen z. B. ist lange Zeit verneint worden und wird selbst heute noch von manchen Forschern verneint, obwohl inzwischen gewichtige Gründe aufgedeckt wurden, die eine, wenn auch bedingte, Bejahung fordern. Die Ursache dieser Diskrepanz der Auffassungen liegt offenbar darin, daß die Analysenergebnisse hier außerordentlich stark von der Anlage der Rechnung, z. B. von der Wahl des Analysenintervalls abhängig sind, also durch mehr oder weniger willkürliche Maßnahmen beeinflußt werden können. Die Periodizität dieser Vorgänge bewegt sich demnach hart an der Grenze, die den Zufall von der Gesetzmäßigkeit trennt — die Gründe, die für die Annahme einer Quasiperiodizität sprechen, sind zwar vorhanden, aber nicht so gewichtig, daß sie die Gegengründe völlig zum Schweigen bringen, die für die Hypothese eines Zufallswaltens geltend gemacht werden könnten und auch gemacht werden.

Das schon mehrfach benutzte Beispiel einer Reihe von Luftdruckbeobachtungen mag auch jetzt wieder dazu dienen, die hier auftretenden Schwierigkeiten zu beleuchten und den Weg zu ihrer Überwindung zu zeigen. Es seien etwa die täglichen Luftdruckwerte (8 Uhr-Termin) einer bestimmten Beobachtungsstation und für einen beliebig langen Zeitraum vorgelegt. Wir wollen dabei annehmen (da es sich ja hier nicht um die konkreten Fragen der Luftdruckperiodizität, sondern um Grundsätzliches handelt), daß säkulare Schwankungen eliminiert seien; ebenso wollen wir von der in Wirklichkeit sehr stark ins Gewicht fallenden Tatsache absehen, daß die Streuung der Beobachtungen erheblichen jahreszeitlichen Schwankungen unterliegt, wenn sie über entsprechend kurze Intervalle genommen wird. Mit anderen Worten: es liege eine Beobachtungsreihe vor, die sich in jeder Beziehung wie eine Luftdruckreihe verhält, aber in bezug auf Mittelwert und Streuung homogen ist. Quasiperiodisch nennen wir eine solche Reihe, wenn in ihrem Verlauf periodische Schwankungen auftreten, die eine Zeitlang wirksam sind und dann wieder verschwinden. Solche kurzfristigen Schwingungen können gemeinsam, aber auch unabhängig voneinander entstehen und vergehen; ihre Wellenlängen können bestimmte und diskrete Werte bevorzugen oder auch willkürlich, d. h. nach undurchsichtigen Regeln, einem stetigen Spektralbereich entnommen sein. Der Spielraum der Möglichkeiten, der sich dadurch ergibt, ist sehr ausgedehnt — er wird auf der einen Seite durch den Fall der Aperiodizität, auf der andern durch die persistente Periodizität begrenzt, ohne daß jedoch diese

Begrenzung eindeutig festlegbar wäre. Vielmehr gibt es, wenn wir schon eine Klassifizierung der in diesen Fragenkomplex fallenden empirischen Kurven in periodische, quasiperiodische und aperiodische vornehmen wollen, sowohl zwischen den ersten beiden, als auch zwischen den letzten beiden, Übergangsklassen, die eine besondere Beachtung verdienen. Den Übergang zwischen den quasiperiodischen und den rein periodischen Kurven haben wir schon früher kennengelernt, ohne daß die jetzt zur Erörterung stehenden Fragen dabei aufgetaucht wären: er wird durch alle jene Beobachtungsreihen gebildet, die wir zwar als periodisch anzusehen gewohnt sind, weil gewisse Perioden in ihnen sehr lange Zeit hindurch zu verfolgen sind, ohne daß die Gewißheit einer *reinen* Periodizität besteht, d. h. ohne daß wir berechtigt wären, auf Grund der erkannten Perioden eine Extrapolation auf *beliebig* lange Zeiten zu unternehmen. Zum Beispiel würden wir die Sonnenfleckensreihe zu dieser Art von Beobachtungsreihen rechnen, wenn nicht die Erfahrung gelehrt hätte, daß von Zeit zu Zeit sprunghafte Änderungen der Wellenlänge um sehr merkbare Beträge vorkommen können. Wenn wir also die Sonnenfleckensreihe zu den quasiperiodischen Funktionen rechnen, so ordnet sie sich doch sehr dicht bei jener Übergangsgrenze ein, die zu den persistenten Periodizitäten hinüberführt. Andererseits ist der Unterschied, den wir zwischen den quasiperiodischen Funktionen und den durch willkürliche Auslosung aus irgendeinem Wertekollektiv gewonnenen Folgen zu machen haben, noch so groß und einschneidend, daß von einem unmittelbaren Übergang nicht die Rede sein kann. Die Zufallsfolge (als Musterbeispiel hierfür kann immer wieder eine Folge zufälliger Beobachtungsfehler herangezogen werden) ist durch die wesentliche Eigentümlichkeit gekennzeichnet, daß jeder folgende Wert von den vorhergehenden statistisch unabhängig ist, daß also die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Wertekombination lediglich von der Verteilung der Werte im Urkollektiv, nicht aber von der Reihenfolge abhängt, in der diese Werte aus dem Urkollektiv entnommen wurden. Ist also die Verteilung eines Kollektivs durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\varphi(y)$ gegeben, so ist durch den Ausdruck $\varphi(y_2) dy_2$ nicht nur die Wahrscheinlichkeit, daß eine Beobachtung in die Größenklasse $[y_2; y_2 + dy_2]$ falle, darzustellen, sondern auch die bedingte Wahrscheinlichkeit für das gleiche Ereignis, falls die vorhergehende Beobachtung den Wert y_1 ergeben hat.

Bei unserem Beispiel von der Luftdruckreihe ist diese Unabhängigkeitsbedingung keineswegs erfüllt. Zwar bilden die Einzelwerte des Luftdrucks in unserer Reihe ein Kollektiv mit bestimmter Verteilungsform $\varphi(y)$, und wenn wir mit einem beliebig herausgegriffenen Beobachtungstag beginnen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Anfangswert y_1 sei, durch $\varphi(y_1)$ gegeben. Sobald aber dieser Anfangswert festliegt, können wir die Wahrscheinlichkeit für den nächsten keineswegs auf die Verteilung des

Urkollektivs zurückführen. Ist y_1 ein hoher Luftdruckwert, so besteht zwar die Möglichkeit, daß am nächsten Tage ein tiefer Wert y_2 gemessen werde; die Wahrscheinlichkeit, daß dies wirklich eintreffe, ist aber sehr gering gegenüber der Wahrscheinlichkeit, daß auch der zweite Tag einen hohen Wert ergebe. Mit anderen Worten: die Luftdruckwerte zeigen von Tag zu Tag eine gewisse *Erhaltungstendenz*; liegt y_1 fest, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für y_2 nicht durch die Verteilung des Urkollektivs, die wir als die *primäre* Verteilung bezeichnen wollen, gegeben, sondern durch eine andere. Ist durch geeignete Wahl des Koordinatensystems (y) dafür Sorge getragen, daß der Mittelwert der primären Verteilung null sei, so ist die mathematische Erwartung für y_1 null; die bedingte mathematische Erwartung von y_2 ist hingegen eine Funktion von y_1 , desgleichen die bedingte Streuung aller möglichen Werte y_2 , die auf einen Vorwert von der Größe y_1 folgen. Die statistische Behandlung dieser Frage führt zwangsläufig auf die Betrachtung des zweidimensionalen Kollektivs aller möglichen Paare von aufeinanderfolgenden Beobachtungswerten (y_v, y_{v+1}) und somit auf das Problem der Autokorrelation erster Ordnung. Die Abhängigkeit der mathematischen Erwartung von y_{v+1} in Beziehung zu dem Vorwerte y_v wird durch die Regressionslinie von y_{v+1} bezüglich y_v gegeben. Ist diese eine Gerade (und die Erfahrung bestätigt dies im Falle der Luftdruckbeobachtungen angenähert), so stellt der Autokorrelationskoeffizient erster Ordnung ein geeignetes statistisches Maß für die Strenge der Erhaltungstendenz dar.

Ein Autokorrelationskoeffizient erster Ordnung also, der merklich, d. h. weit außerhalb der Unsicherheitsgrenzen, von null verschieden ist, beweist demnach, daß die betreffende Beobachtungsreihe eine Erhaltungstendenz besitzt, daß also ihre Einzelwerte nicht unabhängig voneinander sind; es ist damit eine notwendige, wenn auch keineswegs hinreichende Bedingung dafür gefunden, daß die Beobachtungsreihe nicht als Produkt des Zufalls angesehen werden kann. Andererseits ist damit noch keineswegs irgend etwas darüber ausgesagt, ob die Reihe periodisch oder auch nur quasiperiodisch ist. Die Tatsache, daß die Beobachtungswerte Erhaltungstendenz zeigen, besagt ja lediglich, daß ihre graphische Aufzeichnung als Funktion der Zeit einen mehr oder weniger glatten oder der Glättung fähigen Verlauf hat, dagegen nichts über die besondere Art dieses Verlaufs. Von diesem Verlauf ist sonst nur noch bekannt, daß die Schwankungen in gewissen Grenzen vor sich gehen, die durch die Streuung des Urkollektivs gezogen sind. Selbst wenn die Bindung zwischen aufeinanderfolgenden Beobachtungswerten, die durch die Erhaltungstendenz gegeben ist, sehr eng sein sollte, wenn also eine Verbindung der aufgezeichneten Punkte durch eine stetige und glatte Kurve nicht nur möglich, sondern auch natürlich erscheint, braucht die „Bewegung“, die durch diese Kurve versinnbildlicht wird, durchaus nicht gesetzmäßig, also insbesondere auch nicht periodisch oder quasiperiodisch

zu sein, sondern kann in erweitertem Sinne als willkürlich angesehen werden. Beliebige viele Kurven solcher Art lassen sich etwa dadurch erzeugen, daß ein Zeichner aufgefordert wird, innerhalb bestimmter Ordinatenstrahlen einen beliebig gestalteten Kurvenzug zu zeichnen, wobei ihm lediglich vorgeschrieben wird, daß die zu zeichnende Kurve eine stetige und eindeutige Funktion der Abszisse darstellen soll, und daß extreme Ordinaten seltener vorkommen sollen als solche kleinen Betrages. Dadurch ist allerdings die Notwendigkeit gegeben, daß diese Kurve Auf- und Abwärtsbewegungen zeigt, also wellenartige Schwankungen unterschiedlicher Höhe enthält, die eine Quasiperiodizität vortäuschen, wenn wir auch — da wir die willkürliche Art ihrer Entstehung kennen — in diesem Falle genau wissen, daß von einer „wirklichen“ Quasiperiodizität keine Rede sein kann. Im Falle der Luftdruckschwankungen haben wir es nun, rein geometrisch gesehen, mit einem ähnlichen Vorgang zu tun: Auch hier wird eine stetige Kurve erzeugt, die sich zwischen gewissen Grenzen in ständigen Schwankungen auf- und ab bewegt, nur daß der Zeichenstift nicht durch einen an keinerlei besondere Vorschriften gebundenen Zeichner bewegt wird, sondern durch den Schreibhebel eines Barographen, der durch die natürlichen Schwankungen des Luftdrucks gesteuert wird. Hier wissen wir also nicht von vornherein, ob diese Steuerung willkürlich in diesem erweiterten Sinne betätigt wird, oder ob sie durch ein periodisches oder quasiperiodisches Gesetz bestimmt oder wenigstens mitbestimmt wird, sondern können diesen Sachverhalt erst durch eine Diskussion der entstandenen Kurve prüfen.

Wir haben also erkannt, daß der Übergangsbereich zwischen Reihen statistisch unabhängiger Beobachtungen (Fehlerreihen) und quasiperiodischen Reihen durch jene Klasse von Wertefolgen ausgefüllt wird, die eine Erhaltungstendenz zeigen, aber darüber hinaus keine Beziehung zu gesetzlich geregelten Ursachen haben. Die Schwankungen dieser Klasse von Reihen sind also zufälliger Natur und lediglich durch die Erhaltungstendenz bedingt, die für die betreffende Reihe zwar ein formbildendes Prinzip, aber keineswegs die Quelle einer inneren Gesetzmäßigkeit bedeutet.

Die Frage nach der physikalischen Realität einer vermuteten Quasiperiodizität innerhalb der vorgelegten Beobachtungsreihe deckt sich demnach mit der Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit Erscheinungen, die auf eine Quasiperiodizität hinzuweisen scheinen, lediglich auf Grund der durch statistische Erhebungen feststellbaren Erhaltungstendenz und im übrigen durch den Zufall erklärlich sind. Diese Fragestellung, deren Erörterung sehr schwierig und bis heute noch nicht in erschöpfender Weise gelungen ist, führt uns nach dem oben Gesagten auf die Autokorrelation zurück. Wir wollen hierüber zunächst einige heuristische Überlegungen anstellen, die die Grundlage für die exakteren Betrachtungen des nächsten Abschnitts bilden werden.

Es bedarf keiner besonderen Erklärung dafür, daß eine Erhaltungstendenz überall dort vorliegt, wo eine Beobachtungsreihe durch Auswahl diskreter (insbesondere äquidistanter) Ordinaten aus einer stetigen Grundkurve entstanden ist, vorausgesetzt, daß die Ordinaten dicht genug aufeinanderfolgen, um den allgemeinen Verlauf der Kurve wiederzugeben. Es ist ferner klar, daß in diesem Falle die Beziehung zwischen aufeinanderfolgenden Werten um so deutlicher hervortritt, je größer die Dichte der ausgewählten Ordinaten ist. Würden wir den Luftdruck nicht, wie früher angenommen, in Abständen von 24 Stunden ablesen, sondern stündlich, so würde sich zeigen, daß der Wert y_2 sich nur noch innerhalb eines sehr kleinen Bereiches von dem vorausgegangenen Wert y_1 unterscheiden kann. Während es bei täglichen Ablesungen immerhin möglich, wenn auch wenig wahrscheinlich war, daß auf einen hohen Luftdruckwert ein tiefer folgt, so ist dies bei stündlichen Ablesungen so gut wie ausgeschlossen. War die durchschnittliche Streuung der Luftdruckwerte um den Vortagswert von der Größenordnung einiger Millimeter, so wird die Streuung um den vorstündlichen Wert höchstens einige Zehntelmillimeter betragen. Die Autokorrelation, gemessen durch den Autokorrelationskoeffizienten, die für die Verschiebung null den trivialen Wert eins besitzt, wird sich demnach bei einer geringen (z. B. stündlichen) Verschiebung von eins nur wenig unterscheiden, während sie bei Vergrößerung der Verschiebung im allgemeinen abnimmt. Bei Verschiebung um einen Tag ergaben Versuche an Luftdruckreihen mitteleuropäischer Stationen Autokorrelationskoeffizienten, die meist zwischen 0,7 und 0,8 lagen, während bei stündlicher Verschiebung 0,98 bis 0,99 erhalten wurde. Jedenfalls ist das eine klar: Der Autokorrelationskoeffizient eines stetigen Kurvenzugs, als Funktion der Verschiebung betrachtet, nimmt bei wachsenden Verschiebungen von dem Ausgangswert eins zunächst ab, da dieser Ausgangswert zugleich das absolute Maximum darstellt, das höchstens im Falle einer ungestörten reinen Periodizität bei Verschiebung um eine volle Grundperiode wieder erreicht werden kann. $k(\delta)$ als Funktion der stetigen Verschiebung δ ist ferner stetig. Es wird also bei kleinen Verschiebungen anfangs monoton abnehmen, kann aber dann Schwankungen in seinem Verlauf zeigen, die von der funktionellen Eigenart der vorgelegten Beobachtungskurve abhängig sind. Diese Schwankungen sind periodisch, wenn die Beobachtungskurve selbst periodisch ist, jedoch sind auch bei willkürlich gezeichneten Kurven größere Schwankungen durchaus zu erwarten, wenn auch hier die Möglichkeit, daß einer der Extremwerte $+1$ oder -1 jemals erreicht werde, so gut wie ausgeschlossen ist. Nehmen wir an, daß die vorgelegte willkürlich gezeichnete Kurve beliebig ausgedehnt ist, die Korrelationskoeffizienten $k(\delta)$ aber aus der Korrelierung von zwei Bereichen von der gleichen Länge n erhalten wurden, also etwa aus den Bereichen $y(0), \dots, y(n)$ und $y(\delta), \dots, y(\delta+n)$,

so könnte es natürlich auch durch Zufall möglich sein, daß der Kurvenverlauf in beiden Bereichen für ein hinreichend großes δ genau proportional ist. Dann würde natürlich $k(\delta) = 1$ sein, aber nur in diesem außerordentlich unwahrscheinlichen Falle. Sollte dies Ereignis bei einem konkreten Versuch tatsächlich eintreten, so wird es stets mit hoher Wahrscheinlichkeit als ein Zeichen dafür anzusehen sein, daß diese Wiederkehr des gleichen Verlaufs nicht zufällig, sondern gesetzlich bedingt ist. Das gleiche wird man schon dann erschließen, wenn überhaupt für große Verschiebungen Autokorrelationskoeffizienten von beträchtlicher Amplitude auftreten, auch wenn sie keineswegs in der Nähe von $+1$ oder -1 liegen. Bei zufälligen Kurven ist es nicht zu erwarten, daß sich verschiedene Intervalle in ihrem Verlauf ähnlich sind; die mathematische Erwartung des Korrelationskoeffizienten zwischen ihnen ist sicher null, wenn die Intervalle sich nicht überdecken, da dann zwei völlig unabhängige Kurvenzüge miteinander verglichen werden. Nur für kleine Verschiebungen ist die mathematische Erwartung von $k(\delta)$ sicher positiv, für sehr kleine δ sogar nahezu 1, da hier die vorausgesetzte Erhaltungstendenz, unabhängig von dem sonstigen funktionellen Verhalten der Kurve, wirksam ist. Aus der Tatsache, daß $k(\delta)$ für $\delta = 0$ den Wert 1 hat und als Funktion von δ stetig ist, folgt unmittelbar, daß für wachsende δ diese Funktion den Ordinatenbereich von 1 bis 0 abwärts auf alle Fälle durchlaufen muß, sei es langsam oder schnell, monoton fallend oder unter Schwankungen, ganz unabhängig davon, ob die betrachtete Kurve „zufällig“ oder auf gesetzmäßige Weise zustande gekommen ist.

Die großen positiven $k(\delta)$, die bei kleinem δ auch bei zufälligen Kurven erhalten werden, beruhen auf der engen, durch die Erhaltungstendenz gegebenen statistischen Beziehung zwischen benachbarten Werten. Unter der Voraussetzung der Zufälligkeit der Kurvenziehung in dem oben beschriebenen erweiterten Sinne ist auch ohne tiefergehenden Beweis plausibel, daß diese Beziehung um so loser werden muß, je größer der Abstand δ der aufeinander zu beziehenden Einzelwerte ist. Wir müssen streng unterscheiden zwischen den konkreten Werten der Autokorrelationskoeffizienten $k(\delta)$, die auf- und abschwanken werden und unter Umständen sogar periodischen Verlauf zeigen können (denn auch die periodische Kurve gehört, wenn auch mit geringer Wahrscheinlichkeit, dem Möglichkeitenbereich des Zufalls an), und zwischen den *mathematischen Erwartungen* von $k(\delta)$, die sich als Durchschnittswerte unter Berücksichtigung aller Zufallsmöglichkeiten ergeben. Die konkreten $k(\delta)$ werden nach anfänglicher Abnahme gegen null (die nicht monoton zu sein braucht) für größere Verschiebungen um null *schwanken*, ihre mathematische Erwartung wird dagegen für wachsende δ gegen null monoton abnehmen. Die größte Schwierigkeit liegt weniger in dem wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweis für diese Tatsache,

da man diese auch nach dem Satz vom fehlenden Grunde durch eine rein logische Schlußfolgerung erhalten würde: Es ist kein Grund dafür einzusehen, daß die systematische Beziehung zwischen Beobachtungswerten mit wachsendem Abstand wieder enger werden sollte, nachdem sie einmal loser geworden ist. Was dagegen aus der Tatsache der Erhaltungstendenz allein nicht ableitbar ist, ist die Art und die Schnelligkeit der Abnahme der „idealen“ Autokorrelationskurve gegen null, also das ideale Abnahmegesetz. Es ist klar, daß diese Abnahme langsam erfolgen wird, wenn die Schwankungen der Zufallskurven im Durchschnitt langwellig sind, dagegen schnell, wenn sie kurzwellig sind. Es ist also, wenn überhaupt von einem idealen Autokorrelationsgesetz gesprochen werden soll, noch notwendig, den Bereich der Möglichkeiten für zufällige Kurvenzüge entsprechend einzuschränken, indem neben der Forderung der Stetigkeit und der Forderung, daß die Ordinaten einem vorgegebenen primären Verteilungsgesetz gehorchen sollen, noch Vorschriften über die durchschnittliche Wellenlänge der Schwankungen erhoben werden. Durch den allgemeinen Charakter der Schwankungen wird also, unabhängig davon, ob diese als periodisch, quasiperiodisch oder zufällig zu bezeichnen sind, die Erhaltungstendenz quantitativ modifiziert: die Erhaltungstendenz ist groß, wenn die Änderungen der Beobachtungsfunktion in der Zeiteinheit durchschnittlich gering im Vergleich mit der Gesamtstreuung sind, und umgekehrt.

Wenden wir diese Überlegungen auf das Beispiel vom Luftdruck an, so läßt sich, ohne zunächst an die Entscheidung der Frage nach der Quasiperiodizität zu denken, ein bestimmter allgemeiner Charakter der Schwankungen als gegeben ansehen. Die durchschnittliche Wellenlänge der Luftdruckschwankungen ist so groß, daß die Korrelation zwischen Beobachtungen, die einen Tag auseinanderliegen, noch beachtlich große positive Werte liefert. Je nachdem, welche Beobachtungszeiträume wir der Berechnung zugrunde legen, ergeben sich verschiedene konkrete Werte des Autokorrelationskoeffizienten; dehnen wir die Untersuchung über genügend viele solcher Zeiträume aus, so finden wir, daß die konkreten Werte in einem ziemlich engen Variationsbereich um eine feste Mittellage schwanken. Der ideale Autokorrelationskoeffizient für eintägige Verschiebung läßt sich somit durch Auswertung eines großen Beobachtungsbereichs beliebig annähern. Das gleiche gilt, wenn wir die Verschiebung um zwei, drei und mehr Tage zugrunde legen — die konkreten $k(\delta)$ -Folgen werden Schwankungen zeigen, während die langjährigen Mittelwerte die monoton abnehmende Gestalt der idealen k -Funktion mit großer Annäherung verraten. Es besteht jedoch die Möglichkeit, daß dies für größere δ nicht mehr der Fall ist, sondern daß von einem gewissen δ ab, für das $k(\delta)$ im Mittelwert null ist, die k systematisch negativ und später wieder positiv werden. Das würde auf das Vorhandensein von Perioden hindeuten.

Auch quasipersistente Perioden könnten sich auf diese Weise verraten, wenn die Länge der in einem einzelnen k -Wert zusammengefaßten Beobachtungsintervalle entsprechend klein ist. Je kleiner δ ist, also vor allem auf dem ersten absteigenden Ast der $k(\delta)$ -Kurve, um so mehr wird der Verlauf von $k(\delta)$ durch die Erhaltungstendenz, also durch allgemeine statistische Eigenschaften der Beobachtungsreihe, bestimmt sein; je größer δ ist, um so mehr treten spezielle periodische Eigenschaften in den Vordergrund. Man wird also, wenn eine Beobachtungsreihe vorgelegt ist, die genügend lang ist, um die Ableitung ihrer die Erhaltungstendenz betreffenden charakteristischen Eigenschaften sicher zu gewährleisten, die Bestimmung der idealen $k(\delta)$ -Kurve nur auf die ersten Werte der Folge der empirischen Autokorrelationskoeffizienten gründen, die bis zur ersten Nullstelle reichen.

Über die mathematische Form der Abnahme der idealen k -Funktion lassen sich vorderhand keine bestimmten Angaben machen, doch wird es in bestimmten Fällen (wie z. B. bei Luftdruck- und anderen meteorologischen Kurven) immer möglich sein, eine Form zu finden, nach der die Angleichung der empirischen Werte möglich ist. Da man auch negative Verschiebungen einführen kann, und es a priori nicht einzu- sehen ist, warum bei gleich großen positiven und negativen Verschiebungen verschiedene Werte des idealen Autokorrelationskoeffizienten entstehen sollten, wird es zweckmäßig sein, der idealen $k(\delta)$ -Kurve eine zu $\delta = 0$ symmetrische Gestalt zuzuschreiben, z. B. die Form

$$k(\delta) = e^{-\lambda^2 \delta^2},$$

in der die Konstante λ den Grad der Erhaltungstendenz repräsentiert und offenbar im umgekehrten Sinne wie diese wächst. Definieren wir $k(\delta)$ nur einseitig, nehmen wir also auf die genannte Symmetrie keine Rücksicht, so lassen sich auch folgende Näherungsfunktionen benutzen:

$$k(\delta) = e^{-\lambda \delta} \quad \text{oder} \quad k(\delta) = (1 + \lambda \delta) e^{-\lambda \delta},$$

die sich wesentlich dadurch unterscheiden, daß bei der zweiten die Tangente für $\delta = 0$ waagrecht verläuft, bei der ersten jedoch eine absteigende Anfangsrichtung besitzt. Die Erfahrungen an Luftdruckbeobachtungen, die als typisches Beispiel für stetig und glatt verlaufende Beobachtungskurven gelten können, zeigen die erstgenannte Eigenschaft. Die erstere Normalform läßt sich unter gewissen Voraussetzungen bei unstetigen, aber autokorrelierten Reihen verwenden. Alle drei $k(\delta)$ -Formen haben als gemeinsame Eigenschaft, daß sie mit wachsendem $\delta > 0$ monoton abnehmen und sich asymptotisch der Null nähern, ohne jemals negativ zu werden. Diese Eigenschaft entspricht unseren Vorstellungen von der ständigen Abnahme der statistischen Beziehungen zwischen Beobachtungswerten mit wachsender zeitlicher Entfernung am besten. Eine zweite gemeinsame Eigenschaft der drei Formeln

ist die, daß sie nur eine einzige Konstante (λ) enthalten, die als Maß für die Erhaltungstendenz zu gelten hat. Das bedeutet in Wirklichkeit eine Idealisierung der Verhältnisse, deren Berechtigung im Einzelfalle noch geprüft werden müßte. Es handelt sich hier um eine Idealisierung, die derjenigen an die Seite zu stellen ist, die wir begehen, wenn wir etwa das Verteilungsgesetz eines gegebenen Kollektivs durch die ideale Form des GAUSSSchen Fehlergesetzes wiedergeben. Es bedeutet in diesem Falle, daß wir, um die statistischen Eigenschaften einer „autokorrelierten“ Beobachtungsreihe festzulegen, außer den fundamentalen statistischen Konstanten der primären Verteilung, also vornehmlich außer dem Mittelwert und der Streuung der Beobachtungen, als Ausdruck ihrer Erhaltungstendenz nur noch eine einzige weitere statistische Konstante, nämlich λ in einer der obengenannten Bedeutungen, hinzufügen. Man wird sich damit in allen denjenigen Fällen begnügen dürfen, wo der Verlauf der empirischen k (δ)-Kurve nicht auf die Notwendigkeit der Einführung von weiteren Konstanten hinweist.

8. Die Expektanz autokorrelierter Beobachtungsreihen.

Nach den Vorbereitungen im vorigen Abschnitt sind wir in die Lage versetzt, auch die Frage der Expektanz von Periodizitäten für den Fall in Angriff zu nehmen, daß die zu untersuchenden Beobachtungsreihen merklich autokorreliert sind. Daß gesonderte Untersuchungen unter diesen Umständen am Platze sind, und daß die Expektanzfrage hier durch die früheren, auf die Arbeiten von A. SCHUSTER zurückgehenden, Überlegungen nicht hinreichend geklärt werden kann, läßt sich sehr einfach zeigen.

Wir hatten die Expektanz einer Beobachtungsreihe $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ auf Grund der SCHUSTERSchen Theorie in der Form

$$E = \frac{2 \mu}{\sqrt{n}}$$

erhalten, wobei μ die Streuung der Beobachtungswerte um ihren Mittelwert bedeutete, den wir durch geeignete Wahl des Anfangspunktes der y -Zählung auf null gebracht hatten. Die n konkreten Werte y sollten also einem vorgegebenen Kollektiv vom Mittelwert null und von der Streuung μ entnommen sein. Geschah diese Entnahme willkürlich, so bedeutete E^2 die mathematische Erwartung des Amplitudenquadrats einer FOURIER-Welle, und da die Formel für E die Frequenz dieser Welle nicht enthielt, ergab sich, daß diese mathematische Erwartung von der Wellenlänge der Versuchsperiode völlig unabhängig war. Darüber hinaus fanden wir, daß E auch von der speziellen Verteilungsform des Urkollektivs unabhängig war, und daß also die Streuung als einzige Verteilungskonstante die Expektanz bestimmte. Im übrigen war die Expektanz der Quadratwurzel aus der Beobachtungszahl

umgekehrt proportional, so daß diese durch beliebige Vermehrung der zur Bildung der FOURIER-Konstanten benutzten Beobachtungen beliebig verkleinert werden konnte. Die Bedeutung des Ergebnisses war aber die, daß durch den Expektanzwert E ein Vergleichsmaßstab für die erhaltenen Amplituden der Versuchswellen geschaffen wurde, an dem man die „Realität“ der betreffenden Wellen abzuschätzen vermochte: Übertraf die tatsächlich ermittelte Amplitude die Expektanz um mehr als das Dreifache, so erwies sich die Wahrscheinlichkeit für ein Spiel des Zufalls als so gering, daß man berechtigt war, eine nicht-zufällige Entstehung dieser Welle in Betracht zu ziehen.

Bei diesem Vergleich haben wir uns auf den völlig unvoreingenommenen Standpunkt gestellt, daß über das Bestehen irgendeines Zusammenhangs zwischen den Größen γ a priori nichts bekannt sei, außer daß diese Größen einem Kollektiv von der Streuung μ angehören. Es wäre also a priori als ebenso wahrscheinlich anzunehmen gewesen, daß diese n Größen sich in irgendeiner anderen, durch willkürliche Vermischung entstandenen Reihenfolge präsentiert hätten; das heißt also: jede beliebige Permutation der vorgelegten γ -Folge könnte mit der gleichen Berechtigung wie diese selbst als Möglichkeit angesehen werden. Erst a posteriori, also etwa durch das Ergebnis, daß die FOURIER-Welle r -ter Ordnung eine die Expektanz wesentlich überschreitende Amplitude zeigt, gelangt man zu der Erkenntnis, daß die Reihenfolge, in der die vorgelegten γ , erscheinen, doch einem inneren Gesetz entspricht.

In den meisten praktisch vorkommenden Fällen wird nun diese Schlußweise keineswegs dem wirklichen Sachverhalt gerecht. Wir dürfen uns zwar, wenn wir unseren Realitätsmaßstab ohne Voreingenommenheit konstruieren wollen, auf den Standpunkt stellen, daß wir über etwaige Perioden in der vorgelegten Reihe nichts wissen. Es ist aber nur selten ohne Vergewaltigung der gegebenen Umstände möglich, ein Wissen über die Struktur der Beobachtungsreihe überhaupt abzuleugnen. Sei z. B. eine Reihe von täglichen Luftdruckwerten vorgelegt, so wissen wir, daß auf einen großen positiven Wert γ_1 mit größter Wahrscheinlichkeit ein positiver Wert γ_2 folgt, und daß ein großer negativer Wert sehr unwahrscheinlich wäre, während diese Eigenart unserer Reihe bei beliebiger Vermischung vollkommen zerstört werden würde. Unsere Kenntnis von der Erhaltungstendenz der Beobachtungen verpflichtet uns dazu, diese bei der Aufstellung des Realitätsmaßstabes als eine Kenntnis a priori mit in Rechnung zu stellen — sie ist, genau wie die Streuung des Urkollektivs, eine statistische Maßzahl, durch welche die Gesamtheit der Möglichkeiten einer Variation der Beobachtungsreihe mitbestimmt ist. Hatten wir vorher die Gesamtheit der Möglichkeiten lediglich durch willkürliche Entnahme von n beliebigen Werten des Urkollektivs auf die verschiedenste Weise erschöpft, so ist uns darüber hinaus jetzt vorgeschrieben, daß die ausgelosten

n -gliedrigen Wertkomplexe in ihrer jeweiligen Reihenfolge eine Erhaltungstendenz zeigen, die mit unseren Vorstellungen a priori über die Erhaltungstendenz innerhalb des beobachteten Naturvorgangs in Einklang stehen. Da die Gesamtheit der möglichen Wertkomplexe und die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen von ihnen eine andere ist als die unter den früheren Voraussetzungen erhaltene, so wird auch der Mittelwert der Amplitudenquadrate, den diese Zusammenstellung liefert, ein anderer sein. Die Expektanz wird nicht nur von der Streuung des Urkollektivs, sondern vermutlich auch mehr oder weniger von der Maßzahl oder den Maßzahlen abhängen, die wir zur Charakterisierung der Erhaltungstendenz zu benutzen haben.

Am deutlichsten wird der Unterschied, der zwischen den Ergebnissen beider Schlußweisen herausspringen kann, wenn wir ein einfaches Beispiel betrachten: Die vorgelegte Reihe habe die Gestalt einer einfachen Sinuswelle und umfasse eine volle Anzahl (ν) von Schwingungen. Wir könnten uns nun auf den primitiven Standpunkt stellen, daß wir über zeitliche Zusammenhänge zwischen den Beobachtungswerten gar nichts wissen, daß wir vielmehr die Beobachtungen ihrer Natur nach für „Fehler“ halten oder mangels besseren Wissens zu halten uns berechtigt glauben. Ist in Wirklichkeit die Amplitude der Schwingung c , so ergibt sich, wie bekannt, die Streuung aus

$$\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n y_{\nu}^2 = \frac{c^2}{n} \sum \cos^2 (\alpha \nu + \beta) \quad \text{zu} \quad \mu \rightarrow \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Die Expektanz für n äquidistante Beobachtungen ist dann

$$E = c \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Schon bei einer verhältnismäßig kleinen Zahl von Beobachtungen ($n > 18$) wird also die Amplitude c des ν -ten FOURIER-Gliedes die dreifache Expektanz überschreiten. Da das Verhältnis zwischen Amplitude und Expektanz wie \sqrt{n} wächst, so ließe sich die Periodenwahrscheinlichkeit beliebig vergrößern, wenn die Zahl der Beobachtungswerte entsprechend vergrößert würde. Solange man dabei an der Vorstellung festhalten würde, daß diese neuen Beobachtungen sich an die Folge der alten unter Wahrung der gleichen Abstände anschließen, bleibt diese Schlußfolgerung plausibel. Die SCHUSTERSche Theorie bietet aber hierfür nicht den geringsten Anhaltspunkt; sie bleibt vielmehr in gleicher Form bestehen, wenn die neuen Werte in die Lücken zwischen den alten eingefügt werden. Die Theorie geht dabei von der Voraussetzung aus, daß diese eingefügten Werte a priori wiederum beliebig aus dem Urkollektiv ausgelost zu denken sind; in der Tat wäre dann der Fall, daß die eingefügten Werte sich einigermaßen glatt dem wellenförmigen Zuge der ersten n Beobachtungen anpassen würden, außerordentlich

unwahrscheinlich, so daß also die von der Theorie geforderte Verminderung der Zufallswahrscheinlichkeit mit der Erwartung übereinstimmen würde. Anders hingegen, wenn wir von vornherein wissen, daß die Beobachtungen einer mehr oder weniger „glatten“ Registrierkurve durch Ordinatenauswahl entnommen worden sind. Auch ohne daß wir über die periodischen Eigenschaften der Kurve a priori etwas zu wissen brauchen, ist es uns dann klar, daß die Anpassung der zwischengeschalteten Werte an den allgemeinen Verlauf der ursprünglichen n -gliedrigen Beobachtungsreihe kein merkwürdiger Zufall ist, sondern wegen der Erhaltungstendenz notwendig war. Gehört demnach die Erhaltungstendenz zu den uns bekannten statistischen Eigenschaften des Beobachtungsvorgangs, so wird von einer bestimmten Ordinatendichte ab eine weitere Verdichtung der Reihe durch Zwischenwerte keinen Einfluß mehr auf die Periodenwahrscheinlichkeit haben dürfen. Die Expektanz wird sich also nur bei Verlängerung der Reihe durch angefügte Beobachtungen, nicht aber durch Auffüllung von Lücken verkleinern.

Allgemein erhält man als Quadrat einer Periodogrammamplitude den Ausdruck

$$H^2 = \frac{4}{n^2} \left(\sum_{\nu=1}^n y_{\nu} \cos \nu \alpha \right)^2 + \frac{4}{n^2} \left(\sum_{\nu=1}^n y_{\nu} \sin \nu \alpha \right)^2,$$

wenn y_1, y_2, \dots, y_n eine äquidistante Beobachtungsreihe und α die Frequenz der Versuchswelle ist. Durch Ausführung der Quadrate und Sammlung der dabei auftretenden Faktoren

$$\cos \varrho \alpha \cos \sigma \alpha + \sin \varrho \alpha \sin \sigma \alpha = \cos (\varrho - \sigma) \alpha$$

erhält man hieraus

$$H^2 = \frac{4}{n^2} \left\{ \sum_{\nu=1}^n y_{\nu}^2 + 2 \cos \alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} y_{\nu} y_{\nu+1} + 2 \cos 2 \alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{n-2} y_{\nu} y_{\nu+2} + \dots \right. \\ \left. \dots + 2 \cos (n-2) \alpha \cdot \sum_{\nu=1}^2 y_{\nu} y_{\nu+n-2} + 2 \cos (n-1) \alpha \cdot y_1 y_n \right\}.$$

Das Quadrat der Expektanz ergibt sich dann ganz allgemein als der statistische Mittelwert dieses Ausdrucks:

$$E^2 = \mathfrak{M}(H^2) = \frac{4}{n^2} \{ n \mathfrak{M}(y_{\nu}^2) + 2 \cdot (n-1) \cos \alpha \cdot \mathfrak{M}(y_{\nu} y_{\nu+1}) + \dots \\ \dots + 2 \cdot (n - (n-1)) \cos (n-1) \alpha \cdot \mathfrak{M}(y_{\nu} y_{\nu+n-1}) \}.$$

Läßt sich die Reihe als „statistisch homogen“ betrachten, so ist

$$\mathfrak{M}(y_{\nu}^2) = \mu^2$$

und, falls $\mathfrak{M}(y_{\nu}) = 0$, die Beobachtungen also auf ihren Mittelwert bezogen waren, auch

$$\frac{\mathfrak{M}(y_{\nu} y_{\nu+s})}{\mu^2} = \mathfrak{M}(k_s)$$

und daher:

$$E^2 = \frac{4\mu^2}{n} \left\{ 1 + 2 \sum_{s=1}^{n-1} \mathfrak{M}(k_s) \cdot \left(1 - \frac{s}{n} \right) \cos s \alpha \right\}.$$

Somit läßt sich die Expektanz, außer durch die Streuung μ , durch die idealen Autokorrelationskoeffizienten wiedergeben, wobei das Gewicht derselben mit fortschreitender Ordnung abnimmt. Diese Formel zeigt den oben vermuteten Zusammenhang zwischen Expektanz und den statistischen Konstanten der Erhaltungstendenz. Es ist klar, daß für die obigen Mittelwerte nicht etwa die konkreten Werte k_s einzusetzen sind, die man aus den verfügbaren n Ordinaten y , unmittelbar erhalten würde. Denn dann würde die Identität $\mathfrak{M}(H^2) = H^2$ entstehen, die offenbar nichtssagend ist. Vielmehr haben die Mittelwerte die Bedeutung von idealen Größen, beziehen sich also auf das gesamte Beobachtungskollektiv mit allen statistischen Eigenschaften. Soweit diese nicht bekannt sind, müssen die besten Näherungswerte dafür eingesetzt werden, die zur Verfügung stehen. Insbesondere sind also für die Autokorrelationskoeffizienten nicht die empirischen, mit allen konkreten, also auch allen periodischen Eigenschaften der Beobachtungsreihe behafteten Werte, sondern die idealen Werte einzusetzen, von deren Verhalten wir im vorigen Abschnitt ein ungefähres Bild gewonnen haben. Wir werden also unsere idealen Autokorrelationskoeffizienten den empirischen dergestalt angleichen, daß sie für die niederen Ordnungen mehr oder weniger schnell gegen null abnehmen und sich im Gebiet der höheren Ordnungen asymptotisch der Null anschmiegen. Mangels einer exakten Theorie ist es statthaft, für die Autokorrelationskoeffizienten niederer Ordnung die empirischen Werte selbst einzusetzen, bis diese sich der ersten Nullstelle genähert haben. Von da ab wäre dann in der Expektanzformel für die weiteren $\mathfrak{M}(k_s)$ der Wert null zu benutzen.

Für den Fall der statistischen Unabhängigkeit der Beobachtungswerte ergibt sich für alle Autokorrelationskoeffizienten, wie wir wissen, der ideale Wert null — die Expektanzformel geht dann in die SCHUSTERsche über. Ist dagegen eine Erhaltungstendenz vorhanden, so wird die Expektanz von der SCHUSTERSchen abweichen, da ja alle idealen k_s positiv sind, und die ersten Glieder, die allein in Betracht kommen, mit den ersten Gliedern der Folge

$$\cos \alpha, \cos 2 \alpha, \dots$$

verbunden sind, die ebenfalls nicht alle verschwinden. Hieraus geht gleichfalls hervor, daß die Expektanz wesentlich von der Wellenlänge der Versuchsperiode abhängt: bei kleiner Frequenz, also langen Wellen, nimmt $\cos \alpha$ langsam ab, bei kurzen Wellen schnell. Bei langen Wellen werden also alle Zusatzglieder, soweit sie noch ein merklich von null verschiedenes k_s enthalten, positiv sein, bei kürzeren werden auch

negative Glieder ins Gewicht fallen, — ist $\alpha > 90^\circ$, so wird sogar das erste Glied negativ ausfallen; es werden also die negativen Glieder unter Umständen auch überwiegen, wenn die Wellen kurz sind. Man erhält also für lange Wellen eine Vergrößerung, für kurze Wellen eine Verkleinerung der Expektanz gegenüber der SCHUSTERSchen.

Die neue Formel zeigt übrigens auch, in welcher Weise der vorhin aufgedeckte Widerspruch durch die Berücksichtigung der Autokorrelation aufgelöst wird: Wird bei einer glatten Kurve die Zahl der Ordinaten durch Zwischenschaltung verdoppelt, so wird damit gleichzeitig die Folge der Autokorrelationskoeffizienten verdichtet, da ja der Beobachtungsabstand kleiner geworden ist. Während sich also der Nenner (n) des Expektanzquadrats verdoppelt, erhöht sich der Zähler gleichfalls durch Verdoppelung seiner Gliederzahl. Beides gleicht sich ungefähr aus, und zwar um so vollständiger, je größer die Ordinatendichte vorher schon war. Wird dagegen die Vermehrung der Beobachtungswerte durch eine Verlängerung der Reihe bei gleichbleibendem Beobachtungsabstand erzielt, so wächst nur der Nenner n , während der Zähler sich nur unwesentlich ändert.

Mit der Ermittlung der Expektanz allein ist nun, wie wir aus unseren früheren Überlegungen wissen, die Frage nach der Zufallswahrscheinlichkeit von Perioden keineswegs gelöst. Es ist vielmehr noch festzustellen, welche Wahrscheinlichkeit einer Amplitude zukommt, die größer als das s -fache der Expektanz ist, und es ist nicht ohne weiteres sicher, ob die von SCHUSTER für diese Wahrscheinlichkeit abgeleitete Formel

$$w_s = e^{-s^2}$$

auch im Falle autokorrelierter Beobachtungen ihre Gültigkeit noch besitzt. Um diese Frage zu beantworten, muß man die Amplitudenverteilung $W(H)$ unter den neuen statistischen Voraussetzungen selbst berechnen, da diese die Grundlage für die Bestimmung der Größe

$$w_s = \int_{s \cdot E}^{\infty} W(H) dH$$

bildet. Verfasser hat diese Aufgabe kürzlich (Lit. 267) für den Fall gelöst, daß alle in Frage stehenden Autokorrelationen normal sind, also auf lineare Regressionsbeziehungen zurückgehen. Die SCHUSTERSche Formel für die Zufallswahrscheinlichkeit von Perioden bleibt unter diesen Umständen wenigstens für große Werte von n angenähert gültig. Auf die Wiedergabe der Rechnungen muß hier unter Hinweis auf die genannte Schrift verzichtet werden.

