

В. Г. КАРТАШЕВ

**Основы
теории
дискретных
сигналов
и цифровых
фильтров**

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
радиотехнических специальностей
вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

ББК 32.84

К 27

УДК 621.396 (075)

Рецензенты:

кафедра Московского
авиационного института

профессор МЭИС
Назаров М. В.

Карташев В. Г.

К 27 Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1982. — 109 с., ил.
20 к.

В книге рассматриваются новые разделы курса «Радиотехнические цепи и сигналы», которые недостаточно освещены в учебной литературе; излагаются принципы дискретизации и квантования непрерывных сигналов, анализируются математические свойства дискретных сигналов, излагаются принципы действия линейных цифровых фильтров, их основные параметры, формы реализации и основы синтеза, рассматриваются эффекты квантования в цифровых фильтрах.

Предназначается для студентов радиотехнических специальностей вузов. Может быть полезно инженерам и научным работникам.

К $\frac{2402020000-158}{001(01)-82}$ 99—81

ББК 32.84
6Ф2

В развитии современной радиоэлектроники большую роль играют прогрессивные методы обработки сигналов, среди которых наибольшее значение имеет цифровая обработка сигналов. Появление и широкое распространение цифровой обработки сигналов вызвало настоящую революцию в радиотехнике и привело к необходимости изменения характера подготовки специалистов по радиотехнике и электронике. Новые учебные планы вузов учитывают это требование времени: в программы курсов включены соответствующие разделы.

В предлагаемой книге изложены основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. Главная задача данного учебного пособия — помочь тем, кто впервые сталкивается с дискретной и цифровой обработкой сигналов, разобраться в особенностях и закономерностях этой новой области радиотехники, понять принципы работы цифровых фильтров. Для более глубокого изучения цифровой обработки сигналов читатель может воспользоваться специальной литературой [2 — 7].

При изучении материала, изложенного в книге, полезно использовать универсальную цифровую вычислительную машину. С помощью ЭВМ обучающийся может практически реализовать многие алгоритмы цифровой фильтрации, глубже понять ее основные закономерности, поупражняться в составлении алгоритмов и программ цифровой обработки сигналов. В этом смысле занятия с помощью ЭВМ можно рассматривать как своеобразный лабораторный практикум. Для проведения таких занятий удобны малые вычислительные машины, например серии «МИР», получившие в настоящее время широкое распространение. Чтобы помочь в организации и проведении таких занятий, в конце книги приведены программы реализации некоторых алгоритмов цифровой фильтрации на языке машины «МИР».

В основу данного учебного пособия положен курс лекций, неоднократно прочитанный автором студентам радиотехнического факультета МЭИ, слушателям факультета повышения квалификации преподавателей при МЭИ, а также в Высшей технической школе в г. Ильменау (Г ДР).

Автор пользуется случаем выразить признательность своим коллегам: С. И. Баскакову, А. М. Николаеву, Н. Н. Ивановой и С. В. Первачеву, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд полезных замечаний.

Автор выражает также искреннюю благодарность научному редактору Ю. А. Евсикову и рецензентам: проф. И. С. Гоноровскому и проф. М. В. Назарову, ценные замечания которых содействовали значительному улучшению качества книги.

Отзывы о книге просим направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, изд-во «Высшая школа».

Автор

Цифровая обработка сигналов, т. е. обработка сигналов с помощью средств электронной вычислительной техники, стала известна около 15 лет назад. Электронные вычислительные машины тогда были дороги и несовершенны и поэтому их применяли лишь в сложных радиокомплексах, например, при расчете координат и траекторий объектов в радионавигационных системах и станциях слежения за космическими объектами, при расчете координат цели в радиолокационных станциях. Это были первые области применения цифровых устройств для обработки сигналов, однако их еще нельзя было назвать цифровыми фильтрами, да и само понятие «цифровой фильтр» тогда еще не существовало.

В последующие годы благодаря широкому применению транзисторов, а затем и развитию микроэлектроники электронные вычислительные машины стали совершеннее, дешевле, а главное, компактнее. Появилась возможность использования вычислительной техники не только в крупных радиокомплексах, но и в сравнительно простой аппаратуре, например специальных радиоприемниках, системах фазовой автоподстройки частоты, системах телеметрии и т. д. Были разработаны устройства для цифровой обработки сигналов, заменяющие практически любые аналоговые устройства: полосовые радиочастотные фильтры, системы автоматической подстройки частоты и фазы, амплитудные, частотные и фазовые детекторы, преобразователи частоты и др. Разработаны радиоприемники, в которых осуществляется полная цифровая обработка сигналов.

Обработку сигналов с помощью цифровой вычислительной техники теперь используют при автоматическом регулировании процессов в промышленности, на транспорте и даже в бытовой аппаратуре.

Такое широкое распространение цифровых методов обработки сигналов определяется большими возможностями цифровой техники. С помощью цифровых устройств можно реализовать очень сложные алгоритмы обработки сигналов, которые трудно, а часто даже невозможно реализовать, используя обычную аналоговую технику. Алгоритм

обработки сигналов можно изменять в зависимости от характера входного сигнала. Следовательно, легко построить самонастраивающуюся (адаптивную) систему. Цифровые фильтры могут анализировать параметры сигнала и принимать те или иные решения, например вырабатывать управляющие команды.

Иными словами, с помощью цифровых методов можно реализовать любой алгоритм обработки сигнала, который может быть описан совокупностью арифметических и логических операций.

В последние годы в связи с появлением микропроцессоров цифровая обработка сигналов получила еще более широкое распространение. Если несколько лет назад создание системы цифровой обработки сигналов было под силу лишь большому коллективу разработчиков, то теперь при наличии микропроцессоров и устройств сопряжения с ними подобную систему может собрать квалифицированный инженер за сравнительно короткое время. Все эти обстоятельства показывают, что в дальнейшем значение цифровой обработки сигналов будет возрастать.

Глава 1

ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

§ 1.1. Дискретные и цифровые сигналы

Любая система цифровой обработки сигналов независимо от ее сложности содержит цифровое вычислительное устройство — универсальную цифровую вычислительную машину, микропроцессор или специально разработанное для решения конкретной задачи вычислительное устройство. Сигнал, поступающий на вход вычислительного устройства, должен быть преобразован к виду, пригодному для обработки на ЭЦВМ. Он должен иметь вид последовательности чисел, представленных в коде машины.

В некоторых случаях задача представления входного сигнала в цифровой форме решается сравнительно просто. Например, если нужно передать словесный текст, то каждому символу (букве) этого текста нужно поставить в соответствие некоторое число и, таким образом, представить передаваемый сигнал в виде числовой последовательности. Легкость решения задачи в этом случае объясняется тем, что словесный текст по своей природе дискретен.

Однако большинство сигналов, с которыми приходится иметь дело в радиотехнике, являются непрерывными*. Это связано с тем, что сигнал является отображением некоторого физического процесса, а почти все физические процессы непрерывны по своей природе.

Рассмотрим процесс дискретизации непрерывного сигнала на конкретном примере. Допустим, на борту некоторого космического аппарата производится измерение температуры воздуха; результаты измерения должны передаваться на Землю в центр обработки данных. Температура воз-

* Термин «непрерывный сигнал» не вполне корректен, так как могут существовать сигналы, описываемые разрывной функцией времени (например, прямоугольный импульс). Чтобы избежать недоразумений, иногда для обозначения таких сигналов употребляют термин «континуальный». Континуальные сигналы называют также аналоговыми, так как они являются аналогами некоторых физических процессов.

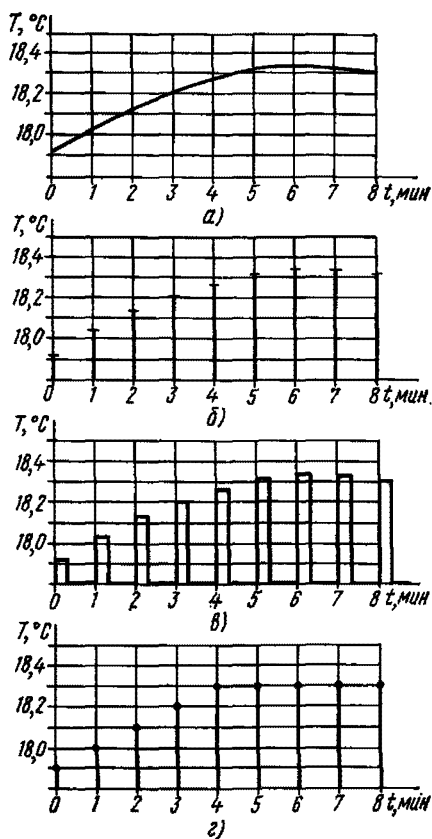


Рис. 1.1. Виды сигналов:

а — непрерывный (континуальный) сигнал;
 б — дискретный сигнал; в — АИМ-колебание;
 г — цифровой сигнал

по уровню (квантования). Сигнал, дискретизированный только по времени, называют **дискретным**; он еще не пригоден для обработки в цифровом устройстве. Дискретный сигнал представляет собой последовательность, элементы которой $f(kT)$ в точности равны соответствующим значениям исходного непрерывного сигнала $f(t)$ (рис. 1.1, б). Примером дискретного сигнала может быть последовательность импульсов с изменяющейся амплитудой — амплитудно-импульсно-модулированное колебание (рис. 1.1, в). Аналитически такой дискретный сигнал описывается выражением

духа измеряется непрерывно; показания датчика температуры также являются непрерывной функцией времени $f(t)$ (рис. 1.1, а). Но температура изменяется медленно, достаточно передавать ее значения один раз в минуту. Кроме того, нет необходимости измерять ее с точностью выше чем 0,1 градуса. Таким образом, вместо непрерывной функции $f(t)$ можно с интервалом в 1 мин передавать последовательность числовых значений (рис. 1.1, б), а в промежутках между этими значениями можно передавать сведения о давлении, влажности воздуха и другую научную информацию.

Рассмотренный пример показывает, что процесс дискретизации непрерывных сигналов состоит из двух этапов: *дискретизации по времени* и *дискретизации*

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) F(t - kT), \quad (1.1)$$

где $f(t)$ — исходный непрерывный сигнал; $F(t)$ — единичный импульс АИМ-колебания.

Если уменьшать длительность импульса $F(t)$, сохраняя его площадь неизменной, то в пределе функция $F(t)$ стремится к δ -функции. Тогда выражение для дискретного сигнала можно представить в виде

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \delta(t - kT). \quad (1.2)$$

Для преобразования аналогового сигнала в цифровой после дискретизации по времени должна следовать дискретизация по уровню (квантование). Необходимость квантования вызвана тем, что любое вычислительное устройство может оперировать только числами, имеющими конечное число разрядов. Таким образом, квантование представляет собой округление передаваемых значений с заданной точностью. Так в рассмотренном примере производится округление значений температуры до трех значащих цифр (рис. 1.1, з). В других случаях число разрядов передаваемых значений сигнала может быть иным. *Сигнал, дискретизированный и по времени, и по уровню*, называется **цифровым**.

Правильный выбор интервалов дискретизации по времени и по уровню очень важен при разработке цифровых систем обработки сигналов. Чем меньше интервал дискретизации, тем точнее дискретизированный сигнал соответствует исходному непрерывному. Однако при уменьшении интервала дискретизации по времени возрастает число отсчетов, и для сохранения общего времени обработки сигнала неизменным приходится увеличивать скорость обработки, что не всегда возможно. При уменьшении интервала квантования требуется больше разрядов для описания сигнала, вследствие чего цифровой фильтр становится более сложным и громоздким.

§ 1.2. Дискретные и цифровые фильтры

Рассмотрим, из каких элементов должно состоять устройство цифровой обработки сигналов. Разумеется, универсальную структурную схему изобразить невозмож-

но, так как существует очень много разнообразных цифровых систем различного назначения. Однако все они содержат некоторые специфические общие элементы.

Система цифровой обработки сигнала должна содержать устройство для преобразования аналогового сигнала в цифровой. Обычно такое устройство состоит из двух частей: дискретизатора непрерывного сигнала по времени и аналого-цифрового преобразователя (АЦП), превращающего выборочные значения сигнала в числовую последовательность, элементы которой — это числа, представленные в коде вычислительной машины. Цифровой сигнал, получающийся на выходе АЦП, уже готов для цифровой обработки.

Далее следует электронное вычислительное устройство, в котором происходит обработка цифрового сигнала по заданному алгоритму. Алгоритмы обработки сигналов могут быть очень разнообразными как по характеру, так и по степени сложности. Цифровые устройства, производящие *линейную обработку сигнала*, называют **цифровыми фильтрами**.

Методы анализа цифровых фильтров во многом родственны методам анализа обычных аналоговых фильтров. Каждый цифровой фильтр эквивалентен некоторому аналоговому устройству, называемому **фильтром-прототипом**. Многие характеристики цифровых фильтров аналогичны соответствующим характеристикам фильтров-прототипов.

Сигнал на выходе цифрового фильтра имеет вид последовательности чисел, представленных в коде машины. Дальнейшая обработка этого сигнала может быть различной в зависимости от назначения устройства. Например, выходной сигнал непосредственно в цифровой форме без преобразования можно использовать для управления некоторыми процессами или можно вывести на дисплей для считывания информации. Для преобразования цифрового сигнала в аналоговый (рис. 1.2) используют восстанавливающее устройство, состоящее из цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) и выходного сглаживающего фильтра. ЦАП преобразует цифровой сигнал в импульсы напряжения, которые подаются на сглаживающий фильтр, и на выходе этого фильтра получается непрерывный сигнал. Процесс преобразования сигнала в устройстве цифровой обработки проиллюстрирован временными диаграммами на рис. 1.2.

Наряду с цифровыми фильтрами существуют аналоговые устройства, которые могут производить обработку не квантованных дискретных сигналов по алгоритмам, аналогичным алгоритмам цифровой фильтрации. Такие устройства называют дискретными фильтрами. На вход дискретного фильтра можно подать дискретный сигнал, например, в виде АИМ-колебания, и этот сигнал может быть обработан в соответствии с заданным алгоритмом.

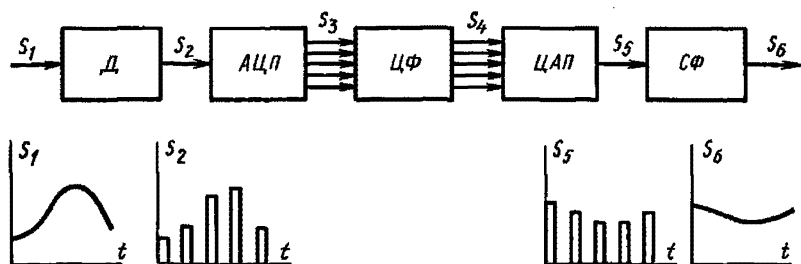


Рис. 1.2. Структурная схема системы цифровой обработки непрерывных сигналов и временные диаграммы:

Д — дискретизатор; АЦП — аналого-цифровой преобразователь; ЦФ — цифровой фильтр; ЦАП — цифро-аналоговый преобразователь; СФ — сглаживающий фильтр

Дискретные фильтры могут быть реализованы в виде некоторой аналоговой схемы, состоящей из линий задержки, сумматоров и перемножающих элементов типа тех, которые применяют в аналоговых вычислительных машинах. Практическое применение таких фильтров ограничено. Значительно больший интерес представляют разработанные недавно дискретные фильтры на приборах с зарядовой связью [12].

Подробное рассмотрение различных типов дискретных фильтров не входит в задачу данной книги. Однако математический аппарат теории дискретных фильтров очень полезен при теоретическом анализе прохождения сигналов через цифровые фильтры, так как позволяет, пренебрегая эффектами квантования, сформулировать и определить все основные параметры цифровых фильтров.

§ 1.3. Преимущества и недостатки цифровой обработки сигналов

Интенсивное развитие цифровой техники не означает, что должны быть полностью отброшены и забыты аналоговые устройства для обработки сигналов. Каждому из типов фильтров, каждому методу обработки сигналов присущи свои преимущества и недостатки и в зависимости от конкретных условий следует применять тот или иной тип фильтра.

Основным преимуществом цифровых фильтров перед аналоговыми является возможность реализации сложных алгоритмов обработки сигналов, которые неосуществимы с помощью аналоговой техники, например адаптивных алгоритмов, изменяющихся при изменении параметров входного сигнала.

Точность обработки сигнала цифровыми фильтрами определяется точностью выполняемых расчетов. Она может быть несоизмеримо выше точности обработки сигнала в аналоговых фильтрах.

Одним из источников погрешности аналоговых фильтров является нестабильность их параметров, вызываемая колебаниями температуры, старением, дрейфом нуля, изменением питающих напряжений и т. д. В цифровых фильтрах эти неприятные эффекты отсутствуют.

При разработке цифровых фильтров не возникает задача согласования нагрузок.

При обработке низкочастотных и инфранизкочастотных сигналов элементы пассивных аналоговых фильтров (индуктивные катушки и конденсаторы) оказываются очень громоздкими. В этом случае цифровые фильтры более компактны.

Недостатком цифровых фильтров является их большая сложность по сравнению с аналоговыми и более высокая стоимость. Ведь кроме процессора устройство для цифровой обработки сигналов содержит аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи и другие устройства сопряжения. Поэтому в тех случаях, когда алгоритм обработки сигналов несложен и не требуется высокой точности, целесообразнее применять аналоговые фильтры или дискретные фильтры на приборах с зарядовой связью. Они проще и дешевле, чем цифровые фильтры.

Другим существенным недостатком цифровых фильтров является их не очень высокое быстродействие. Чтобы

произвести обработку каждого значения поступающего сигнала, требуется проделать значительное число арифметических операций. Вследствие этого наивысшие частоты спектра сигналов, обрабатываемых цифровыми фильтрами, пока что не превышают нескольких мегагерц. Для обработки более высокочастотных сигналов применяют аналоговые фильтры на пассивных элементах и фильтры на поверхностных акустических волнах.

В цифровых фильтрах появляются специфические погрешности, вызванные дискретизацией, квантованием сигнала и округлением значений обрабатываемого сигнала в процессе вычислений. Чтобы сделать эти погрешности достаточно малыми, требуется внимательное их изучение.

Глава 2

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ

§ 2.1. Основы дискретизации непрерывных сигналов

Выбор частоты дискретизации. Как указывалось, процедура превращения непрерывных, или континуальных, сигналов в цифровые состоит из двух этапов: дискретизации и квантования. В результате первого этапа непрерывный сигнал заменяется дискретными отсчетными значениями, взятыми через определенные интервалы времени. Очень важен правильный выбор интервала дискретизации. Если отсчеты сигнала брать слишком редко, то быстрые изменения, скачки дискретизируемого сигнала могут остаться незамеченными. Если отсчеты брать слишком часто, то это исключит ошибки, но будет неэкономно, так как придется передавать слишком много значений сигнала.

Задача о выборе интервала дискретизации наиболее просто решается для сигналов с ограниченным спектром на основании *теоремы Котельникова*, или *теоремы отсчетов*.

В соответствии с теоремой Котельникова непрерывный сигнал $f(t)$, в спектре которого не содержится частот выше f_n , полностью описывается выборочными значениями $f(kT)$, отсчитанными через интервалы времени $T = 1/(2f_n) = \pi/\omega_n$. Аналитически это выражается в виде ряда Котельникова

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{\sin \omega_B (t - kT)}{\omega_B (t - kT)}. \quad (2.1)$$

Интервал времени $T = 1/(2f_B)$ между соседними отсчетами называют *интервалом Котельникова* или *интервалом Найквиста*.

В соответствии с теоремой Котельникова вместо непрерывного сигнала $f(t)$ с ограниченным спектром можно передавать дискретную последовательность значений $f(kT)$, причем интервал дискретизации T должен быть не более чем $1/(2f_B)$. Если отсчеты взять слишком редко, то это может привести к грубым ошибкам.

Практически все реальные сигналы имеют конечную длительность, и поэтому спектр их безграничен (см., например, рис. 2.1). Для таких сигналов оказывается невозможным указать значение частоты ω_B , выше которого спектр тождественно равен нулю. Это означает, что при любом значении интервала дискретизации $T = \pi/\omega_0$ последовательность дискретных отсчетов описывает исходный непрерывный сигнал с некоторой ошибкой. Величина этой ошибки определяется частью спектра сигнала, соответствующей частотам выше ω_0 . Более подробно ошибки дискретизации сигнала рассмотрены далее, при анализе ошибок восстановления непрерывного сигнала.

Рассмотрим в качестве примера дискретизацию прямоугольного импульса с амплитудой E и длительностью T_H (рис. 2.1, а). Спектральная плотность такого импульса описывается выражением

$$S(\omega) = ET_H \frac{\sin \frac{\omega T_H}{2}}{\frac{\omega T_H}{2}}.$$

График спектральной плотности $S(\omega)$ приведен на рис. 2.1, б. С ростом частоты величина $S(\omega)$ убывает медленно и не обращается строго в нуль, так что при любом значении частоты дискретизации дискретный сигнал описывает исходный прямоугольный импульс с некоторой ошибкой, и эта ошибка убывает медленно с ростом частоты дискретизации.

Пусть, например, $\omega_B = 4\pi/T_H$. Тогда $T = \pi/\omega_B = T_H/4$. При этом импульс описывается пятью отсчетными значениями; крайние отсчетные значения попадают на границы импульсов. Если эти отсчетные значения принять равными E и затем попытаться восстановить исходный сигнал с помощью ряда Котельникова (2.1), то получим график, изображенный на рис. 2.1, в. Восстановленный сигнал имеет сглаженную форму и несколько большую

длительность, чем исходный прямоугольный импульс. Сглаженный характер восстановленного сигнала является следствием отбрасывания высокочастотных частей спектра, а несоответствие длительностей исходного и восстановленного сигналов можно устранить путем более тщательного подбора величины интервала дискретизации T .

Выберем $\omega_b = 5\pi/T_n$. Тогда $T = T_n/5$, и граница импульса $t = T_c/2$ будет находиться точно посередине между отсчетными моментами времени $t = 2T$ и $t = 3T$. При этом сигнал, восстановленный с помощью ряда Котельникова (2.1), (рис. 2.1, е), будет иметь такую же длительность, как и исходный прямоугольный импульс.

Рассмотренный пример позволяет сделать следующий вывод. Импульсы с резкими границами типа прямоугольного имеют медленно убывающий спектр, и поэтому их дискретизация затруднительна. Так, при описании прямоугольного импульса пятью выборочными значениями сигнал, восстановленный по этим значениям с помощью ряда Котельникова, сильно отличается от исходного сигнала.