9. Irrfahrt, Summationsvektoren und Quasipersistenz.

Die FOURIER-Amplituden und somit auch die Expektanz als ihr idealer quadratischer Mittelwert werden durch Summation bzw. Integration

über ein bestimmtes Analysenintervall erhalten und berücksichtigen die in diesem Intervall enthaltenen Einzelgrößen sämtlich und mit gleichem Gewicht. Die periodischen Eigenschaften, die durch Vergleich konkreter Amplituden mit dem zugehörigen Erwartungswert zu unserer Kenntnis gelangen, sind daher eigentlich mittlere Eigenschaften des betreffenden Intervalls und zeigen ein verschiedenes Verhalten der Beobachtungsfunktion in einzelnen Teilen des Intervalls nicht an. Wir haben aus diesem Grunde schon früher eine Unterteilung längerer Beobachtungsreihen in kleinere Abschnitte als zweckmäßig erkannt, um Aufschluß über solche Einzelheiten ihrer periodischen Struktur zu erhalten. Die analytische Betrachtungsweise des vorigen Kapitels lehrte uns, wie durch geeignete Aneinanderreihung der Ergebnisse solcher Teilanalysen die Frage der Persistenz oder Quasipersistenz von Perioden entschieden werden konnte, aber erst die Statistik wird uns instand setzen, Realität und Zufälligkeit solcher Ergebnisse gegeneinander abzugrenzen.

Gesetzt, es sei eine Beobachtungsreihe von großer Länge gegeben und in eine größere Anzahl (m) von gleich langen Abschnitten zerlegt worden, die nach ihrer Aufeinanderfolge fortlaufend numeriert seien. Jeder dieser Abschnitte, der n Beobachtungen enthalte, sei nach dem FOURIER-Gliede r -ter Ordnung analysiert worden — das Ergebnis seien die m Periodogrammvektoren $p_v(r)$ mit den Komponenten $a_v(r)$ bzw. $b_v(r)$. Die Aneinanderreihung der Vektoren in ihrer natürlichen Reihenfolge ergibt im Falle der Aperiodizität, d. h. bei Fehlen einer in der Nähe von $\frac{n}{r}$ liegenden Periode, einen „Irrlauf“, während bei Vorhandensein einer persistenten Periode der Vektorenzug eine fortschreitende Tendenz in einer bestimmten Richtung oder auch längs einer schwach gekrümmten Kurve zeigt. Die Periode ist quasipersistent, wenn diese fortschreitende Tendenz nur während einer beschränkten Zahl von Schritten anhält.

Da jeder einzelne der m Periodogrammvektoren aus einem besonderen Abschnitt der Beobachtungsreihe berechnet worden ist, dürfen wir die Gesamtheit dieser Vektoren a priori als ein Kollektiv aus voneinander unabhängigen Gliedern ansehen. Das gilt im allgemeinen selbst dann, wenn die Beobachtungsreihe autokorreliert ist, denn die natürliche Erhaltungstendenz einer solchen Reihe erstreckt sich in merklicher Weise über eine Anzahl benachbarter Werte, die im allgemeinen beträchtlich kleiner ist als die Zahl n der in einem Teilintervall zusammengeschlossenen Beobachtungen. Es ist also höchstens ein geringer Zusammenhang zwischen den letzten Werten des vorhergehenden und den ersten des nachfolgenden Intervalls vorhanden, den wir aber vernachlässigen dürfen, da sein Einfluß auf die Struktur des gesamten Intervalls jedenfalls geringfügig ist. Sind nun die Vektoren p_v tatsächlich

ihrer Größe und Richtung nach zufällig verteilt, so bilden ihre Endpunkte, wenn sie einzeln in ein Koordinatensystem (a, b) eingetragen werden, eine Punktwolke, deren idealer Schwerpunkt im Koordinatenanfang liegt, und deren Streuung gleich der für das Intervall n und die Frequenz r gültigen Expektanz ist (die letztere natürlich mit Rücksicht auf eine etwa vorhandene Erhaltungstendenz gebildet). Ist die Zahl m genügend groß, so wird der quadratische Mittelwert der Vektorenbeträge eine brauchbare Näherung für die Expektanz darstellen.

Es mögen nun je h dieser Vektoren aneinandergesetzt werden. Der mit dem Koordinatenanfang verbundene Endpunkt des Vektorenzuges stellt die Vektorsumme dar, der h -te Teil der Vektorsumme das nach den Gesetzen der Vektorenaddition gebildete arithmetische Mittel. Vorausgesetzt, daß die Einzelvektoren in genügend großer Anzahl vorhanden waren, läßt sich aus den über je h Grundintervalle gebildeten arithmetischen Mitteln ein neues Vektorenkollektiv bilden, das wir für den Augenblick als das „abgeleitete Kollektiv h -ter Ordnung“ bezeichnen wollen. Die Quadrate der Vektorenbeträge in diesem Kollektiv sind nach dem Schema

$$H_h^2 = \frac{1}{h^2} \{ (a_1 + a_2 + \dots + a_h)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_h)^2 \}$$

gebildet. Wir wollen nun, um auch den Fall einer persistenten Periode von der Wellenlänge $\frac{n}{r}$ mit einzuschließen, annehmen, daß die Komponenten a_ν und b_ν aus systematischen Bestandteilen a_0 bzw. b_0 und irregulären, nach Fehlerart verteilten und statistisch unabhängigen Bestandteilen ε_ν bzw. η_ν zusammengesetzt seien, daß also allgemein

$$a_\nu = a_0 + \varepsilon_\nu; \quad b_\nu = b_0 + \eta_\nu$$

sei. Unsere obige Formel geht dann über in

$$H_h^2 = \frac{1}{h^2} \{ h^2 (a_0^2 + b_0^2) + 2h a_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_h) + 2h b_0 (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_h) + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_h^2) + (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_h^2) \}.$$

Nach den Mittelwertsätzen der Statistik ist dann

$$\mathfrak{M}(H_h^2) = \frac{1}{h^2} \{ h^2 (a_0^2 + b_0^2) + 2a_0 h \mathfrak{M}(\sum \varepsilon_\nu) + 2b_0 h \mathfrak{M}(\sum \eta_\nu) + \mathfrak{M}(\sum (\varepsilon_\nu^2 + \eta_\nu^2)) \}.$$

Nach Voraussetzung kann

$$\mathfrak{M}(\sum \varepsilon_\nu) = \mathfrak{M}(\sum \eta_\nu) = 0$$

gesetzt werden, und führt man zur Abkürzung

$$a_0^2 + b_0^2 = H_0^2; \quad \mathfrak{M}(\varepsilon_\nu^2 + \eta_\nu^2) = G^2$$

ein, so ergibt sich schließlich:

$$\mathfrak{M}(H_h^2) = H_0^2 + \frac{1}{h} \cdot G^2.$$

Geometrisch läßt sich das abgeleitete Kollektiv h -ter Ordnung als eine Punktwolke darstellen, deren Schwerpunkt die Koordinaten (a_0, b_0) hat, und deren Streuung um diesen Schwerpunkt G/\sqrt{h} ist (vgl. Abb. 20). Die Größe

$$\sigma_h = \sqrt{\mathfrak{M}(H_h^2)},$$

die wir als „mittlere Amplitude h -ter Ordnung“ bezeichnen wollen, stellt den quadratischen Mittelwert der über Intervalle von der Länge h n erstreckten Periodogramamplituden dar, immer in bezug auf eine bestimmte Versuchswelle. J. BARTELS (Lit. 26, 27), dessen Arbeiten die folgende, sehr aufschlußreiche Betrachtungsweise zu verdanken ist, führt aus Gründen, deren Zweckmäßigkeit bald hervortreten wird, die mit \sqrt{h} multiplizierte mittlere Amplitude h -ter Ordnung ein:

$$E_h = \sigma_h \sqrt{h} = \sqrt{h H_0^2 + G^2}.$$

Sind nämlich die ursprünglichen, auf das Einheitsintervall n bezogenen Periodogrammvektoren unabhängig voneinander und willkürlich verteilt, so ist $H_0 = 0$ und somit

$$E_h = G$$

von h unabhängig. $G = \sqrt{\mathfrak{M}(H_1^2)}$ bedeutet also in diesem Falle den statistischen quadratischen Mittelwert der ursprünglich gegebenen Periodogramamplituden und somit die empirische Expektanz für das Einheitsintervall n . In dem anderen Extremfalle, wenn eine persistente Periode von der Amplitude H_0 existiert, wächst E_h monoton

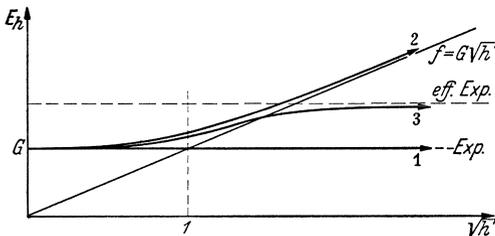


Abb. 21. Reduzierte scheinbare Expektanz. 1 Aperiodizität, 2 Persistente Periodizität, 3 Quasipersistente Periodizität.

mit h — für große h nähert sich E_h , als Funktion von \sqrt{h} aufgezeichnet, der durch den Nullpunkt gehenden Geraden

$$f(\sqrt{h}) = H_0 \sqrt{h}$$

asymptotisch [s. Abb. 21 (2), wo der Einfachheit der Zeichnung zuliebe $G = H_0$ angenommen wurde].

Mit Rücksicht darauf, daß E_h bei Aperiodizität die Bedeutung einer empirischen Expektanz besitzt, wollen wir diese Größe im allgemeinen Falle als „scheinbare Expektanz“ bezeichnen, oder genauer als die (durch den Faktor \sqrt{h}) auf das Einheitsintervall von der Länge n *reduzierte scheinbare Expektanz*. Die reduzierte scheinbare Expektanz ist demnach konstant gleich der empirischen Expektanz für das Einheitsintervall, wenn Aperiodizität herrscht, sie wächst (für große h) proportional \sqrt{h} , wenn eine persistente Periode vorliegt.

In dies Schema läßt sich nunmehr auch der zwischen diesen beiden Extremen liegende Typus der quasipersistenten Periodizität einordnen:

Zunächst sei angenommen, daß die Quasipersistenz von einer sehr regelmäßigen Art sei: Nach je s Einheitsintervallen ändere sich die Periodizität nach Amplitude und Phase sprunghaft und willkürlich. In diesem Falle würden also die über je s Einheitsintervalle erstreckten Periodogrammvektoren ein aperiodisches Kollektiv bilden; würden wir also auf $2s$, $3s$, ... Intervalle übergehen, so würde sich ergeben, daß die reduzierte scheinbare Expektanz konstant bleibt. Andererseits ist diese aber beim Übergang vom Einheitsintervall auf das s -fache Intervall um das \sqrt{s} -fache gestiegen, da ja hierbei die Wirkung der Perioden voll zur Geltung gelangt. Wir haben bei der Ableitung von $\mathfrak{M}(H_s^2)$ nur zu berücksichtigen, daß die systematischen Komponentenbestandteile (a_0, b_0) nunmehr für jede s -Gruppe verschieden sind. Demnach ist in der Endformel für $\mathfrak{M}(H_s^2)$ lediglich der Mittelwert $\mathfrak{M}(H_0^2)$ anstatt H_0^2 einzusetzen, und wir erhalten in der Tat

$$E_s = \sigma_s \sqrt{s} = \sqrt{s \mathfrak{M}(H_0^2) + G^2}.$$

Die Annahme, daß bei Quasiperiodizität die sprunghaften Änderungen stets genau nach s Intervallen eintreten, wird in der Praxis kaum jemals dem wirklichen Sachverhalt gerecht werden. Trotzdem wird auch in sehr viel komplizierteren Fällen die Schlußfolgerung ihre Gültigkeit behalten, daß die scheinbare und auf das Einheitsintervall reduzierte Expektanz für wachsende h anfangs zunimmt, später aber, statt wie \sqrt{h} über alle Grenzen zu wachsen, einem endlichen Grenzwert zustrebt, der „effektive Expektanz“ genannt wird. Bezeichnen wir das Verhältnis dieses Grenzwerts zum Ausgangswert, also zur empirischen Expektanz, mit \sqrt{s} , so können wir s als die mittlere Intervallzahl ansehen, über die sich die quasipersistenten Perioden erstrecken. Wir können s auch die „mittlere Andauer“ der Perioden nennen.

Wir sind bei unseren bisherigen Überlegungen immer von der Annahme ausgegangen, daß die Periodogrammvektoren für eine genügend lange Folge von Einheitsintervallen von je n Beobachtungswerten vorlagen. Über die Zahl n sind keine Voraussetzungen getroffen worden, desgleichen nicht über die Zahl der Versuchswellen, die in diesem Intervall enthalten waren. Ferner bezogen sich unsere Schlüsse nur auf die Eigenschaften (Persistenz, Quasipersistenz oder Aperiodizität) des Vektorenkollektivs als solchem, es war aber nicht die Rede von periodischen Vorgängen, die sich etwa innerhalb der Einheitsintervalle abspielen, ohne über sie hinaus zu gehen. Wir müssen aber, um genau zu sein, mit der Möglichkeit solcher quasiperiodischer Vorgänge von kurzer Andauer immer rechnen. In der Praxis wird es also darauf ankommen, die Unterteilung der Beobachtungsreihe möglichst weit zu treiben, etwa so weit, daß jedes Einheitsintervall nur eine Wellenlänge der Versuchsperiode umfaßt. Man könnte sogar so weit gehen, diesen Teilungsprozeß bis zu den Elementen der Beobachtungsreihe selbst

vorzutreiben. Das hätte insofern einen Sinn, als wir ja wissen (s. III, 5), daß jeder Periodogrammvektor sich als Summationsvektor über n Elementarvektoren mit den Komponenten

$$\frac{2}{n} y_\nu \cos \nu \alpha; \quad \frac{2}{n} y_\nu \sin \nu \alpha \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

darstellen läßt. Wir können also unsere ganzen Betrachtungen unter Zurückgehen auf diese Elementarvektoren wiederholen und kommen dann zu folgenden Maßnahmen und Schlüssen:

1. Der quadratische Mittelwert aller über Intervalle von beliebiger Länge n erstreckten Periodogrammmamplituden heiße die (von n abhängige) scheinbare Expektanz. Ist μ die Streuung der Beobachtungswerte selbst um ihren Mittelwert null, so ist im Falle der statistischen Unabhängigkeit der Beobachtungswerte die scheinbare Expektanz unabhängig von der Versuchsperiode gleich der wahren Expektanz

$$\frac{2\mu}{\sqrt{n}}.$$

2. Die mit \sqrt{n} multiplizierte scheinbare Expektanz, die wir als „reduzierte scheinbare Expektanz“ bezeichnen, ist in diesem Falle auch unabhängig von n .

3. Ist eine persistente Periode vorhanden, so wächst die scheinbare reduzierte Expektanz mit wachsendem n , und zwar für große n proportional \sqrt{n} .

4. Quasipersistenz bewirkt eine fortschreitende und schon für endliches n praktisch vollkommene Annäherung der reduzierten scheinbaren Expektanz an einen Grenzwert, die „effektive Expektanz“.

Formal ist demnach ein Unterschied zwischen diesen und den früheren Betrachtungen nicht zu bemerken. Trotzdem ist ein wichtiger Unterschied in bezug auf den Fall der Quasipersistenz vorhanden, den wir nicht außer acht lassen dürfen. Quasipersistenz liegt nach den letztgenannten Regeln immer dann vor, wenn die effektive Expektanz größer ist als die Größe, die wir oben als „wahre Expektanz“ bezeichnet haben. Die letztere ist aber die auf Grund der Annahme statistischer Unabhängigkeit der Beobachtungswerte berechnete SCHUSTERSche Expektanz. Zeigen nun die Beobachtungswerte eine gewisse Erhaltungstendenz, die nach den Überlegungen der vorigen Abschnitte mit der Erscheinung, die wir als „Periodizität“ bezeichnen, nur in mittelbarem Zusammenhang steht, so ist die wahre Expektanz unter Umständen merklich größer als die SCHUSTERSche. Es kann mithin durch den Vergleich der effektiven Expektanz mit der SCHUSTERSchen eine Quasipersistenz vorgetäuscht werden. BARTELS bezeichnet diese Erscheinung als „triviale Quasipersistenz“. Um die Gefahr auszuschalten, diese lediglich als Folge der Erhaltungstendenz der Beobachtungswerte auftretende triviale Quasipersistenz mit einer wirklichen Quasipersistenz zu

verwechseln, ist es also notwendig, die effektive Expektanz nicht mit der SCHUSTERSchen Expektanz, sondern mit der unter Berücksichtigung der Erhaltungstendenz ermittelten wahren Expektanz in Beziehung zu setzen.

Zum Abschluß sei noch erwähnt, daß in praktischen Fällen die hier besprochenen Haupttypen der Aperiodizität, Persistenz und Quasi-persistenz in weitgehender Vermischung auftreten können. Es soll diesen Möglichkeiten hier nicht weiter nachgegangen werden. Sie sind in den oben erwähnten Arbeiten von J. BARTELS beschrieben und auch durch zahlreiche Beispiele aus der geophysikalischen Forschung belegt worden.

10. Statistik des BUYS-BALLOTSchen Schemas.

Der Grundgedanke, der den Überlegungen des vorigen Abschnitts unterstellt war, bezog sich auf die Statistik von Vektorenzügen in der Ebene, die wir als „Irrläufe“ bezeichneten, wenn die Einzelvektoren, aus denen sie zusammengesetzt waren, statistisch unabhängig waren und einer „zufälligen“ Verteilung entstammten. Das Problem der Irrläufe ist in der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr gründlich behandelt worden — ebenso wie in zwei Dimensionen, läßt es sich auch in einer oder in drei und mehr Dimensionen behandeln, wobei natürlich für mehr als drei Dimensionen die geometrische Veranschaulichung versagt. Daß für zwei Dimensionen eine Verwandtschaft dieses rein statistischen Problems mit den Aufgaben der Periodenforschung hervortrat, war dem Umstand zuzuschreiben, daß sich die Periodogrammgrößen als ebene Vektoren bzw. als Vektorsummen darstellen ließen. Die Beträge der Elementarvektoren z. B., aus denen man sich den Periodogrammvektor zusammengesetzt denken kann, sind durch die Beobachtungswerte einer Reihe gegeben, die Richtung sowohl durch ihr Vorzeichen als durch die Phase der Versuchswelle, der sie bei der Analyse zugeordnet werden. Sobald wir aus der Menge der Elementarvektoren diejenigen auswählen, die mit einer und derselben Phase der Versuchswelle in Verbindung gebracht werden, und dies Auswahlkollektiv für sich betrachten, fällt die Phase als richtunggebendes Moment innerhalb dieses Kollektivs fort, und es bleibt hierfür lediglich das Vorzeichen übrig. Mit anderen Worten: Das Irrlaufproblem wird auf seine eindimensionale und somit einfachste Form zurückgeführt; wir haben es mit „Schritten“ zu tun, die nur ihrer Länge nach gegeben sind — was die Richtung anbelangt, so beschränkt sie sich auf die Alternative: vorwärts oder rückwärts, bzw. positiv oder negativ.

Die Aussonderung von Beobachtungen, die mit derselben Phase verbunden sind, wird in der Praxis der Periodogrammanalyse durch das BUYS-BALLOTSche und in einer etwas weniger strengen Form durch das DARWIN-BÖRGENSche Schema vorgenommen. Wir haben hier die

Anordnung der Beobachtungen in einer Tabelle mit zwei Eingängen, also mit Zeilen und Spalten, vor uns — die in einer Spalte befindlichen Werte gehören jeweils der gleichen Phase bzw. einem beschränkten Phasenintervall der Versuchswelle an und lassen somit eine Untersuchung auf Grund der eindimensionalen Irrlauftheorie zu; insbesondere läßt sich also feststellen, ob ihr statistisches Verhalten dem eines Irrlaufs entspricht, oder ob sich diejenigen Erscheinungen einstellen, die im zweidimensionalen Falle als Folge persistenter oder quasipersistenter Periodizität des Beobachtungsmaterials zu bemerken waren. In der Tat behalten die Regeln, die wir im vorigen Abschnitt für das statistische Verhalten von Periodogrammvektoren abgeleitet haben, der Form nach ihre Gültigkeit, wenn wir sie auf die Beobachtungswerte anwenden, die in einer Spalte eines BUYS-BALLOTSchen Schemas gesammelt sind. Der Beweis hierfür braucht nicht besonders erbracht zu werden, da dieser Fall lediglich als Spezialfall des früheren erscheint (vgl. Lit. 214). Der eigentliche Unterschied gegen früher besteht ausschließlich in der Tatsache, daß als Elemente der statistischen Betrachtung nicht mehr die kompliziert aufgebauten Periodogrammvektoren und ihre Komponenten gelten, sondern die Beobachtungswerte selbst oder vielmehr eine nach bestimmten durch das Spaltenschema gegebenen Regeln gebildete Auswahl aus dem Beobachtungskollektiv. Durch diesen Umstand ergeben sich zwei wesentliche Vorteile. Der erste besteht darin, daß bei einem Schema von r Spalten, also bei der Diskussion der Versuchswelle von der Länge r , in jeder Spalte eine Teilfolge von Beobachtungswerten enthalten ist, die durch Auswahl jedes r -ten Wertes der ursprünglichen Folge entstanden ist. Der gegenseitige zeitliche Abstand aufeinanderfolgender Werte innerhalb einer Spalte ist also im allgemeinen so groß, daß die Wirkung einer „Erhaltungstendenz“ *a priori* nicht mehr als spürbar angenommen zu werden braucht. Wir können also bei der Beurteilung der Ergebnisse einer statistischen Untersuchung der Spaltenwerte als Vergleichsbasis fast immer die statistischen Eigenschaften unabhängiger Werte heranziehen. Der zweite Vorteil dieser Betrachtungsweise entspringt dem Umstand, daß wir unsere Untersuchungen ganz unabhängig von der geometrischen Gestalt etwaiger „Wellen“ durchführen können, da ja durch die Aufstellung des Schemas mit seinen Zeilen und Spalten lediglich die *Länge* einer Versuchswelle festgelegt wird, während Aussagen über die analytische Form der vermuteten Welle erst durch die Harmonische Analyse der Spaltenmittelwerte oder der „Summenreihe“ zustande kommen. Der wesentliche Unterschied zwischen der statistischen Behandlung des BUYS-BALLOTSchen Schemas und der Periodogramm-Punktwolke besteht also darin, daß die statistischen Überlegungen im ersteren Falle vor, im letzteren dagegen nach Anwendung der Formeln der Harmonischen Analyse vorgenommen werden.

Die Vorteile, die eine Anwendung der statistischen Methode vor Vollzug der Harmonischen Analyse für sich hat, erkennt man besonders deutlich, wenn eine, eventuell durch Fehler oder sonstige aperiodische Beimischungen entstellte, rein periodische Funktion vorliegt, über deren Verlauf innerhalb der Grundperiode im übrigen nichts vorausgesetzt sein möge, als daß der Mittelwert der Beobachtungen null sei. Die Grundperiode umfasse p äquidistante Beobachtungswerte, die Zeilenlänge (Spaltenzahl) des BUYS-BALLOTSchen Schemas sei gleichfalls p . Die Spaltenmittelwerte über n Zeilen werden dann mit wachsendem n festen Grenzwerten zustreben, während sie bei Fehlen einer persistenten reinen Periodizität gegen null abnehmen. Für jede der p Spalten wird der Grenzwert ein besonderer sein, er kann auch für die eine oder die andere Spalte verschwinden. Das Wesentliche ist aber, daß diese p Grenzwerte nicht *sämtlich* verschwinden. Somit läßt sich die Quadratsumme oder das quadratische Mittel der Grenzwerte als ein Kriterium dafür verwenden, ob eine reine Periodizität von der Grundperiode p vorliegt oder nicht, wobei über die analytische Form der Periodizität keinerlei Voraussetzungen gemacht werden — insbesondere ist es hierbei völlig gleichgültig, ob die Periode die Gestalt einer sinusförmigen Welle hat oder nicht.

Der Grenzübergang selbst läßt sich in praktischen Fällen nicht vollziehen, da der Umfang des verfügbaren Materials stets endlich ist. Es werden demnach für die Grenzwerte nur Näherungswerte zu erhalten sein, da bei einem endlichen Material nicht zu erwarten ist, daß die „zufälligen“ Beimengungen sich bei der Bildung der Spaltenmittelwerte vollständig kompensieren. Wir werden also das empirische Ergebnis mit demjenigen zu vergleichen haben, das bei der Annahme zu erwarten wäre, daß die Teilfolgen in jeder Spalte als eine willkürliche Auswahlfolge aus dem Urkollektiv zu gelten haben. Wir haben es also mit einer Schlußweise zu tun, die der in der Expektanztheorie üblichen genau entspricht.

Da die Anwendung dieser Methode sich stets auf ein sehr umfangreiches Beobachtungsmaterial stützen muß, um Erfolg zu versprechen, ist es ratsam, auch die Möglichkeit des Vorhandenseins langperiodischer oder säkularer Änderungen zu berücksichtigen, deren Auswirkungen erst im Verlauf mehrerer Zeilen merklich werden. Das sicherste Mittel, solche Änderungen auszuschalten, ist ihre vorherige Elimination aus der Originalreihe. Sofern dies nicht geschehen ist, lassen sich die Effekte dadurch beseitigen, daß man in jeder Zeile anstatt der Originalbeobachtungen ihre Abweichungen vom Zeilenmittel verwendet. Das Schema hat dann die Eigenschaft, daß nicht nur das Gesamtmittel aller Beobachtungen, sondern auch das Mittel jeder einzelnen Zeile null ist. Durch diese Maßnahme werden alle Effekte, die von einer reinen Periode p herrühren, nicht verändert, hingegen wird die Streuung des

Beobachtungskollektivs selbst in dem Falle herabgesetzt, daß alle Beobachtungswerte sich wie zufällige Fehler verhalten. War die Zahl der Zeilen n , also die Gesamtzahl der Beobachtungen $N = n p$, so ist die empirisch bestimmte Streuung

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum y_v^2}{N-1}}.$$

Beziehen wir dagegen die Streuung auf die jeweiligen Zeilenmittel, so haben wir an die Stelle von $\sum_{v=1}^N y_v^2$ den Ausdruck

$$\sum_{\varrho=1}^n \sum_{\sigma=1}^p (y_{\sigma}^{(\varrho)} - y^{(\varrho)})^2$$

zu setzen, wobei $y_{\sigma}^{(\varrho)}$ die Beobachtungswerte der ϱ -ten Zeile und $y^{(\varrho)}$ das Zeilenmittel bedeutet. Ist also μ' die neue Gesamtstreuung, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (N-1)\mu'^2 &= \sum_{\varrho=1}^n \left\{ \sum_{\sigma=1}^p y_{\sigma}^{(\varrho)2} - 2 y^{(\varrho)} \sum y_{\sigma}^{(\varrho)} + p \cdot y^{(\varrho)2} \right\} = \sum_{\varrho=1}^n \left\{ \sum_{\sigma=1}^p y_{\sigma}^{(\varrho)2} - p \cdot y^{(\varrho)2} \right\} \\ &= \sum_{v=1}^N y_v^2 - p \cdot \sum_{\varrho=1}^n y^{(\varrho)2}. \end{aligned}$$

Setzt man statt $\sum_{\varrho=1}^n y^{(\varrho)2}$ die mathematische Erwartung dieser Summe und beachtet, daß nach dem Mittelwertsatz über das arithmetische Mittel von zufälligen Fehlern

$$\mathfrak{M}(y^{(\varrho)2}) = \frac{1}{p} \mathfrak{M}(y_v^2) = \frac{\mu^2}{p}$$

ist, so folgt schließlich

$$(N-1)\mu'^2 = N\mu^2 - n\mu^2$$

und daher

$$\mu'^2 = \mu^2 \cdot \frac{N-n}{N-1} = \mu^2 \frac{n(p-1)}{n p - 1},$$

für solche N , die erheblich größer als p sind, also mit genügender Annäherung:

$$\mu'^2 = \mu^2 \cdot \frac{p-1}{p}.$$

Für den Fall der Aperiodizität können wir nun die in jeder Spalte enthaltenen Werte als zufällige Auswahl ansehen. Die arithmetischen Mittel der Spalten werden sich also statistisch wie die arithmetischen Mittel aus je n Fehlern verhalten. Der quadratische Mittelwert aller Spaltenmittel wird daher von der Größenordnung

$$\frac{\mu'}{\sqrt{n}}$$

sein, er wird bei Vergrößerung von n wie \sqrt{n} abnehmen, während er bei persistenter Periodizität, unabhängig von der Form derselben, sich

einem von null verschiedenen Grenzwert nähert. Multiplizieren wir den Mittelwert mit \sqrt{n} , so wird dies Produkt bei wachsendem n konstant bleiben, bei Periodizität sich einer \sqrt{n} proportionalen Kurve angleichen. Durch Zusammenfassung von je h Zeilen zu Gruppen und Vereinigung der Gruppenergebnisse zu Mitteln läßt sich die Genauigkeit der Ergebnisse erhöhen, und man findet ohne Schwierigkeit, daß diese Untersuchungsart der im vorigen Abschnitt behandelten nach Form und Inhalt genau entspricht. Insbesondere läßt sich auch *Quasipersistenz* in der gleichen Weise wie dort feststellen — sie kommt überall da zustande, wo zwar der Verlauf der Beobachtungswerte in den Zeilen nicht konstant bleibt oder keine persistenten Bestandteile enthält, wo aber die Tendenz besteht, daß der allgemeine Charakter des Verlaufs über einige aufeinanderfolgende Zeilen erhalten bleibt. Man spricht in diesem Falle von „Sequenzen ähnlicher Zeilen“. Solche Sequenzen von endlicher Länge treten übrigens auch dann auf, wenn eine persistente Periodizität vorliegt, deren Periode mit der Versuchsperiode nicht genau übereinstimmt. Es liegt dann, wie wir wissen, eine Verschiebung der systematischen Bestandteile aufeinanderfolgender Zeilen in sich selbst vor. Bei Zusammenfassung weniger Zeilen, also bei kleinem h , wird diese Verschiebung im allgemeinen eine Vernichtung der systematischen Bestandteile nicht zur Folge haben — dies wird vielmehr erst bei größeren Werten von h eintreten. Mit anderen Worten: Auch eine persistente Periode, die nicht genau mit der Versuchsperiode zusammenfällt, erzeugt den Anschein einer Quasipersistenz. Sind benachbarte Perioden vorhanden, und ist die Zeilenzahl n genügend groß, so wird — falls die Versuchsperiode mit einer der beiden Perioden übereinstimmt — die andere in den Spaltenmitteln über n Zeilen ausgelöscht sein, nicht dagegen in den Spaltenmitteln von Gruppen über wenige Zeilen. Diese Erscheinung, die genau der Linienverbreiterung im Periodenspektrum bei Verkürzung des Analysenintervalls entspricht, gibt also Anlaß, daß die eine der beiden Perioden statistisch als persistent, die andere dagegen als quasipersistent erfaßt wird. Persistenz einer Welle bestimmter Länge ist demnach mit Quasipersistenz bei benachbarten Wellen verbunden. Quasipersistenz erzeugt auch bei benachbarten Versuchswellen Quasipersistenz. BARTELS (Lit. 27) kennzeichnet diese Erscheinung mit dem Ausspruch: „*Quasipersistenz ist infektiös.*“

Schließlich sei noch erwähnt, daß bei sehr kleinem p , wenn also die Zeilen des Schemas nur wenige Beobachtungswerte enthalten, die Annahme der Unabhängigkeit a priori für die Glieder der Spalten im allgemeinen nicht mehr aufrechterhalten werden kann. Im Extremfall, wenn wir nämlich annehmen, daß nur eine einzige Spalte gegeben sei, also wenn wir die Beobachtungsreihe in ihrer Originalform betrachten, führen die obigen Überlegungen zwangsläufig auf das Problem der Erhaltungstendenz als solcher zurück, nunmehr ohne jede Beziehung

zu den Aufgaben der Periodenforschung. Das Bestehen einer Erhaltungstendenz wird sich somit in der gleichen Weise äußern, wie „Quasipersistenz“: Der quadratische Mittelwert der arithmetischen Mittel von je h aufeinanderfolgenden Werten einer Beobachtungsreihe wird bei Unabhängigkeit der Beobachtungen wie \sqrt{h} abnehmen — der mit \sqrt{h} multiplizierte (reduzierte) Mittelwert also konstant bleiben, während er bei Vorhandensein einer Erhaltungstendenz anfangs wächst, um für große h einem Grenzwert zuzustreben (triviale Quasipersistenz [vgl. S. 236]). Diese Methode kann auch als ein durchgreifendes Unterscheidungsverfahren für zufällige und systematische Fehler benutzt werden, falls die Zahl der Fehler nur hinreichend groß ist.

Hierbei verdient Erwähnung, daß das vielbenutzte ABBE-HELMERTSche Kriterium zur Unterscheidung zufälliger und systematischer Fehler aus den obigen Betrachtungen unmittelbar abgeleitet werden kann. Wenn wir annehmen dürfen, daß der reduzierte quadratische Mittelwert des arithmetischen Mittels über h aufeinanderfolgende Beobachtungen für zufällige Fehler konstant bleibt (innerhalb der durch den mittleren Fehler der Bestimmung des arithmetischen Mittels gegebenen Genauigkeitsgrenzen), für systematische Fehler aber — wenigstens für kleine h , wächst, so läßt sich dies unter sehr allgemeinen Umständen schon nachweisen, wenn wir uns auf die Fälle $h = 1$ und $h = 2$ beschränken. Für zufällige Fehler ist also innerhalb der besagten Genauigkeitsgrenzen

$$2 \cdot \mathfrak{M} \left[\left(\frac{y_v + y_{v+1}}{2} \right)^2 \right] = \mathfrak{M}(y_v^2) + \mathfrak{M}(y_v y_{v+1}) = \mathfrak{M}(y_v^2).$$

Wenn Zufälligkeit vorliegt, so ist daher die mathematische Erwartung des Produktes benachbarter Fehler null. Das ist aber der wesentliche Inhalt des ABBE-HELMERTSchen Verfahrens. Daß die Erfüllung dieser Bedingung nicht notwendig auf Zufälligkeit schließen muß, ist bekannt (s. A. p. V. S. 8, sowie Lit. 162).

Fünftes Kapitel.

Andere analytische Methoden der Periodenbestimmung.

1. Die LAPLACESche Transformation.

Wir haben schon früher gesehen, daß die Aufgabe, eine aus mehreren rein periodischen Wellen additiv zusammengesetzte Funktion in ihre Bestandteile zu zerlegen, durch direkte Ausgleichung nur möglich ist, wenn die Wellenlängen der Elementarperioden bekannt sind. Die Analyse der Gezeitenkurven, bei denen die Perioden als kosmische

Konstante vorgegeben waren, bildete das klassische Beispiel für diesen Fall. Waren die Wellenlängen dagegen unbekannt, so ergab sich die Möglichkeit, *Versuchsperioden* einzuführen. Ausgehend von der *Harmomonischen Analyse*, bei der als Versuchsperioden die aliquoten Teile eines bestimmten Analysenintervalls dienten, gelangten wir so zu der Methode der Periodogramme, die es gestattete, durch eine systematische Durchmusterung des Spektralbereichs allen etwa vorhandenen Periodizitäten auf die Spur zu kommen und ihre Konstanten (Wellenlänge, Amplitude, Phase) zu bestimmen.

Der große und unbestreitbare Vorteil der Periodogramm methode ist der, daß sie das Problem praktisch ohne Voraussetzungen angreift und somit alle in ihm liegenden Möglichkeiten auszuschöpfen imstande ist. Oft aber weist uns die Praxis Aufgaben an, bei denen größtmögliche Voraussetzungslosigkeit nicht gefordert wird. Es sei etwa *bekannt*, daß eine vorgelegte Beobachtungsfunktion aus einer endlichen Anzahl von Sinuswellen zusammengesetzt sei, deren Perioden aber noch bestimmt werden sollen. In diesem Falle würde die Periodogrammanalyse die Durchforschung des gesamten Spektrums notwendig machen; es würde auch auf diejenigen Spektralgebiete, die keine der gesuchten Perioden enthalten, die gleiche Untersuchungsarbeit verwendet werden müssen, wie auf die anderen, die sich schließlich als die allein wichtigen herausstellen. Ein großer Teil der Arbeit würde also notwendig ein negatives Ergebnis haben und somit lediglich dem Zwecke dienen, die wichtigen Spektralteile von den unwichtigen zu trennen. Wir werden später sehen, daß die Möglichkeit besteht, durch Benutzung geeigneter Instrumente diesen Überblick auch ohne langwierige Rechenarbeit zu gewinnen. Wo aber diese Instrumente nicht zur Verfügung stehen, wird der Wunsch nach Methoden, die das angezeigte Problem auf direktem und daher vielleicht wesentlich kürzerem Wege lösen, seine Berechtigung haben.

Es sei bekannt, daß eine empirische Funktion, die in Form einer Reihe äquidistanter Ordinaten gegeben sei, aus einer beschränkten Anzahl (n) von Sinusschwingungen unbekannter Wellenlänge, Amplitude und Phase zusammengesetzt sei, außerdem aber höchstens aperiodische Bestandteile von der Art zufälliger Fehler enthalte. Abgesehen von diesen Fehlern sei also jede Ordinate von der Form

$$y_\nu = c_0 + c_1 \sin(\alpha_1 \nu + \beta_1) + c_2 \sin(\alpha_2 \nu + \beta_2) + \dots + c_n \sin(\alpha_n \nu + \beta_n). \quad (\text{I})$$

Die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten

$$c_0, \dots, c_n; \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n; \quad \beta_1, \dots, \beta_n$$

ist $3n + 1$, es seien also mindestens ebenso viele Beobachtungswerte und daher Bestimmungsgleichungen für diese Unbekannten vorhanden. Die direkte Anwendung algebraischer Lösungsmethoden oder, falls die Zahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen größer als $3n + 1$ ist,

der Methode der kleinsten Quadrate ist nicht möglich, da die Gleichungen zwar in bezug auf die Ausdrücke

$$c_\mu \cos \beta_\mu; \quad c_\mu \sin \beta_\mu,$$

aus denen Amplituden und Phasen inschwer ableitbar sind, linear aufgebaut, in bezug auf die Frequenzen α_μ hingegen transzendent sind. Es gelingt jedoch, das Problem auf ein algebraisches zurückzuführen, wenn man eine, zuerst von LAPLACE angegebene Transformation der Funktionswerte vornimmt. Sie beruht auf folgenden Grundformeln: Ist ν ein von 0 bis ∞ die Folge der ganzen Zahlen durchlaufender Index, α eine beliebige Frequenz und τ eine Konstante, deren Wahl wir uns noch vorbehalten, so ist nach der bekannten Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(\tau - i\alpha)\nu} = \frac{1}{1 - e^{-\tau + i\alpha}}.$$

Trennen wir die Ausdrücke rechts und links in ihren reellen und imaginären Teil, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\tau\nu} \cos \alpha\nu + i \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\tau\nu} \sin \alpha\nu &= \frac{1}{1 - e^{-\tau} \cos \alpha - i e^{-\tau} \sin \alpha} \\ &= \frac{e^\tau - \cos \alpha + i \sin \alpha}{e^\tau + e^{-\tau} - 2 \cos \alpha}, \end{aligned}$$

also, da

$$\mathfrak{Cof} \tau = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2}; \quad \mathfrak{Sin} \tau = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2}; \quad e^\tau = \mathfrak{Cof} \tau + \mathfrak{Sin} \tau,$$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\tau\nu} \cos \alpha\nu &= \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{Sin} \tau}{2(\mathfrak{Cof} \tau - \cos \alpha)} \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\tau\nu} \sin \alpha\nu &= \frac{\sin \alpha}{2(\mathfrak{Cof} \tau - \cos \alpha)}. \end{aligned}$$

Wir können nun die zu analysierende Reihe entweder in ihrer ursprünglichen Gestalt benutzen oder sie, wie A. GŁOGOWSKI (Lit. III) es vorschlägt, in einen „geraden“ und einen „ungeraden“ Teil zerlegen. Sei etwa eine Reihe von $2m + 1$ Ordinaten

$y_{-m}, y_{-m+1}, \dots, y_{-1}, y_0, y_{+1}, \dots, y_{m-1}, y_m$
vorgelegt, so erfüllt

$$\varphi_\nu = \frac{1}{2}(y_\nu + y_{-\nu})$$

die Bedingung $\varphi_\nu = +\varphi_{-\nu}$, hingegen

$$\psi_\nu = \frac{1}{2}(y_\nu - y_{-\nu})$$

die Bedingung

$$\psi_\nu = -\psi_{-\nu}.$$

Mithin ist sicher, daß, falls die ursprüngliche Reihe sich, wie oben, durch Superposition von einfachen Sinuswellen darstellen läßt, die beiden aus ihr abgeleiteten Reihen φ_ν und ψ_ν die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\nu &= a_0 + a_1 \cos \alpha_1 \nu + a_2 \cos \alpha_2 \nu + \cdots + a_n \cos \alpha_n \nu \\ \psi_\nu &= b_1 \sin \alpha_1 \nu + b_2 \sin \alpha_2 \nu + \cdots + b_n \sin \alpha_n \nu \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

haben. Die eigentliche Aufgabe läßt sich also immer in zwei Teilaufgaben spalten, die wir (nach GŁOGOWSKI) als das Sinus- bzw. Cosinusproblem bezeichnen können, und die etwas einfacher gestaltet sind, weil in ihnen keine unbekanntes Phasenkonstanten mehr auftreten, die Zahl der Unbekannten also von $3n + 1$ auf $2n$ bzw. $2n + 1$ herabgesetzt ist. In den meisten Fällen läßt sich auch das konstante Glied in (1) und (2) vor Beginn der Analyse eliminieren, da offenbar (immer unter den getroffenen Voraussetzungen)

$$a_0 (= c_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=0}^m \varphi_\nu$$

und, wenn die Perioden nicht sehr lang sind, a_0 mit hinreichender Genauigkeit auch durch das arithmetische Mittel aus endlich vielen Beobachtungswerten ersetzt werden kann.

Betrachten wir zunächst den ungeraden Teil ψ_ν der Beobachtungsreihe allein, so ergibt die LAPLACESche Transformation

$$L(\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu e^{-\tau \nu} = \sum_{\mu=1}^n \frac{b_\mu \sin \alpha_\mu}{C_\tau + s_\mu}, \quad (3)$$

wobei wir zur Abkürzung

$$C_\tau = 2(\zeta_0 \tau - 1); \quad s_\mu = 2(1 - \cos \alpha_\mu) = \left(2 \sin \frac{\alpha_\mu}{2}\right)^2$$

gesetzt haben. $L(\tau)$ ist dabei eine Funktion des willkürlichen Parameters τ , die als L -Summe bezeichnet werden möge.

Multiplizieren wir nun beide Seiten der Gl. (3) mit dem Hauptnenner der rechten, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} &L(\tau) \cdot \prod_{\mu=1}^n (C_\tau + s_\mu) \\ &= L(\tau) \{C_\tau^n + S_1 C_\tau^{n-1} + \cdots + S_{n-1} C_\tau + S_n\} \\ &= \sum_{\mu=1}^n b_\mu \sin \alpha_\mu \{C_\tau^{n-1} + S_1^{(\mu)} C_\tau^{n-2} + \cdots + S_{n-2}^{(\mu)} C_\tau + S_{n-1}^{(\mu)}\}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wobei S_1, \dots, S_n die aus s_1, \dots, s_n gebildeten elementarsymmetrischen Funktionen und $S_1^{(\mu)}, \dots, S_{n-1}^{(\mu)}$ die entsprechenden aus den Folgen $s_1, \dots, s_{\mu-1}; s_{\mu+1}, \dots, s_n$ (die s_μ nicht enthalten) gebildeten elementarsymmetrischen Funktionen bedeuten.

Da $2n$ Unbekannte $b_1, \dots, b_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n$ zu bestimmen sind, werden $2n$ solcher Gleichungen gebraucht, die man dadurch erhält, daß man

dem Parameter τ $2n$ verschiedene Werte gibt. Dabei ist zu bemerken, daß die Bildung der Summen $L(\tau)$ strenggenommen die Kenntnis von unendlich vielen Werten der Beobachtungsreihe erfordert. Da aber die „Gewichtsfunktion“ $e^{-\tau\nu}$ mit wachsendem ν sehr rasch gegen null konvergiert, und zwar um so rascher, je größer τ ist, so läßt sich, wenn man dafür sorgt, daß alle τ größer sind als ein geeignet vorgegebenes positives τ_0 , stets erreichen, daß die Summe bei einem endlich weit vom Anfangspunkt entfernten und innerhalb des Erfahrungsbereiches liegenden Funktionswert abgebrochen werden darf.