Совсем иные результаты получаются при дискретизации сигналов сглаженной формы. В качестве примера рассмотрим дискретизацию импульса гауссовой (колокольной) формы (рис. 2.2, а)

$$f(t) = E e^{-t^2/\tau^2}.$$

Спектральная плотность такого импульса также описывается гауссовой кривой

$$S_f(\omega) = E \sqrt{\pi} \tau e^{-\omega^2 \tau^2 / 4}.$$

График спектральной плотности $S_f(\omega)$ приведен на рис. 2.2, б. Функция $S_f(\omega)$ имеет быстро убывающий характер, так что уже

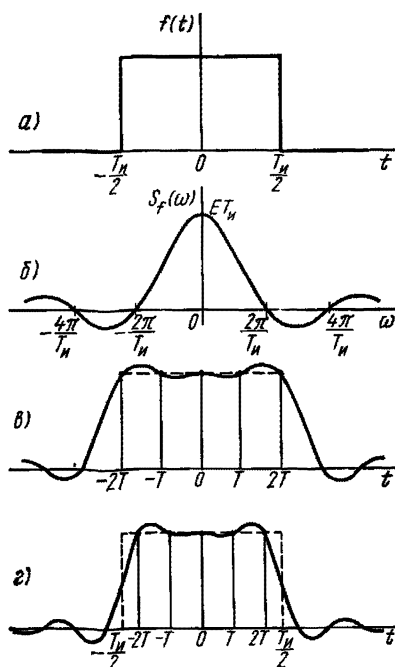


Рис. 2.1. Дискретизация прямоугольного импульса:

а — исходный прямоугольный импульс;
б — его спектр; в — дискретизация прямоугольного импульса при $T = T_n/4$;
г — то же, при $T = T_n/5$

при $\omega > 4/\tau$ можно считать, что $S_f(\omega) \approx 0$. Поэтому выбираем $\omega_B = 4/\tau$, тогда $T = \pi/\omega_B = \pi\tau/4$. Исходный колокольный импульс можно описать пятью выборочными значениями (рис. 2.2, а):

$$f(0) = E; \quad f(\pm T) = Ee^{-(\pi/4)^2} = 0,539E \text{ и}$$

$$f(\pm 2T) = Ee^{-(\pi/2)^2} = 0,0845E.$$

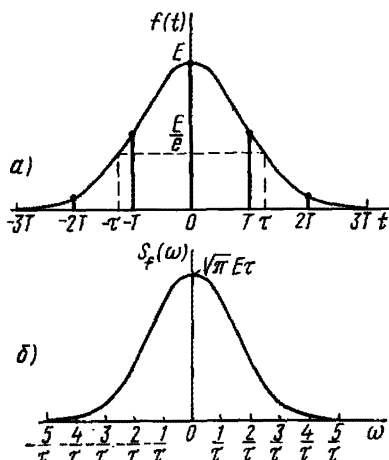


Рис. 2.2. Дискретизация гауссового (колокольного) импульса: а — исходный импульс; б — его спектр

Как показывают расчеты, сигнал, восстановленный по этим выборочным значениям с помощью ряда Котельникова (2.7), отличается от исходного на величину, не превышающую 0,3%, так, что на рис. 2.2, а графики исходного и восстановленного сигналов неразличимы.

Отметим, что для получения такой высокой точности потребовалось лишь 5 отсчетных значений сигнала, в то время как описание прямоугольного импульса пятью отсчетными значениями обеспечивает очень низкую точность.

Спектры дискретизированных сигналов. Важной характеристикой дискретизированного колебания является его спектр.

Наиболее просто определяется спектр дискретизированного колебания $\psi(t)$, записанного в виде модулированной последовательности δ -функций:

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \delta(t - kT) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT). \quad (2.2)$$

Если известен спектр исходного непрерывного колебания $f(t)$, то спектр дискретизированного сигнала $\psi(t)$ определяется выражением

$$S_\psi(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_f\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right), \quad (2.3)$$

где $S_f(\omega)$ — спектр исходного непрерывного сигнала $f(t)$. Вывод выражения (2.3) приведен в приложении 1.

Из (2.3) следует, что спектр дискретизированного сигнала представляет собой периодическое повторение спектров исходного непрерывного сигнала $f(t)$. Если спектр непрерывного сигнала $f(t)$ $S_f(\omega)$ ограничен по ширине (рис. 2.3, а) и интервал дискретизации T удовлетворяет условию $T \leq \pi/\omega_B$, то период повторения спектра дискретизированного сигнала $2\pi/T \geq 2\omega_B$, так что соседние части спектра (соответствующие $S_f(\omega - n(2\pi/T))$ и $S_f[\omega - (n-1)(2\pi/T)]$) не перекрываются (рис. 2.3, б).

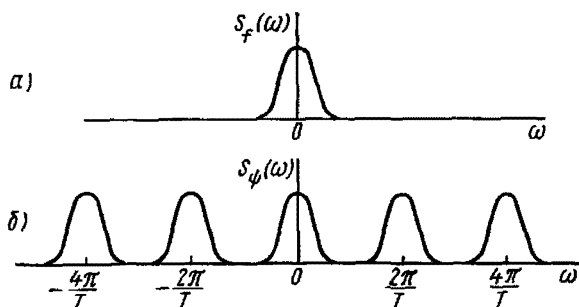


Рис. 2.3. Спектры дискретизированных сигналов: а — спектр исходного непрерывного сигнала; б — спектр модулированной последовательности δ -функций

Определим теперь спектр дискретизированного сигнала в виде модулированной последовательности импульсов (АИМ-колебания) (рис. 2.4, а)

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) F(t - kT), \quad (2.4)$$

где $F(t)$ — единичный импульс АИМ-колебания (рис. 2.4, б).

Покажем, что $\varphi(t)$ — это свертка сигналов $\psi(t)$ и $F(t)$. Для этого произведем операцию свертывания сигналов $\psi(t)$ и $F(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) F(t-x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t-x) f(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kT) dx = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(t - kT) f(kT) = \varphi(t). \end{aligned}$$

На основании теоремы о спектре свертки двух сигналов спектральная плотность АИМ-колебания равна произведению спектральных плотностей сигналов $\varphi(t)$ и $F(t)$:

$$S_{\varphi}(\omega) = S_{\psi}(\omega) S_F(\omega). \quad (2.5)$$

Если $F(t)$ — импульс прямоугольной формы единичной площади длительностью τ , то его спектральная плотность описывается выражением

$$S_F(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) и (2.3) в (2.5), получим выражение для спектральной плотности дискретизированного колебания в виде модулированной по амплитуде последовательности прямоугольных импульсов

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_f\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right). \quad (2.7)$$

График спектральной плотности колебания $\varphi(t)$ приведен на рис. 2.5, а. Огибающей спектра является спектральная

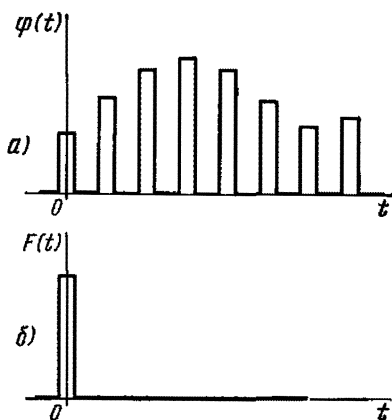


Рис. 2.4. АИМ-колебание (а) и единичный импульс АИМ-колебания (б)

плотность импульса $F(t)$. Если длительность импульса $F(t)$ мала по сравнению с интервалом дискретизации T , то его спектр (2.6) оказывается широким, и можно считать, что в полосе частот $-\pi/T < \omega < \pi/T$ $S_F(\omega) \approx 1$. В этом случае центральная часть спектра $S_{\varphi}(\omega)$ повторяет по форме спектр исходного непрерывного колебания $f(t)$.

Восстановление непрерывного сигнала. Погрешности дискретизации и восстановления сигнала. Если

период дискретизации достаточно мал, так что выполняется условие $T < \pi/\omega_B$, то соседние составляющие спектра дискретизированного колебания не перекрываются, как показано на рис. 2.5, а. В этом случае легко указать способ восстановления непрерывного колебания из дискретного, который состоит в том, что дискретный сигнал следует пропустить через идеальный

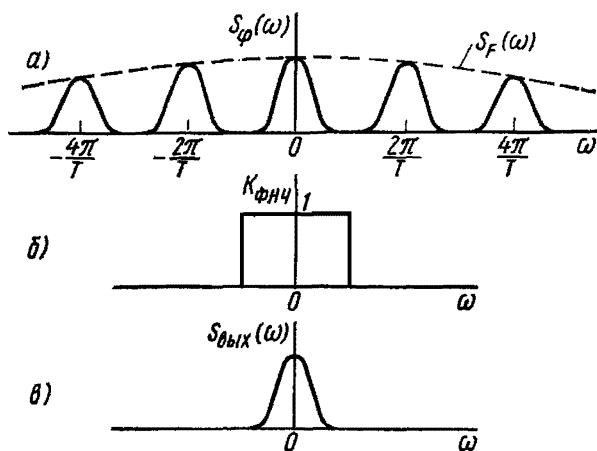


Рис. 2.5. Спектр дискретного колебания в виде последовательности модулированных импульсов (а), частотная характеристика фильтра нижних частот (б) и спектр восстановленного сигнала (в)

фильтр нижних частот с полосой пропускания ($-\omega_0, \omega_0$) (рис. 2.5, б). При этом из спектра дискретизированного сигнала $S_\varphi(\omega)$ будет выделена средняя часть (рис. 2.5, в), которая с точностью до постоянного множителя совпадает со спектром исходного непрерывного колебания $f(t)$.

Однако если исходное непрерывное колебание таково, что его спектр с ростом частоты не обращается строго в нуль, то при любом выборе интервала дискретизации соседние составляющие спектра дискретизированного колебания будут частично перекрываться (рис. 2.6, а). Если сигнал с таким спектром пропускать через идеальный фильтр нижних частот, то на выходе фильтра получится колебание, отличающееся от исходного непрерывного сигнала $f(t)$. Это отличие состоит не только в том, что «отрезана» часть спектра выше частоты $\omega_0 = \pi/T$, но также и в том,

что на спектр этого колебания накладываются «хвосты» от соседних спектральных составляющих (рис. 2.6, а).

Наиболее простой и очевидный способ уменьшения ошибки дискретизации — это повышение частоты дискретизации. Однако для получения достаточно малой ошибки частоту дискретизации приходится брать очень высокой, особенно если спектр сигнала убывает медленно, что в ряде случаев бывает нежелательно.

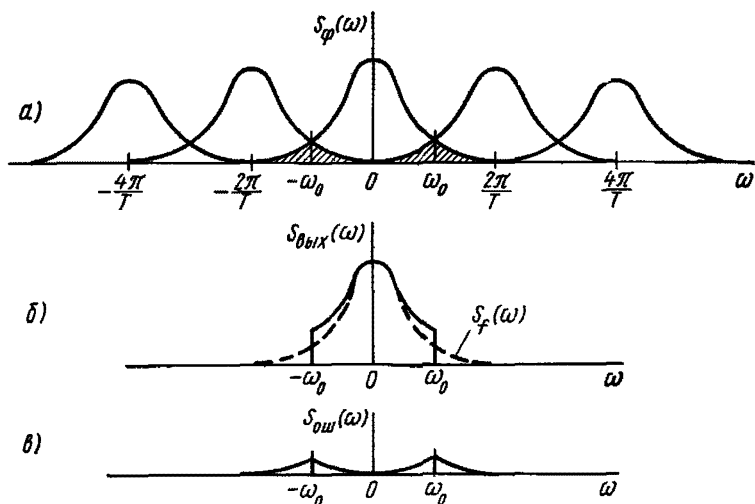


Рис. 2.6. Ошибки дискретизации сигнала со спектром, убывающим асимптотически:

а — спектр дискретизированного сигнала; б — спектр сигнала после прохождения через идеальный фильтр нижних частот; в — спектр сигнала ошибки

Для уменьшения погрешности дискретизации можно перед дискретизацией пропустить сигнал через фильтр нижних частот с частотной характеристикой, близкой к прямоугольной. При этом спектр сигнала становится быстро убывающим, почти ограниченным, и дальнейшая дискретизация происходит практически без ошибок. Результирующая ошибка в этом случае определяется искажениями спектра при прохождении сигнала через фильтр нижних частот. Вследствие того, что на спектр сигнала в области частот $(-\omega_0, \omega_0)$ не накладываются «хвосты» от соседних составляющих, эта ошибка получается приблизительно в 2 раза меньше, чем при непосредственной дискретизации сигнала.

Пропускание сигнала через фильтр нижних частот перед дискретизацией является очень полезной мерой для снижения погрешности, если дискретизация сигнала производится при наличии широкополосного шума на входе. При прохождении через фильтр нижних частот дисперсия шума уменьшается и соответственно уменьшается ошибка дискретизации.

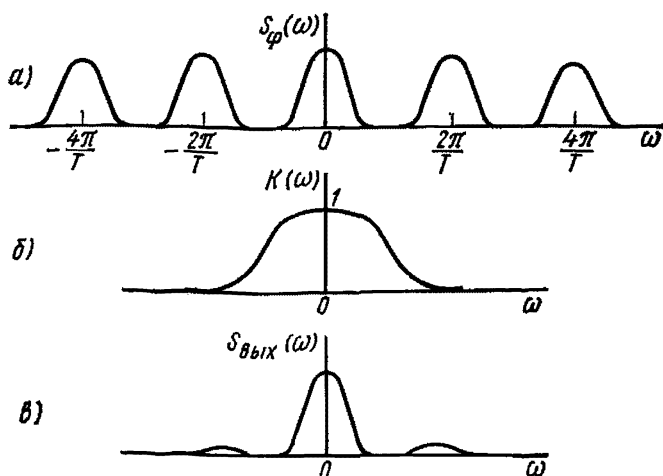


Рис. 2.7. Ошибки восстановления сигнала при неидеальной характеристике фильтра нижних частот:
 а — спектр дискретизированного сигнала; б — характеристика ФНЧ; в — спектр сигнала на выходе ФНЧ

Еще одним источником ошибки является неидеальная фильтрация в процессе восстановления непрерывного сигнала из дискретного. Идеальная прямоугольная форма частотной характеристики фильтра нижних частот практически не может быть реализована; для сглаживания сигнала обычно применяют фильтры, имеющие монотонно спадающую характеристику (рис. 2.7, б). Если на вход такого фильтра подать дискретизированный сигнал со спектром, изображенным на рис. 2.7, а, то на выходе фильтра помимо основного сигнала, которому соответствует центральная часть спектра, появятся дополнительные составляющие, вызванные неполным подавлением боковых частей спектра (рис. 2.7, в). Вследствие этого восстановленный сигнал будет отличаться по форме от исходного непрерывного сигнала. Главный метод борьбы с этими

погрешностями состоит в увеличении частоты дискретизации. Однако увеличение частоты дискретизации приводит к усложнению и удорожанию устройства обработки сигналов. Поэтому в каждом конкретном случае приходится искать компромиссное решение, исходя из характера сигнала, требуемой точности его восстановления, характеристик применяемого сглаживающего фильтра и других факторов. Все это приводит к тому, что в реальных устройствах частота дискретизации выбирается равной не $2f_B$, как следует из теоремы Котельникова, а в 2—5 раз выше.

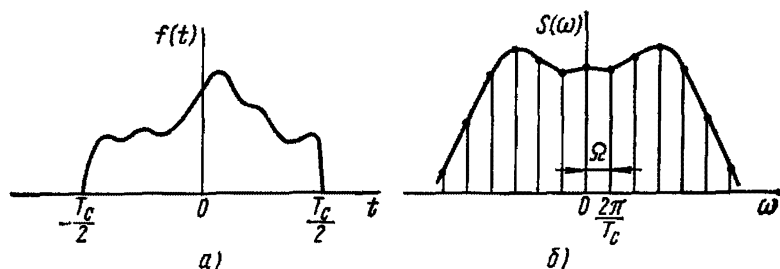


Рис. 2.8. Сигнал с конечной длительностью и его спектр

Дискретизация сигналов в спектральной области. Для сигналов с конечной длительностью (рис. 2.8, а) можно сформулировать теорему, аналогичную теореме Котельникова, но не для временных выборок, а для спектральных. Такая возможность следует из симметрии преобразований Фурье

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Чтобы записать разложение спектра в ряд Котельникова, заменим в формуле (2.1) t на ω , а ω на t , вместо ширины спектра $2\omega_B$ подставим длительность сигнала T_c , а вместо $T = \pi/\omega_B$ подставим $2\pi/T_c = \Omega$. В результате получим

$$\dot{S}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{S}(n\Omega) \frac{\sin \frac{T_c}{2} (\omega - n\Omega)}{\frac{T_c}{2} (\omega - n\Omega)}. \quad (2.8)$$

Таким образом, спектр сигнала с конечной длительностью полностью определяется выборками, взятыми с интервалом $\Omega = 2\pi/T_c$ (рис. 2. 8, б).

Число степеней свободы сигнала. Строго говоря, все реальные сигналы имеют конечную длительность, и следовательно, бесконечно протяженный спектр. Однако начиная с некоторых значений частоты, спектр становится настолько мал, что им можно пренебречь. Таким образом, сигнал может быть приближенно описан конечным числом выборочных значений. Число выборочных значений, которыми полностью описывается сигнал, называют числом степеней свободы сигнала.

Найдем число степеней свободы сигнала при дискретизации по времени. Пусть длительность сигнала равна T_c , а наивысшая частота спектра f_B . Тогда сигнал может быть описан выборками, взятыми с интервалом $1/(2f_B)$ (рис. 2.9, а).

Общее число выборок N будет равно $T_c/T = 2T_c f_B$.

При дискретизации сигнала в спектральной области (рис. 2.9, б) общее число спектральных линий $2\omega_B/\Omega = 2T_c f_B$, т. е. совпадает с числом выборочных значений при временной дискретизации сигнала и равно числу степеней свободы сигнала N .

Некоторая специфика дискретизации в спектральной области состоит в том, что $\dot{S}(\omega)$ — величина комплексная, т. е. фактическое количество числовых значений оказывается вдвое больше. Однако $\dot{S}(-\omega) = S^*(\omega)$, т. е. действительная часть спектральной плотности $\text{Re}\dot{S}(\omega)$ — четная функция частоты, а мнимая часть $\text{Im}\dot{S}(\omega)$ — нечетная функция. Вследствие этого число независимых отсчетных значений спектра сокращается вдвое и оказывается равным $N = 2T_c f_B$.

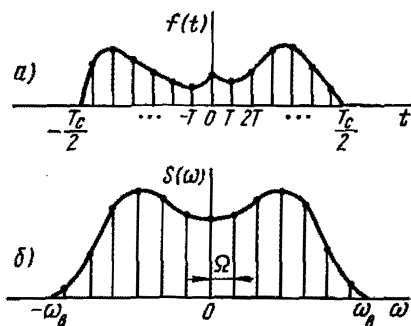


Рис. 2.9. К определению числа степеней свободы сигнала:

а — при дискретизации по временной области; б — при дискретизации в спектральной области

§ 2.2. Квантование сигналов

Характеристики квантования. Как говорилось в гл. 1, квантование — это дискретизация сигналов по уровню. Необходимость такой дискретизации вызвана тем, что для осуществления обработки сигнала цифровым фильтром каждое его значение должно быть описано числом, количество разрядов которого конечно. Иными словами, квантование равноценно округлению значений сигнала с точностью до единицы последнего разряда.

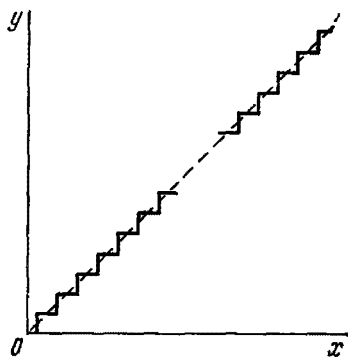


Рис. 2.10. Характеристика квантования

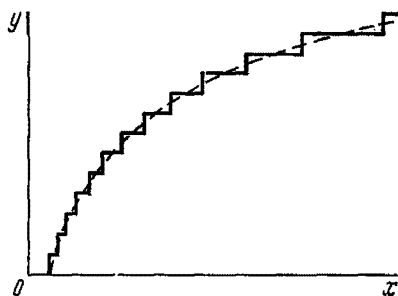


Рис. 2.11. Квантование с логарифмической характеристикой

Квантование сигналов можно описать графически с помощью *характеристики квантования* (рис. 2.10), где по оси абсцисс отложены значения непрерывного сигнала, а по оси ординат — значения квантованного сигнала. Величину *шага квантования* Δ выбирают, исходя из необходимой точности передачи сигнала. Квантование с постоянным шагом Δ называют **равномерным**. Равномерное квантование сигналов является наиболее простым и распространенным.

Однако равномерное квантование в отдельных случаях оказывается неудобным. Например, если передаваемый сигнал может принимать очень большие и очень маленькие значения, то при постоянной величине интервала квантования относительная точность передачи малых значений сигнала оказывается значительно хуже, чем больших значений. В этих случаях иногда применяют нелинейное,

например *логарифмическое квантование* (рис. 2.11), когда шаг квантования пропорционален логарифму входного напряжения. При квантовании малых значений сигнала шаг квантования оказывается малым, а точность передачи сигнала — достаточно высокой. При больших значениях входного сигнала интервал квантования увеличивается. Таким образом, использование логарифмического квантования позволяет получить высокую точность передачи сигнала при не слишком большом числе квантованных уровней сигнала.

Аналого-цифровое преобразование. Процесс квантования сигналов обычно производится одновременно с его кодированием, когда на выходе получается сигнал, представленный в некотором цифровом коде. Сигнал в таком виде может быть непосредственно введен в цифровую вычислительную машину. Конкретный вид представления сигнала должен соответствовать системе представления чисел в используемой ЭЦВМ.

Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) при подаче управляющего сигнала формирует значения входного сигнала, представленные в цифровом коде. Темп подачи управляющих сигналов, т. е. темп взятия выборок, определяется шириной спектра сигнала и назначением того устройства, где используется АЦП.

АЦП используют не только для цифровой обработки сигналов, они являются основным узлом любого цифрового измерительного прибора. Однако требования, которые предъявляют к АЦП в цифровых измерительных приборах и в системах цифровой обработки сигналов, могут быть различными. Цифровые измерительные приборы предназначены в основном для измерения постоянных или медленно изменяющихся величин. Поэтому к быстродействию АЦП, используемых в таких приборах, не предъявляются серьезных требований.

Другое дело — системы цифровой обработки сигналов, достаточно быстро изменяющихся во времени. В таких системах устройство дискретизации и квантования должно выдавать значения сигнала с достаточно малым интервалом дискретизации T , что требует высокого быстродействия АЦП.

АЦП может осуществлять одновременно и дискретизацию во времени, и квантование сигналов. Однако в этом случае при недостаточном быстродействии АЦП могут возникнуть специфические погрешности, называемые а п е р-

турными. Природа этих погрешностей состоит в следующем.

Преобразование аналогового сигнала в цифровой происходит мгновенно. Процесс преобразования длится некоторое время Δt_a , которое называют апертурным временем. Если преобразуемый сигнал изменяется во времени, то за время Δt_a его величина успевает несколько измениться (рис. 2.12). В результате сигнал на выходе

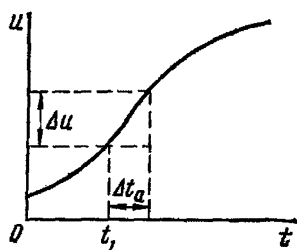


Рис. 2.12. К определению апертурной погрешности

АЦП не соответствует точно значению входного сигнала u_1 в отсчетный момент времени t_1 . Возникает апертурная погрешность, которая может достигать величины $\Delta u = (du/dt)_{t=t_1} \Delta t_a$. Величину апертурной погрешности можно определить, если задаться шириной спектра сигнала и временем преобразования (быстродействием) АЦП.

Рассмотрим простейший вариант, когда входной сигнал является гармоническим с частотой ω_0 и амплитудой U_0 . Максимальное значение производной гармонического сигнала наблюдается в момент пересечения оси абсцисс и равно $du/dt_{\max} = \omega_0 U_0$. Апертурная погрешность, соответствующая этому моменту времени, оказывается равной $\Delta u_{\max} = \omega_0 U_0 \Delta t_a$. Если требуется, чтобы Δu не превышало единицы последнего разряда (в двоичной системе счисления), то для n -разрядного АЦП должно выполняться условие для максимальной частоты (ширины спектра) преобразуемого сигнала

$$\omega_0 \leq \frac{1}{2^n \Delta t_a}, \text{ откуда } \Delta t_a \leq \frac{1}{2^n \omega_0}.$$

Сравним апертурное время с величиной периода дискретизации сигнала. Если наивысшая частота спектра сигнала равна ω_0 , то в соответствии с теоремой Котельникова интервал дискретизации должен быть не более чем π/ω_0 , а практически его выбирают в 2—5 раз меньше, т. е.

$$T = (0,2 \div 0,5) \frac{\pi}{\omega_0}.$$

Таким образом, апертурное время Δt_a , т. е. время обработки сигнала в АЦП, должно быть приблизительно в

2^n раз меньше интервала дискретизации. Это очень невыгодно, так как АЦП должен работать лишь малую часть периода дискретизации, и поэтому быстродействие такой схемы дискретизации и кодирования оказывается невысоким.

Скорость дискретизации и квантования сигналов можно повысить на несколько порядков (в 2^n раз), если перед квантованием преобразовать сигнал так, чтобы он принял ступенчатую форму (рис. 2.13). Это осуществляется с помощью специального устройства выборки и запоминания, которое фиксирует значения сигнала в отсчетные моменты времени t_1, t_2, \dots и до следующего отсчетного момента поддерживает это значение постоянным. Теперь АЦП может обрабатывать сигнал в течение всего периода дискретизации T , вследствие чего быстродействие устройства в целом значительно повышается.

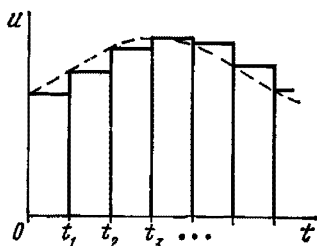


Рис. 2.13. Сигнал на выходе устройства выборки и запоминания

Рассмотрим еще один вид погрешности квантования, который называют шумом квантования.

Квантование — это округление значений сигнала до ближайшего дискретного значения. При этом каждое округленное значение отличается от первоначального (истинного) значения сигнала на величину ξ , которая является ошибкой округления и не превосходит по величине половины шага квантования $\Delta/2$. Если входной сигнал неизвестен точно, то ошибка округления ξ является случайной величиной. При малом шаге квантования распределение величины ξ близко к равномерному (рис. 2.14, а). Последовательность значений ошибки округления ξ , возникающей при квантовании дискретного сигнала $x(kT)$, образует дискретный случайный процесс $\xi(kT)$ (рис. 2.14, б), называемый шумом квантования. Квантованный сигнал можно представить как сумму неквантованного дискретного сигнала $x(kT)$ и шума квантования $\xi(kT)$. Дисперсию шума квантования вычисляют как дисперсию закона равномерного распределения

$$\sigma_{\xi}^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \xi^2 p(\xi) d\xi = \frac{\Delta^2}{12},$$

где Δ — шаг квантования.

При достаточно малом шаге квантования и правильно выбранном интервале дискретизации за время между соседними отсчетами значение сигнала обычно успевает измениться на много шагов квантования. При этом соседние значения ошибки $\xi(kT)$ оказываются практически некоррелированными друг с другом.

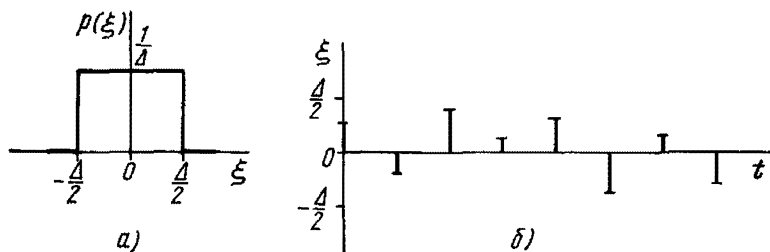


Рис. 2.14. К определению шума квантования:
 а — плотность вероятности; б — реализация

Апертурные погрешности и шум квантования — это не единственные источники погрешности аналого-цифрового преобразования. Существуют и другие источники погрешностей, связанные с несовершенством работы схемы выборки и запоминания, с нелинейностью характеристик отдельных элементов и т. д. Подробный анализ погрешностей, возникающих при дискретизации и квантовании, приведен в [9] и [10].

§ 2.3. Устройства для дискретизации, квантования и восстановления непрерывных сигналов

Схема выборки и запоминания. Схема выборки и запоминания — это, по существу, дискретизирующее устройство, подготавливающее сигнал к дальнейшей обработке в АЦП.

Типичная структурная схема устройства выборки и запоминания приведена на рис. 2.15, а. Входной непрерывный сигнал u_1 подается на электронный ключ K , который управляется стробирующими импульсами малой длительности (рис. 2.15, б). В момент подачи стробирующего импульса электронный ключ открывается, сигнал через него поступает на накопительный элемент HE (обычно это конденсатор) и заряжает его до значения входного напряжения (рис. 2.15, в). После этого ключ закрывается и напря-

жение на накопительном элементе остается неизменным до прихода следующего стробирующего импульса.

Основная погрешность схемы выборки и запоминания связана с конечностью времени заряда накопительного элемента. Эта погрешность во многом аналогична апертурной погрешности в аналого-цифровых преобразователях. Для снижения этой погрешности необходимо разумно выбирать параметры схемы электронного ключа и накопительной цепи.

Аналого-цифровые преобразователи. АЦП, преобразующие аналоговый сигнал (напряжение) в цифровой код, являются одним из наиболее важных и ответственных узлов в системе цифровой обработки сигналов. В настоящее время существует много различных типов АЦП. Их подробная классификация и принципы работы приведены в [9] и [10].

Наиболее простыми являются последовательные АЦП, где операции, относящиеся к различным разрядам цифрового кода, выполняются последовательно. Основным недостатком АЦП такого типа является невысокое быстродействие, так как для обработки сигнала требуется выполнить около 2^n логических операций, где n — число двоичных разрядов.

В качестве примера рассмотрим структурную схему АЦП, основанного на преобразовании напряжения во времени интервал (рис. 2.16, а). Основу схемы составляет генератор ступенчатого напряжения, который управляется генератором тактовых импульсов. Напряжение на выходе генератора ступенчатого напряжения увеличивается с приходом каждого очередного тактового импульса на величину Δ , равную ширине шага квантования (рис. 2.16, б). Схема сравнения фиксирует момент, когда ступенчатое напряжение превысит кодируемое входное напряжение, и в этот момент вырабатывается импульс

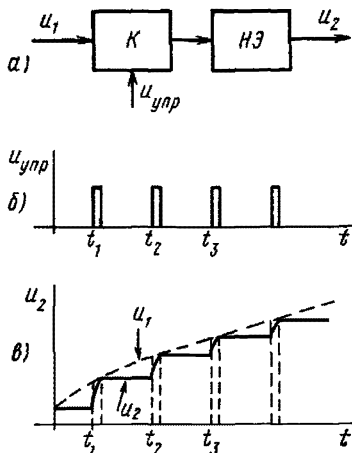


Рис. 2.15. Схема выборки и запоминания:

а — структурная схема; б — управляющие импульсы; в — сигнал на выходе схемы

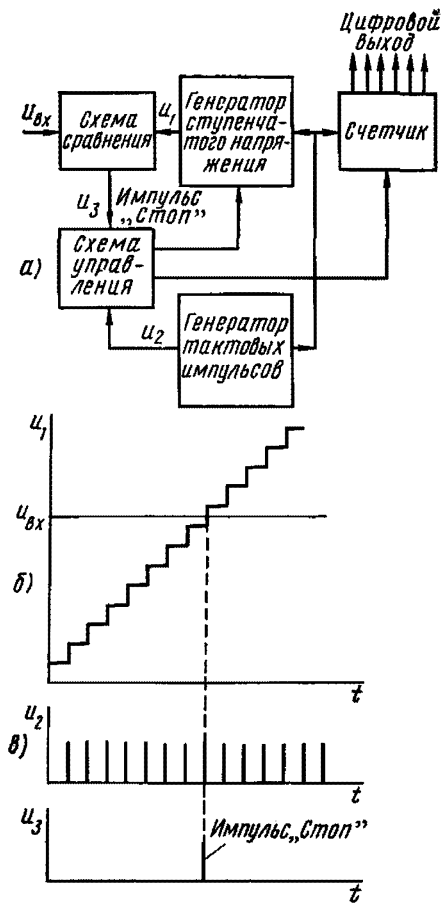


Рис. 2.16. Аналого-цифровой преобразователь, основанный на преобразовании напряжения во временной интервал:

а — структурная схема; б — ступенчатое напряжение; в — тактовые импульсы

«Стоп». Счетчик подсчитывает число тактовых импульсов от момента запуска генератора ступенчатых импульсов до появления импульсов «Стоп» и преобразует это число в двоичный цифровой код.

АЦП рассмотренного типа обладают хорошей точностью, но невысоким быстродействием; наибольшая скорость обработки сигналов составляет около 1000 преобразований в секунду. Поэтому АЦП последовательного типа можно применять только для обработки низкочастотных сигналов и в цифровых измерительных приборах, например в цифровых вольтметрах.

Значительно лучшим быстродействием обладают АЦП параллельного и последовательно-параллельного типов, где логические операции обработки сигнала, относящиеся к различным разрядам цифрового кода, производятся одновременно.

Такие АЦП имеют сложную структуру, и поэтому в данной книге не рассматриваются. Время преобразования сигналов в современных АЦП параллельного типа составляет 30—50 нс. Такое высокое быстродействие достигается за счет потери точности. Лучшие быстродействующие преобразователи имеют 8 двоичных разрядов при максимальной частоте преобразования сигнала около 30 МГц.

Наряду с подобными весьма быстродействующими АЦП разрабатываются преобразователи, обеспечивающие высокую точность обработки сигналов, порядка 0,001%. Время обработки сигналов в таких преобразователях составляет несколько десятков микросекунд.

Благодаря применению микроэлектронной технологии современные АЦП выполняются в виде компактных блоков. В последнее время разработаны АЦП, выполненные в виде монолитной интегральной схемы.

Цифро-аналоговые преобразователи. По структуре и принципу действия ЦАП проще, чем АЦП. Достаточно сказать, что некоторые АЦП содержат внутри себя ЦАП как составной элемент схемы.

Наиболее просто цифро-аналоговое преобразование производится посредством двоично-взвешенного суммирования напряжений или токов. Рассмотрим принцип их действия на примере четырехразрядного ЦАП, структурная схема которого изображена на рис. 2.17. Каждому двоичному разряду в схеме соответствует сопротивление R_i и электронное реле P , сопротивление которого близко к нулю, если в данном разряде стоит число 1, и очень велико, если в разряде стоит число 0. Значения сопротивлений в соседних разрядах различаются в 2 раза. Вследствие этого суммарный ток I , проходящий в общей цепи, пропорционален значению двоичного числа, поступающего на вход преобразователя. Например, если на вход преобразователя поступила двоичная кодовая группа 1001, которая соответствует числу 9, то суммарный ток

$$I = \frac{E}{8R} \cdot 1 + \frac{E}{4R} \cdot 0 + \frac{E}{2R} \cdot 0 + \frac{E}{R} \cdot 1 = \frac{E}{8R} \cdot 9,$$

т. е. пропорционален числу 9.

Кроме рассмотренного типа преобразователя существует еще много других, с различными параметрами, основанных на различных принципах. Производство их хорошо

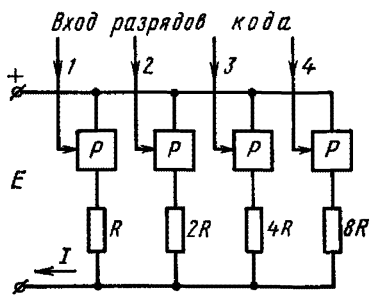


Рис. 2.17. Простейший четырехразрядный цифро-аналоговый преобразователь

налажено, значительную часть ЦАП выпускают в виде интегральных схем.

Сглаживающие фильтры. Если на вход ЦАП подавать цифровой сигнал, представляющий собой последовательность двоичных кодовых групп, то на выходе получится либо последовательность модулированных по высоте прямоугольных импульсов (АИМ-колебание) (см. рис. 2.3, б), либо ступенчатый сигнал, который также можно рассматривать как АИМ-колебание с длительностью импульсов, равной периоду повторения.

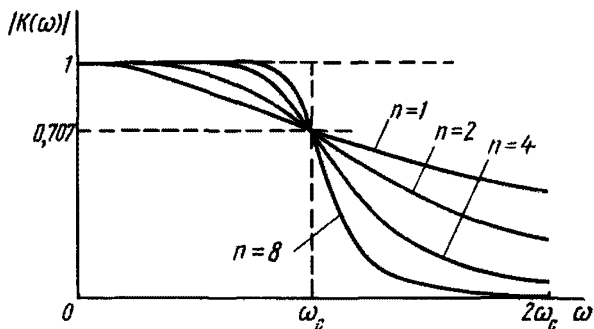


Рис. 2.18. Частотные характеристики фильтров Баттерворта

Идея восстановления непрерывного сигнала из АИМ-колебания была рассмотрена в § 2.1. Для этого достаточно АИМ-колебание пропустить через фильтр нижних частот с полосой пропускания, равной π/T , где T — период дискретизации сигнала. Однако практическая реализация такой фильтрации наталкивается на трудности, связанные с невозможностью создания фильтра нижних частот с идеальной прямоугольной формой частотной характеристики.

Для восстановления непрерывных сигналов обычно используют фильтры нижних частот Баттерворта с частотной характеристикой вида

$$|K(\omega)|^2 = \frac{A}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}},$$

где ω_c — частота среза этого фильтра, соответствующая затуханию 3 дБ (рис. 2.18). В монографии [9] приводится анализ погрешности восстановления сигнала с помощью фильтров Баттерворта. При частоте дискретизации сигнала

ла, равной $3\omega_c$, для получения погрешности, не превышающей 1%, необходимо применять фильтр, у которого $n = 10$.

Кроме фильтров нижних частот Баттерворта для восстановления непрерывных сигналов иногда применяют интерполирующие фильтры [9], принцип действия которых основан на применении линейной или квадратичной интерполяции. Интерполирующие фильтры имеют неплохие параметры, но более сложную структуру, чем обычные фильтры нижних частот.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Выбрать интервал дискретизации сигнала в виде треугольного импульса длительностью $T_{\text{и}}$. Оценить погрешность дискретизации.

2. Выбрать интервал дискретизации сигнала в виде косинусоидального импульса (рис. 2.19). Оценить погрешность дискретизации.

3. Определить спектр дискретизированного прямоугольного импульса, заданного пятью отсчетами.

4. Определить спектр дискретизированного треугольного импульса, рассмотренного в задаче 1.

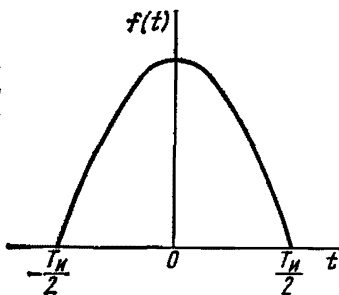


Рис. 2.19. Косинусоидальный импульс

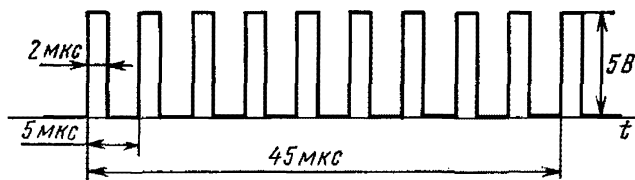


Рис. 2.20. Дискретизированный прямоугольный импульс

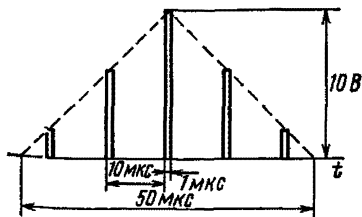


Рис. 2.21. Дискретизированный треугольный импульс

5. Определить спектр дискретизированного прямоугольного импульса, изображенного на рис. 2.20. Выбрать полосу пропускания идеального фильтра нижних частот для восстановления непрерывного сигнала, обеспечивающую наименьшую погрешность восстановления.

6. Решить задачу 5 для дискретизированного треугольного импульса, изображенного на рис. 2.21.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

§ 3.1. Постановка задачи

При теоретическом исследовании процессов цифровой фильтрации при малых ошибках квантования для упрощения анализа обычно пренебрегают эффектами квантования, т. е. при таком анализе вместо цифровых сигналов рассматривают дискретные.

В тех случаях, когда нужно учесть эффекты квантования, обычно поступают следующим образом. Входной квантованный сигнал представляют в виде суммы неквантованного дискретного сигнала и шума квантования. Далее, поскольку фильтр линейен, рассматривают прохождение отдельно неквантованного дискретного сигнала и шума квантования и потом на выходе фильтра их аддитивно суммируют.

Таким образом, дискретные неквантованные сигналы играют важную роль в теории цифровой фильтрации. В этой и следующей главах будут рассмотрены в основном дискретные сигналы.

Теория дискретных сигналов во многом похожа на теорию непрерывных (аналоговых) сигналов. Это связано с тем, что дискретное колебание при правильно выбранной частоте дискретизации несет в себе всю или почти всю информацию об исходном непрерывном колебании. Такая глубокая связь между дискретными и непрерывными сигналами, возможность их взаимного преобразования объясняют аналогию их свойств, схожесть методов математического описания. Практически каждому методу математического описания непрерывного сигнала соответствует свой аналог в теории дискретных сигналов. Обычному преобразованию Фурье непрерывных сигналов соответствует дискретное преобразование Фурье, преобразованию Лапласа соответствуют дискретное преобразование Лапласа и z -преобразование. Поэтому при анализе методов математического описания дискретных сигналов постоянно пользуются этой аналогией.

§ 3.2. Дискретное преобразование Фурье

Из предыдущего раздела о дискретизации непрерывных сигналов следует, что реальные сигналы могут быть описаны выборками как в спектральной, так и во временной области. И дискретный спектр, и дискретный сигнал полностью описывают исходный непрерывный (континуальный) сигнал. Однако чтобы найти дискретный спектр по заданному дискретному сигналу, надо проделать трудоемкие расчеты: сначала по дискретному сигналу восстановить непрерывный сигнал, затем с помощью преобразования Фурье найти непрерывный спектр, затем его дискретизировать. Аналогичную процедуру необходимо проделать для обратного преобразования. Непосредственный переход от дискретного сигнала к дискретному спектру и наоборот возможен с использованием дискретного преобразования Фурье.

Рассмотрим непрерывный сигнал $f(t)$ конечной длительности ($0 < t < T_0$) с числом степеней свободы, равным N . Для этого сигнала можно записать разложение в ряд Котельникова:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \frac{\sin \omega_B (t - kT)}{\omega_B (t - kT)}.$$

С помощью обычного преобразования Фурье найдем спектр этого сигнала:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \frac{\sin \omega_B (t - kT)}{\omega_B (t - kT)} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega_B (t - kT)}{\omega_B (t - kT)} e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Непосредственное вычисление интеграла в этой формуле — процедура трудоемкая. Однако это нетрудно сделать другим способом.

Рассмотрим спектр $S_0(\omega)$, который определяется выражением

$$S_0(\omega) = \begin{cases} 1, & -\omega_B < \omega < \omega_B, \\ 0, & \omega < -\omega_B, \omega > \omega_B. \end{cases}$$

Применив к нему обратное преобразование Фурье, получим, что ему соответствует временная функция

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\omega_B}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}.$$

Очевидно, справедливо и обратное соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t} e^{-j\omega t} dt = \frac{\pi}{\omega_B} = T (-\omega_B < \omega < \omega_B).$$

Применяя теорему о запаздывании, можно записать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega_B (t - kT)}{\omega_B (t - kT)} e^{-j\omega t} dt = T e^{-jk\omega T} (-\omega_B < \omega < \omega_B). \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим окончательное выражение для спектра

$$\dot{S}(\omega) = T \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jk\omega T} (-\omega_B < \omega < \omega_B). \quad (3.3)$$

Чтобы перейти к дискретному преобразованию Фурье, значения спектра в выражении (3.3) нужно вычислять не для всех значений частоты, а для дискретных (выборочных):

$$\omega = n \frac{2\pi}{T_c} = n\Omega.$$

В результате получим окончательную формулу для дискретного преобразования Фурье

$$\dot{S}(n\Omega) = T \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jnk\Omega T},$$

или

$$\dot{S}(n\Omega) = T \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jnk \frac{2\pi}{N}}. \quad (3.4)$$

Свойства дискретного преобразования Фурье во многом аналогичны свойствам обычного преобразования Фурье. Отметим только одно специфическое свойство, которое

можно назвать периодичностью дискретного преобразования Фурье.