Faßt man nun auf jeder Seite der Gl. (4) die Glieder mit der gleichen Potenz von C_τ zusammen, und setzt man

$$z_1 = \sum_{\mu=1}^n b_\mu \sin \alpha_\mu; \quad z_{i+1} = \sum_{\mu=1}^n S_i^{(\mu)} b_\mu \sin \alpha_\mu, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

so erhält man, für $\tau_k = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2n}$, $2n$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der $2n$ Unbekannten $S_1, \dots, S_n; z_1, \dots, z_n$:

$$L(\tau_k) \{C_{\tau_k}^n + S_1 C_{\tau_k}^{n-1} + \dots + S_{n-1} C_{\tau_k} + S_n\} = z_1 C_{\tau_k}^{n-1} + \dots + z_{n-1} C_{\tau_k} + z_n.$$

Eliminiert man nun aus diesen $2n$ Gleichungen die n Unbekannten z , so ergibt sich ein System von n linearen Gleichungen für S_1, \dots, S_n , aus dem diese Größen bestimmbar sind. Nach einem bekannten Satz der Algebra hat dann die „charakteristische Gleichung“

$$x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - \dots \pm S_n = 0$$

die n Wurzeln

$$s_\mu = \left(2 \sin \frac{\alpha_\mu}{2} \right)^2, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

aus denen die unbekanntenen Frequenzen, abgesehen von einer in der Natur des Problems liegenden Vieldeutigkeit, unmittelbar berechnet werden können. Die Amplituden lassen sich daraufhin aus n Gleichungen

$$L(\tau_k) = \frac{b_1 \sin \alpha_1}{C_{\tau_k} + s_1} + \frac{b_2 \sin \alpha_2}{C_{\tau_k} + s_2} + \dots + \frac{b_n \sin \alpha_n}{C_{\tau_k} + s_n}$$

bestimmen.

Das „Cosinusproblem“ läßt sich formal in der gleichen Weise lösen. Es ist in diesem Falle ($a_0 = 0$ angenommen)

$$L(\tau) = \frac{1}{2} (a_1 + \dots + a_n) + \text{Sin } \tau \cdot \left\{ \frac{a_1}{C_\tau + s_1} + \frac{a_2}{C_\tau + s_2} + \dots + \frac{a_n}{C_\tau + s_n} \right\}.$$

Setzt man also

$$A(\tau) = \frac{L(\tau) - \frac{1}{2} y_0}{\text{Sin } \tau}, \quad (y_0 = a_1 + \dots + a_n)$$

so wird

$$A(\tau) = \sum_{\mu=1}^n \frac{a_\mu}{C_\tau + s_\mu}.$$

Mit diesen Ausgangsgleichungen führt man die gleichen Operationen, wie oben, aus. Es tritt also lediglich $A(\tau)$ an Stelle von $L(\tau)$.

Über die praktische Durchführung der Rechnung möge man in der Originalabhandlung von A. GŁOGOWSKI nachlesen, der auch ein Rechenbeispiel mit zwei unbekanntem Perioden beigefügt ist. Es sei hier nur erwähnt, daß die Berechnung der L -Summen am bequemsten mit Hilfe einer Rekurrenzformel geschieht. Setzt man nämlich

$$l_{r-1} = y_{r-1} + y_r e^{-\tau}$$

und beginnt man mit

$$y_m e^{-\tau},$$

so läßt sich mittels dieser Formel sukzessive $l_{m-1}, l_{m-2}, \dots, l_0$ berechnen, und es ist schließlich

$$l_0 = \sum_{\nu=0}^m y_{\nu} e^{-\tau\nu} \sim L(\tau),$$

wenn man m hinreichend groß gewählt hat. m wird dabei wesentlich von τ abhängen, und man wird bei der Bildung der verschiedenen L -Summen nur für den kleinsten τ -Wert das ganze verfügbare Beobachtungsmaterial auszunutzen brauchen. Somit werden die einzelnen Beobachtungswerte mit sehr verschiedenem Gewicht in die Rechnung eingehen — ein Übelstand, der nur sehr unvollkommen dadurch zu vermeiden ist, daß man die Rechnung durch Umkehrung der Reihenfolge der Beobachtungswerte wiederholt, wie H. MÜNZNER vorschlägt.

H. MÜNZNER (Lit. 172) hat übrigens eine Variation dieser Methode ausgearbeitet, in der der Parameter τ für alle zu bildenden L -Summen der gleiche bleibt, wodurch wenigstens erreicht wird, daß die Gewichte der Einzelbeobachtungen in sämtlichen Gleichungen dieselben bleiben. Er erzielt dies, indem er den Parameter der LAPLACESchen Transformation als komplexe Zahl ansetzt, deren reellen Teil (τ) er als konstant voraussetzt, während er die imaginäre Komponente (σ) variiert. Er erhält so die L -Summen

$$L(\tau + i\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} y_{\nu} e^{-(\tau+i\sigma)\nu} = M(\tau, \sigma) - iN(\tau, \sigma),$$

wobei

$$M(\tau, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} y_{\nu} e^{-\tau\nu} \cos \sigma\nu$$

$$N(\tau, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} y_{\nu} e^{-\tau\nu} \sin \sigma\nu$$

zu setzen und σ in geeigneter Weise zu variieren ist. Die zur Analyse geeignetste Folge der σ -Werte ermittelt MÜNZNER, indem er aus den transformierten Werten $M(\tau, \sigma)$ und $N(\tau, \sigma)$ die Beobachtungswerte y_{ν} rückwärts berechnet und diejenigen σ bestimmt, für die die Rücktransformation am genauesten gelingt.

als Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \dots + S_{n-1} x + S_n = 0,$$

und schließlich c_0 aus $c_0 S_n$.

Die Bestimmung der Amplituden und Phasen macht, nachdem die Frequenzen und damit die Perioden bekannt geworden sind, keine Schwierigkeiten mehr. Die Berechnung der Differentialquotienten kann mit Hilfe bekannter Formeln der Differenzenrechnung geschehen. Sind die Ordinaten der Funktion in gleichen, nicht zu großen Abständen (ω) gegeben, so bildet man das Differenzenschema

$$\left. \begin{array}{cccccccc} y_{\nu-3} & \Delta_{\nu-\frac{5}{2}}^{(1)} & & & & & & \\ y_{\nu-2} & \Delta_{\nu-\frac{3}{2}}^{(1)} & \Delta_{\nu-2}^{(2)} & & & & & \\ y_{\nu-1} & \Delta_{\nu-\frac{1}{2}}^{(1)} & \Delta_{\nu-1}^{(2)} & \Delta_{\nu-\frac{3}{2}}^{(3)} & & & & \\ y_{\nu} & \Delta_{\nu}^{(1)} & \Delta_{\nu}^{(2)} & \Delta_{\nu}^{(3)} & \Delta_{\nu-1}^{(4)} & \Delta_{\nu-\frac{1}{2}}^{(5)} & & \\ y_{\nu+1} & \Delta_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)} & \Delta_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)} & \Delta_{\nu+\frac{1}{2}}^{(3)} & \Delta_{\nu+1}^{(4)} & \Delta_{\nu+\frac{1}{2}}^{(5)} & \Delta_{\nu}^{(6)} & \\ y_{\nu+2} & \Delta_{\nu+\frac{3}{2}}^{(1)} & \Delta_{\nu+\frac{3}{2}}^{(2)} & \Delta_{\nu+\frac{3}{2}}^{(3)} & & & & \\ y_{\nu+3} & \Delta_{\nu+\frac{5}{2}}^{(1)} & & & & & & \end{array} \right\} \quad (7)$$

wobei allgemein

$$\Delta_k^{(r)} = \Delta_{k+\frac{1}{2}}^{(r-1)} - \Delta_{k-\frac{1}{2}}^{(r-1)}, \quad \Delta_k^{(0)} = y_k.$$

Die Ableitungen gerader Ordnung ergeben sich dann in Gestalt von im allgemeinen rasch konvergierenden Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} y_{\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\omega^2} \left\{ \Delta_{\nu}^{(2)} - \frac{1}{12} \Delta_{\nu}^{(4)} + \frac{1}{90} \Delta_{\nu}^{(6)} - \frac{1}{560} \Delta_{\nu}^{(8)} + \dots \right\} \\ y_{\nu}^{(4)} &= \frac{1}{\omega^4} \left\{ \Delta_{\nu}^{(4)} - \frac{1}{6} \Delta_{\nu}^{(6)} + \frac{7}{240} \Delta_{\nu}^{(8)} - \dots \right\} \\ y_{\nu}^{(6)} &= \frac{1}{\omega^6} \left\{ \Delta_{\nu}^{(6)} - \frac{1}{4} \Delta_{\nu}^{(8)} + \dots \right\} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieses Verfahrens ist allerdings, daß die Funktion glatt und möglichst fehlerfrei verläuft. Beobachtungsfehler, die stark streuen, wirken sich um so störender aus, je größer die Ordnung der zu bildenden Differenzen ist. Mithin werden bei fehlerhaften Reihen die Ableitungen der höheren Ordnungen nur mit erheblicher Unsicherheit zu ermitteln sein. Vorherige Glättung der Beobachtungsreihe ist also bei Anwendung dieses Verfahrens, das besonders durch die Arbeiten von OPPENHEIM (Lit. 175), BRUNS (Lit. 52a) und HOPFNER (Lit. 125) bekannt geworden ist, unbedingt erforderlich (A. p. V. S. 80f.).

Eine Voraussetzung, die übrigens auch für die auf der LAPLACE-Transformation beruhenden Methoden gilt, ist noch die Kenntnis der Anzahl der in der Beobachtungsreihe vorhandenen Perioden, da auf ihr

die Form des Rechnungsansatzes beruht. Es ist daher wichtig, ein Verfahren zu besitzen, das es gestattet, diese Anzahl vorher zu bestimmen. In welcher Art dies geschehen könnte, ist nicht schwer einzusehen. Offenbar wird ein fehlerhaftes Ergebnis erzielt werden, wenn die angesetzte Zahl n zu klein gewählt war. Wurde n hingegen zu groß gewählt, so erhält man das richtige Ergebnis — für die überzähligen Frequenzen ergibt sich null. Ist z. B. die Zahl der tatsächlich vorhandenen Periodizitäten $n - 1$, so liefert der Ansatz für n Perioden *eine* verschwindende Frequenz, mithin wird die elementarsymmetrische Funktion S_n , die, abgesehen vom Vorzeichen, durch das Produkt der Quadrate aller Frequenzen dargestellt wird, gleich null sein. Es wird also bei der Auflösung des linearen Gleichungssystems (6) die Zählerdeterminante

$$D_n = \begin{vmatrix} y_v^{(2)} & y_v^{(4)} & \dots & y_v^{(2n)} \\ y_{v+1}^{(2)} & y_{v+1}^{(4)} & \dots & y_{v+1}^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{v+n-1}^{(2)} & y_{v+n-1}^{(4)} & \dots & y_{v+n-1}^{(2n)} \end{vmatrix}$$

verschwinden. Ein Kriterium für die Anzahl der vorhandenen Perioden erhält man also, indem man (eventuell für mehrere Ausgangsabszissen v) die Determinantenfolge

$$D_r = \begin{vmatrix} y_v^{(2)} & y_v^{(4)} & \dots & y_v^{(2r)} \\ y_{v+1}^{(2)} & y_{v+1}^{(4)} & \dots & y_{v+1}^{(2r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{v+r-1}^{(2)} & y_{v+r-1}^{(4)} & \dots & y_{v+r-1}^{(2r)} \end{vmatrix} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

bildet. Ist die Anzahl der Perioden n , so verschwinden alle Glieder dieser Folge von $r = n + 1$ aufwärts. Die Ordnung der höchstgliedrigen nicht identisch verschwindenden Determinante dieser Folge gibt also die Zahl der vorhandenen Perioden an und bestimmt daher den Ansatz.

Es ist aus mancherlei Gründen vorzuziehen, statt der Differentialquotienten die Differenzen des Schemas (7) selbst zu benutzen, wie es in verschiedener Form von BRUNS (Lit. 53) und HIRAYAMA (Lit. 122) gezeigt worden ist. Die Berechnung der Differentialquotienten durch Reihenentwicklung entfällt dann vollständig, damit auch etwaige Konvergenzbedenken, die durch sie gegeben sind. Formal ist diese Methode der vorigen völlig gleich. Die Ausgangsgleichungen haben dann die Form:

$$y_v = c_0 + \sum_{\mu=1}^n c_\mu \sin(\alpha_\mu v + \beta_\mu)$$

$$\Delta_v^{(2)} = -4 \sum_{\mu=1}^n c_\mu \sin^2 \frac{\alpha_\mu}{2} \cdot \sin(\alpha_\mu v + \beta_\mu)$$

$$\Delta_v^{(4)} = + 16 \sum_{\mu=1}^n c_\mu \sin^4 \frac{\alpha_\mu}{2} \cdot \sin(\alpha_\mu v + \beta_\mu)$$

.....

$$\Delta_v^{(2n)} = (-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot \sum_{\mu=1}^n c_\mu \sin^{2n} \frac{\alpha_\mu}{2} \sin(\alpha_\mu v + \beta_\mu).$$

Die weitere Behandlung der Aufgabe ist genau dieselbe wie vorhin, nur, daß die Lösung der charakteristischen Gleichung nicht, wie oben, die unbekanntenen Frequenzen direkt, sondern die Ausdrücke

$$k_\mu^2 = \left(2 \sin \frac{\alpha_\mu}{2} \right)^2 \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

ergibt. Die Mehrdeutigkeit des Ergebnisses ist lediglich eine Folge des Umstandes, daß hier zur Lösung nur diskrete Ordinaten der Beobachtungsfunktion herangezogen werden, was nach unseren früher gewonnenen Erkenntnissen stets eine gewisse Mehrdeutigkeit in bezug auf die Periodenlängen in sich schließt. Diese besteht aber nur dann, wenn man auch die Möglichkeit von Wellenlängen annimmt, die kleiner sind als der doppelte (hier gleich der Zeiteinheit angesetzte) Beobachtungsabstand. Bei der Differentialmethode bestand Mehrdeutigkeit nicht, solange wir die Kenntnis der Ableitungen höherer Ordnung voraussetzen konnten — sie wird natürlich sogleich wieder auftreten, wenn diese Ableitungen durch Interpolation diskreter Ordinaten bestimmt werden müssen, wie dies oben vorgeschlagen wurde.

Die Rationalisierung des Periodenproblems läßt sich noch auf verschiedene andere Arten erreichen. So gibt F. KÜHNEN (Lit. 142) eine Methode an, in der statt der Differenzen die nach einem entsprechenden Schema gebildeten *Summen* benutzt werden. So erhält man:

$$\begin{aligned} \Sigma_v^{(2)} &= y_{v-1} + 2y_v + y_{v+1} &&= 4c_0 + 4 \sum_{\mu=1}^n c_\mu \cos^2 \frac{\alpha_\mu}{2} \cdot \sin(\alpha_\mu v + \beta_\mu) \\ \Sigma_v^{(4)} &= y_{v-2} + 4y_{v-1} + 6y_v + 4y_{v+1} + y_{v+2} &&= 16c_0 + 16 \sum_{\mu=1}^n c_\mu \cos^4 \frac{\alpha_\mu}{2} \cdot \sin(\alpha_\mu v + \beta_\mu) \\ &..... \\ \Sigma_v^{(2n)} &= y_{v-n} + \binom{2n}{1} y_{v-n+1} + \dots &&= 2^{2n} \left\{ c_0 + \sum_{\mu=1}^n c_\mu \cos^{2n} \frac{\alpha_\mu}{2} \sin(\alpha_\mu v + \beta_\mu) \right\} \end{aligned}$$

und gelangt auf ganz entsprechende Weise zur Bestimmung der Unbekannten in der Form

$$k_\mu^2 = \left(2 \cos \frac{\alpha_\mu}{2} \right)^2.$$

Es ist unter Umständen ratsam, die Differenzen- und Summenmethode nebeneinander zu benutzen, da die Bestimmung der Frequenzen aus einer Tangentenformel

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_\mu}{2} = \frac{k_\mu}{k'_\mu}$$

unter allen Umständen genauer ist als die aus sin- oder cos-Ausdrücken allein. Auch ergibt sich auf diese Weise eine schätzenswerte Kontrolle der Rechnung. Eine weitere Methode ist von HIRAYAMA (l. c.) entwickelt worden — sie bezieht sich auf die Grundgleichungen

$$S_{\nu \varrho} = y_{\nu - \varrho} + y_{\nu + \varrho} = 2 \left\{ c_0 + \sum_{\mu=1}^n c_{\mu} \cos \varrho \alpha_{\mu} \sin (\alpha_{\mu} \nu + \beta_{\mu}) \right\},$$

die nach ähnlichen Regeln wie die früheren ausgewertet werden, indem an geeigneter Stelle die cos-Funktionen der vielfachen Frequenzen durch Ausdrücke ersetzt werden, die die geraden Potenzen von $\cos \frac{\alpha_{\mu}}{2}$ enthalten.

Einen noch anderen Weg schlägt J. B. DALE (Lit. 78) ein, der ein Summenschema, ähnlich wie KÜHNEN, aber nicht auf die Originalbeobachtungen, sondern (zwecks Eliminierung des konstanten Gliedes) auf die Reihe der ersten Differenzen der Beobachtungen anwendet. Dies Verfahren ist, außer in der DALESchen Abhandlung selbst, bei STUMPF (A. p. V. S. 88f.) und GLOGOWSKI (l. c.) ausführlich beschrieben, so daß sich hier eine Wiedergabe erübrigt.

Auf alle Differenzen- (oder Summen-) Methoden läßt sich das Verfahren zur Ermittlung der Anzahl der unbekanntenen Perioden, das wir im Anschluß an die Differentialmethode entwickelten, sinngemäß übertragen. Es wird immer eine Folge von Determinanten wachsender Ordnung zu bilden sein, deren Glieder von einer bestimmten Ordnung an identisch verschwinden oder (wenn infolge von Beobachtungsfehlern eine strenge Darstellung der Reihe durch ihre periodischen Komponenten nicht erwartet werden kann) unter eine gewisse, von der Größenordnung der Fehler abhängige Grenze sinken (s. auch A. p. V. S. 91f.).

Zusammenfassend kann über die in den beiden ersten Abschnitten dieses Kapitels beschriebenen Methoden gesagt werden, daß ihre Anwendung gegenüber der Periodogramm-Methoden nur dann eine wesentliche Vereinfachung bedeutet, wenn die zu untersuchende Funktion tatsächlich aus einer *kleinen* Anzahl sinusförmiger Schwingungen zusammensetzbar ist. Schon bei mehr als drei Komponenten wird die Rechnung sehr langwierig. Das Anwendungsgebiet dieser Methoden in der Praxis ist demnach sehr beschränkt. Ein gewisser Vorteil einiger dieser Methoden ist darin zu sehen, daß sie sich ohne große Schwierigkeit auch auf gedämpfte Schwingungen ausdehnen lassen. Dies gilt insbesondere für die auf der LAPLACE-Transformation beruhenden Methoden.

3. Exhaustionsmethoden.

Das gemeinsame Kennzeichen der in den beiden vorigen Abschnitten beschriebenen oder angeführten Methoden war die Aufstellung einer algebraischen Gleichung n -ten Grades, deren Wurzeln einfache Funktionen der n unbekanntenen Frequenzen der in der zu analysierenden

Funktion enthaltenen Periodizitäten waren. Durch Auflösung dieser „charakteristischen Gleichung“ gelang es, die unbekanntenen Perioden gleichzeitig zu gewinnen. Für den praktischen Rechner erwies es sich dabei als außerordentlich störend, daß die Anzahl der vorhandenen Perioden bekannt sein mußte oder durch ein besonderes Verfahren vorher bestimmt werden mußte, und daß die Schwierigkeit der numerischen Rechnung mit der Zahl der Perioden stark zunahm.

Es werden daher von vielen Forschern solche Methoden bevorzugt, die darauf abzielen, die periodischen Komponenten nicht gleichzeitig, sondern nacheinander durch verschiedene, in sich geschlossene und in bezug auf Formalismus und Arbeitsaufwand gleichwertige Rechenoperationen zu bestimmen. Verfahren solcher Art bezeichnet man als „*Exhaustionsmethoden*“.

Auf einen derartigen Weg wird man beispielsweise von selbst geführt, wenn die Beobachtungsreihe eine Periodizität mit besonders großer Amplitude enthält, die sich demnach schon aus dem bloßen Anblick der als Kurve aufgezeichneten Reihe verrät. Es wird dann vorteilhaft sein, zunächst diese *dominierende* Periodizität, deren Konstanten aus dem Kurvenverlauf selbst schon mit guter Näherung bekannt sind, genau zu bestimmen, sie dann aus dem Beobachtungsmaterial zu eliminieren und den verbleibenden Rest einer weiteren Analyse zu unterwerfen. Enthält auch der Rest eine dominierende Periode, so kann das gleiche Verfahren wiederholt werden. Das wird aber im allgemeinen nicht der Fall sein — es wird dann erforderlich sein, das Material durch geeignete Operationen so zu verändern, daß bestimmte Perioden verstärkt, andere geschwächt oder ganz unterdrückt werden.

Alle Exhaustionsmethoden beruhen daher auf Rechenverfahren, die die ursprüngliche Beobachtungsreihe so umgestalten, daß dominierende Perioden entstehen, die unmittelbar erkennbar und somit auf mehr oder weniger triviale Weise bestimmbar sind. Diese Perioden sollen entweder mit einer der vorhandenen Perioden identisch sein oder mit ihr durch eine strenge Gesetzmäßigkeit verbunden sein. Die Möglichkeiten, dies Prinzip zu verwirklichen, sind zahlreich. In diesem Abschnitt sollen einige der einfachsten Verfahren dieser Art beschrieben werden; einige andere, die erst in neuerer Zeit ausgearbeitet worden sind, werden in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels gesondert behandelt.

Dem Gesagten zufolge kann auch die *Periodogramm*methode als ein Verfahren betrachtet werden, das zur Hervorhebung gewisser Periodizitäten gegenüber anderen geeignet ist. Bei der Bildung der *Phasendiagramme* berechneten wir für eine Versuchsperiode in der Nähe der zu bestimmenden und für ein Analysenintervall bestimmter Länge, dessen Anfang variabel war, die zugehörigen Periodogrammkomponenten. Diese Komponenten, als Funktionen des variablen Intervallanfangs aufgetragen, zeigten dann einen periodischen Verlauf — die Periode erwies

sich als die Schwebungsperiode zwischen der angesetzten Versuchsperiode und der wahren Periode, aus der die wahre Periode mit großer Genauigkeit bestimmbar war. Andere Periodizitäten, sofern sie nicht ebenfalls in unmittelbarer Nachbarschaft der Versuchsperiode lagen, wurden durch dies Verfahren mehr oder weniger unterdrückt. Die Methode der Vektor-diagramme lieferte also gerade das, was hier gefordert wird: Die in der Nähe der Versuchsperiode liegende wahre Periode wird aus der Fülle der übrigen isoliert und erscheint — wenn auch mit gesetzmäßig veränderter Frequenz — als dominierende Periode.

Eine Abart dieser Methode, die zwar nicht dasselbe zu leisten imstande ist, aber den Vorteil weit einfacherer Berechnungsweise hat, ist das von C. E. P. BROOKS (Lit. 50) angegebene *Differenzen-Periodogramm*, das in allen denjenigen Fällen brauchbar ist, in denen eine Periode wenigstens genähert bekannt ist, und in denen der gesamte Beobachtungszeitraum eine genügende Anzahl von Wellenlängen der gesuchten Periodizität umfaßt. Es genügt, die Anwendung des Verfahrens auf eine Funktion zu zeigen, die nur aus einer einzigen persistenten Sinuswelle besteht, da sich die Wirkung bei Vorhandensein verschiedener Wellen aus den Wirkungen bezüglich der Elementarwellen additiv zusammensetzt. Ist also

$$y(t) = c \sin(\alpha t + \beta), \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{p}\right)$$

so bildet BROOKS die Mittelwerte

$$S_{v-\frac{1}{2}} = \frac{1}{u} \int_{(v-1)u}^{vu} y(t) dt = c \cdot \frac{\sin u \frac{\alpha}{2}}{u \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \left\{ (2v-1) u \frac{\alpha}{2} + \beta \right\} \quad (v = 1, 2, \dots)$$

über verschiedene aufeinanderfolgende Intervalle von der Länge u , wobei u nach Möglichkeit so gewählt werden soll, daß es der halben Länge der wahren Periode

$$\frac{p}{2} = \frac{\pi}{\alpha}$$

nahezu gleich ist. Man bilde nun die Reihe der ersten Differenzen aus der Folge $S_{v-\frac{1}{2}}$. Kehrt man das Vorzeichen jeder zweiten Differenz um, so entsteht offenbar die Folge

$$\begin{aligned} V_v &= (-1)^v \left(S_{v+\frac{1}{2}} - S_{v-\frac{1}{2}} \right) = 2c \cdot \frac{\sin^2 u \frac{\alpha}{2}}{u \frac{\alpha}{2}} \cos \{v u \alpha + \beta - v\pi\} \\ &= 2c \cdot \frac{\sin^2 u \frac{\alpha}{2}}{u \frac{\alpha}{2}} \cos \{v(u\alpha - \pi) + \beta\}. \end{aligned}$$

Ist nun nahezu $u = \frac{\pi}{\alpha}$, so ist die Amplitude der Schwankung der Werte V wegen

$$\sin u \frac{\alpha}{2} \sim 1$$

nicht viel von

$$\frac{4c}{\pi}$$

verschieden, also von der Größenordnung der wahren Amplitude, während andere Perioden nach Maßgabe des Faktors

$$2 \cdot \frac{\sin^2 u \frac{\alpha}{2}}{u \frac{\alpha}{2}}$$

verkleinert erscheinen. Das Diagramm der Werte V_ν zeigt also, wenn nicht gerade sehr ungünstige Verhältnisse vorliegen, eine dominierende *lange* Periode von der Wellenlänge

$$P = \frac{2\pi u}{u\alpha - \pi} = \frac{2\phi u}{2u - \phi},$$

die man, falls die Beobachtungsreihe lang genug ist, durch Ausmessen bestimmen kann. Die gesuchte Periode ist dann

$$\phi = \frac{2uP}{2u + P}.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{4u^2}{(2u + P)^2} dP = \frac{\phi^2}{P^2} dP \\ \frac{d\phi}{\phi} &= \frac{\phi}{P} \cdot \frac{dP}{P} \end{aligned}$$

findet man, daß ein Fehler in der Bestimmung der langen Periode P auf die Genauigkeit der gesuchten Periode ϕ einen um so geringeren Einfluß hat, je größer P im Verhältnis zu ϕ ist. Sollte die Isolierung der gesuchten Periode durch den oben beschriebenen Prozeß noch nicht genügend erreicht sein, so läßt sich durch Glättung — etwa nach der Formel

$$W_{\nu + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (V_\nu + V_{\nu+1}) = 2c \cdot \frac{\sin^3 u \frac{\alpha}{2}}{u \frac{\alpha}{2}} \cos \left\{ \left(\nu + \frac{1}{2} \right) (u\alpha - \pi) + \beta \right\}$$

erreichen, daß störende Nebenperioden in erhöhtem Maße unterdrückt werden. Das BROOKSSCHE Differenzenperiodogramm stellt im Grunde genommen nichts anderes dar als eine Periodogrammanalyse für die Versuchsperiode $2u$, in der an Stelle einer sinusförmigen Hilfswelle eine „Gitterfunktion“ verwendet wird. Da die Gitterfunktion von der Grundperiode $2u$ sich durch eine FOURIERSCHE Reihe darstellen läßt, die außer der Grundperiode noch die ungeraden Oberschwingungen enthält, so

ist ohne weiteres klar, daß auch solche „wahren Perioden“, die mit diesen Oberschwingungen koinzidieren, wenn auch mit geringerer Amplitude, im Differenzenperiodogramm auftreten müssen. In der Tat zeigt sich, daß der „Selektionsfaktor“

$$\frac{\sin^2 u \frac{\alpha}{2}}{u \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 u \frac{\pi}{p}}{u \frac{\pi}{p}}$$

für $u = \frac{p}{2}, \frac{3p}{2}, \frac{5p}{2}, \dots$ sukzessive die nahezu maximalen Werte

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{5\pi}, \dots$$

annimmt. Das Verfahren kann also, wenn der Rechner nicht sehr kritisch vorgeht, zu falschen Ergebnissen führen.

Ist eine Periode bekannt, so kann ihre Eliminierung natürlich auf direktem Wege erfolgen, indem man die ihr entsprechenden Werte von den beobachteten subtrahiert. Einfacher und schneller arbeitet das von KLEIN und SOMMERFELD (Lit. 136) angegebene Verfahren: Ist außer der bekannten Periode p_1 noch eine zweite Periode von der Länge p_2 vorhanden, ist also — von etwaigen anderen periodischen Bestandteilen abgesehen — die vorgelegte Funktion von der Gestalt

$$f(t) = c_1 \sin(\alpha_1 t + \beta_1) + c_2 \sin(\alpha_2 t + \beta_2), \quad \left(\alpha_i = \frac{2\pi}{p_i}\right)$$

so bilde man, auf Grund des bekannten Wertes p_1 :

$$f(t + p_1) - f(t) = 2 c_2 \sin \pi \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cos \left\{ \alpha_2 t + \beta_2 + \pi \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right\}.$$

Durch dies Verfahren wird also eine von der Periode p_1 freie Funktion erzeugt, die alle übrigen Perioden, z. B. p_2 , mit einer gewissen Phasenverschiebung und der Amplitude

$$2 c_2 \sin \pi \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 2 c_2 \sin \pi \frac{p_1}{p_2}$$

enthält. Ist also der Faktor $\sin \pi \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ nicht allzu klein, so wird die Restfunktion die Welle p_2 frei von dem Einfluß der dominierenden Welle p_1 aufzeigen. Ist eine zweite Periode nicht vorhanden, so wird sich die Restfunktion wie eine Reihe zufälliger Fehler verhalten oder wenigstens ein deutlich unperiodisches Verhalten zeigen. Dasselbe wird allerdings eintreten, wenn die zweite Periode ganzzahlig in p_1 enthalten ist und weitere Perioden nicht existieren. Dann wird der Faktor $\sin \pi \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ null und somit auch die zweite Periode mit der ersten eliminiert. Mit anderen Worten: Das Verschwinden der Differenz $f(t + p_1) - f(t)$ bedeutet nicht, daß $f(t)$ nur die Periode p_1 enthält, sondern, daß $f(t)$ rein periodisch mit p_1 als Grundperiode ist. Dieser Fall ist trivial; die Lösung des Problems ist dann durch die Anwendung der Harmonischen Analyse

möglich. Ist der Faktor $\sin \pi \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ nicht streng gleich null, erweist er sich aber als so klein, daß eine Bestimmung der zweiten Periode aus der Restfunktion zu unsicher wird, so läßt sich die Eliminierung von p_1 — falls die Länge der Reihe dies zuläßt — auch aus Differenzen von der Form

$$f(t + n p_1) - f(t)$$

erreichen, wo n eine ganze Zahl > 1 bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit, für die zweite Periode eine merkliche Amplitude übrig zu behalten, wird durch diese Erweiterung der Methode gesteigert. KLEIN und SOMMERFELD haben dies Verfahren (l. c.) mit gutem Erfolg bei der Trennung der jährlichen und der CHANDLERSchen Periode (433 Tage) in den Polschwankungskurven (Variationen der geographischen Breite) angewandt.

Das Verfahren von KLEIN und SOMMERFELD, das immer anwendbar ist, wenn, bzw. solange, dominierende Perioden erkennbar sind, hat den Vorzug, daß die zu eliminierenden Periodizitäten nicht unbedingt sinusförmig sein müssen, sondern beliebige Form haben dürfen. Den gleichen Vorzug gewährt die Verwendung des schon früher beschriebenen BUYS-BALLOTSchen Schemas, in dem die vorliegende Beobachtungsreihe in Zeilen von der Länge der vermuteten, in diesem Falle also der dominierenden Periode angeordnet wird. Bildet man dann spaltenweise Summen oder arithmetische Mittel, so entspricht der Verlauf dieser Werte um so mehr der Gestalt der gesuchten Periodizität, je größer die Zahl der so zusammengefaßten Zeilen ist. Für den Fall, daß die Wellenlänge der dominierenden Periode nur unsicher aus dem Anblick der Kurve hervorgeht, führt das ebenfalls in der Periodogrammrechnung benutzte Verfahren zum Ziel, die Summen- oder Mittelreihen gruppenweise zu berechnen — die Übereinstimmung der aus den verschiedenen Zeilengruppen erhaltenen Summenreihen ihrer Form nach ergibt dann eine gute Bestätigung der Periodizität — eine etwaige Verschiebung der Extrema von Gruppe zu Gruppe ermöglicht ferner eine Korrektur der angenommenen Wellenlänge oder auch gegebenenfalls die Feststellung einer zeitlichen Veränderlichkeit der Periodizität. Diese Methode, die mit der Methode der Phasendiagramme identisch ist, muß auch im Zusammenhang mit den Exhaustionsverfahren erwähnt werden; — der Unterschied gegenüber der viel allgemeineren Periodogramm methode besteht offenbar darin, daß die letztere in ihrer Voraussetzungslosigkeit eine systematische Durchmusterung des Materials nach verschiedenen, über einen größeren Spektralbereich verteilten Versuchsperioden erforderlich macht, während hier die wesentliche Voraussetzung gemacht wird, daß eine dominierende Periode bereits bekannt oder wenigstens ungefähr bekannt ist. Ist diese Periode bestimmt und aus dem Material auf irgendeine Weise eliminiert, so läßt sich das Verfahren auf die Restreihe erneut anwenden, falls auch hier wieder eine dominierende Periode

erkennbar ist. Das ist z. B. von C. G. ABBOT bei der Diskussion der Schwankungen der Solarkonstante ausprobiert worden. ABBOT (Lit. 2) hat — zur Erleichterung der numerischen Rechnungen — auch einen sehr interessanten Apparat konstruiert, der eine Mechanisierung dieses Rechenverfahrens gestattet, und den er „*Periodometer*“ nennt.

Die bislang geschilderten Methoden stellen noch keine vollständigen Beispiele für das Exhaustionsverfahren dar. Sie lösen nur Teilprobleme, da sie immer von der Voraussetzung ausgehen, daß eine dominierende Periode bereits vorhanden sei und daher angenähert als bekannt angenommen werden darf. Eine durchgreifende Anwendung des Exhaustionsprinzips ist erst dann möglich, wenn Regeln angegeben werden, nach denen eine beliebige zusammengesetzte Schwingung durch vollständige oder teilweise Unterdrückung aller Teilschwingungen bis auf eine in eine solche mit dominierender Periode umgewandelt werden kann. Ein sehr interessanter Versuch in dieser Richtung stammt von B. GALITZIN (Lit. 106), dessen Methode zwar vom Standpunkt des Praktikers aus anfechtbar ist, die gestellte Aufgabe aber theoretisch löst und ihrer Einfachheit wegen als Vorbild für andere Lösungsversuche betrachtet werden kann.

Ist $f(t)$, unter der Voraussetzung, daß das konstante Glied verschwindet oder vorher eliminiert sei, in der Form

$$f(t) = c_1 \sin(\alpha_1 t + \beta_1) + c_2 \sin(\alpha_2 t + \beta_2) + \dots + c_n \sin(\alpha_n t + \beta_n)$$

gegeben, so wird ihr unbestimmtes Integral (variable obere Grenze)

$$F^{(1)}(t) = \int_{t_0}^t f(t) dt = -\frac{c_1}{\alpha_1} \cos(\alpha_1 t + \beta_1) - \frac{c_2}{\alpha_2} \cos(\alpha_2 t + \beta_2) - \dots - \frac{c_n}{\alpha_n} \cos(\alpha_n t + \beta_n) + C_1^{(1)},$$

wo $C_1^{(1)}$ eine von den Phasen zur Anfangszeit abhängige Integrationskonstante bedeutet. Wiederholt man die Integration, die bei Beobachtungsreihen durch Summation zu ersetzen ist, mit den neu entstandenen Funktionen immer wieder, so erhält man nach $2r$ -maliger Integration schließlich:

$$\begin{aligned} F^{(2r)}(t) &= \int_{t_0}^t F^{(2r-1)}(t) dt = (-1)^r \left\{ \frac{c_1}{\alpha_1^{2r}} \sin(\alpha_1 t + \beta_1) + \dots + \frac{c_n}{\alpha_n^{2r}} \sin(\alpha_n t + \beta_n) \right\} \\ &\quad + C_{2r}^{(1)} t^{2r-1} + C_{2r}^{(2)} t^{2r-2} + \dots + C_{2r}^{(2r)} \\ &= (-1)^r \cdot \frac{1}{\alpha_1^{2r}} \left\{ c_1 \sin(\alpha_1 t + \beta_1) + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{2r} \sin(\alpha_2 t + \beta_2) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_n} \right)^{2r} \sin(\alpha_n t + \beta_n) \right\} + C_{2r}^{(1)} t^{2r-1} + \dots + C_{2r}^{(2r)} \end{aligned}$$

Denkt man sich also die Frequenzen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ in aufsteigender Folge geordnet, so daß α_1 die kleinste vorkommende Frequenz, bzw. $p_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1}$ die größte Periode ist, so erkennt man, daß nach einer genügenden

Anzahl von Schritten die Periode mit der größten Wellenlänge dominiert. Nach Eliminierung der längsten Periode aus dem Ausgangsmaterial ergibt eine Wiederholung des Verfahrens die zweitlängste Periode usw. Die praktische Schwierigkeit des Verfahrens, die auch in der Literatur zu Kritik Anlaß gegeben hat (Lit. 218) besteht darin, daß das parabolische Restglied

$$C_{2r}^{(1)} t^{2r-1} + C_{2r}^{(2)} t^{2r-2} + \dots + C_{2r}^{(2r)}$$

unter Umständen Perioden vortäuschen kann. Diese Schwierigkeit könnte nur dadurch vermieden werden, daß man vor jeder neuen Integration versucht, die aus der vorhergehenden Integration stammende Konstante zu eliminieren, was aber nicht immer sicher genug gelingt. Brauchbar ist das GALITZINSche Verfahren insbesondere dann, wenn die längste Periode auch die mit der größten Amplitude ist, da dann ihre Isolierung schon nach wenigen Schritten erfolgt, oder wenn es sich überhaupt um die Elimination sehr langer Perioden handelt.

4. Periodenbestimmung mit Hilfe der Autokorrelation.

Auf die Verwendbarkeit des *Korrelationskoeffizienten* bei der Bestimmung unbekannter Periodizitäten hat J. I. CRAIG (Lit. 72) hingewiesen. In dieser Arbeit zeigte CRAIG, daß die Periodogrammkomponenten einer Beobachtungsreihe für eine bestimmte Versuchswelle den Korrelationskoeffizienten zwischen der auf ihren Mittelwert bezogenen Beobachtungsreihe einerseits und den sin- bzw. cos-Funktionen der Versuchswelle andererseits proportional sind. Über die Grundbegriffe der Korrelationsrechnung sowie über diese soeben angedeuteten Zusammenhänge ist im vorigen Kapitel (Abschn. 6 und 7) ausführlich berichtet worden.

Von CRAIG (Lit. 73) stammt ferner eine Methode, in der Korrelationskoeffizienten als wesentliche Hilfsgrößen benutzt werden. Diese Methode, deren vollständige Ausgestaltung, soweit dem Verfasser bekannt ist, nicht veröffentlicht worden ist, gehört ihrer Art nach zu den Algebraisierungsmethoden (vgl. DALE, KÜHNEN, HIRAYAMA usw.). Die erwähnte, von H. H. TURNER und H. C. PLUMMER mit Anmerkungen versehene Veröffentlichung entwickelt lediglich den Grundgedanken und bezieht sich auf den Fall, daß — abgesehen von zufälligen Fehlern — nur eine einzige Periode vorliegt oder wenigstens stark dominiert. Ist nämlich streng:

$$y_v = c \sin(\alpha v + \beta),$$

so ergibt sich, wenn man das arithmetische Mittel aus den beiden y_v benachbarten Werten bildet,

$$\frac{y_{v-1} + y_{v+1}}{2} = c \sin(\alpha v + \beta) \cdot \cos \alpha.$$

Setzt man also

$$\frac{y_{v-1} + y_{v+1}}{2} = K y_v,$$

wobei K einen Operator bedeutet, so besteht zwischen den Reihen

$$y_v \text{ und } K y_v$$

eine Regressionsgleichung von der Gestalt

$$K y_v - y_v \cos \alpha = 0.$$

Sind im ganzen n Beobachtungswerte gegeben, so lassen sich $n-2$ solcher Beziehungen herstellen; ihre Quadratsumme ergibt:

$$\begin{aligned} \sum (K y_v)^2 - 2 \cos \alpha \cdot \sum y_v \cdot (K y_v) + \cos^2 \alpha \cdot \sum y_v^2 \\ = (n-2) (\sigma_1^2 - 2 \sigma_0 \sigma_1 r_{01} \cos \alpha + \sigma_0^2 \cos^2 \alpha) = 0, \end{aligned}$$

wobei σ_0 , σ_1 die Streuungen der Folgen y_v bzw. $K y_v$ bedeuten und r_{01} der Korrelationskoeffizient zwischen diesen beiden Folgen ist. Ist nun die obige Regressionsgleichung streng erfüllt, die Beziehung zwischen y_v und $K y_v$ also streng linear, so ist der Korrelationskoeffizient $r_{01} = 1$, und es folgt aus

$$\sigma_1^2 - 2 \sigma_0 \sigma_1 r_{01} \cos \alpha + \sigma_0^2 \cos^2 \alpha = 0$$

unmittelbar

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sigma_1}{\sigma_0}.$$

In der Praxis werden natürlich die Regressionsgleichungen nicht streng erfüllt sein, so daß die Endformel bestenfalls erste Näherungen für die wahre Periode liefert. Das führt dazu, daß nicht nur die Größe r_{01} wirklich berechnet werden muß, sondern daß auch die Wirkung der Operation K auf die „Widersprüche“ der obigen Regressionsgleichung zu berücksichtigen ist.

Diese Methode, die sich nach den Angaben von CRAIG auch auf mehrere Perioden erweitern (oder auch als Exhaustionsmethode ausbauen) ließe, hat in der Praxis keinen Eingang gefunden. Sie ist aber wenigstens historisch interessant, weil hier der Begriff der Korrelation, der im Zusammenhang mit Periodenfragen (s. Kap. IV) schon öfter aufgetaucht ist, zum erstenmal bewußt bei der Lösung von Periodenproblemen angewandt wird.

Eine wirklich brauchbare, auf dem Korrelationsbegriff aufgebaute Methode ist erst vor kurzer Zeit von J. FUHRICH (Lit. 105, 207, 209) geschaffen worden. Es handelt sich hier um eine reine Exhaustionsmethode, bei der (im Gegensatz zu GALITZIN) die einzelnen Perioden in der Reihenfolge abnehmender *Amplituden* isoliert und eliminiert werden. Wegen der mathematischen und begrifflichen Grundlagen dieser Methode verweise ich wiederum auf die Ausführungen, die im Anschluß an die Grundbegriffe der Korrelationsrechnung in Abschnitt 8 des vorigen Kapitels gemacht worden sind.