Рассмотрим значение $\dot{S}(n\Omega)$, определяемое формулой (3.4) для $n = n_0 + mN$, где m — целое число:

$$\begin{aligned}\dot{S}(n\Omega) &= T \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jk \left(n_0 \frac{2\pi}{N} + m2\pi \right)} = \\ &= T \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jkn_0 \frac{2\pi}{N}} = \dot{S}(n_0\Omega).\end{aligned}$$

Таким образом, дискретное преобразование Фурье является периодической функцией частоты с периодом, равным $N\Omega$. Это свойство аналогично свойству периодичности спектра дискретизированных сигналов, которое рассматривалось в гл. 2.

Перейдем теперь к выводу обратного дискретного преобразования Фурье, позволяющего определять выборки сигнала по выборкам спектра. Для этого воспользуемся обычным обратным преобразованием Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Спектральную плотность сигнала $\dot{S}(\omega)$ запишем в виде ряда Котельникова

$$\dot{S}(\omega) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \dot{S}\left(n \frac{2\pi}{T_c}\right) \frac{\sin \frac{T_c}{2} \left(\omega - n \frac{2\pi}{T_c}\right)}{\frac{T_c}{2} \left(\omega - n \frac{2\pi}{T_c}\right)}$$

и подставим в интеграл обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \dot{S}\left(n \frac{2\pi}{T_c}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{T_c}{2} \left(\omega - n \frac{2\pi}{T_c}\right)}{\frac{T_c}{2} \left(\omega - n \frac{2\pi}{T_c}\right)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.5)$$

Интеграл в выражении (3.5) аналогичен вычисленному ранее интегралу (3.2). Пользуясь этой аналогией, запишем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{T_c}{2} \left(\omega - n \frac{2\pi}{T_c} \right)}{\frac{T_c}{2} \left(\omega - n \frac{2\pi}{T_c} \right)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{2\pi}{T_c} e^{jn \frac{2\pi}{T_c} t}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5), получим выражение для временной функции $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \dot{S} \left(n \frac{2\pi}{T_c} \right) e^{jn \frac{2\pi}{T_c} t}. \quad (3.7)$$

Полагая в соотношении (3.7) $t = kT$, получим формулу для определения значений дискретного сигнала $f(kT)$, т. е. приходим к *обратному дискретному преобразованию Фурье*

$$\begin{aligned} f(kT) &= \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \dot{S} \left(n \frac{2\pi}{T_c} \right) e^{jnk \frac{2\pi}{T_c} T} = \\ &= \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \dot{S} (n\Omega) e^{jnk \frac{2\pi}{N}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где k принимает значения от 0 до $N - 1$.

Иногда для удобства записи, используя свойство периодичности дискретного преобразования Фурье, изменяют пределы суммирования в выражении (3.8) и обратное дискретное преобразование Фурье записывают в виде

$$f(kT) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{S} (n\Omega) e^{jnk \frac{2\pi}{N}}. \quad (3.9)$$

Для иллюстрации применим дискретное преобразование Фурье к дискретизированному треугольному импульсу (рис. 3.1), описываемому пятью выборочными значениями

$$f(0) = 1; \quad f(\pm T) = 1/2; \quad f(\pm 2T) = 0. \quad (3.10)$$

Подставим это выражение дискретного сигнала в формулу дискретного преобразования Фурье (3.4)

$$\dot{S}(n\Omega) = T \left[1 + \frac{1}{2} \left(e^{jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\frac{\pi}{2}} \right) \right] = T \left(1 + \cos n\frac{\pi}{2} \right),$$

откуда

$$S(0) = 2T; \quad S(\pm\Omega) = T; \quad S(\pm 2\Omega) = 0, \quad (3.11)$$

где $\Omega = 2\pi/T_c = \pi/(2T)$.

Для сравнения найдем спектральную плотность исходного треугольного импульса:

$$S_f(\omega) = \frac{T_c}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega T_c}{4}}{\frac{\omega T_c}{4}} \right)^2 = 2T \frac{\sin^2 \omega T}{(\omega T)^2}, \quad (3.12)$$

причем

$$S_f(0) = 2T; \quad S_f(\Omega) = 0,813T; \quad S_f(2\Omega) = 0.$$

Легко видеть, что дискретный спектр (3.11) неточно описывает спектральную плотность треугольного импульса (3.12). Значения $S(\pm\Omega)$ несколько отличаются от соответствующих значений спектра треугольного импульса $S_f(\pm\Omega)$ (рис. 3.1, б).

Теперь подставим дискретные значения спектра (3.11) в выражение для обратного дискретного преобразования Фурье (3.8):

$$f(kT) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-2}^2 S(n\Omega) e^{jnk\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{T_c} \left(1 + \cos n\frac{\pi}{2} \right), \quad (3.13)$$

откуда

$$f(0) = 1; \quad f(\pm T) = 1/2; \quad f(\pm 2T) = 0.$$

Несмотря на отличие значений дискретного спектра от значений непрерывного, полученный результат полностью совпадает с формулой исходного дискретного сигнала (3.11).

Рассмотренный пример показывает, что дискретное преобразование Фурье не всегда точно описывает спектр исходного непрерывного сигнала, подобно тому, как дис-

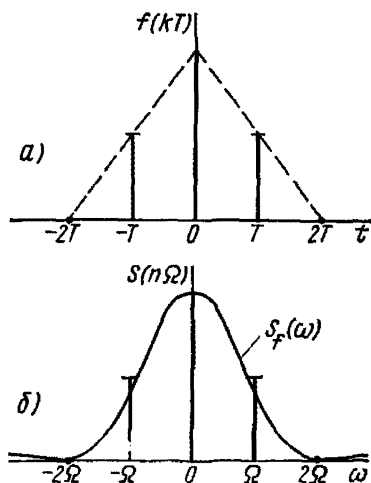


Рис. 3.1. Дискретное преобразование Фурье дискретизированного треугольного импульса

кретизированный сигнал не всегда точно описывает исходный непрерывный сигнал. Однако связь между дискретным сигналом и его дискретным преобразованием Фурье всегда носит взаимно однозначный характер и формулы прямого и обратного преобразований Фурье являются строгими при любом числе дискретных значений. Поэтому аппарат дискретных преобразований Фурье имеет самостоятельное значение и может быть применен к любым числовым последовательностям.

В этом случае формулы дискретного преобразования Фурье должны быть несколько изменены, так как для абстрактной числовой последовательности значения интервала дискретизации T и длительности сигнала T_c не имеют смысла. Поэтому коэффициент T перед суммой в формуле (3.4) опускают, T_c/T заменяют на N , отсчетные значения сигнала и спектра обозначают через f_k и \dot{S}_n и формулу дискретного преобразования Фурье записывают в виде

$$\dot{S}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk \frac{2\pi}{N}} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (3.14)$$

При этом обратное дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{S}_n e^{jnk \frac{2\pi}{N}} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (3.15)$$

Значения \dot{S}_n , вычисленные по формуле (3.14), отличаются от выборочных значений спектра $\dot{S}_f(n\Omega)$ непрерывного колебания $f(t)$ в T раз. Для определения выборочных значений $\dot{S}_f(n\Omega)$ надо значения \dot{S}_n , вычисленные по формуле (3.14), умножить на величину интервала дискретизации по времени T :

$$\dot{S}_f(n\Omega) = T \dot{S}_n.$$

Покажем, что преобразования (3.14), (3.15) являются взаимно обратными. Для этого возьмем произвольную числовую последовательность f_k , с помощью дискретного преобразования Фурье (3.14) найдем последовательность \dot{S}_n и применим к ней обратное дискретное преобразование

Фурье (3.15). Получившуюся при этом последовательность обозначим g_l :

$$g_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk \frac{2\pi}{N}} e^{jnl \frac{2\pi}{N}}.$$

Поменяем порядок суммирования и несколько преобразуем это выражение:

$$g_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(l-k) \frac{2\pi}{N}}. \quad (3.16)$$

Внутренняя сумма выражения (3.16) равна нулю, если $l \neq k$ и равна N , если $l = k$. Следовательно, $g_l = f_k$ при $l = k$, т. е. числовые последовательности g_l и f_k совпадают друг с другом. Таким образом, при последовательном применении к любой числовой последовательности прямого и обратного дискретного преобразования Фурье получают в результате ту же последовательность.

Проиллюстрируем это положение простейшими примерами.

1. Рассмотрим простейший дискретный сигнал, состоящий из одного отсчетного значения, равного a . Подставляя эту простейшую последовательность в формулу дискретного преобразования Фурье (3.14), получим $S_0 = a$. Таким образом, дискретное преобразование Фурье отдельного числового значения равно этому же значению.

Подставим $S_0 = a$ в формулу обратного дискретного преобразования Фурье (3.15). В результате, как и следовало ожидать, получим исходное значение $f_0 = a$.

2. Рассмотрим более сложный сигнал, состоящий из двух отсчетных значений $f_0 = a$ и $f_1 = b$. Применим к нему дискретное преобразование Фурье (3.13):

$$S_n = f_0 + f_1 e^{-jn \frac{2\pi}{2}} = a + b e^{-jn\pi}.$$

Следовательно, $S_0 = a + b$; $S_1 = a - b$.

Применяя к этому результату обратное преобразование Фурье (3.14), получим

$$f_k = \frac{1}{2} (S_0 + S_1 e^{jn\pi}) = \frac{1}{2} [(a + b) + (a - b) e^{jn\pi}];$$

$$f_0 = \frac{1}{2} [(a + b) + (a - b)] = a;$$

$$f_1 = \frac{1}{2} [(a + b) + (a - b)(-1)] = b.$$

Одно из основных применений дискретного преобразования Фурье — это вычисление спектров функций, заданных графически или таблично. Дискретное преобразование Фурье можно применять при обработке экспериментальных данных, например в тех случаях, когда надо найти энергетический спектр по корреляционной функции сигнала.

Другое важное применение дискретного преобразования Фурье — вычисление сигнала на выходе фильтра с заданной частотной характеристикой. Если задан входной сигнал $x_1(kT)$, то для него можно вычислить дискретное преобразование Фурье $S_1(n\Omega)$. Если теперь умножим $S_1(n\Omega)$ на частотную характеристику фильтра, то получим дискретное преобразование Фурье выходного сигнала: $S_2(n\Omega) = S_1(n\Omega)K(n\Omega)$. После этого с помощью обратного дискретного преобразования Фурье можно найти сигнал на выходе фильтра.

Если входной сигнал имеет большую длительность, его обработку с помощью дискретного преобразования Фурье можно производить по частям. Для этого берут первые N отсчетов входного сигнала, вычисляют их дискретное преобразование Фурье и после умножения на частотную характеристику фильтра с помощью обратного дискретного преобразования Фурье вычисляют первые N отсчетов выходного сигнала. После этого аналогичным путем обрабатывают следующие N отсчетов входного сигнала и т. д. Для повышения точности обработки сигнала обрабатываемые серии отсчетов могут частично перекрываться.

Преимуществом такого метода обработки сигналов является отсутствие каких-либо ограничений на вид частотной характеристики фильтра. Например, частотная характеристика может быть идеальной прямоугольной формы, что невозможно реализовать с помощью обычных фильтров.

Обработку сигналов с помощью дискретного преобразования Фурье нельзя назвать цифровой фильтрацией в полном смысле слова. Обычные цифровые фильтры, работающие в реальном масштабе времени, производят обработку сигнала непрерывно по мере его поступления, а вычисление выходного сигнала с помощью дискретного преобразования Фурье может быть произведено лишь после того, как станет известным полностью входной сигнал или хотя бы первая серия из N его отсчетов. Поэтому при использовании дискретного преобразования Фурье выходной сигнал может быть получен только с некоторым за-

паздыванием по отношению к входному сигналу. Однако в ряде практических применений такое запаздывание выходного сигнала не играет существенной роли, и тогда обработка сигналов с использованием дискретного преобразования Фурье оказывается целесообразной.

§ 3.3. Быстрое преобразование Фурье

Недостатком дискретного преобразования Фурье является большое количество математических операций, которые необходимо произвести при применении формулы (3.4) или (3.14). Если число степеней свободы сигнала равно N , то для расчета по формулам дискретного преобразования Фурье необходимо выполнить N^2 умножений и N^2 сложений комплексных чисел — всего $2N^2$ арифметических операций. При большом N такая обработка сигналов оказывается слишком трудоемкой.

Для облегчения вычисления дискретного преобразования Фурье применяют специальные алгоритмы, которые позволяют во много раз сократить объем необходимых вычислений. Такие алгоритмы называют **быстрым преобразованием Фурье**.

Существует несколько различных алгоритмов быстрого преобразования Фурье [2,4]. Каждый из них применяют в определенной ситуации, в зависимости от того, на какие множители может быть разложено число степеней свободы N . Наиболее простые алгоритмы получаются, если N является степенью числа 2. Рассмотрим один из таких алгоритмов, основанный на так называемом прореживании по времени.

Пусть требуется вычислить дискретное преобразование Фурье числовой последовательности f_k :

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jn k \frac{2\pi}{N}}.$$

Поскольку число отсчетов сигнала N — четное, исходную последовательность f_k можно разбить на две: g_i , куда войдут все f_k с четными номерами, и h_i , куда войдут все f_k с нечетными номерами (рис. 3.2), так что

$$g_i = f_{2i}; \quad h_i = f_{2i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, N/2 - 1).$$

Применим дискретное преобразование Фурье к последовательностям g_i и h_i ; при этом учтем, что последовательности g_i и h_i содержат по $N/2$ членов:

$$G_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k e^{-jkn \frac{4\pi}{N}};$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k e^{-jkn \frac{4\pi}{N}}.$$

Для сокращения записи обозначим $W = e^{-j2\pi/N}$. Тогда

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{nk}; \quad G_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{2nk};$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k W^{2nk}.$$

Нашей конечной целью является вычисление значений F_n . Учитывая, что все члены последовательности f_k принадлежат g_k или h_k , можно записать

$$F_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} [g_k W^{2kn} + h_k W^{(2k+1)n}] = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{2kn} +$$

$$+ W^n \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k W^{2kn} = G_n + W^n H_n. \quad (3.17)$$

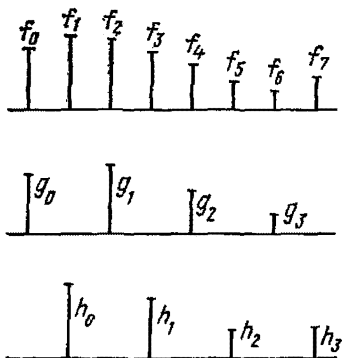


Рис. 3.2. К выводу алгоритма быстрого преобразования Фурье

Таким образом, значения F_n можно вычислить по известным значениям G_n и H_n . Однако формула (3.17) справедлива только для $n \leq N/2 - 1$, так как G_n и H_n не определены для больших значений n . Поэтому для $n \geq N/2$ значения F_n можно вычислить, используя свойство периодичности дискретного преобразования Фурье:

$$F_n = G_{n-N/2} + W^n H_{n-N/2}.$$

Учитывая, что $W^n = W^{n-N/2} \times W^{N/2} = -W^{n-N/2}$, получим

окончательную расчетную формулу для F_n при $n \geq N/2$:

$$F_n = G_{n-N/2} - W^{n-N/2} H_{n-N/2}. \quad (3.18)$$

Процесс вычисления дискретного преобразования Фурье по формулам (3.17), (3.18) схематически изображен на рис. 3.3 с помощью направленного сигнального графа.

Здесь каждое из умножений на W^n представлено в виде стрелки, под которой записан соответствующий множитель. Кружочки схематически обозначают сложение (вычитание), причем линия, отходящая от кружочка вправо вверх, соответствует сумме, а отходящая вправо вниз — разности двух значений, подводимых к кружочку слева. Например, сумма значений G_2 и $H_2 W^2$ равна F_2 , а разность этих значений равна F_6 .

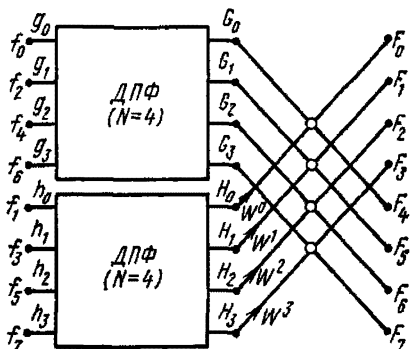


Рис. 3.3. Замена восьмиточечного дискретного преобразования Фурье двумя четырехточечными

Для вычисления значений G_n и H_n нужно выполнить два дискретных преобразования Фурье, однако число дискретных значений в каждом из этих преобразований оказывается в 2 раза меньше, чем в исходном преобразовании Фурье и равно $N/2$. При этом для вычисления G_n и H_n необходимо выполнить по $2(N/2)^2$ арифметических операций, и еще $N + N/2$ операций необходимо произвести в процессе расчетов значений F_n по формулам (3.17), (3.18). Таким образом, общее число арифметических операций, необходимых для вычисления дискретного преобразования Фурье, будет равно $N^2 + \frac{3}{2} N$, что при большом N оказывается значительно меньше, чем при вычислении F_n по общей формуле дискретного преобразования Фурье (3.14).

Если число степеней свободы сигнала N является степенью числа 2, то число $N/2$ тоже будет четным. В этом случае для вычисления значений G_n и H_n вместо общей формулы дискретного преобразования Фурье можно применить алгоритм, аналогичный только что рассмотренному. При этом общая процедура расчета может быть схематически представлена сигнальным графом, представленным на рис. 3.4.

Процесс упрощения алгоритма расчета можно продолжать до тех пор, пока не останутся только простейшие двухточечные дискретные преобразования Фурье. В результате получим сигнальный граф для $N=8$, изображенный на рис. 3.5. Детальное рассмотрение этого рисунка позволяет точно определить число арифметических операций, необходимых для вычисления дискретного преобразования Фурье. Число умножений определяется числом стрелок

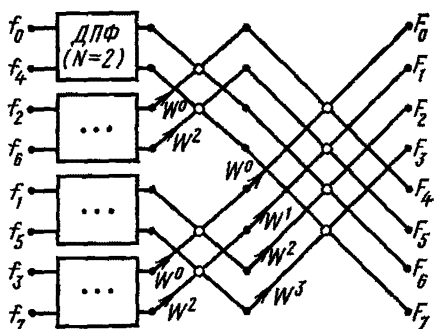


Рис. 3.4. Замена четырехточечных дискретных преобразований Фурье двухточечными

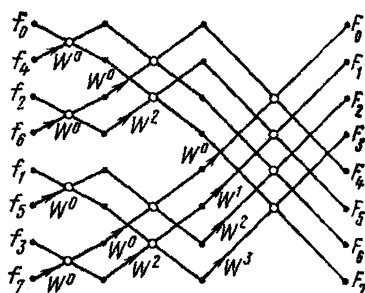


Рис. 3.5. Схематическое изображение алгоритма быстрого преобразования Фурье

на рис. 3.5, а число сложений (вычитаний) — числом кружочков, умноженным на 2. В рассмотренном случае восьмиточечного дискретного преобразования Фурье в соответствии с рис. 3.5 необходимо выполнить 8×3 , т. е. $N \log_2 N$ сложений (вычитаний) и 4×3 , т. е. $\frac{1}{2} N \log_2 N$ умножений. Фактическое число умножений оказывается несколько меньше, так как часть из них оказывается тривиальными умножениями на $W^0 = 1$.

Таким образом, при применении данного алгоритма для вычисления дискретного преобразования Фурье последовательности из N точек требуется выполнить $N \log_2 N$ сложений и самое большее $\frac{1}{2} N \log_2 N$ умножений. Для сравнения напомним, что при использовании обычной формулы дискретного преобразования Фурье необходимо выполнить $2N^2$ арифметических операций. Применение быстрого преобразования Фурье при $N > 1000$ позволяет сократить объем вычислений более чем в 100 раз.

Кроме рассмотренного алгоритма быстрого преобразования Фурье существует ряд других, которые применяют в тех случаях, когда N не является степенью числа 2, а раскладывается на другие простые множители. Все эти алгоритмы подробно рассмотрены в [7].

§ 3.4. Дискретное преобразование Лапласа

Как указывалось, методы описания непрерывных и дискретных сигналов во многом аналогичны друг другу. Обычному преобразованию Фурье соответствует дискретное преобразование Фурье; по аналогии с обычным преобразованием Лапласа можно ввести *дискретное преобразование Лапласа*.

Запишем преобразование Лапласа для непрерывных сигналов

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Это соотношение справедливо для сигналов, тождественно равных нулю при $t < 0$. Поскольку все реально существующие сигналы имеют начало, преобразование Лапласа можно применять практически для всех сигналов.

Применим преобразование Лапласа к дискретному сигналу, записанному в виде последовательности δ -функций

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT);$$

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-pkT}. \quad (3.19)$$

Выражение (3.19) представляет собой дискретное преобразование Лапласа.

Формула дискретного преобразования Лапласа может быть несколько упрощена, если положить $e^{pT} = z$. В результате такой замены приходим к *z-преобразованию*, которое обычно применяют при анализе дискретных сигналов вместо дискретного преобразования Лапласа.

§ 3.5. z-преобразование

z-преобразование представляет собой модификацию дискретного преобразования Лапласа:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}. \quad (3.20)$$

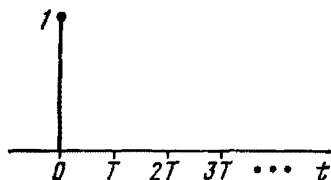


Рис. 3.6. Единичный импульс

Функция $F(z)$ является аналитической функцией комплексного переменного z . z-преобразование можно применить и к абстрактным числовым последовательностям.

В качестве примеров рассмотрим z-преобразования простейших сигналов. При этом всюду будем полагать, что сигнал $f(nT)$ тождественно равен нулю при $n < 0$.

1. Единичный импульс (рис. 3.6)

$$f(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n > 0, \end{cases} \quad F(z) = 1.$$

2. Дискретизированный единичный скачок (рис. 3.7)

$$f(nT) = 1; \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

3. Экспоненциально убывающий дискретный сигнал (рис. 3.8)

$$f(nT) = e^{-\alpha n T};$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n T} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}.$$

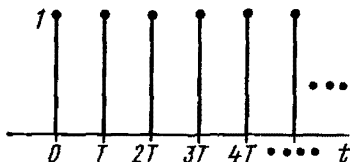


Рис. 3.7. Дискретизированный единичный скачок

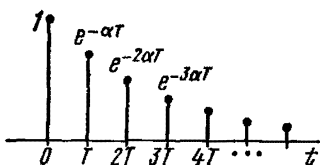


Рис. 3.8. Экспоненциально убывающий дискретный сигнал

4. Комплексная экспонента

$$f(nT) = e^{jn\omega T};$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jn\omega T} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{j\omega T}}.$$

5. Гармоническая функция

$$f(nT) = \sin n\omega T = \frac{1}{2j} \left(e^{jn\omega T} - e^{-jn\omega T} \right);$$

$$F(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right).$$

6. Степенная функция

$$f(nT) = K^n;$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n z^{-n} = \frac{1}{1 - Kz^{-1}} = \frac{z}{z - K}.$$

Поскольку z -преобразование — это степенной ряд переменной z^{-1} , то важно рассмотреть вопрос о его сходимости.

Ряд (3.20), определяющий z -преобразование, сходится для $|z| > R$, где R — радиус сходимости, зависящий от вида функции $f(nT)$. Наиболее просто радиус сходимости определяется для последовательности $f(nT) = K^n$. В этом случае $F(z) = z/(z - K)$. Эта функция имеет полюс при $z = K$. Вне окружности $|z| = K$ функция $F(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной z , и описывающий ее ряд (3.20) сходится. Следовательно, для $f(nT) = K^n$ радиус сходимости $R = K$.

§ 3.6. Обратное z -преобразование

Обратное z -преобразование позволяет определить значения дискретного сигнала по виду функции $F(z)$. Для нахождения формулы обратного z -преобразования можно воспользоваться обратным преобразованием Лапласа, но легче получить ее из формулы прямого z -преобразования.

Запишем еще раз прямое z -преобразование

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}.$$

Умножим обе части этого выражения на z^{k-1} , проинтегрируем по окружности с радиусом, превышающим радиус сходимости R ряда для $F(z)$, и поменяем местами суммирование и интегрирование:

$$\oint F(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \oint z^{k-n-1} dz. \quad (3.21)$$

Вычислим интеграл в правой части выражения (3.21)

$$\oint z^{k-n-1} dz = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n, \\ 2\pi j & \text{при } k = n. \end{cases}$$

Такой результат объясняется тем, что значение интеграла по замкнутому контуру в комплексной плоскости равно произведению $2\pi j$ на сумму вычетов подынтегральной функции; единственный вычет при $z = 0$ получается только при $k = n$, когда $z^{k-n-1} = 1/z$.

Следовательно,

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{k-1} dz. \quad (3.22)$$

Получившееся выражение представляет собой формулу обратного z -преобразования, но надо только уточнить форму контура интегрирования. Для этого положим $f_n = K^n$. Тогда $F(z) = z/(z - K)$. Применим обратное z -преобразование к этой формуле:

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^n dz}{z - K}.$$

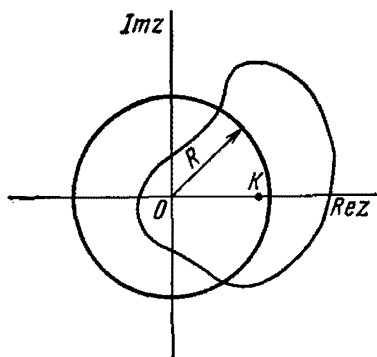


Рис. 3.9. Возможные контуры интегрирования при вычислении обратного z -преобразования

Подынтегральная функция имеет единственный полюс при $z = K$. Интегрировать можно вдоль любого контура, охватывающего точку $z = K$ (рис. 3.9), но удобнее вдоль окружности радиуса $R > K$.

Для сигналов, абсолютное значение которых убывает во времени, $K < 1$, потому в качестве контура интегрирования можно использовать окружность радиуса $R = 1$.

§ 3.7. Основные свойства z -преобразования

Для z -преобразования справедливы некоторые теоремы, аналогичные теоремам о спектрах непрерывных сигналов. Главная из них — теорема о свертке.

Теорема о свертке. В теории непрерывных сигналов эта теорема формулируется следующим образом. Пусть заданы два непрерывных сигнала $x(t)$ и $y(t)$ и их свертка

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) y(\tau) d\tau.$$

Тогда спектральная плотность свертки $\dot{S}_f(\omega)$ связана со спектральными плотностями $\dot{S}_x(\omega)$ и $\dot{S}_y(\omega)$ сигналов $x(t)$ и $y(t)$ соотношением

$$\dot{S}_f(\omega) = \dot{S}_x(\omega) \dot{S}_y(\omega). \quad (3.23)$$

Для дискретных сигналов $x_k = x(kT)$ и $y_k = y(kT)$ по аналогии с непрерывными сигналами вводится дискретная свертка, которая определяется выражением

$$f(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT) y(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT) y(kT), \quad (3.24)$$

или

$$f_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^n x_{n-k} y_k. \quad (3.25)$$

Запишем для дискретных сигналов x_k , y_k и f_n их z -преобразования

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}; \quad Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k};$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}.$$

Применим z -преобразование к формуле свертки (3.25)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} z^{-n}.$$

Преобразуем правую часть этого выражения так, чтобы получить произведение z -преобразований. Для этого нужно, в частности, чтобы x_k умножалось на z^{-k} , а y_{n-k} на $z^{-(n-k)}$. Сгруппируем соответствующим образом степени z :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} z^{-k} z^{-(n-k)}.$$

При $k > n$ $y_{n-k} \equiv 0$, поэтому можно во второй сумме верхний предел суммирования сделать равным ∞ . Далее обозначим $n - k = m$ и получим

$$F(z) = \sum_{m=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_m z^{-m}.$$

Нижний предел $m = -k$ можно заменить на $m = 0$, так как при $m < 0$ все $y_m = 0$. В результате получим

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_m z^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m},$$

т. е.

$$F(z) = X(z) Y(z). \quad (3.26)$$

Выражение (3.26) аналогично формуле (3.23), описывающей теорему о свертке для обычных непрерывных сигналов.

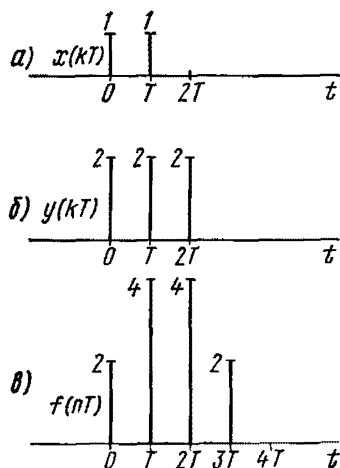


Рис. 3.10. Дискретная свертка двух сигналов

В качестве примера рассмотрим дискретную свертку двух простых сигналов: $x(kT)$, имеющего два ненулевых отсчета [$x(0)=1$ и $x(T)=1$] (рис. 3.10, а) и $y(kT)$, состоящего из трех отсчетов [$y(0)=2$; $y(T)=2$; $y(2T)=2$] (рис. 3.10, б). Непосредственный подсчет по формуле (3.24) приводит к следующему результату:

$$f(0) = x(0) y(0) = 2;$$

$$f(T) = x(T) y(0) + x(0) y(T) = 4;$$

$$f(2T) = x(T) y(T) + x(0) y(2T) = 4;$$

$$f(3T) = x(T) y(2T) = 2;$$

$$f(4T) = 0.$$

Сигнал $f(nT)$, являющийся сверткой $x(kT)$ и $y(kT)$, изображен на рис. 3.10, в.

Найдем z -преобразования сигналов $x(kT)$, $y(kT)$ и $f(nT)$:

$$X(z) = 1 + z^{-1}.$$

$$Y(z) = 2(1 + z^{-1} + z^{-2});$$

$$F(z) = 2(1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}).$$

Перемножая выражения для $X(z)$ и $Y(z)$, нетрудно убедиться в справедливости выражения (3.26).

Теорема о запаздывании.

Сдвинем дискретный сигнал $x(nT)$ по времени на величину периода повторения T . Получившийся новый сигнал $y(nT)$ (рис. 3.11) связан с $x(nT)$ простым соотношением

$$y(nT) = x(nT - T).$$

Пусть известно z -преобразование сигнала $x(nT)$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}.$$

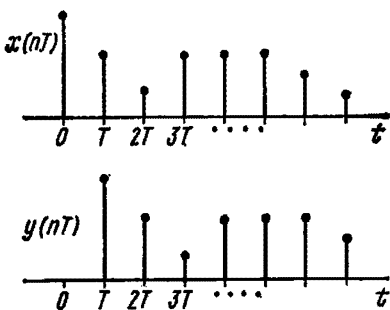


Рис. 3.11. К выводу теоремы о запаздывании

Найдем z -преобразование сигнала $y(nT)$:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x(nT - T) z^{-n} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) z^{-(m+1)} = z^{-1} X(z). \end{aligned}$$

Таким образом, запаздывание дискретного сигнала на один элемент соответствует умножению z -преобразования на z^{-1} .

Теорема Парсеваля для дискретных сигналов. Как известно, энергия непрерывного сигнала может быть вычислена посредством интегрирования в бесконечных пределах или квадрата временной функции, или квадрата ее спектра. Аналитически это записывают в виде теоремы Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) d\omega.$$

Аналогичное соотношение можно получить для дискретных сигналов.

Пусть дискретный сигнал $f(kT)$ представляет собой убывающую последовательность, так что все полюсы его z -преобразования $F(z)$ находятся внутри единичной окружности в плоскости z . Для вывода теоремы Парсеваля умножим $F(z)$ на $F(1/z)$ и найдем величину этого произведения:

$$F(z) F\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(kT) f(nT) z^{-k+n}. \quad (3.27)$$

Умножим обе части равенства (3.27) и $z^{-1/(2\pi j)}$ и проинтегрируем по замкнутому контуру L , который должен располагаться в области сходимости как $F(z)$, так и $F(1/z)$. Поскольку последовательность $f(kT)$ является убывающей, в качестве контура интегрирования L можно принять окружность $|z| = 1$. При интегрировании двойной суммы в правой части равенства (3.27) все члены окажутся равными нулю, кроме членов, соответствующих $k = n$. В результате получим

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_L F(z) F\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} f^2(nT). \quad (3.28)$$

Выражение (3.28) является записью *теоремы Парсеваля* для дискретных сигналов.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти дискретное преобразование Фурье (ДПФ) дискретизированного прямоугольного импульса, описанного тремя отсчетами.

2. Найти ДПФ дискретизированного колокольного импульса

$$f(kT) = e^{-(kT/\tau)^2} \text{ при } T/\tau = \pi/4 \ (k = 0, \pm 1, \pm 2).$$

3. Найти ДПФ последовательности $-1, 0, 1$. Применить к результату обратное ДПФ. Убедиться в том, что получается первоначальный результат.

4. Найти ДПФ дискретизированного прямоугольного импульса, заданного N отсчетами.

5. Расписать алгоритм быстрого преобразования Фурье для сигнала с 16 отсчетами.

6. Найти дискретное преобразование Лапласа: а) дискретизированного единичного сигнала; б) дискретизированного единичного скачка; в) дискретизированного экспоненциально убывающего сигнала.

7. Вывести формулу обратного дискретного преобразования Лапласа.

8. Найти z -преобразование: а) серии из N одинаковых отсчетов; б) сдвинутого единичного сигнала (рис. 3.12); в) прореженной последовательности

$$f(kT) = \begin{cases} 1, & k - \text{четное}, \\ 0, & k - \text{нечетное } (k \geq 0). \end{cases}$$

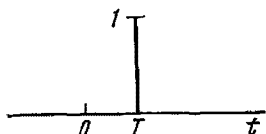


Рис. 3.12. Сдвинутый единичный импульс

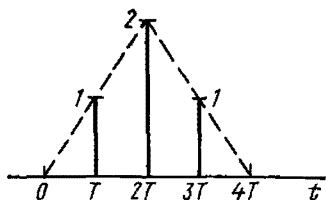


Рис. 3.13. Дискретизированный треугольный импульс

9. Найти z -преобразование: а) дискретизированного треугольного импульса (рис. 3.13); б) усеченного дискретизированного экспоненциального импульса $f(kT) = e^{-akT} (0 \leq k \leq N)$; в) дискретизированного гармонического сигнала $f(kT) = A \cos(\omega_0 kT)$; г) дискретного сигнала $f(kT) = ak (0 \leq k \leq 8)$.

10. Вывести формулу обратного z -преобразования с помощью обратного преобразования Лапласа.

11. Найти дискретную свертку (непосредственно и с помощью z -преобразования): а) единичного отсчета с произвольным сигналом $f(kT)$; б) сдвинутого единичного отсчета с произвольным сигналом $f(kT)$; в) двух дискретизированных прямоугольных импульсов, заданных пятью отсчетами.

Глава 4

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

§ 4.1. Вводные замечания

В гл. 3 было показано, что методы математического описания дискретных и цифровых сигналов во многом аналогичны методам математического описания непрерывных (континуальных) сигналов. Обычному преобразованию Фурье соответствует дискретное преобразование Фурье, преобразованию Лапласа соответствуют дискретное преобразование Лапласа и z -преобразование, свертке двух непрерывных сигналов соответствует дискретная свертка.

Продолжая эту аналогию, рассмотрим методы описания дискретных и цифровых фильтров и методы анализа прохождения сигналов через эти фильтры в тесной связи с существующими методами анализа аналоговых цепей.

Основными методами анализа аналоговых электрических цепей и прохождения сигналов через них являются использование дифференциальных уравнений цепи, спектральный и родственные ему операторные методы и определение сигнала на выходе цепи с помощью интеграла Дюамеля.

Методы, используемые для описания процессов в дискретных и цифровых фильтрах, по своей сути очень схожи с указанными методами анализа аналоговых цепей. Вместо дифференциальных уравнений для описания дискретных цепей используют разностные уравнения, вместо операторного метода — z -преобразования, вместо интеграла Дюамеля — дискретную свертку. Спектральному (частотному) методу анализа аналоговых цепей соответствует несколько своеобразное частотное описание дискретных и цифровых фильтров. Все эти методы анализа дискретных цепей будут подробно рассмотрены далее.

При математическом анализе процессов в цифровых фильтрах и определении их параметров квантованием сигналов по уровню обычно пренебрегают и вместо прохождения квантованных сигналов через цифровой фильтр фактически рассматривают прохождение дискретных сигналов через аналогичный дискретный фильтр. Учет квантования сигналов проводят дополнительно. Он сводится к анализу прохождения шумов квантования через цифровой фильтр и вычислению возникающей при этом дополнительной погрешности фильтрации цифровых сигналов.

§ 4.2. Важнейшие характеристики цифровых фильтров

Рассмотрим наиболее простые из цифровых фильтров — фильтры с постоянными параметрами.

На вход цифрового фильтра подается входной сигнал $x(kT)$ в виде последовательности числовых значений, следующих с интервалом T (рис. 4.1, *a*). При поступлении каждого очередного значения сигнала $x(kT)$ в цифровом фильтре производится расчет очередного значения выходного сигнала $y(kT)$. Алгоритмы расчета могут быть самыми разнообразными; в процессе расчета, кроме последнего значения входного сигнала $x(kT)$ могут использоваться

предыдущие значения входного и выходного сигналов: $x(kT - T)$, $x(kT - 2T)$, ..., $y(kT - T)$, $y(kT - 2T)$, ... Сигнал на выходе цифрового фильтра $y(kT)$ (рис. 4.1, б) также представляет собой последовательность числовых

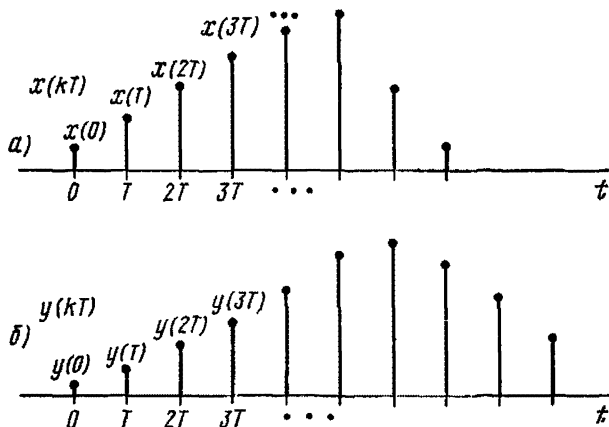


Рис. 4.1. Сигнал на входе (а) и на выходе (б) цифрового фильтра

значений, следующих с интервалом T . Этот интервал является единым для всего устройства цифровой обработки сигналов.

Поэтому если на вход цифрового фильтра подать простейший сигнал в виде единичного импульса (рис. 4.2, а)

$$x_0(kT) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \neq 0, \end{cases}$$

то на выходе получим сигнал в виде дискретной последовательности числовых значений, следующих с интервалом T . По аналогии с обычными аналоговыми цепями назовем этот ответный сигнал импульсной характеристикой фильтра $g(kT)$ (рис. 4.2, б). В отличие от импульсной характеристики аналоговой цепи функция $g(kT)$ является безразмерной.

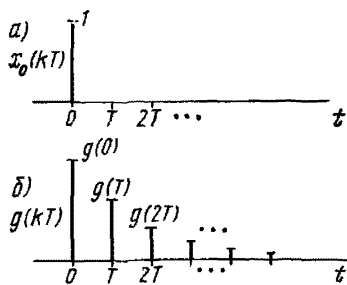


Рис. 4.2. Единичный импульс (а) и импульсная характеристика цифрового фильтра (б)

Подадим на вход фильтра произвольный дискретный сигнал $x(kT)$ (см. рис. 4.1, а), представляющий собой набор дискретных значений $x(0), x(T), x(2T), \dots$.

Под действием первого элемента $x(0)$ на выходе фильтра формируется последовательность $g(kT)$, умноженная на $x(0)$; при действии $x(T)$ — последовательность $g(kT)$, умноженная на $x(T)$ и сдвинутая вправо на величину T , и т. д. В результате на выходе получим последовательность $y(nT)$, причем

$$y(0) = g(0)x(0);$$

$$y(T) = g(T)x(0) + g(0)x(T);$$

$$y(2T) = g(2T)x(0) + g(T)x(T) + g(0)x(2T);$$

.....

$$x(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)g(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT)g(kT). \quad (4.1)$$

Таким образом, выходной сигнал определяется как дискретная свертка входного сигнала и импульсной характеристики. В этом отношении цифровые фильтры аналогичны обычным цепям, где выходной сигнал равен свертке входного сигнала и импульсной характеристики.

Формула (4.1) представляет собой алгоритм цифровой фильтрации. Если импульсная характеристика фильтра описывается последовательностью с конечным числом членов, то фильтр может быть реализован в виде схемы, изображенной на рис. 4.3. Здесь буквой T обозначены элементы задержки сигнала на время T (на одну ячейку); $g(0), g(T), \dots, g(NT)$ — элементы, умножающие сигнал на соответствующий коэффициент.

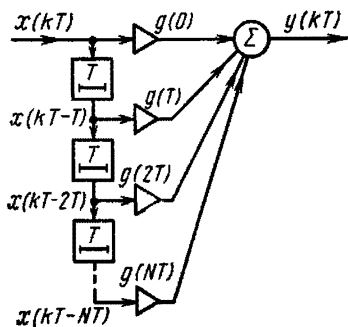


Рис. 4.3. Схема нерекурсивного цифрового фильтра

Схема, изображенная на рис. 4.3, не является электрической схемой цифрового фильтра; эта схема представляет собой графическое изображение алгоритма цифровой фильтрации и показывает последовательность арифметических операций, выполняемых при обработке сигнала.

Для цифровых фильтров, обрабатывающих сигналы в виде абстрактных числовых последовательностей, понятие «задержка на время T » является не совсем корректным. Поэтому элементы, задерживающие сигнал на одну ячейку, на схемах цифровых фильтров обычно отмечают символом z^{-1} , обозначающим задержку сигнала на языке z -преобразований. В дальнейшем будем придерживаться этого обозначения.

Вернемся к схеме цифрового фильтра, изображенной на рис. 4.3. Такие фильтры, где для расчета используются лишь значения входного сигнала, называют простыми или нерекурсивными.

Алгоритм нерекурсивного фильтра легко записать, если известна импульсная характеристика фильтра. Для практической реализации алгоритма необходимо, чтобы импульсная характеристика содержала конечное число членов. Если импульсная характеристика содержит бесконечное число членов, но они быстро убывают по величине, то можно ограничиться конечным числом членов, отбросив те, значения которых малы. В случае, если элементы импульсной характеристики не убывают по величине, алгоритм нерекурсивного фильтра оказывается нереализуемым.

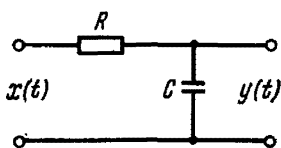


Рис. 4.4. RC -цепь

В качестве примера рассмотрим простейший цифровой фильтр, аналогичный RC -цепи (рис. 4.4). Импульсная характеристика RC -цепи имеет вид

$$g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (4.2)$$

Чтобы записать импульсную характеристику соответствующего цифрового фильтра, в выражении (4.2) t следует заменить на kT . Однако импульсная характеристика RC -цепи имеет размерность $1/c$, а импульсная характеристика цифрового фильтра должна быть безразмерной. Поэтому опустим множитель $1/\tau$ в выражении (4.2) и запишем импульсную характеристику цифрового фильтра в виде

$$g(kT) = e^{-kT/\tau}. \quad (4.3)$$

Такая импульсная характеристика содержит бесконечно много членов, но их величина убывает по экспоненциальному закону, и можно ограничиться N членами, выбирая N таким, чтобы $e^{-NT/\tau} \ll 1$.

Теперь можно записать выражение для сигнала на выходе фильтра

$$y(nT) = x(nT) + e^{-T/\tau} x(nT - T) + e^{-2T/\tau} x(nT - 2T) + \dots + e^{-NT/\tau} x(nT - NT). \quad (4.4)$$

Это выражение является одновременно алгоритмом цифрового фильтра. Схема этого фильтра представлена на рис. 4.5.

Второй подход к анализу процессов в цифровых фильтрах аналогичен операторному методу анализа обычных аналоговых цепей, только вместо преобразования Лапласа используют z -преобразование.

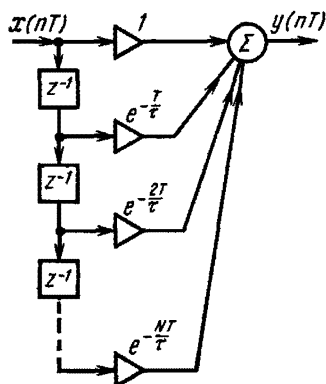


Рис. 4.5. Схема не рекурсивного цифрового фильтра, аналогичного RC -цепи

Определим параметр цифрового фильтра, аналогичный передаточной функции $K(p)$ электрической цепи. Для этого применим z -преобразование к импульсной характеристике $g(kT)$ цифрового фильтра:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k}. \quad (4.5)$$

Функцию $H(z)$ называют системной функцией фильтра.

В соответствии с выражением (4.1) сигнал на выходе цифрового фильтра равен дискретной свертке входного сигнала и импульсной характеристики фильтра. Применяя к этому выражению теорему о z -преобразовании свертки, получим, что z -преобразование выходного сигнала равно z -преобразованию входного сигнала, умноженному на системную функцию фильтра:

$$Y(z) = X(z) H(z). \quad (4.6)$$

Таким образом, системная функция $H(z)$ играет роль передаточной функции цифрового фильтра.