Enthält z. B. eine (äquidistante) Beobachtungsreihe y_1, y_2, \dots, y_n eine einzige persistente Periode von der Frequenz α und beliebiger Amplitude und Phase, so wissen wir aus (IV, 7), daß die Folge der Autokorrelationskoeffizienten fortschreitender Ordnung von der Form

$$k'_n \sim \cos n \alpha$$

ist. Transformiert man also die Originalfolge durch die Bildung der Autokorrelationskoeffizienten, wobei alle in (IV, 7) angegebenen Verhaltensmaßregeln zu beachten sind, so ergibt sich die Folge k'_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) als eine (wie FUHRICH sie nennt) *erste Transformierte* der Originalfolge, die sich also im angemessenen Fall als eine \cos -Schwingung mit der Anfangsphase null darstellt. Besteht die Originalreihe aus mehreren Sinusschwingungen, so besteht das Ergebnis, wie in IV, 7 ausführlicher gezeigt wurde, aus mehreren Gliedern: im Zähler der ersten Transformatierten treten der Hauptsache nach \cos -Funktionen der vorhandenen Perioden auf, die mit dem Quadrat der zugehörigen Amplituden multipliziert sind. Mithin erhält die Welle mit der größten Amplitude ein überragendes Gewicht, dominiert also in der Transformatierten stärker als in der Originalreihe. Durch genügend häufige Wiederholung des Verfahrens, also durch Bildung einer zweiten, dritten Transformatierten usw. (k''_n, k'''_n, \dots), gelingt es mithin, das Gewicht der dominierenden Periode im Vergleich zu dem der übrigen immer weiter zu verstärken, bis sie zuletzt allein merklich ist. Das Verfahren versagt nur dann, wenn zwei Perioden die gleiche Amplitude haben, und es konvergiert um so langsamer, je geringer der Unterschied zwischen zwei Amplituden ist. Ein weiterer Nachteil der Korrelationsmethode besteht darin, daß bei beschränkter Beobachtungsanzahl zur Bildung der Folge k'_n für größere Werte von n nur ein Teil der Originalbeobachtungen verwendet werden kann — die Zuverlässigkeit der Werte k'_n nimmt also mit wachsendem n ständig ab; auch kann die Folge k'_n keineswegs bis zum Umfang der Originalreihe fortgesetzt werden — bei jeder weiteren Transformation geht also ein Teil der Ausgangswerte verloren. Der Transformationsprozeß kann also nicht beliebig weit fortgesetzt werden; auch ergeben sich größere Schwierigkeiten, wenn die Voraussetzung der Persistenz der Perioden nicht erfüllt ist. Aus allen diesen Gründen ist die Verwendbarkeit des FUHRICHschen Verfahrens eng begrenzt, innerhalb dieser Grenzen besitzt es gegenüber der Periodogramm- und der Periodogrammmethode unzweifelhaft den Vorteil, daß es die jeweils dominierende Periode unmittelbar liefert, also das mühsame Durchmusterungsverfahren überflüssig macht.

Ist nach wiederholter Anwendung der FUHRICHschen Transformation die dominierende Periode isoliert, so ist sie zunächst in Form einer Zahlenfolge gegeben, die (etwa nach r -maliger Transformation) ungefähr die Gestalt

$$k_n^{(r)} = \cos n \alpha$$

aufweist und am besten durch graphische Darstellung kenntlich gemacht wird. Die gesuchte Periodenlänge erhält man dann zunächst angenähert durch Ausmessung der so dargestellten Kurve, etwa durch Bestimmung des Abstandes aufeinanderfolgender Maxima. Der so erhaltene Näherungswert der wahren Frequenz α sei:

$$\alpha_0 = \alpha - \varepsilon.$$

Es besteht nun die Identität

$$\sum_n k_n^{(r)} \sin n \alpha = \sum_n k_n^{(r)} \sin n (\alpha_0 + \varepsilon) = 0,$$

falls sich die Summierung über eine volle Anzahl von Perioden von $k_n^{(r)}$ erstreckt. Demnach erhält man, wenn man in Anbetracht der Kleinheit der Korrektur

$$\sin \varepsilon = \varepsilon; \quad \cos \varepsilon = 1$$

setzt, die Beziehung

$$\sum_n k_n^{(r)} \sin n \alpha_0 + \sum_n n \varepsilon k_n^{(r)} \cos n \alpha_0 = 0,$$

aus der für ε die Bestimmungsgleichung

$$\varepsilon = - \frac{\sum_n k_n^{(r)} \sin n \alpha_0}{\sum_n n k_n^{(r)} \cos n \alpha_0}$$

folgt.

Ist die Länge der dominierenden Periode bzw. ihre Frequenz bestimmt, so muß man zur Berechnung ihrer Amplitude und Phase auf die Originalbeobachtungen zurückgreifen. Man bedient sich dabei zweckmäßigerweise der aus der Harmonischen Analyse bekannten Formeln, durch die man die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate erhält. Es darf dabei allerdings nicht die Schwierigkeit übersehen werden, daß die Bestimmungsformeln

$$y_\nu = c_1 \sin (\alpha_1 \nu + \beta_1) + \cdots + c_n \sin (\alpha_n \nu + \beta_n), \quad (\nu = 1, 2, \dots, N)$$

$$c_i \sin \beta_i = \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^n y_\nu \cos \alpha_i \nu$$

$$c_i \cos \beta_i = \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^n y_\nu \sin \alpha_i \nu$$

nur unter der Voraussetzung streng sind, daß nicht nur die betrachtete Periode, sondern auch alle übrigen etwa in der Beobachtungsreihe noch vorhandenen Perioden in dem gewählten Summationsintervall ganzzahlig enthalten seien, was natürlich nicht der Fall zu sein braucht. Es wird sich also im allgemeinen durch dies Verfahren nur ein mehr oder weniger guter Näherungswert für c_i und β_i ergeben. Besonders im Falle benachbarter Perioden werden größere Fehler unvermeidlich sein. Immerhin wird man durch die genäherte Bestimmung der Amplitude und Phase

in die Lage versetzt, die aufgefundene Periodizität zu rekonstruieren und durch Abzug von der Originalreihe wenigstens zum größten Teil zu eliminieren. Wiederholt man das Verfahren mit der Restreihe, so wird man die Periodizität mit der nächst kleineren Amplitude als Dominante erhalten, usw. Hat man auf diese Weise alle Periodizitäten entfernt, d. h. enthält der übrigbleibende Rest nur noch unperiodische Bestandteile, so wird man gut tun, eine Gesamtausgleichung nach den aufgefundenen Perioden zur endgültigen Bestimmung aller Amplituden und Phasen vorzunehmen, um etwaige bei der Elimination gemachte Fehler zu beseitigen.

5. Die Methode von LABROUSTE.

Die nachstehende, von H. LABROUSTE (Lit. 143—147) entwickelte, Methode stellt eine Anwendung des Exhaustionsprinzips dar, die wegen der außerordentlichen Allgemeinheit ihres Formalismus bemerkenswert ist. Wir werden in der Tat erkennen, daß es gelingt, durch Spezialisierung der von LABROUSTE gegebenen Grundformeln nicht nur fast alle bisher bekannten Exhaustionsmethoden unter einen Gesichtswinkel zu bringen, sondern auch ihre innere Verwandtschaft mit der Methode der Periodogramme aufzuzeigen. Der Grundgedanke, den LABROUSTE verfolgt, ist folgender:

Eine Beobachtungsreihe möge in Gestalt äquidistanter Ordinaten

$$\dots, y_{-n}, y_{-n+1}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n, \dots$$

vorliegen. y_0 sei dabei ein beliebiger Beobachtungswert im Innern der Reihe, der genügend weit von den beiden Endpunkten des Beobachtungszeitraums entfernt ist. Bildet man nun etwa durch Summierung der spiegelbildlich zu y_0 gelegenen Ordinaten die abgeleiteten Größen

$$Y_\nu = y_\nu + y_{-\nu},$$

so läßt sich durch Festsetzung gewisser Konstanten K_0, K_1, \dots, K_n eine lineare Kombination

$$R_n = K_0 Y_0 + K_1 Y_1 + \dots + K_n Y_n$$

bilden, die $2n + 1$ aufeinanderfolgende Beobachtungswerte miteinander verbindet.

Wiederholt man diese Operation, indem man sie, statt auf y_0 als Mittelordinate, auf y_1, y_2, \dots anwendet, so erhält man eine transformierte Folge

$$R_n(y_0), R_n(y_1), R_n(y_2), \dots,$$

in der, je nach Wahl der Konstanten K_ν , die periodischen Eigenschaften der ursprünglichen Reihe in bestimmter Weise verändert erscheinen.

Nehmen wir etwa an, daß die Beobachtungsreihe von der Form $y(x) = c_1 \sin(\alpha_1 x + \beta_1) + c_2 \sin(\alpha_2 x + \beta_2) + \dots$ ($x = 0, 1, 2, \dots$)

ist, so erhält man für die Abszissen $x - \nu$ und $x + \nu$

$$\begin{aligned} Y_\nu^{(x)} &= y(x - \nu) + y(x + \nu) = c_1 \sin(\alpha_1(x - \nu) + \beta_1) + c_2(\alpha_2(x - \nu) + \beta_2) + \dots \\ &\quad + c_1 \sin(\alpha_1(x + \nu) + \beta_1) + c_2(\alpha_2(x + \nu) + \beta_2) + \dots \\ &= 2c_1 \cos \alpha_1 \nu \sin(\alpha_1 x + \beta_1) + 2c_2 \cos \alpha_2 \nu \sin(\alpha_2 x + \beta_2) + \dots \end{aligned}$$

Man erhält demnach eine neue Funktion von x , in welcher die Elementarwellen nach Periode und Phase erhalten bleiben, hingegen die Amplituden durch die Faktoren

$$f_\nu^{(r)} = 2 \cos \alpha_r \nu$$

vergrößert oder verkleinert werden. Ebenso ergibt die allgemeinere Transformation R_n

$$\begin{aligned} R_n(x) &= (K_0 + K_1 f_1^{(1)} + K_2 f_2^{(1)} + \dots + K_n f_n^{(1)}) c_1 \sin(\alpha_1 x + \beta_1) \\ &\quad + (K_0 + K_1 f_1^{(2)} + K_2 f_2^{(2)} + \dots + K_n f_n^{(2)}) c_2 \sin(\alpha_2 x + \beta_2) + \dots, \end{aligned}$$

also eine Deformation der Elementarwellen durch die „Vergrößerungsfaktoren“

$$q_n^{(r)} = K_0 + K_1 f_1^{(r)} + K_2 f_2^{(r)} + \dots + K_n f_n^{(r)}.$$

Durch geeignete Wahl der Konstanten K_0, K_1, \dots, K_n läßt sich dann erreichen, daß gewisse Spektralbereiche eine Vergrößerung der Amplituden erfahren, in anderen hingegen die Amplituden verkleinert oder zum Verschwinden gebracht werden. Die Abhängigkeit der Größen $q_n^{(r)}$ von der Wellenlänge $\frac{2\pi}{\alpha_r}$ oder besser der Frequenz α_r läßt sich durch eine Funktion darstellen, die man sinngemäß als „Selektivitätsfunktion“ bzw., wenn sie als Kurve aufgezeichnet wird, als „Selektivitätskurve“ bezeichnet.

Eine zweite Klasse von Transformationen erhält man, wenn man die Differenzen

$$Z_\nu(x) = \pm (y(x + \nu) - y(x - \nu))$$

statt der Summen Y_ν einführt. Es ergibt sich dann

$$\pm Z_\nu(x) = 2c_1 \sin \alpha_1 \nu \cos(\alpha_1 x + \beta_1) + 2c_2 \sin \alpha_2 \nu \cos(\alpha_2 x + \beta_2) + \dots$$

Die Transformatierten nehmen dann die Gestalt

$$R_n(x) = q_n^{(1)} c_1 \cos(\alpha_1 x + \beta_1) + q_n^{(2)} c_2 \cos(\alpha_2 x + \beta_2) + \dots$$

an, mit den Vergrößerungsfaktoren

$$q_n^{(r)} = K_0 + K_1 g_1^{(r)} + \dots + K_n g_n^{(r)}; \quad g_\nu^{(r)} = 2 \sin \alpha_r \nu$$

und Phasenverschiebung der transformierten Wellen um eine Viertelwellenlänge. Will man die Phasenverschiebung vermeiden, so wendet man die gleiche Transformation mit dem umgekehrten Vorzeichen auf die transformierte Kurve noch einmal an.

Überhaupt ist das Wesentliche bei der Anwendung dieser Methode, daß man durch wiederholte Ausführung derselben Transformation oder durch sukzessive Anwendung verschiedener Transformationen in der

Lage ist, jede gewünschte Verschiebung des Amplitudenverhältnisses der vorhandenen Wellen zu erzielen. Um die Rechenarbeit möglichst zu vereinfachen, verfolgt man zweckmäßigerweise den Grundsatz, nur solche Transformationen zu benutzen, bei denen die Konstanten K nur die Werte 0, +1 oder -1 annehmen, damit lediglich Additionen oder Subtraktionen im Rechnungsgang auftreten. LABROUSTE zeigt, daß durch Hintereinanderschaltung solcher elementaren Kombinationen jedes gewünschte Ergebnis, die Aussonderung von Einzelwellen betreffend, verhältnismäßig leicht erzielt werden kann. Die einzige Schwierigkeit ist dabei, daß man nicht, wie etwa bei der Periodogrammanalyse, eine Rechenregel von weitgehender Allgemeingültigkeit aufstellen kann, sondern eine individuelle Behandlung jedes konkreten Problems durchaus am Platze ist.

Man kann dabei sehr verschiedene Wege einschlagen. Am übersichtlichsten und verhältnismäßig schematisch gestaltet sich das Vorgehen des Rechners, wenn er bestrebt ist, die vorhandenen Wellen (ähnlich wie bei der Methode von GALITZIN [Abschnitt 3]), in der Reihenfolge wachsender Frequenzen einzeln zu isolieren. Dabei braucht man Selektivitätskurven, die nur für den langwelligen Bereich des Spektrums große Ordinaten besitzen, für alle Wellenlängen unterhalb einer gewissen Schranke aber nur wenig von der Nulllinie abweichen. Selektivitätskurven dieser Art besitzen aber mehr oder weniger alle Transformationen, die sich aus den Summen Y_ν zusammensetzen lassen, also etwa elementare Transformationen von folgender Gestalt:

1. die Transformationen Y_ν selbst.
2. Transformationen von der Form

$$s_n = y_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \sum_{\nu=-n}^{+n} y_\nu.$$

Die Diskussion der zu diesen Elementartransformationen gehörigen Selektivitätskurven ergibt folgendes:

1. Transformationen Y_ν . Die Selektivitätskurve hat, wie schon bewiesen, die Form

$$f_\nu(\alpha) = 2 \cos \alpha \nu.$$

Es werden also alle Frequenzen unterdrückt, die in der Nähe der Nullstellen

$$\alpha = \frac{\pi}{2\nu} (2k - 1) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

liegen. Alle unterhalb der kleinsten Nullstelle liegenden Frequenzen, also alle Perioden, die merklich größer sind als 4ν , erhalten einen positiven Vergrößerungsfaktor, der für wachsende Periodenlänge gegen den Grenzwert 2 strebt. Völlig eliminiert werden also nur die Periode 4ν und ihre ungeraden Oberschwingungen. Für sich allein ist diese Transformation nur dann verwendbar, wenn es sich darum handelt, einzelne Perioden von bekannter Länge zu unterdrücken.

2. Die Transformation s_n führt auf die Selektivitätskurve

$$\sigma_n = 1 + 2 \{ \cos \alpha + \cos 2 \alpha + \cdots + \cos n \alpha \}.$$

Sie entspricht völlig einer Glättung der Beobachtungsreihe durch übergreifende Summen. In der Form

$$\sigma_n = \frac{\sin (2n + 1) \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

die durch Ausführung der Summation erhalten wird, ist uns der Vergrößerungsfaktor σ_n als „Glättungsfaktor“ wohl bekannt. Er zeigt, daß sich durch eine derartige Glättung kurze Wellen unterdrücken lassen, während das langwellige Gebiet (Frequenzen $\ll \frac{2\pi}{2n+1}$) hervorgehoben wird ($\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sigma_n = 2n + 1$). Gleichzeitig treten zwischen den Nullstellen

$$\alpha = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

noch Extrema auf, die bewirken, daß auch kürzere Wellen in bestimmten Bereichen nicht ganz vernichtet werden. Es wird also unter Umständen zweckmäßig sein, die geglättete Kurve wiederholt zu glätten, und zwar mit verändertem Glättungsintervall. Solche „kombinierten Transformationen“ ergeben zuletzt einen Vergrößerungsfaktor, der dem Produkt der Vergrößerungsfaktoren der einzelnen Transformationen gleich ist. Man ist also in der Lage, die kleineren Wellen weiter herabzudrücken, indem man dafür sorgt, daß die Nullstellen der zweiten, dritten usw. Transformation möglichst zwischen die der ersten fallen, das Gebiet der langen Wellen aber vermeiden. Wendet man z. B. nacheinander die Glättungen s_n, s_p, s_q an, wobei $n < p < q$, so werden alle Perioden $\gg 2q + 1$ bevorzugt, während die kleineren Perioden mehr oder weniger vernichtet werden. Eine lange Periode $\gg 2q + 1$ wird in dem Endergebnis eine um den Faktor

$$\sigma_n \cdot \sigma_p \cdot \sigma_q$$

vergrößerte Amplitude zeigen; dividiert man also die erhaltene transformierte Kurve durch diese Zahl, so wird damit diese Welle auf ihr richtiges Amplitudenmaß reduziert. Die dreimalige Glättung wird nach LABROUSTE sinngemäß durch das Symbol

$$(s_n s_p s_q)$$

gekennzeichnet, das diesen Sachverhalt andeutet.

Ist es auf diese Weise gelungen, die längste Periode zu isolieren, so ist es möglich, sie durch Abzug aus dem Ausgangsmaterial zu entfernen. Eine Wiederholung des Verfahrens mit geeigneten anderen s -Kombinationen, auf die Restkurve angewandt, liefert sodann die nächst kürzere Periode usw., bis schließlich ein unperiodischer Rest übrigbleibt.

Grundsätzlich anders ist die Wirkung von Transformationen, die sich aus den Differenzen Z_ν zusammensetzen. So liefert

$$Z_\nu = y_\nu - y_{-\nu}$$

selbst den Vergrößerungsfaktor

$$g_\nu = 2 \sin \alpha \nu,$$

der sowohl die ganz langen Perioden als auch die um die Nullstellen

$$\alpha = \frac{\pi}{\nu} \cdot K \quad (K = 1, 2, \dots)$$

herumliegenden Spektralteile auslöscht. Es werden daher die Amplituden von solchen Perioden verstärkt, die in der Nähe der Periode

$$\frac{2\pi}{\alpha} = 4\nu$$

und ihrer Oberschwingungen liegen. Größere Selektivität liefern Kombinationen von der Form

$$t_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n,$$

deren Vergrößerungsfaktoren

$$\tau_n = g_1 + g_2 + \dots + g_n = 2 \sum_{\nu=1}^n \sin \alpha \nu = 2 \frac{\sin n \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin (n+1) \frac{\alpha}{2}$$

sind.

Eine nähere Untersuchung dieser etwas komplizierteren Funktion von α zeigt, daß die bevorzugten Spektralgebiete um so weiter auseinander liegen, je größer n ist. Durch mehrfache Anwendung von t -Transformationen, etwa von

$$(t_n t_p t_q t_r)$$

mit benachbarten Indices und möglichst in gerader Anzahl, um eine Phasenverschiebung der transformierten Kurve zu vermeiden, erreicht man, daß sowohl das Gebiet der langen, wie auch das der kurzen Perioden „abgeblendet“ wird, und nur ein verhältnismäßig schmaler Spektralbereich verstärkt erscheint. Oft wird eine schärfere Selektion erreicht, wenn man gemischte Kombinationen, etwa von der Form

$$(s_n s_p t_q t_r), (s_n s_p t_p t_q) \text{ oder } (s_n s_p t_n t_p)$$

anwendet. Es würde hier zu weit führen, alle sich bietenden Möglichkeiten im einzelnen durchzugehen. Der Leser sei auf die LABROUSTESchen Arbeiten selbst verwiesen und möge sich im übrigen anregen lassen, diese sehr reizvollen Betrachtungen durch eigene Variation des sehr allgemeinen Grundgedankens zu vermehren, was in fast unbegrenzter Mannigfaltigkeit möglich ist.

Erwähnung verdient noch der Umstand, daß gleiche Überlegungen auch die Möglichkeit beweisen, die LABROUSTESche Methode auf Periodizitäten mit veränderlicher Amplitude anzuwenden. LABROUSTE hat diesen Fall theoretisch in folgenden Fällen behandelt:

1. Die Amplitude ist schwach veränderlich, so daß innerhalb des ($2n + 1$ Zeiteinheiten umfassenden) Glättungsintervalls lineare Änderung angenähert angenommen werden darf.
2. Die Amplitude ist streng linear veränderlich (z. B. von einem maximalen Ausgangswert linear gegen null abnehmend).
3. Die Amplitude nimmt gemäß einer Exponentialfunktion gegen null ab (schwach gedämpfte Schwingung).

6. Exhaustionsmethoden und Periodogrammanalyse. Klassifizierung der periodographischen Methoden.

Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts ist klar, daß die Methode von LABROUSTE auf der größtmöglichen Verallgemeinerung des Glättungsprinzips beruht. Unter Glättung verstehen wir demnach allgemein eine Transformation, durch die eine äquidistante Reihe in eine andere (geglättete) dadurch übergeführt wird, daß man bestimmte lineare Kombinationen von allen (oder einer Auswahl von) Beobachtungswerten bildet, die in einem gewissen, gleich weit nach beiden Seiten um den zu transformierenden Beobachtungswert liegenden Intervall vorhanden sind. Es handelt sich also um eine *Glättung mit Gewichten*, wobei die Glättungskonstanten symmetrisch oder verkehrt-symmetrisch zur Mittelordinate des Glättungsintervalls angeordnet sind. Bei symmetrischer Konstantenverteilung lassen sich noch die Fälle unterscheiden, in denen die Konstanten sämtlich positiv sind (eigentliche oder positive Glättung) und solche, in denen positive und negative Vorzeichen (speziell auch alternierende Vorzeichen) verwendet werden (uneigentliche oder negative Glättung). Daß LABROUSTE sich in seinen Elementartransformationen auf die Verwendung der Konstanten $0, +1, -1$ beschränkt, bedeutet keine notwendige Einschränkung, sondern lediglich eine praktische Maßnahme, um Multiplikationen zu vermeiden — durch mehrfache Anwendung solcher Elementartransformationen lassen sich verschiedene Transformationsarten mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten ersetzen; der Vorteil der Vermeidung von Multiplikationen wird daher zum Teil dadurch wieder aufgehoben, daß die Rechnung nach dem gleichen oder einem anderen Schema mehrfach wiederholt werden muß. Was also an Einfachheit der Rechnung gewonnen wird, geht zum Teil durch Vermehrung der Arbeitszeit wieder verloren.

Eine weitere Verallgemeinerung der LABROUSTESchen Exhaustionsmethode ließe sich nur dadurch erzielen, daß man auch gebrochene oder gar irrationale Glättungskoeffizienten zuläßt: ein ganz spezielles Beispiel hierfür ist die Berechnung von FOURIER-Konstanten bzw. Periodogrammkomponenten über ein Intervall von bestimmter Länge. Die Glättungskoeffizienten sind dann trigonometrische Funktionen einer „Versuchswelle“, durch deren Wahl gleichzeitig die „Selektivitäts-

funktion“ mit ihrem Hauptmaximum und den „spurious periodicities“ festgelegt ist. Auch die Verschiebung des Versuchsintervalls durch die ganze Beobachtungsreihe, die wir z. B. bei der Berechnung der Phasendiagramme vornahmen, entspricht formal vollkommen dem LABROUSTESchen Vorgehen. Wir können demnach die Periodogrammanalyse als einen Spezialfall der verallgemeinerten LABROUSTESchen Methode ansehen. Einen wesentlichen Unterschied könnte man darin sehen, daß in der Periodogrammanalyse *zwei* voneinander unabhängige „transformierte Funktionen“ aus der Beobachtungsfunktion abgeleitet werden, nämlich die beiden Periodogrammkomponenten

$$a_r(x) = \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^n y(x+\nu) \cos \alpha_r(x+\nu)$$

$$b_r(x) = \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^n y(x+\nu) \sin \alpha_r(x+\nu).$$

Dieser Unterschied verschwindet aber, wenn wir die Phasen der Versuchswelle nicht, wie oben, auf einen festen Anfangspunkt, sondern, wie auch früher schon vorgesehen wurde (siehe: Kap. III, Abschnitt 4) auf den veränderlichen Anfang des gleitenden Intervalls beziehen. In der Tat überzeugt man sich leicht, daß eine Transformation von der Form

$$A_r(x) = \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{\nu=-n}^{+n} y(x+\nu) \cos \alpha_r \nu$$

die vorhandenen Wellen nach Periode und Phase ungeändert läßt und lediglich die Amplituden selektiv verändert. Eine zweite transformierte, die mit sin-Faktoren gebildet würde, erübrigt sich somit, sofern es nur auf die Isolierung eines bestimmten Spektralbereichs ankommt; sie wäre allerdings für eine genaue Bestimmung der Periodizitätskonstanten von Nutzen.

Die Betrachtung der inneren Verwandtschaft zwischen der Periodogrammethode und der LABROUSTESchen Analyse kann in der Folge noch außerordentlich fruchtbar für die Ausbildung periodographischer Methoden werden. Die konsequente Anwendung des allgemeinen Glättungsprinzips durch LABROUSTE hat mit aller wünschenswerten Deutlichkeit gezeigt, daß eine wesentliche Eigenschaft des Periodogrammverfahrens, nämlich die mehr oder minder „selektive“ Herausblendung bestimmter Spektralteile, in vielgestaltiger Form auch durch zahlreiche andere Operationen von transformatorischem Charakter möglich ist. So liegt z. B. auch der Gedanke nahe, die trigonometrischen Faktoren bei der Bildung der Periodogrammkomponenten durch solche Faktoren zu ersetzen, die einer „Gitterfunktion“ entsprechen. Wir wissen, daß die Gitterfunktion, die nur Ordinaten von der Größe 0, +1 oder -1 enthält,

durch eine trigonometrische Reihe ersetzt werden kann, die außer der Grundperiode (Gitterkonstante) noch die ungeraden Oberschwingungen mit abnehmenden Amplituden enthält. Die Selektivität der Gitterfunktion, als Versuchsfunktion bei einer Periodogrammanalyse, ist demnach nicht von der gleichen Eindeutigkeit, wie die der einfachen trigonometrischen Wellen. Dafür hat sie allerdings den großen Vorteil, daß bei ihrer Anwendung, ebenso wie bei der der LABROUSTESchen Elementartransformationen, keine Multiplikationen nötig sind. Eine mehrfache Anwendung der Gitterfunktion mit wenig verändertem Analysenintervall würde die lästigen Nebenmaxima der Selektivitätsfunktion ebenso zum praktischen Verschwinden bringen, wie dies bei den LABROUSTESchen Elementartransformationen geschieht, zu denen wir die „Gittertransformation“ auch zählen könnten. Nebenbei bemerkt, liegt das Gitterverfahren schon dem in Abschnitt 3 beschriebenen „Differenzenperiodogramm“ von BROOKS zugrunde.

Es ist unschwer einzusehen, daß überhaupt alle auf dem Exhaustionsprinzip beruhenden Methoden sich mehr oder weniger gut in diese Betrachtungsweise einordnen lassen. Das gilt sogar für die Autokorrelationsmethode, die im Prinzip schon vor FUHRICH in den Arbeiten von D. ALTER¹ (Lit. 15, 17, 18) über die Perioden einiger veränderlicher Sterne und über Niederschlagsperioden auftritt. Nur wird hier für gleitende Glättungsintervalle nicht ein sich gleichbleibendes oder sich nach allgemeinen, von der Art der zu analysierenden Funktion unabhängigen, Regeln änderndes Schema von Glättungskoeffizienten benutzt, sondern die letzteren werden der Beobachtungsreihe selbst entnommen. Die aus den Streuungen der Beobachtungsreihe für fortschreitende Intervalle gebildeten Nenner der transformierten Funktion sind dabei erst in zweiter Linie wichtig: sie stellen die „Vergrößerungsfaktoren“ dar, ihre Reziproken also die Reduktionsfaktoren, durch die die Amplituden nach Beendigung der Operationen auf ein Normalmaß zurückgeführt werden. Die Autokorrelationsmethode läßt sich also einerseits als eine sehr spezielle Glättungsmethode auffassen, andererseits erweist sie sich als sehr verwandt mit der Periodogramm methode, die ja ihrerseits ebenfalls eine spezielle Glättungsmethode darstellt: sie benutzt als „Versuchsfunktion“ nicht, wie diese, eine künstliche Funktion, sondern die vorgelegten Beobachtungen selbst. Dadurch wird der nicht zu unterschätzende und unter Umständen ausschlaggebende Vorteil erzielt, daß die effektive „Selektivitätsfunktion“ ihr Maximum nicht an einer vorher gewünschten Stelle des Periodenspektrums hat, sondern jeweilig dort, wo die längste der vorhandenen Perioden zu suchen ist. Somit wird mit dieser Methode die Zahl der notwendigen Versuche auf ein Minimum zurückgeführt, sofern die Voraussetzungen für ihre Anwendbarkeit überhaupt erfüllt sind.

¹ Siehe auch Lit. 153 (McLAUGHLIN).

Die in diesem Abschnitt dargelegten Zusammenhänge lassen somit erkennen, daß die vielgestaltigen analytischen Methoden der Periodenbestimmung sich nach wenigen fundamentalen Gesichtspunkten ordnen lassen. Abgesehen von denjenigen Perioden, die ein Bekanntsein der Wellenlängen voraussetzen und lediglich die Aufgabe der Bestimmung der Amplituden und Phasen lösen, unterscheiden wir zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Analysen:

I. Die algebraischen Methoden, in denen einfache Funktionen der n unbekannt Perioden oder Frequenzen als Wurzeln einer charakteristischen Gleichung n -ten Grades auftreten.

II. Die auf dem Glättungsprinzip beruhenden Methoden, die zum Teil eine selektive Aussonderung bestimmter Spektralgebiete, zum Teil eine sukzessive Bestimmung der unbekannt Perioden durch Exhaustion verfolgen oder auch nach beiden Richtungen hin verwendet werden können.

Zu der zweiten Klasse gehört die Periodogrammanalyse, die vor allen anderen Methoden das eine voraus hat, daß sie sich unmittelbar an das Beispiel hält, das die Natur selbst uns in der spektralen Zerlegung des Lichts gegeben hat. Der Praktiker wird stets von Fall zu Fall entscheiden müssen, welche Methode der Natur des ihm vorgelegten Problems am besten entspricht. Es hat daher auch keinen Zweck, den Wert der einen Methode gegen den einer anderen abschätzen zu wollen. Der Wettstreit, der in der neueren Literatur mitunter heftig geführt worden ist und oft darauf abzielt, die altbewährte Methode der Periodogramme gegenüber neueren Verfahren in Mißkredit zu bringen, ist ebenso sinnlos und für die Fortentwicklung der Periodographie als Wissenschaft schädlich, wie etwa der gegenteilige Versuch, die Periodogrammanalyse unter allen Umständen als *das* Verfahren herauszustellen, das die besten und einwandfreiesten Ergebnisse zeitigt. Eines nur muß mit aller Deutlichkeit gesagt werden, um der Ehrenrettung der klassischen Methode der Periodogramme willen, daß alle Ergebnisse, die mit anderen Methoden in diesen oder jenen konkreten Fällen erzielt worden sind, auch mit Hilfe der Periodogrammrechnung gewonnen werden können, sofern der Rechner das mathematische Instrumentarium, das zu ihr gehört, mit allen Feinheiten anzuwenden weiß. Wenn man z. B. immer wieder liest, daß die „Auflösungskraft“ der Periodogrammmethode nicht ausreicht, um diese oder jene benachbarten Perioden zu trennen, während dies mit dieser oder jener anderen Methode mühelos gelingt, so läßt sich diese Behauptung *stets* widerlegen, indem man den Nachweis führt, daß ihr Urheber entweder in seinen Ergebnissen einer Selbsttäuschung zum Opfer gefallen ist oder aber zu seinem Vergleiche nicht berechtigt war, weil er die Möglichkeiten der Periodogrammanalyse nicht auszuschöpfen verstanden hat.

Sechstes Kapitel.

**Die physikalischen Hilfsmittel der
Periodenforschung.****1. Das Momentenprinzip und seine
Anwendungsmöglichkeiten.**

Eine der größten praktischen Schwierigkeiten bei der Anwendung der Periodogramm-Methoden liegt in der großen Menge der numerischen Rechnungen, die sie verlangt. Gerade bei der Bearbeitung derjenigen periodographischen Probleme, die zur Zeit und sicher auch in Zukunft die praktische Wissenschaft am meisten beschäftigen und beschäftigen werden, ist das zu untersuchende Beobachtungsmaterial so umfangreich, daß an den Rechner ganz außerordentlich hohe Anforderungen an Zeit und Arbeitskraft gestellt werden. Ich denke dabei ganz besonders an die Aufgaben der Meteorologie und der Geophysik überhaupt. Das vorliegende Beobachtungsmaterial, das — abgesehen von kleinen Ausschnitten, — einer systematischen Bearbeitung noch harret, erstreckt sich nicht nur über lange Zeiträume, sondern auch über eine große Zahl von Beobachtungsstationen auf der ganzen Erde, deren Ergebnisse sowohl in sich als auch im Zusammenhang miteinander zu erforschen sind. Obwohl die vorzunehmenden Rechnungen selbst von bemerkenswerter Einfachheit sind, ist die Zahl der Operationen so groß, daß selbst bei Wahrung größter Ökonomie ihre Ausführung mehr technische Hilfsmittel und Arbeitskräfte erfordert, als sie selbst größeren wissenschaftlichen Instituten zur Verfügung stehen. Gerade die Einfachheit der Rechenoperationen selbst aber ermutigt zu dem Versuch, Maschinen zu konstruieren, die die mechanische Rechenarbeit schneller und genauer auszuführen imstande sind, als der geschickteste und zuverlässigste Rechner. Wir haben bereits verschiedene solcher Verfahren kennen gelernt, von dem Gebrauch von Rechenmaschinen und geeigneten Tabellen angefangen, bis zu den verschiedenen Typen von Harmonischen Analysatoren und schließlich dem Lochkartenverfahren. Das letztere erwies sich dabei als außerordentlich geeignet für die Durchführung großer Programmarbeiten; leider sind die hierzu nötigen Maschinen, die natürlich nicht für die speziellen Erfordernisse der Periodenforschung, sondern für allgemein-statistische und besonders für wirtschafts-statistische Zwecke hergestellt werden, so groß und kompliziert, daß ihre Benutzung mit erheblichen Kosten verbunden ist. Eine durchgreifende Verwendung des Lochkartenverfahrens etwa für die Zwecke einer systematischen meteorologischen Periodographie würde nur dann ökonomisch sein, wenn Spezialtypen dieser Maschinen für periodographische Zwecke konstruiert würden und einem mit ausreichenden

Mitteln versehenen großen Forschungsinstitut dauernd zur Verfügung ständen.

Das Lochkartenverfahren als instrumentelles Hilfsmittel zur Berechnung von Periodogrammgrößen hat gegenüber den Harmonischen Analysatoren den Vorteil, daß es rechnerische Strenge gewährleistet, die durch geeignete Rechkontrollen noch unterstützt werden kann. Nun ist aber diese rechnerische Strenge für die meisten Zwecke der Periodenforschung keineswegs unbedingt erforderlich — meist erweist sich eine Genauigkeit der ermittelten Periodogrammkomponenten auf wenige Prozent ihres Absolutwertes, wie sie durch die gewöhnlichen Analysatoren gewährleistet wird, als praktisch hinreichend. Andererseits ist die Zeit, die eine Analyse mit Hilfe von Lochkarten erfordert, eben wegen des Zuschnitts dieses Verfahrens auf höchste Präzision, immer noch so lang, daß der Gewinn zu dem erforderlichen Aufwand nicht in dem wünschenswerten günstigen Verhältnis steht.

Es hat, seitdem Periodenuntersuchungen in größerem Stile betrieben werden, nicht an den verschiedensten Versuchen gefehlt, Apparate zu bauen, die schnellste Arbeit leisten, ohne daß an die Genauigkeit der Ergebnisse höhere Anforderungen gestellt zu werden brauchen, als nötig erscheint. Diese Aufgabe ist heute noch nicht in befriedigender Weise gelöst; immerhin sind beachtliche Ansätze gemacht, die zu der Hoffnung auf eine vollkommene Überwindung aller Schwierigkeiten in absehbarer Zeit berechtigen. Für die Lösung mancher Teilprobleme, wie z. B. der Durchmusterung längerer Beobachtungsreihen, gibt es heute schon Apparaturen (die photomechanischen Periodographen), deren Leistungsfähigkeit recht groß ist und durch weitere technische Vervollkommnung noch bedeutend gesteigert werden kann. Für die allgemeine Aufgabe, die darin besteht, zu einer gegebenen Beobachtungsreihe ohne umständliche Vorbereitungen die numerischen Werte der FOURIER-Koeffizienten zu finden, gibt es heute eine ideale Lösung noch nicht. Die Wege zu einer solchen Lösung sind aber sehr mannigfach, und die technischen Schwierigkeiten sind nicht unüberwindlich.

Wir werden in diesem Kapitel die verschiedenen Prinzipien aufzuzeigen haben, nach denen eine Messung von Periodogrammkomponenten auf physikalischem Wege erfolgen kann, und auch, soweit sie bekannt geworden sind, die praktischen Versuche schildern, die in dieser Richtung vorliegen. Eine ideale Meßmethode wird dabei folgende Bedingungen zu erfüllen haben:

1. Die Einstellung der Apparatur auf die zu analysierende Beobachtungsreihe (Analysenintervall von bestimmter Länge) soll ohne umständliche Vorbereitungen möglich sein, also nach Möglichkeit nicht mehr Zeit erfordern, als etwa das Ablesen der Beobachtungswerte oder das einmalige Eintragen derselben in ein vorgezeichnetes Schema.

2. Die Ermittlung der FOURIER-Koeffizienten soll, wenn diese Einstellung einmal getroffen ist, durch direkte Messung erfolgen (z. B. durch Ablesung an einer Skala oder einem Zählwerk oder durch automatische Registrierung). Dabei soll der Summations- oder Integrationsprozeß, dessen Ergebnis registriert wird, so wenig Zeit wie möglich erfordern — nach Möglichkeit soll dieser Vorgang also in einem einzigen Schritt, nicht in der Hintereinanderschaltung vieler Schritte bestehen.

3. Der Übergang von einem FOURIER-Koeffizienten zum nächsten darf nicht durch eine umständliche Umgruppierung der Beobachtungsdaten erfolgen, sondern muß durch einen einfachen Handgriff (Umschaltung) möglich sein.

4. Die Genauigkeit der Ergebnisse soll mindestens so groß sein, wie die durch Harmonische Analysatoren zu erzielende.

Was die Harmonischen Analysatoren selbst anbelangt, die bislang die vollkommenste mechanische Lösung der Aufgabe darstellen, so werden sie nicht allen diesen Erfordernissen gerecht. Die Vorbereitung (1) erscheint allerdings hinreichend einfach. Sie besteht in einem einmaligen Aufzeichnen der Beobachtungsreihe als Kurve oder (vgl. die BARTELSsche Zusatzapparatur zum MADERSchen Analysator, Abb. 7) in der Verschiebung von Metallzungen gemäß einer Werteskala. Der Punkt (2) ist hingegen nicht erfüllt, da zur Gewinnung eines jeden FOURIER-Koeffizienten die Umfahrung der gezeichneten Kurve mittels eines Fahrstifts notwendig ist, also ein Arbeitsgang, der sorgfältige Ausführung und daher eine gewisse Zeit erfordert, ehe die Ablesung des Endwertes an der Planimeterrolle erfolgen kann. Die übrigen Bedingungen können hingegen als erfüllt angesehen werden; was (3) anbelangt, so besteht die „Umschaltung“ in der Auswechslung von Zahnrädern, die sehr rasch bewerkstelligt werden kann.

Es ergibt sich demnach die Notwendigkeit, bei der Entwicklung technischer Verfahren zur Harmonischen Analyse den in Punkt (2) aufgestellten Forderungen größere Beachtung zu schenken. Es kommt also darauf an, die Produkte

$$y_\nu \cos \nu \alpha; \quad y_\nu \sin \nu \alpha \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

nicht sukzessive zu summieren, sondern die über das Analysenintervall erstreckte Summe der Produkte durch einen einzigen Meßvorgang zu erhalten.

Nun gibt es eine ganze Reihe von physikalischen Erscheinungen, deren Messungsergebnis in Form von Produkten und Produktsummen hervortritt. Viele solcher physikalischen Produkte werden als „Momente“ bezeichnet, und wir wollen daher diejenigen Methoden, die auf der Bildung solcher Produkte und ihrer Summen beruhen, als *Momentmethoden* bezeichnen. Einige Wege, die sich aus diesem Grundgedanken ergeben, sollen hier angedeutet werden, ohne daß ihre Zusammenstellung

Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, und ohne daß auf die Einzelheiten einer technischen Durchführung eingegangen werde.

A. Methode der *Drehmomente*. Das Drehmoment, das in der Statik der festen Körper eine große Rolle spielt, tritt in seiner anschaulichsten Gestalt in der Theorie des Hebels und der Waage hervor. Ein Gewicht p , das an einem Hebelarm q angreift, erzeugt ein Drehmoment von der Größe $p q$. Wirken verschiedene Gewichte p_1, p_2, \dots, p_n an verschiedenen Hebelarmen q_1, q_2, \dots, q_n (die auch, je nach ihrer Lage rechts oder links vom Drehpunkt des Hebels, als positiv oder negativ angesehen werden können), so ist das gesamte durch sie erzeugte Drehmoment

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n$$

und läßt sich durch eine das Gleichgewicht herstellende Kompensationskraft der Messung zugänglich machen. Um also eine Produktsumme von der Gestalt

$$y_1 \cos \alpha + y_2 \cos 2 \alpha + \dots + y_n \cos n \alpha$$

physikalisch zu realisieren, könnte man n Gewichte von der Größe y_1, y_2, \dots, y_n (Beobachtungswerte können stets, ohne daß dadurch das Ergebnis einer Harmonischen Analyse verändert wird, durch Hinzufügen einer Konstante positiv gemacht werden) an den durch die Zahlen $\cos \nu \alpha$ gekennzeichneten Stellen eines Waagebalkens aufhängen. Durch Wägung (Wiederherstellung des Gleichgewichts durch ein Gegengewicht oder Registrierung eines Ausschlags) wäre es demnach möglich, diese Produktsumme (bis auf eine multiplikative Instrumentalkonstante) direkt zu messen. Die technische Schwierigkeit dieses Verfahrens, das die Erfordernisse von Punkt (2) restlos erfüllt, besteht in der Berücksichtigung von Punkt (3). In der Tat würde die Umschaltbarkeit der Apparatur auf verschiedene „Wellen“ einen Mechanismus erfordern, durch den die Gewichte in systematischer und genau vorgeschriebener Weise mit anderen Hebelarmen in Verbindung gebracht werden könnten. Das ließe sich z. B. auf folgende Weise gestalten: n gleich lange Hebel, die an ihrem Ende die Gewichte y_ν tragen, wirken nebeneinander auf eine waagrecht gelagerte Achse. Jeder Hebelarm, dessen Bewegung in einer zu dieser Achse senkrecht stehenden Ebene erfolgen kann, ist gegen die horizontale Normalrichtung um den Winkel $\nu \alpha$ gedreht, so daß also seine bei der Wägung wirksame Komponente $\cos \nu \alpha$ ist. Bei Umschaltung auf die nächstfolgende Welle muß sodann dafür gesorgt werden, daß jeder Hebel *gegen den vorangehenden* um den Winkel α gedreht werde, also der erste um α , der zweite um 2α , usw. Bei Übergang vom \cos -Koeffizienten zum \sin -Koeffizienten derselben Welle ist lediglich eine Drehung des gesamten Systems um 90° erforderlich. Die technische Ausgestaltung eines solchen Umschaltmechanismus ist schwierig, aber nicht unmöglich. Die Genauigkeit der Messung ist lediglich durch die Reibung in den Achsenlagern merklich beschränkt.

B. Die *hydraulische* Methode. Die Flüssigkeitsverdrängung eines zylindrischen, in Richtung seiner Achse in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers ist gleich dem Produkt aus Querschnitt und Tauchtiefe. Verändert man also die Tauchtiefe von n solchen Körpern, deren Querschnitte den Beobachtungswerten proportional sind, gemäß den zugehörigen cos- und sin-Faktoren, so ändert sich die Höhe des Flüssigkeitsspiegels gemäß der gesuchten Produktsumme. Positive Faktoren bedeuten dabei Senkung, negative dagegen Hebung der betreffenden Zylinder in bezug auf eine für alle Zylinder gleiche Normaltauchtiefe. Wählt man als Flüssigkeit Quecksilber, so wird störendes Netzen vermieden, auch genügt es, da selbst metallische Tauchkörper schwimmen, sie durch einfaches Herabdrücken gegen den natürlichen Auftriebswiderstand mittels vorher angefertigter und für jeden FOURIER-Koeffizienten verschieden gestalteter Führungsstücke in die gewünschte Tiefe zu bringen. Allerdings ist der Maßstab der „Pegelskala“ von der (für verschiedene Beobachtungsreihen im allgemeinen verschiedenen) Gesamtsumme der Querschnitte der Tauchkörper abhängig. Dieser Maßstab läßt sich aber jedesmal durch einen einfachen Sondernversuch bestimmen.

Die Idee dieser Methode stammt von M. PAUL und wurde dem Verfasser mündlich mitgeteilt.

C. Methode der *magnetischen* Momente. Das Drehmoment eines durch einen „Multiplikator“ geschickten elektrischen Stromes auf die Magnetnadel ist dem Produkt aus Stromstärke und Windungszahl proportional. Läßt man n verschiedene Ströme gleichzeitig auf eine Multiplikatornadel wirken und sorgt dafür, daß a) die jeweilige Windungszahl dem cos- oder sin-Faktor proportional ist (Wechsel des Vorzeichens mit Wechsel der Stromrichtung verbunden), und daß b) die Stromstärke dem zugehörigen Beobachtungswert proportional ist, so ist der Gesamtausschlag der Nadel (genauer die Tangente dieser Ausschläge) der Summe der Drehmomente proportional. Die Regulierung der Stromstärken kann durch Widerstände erfolgen, die Umschaltung auf andere Koeffizienten durch ein geeignetes elektrisches Schaltungsverfahren.

Anstatt die trigonometrischen Faktoren durch die Windungszahl zu realisieren, kann man auch von dem OHMSchen Gesetz

$$\text{Stromstärke} = \text{Spannung} : \text{Widerstand}$$

Gebrauch machen und es so einrichten, daß die Spannung den Beobachtungswerten, der reziproke Widerstand den Beträgen der trigonometrischen Faktoren, ihr Vorzeichen der Stromrichtung entspricht. Dann ist jeder der n Ströme durch gleich viele Windungen des Meßinstrumentes hindurchzuschicken. Versuche mit einem nach diesem Prinzip konstruierten Modellinstrument sind vom Verfasser bereits ausgeführt; doch ist es zur Zeit noch nicht gelungen, die vielfachen Fehlerquellen in befriedigender Weise auszuschalten.

Diese Beispiele von physikalischen Prinzipien, die bei der Konstruktion periodographischer Meßapparate verwendet werden können, ließen sich leicht vermehren. Ein besonders reiches Feld hierfür bietet die Optik — die Möglichkeiten, die durch Photographie, Photometrie und Kinematographie für unsere Zwecke bestehen, sind sehr zahlreich und vielgestaltig und sollen daher in besonderen Abschnitten behandelt werden. Im übrigen sei dem Leser durch die obigen Beispiele die Anregung gegeben, andere physikalische Methoden aufzusuchen, die auf der Anwendung des Momentenprinzips beruhen.

2 Das Resonanzprinzip und seine Anwendungen.

Unter *Resonanz* verstehen wir in der Physik die Erscheinung, daß ein schwingungsfähiges System, das durch periodische Kräfte angeregt wird, besonders stark auf solche Kräfte reagiert, deren Periode mit der Periode der Eigenschwingungen des Systems übereinstimmt. Die physikalische Natur der Schwingungsvorgänge kann dabei sehr verschiedenartig sein; es kann sich um mechanische, akustische, elektrische oder elektromagnetische Schwingungen handeln. Am bekanntesten ist diese Erscheinung aus der Akustik — auch der Name Resonanz (Mitklingen) stammt daher. Wird eine Saite in Schwingung versetzt, so breiten sich diese Schwingungen wellenförmig durch die Luft aus. Diese Schallwellen üben auf eine zweite, ruhende Saite periodische Kräfte aus, die aber außerordentlich klein sind. Nur, wenn die Periode des Tons mit der Periode der Eigenschwingung der ruhenden Saite identisch ist, summieren sich die wirksamen Kräfte derart, daß diese Saite in merkliche Mitschwingung gerät. So wird ein aus vielen Schwingungen verschiedener Wellenlänge zusammengesetzter Ton diejenigen Saiten eines Klaviers zur Mitschwingung veranlassen, deren Eigentöne mit den Elementarschwingungen des anregenden Tons übereinstimmen. Diese Eigenart schwingungsfähiger Systeme kann zu einer experimentellen Trennung der Elementarschwingungen eines Schwingungsgemisches benutzt werden, wenn man imstande ist, die Eigenschwingung des Resonanzsystems willkürlich zu ändern und nun die Resonanzwirkung bei verschiedenen Eigenschwingungswerten zu beobachten: Die variable Eigenschwingungsperiode entspricht der „Versuchswelle“ beim Periodogramm, die zugehörige Resonanzstärke der Amplitude des Periodogramms. Die modernste Anwendung des Resonanzprinzips ist die Trennung elektrischer Wellen ihrer Wellenlänge nach in den Rundfunkgeräten. Es ist klar, daß sich das Prinzip der Resonanz erfolgreich zur Konstruktion von Apparaten verwenden läßt, die eine Trennung von Perioden in Beobachtungsreihen ermöglichen; es ist dazu nur nötig, die gegebene Beobachtungsfunktion physikalisch durch einen entsprechend verlaufenden Vorgang zu ersetzen, der anregend auf einen „Empfänger“ wirkt. Eine Trennung der Wellen wird dann möglich sein, wenn dieser

Empfänger, dessen Eigenschwingung durch geeignete „Abstimmung“ verändert werden kann, gegen Resonanz genügend empfindlich und genügend „selektiv“ ist.

Der Schwingungsvorgang in einem Resonator verläuft ganz allgemein gemäß einer Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + a^2 y = f(t).$$

In dieser Gleichung bedeutet $y(t)$ die Schwingung des Resonators selbst als Funktion der Zeit, k eine „Dämpfungskonstante“, die den Einfluß der inneren Reibung des Systems kennzeichnet, a die Frequenz der (ungedämpften) Eigenschwingung und $f(t)$ den zeitlichen Verlauf der anregenden Kraft. Im Falle eines Analysators für Beobachtungsreihen haben wir also $f(t)$ der Beobachtungsfolge proportional zu setzen (wie dies technisch realisiert wird, interessiert uns im Augenblick noch nicht). Ist z. B. ein Analysenintervall von der Länge p vorgegeben, und ist die Aufgabe gestellt, die FOURIER-Zerlegung innerhalb dieses Intervalls kennenzulernen, so läßt sich die Kurve $f(t)$ über das Intervall $[0, p]$ hinaus periodisch fortsetzen. Verändert sich also die anregende Kraft (Senderenergie) gemäß dieser so konstruierten rein periodischen Funktion, so sind wir sicher, daß sie gerade die geforderten FOURIER-Perioden und nur diese, und zwar als persistente periodische Bestandteile enthält. Allgemein ist also $f(t)$ in der Form

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \sin(r_{\nu} t + q_{\nu}) \quad \left[\text{speziell: } r_{\nu} = \frac{2\pi\nu}{p} \right]$$

darstellbar. Die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist dann

$$y = e^{-\frac{k}{2}t} \cdot B \sin(\beta t + \varepsilon) + \sum_{\nu=1}^n R_{\nu} \sin(r_{\nu} t + \delta_{\nu}),$$

wobei B und ε Integrationskonstanten sind, die den Anfangszustand des Schwingungsvorgangs charakterisieren. Ferner ist

$$\beta = \sqrt{a^2 - \frac{k^2}{4}}$$

$$R_{\nu} = \frac{A_{\nu}}{\sqrt{(a^2 - r_{\nu}^2)^2 + k^2 r_{\nu}^2}}$$

$$\delta_{\nu} = \arctg \frac{k r_{\nu}}{a^2 - r_{\nu}^2} + q_{\nu}.$$

Die Bewegung des „Empfängers“ besteht also aus einer „Eigenschwingung“ von der Frequenz β , die, je nach dem Grade der Dämpfung, mehr oder weniger rasch abklingt, und einer „erzwungenen Schwingung“, die gleich der anregenden Schwingung in p rein periodisch ist, und deren FOURIER-Konstanten mit denen der anregenden Schwingung in der oben angegebenen Weise zusammenhängen.

Die auf dem Prinzip der Resonanz beruhenden Analysatoren sind nun so eingerichtet, daß die „ungedämpfte Eigenfrequenz“ a innerhalb eines gewissen Spielraums (Spektralbereich) beliebig variiert werden kann. Wird z. B. auf diese Art bewirkt, daß $a = r_v$, so erreicht die Amplitude R_v ein Maximum, das um so größer ausfällt, je kleiner die Dämpfung des Systems ist. In diesem Falle, den wir als *Resonanz* bezeichnen, wird demnach

$$R_v = \frac{A_v}{k r_v}; \quad \delta_v = \frac{\pi}{2} + q_v.$$

Die übrigen Schwingungen haben ebenfalls von null verschiedene Amplituden, die aber merklich geringer sind. Durch geeignete Wahl der Dämpfung ist immer zu erreichen, daß der Empfänger *selektiv* ist, d. h., daß im Falle der Resonanz für eine bestimmte FOURIER-Frequenz der Empfänger auf die benachbarten Frequenzen nicht mehr merklich anspricht. Die Apparatur bewirkt also, daß aus einem Gemisch von Schwingungen der verschiedensten Wellenlängen eine einzige Teil-

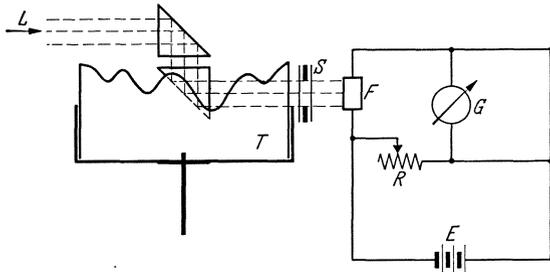


Abb. 22. Analysator von GALITZIN.

schwingung verstärkt, jede andere unterdrückt wird. Diese verstärkte Teilschwingung, die natürlich erst dann rein hervortreten wird, wenn die „Eigenschwingung“ abgeklungen ist, läßt sich — je nach der physikalischen Natur der benutzten Schwingungsvorgänge — durch direkte Beobachtung oder durch Messung nach Amplitude und Phase festlegen.

Eine primitive, aber vielleicht gerade deswegen interessante Verwirklichung des Resonanzprinzips stammt von B. GALITZIN (Lit. 107). GALITZIN schneidet die im Intervall $[0, \phi]$ zu analysierende Kurve aus undurchsichtigem Papier aus und legt die so gewonnene Schablone um eine drehbare Trommel T vom Umfang ϕ (Abb. 22). Die Trommel selbst ist durchsichtig. Aus dem Inneren der Trommel werde ein Lichtbündel L durch einen festen Spalt S nach außen auf eine Selenzelle F geworfen. Ist der Spalt der Trommelachse, also auch der Ordinatenrichtung der bei Rotation der Trommel an ihm vorbeigleitenden Kurvenschablone parallel, so ist die zeitlich veränderliche Lichtmenge, die auf die Selenzelle fällt, der rein periodischen Funktion $f(t)$ proportional. Wird nun ein durch die elektromotorische Kraft E gespeister Stromkreis durch diese Selenzelle geschlossen, so ist die Veränderung der Stromstärke der von $f(t)$ proportional. Dieser veränderliche Strom dient als Sender. Der Empfänger ist ein Galvanometer, auf das dieser Strom einwirkt, und

das eine bestimmte Eigenschwingung und eine bestimmte Dämpfung hat. Ist die Umdrehungszeit der Trommel ein ganzes Vielfaches (etwa das r -fache) der ungedämpften Eigenperiode des Galvanometers, so tritt Resonanz in bezug auf die r -te FOURIER-Periode der anregenden Schwingung ein — die Resonanzschwingung läßt sich direkt an den Schwingungen des Galvanometers, ihre Amplitude an den Ausschlägen der Nadel beobachten. Zur Erhöhung der Empfindlichkeit dient eine Brückenschaltung, die bewirkt, daß die Ausschläge bei mittlerem Funktionswert null sind, alle periodischen Schwankungen des Zeigers also gleich weit nach beiden Seiten von der Nullage aus erfolgen. Die Abstimmung auf eine bestimmte FOURIER-Welle erfolgt durch Variation der Umdrehungsgeschwindigkeit der Trommel, die Kompensation der Brücke durch einen Widerstand R .

Eine andere, von PUPIN (Lit. 210) und ARMAGNAT (Lit. 19) zuerst angegebene Anordnung (s. auch A. p. V. S. 52f.) dient zur *Analyse von Wechselströmen*. Sie benutzt die gegebene Wechselspannung direkt als anregende Kraft, und als Empfänger einen abstimmbaren Schwingungskreis, dessen Eigenfrequenz und Dämpfung durch Kapazität (C), Selbstinduktion (L) und Widerstand (W) gegeben sind. Ist die zu analysierende elektromotorische Kraft (Wechselspannung) durch die Funktion

$$E = \sum_p A_p \sin \left(\frac{2\pi}{p} \nu t + q_p \right)$$

mit den unbekanntnen Konstanten A_p und q_p gegeben, so ist der in dem Schwingungskreis entstehende Wechselstrom J an die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \frac{W}{L} \frac{dJ}{dt} + \frac{J}{LC} = \frac{2\pi}{pL} \cdot E$$

gebunden. Es ist demnach die Dämpfung

$$k = \frac{W}{L}$$

und die Eigenfrequenz

$$a = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Durch Variation von L oder C läßt sich also Resonanz mit jeder der in der gegebenen Wechselspannung enthaltenen harmonischen Schwingungen erzielen. Die Ermittlung von Amplitude und Phase dieser Schwingungen läßt sich demnach auf die Messung der bei Resonanz entstehenden Wechselströme zurückführen, für die hinreichend genaue Meßmethoden in der Elektrotechnik bestehen.

Die letztere Methode hat gegenüber der GALITZINSCHEN den wesentlichen Vorteil, daß die zu untersuchenden Schwingungen zeitlich sehr rasch verlaufen, daß also selbst bei geringer Dämpfung des Empfänger-systems das Abklingen der Eigenschwingung schnell erfolgt, die Messung

also immer schon kurz nach Inangsetzung des Versuchs möglich wird. Beim GALITZINSchen Versuch ist hingegen die Eigenschwingung des Empfängers von langer Periode (> 1 sec), das Einschwingen des Apparates erfordert also eine merkliche Zeit, was sich auf die Schnelligkeit der Messung ungünstig auswirkt. Eine wesentliche Verkürzung der Schwingungsdauer würde zudem wegen der Trägheit der Selenzelle unmöglich sein.

Die von PUPIN-ARMAGNAT vorgeschlagene Anordnung ist daher im Prinzip vorzuziehen. Um diese Methode nicht nur für die Analyse von Wechselströmen, sondern auch für die von beliebigen Beobachtungskurven verwenden zu können, müßte also erreicht werden, daß eine Wechselspannung als anregende Kraft genau gemäß der vorgelegten Beobachtungsfunktion gesteuert werde. Das ließe sich an sich auch durch die GALITZINSche Senderanordnung erreichen, wenn die Trommelumlaufgeschwindigkeit entsprechend erhöht würde. Dann sollte aber zur Steuerung des Meßstroms nicht die träge Selenzelle benutzt werden, sondern etwa die bedeutend schneller reagierende lichtelektrische Zelle.

Die praktische Ausbildung der Resonanzmethoden auf dieser und ähnlicher Grundlage ist besonders bei Gelegenheit der Erforschung der akustischen Schwingungsvorgänge (Klanganalyse) gefördert worden. Eine Benutzung der dort erzielten praktischen Ergebnisse in der technischen Ausgestaltung der Resonanzmethoden für die Zwecke der Periodenforschung auf anderen Gebieten ist sehr wünschenswert (über Klanganalyse s. Lit. 280).

3. Das Interferenzprinzip als Grundlage der optischen Periodographen.

Eine besondere Art von instrumentellen Hilfsmitteln der Periodenforschung sind die optischen (photomechanischen) Periodographen, die auf einer Realisierung des Analysenvorgangs durch optische und photographische oder photometrische Hilfsmittel beruhen. Nicht immer wird durch diese Instrumente das Analysenergebnis (Periodogrammkomponenten oder Amplituden und Phasen bestimmter FOURIER-Glieder) in meßbarer Form erhalten, sondern meist nur qualitativ. In diesem Falle dienen die Verfahren der Gewinnung einer schnellen und umfassenden Übersicht (Durchmusterung) über die periodischen Eigenschaften eines bestimmten Beobachtungsmaterials.

Der Grundgedanke, der in diesen Instrumenten verwirklicht wird, ähnelt in einer Hinsicht dem Resonanzprinzip: Auch hier werden Hilfschwingungen von meßbarer und variabler Frequenz benutzt, um mit den unbekanntem Teilschwingungen der Beobachtungskurve in Beziehung gebracht zu werden und ihre Trennung zu ermöglichen; nur, daß diese „Schwingungen“ jetzt optisch zu verstehen sind — entweder als räumliches Nebeneinander von Hell und Dunkel (Licht und Schatten) in

gewissen regelmäßigen Abständen (Raster, Gitter!) oder als ein zeitliches Nacheinander (Blinklicht) oder als ein Gemisch von beiden (Gitter in Bewegung vor einer Lichtquelle). Die praktische Ausführung dieses Gedankens ist von A. E. DOUGLASS und unabhängig von ihm durch den

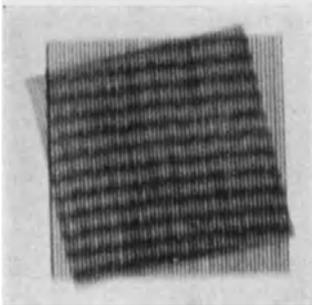


Abb. 23. Interferenzstreifen.

Verfasser angestrebt worden. DOUGLASS benutzt das feste, STUMPF das bewegliche Gitter. Konstruktionen, die auf dem Prinzip des Blinklichts beruhen, sind in vollkommenerer Form bislang nicht ausgeführt worden.

Die Erscheinungen, deren Beobachtung und Registrierung die optische Analyse vermittelt, lassen sich als „Interferenz“ bezeichnen. Ihre Wirkungsweise in den verschiedenen Apparatetypen möge durch die Beschreibung von drei einfachen Grundversuchen gezeigt werden:

1. Versuch: Festes Gitter. Die zu untersuchende Periodizität sei (schematisch) durch ein „Gitter“ dargestellt, d. h. durch nebeneinanderliegende abwechselnd weiße und schwarze Streifen gleicher Breite. Die Periodenlänge (Amplitude und Phase interessiert zunächst nicht) ist

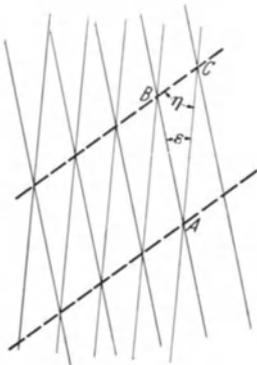
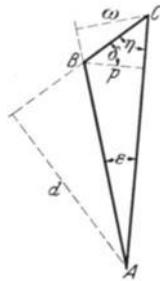


Abb. 24. Interferenzstreifen (schematisch).

gleich der doppelten Streifenbreite, bzw. gleich dem Abstand der Mitten zweier benachbarter schwarzer (oder weißer) Streifen. Ein „analysierendes Gitter“ ist in gleicher Form hergestellt, aber die schwarzen Streifen sind nicht wie beim Untersuchungsgegenstand auf weißes Papier, sondern auf eine Glasplatte gemalt. Das analysierende Gitter besteht also aus durchsichtigen und undurchsichtigen Streifen. Man



lege nun das analysierende Gitter, dessen Periode (Gitterkonstante) bekannt sei, auf das zu untersuchende Streifensystem mit unbekannter Periode, und zwar so, daß beide Streifensysteme einen kleinen Winkel miteinander bilden. Durch die Lücken des Glasgitters bleiben dann gewisse Teile des darunterliegenden Bildes sichtbar, die sich dem betrachtenden Auge zu einem System von „virtuellen Streifen“ geordnet darbieten (s. Abb. 23). Diese virtuellen Streifen sind besonders dann augenfällig und zeigen ein typisches Verhalten, wenn die Gitterperiode

und die unbekannte Periode nahezu gleich sind. In Abb. 24 sind diese Erscheinungen schematisiert dargestellt. Dabei bedeutet

ε den Drehungswinkel,

ω die Gitterkonstante,

p die gesuchte Periode,

d die Distanz der virtuellen Streifen (virtuelle Periode),

$\eta = 90^\circ - \delta$ den Positionswinkel des virtuellen Streifensystems,

und es ist

$$p \sin(\varepsilon + \eta) = \omega \sin \eta$$

oder

$$\omega - p \cos \varepsilon = p \sin \varepsilon \operatorname{ctg} \eta = p \sin \varepsilon \operatorname{tg} \delta.$$

Bei kleinem ε kann man also schreiben

$$\omega - p = p \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \delta$$

und somit die Abweichung der gesuchten Periode von der Gitterperiode durch Messung des Winkels δ bestimmen. Der Streifenabstand ist

$$d = \frac{\omega \cos \delta}{\sin \varepsilon},$$

also groß, wenn ε klein ist.

2. Versuch: Blinklicht. Ein *Blinklicht* ist eine automatische Vorrichtung, mit deren Hilfe man einen Gegenstand in bestimmten, regelmäßigen Zeitabständen beleuchten kann. Ist der beleuchtete Gegenstand in periodischer Bewegung begriffen (z. B. ein schwingendes Pendel oder ein sich drehendes Speichenrad), und ist die Dauer der einzelnen Belichtungen sehr kurz, so kann man durch Abstimmung der Blinkperiode auf die Bewegungsperiode des Untersuchungsobjektes erreichen, daß der Gegenstand dem Beobachter stillzustehen scheint. Betrachtet man auf diese Weise die Drehung eines Speichenrades, so wird dieser Effekt sichtbar, wenn die Blinkperiode gleich der Zeit ist, die nötig ist, damit eine Radspeiche in die Lage der benachbarten oder einer anderen übergeht. Hat das Rad n Speichen, und ist seine Umdrehungszeit U , so muß die Blinkperiode $\frac{U}{n}$ oder ein ganzes Vielfaches davon sein. Ist die Blinkperiode von einer dieser Zeiten wenig verschieden, so erblickt man beim jedesmaligen Aufleuchten das Rad nicht genau in der gleichen Stellung, sondern um einen kleinen Betrag dagegen gedreht. Es wird also (vorausgesetzt, daß der ganze Vorgang sich schnell genug abspielt) an Stelle der wirklichen, schnellen Drehung eine langsame „virtuelle Drehung“ beobachtet werden. Die virtuelle Drehung ist der wirklichen entgegengesetzt, wenn die Abstimmung der Blinkperiode zu kurz war, sie erfolgt in gleicher Richtung, wenn die Abstimmung zu lang war. Ist ω die bekannte Blinkperiode (Versuchsperiode) und wieder $p = \frac{U}{n}$ die Periode des Vorgangs, d. h. die Zeit, in der das Rad sich um einen

Speichenwinkel dreht, so ist, da die Winkelgeschwindigkeit des Rades $\frac{2\pi}{U}$ ist, $\frac{2\pi}{U}\omega$ der in der Blinkperiode zurückgelegte Speichenweg. Da der in der wirklichen Periode zurückgelegte Weg $\frac{2\pi}{U}\phi = \frac{2\pi}{n}$ beträgt, so wird, falls ω von ϕ nicht sehr verschieden ist, die optische Täuschung entstehen, als sei nur eine Drehung um den kleinen Weg $\frac{2\pi}{U}(\omega - \phi)$ erfolgt. Die virtuelle Drehung erfolgt also in der Umdrehungszeit $\frac{U}{|\omega - \phi|}$, die für $\omega = \phi$ unendlich groß wird (Stillstand); für $\phi < \omega$ ist die Drehung positiv (rechtläufig), für $\phi > \omega$ aber negativ (rückläufig).

Ein sehr einfacher Versuch auf dieser Grundlage läßt sich ohne besondere Hilfsmittel anstellen, wenn man eine durch Wechselstrom betriebene Glühlampe benutzt, die als (wenn auch nur unvollkommen ausgestaltetes) Blinklicht von sehr kurzer Periode (meist $\frac{1}{50}$ sec) angesehen werden kann. Setzt man im Schein einer solchen Lampe ein mit Speichen versehenes Rädchen in sehr schnelle Umdrehung und läßt diese sich durch Reibung allmählich vermindern, so beobachtet man, sobald die Radgeschwindigkeit sich einem der kritischen Werte nähert, das Auftauchen der virtuellen Speichen, die sich zunächst rechtläufig drehen, dann — im Augenblick der Koinzidenz zwischen Blink- und Umdrehungsperiode — stillstehen, um alsdann rückläufig zu werden. Die gleiche Erscheinung läßt sich bei einer Filmvorführung beobachten, wenn ein in Bewegung befindlicher Wagen (ein sich drehendes Schwungrad, ein Flugzeugpropeller usw.) gezeigt wird. Das „Blinklicht“ ist hier sinngemäß ersetzt durch die in regelmäßigen Abständen erfolgten und vorgeführten Momentaufnahmen des bewegten Gegenstandes.

3. Versuch: Bewegtes Gitter. Fährt man in der Eisenbahn an zwei der Bahnstrecke parallel laufenden Gittern (Lattenzäunen) vorbei, die einander, vom Zuge aus gesehen, ganz oder teilweise verdecken, so beobachtet man, als Interferenzerscheinung, ein virtuelles Gitter („Gespenstergitter“), das bald stillzustehen scheint (in bezug auf den fahrenden Beobachter), bald sich nach links oder rechts bewegt. Diese Beobachtung gibt zu einem Grundversuch Anlaß, der die Idee des photomechanischen Analysators von STUMPF illustriert und mit einfachen Mitteln ausgeführt werden kann.

Die zu untersuchende Periode sei wiederum durch ein Speichenrad oder besser durch ein Zahnrad mit n Zähnen und n gleich großen Lücken dargestellt. Im Winkelmaß ausgedrückt sei also die Periode $\phi = \frac{2\pi}{n}$. Der Analysator sei ein Zahnrad von gleicher Größe, aber mit m Zähnen, also von der Periode $\omega = \frac{2\pi}{m}$. Beide Räder drehen sich unabhängig voneinander dicht nebeneinander um die gleiche Achse; sie mögen aus

einem beliebigen undurchsichtigen Stoff, etwa aus Pappe, hergestellt sein. Die Umdrehungszeit des ersten Rades sei U , die Winkelgeschwindigkeit also $\frac{2\pi}{U}$; für das zweite Rad (Analysator) seien die entsprechenden Werte V bzw. $\frac{2\pi}{V}$.

Ist die Umdrehungsgeschwindigkeit jedes der beiden Räder groß, so unterscheidet das Auge die einzelnen Zähne im Vorübergleiten nicht mehr. Blickt man aber durch beide Zahnreihen in Richtung der Drehachse hindurch oder projiziert die Schattenbilder beider Räder durch eine in Verlängerung der Achse aufgestellte Lichtquelle übereinander auf einen Schirm, so entsteht bei bestimmtem Umdrehungsverhältnis ein „virtuelles Zahnrad“, das stillsteht oder sich *langsam* vor- oder rückwärts dreht, so daß das Auge diese Bewegung verfolgen kann. Durch folgende Überlegung bestimmen wir das kritische Umdrehungsverhältnis, bei dem das virtuelle Rad in Ruhe ist, ferner die Anzahl der Zähne, die dies Rad aufweist:

Sind beide Räder in Ruhe, so fallen an $|m - n|$ Stellen der Peripherie die Zähne bzw. Zahnlücken zusammen, an ebenso vielen dazwischenliegenden Stellen dagegen die Zähne des einen Rades auf die Lücken des anderen. Steht nun die Umdrehungsgeschwindigkeit der beiden Räder in einem derartigen Verhältnis zueinander, daß in gleichen Zeiten bei beiden Rädern gleich viel Zähne an einer festen Stelle der (in der Projektion gemeinsamen) Peripherie vorbeilaufen, so bleibt dieser Zustand offenbar erhalten, wie groß auch die absolute Geschwindigkeit sei. An $|m - n|$ bestimmten, gleichmäßig über die Peripherie verteilten Stellen steht also dauernd Zahn auf Lücke, so daß dem durchscheinenden Licht dauernd der Weg versperrt ist. An den in der Mitte dazwischen liegenden Stellen dagegen steht Zahn auf Zahn und Lücke auf Lücke, so daß (bei rascher Drehung) ständig rascher Wechsel von Licht und Schatten erfolgt, das Auge die betreffenden Stellen also als hell empfindet. Man sieht leicht ein, daß diese Erscheinung eines stehenden virtuellen Zahnrades mit $|m - n|$ Zähnen gerade dann eintritt, wenn sich die Umdrehungszeiten wie die zugehörigen Perioden oder umgekehrt wie die Zahl der Zähne verhalten, also wenn

$$U : V = m : n = p : \omega .$$

Zur Messung der Periode p kann diese Versuchsanordnung dienen, wenn eine Registrierung der Umdrehungszahlen der beiden Räder möglich ist. Sei etwa die Umdrehungszahl des ersten Rades (Periode p unbekannt) gegeben und konstant, die des zweiten (Versuchsperiode ω) meßbar veränderlich, so läßt sich diese so einregulieren, daß das virtuelle Scheinbild gerade stillsteht. Alsdann gilt die obige Gleichung, und es ist

$$p = \frac{U}{V} \omega .$$

Da die obigen Betrachtungen nur gelten, wenn m und n ganze Zahlen sind, so ist ersichtlich, daß durch dies Verfahren nur Perioden von der Länge

$$\frac{2\pi}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

erfaßt werden, d. h. die FOURIER-Perioden mit der Peripherie als Grundintervall.

Man kann das Experiment auch variieren, indem man an Stelle des ersten Zahnrads (Untersuchungsobjekt) eine Scheibe benutzt, deren Rand gemäß einer vorgegebenen Kurve ausgeschnitten ist. Es sei z. B. eine aus zwei benachbarten FOURIER-Wellen zusammengesetzte Kurve (Schwebungskurve) so dargestellt worden. Wiederholt man das oben geschilderte Experiment mit dieser Scheibe, so erhält man die Erscheinung des stehenden „virtuellen Rades“ bei zwei verschiedenen Umdrehungsverhältnissen, die den beiden Einzelperioden entsprechen. Es wird also eine Trennung der Perioden erzielt. Ist die Amplitude der einen dieser Perioden größer als die andere, so entsteht bei dem ihr entsprechenden Umdrehungsverhältnis ein deutlicherer Effekt. Das Experiment erlaubt also nicht nur, die Lage einer vorhandenen Periode im FOURIER-Spektrum festzustellen, sondern ermöglicht auch bis zu einem gewissen Grade die Trennung verschiedener Perioden und eine rohe Abschätzung ihrer Amplituden. Ferner ist klar, daß die Lage des ruhenden virtuellen Bildes in bestimmter Weise von der Phase der vorhandenen Periodizität abhängt. Durch geeignete Registrier-einrichtungen müßte es also möglich sein, auch die Phase der Periodizitäten meßbar zu machen.

4. Das optische Bild einer Beobachtungsreihe oder -kurve.

Die Eignung eines Gitters (bzw. eines gitterförmig gezähnten Rades) als Analysator bei einer optischen Analyse ist durch die im vorigen Abschnitt beschriebenen Grundversuche plausibel geworden. Unbefriedigend war hingegen noch die Realisierung der Beobachtungsfunktion durch optische Hilfsmittel. In den Grundversuchen hatten wir auch diese gitterförmig gestaltet und somit die in ihr auftretenden Periodizitäten behelfsmäßig in eine Form gebracht, die bestenfalls schematisch genannt werden kann und den tatsächlichen Verhältnissen in konkreten Fällen nicht im entferntesten entspricht.

Durch ein einfaches Gitter mit der Periode p wird das Licht gemäß der schon früher beschriebenen „Gitterfunktion“ [s. II, Formel (3a)]:

$$f(x) = \frac{J}{2} \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \left(\sin \alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha + \frac{1}{5} \sin 5\alpha + \dots \right) \right\}; \quad \alpha = \frac{2\pi}{p} x + q$$

herausgeblendet, wobei J die Intensität des benützten Lichts und q eine Phasenkonstante bedeutet. Man erkennt, daß die in obigen

Versuchen untersuchte Funktion außer der Periode p noch die ungeraden Oberschwingungen $\frac{p}{3}$, $\frac{p}{5}$, \dots , aber mit nach einem bestimmten Gesetz abnehmenden Amplituden, enthält. Anstatt dieser einfachsten Gitterfunktion ließen sich auch noch andere Funktionen mit den angegebenen Hilfsmitteln behandeln, die durch Gitterstäbe und Lücken von wechselnder Breite dargestellt werden könnten. Alle auf diese Weise darstellbaren Beobachtungsfunktionen hätten aber das eine gemeinsam, daß sie nur zweier verschiedener Werte fähig sein dürften, die als „Licht“ oder „Schatten“ darstellbar sind. Sollte dagegen eine *beliebig* gestaltete Kurve untersucht werden, so wäre es nötig, ihren Verlauf durch Licht verschiedener Intensität darzustellen, etwa so, daß der tiefste Punkt der Kurve der völligen Dunkelheit, der höchste der maximalen Helligkeit entspräche, dazwischenliegende Ordinatengrößen aber durch Helligkeiten der verschiedensten Abstufung zwischen Hell und Dunkel abgebildet würden.

Das *optische Bild* einer Beobachtungsreihe oder -kurve ist demnach eine Punktreihe oder Linie, deren Elemente (Abszisse x) Licht von vorgeschriebener Intensität $f(x) - f_{\min}$ aussenden [oder einfach $f(x)$, wenn wir stillschweigend voraussetzen, daß der Minimalwert der Ordinaten ≥ 0 sei]. Das analysierende Gitter ist hingegen flächenhaft ausgedehnt (z. B. in Versuch 1 eine mit schwarzen Streifen bemalte Glasplatte). Um daher das optische Bild der Beobachtungsreihe mit dem Gitter in Beziehung setzen zu können, müssen wir es ebenfalls flächenförmig erweitern: Wir denken uns eine in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem definierte Helligkeitsfunktion

$$g(x, y) = f(x),$$

die also auf jeder zur x -Achse parallelen Geraden die gleiche, der Beobachtungsfunktion entsprechende Lichtverteilung aufweist. Das so flächenhaft auseinanderggezogene optische Bild enthält Linien gleicher Helligkeit, die alle parallel zur y -Richtung verlaufen. Es ist am besten mit einem kontinuierlichen Spaltspektrum zu vergleichen, das sich der Form nach in nichts von ihm unterscheidet.

Das physikalische Hilfsmittel zur Umwandlung der geometrisch oder zahlenmäßig gegebenen Funktion $f(x)$ in ein derartiges optisches Bild ist die *Zylinderlinse*. Die Zylinderlinse hat die Eigenschaft, einen Licht aussendenden Punkt in der Bildebene als gerade Strecke abzubilden, die parallel zur Achse der Zylinderfläche verläuft. Eine Reihe von Lichtpunkten, die auf einer zur Zylinderachse parallelen Geraden liegen, bilden sich daher in derselben Geraden der Bildebene ab. Liegt also (s. Abb. 25) die Achse der Zylinderlinse (CC') der Ordinatenachse einer abzubildenden Fläche parallel, so überdecken sich die Bilder der Punkte, die auf einer und derselben Ordinate liegen. Hat die Ordinate die Höhe y , und sendet jedes Linienelement der Ordinate die gleiche Lichtmenge

aus, so ist infolge dieser Überlagerung der Bilder der Linienelemente die auf jedes Element der zugehörigen Ordinate der Bildebene fallende Gesamtlichtmenge y proportional. Sei nun (s. Abb. 25) die abzubildende Figur eine gleichmäßig helle Fläche, die von der Kurve $f(x)$ und der

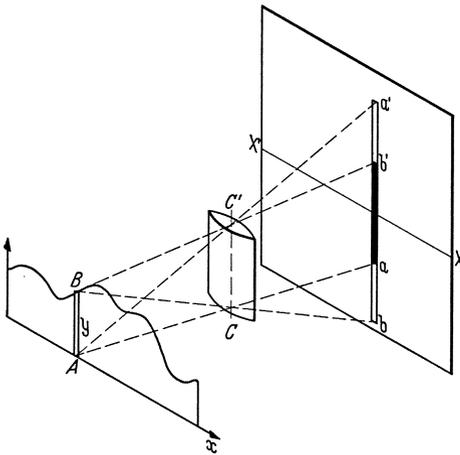


Abb. 25. Abbildung durch eine Zylinderlinse. [Der Punkt A bildet sich längs aa' , der Punkt B längs bb' ab. Auf der Strecke ab' überlagern sich demnach die Bilder aller Punkte von AB . Längs $X X'$ erscheint $y = f(x)$ als Helligkeitsverteilung.]

Abszissenachse begrenzt ist, und die in der Objektebene so angebracht ist, daß die Ordinatenrichtung parallel zur Zylinderachse verläuft, so entsteht in der Bildebene eine Helligkeitsverteilung von der genannten Art, so daß (innerhalb eines Streifens von endlicher Breite) die Intensität längs jeder Ordinate des Bildes gleichmäßig und dem zugeordneten Funktionswert $f(x)$ proportional ist. Ist z. B. das Objekt ein „Gitter“, dessen Stäbe der Zylinderachse parallel sind, so ist auch die Abbildung ein Gitter. Ist $f(t)$ eine beliebige Funktion, so entsteht als Abbildung eine Helligkeitsverteilung streifiger Struktur von der Art

eines kontinuierlichen Spaltspektrums, für die A. E. DOUGLASS die treffende Bezeichnung „sweep“ (Schweif) einführt, und die wir in Zukunft einfach die „optische Abbildung“ der Funktion $f(x)$ nennen wollen.

5. Der Periodograph von A. E. DOUGLASS.

Der Grundtyp des DOUGLASSschen Periodographen ist der „Zyklograph“ von DOUGLASS und WHITE, der von seinen Erbauern hauptsächlich zum Studium der Perioden (cycles) verwendet wurde, die in den Jahresringen der kalifornischen Riesenbäume (insbesondere der Gattung Sequoia) auftreten, und die ein ziemlich getreues Abbild der Klimaschwankungen abgeben, die während der Jahrhunderte des Wachstums dieser Bäume stattgefunden haben. Das Prinzip des Zyklographen ist genau das des in Abschnitt 3 beschriebenen ersten Grundversuchs: Die optische Abbildung der Beobachtungsfunktion wird mit einem auf einer Glasplatte aufgetragenen Gitter so zur Deckung gebracht, daß die Streifenrichtung des Gitters gegen die des optischen Bildes der Beobachtungsfunktion um einen kleinen Winkel gedreht ist. Zyklen, deren Länge von der Gitterkonstante nicht sehr verschieden sind, machen sich dann durch (je nach der Amplitude der Zyklen mehr oder weniger

stark ausgeprägte) virtuelle Streifensysteme (Interferenzstreifen) bemerkbar, aus deren Richtung die wahre Periodenlänge bestimmt werden kann. Persistente Perioden ergeben geradlinige virtuelle Streifensysteme, veränderliche Perioden gekrümmte oder geknickte Streifensysteme; Phasensprünge machen sich durch Unstetigkeiten bemerkbar — die Theorie der virtuellen Streifen entspricht also genau der Theorie der Phasendiagramme.

Ohne daß hier alle technischen Einzelheiten dieser Einrichtung wiedergegeben werden sollen, die der Leser den Abhandlungen von DOUGLASS¹ selbst entnehmen möge, sei auf einige wesentliche Punkte aufmerksam gemacht: Die Beobachtungskurve wird aus einem Bogen von undurchsichtigem Papier ausgeschnitten (Abb. 26), so daß der Raum zwischen

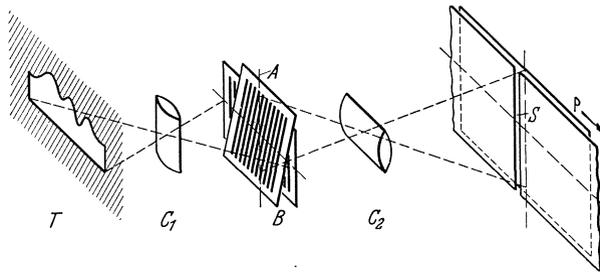


Abb. 26. Periodograph von DOUGLASS.

der Kurve, der Abszissenachse (kleinste Ordinate = 0) und der Anfangs- und Endordinate ausgespart bleibt. Dies „Transparent“ *T* wird von hinten gleichmäßig beleuchtet, etwa, indem es vor das Fenster eines im übrigen völlig verdunkelten Raumes gestellt wird. Die Zylinderlinse C_1 des Apparats erzeugt in der Bildebene ein „optisches Bild“ *B* der Kurve. Die Glasplatte mit dem analysierenden Gitter wird gleichfalls in die Bildebene gebracht. Der Beobachter betrachtet Bild und Gitter zusammen durch ein Linsensystem oder photographiert den optischen Effekt. Dabei ist zweierlei zu beachten: Das analysierende Gitter muß eng sein, damit der Effekt der virtuellen Streifen dem Auge deutlich wird. Da die Herstellung sehr enger Gitter schwierig und ungenau ist, wird es zweckmäßiger sein, die Bildebene der Zylinderlinse durch ein weiteres optisches System noch einmal stark verkleinert abzubilden, ehe sie beobachtet oder photographiert wird. Sodann ist es zweckmäßig, die Beobachtung oder die Aufnahme ein wenig extrafokal vorzunehmen. Dadurch wird das enge Streifensystem des Gitters sowie des optischen Bildes selbst verwischt, so daß es den Gesamteindruck nicht mehr stört, während die virtuellen Streifen, die breit und weitabständig sind, dadurch nicht verändert werden. Weiter ist zu bemerken, daß ein Gitter von

¹ Siehe Literaturverzeichnis. Ferner: A. p. V. S. 157 ff.

bestimmter Konstante mit hinreichender Deutlichkeit nur solche Zyklen in Gestalt virtueller Streifen hervortreten läßt, deren Wellenlängen in der Nähe der Gitterkonstante liegen. Es wird also durch ein bestimmtes Gitter immer nur ein begrenzter Abschnitt des Kurvenspektrums erfaßt. Um eine vollständige Durchmusterung der Beobachtungsreihe nach Perioden zu erhalten, kann man entweder Analysatorplatten mit verschiedenen Konstanten benutzen, die dann für verschiedene Wellenbereiche brauchbar sind, oder man verfährt so, daß man die Abbildung der Beobachtungskurve durch Veränderung der Stellung der Zylinderlinse verkleinert oder vergrößert. Durch stetige Veränderung der Dimension des optischen Bildes ist es möglich, für jedes auftretende virtuelle Streifen-system vollkommene Interferenz zu erzielen. Ist die Streifenneigung des Gitters gegen die Vertikale $\frac{\varepsilon}{2}$ und die des optischen Bildes $-\frac{\varepsilon}{2}$, so sieht man leicht ein (s. Abschnitt 3, Versuch 1), daß im Falle der Interferenz ($\omega = p$) die Richtung der virtuellen Streifen genau horizontal sein muß.

Ferner ist noch auf einen anderen wichtigen Punkt aufmerksam zu machen: Die Gitterfunktion, als deren optisches Bild das analysierende Gitter zu betrachten ist, enthält, wie schon ausgeführt, nicht nur die Versuchsperiode ω , sondern auch die ungeraden Oberschwingungen derselben. Der zyklographische Effekt wird also dergestalt sein, als ob nicht nur ein analysierendes Gitter mit der Konstante ω , sondern gleichzeitig Gitter mit den Konstanten $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{5}$, ... vorhanden wären, deren Einfluß allerdings der geringeren Amplituden wegen mit steigender Ordnung rasch abnimmt. Trotzdem wird man, wenn etwa die Beobachtungsfunktion eine Periode p enthält, nicht nur bei $p = \omega$, sondern auch, allerdings entsprechend schwächer, bei $p = \frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{5}$... virtuelle Streifen-effekte höherer Ordnung wahrnehmen. Diese lassen sich aber leicht als Effekte höherer Ordnung erkennen und somit ausscheiden. Wir haben nämlich gesehen, daß die Streifendistanz der virtuellen Systeme

$$d = \frac{\omega \cos \delta}{\sin \varepsilon}$$

ist. Bei horizontalen oder nahezu horizontalen Systemen ist $\cos \delta \sim 1$, also genau oder nahezu

$$d = \frac{\omega}{\sin \varepsilon}.$$

Da ε eine Apparatkonstante ist, so ist also d für horizontale Interferenzstreifen ω proportional; die Streifendistanz der Interferenzeffekte höherer Ordnung wird also $\frac{d}{3}$, $\frac{d}{5}$, ... sein — die Ordnung der Effekte ist demnach ohne Schwierigkeit aus der Streifendistanz feststellbar.