В качестве примера найдем системную функцию цифрового фильтра первого порядка, аналогичного RC -цепи:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT/\tau} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}}. \quad (4.7)$$

Третий метод анализа прохождения сигналов через цифровые фильтры аналогичен классическому методу дифференциальных уравнений. Рассмотрим этот метод на примере цепей 1-го порядка.

Простейшей аналоговой цепью 1-го порядка является RC -цепь (см. рис. 4.4), прохождение сигналов через которую описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau} y = \frac{1}{\tau} x. \quad (4.8)$$

Для дискретной цепи вместо дифференциального уравнения (4.8) должно быть записано *разностное уравнение*, где входной и выходной сигналы $x(t)$ и $y(t)$ задаются для дискретных моментов времени $t = nT$, а вместо производной dy/dt должна фигурировать разность соседних значений сигнала $y(nT) - y(nT - T)$. Для дискретной цепи 1-го порядка разностное уравнение может быть записано в достаточно общем виде

$$y(nT) - by(nT - T) = ax(nT). \quad (4.9)$$

Применим к уравнению (4.9) z -преобразование

$$Y(z)(1 - bz^{-1}) = aX(z),$$

откуда найдем системную функцию фильтра

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{1 - bz^{-1}}. \quad (4.10)$$

Формула (4.10) является достаточно общим выражением для системной функции цифрового фильтра 1-го порядка. При $a = 1$ и $b = e^{-T/\tau}$ она совпадает с полученным ранее выражением (4.7) для системной функции цифрового фильтра, эквивалентного RC -цепи.

Найдем алгоритм цифровой фильтрации, соответствующий системной функции (4.10). Для этого решим уравнение (4.9) относительно $y(nT)$:

$$y(nT) = ax(nT) + by(nT - T). \quad (4.11)$$

Эквивалентная схема этого алгоритма приведена на рис. 4.6. По сравнению с нерекурсивным фильтром (см. рис. 4.5) здесь добавилась своеобразная «цепь обратной связи», которая означает, что значения выходного сигнала используются в последующих

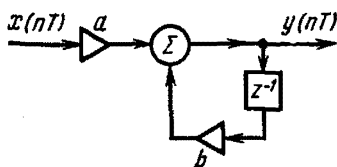


Рис. 4.6. Схема рекурсивного цифрового фильтра, аналогичного RC -цепи

расчетах. Фильтры такого типа называют рекурсивными.

Алгоритм (4.11) соответствует фильтру, который полностью эквивалентен рассмотренному ранее нерекурсивному фильтру. Но для определения одного значения выходного сигнала с помощью алгоритма нерекурсивного фильтра (4.4) требуется выполнить $2N$ операций, а при использовании алгоритма рекурсивного фильтра (4.11) —

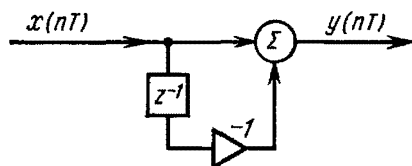


Рис. 4.7. Схема простейшего цифрового дифференциатора

только две операции. В этом состоит основное преимущество рекурсивных фильтров. Кроме того, рекурсивные фильтры позволяют производить обработку сигнала с более высокой точностью, так как они позволяют более правильно реализовать импульсную характеристику без

отбрасывания ее «хвоста». Рекурсивные фильтры позволяют реализовать алгоритмы, вообще нереализуемые с помощью нерекурсивных фильтров. Например, при $a = 1$ и $b = 1$ фильтр, работающий по схеме рис. 4.6, является, по существу, идеальным накопителем-интегратором и имеет импульсную характеристику вида $g(nT) = 1$ ($n \geq 0$). Фильтр с такой характеристикой по нерекурсивной схеме не может быть реализован.

Рассмотренные примеры показывают, что нет смысла применять нерекурсивные алгоритмы для создания цифровых фильтров с импульсной характеристикой большой протяженности. В этих случаях целесообразнее использовать рекурсивные фильтры.

Область применения нерекурсивных алгоритмов — это реализация цифровых фильтров с импульсной характеристикой, содержащей небольшое число членов. Примером может служить простейший дифференциатор, сигнал на выходе которого равен приращению входного сигнала:

$$y(nT) = x(nT) - x(nT - T).$$

Схема такого цифрового фильтра изображена на рис. 4.7.

Рассмотрим теперь цифровой фильтр общего вида, который описывается уравнением

$$y(nT) - b_1y(nT-T) - b_2y(nT-2T) - \dots - b_Ny(nT-NT) = \\ = a_0x(nT) + a_1x(nT-T) + \dots + a_Mx(nT-MT). \quad (4.12)$$

Это уравнение можно рассматривать и как разностное уравнение N -го порядка и как алгоритм цифровой фильтрации, если его переписать иначе, а именно

$$y(nT) = a_0x(nT) + a_1x(nT-T) + \dots + a_Mx(nT-MT) + \\ + b_1y(nT-T) + b_2y(nT-2T) + \dots + b_Ny(nT-NT). \quad (4.13)$$

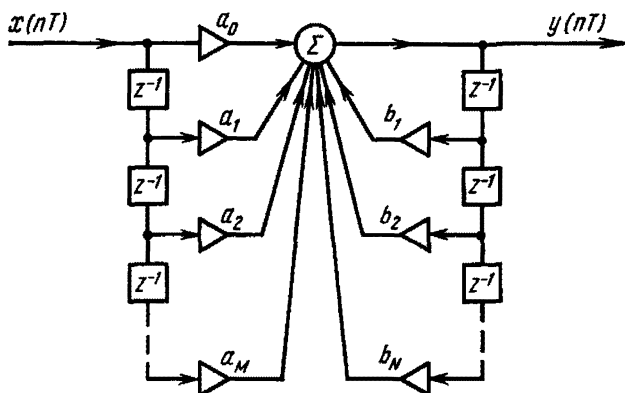


Рис. 4.8. Схема рекурсивного цифрового фильтра N -го порядка

Алгоритму (4.13) соответствует схема, изображенная на рис. 4.8. Найдем системную функцию такого фильтра. Для этого применим к уравнению (4.12) z -преобразование:

$$Y(z) - b_1z^{-1}Y(z) - b_2z^{-2}Y(z) - \dots - b_Nz^{-N}Y(z) = \\ = a_0X(z) + a_1z^{-1}X(z) + \dots + a_Mz^{-M}X(z),$$

откуда

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M}}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2} - \dots - b_Nz^{-N}}. \quad (4.14)$$

Выражение (4.14) позволяет установить связь между значениями элементов схемы фильтра и системной функцией. Коэффициенты в числителе системной функции a_i определяют значения коэффициентов при $x(nT - kT)$ (в пере-

курсивной части фильтра), а коэффициенты в знаменателе b_i определяют рекурсивную часть фильтра.

Системная функция цифрового фильтра (4.14) является аналогом операторного коэффициента передачи аналоговой цепи. Как и передаточная функция, системная функция (4.14) может быть полностью охарактеризована положением своих нулей и полюсов в плоскости комплексного переменного z .

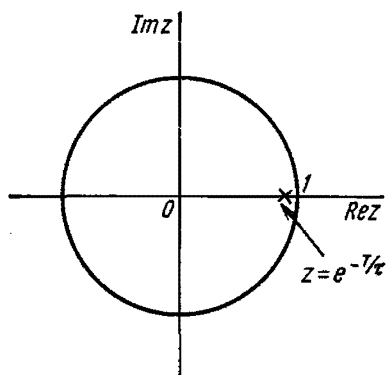


Рис. 4.9. Положение полюса системной функции фильтра 1-го порядка

Например, системная функция фильтра первого порядка (4.7) имеет единственный полюс при $z = e^{-T/\tau}$. В общем случае фильтр N -го порядка с системной функцией (4.14) характеризуется N полюсами и M нулями. Рассмотрим общие закономерности расположения особых точек в комплексной плоскости.

Известно, что для физически устойчивой аналоговой системы полюсы расположены в левой полуплоскости комплексного

переменного $p = \sigma + j\omega$, т. е. при $\text{Re } p < 0$. Чем меньше затухание в системе, тем ближе расположены полюсы к мнимой оси.

По аналогии можно определить расположение полюсов системной функции цифрового фильтра в плоскости комплексного переменного z . Учитывая, что $z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$, можно сделать вывод, что для устойчивого цифрового фильтра полюсы должны располагаться внутри окружности единичного радиуса. Чем выше эквивалентная добротность системы, тем ближе должны располагаться полюсы к окружности $|z| = 1$. Системная функция фильтра первого порядка (4.7) (рис. 4.9) имеет единственный полюс при $z = e^{-T/\tau}$. Чем больше постоянная времени фильтра τ , тем медленнее затухает переходный процесс при элементарном воздействии и тем ближе расположен полюс к единичной окружности.

Для примера рассмотрим цифровой фильтр второго порядка, эквивалентный колебательному контуру.

Импульсная характеристика колебательного контура имеет вид

$$g(t) = Ae^{-\alpha t} \cos \omega_0 t,$$

где A — размерный множитель.

Заменяя t на kT и опуская множитель A , запишем импульсную характеристику соответствующего цифрового фильтра

$$g(kT) = e^{-\alpha kT} \cos \omega_0 kT = \frac{1}{2} \left(e^{-\alpha kT + j\omega_0 kT} + e^{-\alpha kT - j\omega_0 kT} \right).$$

Найдем системную функцию этого фильтра как z -преобразование от импульсной характеристики:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha T + j\omega_0 T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-\alpha T - j\omega_0 T} z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\omega_0 T} z^{-1} + 1 - e^{-\alpha T} e^{j\omega_0 T} z^{-1}}{2 \left(1 - e^{-\alpha T} e^{j\omega_0 T} z^{-1} - e^{-\alpha T} e^{-j\omega_0 T} z^{-1} + e^{-2\alpha T} z^{-2} \right)} = \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T z^{-1} + e^{-2\alpha T} z^{-2}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $a_0 = 1$; $a_1 = -e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T$; $b_1 = 2e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T$; $b_2 = -e^{-2\alpha T}$.

Алгоритм данного фильтра запишем в виде

$$y(nT) = x(nT) + a_1 x(nT - T) + b_1 y(nT - T) + b_2 y(nT - 2T).$$

Схема, соответствующая этому алгоритму, приведена на рис. 4.10.

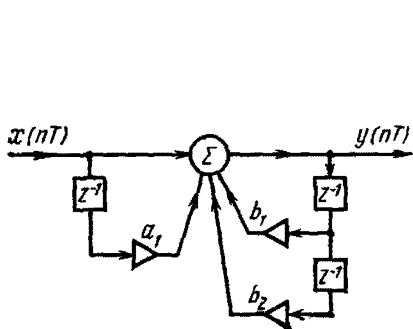


Рис. 4.10. Схема цифрового фильтра 2-го порядка, аналогичного колебательному контуру

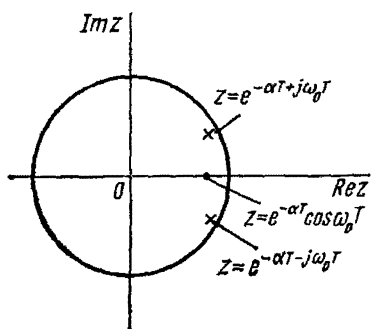


Рис. 4.11. Положение нулей и полюсов системной функции цифрового фильтра 2-го порядка, аналогичного колебательному контуру

Анализ выражения для системной функции показывает, что она имеет один нуль при $z = e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T$ и два полюса: при $z = e^{-\alpha T} e^{j\omega_0 T}$ и при $z = e^{-\alpha T} e^{-j\omega_0 T}$. Расположение особых точек на плоскости комплексного переменного z показано на рис. 4.11. Отметим, что с ростом добротности колебательного контура, соответствующего данному цифровому фильтру, величина коэффициента затухания α уменьшается, $e^{-\alpha T}$ стремится к единице и все особые точки приближаются к единичной окружности, что подтверждает сделанный ранее общий вывод.

§ 4.3. Частотные характеристики цифровых фильтров

До сих пор мы не рассматривали такую важную характеристику цифрового фильтра, как частотная. В какой-то мере роль частотной характеристики играет системная функция. Однако использовать только системную функцию не всегда удобно, особенно при рассмотрении цифровых систем обработки сигналов, аналогичных фильтрам верхних частот, фильтрам нижних частот, полосовым и режекторным фильтрам. Как известно, для описания аналоговых фильтров часто используют частотную характеристику (частотный коэффициент передачи). Поскольку система цифровой обработки сигналов должна выполнять те же функции, что и аналоговый фильтр, для такой системы в целом и для входящих в нее цифровых фильтров также следует определить частотную характеристику.

Частотная характеристика (частотный коэффициент передачи) аналогового фильтра может быть определена как отношение спектра сигнала на выходе фильтра $\dot{S}_2(\omega)$ при некотором воздействии к спектру входного сигнала $\dot{S}_1(\omega)$:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{S}_2(\omega)}{\dot{S}_1(\omega)}.$$

В качестве входного сигнала удобно использовать обобщенный гармонический сигнал $e^{j\omega t}$, тогда сигнал на выходе имеет вид $\dot{K}(\omega)e^{j\omega t}$.

Для определения частотной характеристики цифрового фильтра на его вход (точнее говоря, на вход дискретного фильтра, так как эффекты квантования мы не учитываем) подают дискретизированный сигнал $f(kT) = e^{j\omega kT}$. Тогда сигнал на выходе будет иметь вид $\dot{K}(\omega)e^{j\omega kT}$.

Частотная характеристика цифрового фильтра имеет некоторые специфические свойства. Главное из них — это

периодичность. На вход цифрового фильтра подают дискретизированный сигнал $f_1(kT)$ с интервалом дискретизации T ; для конкретного типа фильтра интервал T —фиксированная величина. Спектр входного дискретизированного сигнала представляет собой периодическую функцию (см. рис. 2.4) с периодом $2\pi/T$:

$$S_1(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_{f_1} \left(\omega - n \frac{2\pi}{T} \right).$$

Сигнал на выходе цифрового фильтра также представляет собой последовательность отсчетов, взятых с интервалом T . Его спектр тоже описывается периодической функцией с тем же периодом $2\pi/T$:

$$\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{S}_{f_2} \left(\omega - n \frac{2\pi}{T} \right).$$

На рис. 4.12 изображены спектры сигналов на входе и выходе цифрового фильтра. По определению отношение $\dot{S}_2(\omega)/\dot{S}_1(\omega) = K(\omega)$ определяет частотную характеристику цифрового фильтра. Нетрудно видеть, что $K(\omega)$ также является периодической функцией с периодом $2\pi/T$. Центральная часть частотной характеристики при $-\pi/T < \omega < \pi/T$ повторяет частотную характеристику фильтра-прототипа, аналогичного данному цифровому фильтру.

Рассмотрим цифровой фильтр общего вида, который описывается разностным уравнением (4.12):

$$\begin{aligned} y(nT) - b_1 y(nT - T) - \dots - b_N y(nT - NT) = \\ = a_0 x(nT) + a_1 x(nT - T) + \dots + a_M x(nT - MT). \end{aligned}$$

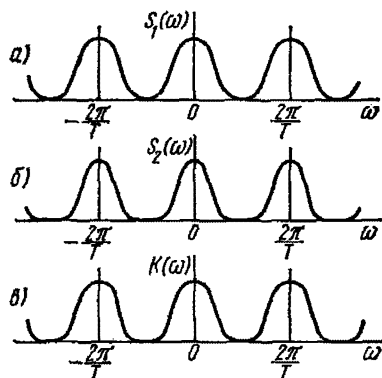


Рис. 4.12. Спектр сигнала на входе (а) и на выходе (б) цифрового фильтра, частотная характеристика (в) цифрового фильтра

Пусть входной сигнал $x(nT) = e^{j\omega nT}$. Тогда, по определению, сигнал на выходе фильтра $y(nT) = K(\omega)e^{j\omega nT}$. Подставляя выражения для $x(nT)$ и $y(nT)$ в уравнение (4.12), получим

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) e^{j\omega nT} (1 - b_1 e^{-j\omega T} - \dots - b_N e^{-j\omega NT}) &= \\ = e^{j\omega nT} (a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_M e^{-j\omega MT}), \end{aligned}$$

откуда

$$\dot{K}(\omega) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_M e^{-j\omega MT}}{1 - b_1 e^{-j\omega T} - \dots - b_N e^{-j\omega NT}}. \quad (4.15)$$

Выражение (4.15) совпадает с выражением (4.14) для системной функции фильтра, если $e^{-j\omega T}$ заменить на z^{-1} . Таким образом, установлена простая *связь между частотной характеристикой фильтра и его системной функцией*:

$$\dot{K}(\omega) = H(e^{j\omega T}). \quad (4.16)$$

Из выражения (4.16) следуют многие свойства частотной характеристики цифровых фильтров, в частности периодичность. Соотношение (4.16) позволяет определить положение нулей и полюсов частотной характеристики $K(\omega)$ по известному положению особых точек системной функции $H(z)$. И наконец, формула (4.16) позволяет записать связь между частотной характеристикой цифрового фильтра и его импульсной характеристикой. Заменяя в формуле (4.5) z на $e^{j\omega T}$, получим

$$\dot{K}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) e^{-j\omega kT}. \quad (4.17)$$

Таким образом, частотная характеристика цифрового фильтра связана с импульсной характеристикой соотношением, подобным дискретному преобразованию Фурье (3.3).

В качестве примера рассмотрим цифровой фильтр 1-го порядка, аналогичный RC-цепи, с импульсной характеристикой $g(kT) = e^{-kT/\tau}$. Системная функция такого фильтра определяется выражением

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}}.$$

Заменяя z^{-1} на $e^{-j\omega T}$, получим выражение для частотной характеристики

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} e^{-j\omega T}},$$

откуда найдем амплитудно-частотную характеристику

$$|\dot{K}(\omega)| = (1 + e^{-2T/\tau} - 2e^{-T/\tau} \cos \omega T)^{-1/2}$$

и фазо-частотную характеристику цифрового фильтра

$$\arg \dot{K}(\omega) = \arctg \frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - e^{T/\tau}}.$$

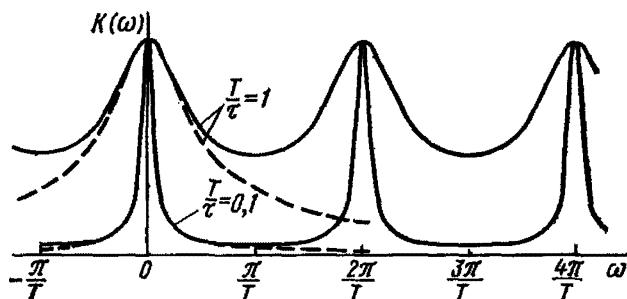


Рис. 4.13. Частотная характеристика цифрового фильтра 1-го порядка, эквивалентного RC -цепи

На рис. 4.13 приведен график амплитудно-частотной характеристики цифрового фильтра при $T/\tau = 1$ и $T/\tau = 0,1$. При $-\pi/T < \omega < \pi/T$ график частотной характеристики цифрового фильтра почти совпадает с частотной характеристикой RC -цепи.

Определим положение особых точек передаточной функции $K(p)$ рассматриваемого цифрового фильтра. Единственный полюс системной функции этого фильтра (см. рис. 4.10) расположен в точке $z = e^{-T/\tau}$. Заменяя z на e^{pT} , получим $e^{pT} = e^{-T/\tau}$, откуда

$$pT = -\frac{T}{\tau} + j2\pi n \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2, \dots),$$

$$p = -\frac{1}{\tau} + j \frac{2\pi n}{T} \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2, \dots).$$

Единственному полюсу системной функции соответствует бесконечное число полюсов передаточной функции, расположенных с интервалом $2\pi/T$ (рис. 4.14).

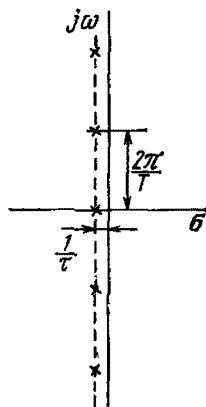


Рис. 4.14. Расположение полюсов функции $K(p)$ цифрового фильтра 1-го порядка

§ 4.4. Формы реализации цифровых фильтров

Схема рекурсивного цифрового фильтра, представленная на рис. 4.8, не является единственно возможной формой реализации цифрового фильтра с системной функцией вида (4.14).

Запишем выражение, связывающее z -преобразования сигналов на входе и выходе рекурсивного фильтра:

$$Y(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_N z^{-N}} X(z). \quad (4.18)$$

Введем промежуточную последовательность $w(nT)$, для которой определим z -преобразование следующим образом:

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_N z^{-N}}. \quad (4.19)$$

Такое преобразование осуществляется с помощью рекурсивного фильтра N -го порядка. Связь между выходным сигналом $y(nT)$ и промежуточным $w(nT)$ определяется выражением

$$Y(z) = W(z) (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}). \quad (4.20)$$

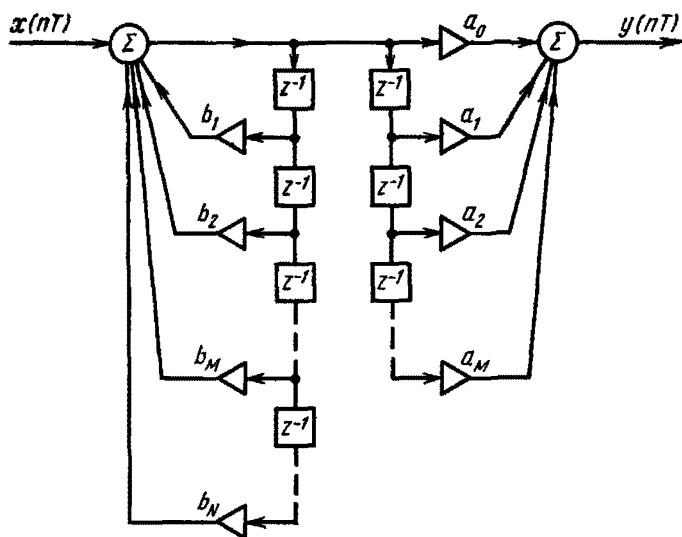


Рис. 4.15. К выводу канонической схемы цифрового фильтра

Формула (4.20) определяет нерекурсивное преобразование сигнала, которое может быть произведено после рекурсивного, определяемого выражением (4.19). Общая схема фильтрации, включая рекурсивное и нерекурсивное преобразования, представлена на рис. 4.15.