Der Zyklograph ist ein Instrument, das für schnelle Durchmusterungsarbeit außerordentlich geeignet ist. Es zeigt nicht nur persistente, sondern auch quasipersistente und variable Perioden an; es nimmt zudem nicht auf ein bestimmtes „Analysenintervall“ Rücksicht, wie dies in der sonst ganz ähnliche Ergebnisse liefernden Theorie der Phasendiagramme nach SCHUSTER immerhin noch geschieht. Hingegen ist eine Messung der *Amplituden* von Periodizitäten nicht möglich; sie lassen sich nur auf Grund der Deutlichkeit der einzelnen Interferenzeffekte oberflächlich abschätzen. Eine Vorrichtung zur Messung der *Phasen* ließe sich aber anbringen: die Phase ist durch die Ordinaten der extremalen Helligkeit in den virtuellen Streifen in der Bildebene gegeben — der bei festem Gitter konstante Ordinatenabstand der Interferenzstreifen erster Ordnung ($d = \omega / \sin \epsilon$) liefert die Phasenskala, wenn er gleich 360° gesetzt wird.

Durch eine zusätzliche Einrichtung, die in Abb. 26 (rechter Teil) skizziert ist, läßt sich aus dem oben beschriebenen Apparat ein *Periodograph* gestalten, der ein kontinuierliches Amplitudenspektrum der gegebenen Beobachtungsfunktion auf photographischem Wege herzustellen gestattet.

Angenommen, es sei in der Beobachtungskurve eine persistente Periode von der Länge p enthalten. In der Bildebene des Zyklographen entsteht dann, wenn durch Variierung der Einstellung $p = \omega$ erzielt ist, ein horizontales System von Interferenzstreifen. Es werde nun von diesem Bild durch eine zweite Zylinderlinse C_2 (Abb. 26) mit *horizontaler* Achsenlage ein neues optisches Bild erzeugt: Dies enthält dann die in der Bildebene B auftretenden horizontalen Streifen unverändert, während geneigte Streifen mehr oder weniger ausgelöscht werden. Die neue Abbildung entspricht genau der Bildung der Summenreihe in einem DARWINSchen oder BUYS-BALLOTSchen Schema. DOUGLASS blendet nun aus diesem sekundären optischen Bild mit waagerechter Streifung einen schmalen senkrechten Spalt S heraus, der die Lichtverteilung vollkommen wiedergibt. Wird nun durch eine mechanische Einrichtung die Versuchsperiode p stetig verändert und gleichzeitig ein Film oder eine photographische Platte P an diesem Spalt langsam vorbeigeführt, so entsteht ein photographisches Bild, das als Funktion der Abszisse (veränderliche Periode p) die wellenförmige Struktur der zu p gehörigen „Summenreihe“ direkt wiedergibt. Die Aufnahme ergibt also ein „Spektrum“ der Beobachtungskurve, dessen Abszissen die Versuchsperioden p sind, und das für jede persistente Periode p und ihre unmittelbare Nachbarschaft ein Streifensystem von gewisser Breite (Maximumbreite) und einer der betreffenden Amplitude proportionalen Intensität aufweist. Über die technischen Einzelheiten, insbesondere über die Art der mechanischen Führung des Apparates möge der Leser in den Veröffentlichungen von A. E. DOUGLASS selbst nachlesen.

6. Der photomechanische Periodograph von STUMPF und seine Theorie.

Die ersten Ausführungen über die Theorie dieses Apparats sind 1924 (Lit. 255) veröffentlicht worden, nachdem Modellversuche mit einem photographisch registrierenden Analysator gelungen waren. Ein erhöhten Anforderungen genügendes Instrument wurde 1928—1930 gebaut, desgleichen in den Jahren 1932—1934 ein zweites Instrument, das die direkte photographische Aufnahme von Phasendiagrammen längerer Beobachtungsreihen gestattet (s. Abschnitt 8).

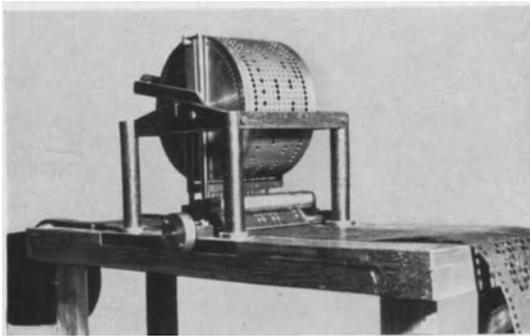


Abb. 27. Stanzapparat zur Herstellung der Lochstreifen für den STUMPFschen Analysator.

Die Theorie beider Apparate stützt sich auf den Grundversuch 3 (Gitter in Bewegung), der in Abschnitt 3 beschrieben wurde. Die Interferenzeffekte (virtuelle Gitter in Ruhe oder Bewegung) kommen zustande, indem das optische Bild einer Beobachtungskurve, während es sich in Bewegung befindet, durch ein gleichfalls bewegtes Gitter hindurch betrachtet bzw. photographisch registriert wird.

Die Beobachtungskurve wird, ähnlich wie bei den DOUGLASSchen Verfahren, durch ein Transparent dargestellt, das auf folgende Weise angefertigt wird: Vorgelegt seien L Beobachtungswerte y_1, y_2, \dots, y_L ($L = \text{Analysenintervall}$). Ein rechteckiger Streifen undurchsichtigen Papiers von der Länge L (Längeneinheit etwa 8 mm) und von etwa 10 cm Breite sei Träger eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Abszissenachse in der Längsrichtung verläuft und somit in L gleiche Teile einteilbar ist. Man kann sich also auf diesem Streifen L äquidistante in der Querrichtung verlaufende Ordinatenlinien gezeichnet denken, die den Abszissen der Beobachtungsreihe gemäß nummeriert sind. Längs der Ordinatenlinie mit der Nummer ν läßt sich nun mit einem besonders konstruierten Stanzapparat (s. Abb. 27) eine Reihe von Löchern einstanzen, deren Gesamtflächeninhalt dem Beobachtungswert y_ν proportional ist. Durch Anbringung einer additiven Konstante ist vorher Sorge getragen,

daß die Beobachtungswerte alle positiv sind und ihr Minimalwert null oder wenigstens klein ist. Wird also der Streifen als Transparent benutzt, so ist die längs jeder Ordinatenlinie hindurchscheinende gesamt Lichtmenge dem betreffenden Funktionswert proportional. Das durch eine Zylinderlinse (Achse der Zylinderfläche der Ordinatenrichtung parallel) erzeugte optische Bild hat dann eine der Beobachtungsfunktion entsprechende Lichtverteilung. Das optische Bild ist allerdings unstetig und besteht aus einzelnen „Linien“ von gewisser Breite und einer y_v proportionalen Gesamthelligkeit. Ein stetiges optisches Bild ließe sich erzeugen, wenn die Beobachtungskurve (wie bei DOUGLASS) ganzrandig ausgespart würde — auf die zu beobachtenden Interferenzeffekte hat aber dieser Unterschied ebensowenig einen wesentlichen Einfluß, wie etwa die verschiedene Darstellung einer Beobachtungsfunktion durch diskrete Ordinaten oder durch eine stetige Kurve auf das Ergebnis einer numerischen Analyse. Wir brauchen also in der Theorie die Unstetigkeitseigenschaften des optischen Bildes nicht besonders zu berücksichtigen¹.

Der so hergestellte Kurvenstreifen werde nun zu einem „endlosen Band“ zusammengeklebt und möge mit einer bestimmten Geschwindigkeit vor einer gleichmäßig beleuchteten Mattscheibe in der Abszissenrichtung vorbeigleiten. Bei einer bestimmten, zur Zeit t stattfindenden Stellung des Streifens läßt sich der gerade vor der Mattscheibe befindliche Teil der Kurve durch die FOURIER-Entwicklung der Beobachtungsreihe mit L als Analysenintervall

$$f(x, t) = c_0 + c_1 \cos \alpha (x + q_1) + c_2 \cos 2 \alpha (x + q_2) + \cdots + c_n \cos n \alpha (x + q_n) \\ \left(\alpha = \frac{2\pi}{L} \right)$$

wiedergeben, wobei die Phasen q_v Funktionen der Zeit sind. (Wird etwa die Kurve mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v bewegt, so ist $q_v = s_v - vt$.)

Durch die Zylinderlinse wird von dem vor der Mattscheibe befindlichen Kurvenstück in der Bildebene eine „optische Abbildung“ mit senkrechter (zu der Achse der Zylinderfläche paralleler) Streifung hergestellt (s. Abb. 28). Ein in der Bildebene angebrachter, zur x -Richtung paralleler, also waagerechter Spalt blendet mithin aus dem optischen Bild einen Schnitt aus, auf dem die Lichtverteilung den Ordinaten des abgebildeten Kurventeils proportional ist. Steht die Zylinderlinse genau in der Mitte zwischen Objekt und Bild, so ist die Abbildung auch maßtreu — nur die positive Richtung der x -Achse des Objekts und der ihr entsprechenden ξ -Achse des Bildes sind einander entgegengesetzt. Dicht vor dem

¹ Soll dies dennoch geschehen, so hat man zu berücksichtigen, daß eine Periode von der Länge des Abstandes benachbarter Beobachtungswerte auftritt. Infolge ihrer hohen Frequenz wird sich diese Periode aber in dem zu untersuchenden Spektralgebiet höchstens durch Effekte höherer Ordnung bemerkbar machen.

beweglichen Kurvenstreifen läuft nun gleichzeitig ein — ebenfalls als endloses Band gestaltetes — Gitter mit der Gitterkonstante ω (Stabbreite $\frac{\omega}{2}$) und senkrechten Stäben in gleicher oder entgegengesetzter Richtung vorbei. Die Bewegungen von Gitter und Kurventransparent sind unabhängig voneinander und daher im allgemeinen voneinander

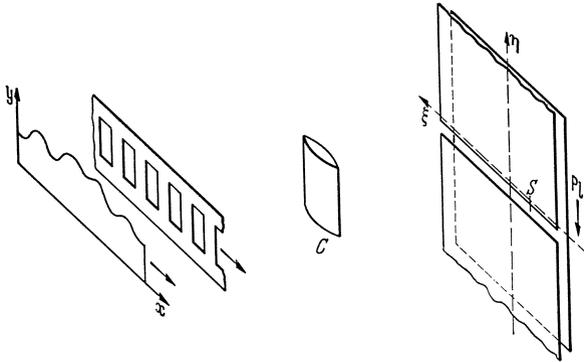


Abb. 28. Photomechanischer Periodograph von STUMPF (schematisch).

verschieden. Das Gitter, dessen optische Abbildung längs des Spaltes die Form einer „Gitterfunktion“

$$g(\xi, t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \left(\cos \beta (\xi + r) - \frac{1}{3} \cos 3 \beta (\xi + r) + \frac{1}{5} \cos 5 \beta (\xi + r) - \dots \right) \right\} \quad \left(\beta = \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

hat (die Phase r ist wiederum eine Funktion der Zeit), bewirkt Abblendung gewisser Teile des Spaltes. Es ist also $g(\xi, t) = 0$ oder 1 , je nachdem, ob zur Zeit t an der ξ entsprechenden Stelle x der Mattscheibe gerade eine Lücke oder ein Stab des Gitters steht. Der kombinierte Effekt von Kurve und Gitter ist daher längs des Spaltes von der Form

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, t) &= J \cdot f(\xi, t) \cdot g(\xi, t) \\ &= \frac{J}{2} \left\{ c_0 + \sum_{\nu=1}^n c_{\nu} \cos \nu \alpha (\xi + q_{\nu}(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 c_0}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-1}}{2 \mu - 1} \cos (2 \mu - 1) \beta (\xi + r(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu} \frac{(-1)^{\mu-1}}{2 \mu - 1} [\cos \{ \nu \alpha (\xi + q_{\nu}(t)) + (2 \mu - 1) \beta (\xi + r(t)) \} \right. \\ &\quad \left. + \cos \{ \nu \alpha (\xi + q_{\nu}(t)) - (2 \mu - 1) \beta (\xi + r(t)) \} \right\} \quad (I) \end{aligned}$$

besteht also aus einer Summe von Welleneffekten, die sich dem konstanten Effekt $\frac{1}{2} J c_0$ (mittlere Spalthelligkeit) überlagern.

Nun werde an dem Spalt, dessen Breite δ sei, eine photographische Platte oder ein Film in der Ordinatenrichtung vorübergeführt. Die Geschwindigkeit der Plattenbewegung sei u ; es wird demnach (abgesehen von schmalen Randgebieten am Anfang und Ende der Aufnahme, auf die es hier nicht ankommt) jede Stelle der Platte so lange Zeit belichtet, wie sie braucht, um eine Strecke von der Länge δ zurückzulegen. Die Belichtungszeit ist demnach $\frac{\delta}{u}$. Führen wir auf der Platte ein Koordinatensystem (ξ, η) ein, in dem die Abszisse ξ mit der ebenso bezeichneten der Bildebene identisch ist und die positive η -Richtung der Bewegungsrichtung der Platte entgegengesetzt ist, so ist die Belichtung der Platte durch

$$\psi(\xi, \eta) = \int_{\frac{\eta}{u}}^{\frac{\eta + \delta}{u}} \Phi(\xi, t) dt$$

gegeben. Nehmen wir an, daß die Schwärzung der Platte innerhalb der möglichen Belichtungsgrenzen der Belichtungszeit und der Belichtungsintensität proportional ist, so können wir $\psi(\xi, \eta)$ auch als mathematische Wiedergabe des auf der Platte entstehenden Schwärzungsbildes ansehen. Solange keine Überbelichtung eintritt und die Helligkeit der Lichtquelle während der Dauer der Aufnahme konstant bleibt, läßt sich diese Annahme rechtfertigen — ist die „Schwärzungsfunktion“ nicht streng linear, so werden die Ergebnisse der Aufnahme zwar nicht photometrisch auswertbar sein; der allgemeine Anblick des Schwärzungsbildes, die Verteilung von hellen und dunklen Stellen, wird trotzdem zwingende Schlüsse auf die periodische Struktur des Untersuchungsgegenstandes erlauben.

Konstante Gittergeschwindigkeit. Bewegen sich Kurvenstreifen und Gitter mit konstanten Geschwindigkeiten v und w , so ist zu setzen

$$q_v(t) = s_v - vt; \quad r(t) = -wt,$$

wobei wir der Einfachheit halber die Anfangsphase des Gitters zu Beginn der Aufnahme und bezogen auf den Anfangspunkt der ξ -Achse gleich null setzen. Die mittlere Schwärzung

$$\frac{1}{2} J c_0 \int_{\frac{\eta}{u}}^{\frac{\eta + \delta}{u}} dt = \frac{J c_0 \delta}{2 u}$$

wird alsdann überlagert (verstärkt oder abgeschwächt) durch periodische Schwärzungsglieder von der Gestalt

$$\int_{\frac{\eta}{u}}^{\frac{\eta+\delta}{u}} \cos(d\xi + ht + k) dt = \frac{\delta}{u} \cdot \frac{\sin \frac{h\delta}{2u}}{\frac{h\delta}{2u}} \cdot \cos\left(d\xi + \frac{h}{u}\eta + \frac{\delta h}{2u} + k\right),$$

in denen d , h und k bestimmte Konstante darstellen. Der sehr komplizierte theoretische Ansatz vereinfacht sich nun dadurch außerordentlich, daß es durch geeignete Wahl der Spaltbreite δ und der Geschwindigkeiten u , v und w statthaft wird, alle periodischen Glieder bis auf jeweils eines oder wenige zu vernachlässigen. Abgesehen von der Belichtungszeit $\frac{\delta}{u}$ und Faktoren, die den Amplituden c_v der FOURIER-Wellen der Beobachtungsfunktion proportional sind, ist jeder periodische Schwärzungseffekt mit einem Glättungs- oder Dämpfungsfaktor

$$\frac{\sin \frac{h\delta}{2u}}{\frac{h\delta}{2u}}$$

versehen, der nur für $h\delta = 0$ den Maximalwert 1 annimmt und für

$$\frac{h\delta}{2u} = m \cdot \pi \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Nullstellen aufweist. Dieser Faktor, der seiner Form nach aus der Theorie der Periodogrammfunktion bekannt ist, nimmt nur zwischen den beiden Nullstellen 1. Ordnung, also für $\left|\frac{h\delta}{2u}\right| < \pi$ beachtliche Werte an. Das mit diesem Faktor versehene periodische Glied kann vernachlässigt werden, wenn

$$\left|\frac{h\delta}{2u}\right| > m_0 \pi,$$

wo m_0 eine kleine Zahl (etwa $m_0 = 3$) ist. Die Frequenz der betreffenden Schwingung muß also, damit der zugehörige Schwärzungseffekt verschwindet oder von untergeordneter Größe bleibt, der Ungleichung

$$|h| > 2\pi m_0 \cdot \frac{u}{\delta} \quad (2)$$

genügen. Durch Erweiterung des Spaltes oder durch Verlangsamung der Plattengeschwindigkeit oder durch beides zugleich läßt sich also stets erreichen, daß Teilschwingungen, deren Frequenzen oberhalb einer gewissen Schranke liegen, im photographischen Bild nicht mehr merklich hervortreten. Betrachten wir daraufhin die vorkommenden Teilschwingungen (1), so gelangen wir zu folgender Klassifizierung:

a) Kurveneffekte. ($c_v \cos v\alpha (\xi + s_v - vt)$). Für diese ist die Dämpfungsbedingung (2) erfüllt, wenn

$$|h| = |v\alpha| = \frac{2\pi v \cdot |v|}{L} > 2\pi m_0 \frac{u}{\delta}. \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

Ist $T = \frac{L}{|v|}$ die Umlaufszeit des Kurvenbandes und $\tau = \frac{\delta}{u}$ die Belichtungszeit, so werden alle „Kurveneffekte“ praktisch ausgelöscht sein, wenn

$$\frac{v}{T} \cong \frac{1}{T} > \frac{m_0}{\tau} \quad \text{oder} \quad \tau > m_0 T.$$

Die Belichtungszeit muß also mehrere (z. B. mindestens drei) Kurvenumläufe umfassen.

b) Gittereffekte. $\left(\frac{4 c_0}{\pi} \cdot \frac{1}{2\mu - 1} \cos(2\mu - 1) \beta (\xi - w t) \right).$

Sie liefern die Dämpfungsbedingung

$$(2\mu - 1) \beta |w| \cong \beta |w| = 2\pi \cdot \frac{|w|}{\omega} > 2\pi m_0 \frac{u}{\delta}; \quad \frac{|w|}{\omega} > \frac{m_0}{\tau}.$$

Ist also die Verschiebungszeit des Gitters um eine volle Periode

$$\frac{\omega}{|w|} \cong T,$$

so folgt aus der oben geforderten Ungleichung $\tau > m_0 T$ und somit die Auslöschung der Gittereffekte. Die genannte Bedingung ist also erfüllt, wenn die „Versuchsperiode“ nicht größer ist als die erste Harmonische der Beobachtungsreihe. Für sehr lange Versuchsperioden würden sich hingegen die Gittereffekte bemerkbar machen (vgl. S. 305 [Nullpunkteffekt]).

c) Gemischte Effekte.

$$\left(\frac{2}{\pi} \frac{c_v}{2\mu - 1} \cdot \cos \{ \nu \alpha (\xi + s_v - v t) \pm (2\mu - 1) \beta (\xi - w t) \} \right).$$

Für die gemischten Effekte mit dem positiven Zeichen (Summationseffekte) gilt, falls die Kurven- und Gittereffekte verschwinden, die Dämpfungsbedingung ohne weiteres mit, falls v und w das gleiche Vorzeichen haben, Kurve und Gitter also in gleicher Richtung laufen. Für die Differenzeffekte gilt das gleiche, wenn Kurve und Gitter entgegengesetzt laufen. Unter der Voraussetzung gleichsinniger Bewegung von Gitter und Kurve dürfen wir also die Summationseffekte sämtlich vernachlässigen; was die Differenzeffekte anbelangt, so tritt ein Sonderfall ein, wenn

$$\nu \alpha v - (2\mu - 1) \beta w$$

ganz oder nahezu verschwindet. Ist z. B. für bestimmte Werte von ν und μ streng

$$\nu \alpha v = (2\mu - 1) \beta w,$$

so wird der Dämpfungsfaktor 1, der Effekt wird also mit voller Amplitude in das Schwärzungsbild eingehen. Effekte dieser Art werden wir als „Haupteffekte“ bezeichnen. Hierbei ist allerdings noch zu berücksichtigen, daß ein von der Ordnung $2\mu - 1$ des Gittergliedes abhängiger Faktor vom Betrage $\frac{1}{2\mu - 1}$ hinzukommt, dessen schnelle Abnahme mit wachsendem μ es erlaubt, die Gitterfunktionsentwicklung schon nach wenigen

Gliedern abzubrechen. Später wird festgestellt werden, daß die Haupteffekte mit $2\mu - 1 = 3, 5, \dots$ (Haupteffekte 3., 5., ... Ordnung) von denen der 1. Ordnung auch durch ihre geometrische Gestalt leicht zu unterscheiden sind. Beschränken wir uns also zunächst auf die Betrachtung der Haupteffekte 1. Ordnung, so treten diese mit voller Amplitude in Wirksamkeit, wenn

$$v\alpha v = \beta w.$$

Sind die Apparatgeschwindigkeiten v und w so abgestimmt, daß diese Gleichung für ein bestimmtes ν (Ordnung einer FOURIER-Welle) erfüllt ist, so gilt für eine benachbarte Ordnung $\nu \pm 1$

$$|h| = |(\nu \pm 1)\alpha v - \beta w| = |\alpha v|.$$

Es werden also mit den Effekten (a) und (b) auch sämtliche Haupteffekte 1. Ordnung verschwinden, mit Ausnahme eines einzigen, der von dem FOURIER-Glied der ν -ten Ordnung herrührt, auf das der Apparat durch geeignete Wahl von v und w abgestimmt ist. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß auch jeweils nur ein einziger Haupteffekt der 3., 5. usw. Ordnung (mit entsprechend verminderter Amplitude) wirksam werden kann.

Unter der Voraussetzung, daß die Dämpfungsbedingung $\tau > m_0 T$ erfüllt ist, läßt sich also das Schwärzungsbild in der Tat durch einen oder wenige periodische Haupteffekte von der Form

$$\psi_v^{(\mu)}(\xi, \eta) = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{J_0}{\pi} \cdot \frac{\delta}{u} \cdot \frac{c_v}{2\mu-1} \cdot \frac{\sin \frac{h\delta}{2u}}{\frac{h\delta}{2u}} \cos\left(d\xi + \frac{h}{u}\eta + k\right)$$

wiedergeben, wobei

$$k = \frac{\delta h}{2u} + \nu\alpha s_v$$

eine vorläufig nicht interessierende Phasenkonstante, ferner

$$d = \nu\alpha - (2\mu - 1)\beta = 2\pi\left(\frac{\nu}{L} - \frac{2\mu - 1}{\omega}\right)$$

$$h = \nu\alpha v - (2\mu - 1)\beta w = 2\pi\left(\frac{\nu v}{L} - \frac{(2\mu - 1)w}{\omega}\right)$$

ist. Das Bild selbst wird durch die Linien maximaler Schwärzung bestimmt, die durch

$$\cos\left(d\xi + \frac{h}{u}\eta + k\right) = 1$$

gegeben sind. Der (für den Fall, daß h ungefähr oder genau null ist, sichtbar werdende) Haupteffekt $\psi_v^{(\mu)}(\xi, \eta)$ läßt sich also schematisch durch eine Schar von Kurven maximaler Schwärzung

$$d\xi + \frac{h}{u}\eta + k = 2\pi\kappa \quad (\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

also durch eine Schar paralleler Geraden

$$\xi + \eta \operatorname{tg} \psi = D\kappa + k' \quad (k' = \text{const})$$

darstellen, wobei

$$\psi = \text{arc tg } \frac{v}{u} \cdot \frac{1 - (2\mu - 1) \frac{w}{v} \cdot \frac{L}{v\omega}}{1 - (2\mu - 1) \frac{L}{v\omega}}$$

die Neigung der Geraden gegen die η -Achse und

$$D = \frac{L\omega}{v\omega - (2\mu - 1)L}$$

die Streifendistanz in der ξ -Richtung bedeutet. Die Streifen maximaler Schwärzung laufen parallel der η -Achse, also in Richtung der Plattenbewegung, wenn die Interferenzbedingung

$$v \cdot \frac{v}{L} = w \cdot \frac{2\mu - 1}{\omega}$$

genau erfüllt ist. Handelt es sich um einen Effekt 1. Ordnung ($\mu = 1$), so ist die FOURIER-Periode, auf die sich der Effekt bezieht,

$$p_v = \frac{L}{v} = \frac{v}{w} \cdot \omega$$

oder, mit anderen Worten: die Kurvenperiode (p_v) verhält sich zur Gitterperiode (ω), wie die Kurvengeschwindigkeit v zur Gittergeschwindigkeit w . Die Streifendistanz ist in diesem Falle

$$D = \frac{L\omega}{v\omega - L} = \frac{\omega p_v}{\omega - p_v}.$$

Ein Haupteffekt ($2\mu - 1$)-ter Ordnung ($\mu = 2, 3, \dots$) ergibt sich dagegen für eine vorhandene FOURIER-Welle

$$p'_v = \frac{L}{v} = \frac{v\omega}{(2\mu - 1)w} = \frac{p_v}{2\mu - 1},$$

also für eine ($2\mu - 1$)-mal so kurze Welle. Die Distanz der Streifen ist dann

$$D = \frac{\omega p'_v}{\omega - (2\mu - 1)p'_v} = \frac{1}{2\mu - 1} \cdot \frac{\omega p_v}{\omega - p_v},$$

also ebenfalls ($2\mu - 1$)-mal so klein, wie im Falle eines Effekts 1. Ordnung. Aus der Streifendistanz (s. Abb. 29, wo die η -Richtung waagrecht angenommen ist) ist also in jedem Falle zu erkennen, ob es sich um einen Effekt 1. oder höherer Ordnung handelt; die wahre Periodenlänge ist sodann aus der Neigung ψ der Streifen gegen die η -Richtung bestimmbar. Wegen des Faktors $\frac{v}{u}$ ist die Empfindlichkeit der Streifenneigung gegen eine Variation der Periode um so größer, je kleiner die Plattengeschwindigkeit u im Verhältnis zur Kurvengeschwindigkeit ist.

Ist $p = \omega$, so wird für den Effekt 1. Ordnung im Interferenzfalle

$$\text{tg } \psi = \infty; \quad \psi = 90^\circ$$

und $D = \infty$; die Streifen stehen also senkrecht auf der η -Achse.

Veränderliche Gittergeschwindigkeit. Auf Grund der obigen Theorie ließe sich eine Übersicht über die in einer vorgelegten und in ein endloses Kurvenband von der Länge L eingestanzten Beobachtungskurve vorhandenen FOURIER-Wellen gewinnen, wenn man folgendermaßen verfährt: Das Geschwindigkeitsverhältnis $v : w$ ist, etwa durch Variation von w , nacheinander auf die Werte

$$\frac{v}{w} = \frac{L}{\nu \omega} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)^1$$

zu bringen, was durch Austausch von Zahnradübertragungen geschehen könnte, durch die Kurven- und Gitterbewegung zwangsläufig miteinander in Verbindung stehen. Die auftretenden Effekte bestehen

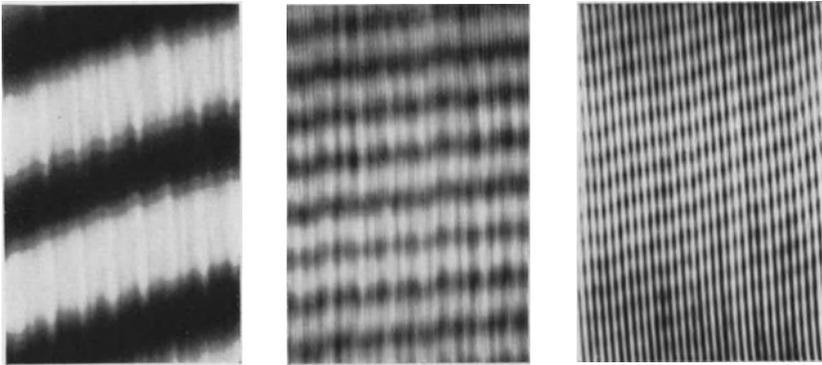


Abb. 29. Haupteffekt erster, dritter und fünfter Ordnung, aufgenommen mit dem Periodographen I. Art bei konstanter Gittergeschwindigkeit.

dann jeweils aus zur η -Richtung parallelen Kurvenscharen, sie werden nacheinander auf der Platte aufgezeichnet, wenn man den Apparat nach jedem Auswechseln der Geschwindigkeiten eine gewisse Zeit hindurch in Bewegung setzt. Wegen des Faktors c_ν werden die zu den betreffenden Versuchsperioden gehörigen Haupteffekte um so deutlicher registriert werden, je größer ihre Amplitude war; sie werden ganz fehlen, wenn die Amplitude c_ν null ist, eine Periode von der Länge $p_\nu = \frac{L}{\nu}$ also nicht existiert. In dem von STUMPF konstruierten photomechanischen *Periodograph erster Art* (Abb. 30) ist nun das lästige Auswechseln der Geschwindigkeiten dadurch vermieden worden, daß die Geschwindigkeit des Gitters von null bis zu einem bestimmten und durch den beabsichtigten Umfang der Analyse vorgeschriebenen Maximum stetig und gleichförmig verändert wird. Technisch wird das dadurch erreicht, daß die das Gitter bewegende Führungswalze durch ein *Friktionsrädchen* angetrieben wird, das mit Hilfe einer *Schnecke* (Schraube ohne Ende)

¹ Hieraus folgt die weiter oben vorausgesetzte Bedingung: $\frac{\omega}{w} \cong \frac{L}{\nu}$ (s. S. 297).

längs des Halbmessers einer gleichmäßig rotierenden Friktionsscheibe mit gleichmäßiger Geschwindigkeit langsam verschoben wird (Abb. 30,

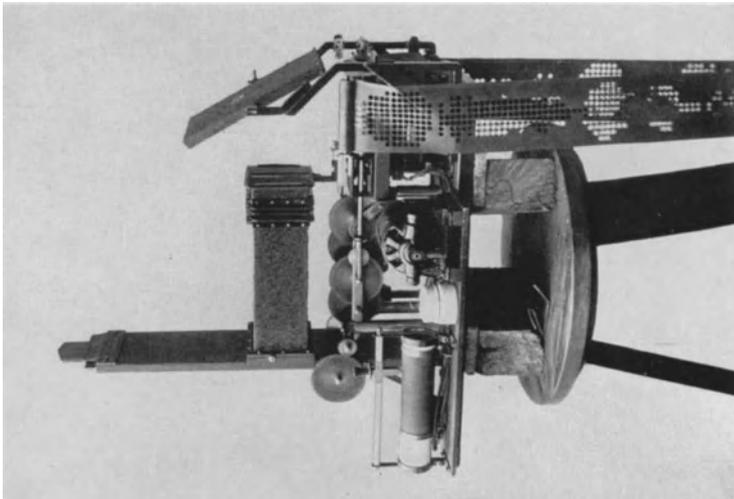
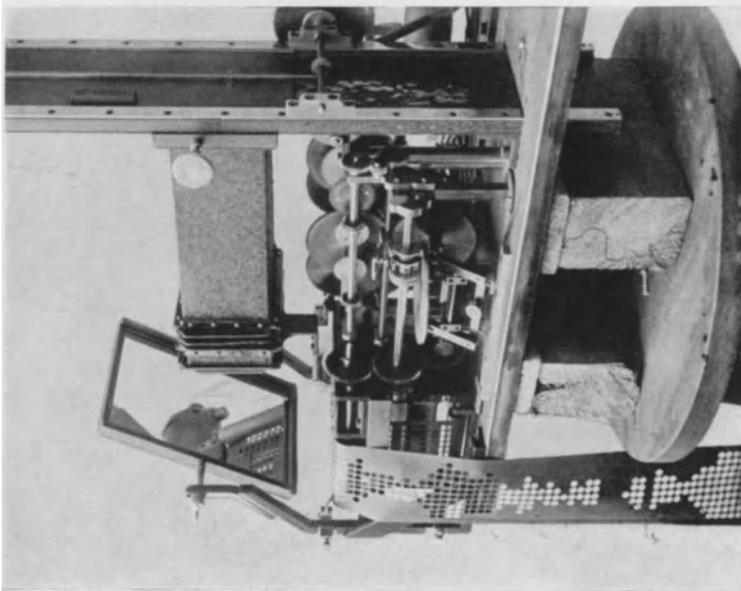


Abb. 30. Photomechanischer Periodograph I. Art.

rechts). Die Friktionsscheibe selbst ist mit der Führungswalze für die Kurvenbewegung und mit dem Antrieb der Platte gekoppelt, so daß

also ein festes Verhältnis zwischen den Geschwindigkeiten der Kurve (v), der Platte (u) und der Rotationsgeschwindigkeit der Friktionsscheibe besteht.

Die Gittergeschwindigkeit ist dann der Zeit proportional:

$$w = w' t,$$

und die Gitterphase ist mithin

$$r(t) = -\int_0^t w \, dt = -\frac{1}{2} w' t^2.$$

Damit wird für jede Periode $p_v = \frac{L}{v}$ der Haupteffekt 1. Ordnung

$$\psi_v^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{J c_v}{\pi} \int_{\frac{\eta}{u}}^{\frac{\eta+\delta}{u}} \cos \left\{ \nu \alpha (\xi - v t + s_v) - \beta \left(\xi - \frac{1}{2} w' t^2 \right) \right\} dt.$$

Durch die Transformation

$$t = \frac{\eta + \frac{\delta}{2}}{u} + \tau$$

läßt sich dieser Ausdruck in die Form

$$\psi_v^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{J c_v}{\pi} \int_{-\frac{\delta}{2u}}^{+\frac{\delta}{2u}} \cos \left\{ \nu \alpha \left(\xi - v \tau - \frac{v}{u} \left(\eta + \frac{\delta}{2} \right) + s_v \right) - \beta \left(\xi - \frac{1}{2} w' \tau^2 - \frac{w' \tau}{u} \left(\eta + \frac{\delta}{2} \right) - \frac{w'}{2u^2} \left(\eta + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right) \right\} d\tau$$

überführen. Für das quadratische Glied $\frac{1}{2} \beta w' \tau^2$ erhält man bei Beachtung der Integralgrenzen die Ungleichung

$$\frac{\beta w'}{2} \tau^2 \leq \frac{\beta w'}{2} \cdot \frac{\delta^2}{4u^2} = \frac{\pi w'}{4 \omega} \cdot \left(\frac{\delta}{u} \right)^2.$$

Ist w' , also die Geschwindigkeit der Schneckenbewegung, genügend klein, so kann nach Auflösung des Integranden $\sin \frac{\beta w'}{2} \tau^2$ vernachlässigt und $\cos \frac{\beta w'}{2} \tau^2 = 1$ gesetzt werden, und man erhält unter dem Integralzeichen mit $\eta' = \eta + \frac{\delta}{2}$

$$\cos \left\{ \xi \left(\nu \alpha - \beta \right) + \nu \alpha s_v - \tau \left(\nu \alpha v - \beta w' \frac{\eta'}{u} \right) - \nu \alpha v \frac{\eta'}{u} + \frac{\beta w'}{2} \left(\frac{\eta'}{u} \right)^2 \right\}.$$

Die bestimmte Integration ergibt sodann

$$\psi^{(1)}(\xi, \eta') = \frac{J c_v}{\pi} \cdot \frac{\delta}{u} \cdot \frac{\sin \frac{h \delta}{2u}}{h \delta} \cdot \cos \left\{ d \xi - \nu \alpha v \frac{\eta'}{u} + \frac{\beta w'}{2} \cdot \left(\frac{\eta'}{u} \right)^2 - k \right\}$$

mit

$$h = \nu \alpha v - \beta w' \frac{\eta'}{u}; \quad d = \nu \alpha - \beta \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{L}; \quad \beta = \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

und einer hier nicht interessierenden Phase k .

Mithin ergibt sich als Schar der Linien größter Schwärzung

$$d\xi - \nu \alpha v \frac{\eta'}{u} + \frac{\beta w'}{2} \left(\frac{\eta'}{u} \right)^2 = 2\pi \kappa + k \quad (\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

oder

$$\left(\eta' - \nu \cdot \frac{\alpha v u}{\beta w'} \right)^2 + 2 \frac{u^2 d}{\beta w'} \left(\xi - \frac{2\pi}{d} \kappa \right) = \text{const},$$

also eine Schar von Parabeln mit gemeinsamer, der Spaltrichtung paralleler Achse von der Lage

$$\eta' = \nu \cdot \frac{\alpha v u}{\beta w'} = \nu \cdot \frac{v u \omega}{w' L}$$

und den Scheitelabständen

$$D = \frac{2\pi}{|d|} = \frac{2\pi}{|\nu \alpha - \beta|} = \frac{p_\nu \omega}{|p_\nu - \omega|}. \quad \left(p_\nu = \frac{L}{\nu} \right)$$

Ist die Funktion $f(t)$ im Grundintervall L in eine FOURIERSche Reihe zerlegbar, so liefert jede Elementarwelle von der Periode $p_\nu = \frac{L}{\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) eine Parabelschar, die um so deutlicher im Schwärzungsbild hervortritt, je größer die Amplitude c dieser Welle ist. Die Achsen der zu den einzelnen FOURIER-Wellen gehörigen Parabelscharen sind untereinander und zur ξ -Achse (Spaltrichtung) parallel und liegen in regelmäßigen Abständen

$$A = \frac{v u \omega}{w' L} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{v u}{w'}$$

voneinander. Dabei ist noch die Feststellung wichtig, daß sich die Parabelscharen gegenseitig nicht merklich stören, wenn, wie schon oben als notwendig erkannt wurde, die Belichtungszeit $\tau = \frac{\delta}{u}$ mehrere Kurvenumläufe umfaßt. Die Deutlichkeit der Schar ist in der Achse selbst am größten, denn für

$$\eta' = \nu \cdot \frac{\alpha v u}{\beta w'}$$

ist offenbar

$$h = \nu \alpha v - \beta w' \frac{\eta'}{u} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\sin \frac{h \delta}{2u}}{\frac{h \delta}{2u}} = 1.$$

Die zur FOURIER-Welle ν -ter Ordnung gehörige Schar ist aber an denjenigen Stellen der Platte, die den Achsen der benachbarten Scharen angehören, schon nicht mehr merklich, denn für

$$\eta' = (\nu \pm 1) \frac{\alpha v u}{\beta w'}$$

ist

$$h = \nu \alpha v - \beta w' \frac{\eta'}{u} = \pm \alpha v.$$

Die genannte Bedingung

$$m_0 \frac{L}{v} \cong \frac{\delta}{u} \quad (m_0 > 3)$$

liefert aber

$$|h| = \alpha v = \frac{2\pi v}{L} \cong 2\pi m_0 \frac{u}{\delta},$$

so daß in der Tat

$$\left| \frac{h\delta}{2u} \right| \cong m_0 \pi,$$

der Dämpfungsfaktor also hinreichend klein wird.

Effekte bei entgegengesetzter Gitterbewegung. Die Belichtung der Platte in der Spaltlage $\eta' = 0$ erfolgt gemäß der obigen Koordinatendefinition um die Zeit $t = 0$, die der Ruhestellung des Gitters entspricht (Friktrionsrad im Mittelpunkt der Friktrionsscheibe). Läßt man den Vorgang schon früher beginnen, so wird das Friktrionsrad über den Mittelpunkt der Scheibe hinweg geschoben. Vor Erreichung des Mittelpunkts läuft dann das Gitter der Bewegung des Kurvenstreifens entgegengesetzt und mit abnehmender Geschwindigkeit. Auf der Platte werden sodann auch auf der anderen Seite der Linie $\eta' = 0$ Parabelscharen erzeugt, die zu den oben genannten genau symmetrisch liegen. Wir erinnern uns, daß von den beiden periodischen Effekten

$$\begin{aligned} & \cos \{ \xi (v\alpha - (2\mu - 1)\beta) + v\alpha q_v - (2\mu - 1)\beta r \} \\ & \cos \{ \xi (v\alpha + (2\mu - 1)\beta) + v\alpha q_v + (2\mu - 1)\beta r \} \end{aligned}$$

der erste bei gleicher, der zweite bei ungleicher Bewegungsrichtung von Gitter und Kurve wirksam wurde. Während wir also unter der Annahme gleicher Bewegungsrichtung nur das erste dieser beiden periodischen Glieder zu berücksichtigen hatten, gilt dies bei entgegengesetzter Bewegung für das zweite. Wir erhalten also auch an den Stellen

$$\eta' = -v \frac{\alpha v u}{\beta w'}$$

Parabeleffekte 1. Ordnung, deren Scheitelabstand aber ein anderer ist, nämlich

$$\frac{2\pi}{v\alpha + \beta} = \frac{p_v \omega}{p_v + \omega}.$$

Der Parameter der Parabeln, der bei gleichsinniger Bewegung

$$\frac{u^2 \alpha}{\beta w'} = -\frac{u^2}{w'} \left(1 - \frac{v\omega}{L} \right)$$

war, geht bei entgegengesetzter Bewegung in

$$-\frac{u^2}{w'} \left(1 + \frac{v\omega}{L} \right)$$

über. Falls $L > v\omega$, hat demnach der Parameter für die beiden zur Nulllinie symmetrischen Parabelscharen das gleiche Vorzeichen, die Scheitel zeigen also nach der gleichen Seite der ξ -Richtung.

Zerfallende Parabelschar. Wird $L < v \omega$, so ergibt sich aus den Formeln für den Parameter, daß auf der Seite gleicher Bewegungsrichtung die Äste der Parabeln nach der anderen Seite umschlagen. Ist genau $L = v \omega$, also die Gitterkonstante einer der FOURIER-Perioden der Kurve gleich, so zerfallen die Parabeln in Systeme von zur ξ -Achse parallelen Geraden. Die Scheiteldistanz wird dort unendlich groß.

Haupteffekte höherer Ordnung. Die bisher unberücksichtigten Glieder 3., 5., 7., ... Ordnung der Gitterfunktion erzeugen ihrerseits Parabelscharen, deren Dimensionen man dadurch erhält, daß man in den Formeln

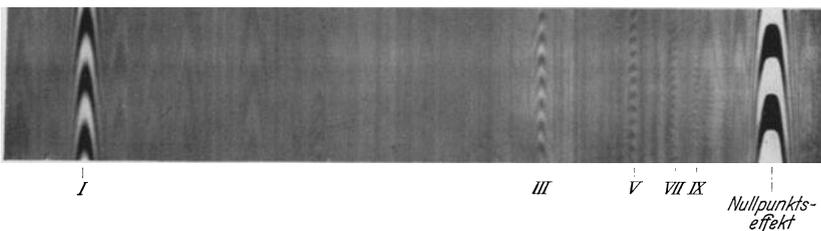


Abb. 31. Spektrum einer reinen Sinuswelle mit Haupteffekten 1., 3., 5., ... Ordnung.

für die Haupteffekte 1. Ordnung β mit $(2\mu - 1)\beta$ vertauscht. Die Achsen der Parabelscharen μ -ter Ordnung liegen also bei

$$\eta' = \pm \frac{v}{2\mu - 1} \cdot A,$$

ihre Amplituden sind $\frac{c_v}{2\mu - 1}$, die Scheiteldistanzen

$$D_{\mu, v} = \frac{2\pi}{(2\mu - 1)\beta \mp v\alpha} = \frac{p_v \omega}{(2\mu - 1)p_v \mp \omega} = \frac{1}{2\mu - 1} \cdot \frac{(2\mu - 1)p_v \cdot \omega}{(2\mu - 1)p_v \mp \omega}$$

sind $2\mu - 1$ mal so klein, wie die an der gleichen Stelle etwa auftretender Parabelscharen 1. Ordnung, die sich auf Wellen von der Länge $(2\mu - 1)p_v$ beziehen würden. Hierauf beruht die leichte Unterscheidbarkeit der Effekte verschiedener Ordnung. Abb. 31 zeigt die Haupteffekte 1., 3. und höherer Ordnung für eine einfache Sinuswelle.

Nullpunkts-effekt. In der Nähe des Punktes $\eta' = 0$, der dem Stillstand des Gitters oder dem Augenblick entspricht, in dem sich das Friktionsrädchen über den Mittelpunkt der Scheibe bewegt, gelten die Überlegungen nicht mehr, die zur Vernachlässigung der Terme

$$\frac{2c_0}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-1}}{2\mu-1} \int_{\frac{\eta}{u}}^{\frac{\eta+\delta}{u}} \cos(2\mu-1)\beta(\xi+r(t)) dt$$

führen, da ihre zeitliche Frequenz $(2\mu - 1)\beta \omega$ hier null wird, und da — weil alle Ordinaten der Beobachtungsfunktion als Lichtmengen natürlich positiv sind — das Ordinatenmittel c_0 nicht verschwinden kann.

Es ergeben sich also auch hier Parabeleffekte, deren Gleichungen wir offensichtlich erhalten, wenn wir in den alten Formeln $\nu = 0$ setzen. Die Scheiteldistanz ist für die Effekte 1. Ordnung ω , für die der höheren Ordnungen $\frac{\omega}{2\mu - 1}$. Es ist leicht einzusehen, daß sich die Effekte verschiedener Ordnung, die hier alle an der gleichen Stelle auftreten, in Form einer „Gitterfunktion“ übereinanderlagern. Das ist natürlich auch ohne jede Theorie verständlich, denn das Gesamtergebnis ist nichts anderes als das direkte Bild des langsam zum Stillstand gelangenden

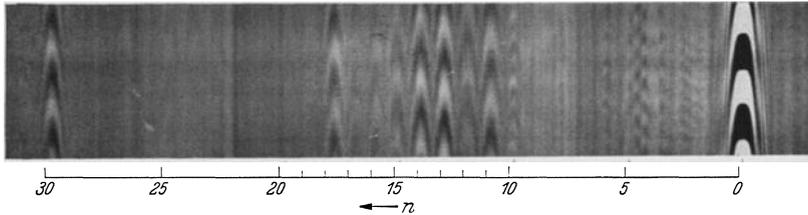


Abb. 32. Spektrum einer aus mehreren Sinuswellen zusammengesetzten Funktion; bis zur 30. Harmonischen. (n = Ordnung der FOURIER-Glieder. Die wahren Perioden liegen bei $n = 10,6, 12,8, 14,4, 18,0, 30,0$.)

und sich dann wieder in umgekehrter Richtung in beschleunigte Bewegung setzenden Gitters selbst. In den Photogrammen (s. Abb. 31, rechts) dient dieser, durch besondere Schärfe ausgezeichnete Nullpunkts-effekt zur Bestimmung des Nullpunkts ($\eta' = 0$) auf der Platte und daher als Bezugspunkt für die Ermittlung der Ordnung der FOURIER-Wellen, deren Abbilder die Parabelscharen 1. Ordnung sind.

In Abb. 32 ist das Parabelspektrum einer aus verschiedenen Sinuswellen zusammengesetzten Funktion wiedergegeben.

7. Photomechanische Analyse langer Beobachtungsreihen.

Bei sehr langen Beobachtungsreihen taucht eine Reihe neuer Fragen auf. Soll eine FOURIER-Entwicklung einer sehr langen Reihe ausgeführt werden, so kommt es häufig auf periodische Glieder sehr hoher Ordnung an. Zum Beispiel treten bei der Analyse von Gezeitenkurven persistente Perioden auf, deren Wellenlängen dicht benachbart sind, und die daher nur auf Grund hinreichend langer Reihen voneinander getrennt werden können. So erfordert z. B. die Trennung einer mondtägigen und einer sonnentägigen Gezeitenperiode eine Beobachtungsreihe, die mindestens eine volle „Schwebung“ dieser beiden Perioden umfaßt, damit die letzteren im Periodenspektrum getrennt als benachbarte FOURIER-Glieder erscheinen. Die erforderliche Länge der Beobachtungsreihe ist also mindestens 30 Tage, das sind bei stündlichen Ablesungen der Wasserstände 720 Beobachtungswerte. Noch längere Reihen sind erforderlich, wenn etwa die Trennung einer sonnentäglichen von einer sterntäglichen

Periode gefordert wird, wie dies bei der Analyse der Effekte der sog. „Höhenstrahlung“ der Fall ist. Auch hier werden stündliche Beobachtungen gemacht, die sich, falls die beiden Perioden trennbar sein sollen, über ein Jahr erstrecken müssen. Es sind also $24 \cdot 365 = 8760$ Einzelwerte erforderlich — die beiden fraglichen Perioden bilden sodann das 365. und 366. Glied der FOURIER-Entwicklung.

Natürlich lassen sich Apparate konstruieren, die eine Ausdehnung des photographischen Parabelspektrums bis zu einer derartig hohen Ordnung ermöglichen. Dabei wäre aber zu berücksichtigen, daß das photographische Bild in der η -Richtung sehr lang sein müßte, damit die Parabeleffekte verschiedener Ordnung hinreichend gut voneinander getrennt erscheinen. Die photographische Platte müßte dann durch einen Film ersetzt werden. Damit die Bedingung, daß die Belichtungszeit mehrere Umläufe des — in diesem Falle sehr langen — Kurvenstreifens umfassen soll, erfüllt bleibe, müßte die Bewegungsgeschwindigkeit der einzelnen Apparateile erhöht werden, da sonst die Aufnahmezeit für das gesamte Spektrum zu groß werden würde. Der andere Ausweg, die Belichtungszeit selbst durch Erweiterung des Spaltes zu vergrößern, läßt sich nur bis zu einem gewissen Grade benutzen, da die Spaltbreite δ sich nicht beliebig steigern läßt. Sie muß vielmehr so klein bleiben, daß die Deutlichkeit der Parabelscharen (die bei großer Zusammendrängung der „Spektrallinien“ sehr schmal und daher kleinparametrig gestaltet werden müßten) nicht leidet.

Nun sind die Fälle, in denen eine derartig weit getriebene FOURIER-Entwicklung nötig sein wird, verhältnismäßig selten. Der photomechanische Periodograph in seiner heute vorliegenden Form gestattet immerhin Entwicklungen bis zu 40—50, in extremen Fällen bis zu 100 Gliedern, was für die meisten vorkommenden Probleme völlig ausreicht. Es genügt also hier, anzugeben, daß eine Erweiterung des Spektralbereichs technisch möglich ist, wenn die oben angeführten Besonderheiten beachtet werden. In den meisten Fällen, wo lange Beobachtungsreihen vorliegen, ist die Existenz von kurzperiodischen *persistenten* Schwingungen wenig wahrscheinlich; eine Analyse, die bis zu den kleinsten Schwingungen herunterreicht, würde also meist das negative Resultat zeitigen, daß persistente Wellen großer Frequenz nicht vorhanden oder nicht merklich sind. Hingegen ist es niemals ausgeschlossen, daß solche Wellen als *quasipersistente* Schwingungen auftreten. Eine FOURIERSche Zerlegung über ein sehr langes Analysenintervall ist dann irreführend, da jede nicht persistente Welle dann in ein Spektralband aufgelöst wird, und auch mehrere, an verschiedenen Stellen des Analysenintervalls auftretende zeitweilige Schwingungen derselben Periode, aber verschiedener Phase, sich mehr oder weniger aufheben. In solchen Fällen ist eine Analyse in mehreren Teilen vorzuziehen, wobei noch die Art der Teilung willkürlich bleibt und von den Umständen abhängig gemacht werden muß.

Die Möglichkeit einer vollautomatischen Analyse mit dem Periodographen erster Art, die auf die etwaige Existenz quasipersistenter Perioden Rücksicht nimmt, besteht trotzdem, falls man die Analyse auf einem hinreichend langen Filmband registriert oder nur kurze Spektralabschnitte in einer Aufnahme untersucht. Man muß dann auf die Erfüllung der Bedingung

$$m_0 \cdot \frac{L}{v} \cong \frac{\delta}{u}$$

verzichten und im Gegenteil die Kassettengeschwindigkeit u so sehr vergrößern, daß die Belichtungszeit

$$\frac{\delta}{u} \ll \frac{L}{v}$$

wird. Es wird dann jeder Umlauf der Kurve einzeln registriert. Läßt man w' klein, so wird zu jedem Umlauf eine hinreichend konstante und

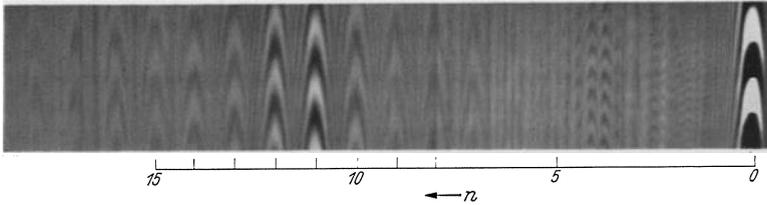


Abb. 33. Unharmonische Welle. Spektrum einer Sinusfunktion in einem Intervall, das $11\frac{5}{12}$ Wellenlängen umfaßt.

sich von Umlauf zu Umlauf nur wenig ändernde Gittergeschwindigkeit gehören. Auf dem Film wird also jetzt eine Anzahl von Abschnitten von der Breite $u \cdot \frac{L}{v}$ entstehen, deren jeder eine Art von „Phasendiagramm“ darstellt, erzielt mit einer bestimmten (durch die jeweilige Gittergeschwindigkeit w gegebenen) Versuchsperiode. Je größer die Abschnitte sich in der η -Richtung (d. h. in den Abbildungen waagrecht) ausdehnen, um so mehr wird der Charakter des Gesamtbildes als „Parabelspektrum“ verlorengehen, doch läßt sich dieser noch deutlich erkennen, wenn man die Breite der „Abschnitte“ nicht zu groß macht, wie dies z. B. in der Abb. 34 geschehen ist. Dort ist ein Versuch mit einer Kurve gemacht, die eine sin-Periode enthält, die aber in dem Analysenintervall L nicht ganzzahlig enthalten ist, und deren Spektrum in Abb. 33 auf normale Art photographiert wurde. Man erkennt deutlich, daß in jedem „Abschnitt“ die Linien größter Schwärzung linear verlaufen, aber entsprechend der Veränderlichkeit von w in jedem Abschnitt mit etwas verschiedener Neigung. Ferner erkennt man den Phasensprung, der nach jedem Kurvenumlauf, also beim Übergang von einem Abschnitt zum nächsten, eintritt. Trotz der mosaikartigen Feinstruktur des Bildes ist die Gesamtanordnung der einzelnen Effekte zu

einer Parabelstruktur entsprechend Abb. 33 deutlich erkennbar; da aber die frühere „Dämpfungsbedingung“ nicht erfüllt ist, durchdringen sich benachbarte Parabelscharen sichtlich. Sie sind aber dort am deutlichsten, wo die Neigung der Phasenlinien gegen die η -Richtung klein ist; man sieht auch, daß die Stelle des Spektrums, die der wahren Periode

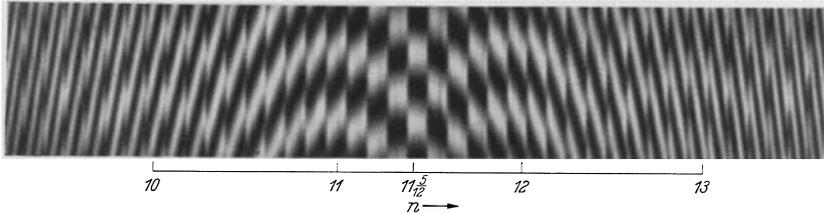


Abb. 34. Unharmonische Welle (Periode bei $n = 11 \frac{5}{12}$; s. Abb. 33) Feinstruktur. Die einzelnen Kurvenumläufe sind deutlich getrennt.

entspricht, an der also die Phasenlinien genau in der η -Richtung verlaufen, *zwischen* den Achsen der beiden deutlichsten Parabelscharen verläuft, wie es der Theorie zufolge auch zu erwarten ist.

8. Der Periodograph zweiter Art.

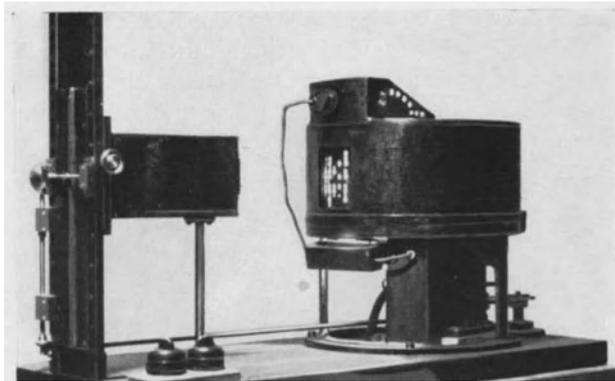
Die im vorigen Abschnitt beschriebene Methode, durch Aufnahme der Feinstruktur des photographischen Periodenbildes *Phasendiagramme* zu erzeugen, ist numerisch nur roh auswertbar, weil die Gittergeschwindigkeit, die zur Ermittlung der jeweiligen „Versuchsperiode“ bekannt sein muß, während jedes Kurvenumlaufs nicht streng konstant bleibt und auch ihrer Größe nach nur ungenau bekannt ist — das letztere insbesondere deswegen, weil die Steuerung der Gitterbewegung durch die Friktions-scheibe nicht exakt genug ist.



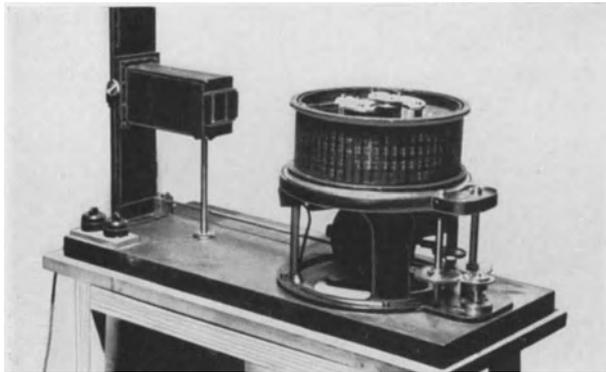
Abb. 35.
Periodograph II. Art (schematischer Grundriß).

Zur Erzeugung exakt auswertbarer Phasendiagramme ist deswegen von STUMPF ein *Periodograph zweiter Art* erbaut worden, der mit konstanter, durch auswechselbare Zahnräder genau regulierbarer Gittergeschwindigkeit in Verbindung mit einer exakten Führung des Kurvenstreifens arbeitet. Dieser Apparat leistet bei der Untersuchung langer Beobachtungsreihen auf quasipersistente Perioden ganz ausgezeichnete Dienste. Als Versuchsperioden dienen die FOURIER-Perioden, die zu einem mäßig langen Grundintervall von n Beobachtungen (z. B. $n = 120$) gehören.

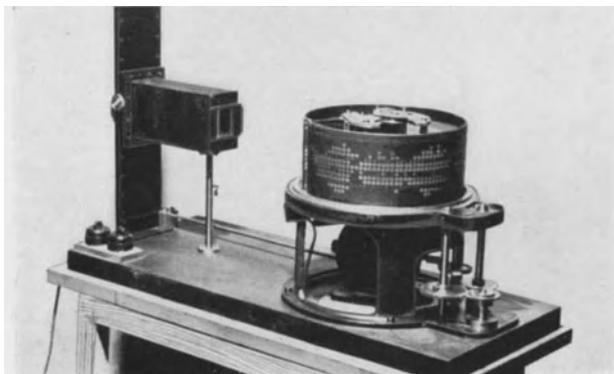
Der Apparat besteht aus zwei mit bestimmtem Umdrehungsverhältnis um die gleiche Achse rotierenden zylindrischen Trommeln K und G (Abb. 35).



a Gesamtbild.



b Ohne Verschlusskappe und Beleuchtung.



c Ohne Gitter, mit eingespanntem Lochstreifen.

Abb. 36a—c. Photomechanischer Periodograph II. Art.

G ist ein aus Metall geschnittenes Gitter, dessen Stäbe der Achse parallel verlaufen. Die Zahl der gleichmäßig über die Mantelfläche verteilten Stäbe sei s . K ist ein etwas kleinerer Zylinder aus mattiertem Glas, der an einer Stelle längs der Mantellinie aufgeschnitten ist und somit einen schmalen Spalt frei läßt. Der sehr lange Kurvenstreifen, in den die Beobachtungsreihe wie früher gelocht wird, kann bis zu 2400 Beobachtungswerte aufnehmen und trägt an seinen beiden Rändern außerdem noch Führungslöcher, die eine genaue Bewegung ermöglichen. Der Kurvenstreifen wird (das Ende der Beobachtungsreihe nach innen) zusammengerollt und auf eine Walze W_1 gesteckt, die sich im Innern des Glaszylinders befindet.

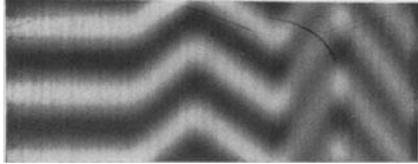


Abb. 37. Phasendiagramm einer längeren Kurve mit quasipersistenten, einander ablösenden Sinuswellen wechselnder Periode.

Der Anfang des Streifens wird vor Beginn der Aufnahme durch die Lücke gezogen, außen um den Glaszylinder herum und wieder durch die Lücke hinein und auf die Walze W_2 geführt. W_1 und W_2 sind mit dem Glaszylinder durch einen Boden fest verbunden und

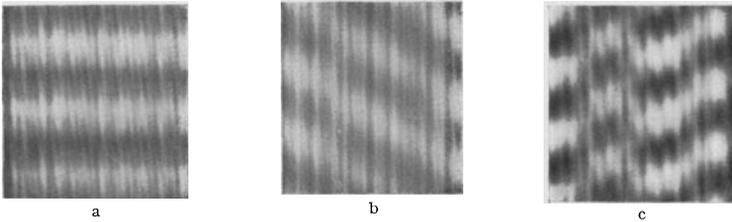


Abb. 38a–c. Lineare Phasendiagramme, aufgenommen mit dem Periodographen II. Art. a Periode = Versuchsperiode; b Periode $<$ Versuchsperiode; c Zwei Perioden sind der Versuchsperiode, benachbart ($<$ und $>$). Die Phasenlinien durchdringen sich.

rotieren mit ihm. Während des Aufnahmevorgangs ist Sorge getragen, daß — durch ein System von Führungswalzen, die in die Führungslöcher des Kurvenstreifens eingreifende Zapfen tragen — der Streifen langsam von W_1 ab- und auf W_2 aufgewickelt wird. Der Zylinderumfang ist so groß, daß genau n ($= 120$) Beobachtungswerte auf ihm Platz finden, und die Verschiebung des Streifens durch den Abwicklungsvorgang ist so geregelt, daß bei jedem Umlauf von K eine Verschiebung des Streifens um zwei Werte eintritt. (Umfaßt also die Gesamtreihe 2400 Werte, so ist, wenn bei Beginn der Aufnahme die ersten 120 Werte um den Zylinder liegen, nach $\frac{1}{2}$ ($2400 - 120$) $= 1140$ Umdrehungen des inneren Zylinders die Verschiebung so weit vorgeschritten, daß nunmehr die letzten 120 Werte die Stelle der ersten eingenommen haben). Während jedes Umlaufs von K gleiten also $120 + 2 = 122$ Beobachtungswerte an

dem feststehenden Aufnahmeapparat *A* vorbei. Da aber der Zylinder selbst nur 120 Werte faßt, so ist dafür gesorgt, daß an der Sprungstelle auf einen Wert y_ν immer $y_{\nu+120}$ folgt. Die Grundperiode der Analyse ist also genau $n = 120$. Das Gitter hat nun, wie schon erwähnt, s Stäbe, wobei zunächst $s = 60 + x$ gesetzt werden möge. Es sei

V die Umlaufszeit von K ,

W_ν die Umlaufszeit von G ,

und es ist dann möglich, durch Einschaltung verschiedener Zahnräder in den Mechanismus, der die Bewegung von K mit der von G verbindet, zu bewirken, daß

$$W_\nu = V \cdot \frac{60}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, r)$$



Abb. 39. Phasendiagramm der Sonnenfleckenrelativzahlen 1750-1930. Versuchswelle $12\frac{1}{2}$ Jahre. Man unterscheidet 3 Abschnitte:

- A: 1750—1793 Periode $9^{\text{a}},50$
- B: 1794—1830 „ $12^{\text{a}},54$
- C: 1831—1930 „ $11^{\text{a}},37$

Im Abschnitt B sind die Relativzahlen durchweg klein gewesen, daher die geringe Schwärzung des Negativs.

Wie groß muß dann s bzw. x sein, damit als Aufnahmeergebnis das Phasendiagramm der ν -ten FOURIER-Periode des Analysenintervalls entsteht? Offenbar ist dazu nötig, daß ν Gitterstäbe an *A* vorbeigehen, während gleichzeitig 120 Beobachtungswerte mit dem Zylinder *K* an der gleichen Stelle vorbeigeführt werden. Das letztere geschieht offensichtlich in der Zeit

$$V \cdot \frac{120}{122} = V \cdot \frac{60}{61}$$

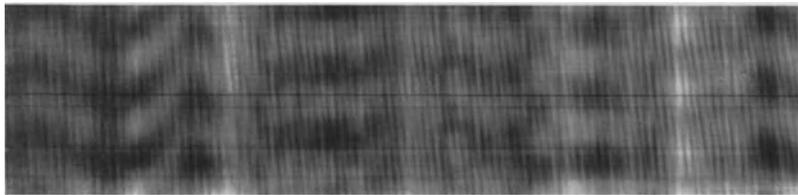


Abb. 40. Phasendiagramm einer meteorologischen Beobachtungsreihe: Luftdruck Hamburg von 1923—1930. Versuchswelle 24 Tage, Analysenintervall 120 Tage (fünfte Harmonische).

Während eines Gitterumlaufs W_ν werden $60 + x$ Gitterstäbe an *A* vorbeigeleitet, in der Zeit V also

$$\frac{\nu}{60} (60 + x) \text{ Gitterstäbe, in der Zeit } V \cdot \frac{60}{61} \text{ daher}$$

$$\frac{\nu}{61} (60 + x) \text{ Gitterperioden.}$$

Damit also die obige Forderung, daß in der gleichen Zeit 120 Beobachtungswerte und ν Gitterperioden an *A* vorbeigehen, erfüllt sei, ist es nötig,

$$x = 1$$

zu setzen. Das Gitter muß demnach 61 Stäbe besitzen.

In Abb. 36a—c ist der Apparat selbst gezeigt, in Abb. 37—40 sind verschiedene Analysenbeispiele abgebildet.

9. Das Polarisationsperiodometer.

Die bisher beschriebenen photomechanischen Periodographen haben den Vorteil, daß mit ihrer Hilfe periodographische Arbeiten jeder Art in qualitativer Hinsicht schnell und umfassend ausgeführt werden können. Der Periodograph erster Art liefert die spektrale Zerlegung einer Beobachtungsreihe in einem beschränkten Analysenbereich in FOURIER-Perioden, wobei die Amplituden der einzelnen Oberschwingungen durch die Schwärzungsintensität der auftretenden Parabelscharen ihrem Betrage nach gegeneinander abgeschätzt werden können. Die Aufnahme eines Parabelspektrums ersetzt also die rechnerische Durchmusterung einer gegebenen Beobachtungsreihe nach persistenten Perioden durch eine Periodogrammanalyse. Die Bestimmung der numerischen Werte der Amplituden, etwa durch eine photometrische Auswertung der Aufnahme, ist dagegen nur sehr ungenau möglich. Der Periodograph zweiter Art liefert für verschiedene Versuchsperioden die Phasendiagramme, und zwar, da hier exakte Bewegungsführung vorliegt, mit einiger und für viele praktische Zwecke ausreichende Sicherheit. Allerdings lassen sich hierbei auch nur *relative* Phasen messen, d. h., um auch absolute Phasen zu erhalten, ist es nötig, mindestens für *ein* Teilintervall den Phasenwert auch numerisch zu bestimmen, damit die Bezugslinie des Phasendiagramms festgelegt werden kann. Die Amplituden können, ebenso wie beim Periodographen erster Art, roh abgeschätzt werden.

Der hauptsächlichste Nachteil der photomechanischen Verfahren, der sowohl den Apparaten von DOUGLASS, wie denen von STUMPF anhaftet, ist demnach die Unmöglichkeit, genauere Bestimmungen der Amplituden zu erhalten, die über eine oberflächliche Schätzung hinausgehen. Theoretisch ist zwar die Möglichkeit einer photometrischen Auswertung der Aufnahmen gegeben — es sind aber zwei Gründe vorhanden, die der praktischen Verwirklichung dieser Möglichkeit entgegenstehen: Der erste Grund wurde schon weiter oben erwähnt: Der Grad der Schwärzung ist bei photographischen Effekten nicht immer in eine feste Beziehung zu Belichtungsintensität und Belichtungszeit zu bringen; die sog. Schwärzungsfunktion, die diese Beziehung regelt, ist vielmehr von der Beschaffenheit der Platte und der Art des Aufnahme- und Entwicklungsvorgangs abhängig; auch ist nicht immer die Gewähr vorhanden, daß während der gesamten Aufnahmezeit die benutzte Lichtquelle konstant bleibt. Der zweite Grund liegt darin, daß anstatt einer rein sinusförmigen Hilfsschwingung, wie sie in der numerischen Analyse benutzt wird, ein *Gitter* zur Verwendung kommt, das ja gleichzeitig eine ganze Reihe

solcher Hilfsschwingungen repräsentiert. Es hat sich zwar ergeben, daß die von den höheren Oberschwingungen der Gitterfunktion herührenden Effekte sich leicht von den Effekten der Hauptschwingung unterscheiden lassen. Immerhin verhindern diese Effekte höherer Ordnung, die sich den Haupteffekten überlagern, eine genaue photometrische Auswertung der letzteren. Es ist also gut, sich klar zu machen, daß die photomechanischen Periodographen, gleich, welcher Art, nur als Hilfsmittel anzusehen sind, mit denen sich der Forscher über die periodischen Eigenschaften einer Beobachtungsreihe einen schnellen und vollständigen *Überblick* verschaffen kann. Sie sind also ausgesprochene *Durchmusterungsapparate* und leisten in dieser Eigenschaft allerdings hervorragende Dienste.

Es ist jedoch nicht von der Hand zu weisen, daß das optische Interferenzprinzip Möglichkeiten in sich trägt, die weit über das hinausgehen, was durch die oben beschriebenen Apparate geleistet wird. Es läßt sich denken, das Interferenzprinzip so zu verwerten, daß exakte photometrische Messungen von Periodogrammgrößen, also sowohl von Amplituden und Phasen, als auch von den rechtwinkligen Periodogrammkomponenten bzw. FOURIER-Konstanten selbst möglich werden. Der Verfasser hat einen solchen Apparat entworfen, der zur Zeit im Institut für Periodenforschung (Berlin) gebaut wird. Dieses Instrument, das als „*Polarisationsperiodometer*“ bezeichnet werden könnte, vermeidet die beiden oben aufgeführten Nachteile der photomechanischen Periodographen völlig: Auf die Verwendung der Photographie, die eine genaue Amplitudenmessung unmöglich macht, wird zugunsten der direkten photometrischen Messung der Interferenzeffekte verzichtet; ferner wird auch als optische Hilfsschwingung nicht die Gitterabblendung, sondern die gemäß einem Sinusgesetze erfolgende Abblendung mit Hilfe von Polarisationsprismen verwendet.

Die Beobachtungsreihe, deren FOURIER-Konstanten zu bestimmen sind, möge wiederum in der üblichen Weise durch eine gestanzte Schablone dargestellt werden, die um eine (von innen zu beleuchtende) aus mattem Glas gefertigte transparente Trommel herumgelegt werde. Um das langwierige Stanzen der Kurvenstreifen überflüssig zu machen, kann auch folgende Einrichtung vorgesehen werden: Die Trommel, die in diesem Falle aus Metall bestehe, enthalte auf ihrem Mantel eine Reihe von gleichabständigen und gleich breiten Schlitzen, die dicht nebeneinander liegen und einzeln durch Schieber bis zu einer bestimmten Höhe geöffnet werden können. Eine Skala gestattet, jeden Schlitz so weit zu öffnen, daß seine Länge dem jeweils gewünschten Beobachtungswert entspricht, die durch den Schlitz heraustretende Lichtmenge also dem zugehörigen Beobachtungswert proportional ist. Die Trommel drehe sich mit sehr großer Geschwindigkeit um ihre (senkrechte) Achse (Abb. 4r).

In der Bildebene B einer Zylinderlinse C , deren Achse der Trommelachse parallel, also auch senkrecht steht, wird nun eine optische Abbildung (sweep) des jeweils an der Zylinderlinse vorbeilaufenden „Beobachtungswertes“ erzeugt. An einer bestimmten Stelle der Bildebene (F) ist also die Helligkeit (und zwar längs einer durch F gehenden, zur Trommelachse parallelen Linie) in jedem Augenblick t der Funktion

$$f(\xi + vt) \tag{3}$$

proportional, wenn die Beobachtungsfunktion im Grundintervall (Trommelumfang $u = 2\pi$) durch die Entwicklung

$$f(x) = c_0 + \sum_{\nu=1}^n c_\nu \cos \nu(x + q_\nu)$$

dargestellt wird. Speziell ist also die Beleuchtung an zwei Punkten P_1 und P_2 der durch F gehenden Ordinate der Bildebene gleich und,

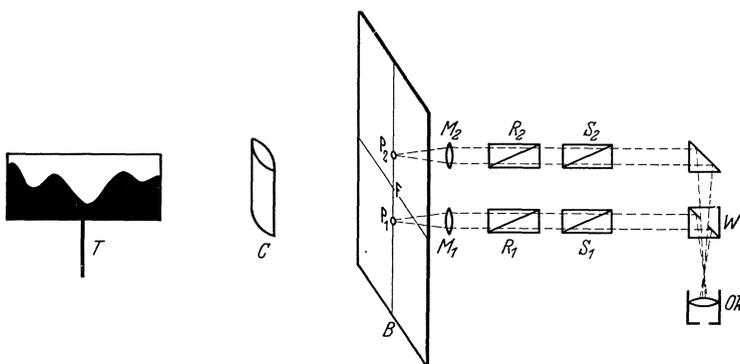


Abb. 41. Polarisationsperiodometer (schematisch).

bis auf eine von der Helligkeit der Lichtquelle abhängige multiplikative Konstante, durch den Ausdruck (3) darstellbar. Durch eine in P_1 angebrachte Blende werde nun ein sehr kleines kreisförmiges Stück aus der Bildebene herausgeblendet und durch ein Mikroskopobjektiv M_1 in die Gesichtsebene eines orthoskopischen Okulars Ok projiziert. Unterwegs gehe das von P_1 ausgehende Lichtbündel durch zwei Nikols R_1 (Polarisator) und S_1 (Analysator) und werde an der reflektierenden Diagonalfäche eines Photometerwürfels W um 90° abgelenkt. Der Polarisator R_1 stehe fest, der Analysator S_1 kann um seine (horizontale) Achse meßbar gedreht werden. Zunächst sei angenommen, daß die beiden Nikols im gleichen Positionswinkel stehen; dann wird alles Licht durchgelassen. Dreht sich nun die Trommel sehr schnell, so empfindet das Auge eine Helligkeit, die dem Mittelwert der Beobachtungsreihe

$$J_0 = \int_0^{2\pi} f(x) dx = 2\pi c_0$$

proportional ist.

Eine entsprechende Einrichtung ist nun vor P_2 angebracht. Hier geht das Licht ebenfalls durch ein Objektiv M_2 , sodann durch zwei NIKOLSche Prismen R_2 und S_2 und werde schließlich durch ein total reflektierendes Prisma ebenfalls in die Gesichtsebene des Okulars gebracht und dort abgebildet, wobei es noch den Photometerwürfel zu passieren hat. Befindet sich nun in dem spiegelnden Belag der Diagonalfäche des Photometerwürfels eine kleine Öffnung, so erscheint das Bild von P_2 , durch das Okular betrachtet, im Innern dieser Öffnung, während das Bild von P_1 in dem ringförmigen Gebiet um die Öffnung herum sichtbar ist. Bis auf Unterschiede, die durch etwaige Verschiedenheiten der Lichtabsorption auf beiden Wegen entstehen, ist also, solange sich auch die Nikols R_2 und S_2 in der Normalstellung (völlige Durchsichtigkeit) befinden, die beobachtete Helligkeit innerhalb der Öffnung des Photometerwürfels und in dem Ringgebiet außerhalb der Öffnung gleich — völlige Gleichheit läßt sich nötigenfalls durch Anbringung eines photometrischen Keils an einer geeigneten Stelle eines der beiden Lichtwege erzielen.

Nun werde der Polarisator R_2 durch einen mit dem Trommelantrieb in Verbindung stehenden Mechanismus gleichfalls in sehr schnelle Umdrehung um seine in Richtung des Lichtweges liegende optische Achse versetzt. Beträgt die Umdrehungsgeschwindigkeit von R_2 das $\frac{\nu}{2}$ -fache der Trommelumdrehung, so beobachtet man im inneren Teil des Gesichtsfeldes eine Helligkeit proportional

$$J_\nu = \int_0^{2\pi} f(x) \cos^2 \frac{\nu}{2} x \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} f(x) \, dx + \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x \, dx \right\}.$$

Dreht man dagegen den Analysator S_2 um 45° , so erhält man

$$J'_\nu = \int_0^{2\pi} f(x) \cos^2 \frac{\nu}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} f(x) \, dx + \int_0^{2\pi} f(x) \sin \nu x \, dx \right\}.$$

Dreht man auch den Analysator S_1 um 45° , so erhält man im äußeren Teil (Ringgebiet) des Gesichtsfeldes

$$J'_0 = J_0 \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{J_0}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx.$$

Demnach ist der Unterschied zwischen den Helligkeiten im inneren und äußeren Teil des Gesichtsfeldes

$$J_\nu - J'_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x \, dx$$

bzw.

$$J'_\nu - J'_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \nu x \, dx.$$

Man kann mit Hilfe dieser Einrichtung nunmehr folgende Aufgaben lösen:

1. Man dreht S_1 so lange, bis gleiche Helligkeit in beiden Teilen des Gesichtsfeldes herrscht. Ist der Positionswinkel von S_1 unter diesen Umständen φ , so ist im Ringgebiet

$$J_\varphi = J_0 \cos^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = J_v (J'_v)$$

also

$$\frac{J_v}{J_0} \left(\text{bzw. } \frac{J'_v}{J_0}\right) = \frac{1}{2} (1 + \sin 2\varphi); \quad \sin 2\varphi = \frac{J_v - J'_v}{J_0} \text{ bzw. } \frac{J'_v - J_0}{J'_v}.$$

Da kleine Helligkeiten genauer miteinander vergleichbar sind als große, so wird man dies Verfahren nur dann anwenden, wenn $J'_0 < J_v$ bzw. $J'_0 < J'_v$. Andernfalls dreht man nicht S_1 , sondern S_2 , um gleiche Helligkeit zu erzielen, und erhält

$$J'_0 = J_v \cos^2 \varphi \quad \text{bzw.} \quad J'_0 = J'_v \cos^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Amplitude und Phase einer FOURIER-Periode ermittelt man direkt, indem man S_2 solange dreht, bis (im inneren Gesichtsfeldteil) das Minimum der Helligkeit erreicht ist. Der Drehungswinkel, der dazu nötig ist, ergibt die Phase; die Amplitude erhält man (immer im Verhältnis zu J'_0 , das als bekannt vorausgesetzt werden darf), indem man S_1 nachdreht, bis wieder gleiche Helligkeit hergestellt ist.

Die hier geschilderte Konstruktion des Apparates erlaubt die Bestimmung der numerischen Werte von FOURIER-Konstanten durch direkte visuelle photometrische Messungen. Eine technische Schwierigkeit, die allerdings zu überwinden sein dürfte, liegt in den erforderlichen Rotationsgeschwindigkeiten, die sehr groß sein müssen, damit das Auge den periodischen Lichtwechsel nicht mehr als solchen empfindet. Andernfalls entsteht ein „Flimmern“, das die Messung der Integralhelligkeiten erschwert und das Auge des Beobachters zu sehr anstrengt. Die erforderlichen Umdrehungszahlen, die insbesondere für den Polarisator R_2 sehr groß sind, wenn die Messung von FOURIER-Konstanten hoher Ordnung verlangt wird, lassen sich aber, wenn die rotierenden Apparateile gut und leicht beweglich gelagert sind (Kugellager), mit Hilfe eines Elektromotors von hoher Umdrehungszahl erreichen.

Mit wesentlich geringeren Umdrehungsgeschwindigkeiten kommt man aus, wenn an Stelle der visuellen Messung die auch sehr viel genauere *lichtelektrische* Messung eingeführt wird.

Literaturverzeichnis.

1. ABBOT, C. G.: Studies of weather periodicities. *Science* Bd. 79.
2. — The periodometer, an instrument for finding and evaluating periodicities in long series of observations. *Smiths. Misc. Coll. Bd. 87* (1932).
3. — Periodicities in solar variation. *Smiths. Misc. Coll. Bd. 87 Nr. 9* (1933).
4. — Sunspots and weather. *Smiths. Misc. Coll. Bd. 87 Nr. 18* (1933).
5. — and A. M. BOND: Periodicity in solar variation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. Bd. 19 Nr. 3* (1933).
6. ACKERL, F.: Untersuchungen über die Genauigkeit des Harmonischen Analysators von Dr. O. MADER. *Z. Instrumentenkde. Bd. 48* (1928).
7. ALT, E.: Die Ableitung von Näherungswerten der harmonischen Konstituenten. *Meteorol. Z. 1911*.
8. ALTER, D.: Equations extending SCHUSTERS periodogram. *Astronomic. J. Bd. 36* (1925).
9. — Application of SCHUSTERS periodogram to long rainfall records. *Month. Weath. Rev. Bd. 52* (1924).
10. — Periodogramme langer Niederschlagsreihen seit 1748 (Besprechung von J. BARTELS). *Meteorol. Z. 1925*.
11. — The criteria of reality in the periodogram. *Month. Weath. Rev. Bd. 54* (1926).
12. — Investigations of rainfall periodicities between $1\frac{1}{6}$ and $2\frac{1}{2}$ years by use of SCHUSTERS periodogram. *Month. Weath. Rev. 1927*.
13. — A new analysis of the sunspot numbers. *Month. Weath. Rev. 1928*.
14. — Analysis of the light variations of W Cygni. *Astronomic. J. Bd. 40* (1930).
15. — Correlation periodogram analysis of R Scuti. *Astronomic. J. Bd. 42* (1933).
16. — Some results of cycle analysis of rainfall. *Bull. Amer. Met. Soc. Bd. 14* (1933).
17. — An extremely simple method of periodogram analysis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. Bd. 19* (1933).
18. — Correlation periodogram investigation of English rainfall. *Month. Weath. Rev. Bd. 61* (1933).
19. ARMAGNAT: (Wechselstromanalyse.) *J. Physique Bd. 1* (1902).
20. ARNOLD: Wechselstromtechnik. Berlin: Julius Springer.
21. BALL, W. L.: A simple apparatus for approximate harmonic analysis and for periodic measurements. *Proc. Roy. Soc., Lond. A Bd. 99* (1921).
22. BANACHIEWICZ, T.: On a certain application of Sir ARTHUR SCHUSTERS periodograms. *Bull. Acad. Polon. Sci. Krakau 1931*.
23. BARTELS, J.: On the determination of minute periodic variations. *Quart. J. Roy. Met. Soc., Lond. Bd. 52* (1926).
24. — Veranschaulichung beobachteter Perioden und ihrer Genauigkeit. *Z. Geophysik Bd. 3* (1927).
25. — Bemerkungen zur praktischen harmonischen Analyse. *Gerlands Beitr. Bd. 28* (1930).
26. — Random fluctuations, persistence and quasi-persistence in geophysical and cosmical periodicities. *Terr. Magn. Bd. 40* (1935).
27. — Zur Morphologie geophysikalischer Zeitfunktionen. *Sitz.-Ber. preuß. Akad. Wiss. (Physik. Kl.) Berlin 1935*.

28. BAUR, F.: Ein Beitrag zur praktischen Anwendung der Korrelationsmethode. Meteorol. Z. 1921.
29. — Die Veränderlichkeit der Temperatur aufeinanderfolgender Monate und die periodischen Schwankungen der Jahrestemperatur in Deutschland. Meteorol. Z. 1922.
30. — Die 11jährige Temperaturperiode in Europa in ihrem Verhältnis zur Sonnenfleckenperiode. Meteorol. Z. 1922; Mitt. Wetter- u. Sonnenwarte St. Blasien Heft 2.
31. — Bemerkungen zur Aufsuchung von Perioden in Witterungserscheinungen. Meteorol. Z. 1923.
32. — Kriterien des Zufalls für langjährige meteorologische Beobachtungsreihen. Meteorol. Z. 1923.
33. — Witterungsperioden I. Mitt. Wetter- u. Sonnenwarte St. Blasien. Heft 3 (1924).
34. — Die Verwendung der Korrelationsmethode in der Meteorologie. Meteorol. Z. 1925. Ergänzende Mitt. Meteorol. Z. 1926.
35. — Bemerkungen zur Periodenforschung. Wetter 1925.
36. — Die Fortschritte in der Bearbeitung des Problems der langfristigen Wettervorhersage. Naturwiss. 1927.
37. — Zur Frage der Symmetriepunkte im Luftdruckgang. Ann. Hydrogr., Berlin 1927.
38. — Das Periodogramm hundertjähriger Temperaturbeobachtungen in Berlin. Meteorol. Z. 1927.
39. — Korrelationsrechnung. Math.-Phys. Bibl. Bd. 75. Leipzig: B. G. Teubner 1928.
40. — Der gegenwärtige Stand der meteorologischen Korrelationsforschung. Meteorol. Z. 1930.
41. BEATTIE: Harmonic analysis diagrams. Electrician Bd. 67 (1911).
42. — Resonance method of harmonic analysis. Electrician Bd. 69 (1912).
43. BERNSTEIN, F.: Über die numerische Ermittlung verborgener Periodizitäten. Z. angew. Math. Mech. 1927. — Forschg. u. Fortschr. Bd. 8 (1932).
44. BERNSTEIN, N.: Analyse aperiodischer trigonometrischer Reihen. Z. angew. Math. Mech. 1927.
45. BESSON, L.: On the comparison of meteorological data with results of chance. Month. Weath. Rev. 1920.
46. BILT, J. VAN DER: Some remarks on the practice of periodogram analysis. Bull. Astr. Inst. Netherl. 1928.
47. BÖRGEN, C.: Die Harmonische Analyse der Gezeitenbeobachtungen. Ann. Hydrogr., Berlin 1884.
48. — (Weitere Arbeiten über Gezeitenanalyse.) Ann. Hydrogr., Berlin 1884.
49. — Über eine neue Methode, die harmonischen Konstanten abzuleiten. Ann. Hydrogr., Berlin 1894.
50. BROOKS, C. E. P.: A difference-periodogram. Proc. Roy. Soc., Lond. A Bd. 105.
51. BROWN, E. W.: A simple and inexpensive apparatus for tidal analysis. Amer. J. Sci. (4) Bd. 39 (1916).
52. BRUNS, H.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig: B. G. Teubner 1906.
53. — Über die Analyse periodischer Vorgänge. Astronom. Nachr. Bd. 188 (1911).
54. BRUNT, D.: An investigation in periodicities in rainfall, pressure and temperature at certain European stations. Quart. J. Roy. Met. Soc. Bd. 53 (1927).
55. — Harmonic analysis and the interpretation of the results of periodogram investigations. Mem. Roy. Met. Soc. Bd. 2 Nr. 15.
56. BURKHARDT, H.: Oszillierende Funktionen. Jber. math. Vereinigg. Bd. 10.
57. — Trigonometrische Interpolation. Enzykl. math. Wiss. Bd. 2 Teil 1 Heft 7/8.