В этой схеме несколько элементов задержки являются лишними, так как дублируют друг друга. Если попарно объединить дублирующие друг друга элементы, то полу-

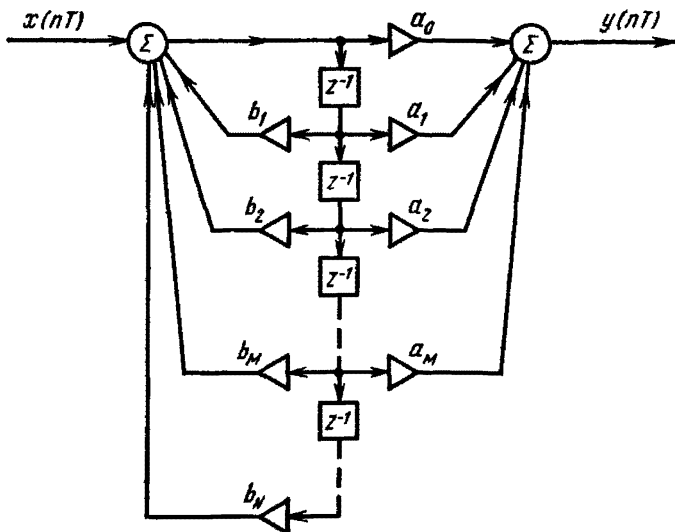


Рис. 4.16. Каноническая схема цифрового фильтра N -го порядка

чим схему фильтра, которую называют к а н о н и ч е с к о й (рис. 4.16). В отличие от нее схему рис. 4.8 называют п р я м о й или основной формой цифрового фильтра. Преимуществом канонической схемы фильтра является минимальное число элементов задержки, равное порядку фильтра. Благодаря этому удается сократить общий объем вычислений.

Кроме прямой и канонической форм реализации цифровых фильтров существуют и другие варианты. Разложим многочлены в числителе и знаменателе системной функции (4.14) на множители вида $(\alpha_i + \beta_i z^{-1})$ и $(\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \gamma_i z^{-2})$ так, чтобы коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ были действительными числами. Это возможно, так как все коэффи-

циенты a_i и b_i в числителе и знаменателе выражения (4.14) также являются действительными числами. Затем, группируя соответствующим образом эти множители, представим системную функцию фильтра в виде произведения

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) \dots H_n(z), \quad (4.21)$$

где сомножители $H_i(z)$ имеют вид $\frac{\alpha_i + \beta_i z^{-1}}{1 + \gamma_i z^{-1}}$ или $\frac{\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \delta_i z^{-2}}{1 + \gamma_i z^{-1} + \chi_i z^{-2}}$ и являются, таким образом, системными функциями цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков. Таким образом, цифровой фильтр с системной функцией вида (4.21) может быть реализован посредством каскадного соединения цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков, как показано на рис. 4.17. Такую форму реализации цифровых фильтров называют *последовательной* или *каскадной*.

Системную функцию фильтра (4.21), представленную в виде произведения элементарных сомножителей, можно посредством разложения на простые дроби преобразовать к виду

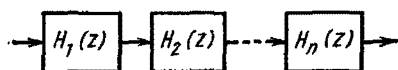


Рис. 4.17. Последовательная схема цифрового фильтра

$$H(z) = \sum_{j=1}^n \tilde{H}_j(z), \quad (4.22)$$

где $\tilde{H}_j(z)$ — системные функции цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков. Такое представление системной функции соответствует схемной реализации в виде параллельного соединения элементарных цифровых фильтров (рис. 4.18).

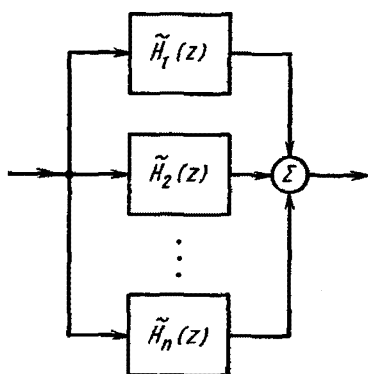


Рис. 4.18. Параллельная схема цифрового фильтра

Рассмотренные четыре типа фильтров совершенно эквивалентны друг другу и дают один и тот же результат, если не учитывать квантование сигналов и считать, что параметры фильтров т. е. коэффициенты a_i , b_i , α_i и другие,

заданы абсолютно точно. В реальных цифровых фильтрах происходит округление значений входного сигнала и результатов промежуточных вычислений, а параметры фильтров задаются с конечной точностью. В результате этого возникают погрешности обработки сигналов, а в отдельных случаях нарушается устойчивость фильтров. Наиболее сильно эти нежелательные эффекты проявляются при реализации фильтров в виде прямой и канонической форм; применение последовательной или параллельной форм позволяет несколько снизить ошибки обработки сигналов. Более подробно вопрос о погрешностях цифровой фильтрации будет рассмотрен далее.

§ 4.5. Основы синтеза цифровых фильтров

При решении задачи о синтезе фильтра обычно бывает задана частотная характеристика, реже — импульсная характеристика этого фильтра. При проектировании аналоговых фильтров задача синтеза распадается на две: задачу *аппроксимации* частотной характеристики и задачу *реализации*. Обычно частотная характеристика фильтра имеет такой вид, что она не может быть реализована с помощью обычных резисторов, конденсаторов и индуктивных катушек. Например, нереализуемой оказывается идеальная прямоугольная форма частотной характеристики фильтра нижних частот. Выход из такого положения состоит в нахождении функции, которая соответствует реальной электрической цепи и достаточно хорошо аппроксимирует заданную частотную характеристику. Часто эту задачу удается решить путем определения местоположения нулей и полюсов этой функции. После этого приходится решать задачу об определении электрической схемы, соответствующей заданной частотной характеристике. Эта вторая задача обычно бывает не легче первой.

При создании цифровых фильтров задача аппроксимации по существу не отличается от такой же задачи для аналоговых фильтров. Решение же второй задачи — задачи реализации не представляет никакого труда. Если системную функцию фильтра записать в виде дробно-рационального выражения, то, как показано в § 4.4, можно сразу же изобразить схему фильтра. Поэтому в данном параграфе будут рассмотрены некоторые способы определения системной функции цифрового фильтра в виде дробно-рационального выражения, т. е. в виде отношения двух полиномов

по отрицательным степеням z . Эти методы фактически являются методами синтеза цифровых фильтров.

За последние 2—3 десятилетия радиоспециалистами накоплен богатый опыт по проектированию аналоговых фильтров, и вполне естественным является стремление использовать этот опыт при разработке цифровых фильтров. Поэтому наиболее распространенные методы синтеза цифровых фильтров основаны на использовании *аналогового фильтра-прототипа*, т. е. физически реализуемого аналогового фильтра, удовлетворяющего поставленным техническим требованиям. При этом должна быть известна частотная или импульсная характеристика фильтра-прототипа.

Синтез по заданной импульсной характеристике. Наиболее просто задача синтеза цифрового фильтра решается в том случае, если известна импульсная характеристика фильтра-прототипа. Метод синтеза цифровых фильтров, основанный на использовании импульсной характеристики фильтра-прототипа, называют методом инвариантной импульсной характеристики. Согласно этому методу, для определения импульсной характеристики проектируемого цифрового фильтра необходимо подвергнуть дискретизации импульсную характеристику $g(t)$ аналогового фильтра-прототипа. Значения импульсной характеристики цифрового фильтра $g(kT)$ должны быть равны значениям импульсной характеристики фильтра-прототипа в отсчетные моменты времени $t = kT$. Применяя к импульсной характеристике цифрового фильтра z -преобразование, можно найти системную функцию и составить алгоритм цифровой фильтрации. Метод инвариантной импульсной характеристики уже был использован в § 4.2 при определении алгоритма цифрового фильтра 2-го порядка, эквивалентного колебательному контуру.

Метод билинейного z -преобразования. Синтез цифровых фильтров по заданной частотной характеристике фильтра-прототипа более сложен. При этом используются различные методы, основным из которых является метод *билинейного z -преобразования*. Пусть частотная характеристика аналогового фильтра-прототипа задана в операторной форме $K(p)$. Тогда системную функцию цифрового фильтра можно найти посредством замены переменного $e^{pT} = z$ или

$$p = \frac{1}{T} \ln z. \quad (4.23)$$

Передаточная функция любой физически осуществимой аналоговой цепи описывается дробно-рациональным выражением

$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}. \quad (4.24)$$

Подставляя (4.23) в (4.24), можно найти выражение для системной функции цифрового фильтра $H(z)$. Однако это выражение не будет дробно-рациональным и поэтому не соответствует никакому реальному цифровому устройству.

Поскольку точно решить задачу не удастся, используется приближенный подход. Надо подобрать дробно-рациональное выражение, которое бы приближенно соответствовало (4.23), и, что очень важно, преобразовывало бы частотную характеристику устойчивого аналогового фильтра в системную функцию устойчивого цифрового фильтра.

Для этого представим функцию (4.23) в виде ряда

$$p = \frac{2}{T} \left(\zeta + \frac{1}{3} \zeta^3 + \frac{1}{5} \zeta^5 + \dots \right),$$

где $\zeta = (z - 1)/(z + 1)$.

Ограничиваясь для простоты одним членом ряда, получим формулу дробно-линейного преобразования

$$p = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (4.25)$$

Если исходный аналоговый фильтр-прототип устойчив, то соответствующий ему цифровой фильтр также будет устойчивым. Это можно показать, анализируя расположение полюсов системной функции цифрового фильтра $H(z)$. Для устойчивой аналоговой системы все полюсы передаточной функции $K(p)$ располагаются в левой полуплоскости комплексного переменного p , т. е. при $\operatorname{Re} p < 0$. Преобразование (4.25) производит конформное отображение плоскости p на плоскость комплексного переменного z , так что мнимая ось $j\omega$ в плоскости p переходит в единичную окружность $|z| = 1$. При этом все полюсы передаточной функции $K(p)$, расположенные левее оси $p = j\omega$, оказываются внутри окружности $|z| = 1$. Следовательно, цифровой фильтр, соответствующий этой системной функции, будет устойчив.

Однако получающийся таким образом цифровой фильтр не будет точным аналогом исходного фильтра-прототипа, так как дробно-линейное преобразование искажает частотный масштаб. Вследствие того, что преобразование (4.25) лишь приблизительно соответствует желаемому преобразованию (4.23), частотная характеристика цифрового фильтра будет отличаться от частотной характеристики аналогового фильтра-прототипа.

Пусть, например, ω_a — значение частоты, соответствующее какому-либо характерному месту частотной характеристики аналогового фильтра (например, ослаблению на 3 дБ), и $p = j\omega_a$; этому же характерному месту частотной характеристики цифрового фильтра соответствует частота ω_c и $z = e^{j\omega_c T}$. Значения p и z связаны друг с другом дробно-линейным преобразованием (4.25), откуда получаем

$$p = j\omega_a = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega_c T}}{1 + e^{-j\omega_c T}},$$

или, после преобразования,

$$\omega_a = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2}. \quad (4.26)$$

Соотношение (4.26) позволяет скорректировать частотный масштаб при проектировании цифровых фильтров. Пусть, например, требуется, чтобы цифровой фильтр имел заданную частотную характеристику. Для решения задачи синтеза такого фильтра надо сначала подобрать аналоговый фильтр-прототип, такой, чтобы его частотная характеристика не совпадала точно с частотной характеристикой проектируемого цифрового фильтра, а была бы деформирована по оси частот в соответствии с условием (4.26). Если известна частотная характеристика $K(\omega)$ или передаточная функция $K(p)$ такого фильтра-прототипа, то с помощью преобразования (4.25) находят системную функцию цифрового фильтра $H(z)$ и определяют его структурную схему.

Рассмотренный метод билинейного преобразования является одним из основных рабочих методов синтеза цифровых фильтров. Для демонстрации этого метода приведем пример расчета цифрового фильтра 3-го порядка.

Пусть требуется рассчитать цифровой фильтр нижних частот, имеющий частоту дискретизации $f_{\text{дискр}} = 10$ кГц, плоскую частотную характеристику в области низких частот с затуханием 3 дБ

на частоте среза $f_c = 1$ кГц и ослаблением не менее 20 дБ на частоте $f_2 = 2$ кГц.

Из теории аналоговых фильтров (см., например, [11]) известно, что при соответствующем выборе параметров заданным требованиям могут удовлетворять фильтры Баттерворта, частотная характеристика которых (см. рис. 2.18) описывается выражением

$$|K(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}. \quad (4.27)$$

Прежде всего найдем частотную характеристику аналогового фильтра-прототипа. Между характерными точками частотных характеристик цифрового фильтра и фильтра-прототипа существует однозначная связь, которая устанавливается выражением (4.26). В соответствии с техническим заданием частотная характеристика проектируемого цифрового фильтра имеет две характерные точки: частоту среза $\omega_c = \omega_{цп}$, соответствующую затуханию 3 дБ, и частоту $\omega_{ц2} = 2000$ Гц, на которой должно обеспечиваться затухание не менее 20 дБ. Частоте среза цифрового фильтра $\omega_c = \omega_{цп}$ соответствует частота ω_{a1} среза аналогового фильтра-прототипа:

$$\omega_{a1} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{2\pi f_c T}{2}.$$

где $T = 1/f_{\text{дискр}} = 10^{-4}$ с — интервал дискретизации.

Подставляя числовые данные, получим $\omega_{a1} = 6,498 \cdot 10^3$ 1/с. Аналогично частоте $\omega_{ц2}$ цифрового фильтра соответствует частота ω_{a2} аналогового фильтра:

$$\omega_{a2} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{2\pi f_2 T}{2} = 1,453 \cdot 10^4 \text{ 1/с.}$$

Таким образом, аналоговый фильтр-прототип должен иметь затухание 3 дБ на частоте $\omega_{a1} = 6,5 \cdot 10^3$ 1/с и затухание не менее 20 дБ на частоте $\omega_{a2} = 1,453 \cdot 10^4$ 1/с. Отношение этих двух частот $\omega_{a2}/\omega_{a1} = 2,24$. Задаваясь на частоте ω_{a2} ослаблением не менее 20 дБ, т. е. в 10 раз, из выражения (4.27) определяем порядок фильтра: $1 + 2,24^{2n} \geq 100$, откуда $n \geq 2,85$. Принимаем $n = 3$.

Фильтр Баттерворта 3-го порядка на частоте ω_{a2} будет обеспечивать ослабление сигнала, равное $10 \lg(1 + 2,24^{2 \cdot 3}) = 21$ дБ, что с превышением удовлетворит заданным требованиям.

Найдем передаточную функцию фильтра-прототипа. Согласно [11] операторный коэффициент передачи фильтра Баттерворта 3-го порядка определяется выражением

$$K_3(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right) \left[1 + \frac{p}{\omega_c} + \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^2\right]}, \quad (4.28)$$

где $\omega_c = \omega_{a1} = 6,5 \cdot 10^3$ 1/с — частота среза аналогового фильтра-прототипа.

Заменяя p на $\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$, после подстановки числовых дан-

ных и ряда упрощений получим выражение для системной функции цифрового фильтра

$$H(z) = 0,018 \frac{(1 + z^{-1})^3}{(1 - 0,5096z^{-1})(1 - 1,2505z^{-1} + 0,5457z^{-2})} \quad (4.29)$$

Системная функция (4.29) может быть реализована в виде последовательной схемы фильтра. Для этого системную функцию следует записать в виде произведения двух системных функций первого или второго порядков:

$$H(z) = 0,018 \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,5096z^{-1}} \cdot \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,2505z^{-1} + 0,5457z^{-2}} \quad (4.30)$$

Схема цифрового фильтра, соответствующая системной функции (4.30), изображена на рис. 4.19.

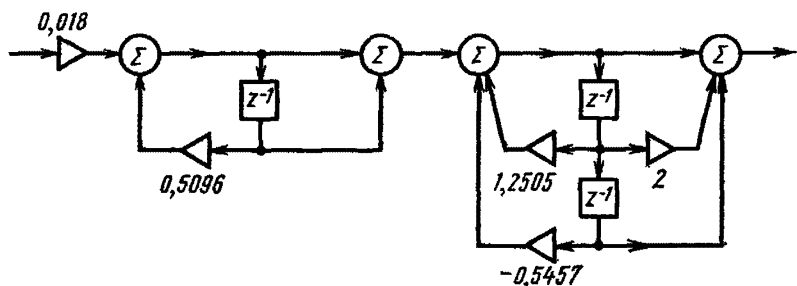


Рис. 4.19. Схема цифрового фильтра нижних частот 3-го порядка

Метод, аналогичный рассмотренному, используется не только для синтеза фильтров нижних частот, но и для синтеза фильтров верхних частот, полосовых, режекторных и даже многополосных цифровых фильтров. Для каждого типа фильтра получена формула дробно-рационального z -преобразования, которая устанавливает соответствие между системной функцией синтезируемого цифрового фильтра и частотной характеристикой аналогового фильтра-прототипа нижних частот. Этот метод синтеза цифровых фильтров подробно изложен в [4].

Прямой синтез цифровых фильтров. Кроме рассмотренных методов синтеза цифровых фильтров, основанных на использовании аналогового фильтра-прототипа, большое распространение получили прямые методы синтеза. Прямой синтез цифровых фильтров сводится к нахождению функции, аппроксимирующей заданную частотную характеристику так, чтобы в результате аппроксимации получилось

дробно-рациональное выражение для системной функции цифрового фильтра.

Соответствие между частотной характеристикой и системной функцией цифрового фильтра устанавливается соотношением (4.16). Для перехода от частотной характеристики к системной функции надо в выражении для частотной характеристики $e^{j\omega T}$ заменить на z . Чтобы получающееся при этом выражение $H(z)$ для системной функции было дробно-рациональным, исходное выражение для $K(\omega)$ должно быть дробно-рациональным относительно $e^{j\omega T}$. Поиск подходящей аппроксимации для $K(\omega)$ является главной трудностью прямого метода синтеза цифровых фильтров.

Обычно задачу аппроксимации решают, подбирая для $K(\omega)$ рациональное выражение относительно тригонометрических функций от ωT . Каждая из тригонометрических функций может быть представлена в виде комбинации комплексных экспонент $e^{j\omega T}$ и $e^{-j\omega T}$, в результате чего можно получить выражение для частотной характеристики $K(\omega)$ в требуемой форме.

Например, для фильтра нижних частот с частотой среза ω_c частотная характеристика может быть аппроксимирована выражением

$$|K(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2}} \right)^{2n}}. \quad (4.31)$$

График функции (4.31) почти не отличается от частотных характеристик фильтров Баттерворта, изображенных на рис. 2.18.

Дальнейшая процедура синтеза цифрового фильтра сводится к следующему: 1) по заданным характеристикам рассчитывают порядок фильтра n ; 2) заменяя в выражении для $|K(\omega)|^2 e^{j\omega T}$ на z находят квадрат системной функции $|H(z)|^2$; 3) определяют положение полюсов функции $|H(z)|^2$ и с помощью процедуры, изложенной в [2], находят положение полюсов функции $H(z)$; 4) исходя из положения полюсов, находят выражение для системной функции $H(z)$ и записывают алгоритм цифровой фильтрации.

Более подробно прямые методы синтеза цифровых фильтров, включая вопросы устойчивости, изложены в [4] и [7].

Методы синтеза фильтров с конечной импульсной характеристикой. До сих пор мы рассматривали в основном цифровые фильтры, длительность импульсной характеристики которых была неограничена — так называемые *фильтры с бесконечной импульсной характеристикой*, или *БИХ-фильтры*. Однако наряду с БИХ-фильтрами широкое распространение получили цифровые *фильтры с импульсной характеристикой конечной длительности*, называемые иначе *КИХ-фильтрами*. Фильтры с конечной импульсной характеристикой реализуются, как правило, по нерекурсивной схеме и обладают рядом положительных качеств, основное из которых состоит в том, что благодаря отсутствию обратных связей КИХ-фильтры всегда устойчивы.

Фильтры с конечной импульсной характеристикой не имеют непосредственных аналогов среди пассивных электрических фильтров, поэтому методы их синтеза относятся к прямым методам. Одним из наиболее употребительных методов синтеза КИХ-фильтров является *метод частотной выборки*.

Идея метода очень проста. Частотную характеристику цифрового фильтра подвергают дискретизации как периодическую функцию, разбивая интервал $(-\pi/T < \omega < \pi/T)$ на N равных частей. Интервал дискретизации Ω должен быть таким, чтобы передать характерные подробности частотной характеристики. К образовавшейся последовательности значений $K(n\Omega)$ применяют дискретное преобразование Фурье или быстрое преобразование Фурье и находят импульсную характеристику $g(kT)$. Значения $g(kT)$ являются коэффициентами нерекурсивного фильтра.

Иногда получающаяся в процессе синтеза импульсная характеристика цифрового фильтра оказывается физически нереализуемой, так как отличны от нуля ее значения $g(kT)$ при отрицательных kT . Фильтр можно сделать физически реализуемым, если его импульсную характеристику сместить вправо так, чтобы для моментов времени $kT < 0$ она тождественно равнялась нулю. При таком смещении изменяется фазо-частотная характеристика цифрового фильтра, а его амплитудно-частотная характеристика остается неизменной. Поэтому метод частотной выборки позволяет синтезировать фильтры с заданной амплитудно-частотной характеристикой при неконтролируемой фазо-частотной характеристике.

Метод частотной выборки хорошо работает при плавных частотных характеристиках. Продемонстрируем его

на примере фильтра с гауссовой частотной характеристикой.

Пусть требуется синтезировать цифровой фильтр с амплитудно-частотной характеристикой

$$K(\omega) = e^{-\omega^2 / \omega_0^2},$$

где $\omega_0 = 2\pi \cdot 200$ рад/с, интервал дискретизации $T=1$ мс.