58. BUSH, V.: A simple harmonic analyser. J. Amer. Inst. electr. Engr. Bd. 39 (1920).
59. — The differential analyser. J. Franklin Inst. Bd. 212 Nr. 4 (1931).
60. CARSE, G. A. and G. SHEARER: A course in FOURIERS analysis and periodogram analysis. Math. Tracts Nr. 4. Edinburgh 1915.
61. CHARLIER, C. V. L.: Grundzüge der mathematischen Statistik. Lund 1920.
62. CHUBB, L. W.: The analysis of periodical waves. Electr. J. Bd. 11 (1914).
63. CLAYTON, H. H.: A proposed new method of weather forecasting by analysis of atmospheric conditions into waves of different lengths. Month. Weath. Rev. 1907.
64. COMRIE, L. J.: The Hollerith and Powers tabulating machines. Office Machinery Users Assoc. Trans. 1929/30.
65. CONRAD, V.: Zur Berechnung höherer Glieder der FOURIERSchen Reihen. Meteorol. Z. 1919.
66. — Der Expektanzbegriff von ARTHUR SCHUSTER. Meteorol. Z. 1924.
67. — Vereinfachungen der Methode zur Berechnung von Korrelationsfaktoren. Meteorol. Z. 1924.
68. CORADI, G.: Der harmonische Analysator mit einer Theorie desselben. Zürich 1894.
69. COUDRES, TH. DES: Theoretische Grundlage für einen harmonischen Wechselstromanalysator. Verh. physik. Ges. Berlin Bd. 17 (1898). — Z. Instrumentenkd. Bd. 19 (1899).
70. — Eine direkte Methode für Wechselstromanalyse. Elektrotechn. Z. Bd. 21 (1900); Z. Instrumentenkd. Bd. 21 (1901).
71. COURANT, R. u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik I. Berlin: Julius Springer 1931.
72. CRAIG, J. I.: The periodogram and method of correlation. Rep. Dundee meeting Brit. Assoc. Adv. Sci. Bd. 82 (1916).
73. — A new method of discovering periodicities. Month. Not. Roy. Astron. Soc. Bd. 76 (1916).
74. CURTISS, R. H.: The light curve of R Scuti 1911—31. Publ. Obs. Univ. Michigan Bd. 4 (1932).
75. CZUBER, E.: Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig: B. G. Teubner 1891.
76. — Wahrscheinlichkeitsrechnung I. Leipzig: B. G. Teubner 1914.
77. — Die statistischen Forschungsmethoden. Wien: L. W. Seidel & Sohn 1921.
78. DALE, J. B.: The resolution of a compound periodic function into simple periodic functions. Month. Not. Roy. Astron. Soc. Bd. 74 (1914).
79. DARWIN, G. H.: On an apparatus for facilitating the reduction of tidal observations. Proc. Roy. Soc., Lond. A Bd. 52 (1893).
80. — u. S. S. HOUGH: Bewegungen der Hydrosphäre. Enzykl. math. Wiss. Bd. 6 Teil 1 B Heft 1 (1908).
81. DEFANT, A.: Witterungsperioden. Wetter 1925.
82. — Wellen im Luftmeer. Meteorol. Z. 1926.
83. DELLENBOUGH jr., F. S.: An electromechanical device for rapid schedule harmonic analysis. Amer. Inst. electr. Engr. Bd. 40 (1921).
84. DIEBITSCH, J. u. H. ZUHRT: Klanganalyse durch Steuerung des Sättigungsstroms einer Zweielektrodenröhre. Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 9 (1932).
85. DIETSCH, G. u. W. FRICKE: Ein photoelektrisch-mechanisches Verfahren zur harmonischen Analyse periodischer Funktionen. Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 9 (1932).
86. — u. B. ROTZEIG: Eine neue Methode zur exakten Berechnung der FOURIER-Koeffizienten. Gerlands Beitr. Bd. 38.
87. DIETZSCHOLD, G.: Über Spiegelpunkte in den langjährigen Aufzeichnungen meteorologischer Elemente. Meteorol. Z. 1932.

88. DILGER, F.: Die 11jährige thermische Welle auf der Erdoberfläche. Gerlands Beitr. Bd. 30 (1931).
89. DOUGLASS, A. E.: A photographic periodogram of the sun-spot numbers. Astrophysic. J. Bd. 40 (1914).
90. — An optical periodograph. Astrophysic. J. Bd. 41 (1915).
91. — An automatical optical periodograph. Publ. Astr. Soc. Pacific Bd. 31 (1919).
92. — Climatic cycles and tree-growth, Bd. I—III, Carnegie-Inst. Washington 1919—36.
93. DUVAL, C. R.: Memorandum on the uncertainty in the amplitudes and phase-angles of FOURIER terms. Terr. Magn. Bd. 32 (1927).
94. — Computation of FOURIER terms. Terr. Magn. Bd. 32 (1927).
95. EAGLE, A.: A practical treatise on FOURIERs theorem and harmonic analysis for physicists and engineers. London: Longman, Green & Co. 1925.
96. EGERSDÖRFER, L.: Zur Theorie des Korrelationskoeffizienten. Dtsch. meteorol. Jb. Bayern 1925.
97. — Anleitung zur Darstellung von Häufigkeitskurven nach BRUNS. Meteorol. Z. 1929.
98. ENNIS, C. C.: On the revision and correction of FOURIER-analysis computations. Terr. Magn. Bd. 32 (1927).
99. ERTEL, H.: Advektiv-dynamische Theorie der Luftdruckschwankungen und ihrer Periodizitäten. Veröff. meteorol. Inst. Berlin 1936.
100. EXNER, F. M.: Der Korrelationsfaktor und seine Verwendung in der Meteorologie. Meteorol. Z. 1910.
101. FISCHER, A.: Vollautomatische Massenmultiplikationen im Hollerith-Digit-Staffelverfahren auf der BK-Tabelliermaschine. Hollerith-Nachr. 63. Berlin 1936.
102. FISCHER-HINNEN: (Über Harmonische Analyse.) Elektrotechn. Z. Bd. 22 (1901).
103. FOSTER, G. A. R.: The grating-periodograph for the analysis of series of observations for hidden periodicities. J. Textile Ind. Bd. 21 Nr. 1. Manchester 1930.
104. FRENKEL, E.: Untersuchungen über kurzperiodische Schwankungen der Häufigkeit der Sonnenflecken. Publ. Sternw. Zürich Bd. 5 (1913).
105. FUHRICH, J.: Über die numerische Ermittlung von Periodizitäten und ihre Beziehung zum Zufallsgesetz. Statisticky Obzor. Prag 1933.
106. GALITZIN, B.: Über seismometrische Beobachtungen. C. R. Com. Sism. Bd. 1.
107. — Zur Frage der Analyse zusammengesetzter harmonischer Schwingungen. Bull. Acad. Imp. St. Petersburg 1913.
108. GALLE, A.: Mathematische Instrumente. Leipzig: B. G. Teubner 1912.
109. GERMANSKY, B.: Über ein optisches Verfahren zur FOURIER-Analyse. Ann. Physik (5) Bd. 7 (1930).
110. GIBB, D.: The periodogram analysis of the variations of SS Cygni. Month. Not. Roy. Astron. Soc. Bd. 74 (1914).
111. GLOGOWSKI, A.: Beiträge zur Auffindung verborgener Periodizitäten. Münster i. W.: Helios-Verlag 1929.
112. GOETZ, H.: Über ein Verfahren zur Periodenanalyse von Kurven. Dtsch. meteorol. Jb. Bayern 1924.
113. GRABOWSKI: (Theorie des HENRICISCHEN Analysators.) Wien. Sitz.-Ber. math.-naturwiss. Kl. Bd. 110.
114. GRIESSBACH, K.: Korrelation von Luftdruckwellen der Nordhemisphäre. Veröff. geoph. Inst. Leipzig 2. Serie Bd. 6 Heft 1.
115. GRIX, W.: Geometrische Analyse periodischer Schwingungen. Helios 1921.

116. HANISCH, B.: Über die Bestimmung von Sonnenfleckenperioden nach der FUHRICHSCHEN Methode. Gerlands Beitr. Bd. 46 (1935).
117. HÄNSCH, F.: Über die 24tägige Welle des Winters 1923/24. Veröff. geoph. Inst. Leipzig, 2. Serie Bd. 5 Heft 3 (1932).
118. HEIDKE, P.: Das CORNUSCHE Kriterium. Meteorol. Z. 1923.
119. HENRY, E. V.: The analysis of simple periodic curves by a projection method with special references to estuary tidal problems. Physic. Rev. (2) Bd. 19 (1922).
120. HESSEN, K.: Ein Apparat zur Auswertung von Gezeitenkurven. Ann. Hydrogr. Berlin 1913.
121. — Über die BÖRGENSCHEN Methode der harmonischen Analyse der Meeresgezeiten. Ann. Hydrogr. Berlin 1920.
122. HIRAYAMA, S.: Note on the method to find the period of a periodic function from equidistant observations. Tokyo math. phys. Soc. Proc. (2) Bd. 7 (1916).
123. Hollerith-Ges.: 25 Jahre Deutsche Hollerith-Maschinen-A. G. Festschrift. Berlin-Lichterfelde 1935.
124. HOLTZHEY, R.: Eine Ausgleichsbetrachtung. Z. ang. Met. Bd. 48 (1931).
125. HOPFNER, F.: Über die praktische Verwendbarkeit einer neuen Methode zur Aufsuchung der Periode einer periodischen Erscheinung. Wien. Sitz.-Ber. Bd. 119 II a.
126. HOUSTON and KENNELLY: Simple approximative method of determining harmonics of graphical waves. Electr. Wld., N. Y. Bd. 31 (1898). Ref. Z. Instrumentenkde. Bd. 19 (1899).
127. JAHNKE, E. u. F. EMDE: Funktionentafeln. Leipzig: B. G. Teubner 1933.
128. KELLER, L.: Die Periodographie als statistisches Problem. Beitr. Phys. fr. Atm. Bd. 19 (1932).
129. KELVIN: (Über Harmonische Analyse.) Proc. Roy. Soc., Lond. Bd. 24 (1876), Bd. 27 (1878).
130. KHINTCHINE, A.: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erg. Math. Bd. 2 Nr. 4 (1933).
131. KIMURA, H.: On the harmonic analysis of sun-spot relative numbers. Month. Not. Roy. Astron. Soc. Bd. 73 (1913).
132. — Harmonic analysis of sun-spot numbers. Tokyo math. phys. Soc. Proc. (2) Bd. 7 (1916).
133. KINTNER: Tables for computing to 17 harmonics. Electr. Wld., N. Y. Bd. 43 (1904).
134. KIROFF, K. T.: Bemerkungen über die Zerlegung zusammengesetzter Kurven. Meteorol. Z. 1929.
135. KLEIN, F.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. I—III. Berlin: Julius Springer.
136. — u. SOMMERFELD: Theorie des Kreisels. (S. 678: Analyse von Polschwankungen.)
137. KLOTZ, O.: Analysis of earthquake waves. Trans. Roy. Soc. Canada Bd. 14 (1921).
138. KOBAYASHI, M.: An electric frequency analyser. Electr. Communic. Bd. 8 (1930).
139. KÖPPEN, W.: Graphische Glättung von Zahlenreihen. Meteorol. Z. 1919.
140. KRASSOWSKI, J.: Analyse, au moyen de la méthode de M. SCHUSTER, des périodes de la variation de la latitude. Bull. internat. Acad. Sci. Cracovie 1909.
141. KÜHN, F. R.: Mehrjährige periodische Schwankungen des Luftdrucks in Ost- und Nordeuropa. Diss. Jena 1927. Ref. Meteorol. Z. 1927.
142. KÜHNEN, F.: Methode zur Aufsuchung periodischer Erscheinungen in Reihen äquidistanter Beobachtungen. Astronom. Nachr. Bd. 182 (1909).

143. LABROUSTE, H.: Analyse des courbes résultant de la superposition de sinusoides. C. R. Acad. Sci. Bd. 184 (1927).
144. — Tables numériques pour l'analyse des graphiques résultant de la superposition de sinusoides. Evreux: Dévé 1930.
145. — Remarques sur les combinaisons de différences. Ann. Inst. Phys. Globe Bd. 9 (1931).
146. — Analyse des graphiques résultant de la superposition de sinusoides à amplitudes variables. Ann. Inst. Phys. Globe Bd. 11 (1933).
147. — u. MME. LABROUSTE: Harmonic analysis by means of linear combinations of ordinates. Terr. Magn. Bd. 41 (1936).
148. LÁSKA, V.: Der Variationsindex. Meteorol. Z. 1916.
149. — Über die Bearbeitung von langen Beobachtungsreihen. Meteorol. Z. 1916.
150. — Über die Bestimmung von Perioden. Meteorol. Z. 1916.
151. — Der Variationsindex und die Glättung. Meteorol. Z. 1917.
152. LAUE, M. v.: Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie. Ann. Physik Bd. 47 (1915).
153. McLAUGHLIN, D. B.: The light variation of R Scuti 1911—31. Publ. Obs. Michigan Bd. 4 Nr. 10 (1932).
154. LEDERSTEGGER, K.: Über die Analyse des Radiusvektors der Polbahn. Gerlands Beitr. Bd. 26 (1930).
155. LEGRAND, J.: Insuffisance de la série de FOURIER pour la recherche des éléments d'un phénomène complexe présumé périodique. Ass. Techn. Mar. et Aeron. Paris 1936.
156. LEHMANN, K.: Symmetriebereiche des Luftdrucks. Gerlands Beitr. Bd. 30 (1931).
157. LÉVY, M.: Transformations sélectives; applications à l'analyse des mélanges de sinusoides. C. R. Acad. Sci. Bd. 198 (1934).
158. LÜBKE, E.: Ein Apparat zur harmonischen Analyse und Synthese von periodischen Kurven. Physik. Z. Bd. 16 (1916).
159. MADER, O.: (Über den Harmonischen Analysator.) Elektrotechn. Z. 1909. — Physik. Z. 1909.
160. MARVIN, C. F.: Theory and use of the periodocrite. Month. Weath. Rev. 1921.
161. — A new principle in the analysis of periodicities. Month. Weath. Rev. 1924.
162. MEISSNER, O.: Bemerkungen über das ABBE-HELMERTSche Kriterium. Astronom. Nachr. Bd. 202 (1915).
163. MEISSNER, W.: Ausgleichungsformeln für Beobachtungen in gleichen Intervallen. Physik. Z. 1910.
164. MICHELSON, A. A.: Determination of periodicities by the harmonic analyser, with an application to the sun-spot cycle. Astrophysic. J. Bd. 38 (1913).
165. — u. S. W. STRATTON: (Harmon. Analysator.) Philos. Mag. Bd. 45 (1898). — Amer. J. Sci. (4) Bd. 5 (1898). Ref. Z. Instrumentenkde. Bd. 18 (1898).
166. MIFFONIS, H. DE: The periodoscope. Astrophys. J. Bd. 60 (1924).
167. MILDNER, P.: Zur Deutung des Korrelationskoeffizienten. Meteorol. Z. 1934.
168. — Über Luftdruckwellen. Veröff. geophysik. Inst. Leipzig, Ser. 2 Bd. 3 Heft 3.
169. — Über die Korrelation zwischen harmonischen Konstituenten und Beobachtungskurven mit Anwendung auf die Luftdruckwellen des Winters 1923/24. Beitr. Phys. fr. Atm. Bd. 16.
170. — Über Symmetriepunkte und ihren prognostischen Wert. Beitr. Phys. fr. Atm. Bd. 17 (1931).
171. MOHORVIČIĆ, S.: Die 2¹/₂ Jahrhundert lange Periode der Erdbeben- und Klimaschwankungen. Meteorol. Z. 1921.
172. MÜNZNER, H.: Günstigste Bestimmung der Umkehrung der LAPLACE-Transformierten zur Auffindung verborgener Periodizitäten. Diss. Göttingen 1932.

173. McNISH, A. S.: Principles of statistical analysis occasionally overlooked. J. Franklin Inst. Bd. 215 (1933).
174. ONDRACECK, J.: Ein neues Verfahren zur harmonischen Analyse. Elektrotechn. u. Maschinenb. Bd. 34 (1916).
175. OPPENHEIM, S.: Über die Bestimmung der Periode einer periodischen Erscheinung mit Anwendung auf die Theorie des Erdmagnetismus. Wien. Sitz.-Ber. Bd. 118 II a (1909). — Meteorol. Z. Bd. 27 (1910).
176. — Über die Periode der Sonnenflecken. Gerlands Beitr. Bd. 20.
177. ORLICH: Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven. Braunschweig 1906.
178. OTT, A.: Der Harmonische Analysator Mader-Ott. Kempten (Allgäu).
179. PEARSON, K.: Regression, heredity and panmixia. Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. A Bd. 187 (1897).
180. — (Über Korrelation.) Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. A Bd. 191 (1898).
181. — The influence of selection on variability and correlation. Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. A Bd. 200.
182. — On spurious correlation. Proc. Roy. Soc., Lond. Bd. 60 (1897).
183. — On the theory of contingency and its relation to association and normal correlation. Drapers Comp. Research Mem. I, 1904.
184. — On the general theory of skew correlation and non-linear regression. Drapers Comp. Research Mem. II, 1905.
185. — A mathematical theory of random migration. London 1906.
186. PERRY: Graphical method of harmonic analysis. Proc. Phys. Soc. Bd. 13 (1899).
187. PICHELMAYER u. SCHRUTKA: Eine neue Methode der Analyse von Wechselstromkurven. Elektrotechn. Z. 1912.
188. PLUMMER, H. C.: Note on Prof. DALE's method of periodic analysis. Month. Not. Roy. Astron. Soc. Bd. 76 (1915).
189. POLLAK, L. W.: Über die LAMONTSche Korrektur. Ann. Hydrogr., Berlin 1923.
190. — Zur Ableitung der monatlichen Schwankungen des Luftdrucks in der Atmosphäre. Ann. Hydrogr., Berlin 1923.
191. — Hilfsmittel zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten sowie zur harmonischen Analyse überhaupt. Ann. Hydrogr., Berlin 1925.
192. — Zur harmonischen Analyse empirischer, durch eine große Zahl gegebener Ordinaten definierter Funktionen. Ann. Hydrogr., Berlin 1926.
193. — Rechentafeln zur Harmonischen Analyse. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1926.
194. — Korrelation der monatlichen Anomalien der Lufttemperatur ausgewählter Pole mit jenen anderer Orte. Gerlands Beitr. Bd. 33 (1931).
195. — Einige Periodogramme. Z. Geophysik Bd. 2 (1926).
196. — Das Periodogramm der Polbewegung. Gerlands Beitr. Bd. 16 (1927).
197. — Die Verwendung statistischer Maschinen in der Klimatologie. Meteorol. Z. 1927.
198. — Über die Verwendung des Lochkartenverfahrens in der Klimatologie. Z. Instrumentenkde. 1927.
199. — Charakteristiken der Luftdruckfrequenzkurven und verallgemeinerte Isobaren in Europa. Prag. geophysik. Stud. I 1927. Ref. Meteorol. Z. 1928.
200. — Handweiser zur Harmonischen Analyse. Prag. geophysik. Stud. II, 1928.
201. — Periodogramme hochfrequenter Schwankungen meteorologischer Elemente. Meteorol. Z. 1927.
202. — Das Periodogramm der internationalen erdmagnetischen Charakterzahlen. Z. Geophysik Bd. 4 (1928) [s. auch: Prag. geophysik. Stud. III, 1930].
203. — Das Lochkartenverfahren. Meteorol. Z. 1929.

204. POLLAK, L. W.: Die Rationalisierung und Mechanisierung der Verwaltung und Verrechnung geophysikalischen Zahlenmaterials. *Naturwiss.* 1930.
205. — Fortschritte in der Anwendung des Lochkartenverfahrens auf geophysikalische Probleme. *Z. Geophysik* Bd. 5 (1929).
206. — Theorie und Praxis der Periodogrammanalyse. *Knihovna Statistickeho Obzoru* Bd. 25 (1932).
207. — u. A. HANEL: Bericht über die numerische Methode von J. FUHRICH zur Ermittlung von Periodizitäten. *Meteorol. Z.* 1935.
208. — u. F. KAISER: Neue Anwendungen des Lochkartenverfahrens in der Geophysik. *Hollerith-Nachr.* Heft 44, Berlin 1934.
209. — — Über die numerische Methode von J. FUHRICH zur Ermittlung von Periodizitäten, ihre Erprobung und Anwendung auf die Polbewegung. *Statisticky Obzor*, Jg. 16. Prag 1935.
210. PUPIN: (Wechselstromanalyse.) *Amer. J. Sci.* Bd. 48 (1894).
211. RAUSCHELBACH, H.: Über die Vorausberechnung der Gezeiten mittels der deutschen Gezeitenrechenmaschine. *Ann. Hydrogr.*, Berlin 1921.
212. — Die deutsche Gezeitenrechenmaschine. *Z. Instrumentenkde.* 1924.
213. — Harmonische Analyse der Gezeiten des Meeres; eine Weiterentwicklung des BÖRGENSEN Verfahrens. *Arch. Dtsch. Seewarte* Bd. 42 (1924).
214. RAYLEIGH, Lord: On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *Philos. Mag.* (5) Bd. 10 (1880).
215. REINSBERG, C.: Beiträge zur Theorie der Aufsuchung verborgener Periodizitäten. *Astronom. Nachr.* Bd. 248 (1933).
216. — Zur Theorie der Exponentialperiodogramme. *Astronom. Nachr.* Bd. 252 (1934).
217. RIETZ, H. L. u. F. BAUR: *Handbuch der mathematischen Statistik.* Leipzig: B. G. Teubner 1930.
218. RUBINSTEIN, E.: Über eine Methode zur Bestimmung von Perioden. *Meteorol. Z.* 1922.
219. RUDSKI, N.: Harmonische Analyse und Wettervorhersage. *Meteorol. Z.* 1929.
220. RUNGE, C. u. EMDE: *Rechnungsformular zur Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Funktion in Sinuswellen.* Braunschweig: Vieweg & Sohn.
221. — u. H. KÖNIG: *Vorlesungen über numerisches Rechnen.* Berlin: Julius Springer 1924.
222. RUSSELL, A.: *Practical harmonical analysis.* *Proc. Phys. Soc., Lond.* Bd. 27.
223. SACIA, C. F.: A photomechanical wave-analyser applied to inharmonic analysis. *J. opt. Soc. Amer.* Bd. 9 (1924).
224. SANDEN, H. v.: *Praktische Analysis.* Leipzig: B. G. Teubner 1923.
225. SANKHYA: Tables of random sample deviations from the mean of a normal population.
226. SAVUR, S. R.: A simplified method for calculating periodicities. *Proc. Ind. Assoc. Sci.* Bd. 15 (1932).
227. — A simple test of value of a particular period in forecasting. *Met. Off., Poona* 1935.
228. SCHEDLER, A.: Zur Analyse der Polhöschwankungen. *Gerlands Beitr.* Bd. 31 (1931).
229. SCHMIDT, A.: The periodogram of magnetic declination, as obtained from the records of the Greenwich Observatory during the years 1871—95. *Philos. Soc. Trans.* Bd. 18 (1900).
230. — Zur Kritik des Korrelationsfaktors. *Meteorol. Z.* 1926.
231. SCHMIDT, W.: Nachweis von Perioden langer Dauer. *Meteorol. Z.* 1911.
232. — Zur „Glättung“ von Wertereihen und Kurven. *Meteorol. Z.* 1916.
233. — Der Variationsindex und die Glättung. *Meteorol. Z.* 1917.

234. SCHOSTAKOWITSCH, W. B.: Periodische Schwankungen in den Naturerscheinungen. Gerlands Beitr. Bd. 30 (1931).
235. SCHREIBER, P.: Über Glättung von Kurven. Abh. Kgl. Sächs. Meteorol. Inst. Heft 1.
236. — Das Sinus-Logarithmenpapier und seine Verwendung bei der harmonischen Analyse. Meteorol. Z. 1915.
237. — Über die sogenannte Glättung von Kurven. Meteorol. Z. 1921.
238. SCHUBERT, O. v.: Die 3 jährige Luftdruckwelle. Veröff. geophysik. Inst. Leipzig, Ser. 2 Bd. 3 Heft 6. — Meteorol. Z. 1928.
239. — Luftdruckwellen und harmonische Analyse. Gerlands Beitr. Bd. 28.
240. — Ein neuer Beweis für die Erscheinung der Symmetrie. Meteorol. Z. 1931.
241. SCHULZ, J.: Über eine von J. L. LAGRANGE gegebene trigonometrische Interpolationsmethode und deren Anwendung auf Kosmophysik. Gerlands Beitr. Bd. 13 (1914).
242. SCHUSTER, A.: On the investigation of hidden periodicities. Terr. Magn. Bd. 3 (1898).
243. — On the periodogram of magnetic declinations at Greenwich. Cambr. Philos. Soc. Trans. Bd. 18 (1899).
244. — The periodogram and its optical analogy. Proc. Roy. Soc., Lond. A Bd. 77 (1906).
245. — On the periodicities of sun-spots. Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. A Bd. 206 (1906).
246. — Sonnenfleckenperioden. Meteorol. Z. 1906.
247. SCHWEYDAR, W.: Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne und Mond. Veröff. Kgl. preuß. geod. Inst. N. F. Bd. 59 (1914).
248. SHARP: (Harmon. Analysator.) Philos. Mag. Bd. 38 (1894). — Electrician Bd. 35 (1895). — Proc. Phys. Soc., Lond. Bd. 13 (1894—95).
249. ŠKREB, S.: Ein Kriterium des WEICKMANNschen Symmetriepunktes. Meteorol. Z. 1931.
250. SONDEN, v.: Graphische Synthese und Analyse von Wechselstromkurven. Arch. Elektrotechn. Bd. 1 (1912).
251. STEINER, L.: Bericht über eine harmonische Analyse der Luftdruckschwankung in Europa im Winter 1925—26. Gerlands Beitr. Bd. 39 (1933).
252. STREIFF, A.: On the investigation of cycles and the relation of the BRÜCKNER and solar cycles. Month. Weath. Rev. 1926.
253. STUMPF, K.: Theorie der Periodogramme und ihre Anwendbarkeit auf die Analyse von Mondbeobachtungen. Diss. Göttingen 1922.
254. — Periodogramme und ihre Anwendbarkeit auf astronomische und geophysikalische Fragen. Z. angew. Geophysik Bd. 1 Heft 5 (1923).
255. — Eine neue photographische Methode zur Herstellung von Periodogrammen. Astronom. Nachr. Bd. 223 (1924).
256. — Fehlertheoretische Untersuchungen zur Periodogrammanalyse. Astronom. Nachr. Bd. 226 (1926).
257. — Analyse periodischer Vorgänge. Berlin: Gebr. Borntraeger 1927.
258. — Die Perioden der Polbewegung. Astronom. Nachr. Bd. 231 (1927).
259. — Über die Verwendung des DARWINschen Schemas in der Periodogrammanalyse. Gerlands Beitr. Bd. 22 (1929).
260. — Neue Analyse der Sonnenfleckenrelativzahlen nach der SCHUSTERSchen Methode. Prag. geophysik. Stud. IV, 1930.
261. — Vorversuche zu einer systematischen Analyse der Luftdruckschwankungen in Europa. Gerlands Beitr. Bd. 28 (1930).
262. — Systematische Untersuchungen über die periodischen Eigenschaften des Luftdrucks. Gerlands Beitr. Bd. 32 (1931).

263. STUMPF, K.: Untersuchungen über die Verteilung der Kleinen Planeten in Länge. *Astronom. Nachr.* Bd. 242 (1931).
264. — Wetterperioden und langfristige Wettervorhersage. *Mitt. dtsh. Landw.-Ges.* 1932.
265. — Untersuchungen über die Hauptperioden des Lichtwechsels von R Scuti. *Astronom. Nachr.* Bd. 253 (1934).
266. — Probleme und Methoden der Periodenforschung in Astronomie und Geophysik. *Scientia* 1934.
267. — Über die Zufallswahrscheinlichkeit von Perioden in Beobachtungsreihen. *Veröff. meteorol. Inst. Berlin* Bd. 1 Heft 2 (1936).
268. — Über eine Erweiterung des Expektanzbegriffs. *Meteorol. Z.* 1936.
269. SUITS, CH. G.: A thermionic method for the harmonic analysis of electrical waves. *Proc. Instn. Radio Engr.* Bd. 18 (1930).
270. TAMS, E.: Die Frage der Periodizität der Erdbeben. *Berlin: Gebr. Borntraeger* 1925; *Z. Geophysik* Bd. 2 (1926).
271. TAYLOR, H. O.: A mechanical process for constructing harmonic analysis schedules for waves having even and odd harmonics. *Physic. Rev.* (2) Bd. 6 (1916).
272. TERADA, T.: (Harmon. Analysator.) *Rep. Tokyo Math. Phys. Soc.* 1905. — *Z. Instrumentenkde.* Bd. 25 (1905).
273. TERESESI, P.: *Rechenschablonen für harmonische Analyse und Synthese.* Berlin: Julius Springer 1931.
274. — Aufsuchen versteckter Periodizitäten. *Z. Geophysik* Bd. 9 (1933).
275. — Ein neues Näherungsverfahren zur harmonischen Analyse. *Mitt. Inst. prakt. Math. Darmstadt.*
276. THEODORSEN, TH.: A new principle of sound frequency analysis. *Physic. Rev.* (2) Bd. 37 (1931).
277. THOMAS, H.: Zur Methode der übergreifenden Mittelbildung. *Meteorol. Z.* 1928.
278. THOMPSON, S. P.: Über die Berechnung der Konstanten FOURIERScher Reihen. *Meteorol. Z.* 1911. — *Proc. Phys. Soc., Lond.* Bd. 19.
279. TIBBETT, L. H. C.: Random sampling numbers. *Tracts for Computers* 15. Cambridge 1927.
280. TRENDELENBURG, F.: *Fortschritte der physikalischen und technischen Akustik.* Leipzig: Akad. Verl.-Ges. 1934.
281. TSCHUPROW, A.: *Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie.* Leipzig: B. G. Teubner 1925.
282. TURNER, H. H.: The facility of harmonic analysis. *J. Brit. Astr. Assoc.* Bd. 18 (1908).
283. — On possible periodic inequalities in the epoch of the sun-spot variation. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* Bd. 68 (1908).
284. — On double lines in periodograms. *Proc. 5. Internat. Math. Congr.* Bd. 2.
285. — Note on the periodogram of earthquake frequency from 7 to 20 years. *Rep. Meeting Brit. Assoc. Adv. Sci. Portsmouth* 1911.
286. — Tables for facilitating the use of harmonic analysis. London: Humphrey Milford 1913.
287. — On the harmonic analysis of WOLF's sun-spot numbers. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* Bd. 73 (1913).
288. — On a simple method of detecting discontinuities in a series of recorded observations. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* Bd. 74 (1913).
289. — On the expression of sun-spot periodicity as a FOURIER sequence. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* Bd. 73 (1913).
290. — Further remarks on the expression of sun-spot periodicity as a FOURIER sequence. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* Bd. 74 (1914).

291. TURNER, H. H.: Discontinuities in meteorological phenomena. *Quart. J. Roy. Met. Soc., Lond.* Bd. 41 (1915), Bd. 42 (1916), Bd. 43 (1917).
292. — On the 15 month-periodicity in earthquake frequency. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* Bd. 79 (1919).
293. VERCELLI, F.: Analisi armonica dei barogrammi e previsione della pressione barometrica. *Rend. Accad. Lincei* 1915.
294. — Oscillazioni periodiche e previsione della pressione atmosferica. *Mem. R. Ist. Lombardo Sci. e Lett.* (3) Bd. 21. Milano 1916.
295. — Periodische Schwankung und Vorhersage des Luftdrucks. (Ref. von A. GILIĆ.) *Meteorol. Z.* 1921.
296. — Nuovi esperimenti di previsione meteorologiche. *R. Ist. Geof. Trieste.* Roma 1933.
297. WALKER, G. T.: On the criterion for the reality of relationships or periodicity. *Ind. Meteorol. Mem.* Bd. 21. Calcutta 1914.
298. — On periodicity and its existence in European weather. *Mem. Meteorol. Soc.* Bd. 1 Nr. 9 (1927).
299. — On periodicity. *Roy. Meteorol. Soc.* Bd. 3. Nr. 25 (1930).
300. — On periodicity in series of related terms. *Proc. Roy. Soc., Lond.* 1931.
301. WALTER, K.: Über die Wahrscheinlichkeit von Perioden. *Astronom. Nachr.* Bd. 259 (1936).
302. WANACH, B.: Die CHANDLERSche und die NEWCOMBSche Periode der Polbewegung. *Zentralbüro der Internationalen Erdmessung.* Berlin 1919.
303. WEICKMANN, L.: Wellen im Luftmeer. *Abh. Sächs. Akad. Wiss., math.-physik. Kl.* Bd. 39 (1924).
304. — Luftdruckwellen über der Nordhemisphäre. *Ann. Hydrogr., Berlin* 1926.
305. — Über Symmetriepunkte im Luftdruckgang. *Z. Geophysik* Bd. 2 (1926).
306. — Das Wellenproblem der Atmosphäre. *Meteorol. Z.* 1927.
307. — Die 24tägige polare Druckwelle des Winters 1923—24. *Petermanns Mitt.* 1927 *Erg.-Heft* Nr. 191.
308. — Die Ausbreitung von Luftdruckwellen über Europa. *Gerlands Beitr.* 1927.
309. — Die dominierende Luftdruckwelle des strengen Winters 1928—29. *Z. Geophysik* Bd. 6 (1930).
310. — Neuere Ergebnisse aus der Theorie der Symmetriepunkte. *Gerlands Beitr.* Bd. 34 (1931).
311. WHITTAKER, E. T.: On the law which governs the variations of SS Cygni. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* Bd. 71 (1911).
312. — u. G. ROBINSON: The calculus of observations. London u. Glasgow: Blackie & Son 1932.
313. WILLERS, F. A.: Numerische Integration. Berlin u. Leipzig: W. de Gruyter 1923.
314. — Methoden der praktischen Analysis. Berlin u. Leipzig: W. de Gruyter 1928.
315. WOOLARD, E. W.: On the mean variability in random series. *Month. Weath. Rev.* 1925.
316. YULE, G. U.: On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to WOLF's sun-spot numbers. *Philos. Trans. Roy. Soc., Lond.* A Bd. 226 (1927).
317. ZECH, TH.: Harmonische Analyse mit Hilfe des Lochkartenverfahrens. *Z. angew. Math. Mech.* Bd. 9 (1929).
318. ZIERL, H.: Periodische Wiederkehr von Symmetriepunkten im Luftdruck. *Münchens. Meteorol. Z.* 1927.
319. ZIPPERER, L.: Tafeln zur harmonischen Analyse periodischer Kurven. Berlin: Julius Springer 1922.

Namen- und Sachverzeichnis.

- ABBE-HELMERTSches Kriterium** 242.
Abblendung von Perioden 124, 134, 269.
ABBOT 258.
Amphidromie 77.
Amplituden 13, 88, 93.
Amplitudenverteilung 180, 187, 197.
—, durchschnittliche 180.
—, mittlere 181, 197.
Analysatorrahmen 56.
Analysenintervall 15, 92, 103.
Andauer von Perioden 235.
Annäherung durch Potenzreihen 4, 10.
— durch **LEGENDRESche** Polynome 10.
— durch orthogonale Kreisfunktionen 11.
— durch Kugelflächenfunktionen 11.
— durch **HERMITESche** Polynome 23, 183, 185.
— durch **LAGUERRESche** Polynome 25, 186f.
— von Beobachtungsreihen 33f.
Armagnat 280.
Auflösungskraft des Periodogramms 125, 271.
Autokorrelation 211f.
Autokorrelationskoeffizienten 211f.
—, ideale 223f.
Autokorrelationsmethode (FUHRICH) 261f.
*
BARTELS 55, 73, 100, 115, 118, 234, 236, 241, 274.
Beobachtungsfehler 3, 18, 134, 167f.
Beobachtungsnetze 75.
Beobachtungsreihen, äquidistante 1, 33.
—, nicht äquidistante 45.
Blinklicht 283f.
BÖRGEN 138f., 237f.
BROOKS 254.
BRUNS 185, 249f.
BRUNSSche Reihe 185f.
BUYS-BALLOTSches Schema 132f., 237f., 257.
CHANDLERSche Periode 19, 131, 257.
CRAIG 259f.
DALE 252.
DARWIN, G. H. 138f., 237f.
Deferent 110, 121, 195.
Dichte (der Linien eines Periodenspektrums) 91, 106, 136.
Differenzenanalyse 73f.
Differenzenmethoden 248f.
Differenzenperiodogramm 254f., 270.
Differenzenrechnung 29.
Diskontinuität (wesentliche und unwesentliche) 26.
Dominierende Perioden 20, 253f.
DOUGLASS 282, 288f.
Drehmomente 275.
Durchmusterung, periodographische 90, 104, 141, 257, 273, 291, 313.
Einheitsschema für Analysen 142f.
Empirische Funktionen 1f.
Entwicklung (s. Annäherung).
Entwicklungssatz 7, 12.
Epizykeln 110, 121.
—, elliptische 129f.
Erhaltungstendenz 220f., 227f., 242.
Exhaustionsmethode 20, 253f., 260f.
Expektanz 182, 186f., 189, 198.
—, Abhängigkeit der — von der Phase 198.
—, autokorrelierter Beobachtungsreihen 226f.
—, elliptische 199.
—, mittlere 198.
—, effektive 235.
—, scheinbare 234.
Expektanzkreis 191f.
Expektanzellipse 199.
Exponentialperiodogramm 155f.
Extrapolation 4, 15, 17.
Faltung 58.
Fehler, zufällige 167, 176.
—, systematische 167, 176, 242.
—, wahre 167.
—, scheinbare 167.

Fehler, mittlerer 172.
 —, durchschnittlicher 172.
 —, wahrscheinlicher 173.
 —, maximaler 173.
 —, grober 173f.
 Fehlerquadratsumme 6, 9, 13, 38.
 FOURIERSche Reihe 37, 47f.
 Frequenz 15, 88.
 FUHRICH 260f.

GALITZIN 129, 258, 260, 265, 279f.
GAUSSsches Fehlergesetz 170f.
 Geradföhrung 130.
 Gespensterperioden (s. spurious periodicities).
 Gewichtsfunktion 22, 156, 161.
 Gezeiten 19, 138f., 306.
GIBB 135.
 Gitter, analysierendes 282, 288f.
 Gitterfunktion 47f., 161, 255, 269, 286, 294.
 Glättung 28f., 43, 124, 155f., 266f., 268.
 Glättungsfaktor 296.
GLOGOWSKI 244.
 Grundintervall (s. Analysenintervall).
 Grundperiode 16, 17f., 35, 77.

Harmonische Analyse 12, 18, 35.
 Harmonischer Analysator 39, 51f., 111, 272f.
 Harmonische Synthese 69.
 Haupteffekt (beim photomechanischen Periodographen) 297.
 — höherer Ordnung 305.
 Hauptvektor 102, 110, 114f.
HIRAYAMA 250, 252.
 Höhenstrahlung 307.
HOLLERITH (s. Lochkartenverfahren).
HOPFNER 249.
 Hydraulische Methode 276.

Interferenz 282f., 314.
 Interpolation 28f., 38f.
 — der **FOURIER**-Konstanten 96f.
 —, provisorische 29f., 33, 39f.
 Irrfahrt (Irrlauf) 118, 128, 232, 237f.
 Isamplituden 77.
 Isophasen 77.

Jahresringe 288.

Klanganalyse 281.
KLEIN und **SOMMERFELD** 256f.
 Klimaschwankungen 288.
 Kollektiv 164f.
 —, ideales 199f.
 Korrelationskoeffizient 83, 202f., 210f., 259f.
 Korrelationstheorie 202f.
 Korrelationstabelle 207.
KÜHNEN 251.
 Kugelfunktionen 11, 76.

LABROUSTE 263f., 268f.
 Langperiodische Glieder 107, 129.
 LAPLACEsche Transformation 244.
LEHMANN, K. 83.
 Lochkartenverfahren 148f., 272f.
 Lücken im Analysenschema 139f., 144f.
 — in Beobachtungsreihen 158f.
 Lückenperioden 158f.
 Lückenperiodogramm 162.
 Luftdruck 59f., 71, 78f., 81f., 169, 218f., 227, 312.

MADERSCHER Analysator 51f., 274.
 Magnetische Momente 276.
 Maximumbreite 102, 107.
 Mehrdeutigkeit 45, 160, 251.
MILDNER 84.
 Momentmethoden 274f.
MÜNZNER 247.

Normalgleichungen 6, 8, 33, 35, 46.
 Normierung 9, 24, 25.
 Nullpunkteffekt (beim photomechanischen Periodographen) 305.

Oberschwingungen 14, 77, 84, 135.
OPPENHEIM 249.
 Optische Analogie 90f.
 Optisches Bild einer Beobachtungsreihe 287f.
 Orthogonalisierung 10, 22, 24, 34.
 Orthogonalität 8, 9, 12, 34.

PAUL, M. 276.
 Periodenuhr 100, 109.
 Periodogramm, Definition 97f.
 — einer Sinuswelle 92f.

- Periodogramm, Komponenten 96f.
 —, Nullstellen 101.
 —, durchschnittliches 152.
 —, mittleres 152.
 —, neuer Art 153.
 —, Verwandtschaft mit Exhaustions-
 methoden 253f.
 Periodograph, photomechanischer 273,
 281.
 — von DOUGLASS 291f.
 — von STUMPF 292f.
 — erster Art 300.
 — zweiter Art 309f.
 Periodometer von ABBOT 258.
 Persistenz von Perioden (persistente
 Perioden) 84, 91, 125, 191, 234f., 307.
 Phasen 13, 88.
 Phasendiagramm 110, 121, 125f., 134,
 253, 257, 309.
 Polarplanimeter 51.
 Polarisationsperiodometer 313f.
 POLLAK 102, 149.
 Polschwankungen 19, 131, 257.
 Polygonzug 30, 41.
 Prinzip der kleinsten Quadrate 5.
 Punktwolke 189f., 205.
 —, Dichte der — 207.
 —, elliptische 195, 196f., 205f.
 PUPIN 280.
- Quadrate, Prinzip der kleinsten** — 5.
 Quasipersistenz 118, 125, 217f., 225,
 232f., 307.
 —, triviale 236, 242.
- Realität von Perioden** 87, 177, 181f.,
 191f., 218, 227.
 Regressionslinie 206f.
 Reine Periodizität 15f., 18, 35, 47, 81,
 90, 94, 214, 239.
 REINSBERG, C. 83.
 Resonanz 277f.
- Sägezahnkurve 48.
 Säkulare Glieder 17, 107, 129.
 Schablonen 68, 149.
 Schaltverfahren 137f.
 Scheinperioden 45, 156, 160 (s. auch
 spurious periodicities).
 SCHUSTER, A. 87f., 102, 107.
 Schwankung 27f., 224.
- Schwankungsamplitude 27f.
 Schwankungsperiode 27f.
 Schwebung 122, 135, 306.
 Selektivität 264f., 269f.
 Sequoia 288.
 Singularitäten 3.
 Solarkonstante 258.
 Sonnenfleckrelativzahlen 126f., 131,
 217, 219, 312.
 Spektrum 90f., 120.
 Sprungstellen in Funktionen 2, 7, 31.
 Spurious periodicities 102, 117, 134, 156.
 Stationäre Schwingung 79f.
 Statistische Eigenschaften von Kolle-
 tiven 165.
 Statistische Homogenität von Beob-
 achtungsreihen 212, 229.
 Statistische Momente 172.
 Stichproben 165.
 Stochastischer Zusammenhang 205.
 Störungen 17f., 193.
 Störungsvektor 102, 107f., 114f.
 Streuung 90, 172, 184, 240.
 —, bedingte 206.
 Stufenzug 30, 39, 139.
 Summationsvektor 114f., 126f.
 Summenfunktion (s. Summations-
 vektor).
 Summenreihe 56f., 72, 104f., 133.
 Sweep (s. optisches Bild).
 Symmetrie 57, 80f.
 —, partielle von Spektren 131.
 Symmetriendiagramm 83.
 Symmetrieindex 83f.
 Symmetriepunkt 81f.
 Synoptische Darstellung 75f.
- TEREBESI** 68.
 Tiden (s. auch Gezeiten) 138f.
 Trennung von Perioden 107f., 118f.,
 306.
 Treppenzug (s. Stufenzug).
 TURNER 98.
- Unechte Perioden** (s. spurious periodicities).
 Unharmonische Periode 18, 50, 92, 104,
 308.
- Veränderliche Sterne** 131, 135, 158, 160,
 217, 270.

- Versuchswelle (Versuchsperiode,
 -frequenz) 99, 136, 268.
 Verteilung, bedingte 205.
 —, normale 171.
 —, normale elliptische 196f., 200, 205f.
 Verteilungsfunktion 21f., 169, 182f.
 Virtuelle Drehung 283f.
 Virtuelles Gitter 284f.
 Virtuelle Perioden 282.
 Vollständigkeit 7, 9, 12, 23, 89.
 Vortäuschung langer Perioden 45.
- Wahrscheinlichkeit 165f.
 —, bedingte 219.
 Wechselstromanalyse 18, 280.
- Wegkurve des Periodogrammvektors
 121, 130.
 WEICKMANN 81, 84.
 Welle 15.
 Wellenbild 78f.
 Wellenfront 79.
 Wellenlänge 14.
 WHITE 288.
 WITTINGSche Störung 131.
- Zackenkurve 48f.
 Zufallsgrenze 174, 181, 191, 231.
 Zyklograph 288f.
 Zylinderlinse 287f.