Как было показано в § 2.1, для хорошего описания гауссовой кривой достаточно пяти отсчетов. Поэтому разделим интервал $(-\pi/T, \pi/T)$ на 5 частей, выбрав интервал дискретизации по частоте Ω равным ω_0 (рис. 4.20, а). Тогда частотная характеристика будет описываться пятью отсчетными значениями:

$$K(-2\Omega) = e^{-4} = 0,01832,$$

$$K(-\Omega) = e^{-1} = 0,36788,$$

$$K(0) = 1,$$

$$K(\Omega) = e^{-1} = 0,36788,$$

$$K(2\Omega) = e^{-4} = 0,01832.$$

Применяя к $K(n\Omega)$ дискретное преобразование Фурье, найдем импульсную характеристику цифрового фильтра:

$$g(0) = 0,3545,$$

$$g(\pm T) = 0,2395,$$

$$g(\pm 2T) = 0,0832.$$

Однако такая импульсная характеристика физически нереализуема вследствие того, что отличны от нуля ее значения при отрицательных значениях аргумента. Чтобы сделать фильтр реализуемым, сместим все значения импульсной характеристики вправо на величину $2T$. В результате получим

$$g(0) = 0,0832; \quad g(T) = 0,2395; \quad g(2T) = 0,3545;$$

$$g(3T) = 0,2395; \quad g(4T) = 0,0832.$$

Цифровой фильтр с такой импульсной характеристикой может быть реализован с помощью алгоритма

$$y(nT) = 0,0832x(nT) + 0,2395x(nT - T) + 0,3545x \times \\ \times (nT - 2T) + 0,2395x(nT - 3T) + 0,0832x(nT - 4T).$$

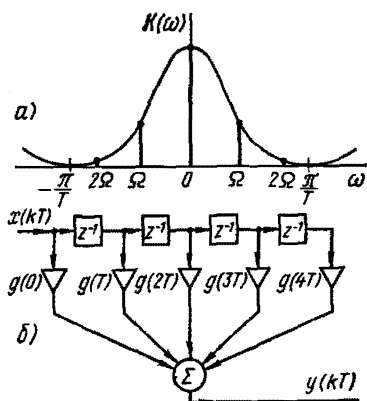


Рис. 4.20. Цифровой фильтр с гауссовой частотной характеристикой:

а — частотная характеристика; б — схема фильтра

Его схема представлена на рис. 4.20, б.

В рассмотренном примере такой простой результат получился благодаря тому, что синтезируемый фильтр имеет очень плавную частотную характеристику. Для фильтров с частотной характеристикой, имеющей резкие границы,

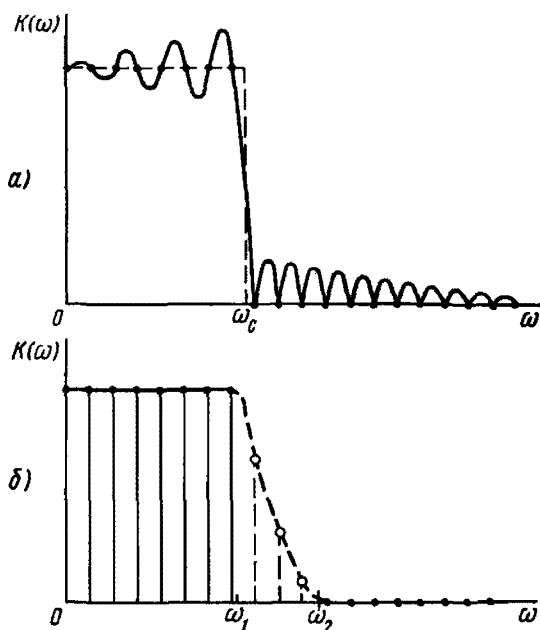


Рис. 4.21. Синтез ФНЧ с помощью метода частотной выборки:

a — частотная характеристика ФНЧ при формально произведенной дискретизации; *б* — то же, при подборе значений частотной характеристики в промежуточной полосе частот

процедура синтеза сильно усложняется. Если попытаться применить этот метод для синтеза фильтра нижних частот с прямоугольной частотной характеристикой, подвергнув ее дискретизации (рис. 4.21, *a*), то частотная характеристика получающегося при этом фильтра точно пройдет через все отсчетные точки, но в промежутках между ними может недопустимо отличаться от идеальной характеристики. Это приведет к сильной изрезанности частотной характеристики в полосе пропускания и большому уровню боковых лепестков. При увеличении числа отсчетов степень

изрезанности частотной характеристики не уменьшается, а только увеличивается частота биений.

Для уменьшения изрезанности частотной характеристики и снижения уровня боковых лепестков отсчетные значения частотной характеристики задают только в полосе пропускания фильтра, т. е. при $\omega < \omega_1$ (рис. 4.21, б) и в полосе непропускания ($\omega > \omega_2$), а в промежуточной полосе их подбирают так, чтобы обеспечить наименьшую изрезанность частотной характеристики. Эта задача решается обычно на ЭВМ методом линейного программирования [7].

Еще один метод синтеза цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой основан на использовании так называемых временных окон.

Рассмотрим идею этого метода на примере фильтра нижних частот.

Как известно, импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот с частотой среза ω_0 описывается функцией

$$g(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$$

и имеет вид, изображенный на рис. 4.22, а. Такая импульсная характеристика физически нереализуема из-за того, что ее значения отличаются от нуля при отрицательных значениях t . Чтобы сделать фильтр реализуемым, импульсную характеристику усекают с обеих сторон и смещают вправо, как показано на рис. 4.22, б. Однако такое резкое усе-

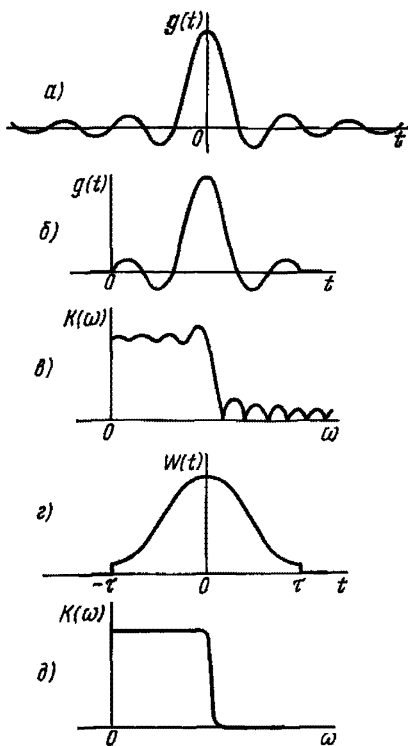


Рис. 4.22. Применение метода временных окон:

а — импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот; б — усеченная импульсная характеристика; в — частотная характеристика фильтра нижних частот с усеченной импульсной характеристикой; г — функция Хэмминга; д — частотная характеристика фильтра нижних частот с окном Хэмминга

чение импульсной характеристики приводит к сильной изрезанности частотной характеристики в полосе пропускания и недопустимо большому уровню боковых лепестков в полосе непропускания (рис. 4.22, в). Чтобы улучшить вид частотной характеристики, импульсную характеристику умножают на весовую функцию (так называемое «временное окно»), которая близка к единице в середине и плавно убывает к краям. В результате форма импульсной характеристики становится более плавной и, как следствие этого, улучшается вид частотной характеристики.

Существует несколько различных типов временных окон. Одним из наиболее распространенных является окно Хэмминга (рис. 4.22, г), которое описывается функцией

$$W(t) = 0,54 + 0,46 \cos(\pi t/\tau).$$

Окно Хэмминга позволяет получить частотную характеристику, близкую к прямоугольной, с уровнем боковых лепестков 53,6 дБ (рис. 4.22, д).

Однако наилучшие результаты получаются при использовании окна Кайзера, которое описывается выражением

$$W(t) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - (t/\tau)^2})}{I_0(\beta)}, \quad (4.32)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя мнимого аргумента; β — параметр окна, который выбирают, исходя из того, какое требование к частотной характеристике является более важным. При увеличении β уменьшается уровень боковых лепестков частотной характеристики и пульсации в полосе пропускания и в то же время уменьшается крутизна скатов частотной характеристики. С помощью окна Кайзера можно синтезировать фильтры, имеющие практически прямоугольную форму частотной характеристики.

Обзор методов синтеза цифровых фильтров, приведенный в данном параграфе, является далеко не полным и не охватывает всех разновидностей методов, применяемых в инженерной практике. Более подробно этот вопрос рассмотрен в [2, 3, 4, 7].

§ 4.6. Эффекты квантования в цифровых фильтрах

До сих пор мы не учитывали эффекты квантования, предполагая, что сигнал на входе цифрового фильтра может принимать любые значения. Иначе говоря, вместо цифровых сигналов и фильтров мы рассматривали дискретные.

В цифровых фильтрах сигнал задается последовательностью чисел с конечным числом разрядов, т. е. значения сигнала округляются с заданной точностью. Это приводит к появлению ряда специфических эффектов, не встречающихся в аналоговых и дискретных устройствах. Главными из этих эффектов являются: а) квантование сигналов на входе (шум квантования), о котором говорилось в § 2.2; б) неточные (округленные) значения постоянных параметров фильтров; в) округление результатов промежуточных вычислений; г) предельные циклы малого уровня.

Анализ эффектов квантования — это один из самых сложных вопросов теории цифровых фильтров. Величина погрешности обработки сигналов, вызванной эффектами квантования, зависит от многих факторов: структуры фильтра, способа представления чисел в машине, характера входного сигнала и др. Общий анализ погрешностей цифровой обработки сигналов не входит в задачи данной книги. Ограничимся лишь краткой характеристикой различных эффектов квантования. Более подробно вопросы эффектов квантования и погрешностей цифровой обработки сигналов изложены в [2, 3, 5].

В цифровых вычислительных устройствах применяют два способа представления чисел: с фиксированной запятой и с плавающей запятой.

При представлении числа с фиксированной запятой (в двоичном коде) его можно записать в форме

$$U = \sum_{i=0}^n U_i 2^{-i}, \quad (4.33)$$

где $U_i = 0$ или 1.

Недостатком устройств, в которых используются числа с фиксированной запятой, является небольшой динамический диапазон. Например, максимальное значение числа, записанного в виде (4.33), не превышает 2. В то же время арифметические устройства с фиксированной запятой проще по структуре; их легче анализировать.

Числа с плавающей запятой обычно представляются в виде, изображенном на рис. 4.23. Арифметические устройства, в которых используются числа с плавающей запятой, обладают значительно большим динамическим диапазоном, однако анализ ошибок квантования в них достаточно сложен. Например, величина ошибок округления зависит не только от числа разрядов, но и от порядка округляемого числа.

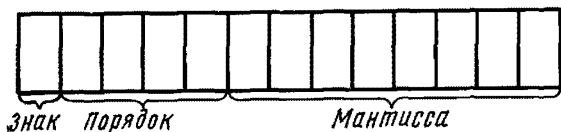


Рис. 4.23. Представление числа в арифметическом устройстве с плавающей запятой

В рамках данной книги анализ эффектов квантования будем проводить только для вычислительных устройств, в которых используются числа с фиксированной запятой. Анализ эффектов квантования в цифровых фильтрах с плавающей запятой приведен в [3].

Погрешности, вызываемые квантованием входного сигнала. Одним из источников погрешности цифровой обработки сигналов является шум квантования, возникающий при квантовании (округлении) значений входного сигнала в аналого-цифровом преобразователе.

Как отмечалось, квантованный сигнал на входе цифрового фильтра можно представить в виде суммы исходного неквантованного сигнала и шума квантования $\xi(t)$. Если фильтр линейный, то прохождение через него сигнала и шума квантования можно рассматривать независимо друг от друга.

Определим шум на выходе цифрового фильтра, вызванный прохождением через него шума квантования. Шум квантования представляет собой последовательность дискретных значений $\xi(kT)$, не превышающих по модулю половины шага квантования $\Delta/2$ и распределенных по равномерному закону. Статистическая связь между соседними дискретными значениями обычно бывает невелика, и можно приближенно считать, что они некоррелированы. В этом случае можно найти дисперсию шума на выходе фильтра. Обозначим через $\eta(nT)$ шум на выходе цифрового фильтра,

т. е. реакцию фильтра на входное воздействие $\xi(nT)$. Очевидно, что $\eta(nT)$ можно записать как

$$\eta(nT) = \sum_{m=0}^n \xi(mT) g(nT - mT). \quad (4.34)$$

Поскольку соседние отсчеты входного шума некоррелированы, дисперсия шума на входе фильтра равна сумме дисперсий отдельных слагаемых в выражении (4.34). Учитывая, что дисперсия равномерного закона распределения шириной Δ равна $\Delta^2/12$, получим

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{m=0}^n g^2(nT - mT) = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{m=0}^n g^2(mT).$$

Поскольку все $g^2(mT)$ положительны, дисперсия отсчетов шума на выходе фильтра растет с увеличением числа отсчетов, стремясь к предельному значению

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} g^2(mT). \quad (4.35)$$

Обычно для цифровых фильтров выполняется условие $\sum_{m=0}^{\infty} g^2(mT) < \infty$, и дисперсия σ_{η}^2 конечна.

Для расчета дисперсии шума квантования на выходе цифрового фильтра можно получить еще одну формулу. Учитывая, что системная функция цифрового фильтра является z -преобразованием импульсной характеристики, запишем для нее теорему Парсеваля

$$\sum_{m=0}^{\infty} g^2(mT) = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (4.36)$$

Подставляя выражение (4.36) в (4.35), получим

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (4.37)$$

Формулу (4.37) удобно применять для расчета дисперсии шума на выходе цифрового фильтра в тех случаях,

когда импульсная характеристика неизвестна, а задана системная функция фильтра.

В качестве примера найдем дисперсию шума квантования на выходе цифрового фильтра 1-го порядка с системной функцией

$$H(z) = \frac{a}{1 - bz^{-1}} \quad (b < 1), \quad (4.38)$$

если дисперсия шума квантования на входе равна $\Delta^2/12$.

Расчет дисперсии шума на выходе можно произвести двумя способами: с помощью формулы (4.37) и путем непосредственного суммирования ряда (4.35). Воспользуемся первым способом.

Подставляя выражение (4.38) для системной функции в формулу (4.37), получим

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{a^2}{(1 - bz)(z - b)} dz.$$

Подынтегральная функция имеет два полюса: $z_1 = b$ и $z_2 = 1/b$.

Внутри контура интегрирования $|z| = 1$ расположен лишь полюс $z_1 = b$. Вычет в этой точке равен $1/(1 - b^2)$, следовательно,

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \frac{1}{1 - b^2}.$$

Такой же результат можно получить, вычисляя импульсную характеристику цифрового фильтра с помощью формулы обратного z -преобразования и суммируя ряд (4.36).

Ошибки, вызываемые неточными значениями постоянных параметров фильтра. При синтезе цифровых фильтров значения коэффициентов (параметров фильтра), получающиеся в результате расчета, приходится округлять с заданной степенью точности. Например, в результате расчета получено значение некоторого коэффициента $a_k = 2,8374$. Это значение округляют, например, до трех значащих цифр: $a_k = 2,84$. В результате этого фактические параметры цифрового фильтра несколько отличаются от расчетных.

Ошибки этого типа наибольшую роль играют в рекурсивных фильтрах, которые можно уподобить цепям, охваченным глубокой положительной обратной связью. Небольшие изменения параметров фильтра приводят к небольшим перемещениям его полюсов, но если эти полюсы расположены близко к единичной окружности в плоскости z , то такие смещения могут привести к резким изменениям параметров фильтра и даже к потере его устойчивости. Поэтому разработка любого цифрового фильтра обяза-

тельно должна сопровождаться исследованием влияния неточности параметров. Это особенно важно для фильтров высокого порядка, где такое влияние может быть очень сильным. Поэтому обычно стараются избежать применения фильтров высокого порядка, заменяя их последовательно или параллельно соединенными фильтрами 1-го и 2-го порядков.

Ошибки, вызванные квантованием результатов вычислений. При обработке сигналов в цифровых фильтрах производится ряд арифметических операций: умножение значений сигнала на постоянные коэффициенты и суммирование. В арифметических устройствах, в которых используются числа с фиксированной запятой, сложение чисел не приводит к увеличению числа разрядов, а при умножении число разрядов возрастает и возникает необходимость округления результатов вычисления. Каждое такое округление приводит к появлению ошибки, аналогичной шуму квантования.

Для анализа ошибок округления результатов вычисления каждый из источников ошибок заменяется на схеме цифрового фильтра источником шума $e_i(kT)$, включенным в соответствующую часть схемы. Общее число таких источников должно быть равно числу умножений.

Рассмотрим расчет шумов округления на примере цифрового фильтра 1-го порядка с системной функцией

$$H(z) = \frac{1 + az^{-1}}{1 - bz^{-1}}. \quad (4.38')$$

Цифровой фильтр с системной функцией (4.38') может быть реализован в прямой и канонической формах. Эквивалентная схема фильтра при *прямой форме реализации* с учетом шумов округления имеет вид, изображенный на рис. 4.24. Источники шума $e_1(kT)$ и $e_2(kT)$ имеют одинаковую дисперсию $\sigma^2 = \Delta^2/12$, причем величина Δ определяется числом используемых разрядов. Оба источника действуют по существу на входе общего сумматора и создают суммарный шум округления. Если считать источники шума независимыми, то дисперсия суммарного шума на входе сумматора

$$\sigma_{\text{общ}}^2 = 2\sigma^2 = \Delta^2/6.$$

Этот шум, проходя через оставшуюся рекурсивную часть фильтра, создает выходной шум $e_{\text{вых}}(kT)$. Диспер-

сия шума на выходе цифрового фильтра может быть вычислена по формуле

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{\Delta^2}{6} \frac{1}{2\pi j} \oint H_p(z) H_p\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}, \quad (4.39)$$

где $H_p(z) = 1/(1 - bz^{-1})$ — системная функция рекурсивной части фильтра.

Вычисляя интеграл в формуле (4.39), получим

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{\Delta^2}{6} \frac{1}{1 - b^2}. \quad (4.40)$$

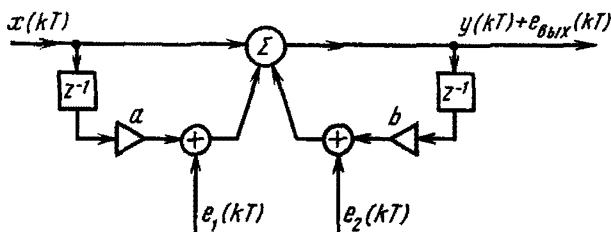


Рис. 4.24. Эквивалентная шумовая схема цифрового фильтра 1-го порядка в прямой форме

Эквивалентная схема цифрового фильтра, при канонической форме реализации с учетом шумов округления представлена на рис. 4.25. Источник шума $e_1(kT)$, характеризующий округление результатов при умножении на коэффициент a , действует по существу на выходе фильтра, и его дисперсия

$$\sigma_{\text{вых}1}^2 = \Delta^2/12. \quad (4.41)$$

Источник шума $e_2(kT)$, возникающего при округлении результатов умножения на b , оказывается подключенным ко входу фильтра. Дисперсия порождаемого им шума на выходе фильтра может быть вычислена по формуле (4.37). Подставляя в (4.37) выражение (4.38') для $H(z)$ и вычисляя интеграл, получим

$$\sigma_{\text{вых}2}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \frac{(1 + a/b)(1 + ab)}{1 - b^2}. \quad (4.42)$$

Результирующая дисперсия шума на выходе определяется суммой выражений (4.41) и (4.42):

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \left[1 + \frac{(a + b)(1 + ab)}{b(1 - b^2)} \right]. \quad (4.43)$$

Сравнивая формулы (4.40) и (4.43), можно видеть, что дисперсия шума, вызванного округлением результатов вычислений, может сильно различаться при разных формах реализации цифровых фильтров. Например, при $a = -0,9$ и $b = 0,9$ для канонической формы фильтра $\sigma_{\text{вых}}^2 = \Delta^2/12$, а для прямой формы $\sigma_{\text{вых}}^2 = \Delta^2/12 \times 10,526$. При других значениях параметров a и b соотношение дисперсий шума может быть иным.

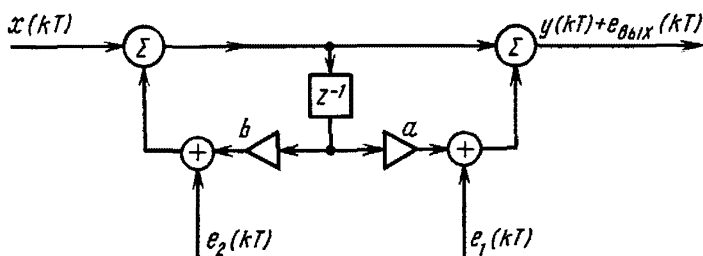


Рис. 4.25. Эквивалентная шумовая схема цифрового фильтра 1-го порядка в канонической форме

Рассмотренные примеры показывают, что шум округления на выходе цифрового фильтра зависит от формы его реализации. Для выбора оптимальной формы реализации необходимо в каждом конкретном случае провести расчет, аналогичный проделанному выше. Однако более детальный анализ шумов округления позволяет выявить общие закономерности, согласно которым в большинстве случаев наилучшей является последовательная (каскадная) форма фильтра.

Предельные циклы низкого уровня. Если сигнал на входе цифрового фильтра мал по величине, то вследствие округления результатов вычисления на выходе фильтра могут возникнуть специфические периодические колебания.

Поясним сказанное примером. Рассмотрим рекурсивный цифровой фильтр 1-го порядка, описываемый разностным уравнением

$$y(nT) = x(nT) - 0,9y(nT - T).$$

Подадим на вход этого фильтра сигнал

$$x(nT) = \begin{cases} 10, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Если результаты вычисления не округлять, на выходе фильтра получится последовательность $+10; -9; +8,1; -7,29; +6,561; -5,8949; +4,80541; -4,324869; \dots$ Абсолютные значения входного сигнала убывают, стремясь к нулю по экспоненциальному закону.

Теперь рассмотрим реальный цифровой фильтр, результаты вычисления в котором округляются до целочисленных значений. При подаче того же сигнала на вход этого фильтра на его выходе возникает последовательность $+10; -9; +8; -7; +6; -5; +5; -5; +5; -5; \dots$ Спустя время $5T$ после подачи входного сигнала на выходе фильтра устанавливаются периодические колебания, амплитуда которых равна 5, а период повторения вдвое больше периода дискретизации. В фильтре другого типа амплитуда и частота периодических колебаний на выходе фильтра могут быть иными.

Рассмотренные предельные циклы являются очень нежелательным явлением, так как приводят к возникновению паразитных колебаний на выходе фильтра, уровень которых может значительно превышать уровень шума квантования. Предельные циклы обычно возникают при прекращении действия сигнала на входе фильтра. Поэтому при разработке систем цифровой обработки следует избегать режимов, приводящих к паузам входного сигнала.

Рассмотренные эффекты квантования являются главными источниками погрешностей цифровой обработки сигналов. Радикальным методом снижения этих погрешностей является увеличение числа разрядов чисел, обрабатываемых в машине. Однако этот путь в большинстве случаев бывает нежелательным, так как приводит к усложнению и удорожанию фильтров, а в ряде случаев оказывается неосуществимым из-за технологических трудностей. Поэтому на практике приходится искать компромиссные решения, выбирая оптимальную для каждого случая структуру фильтра.

§ 4.7. Вопросы реализации и применения цифровых фильтров

Мы рассмотрели основные параметры и алгоритмы работы цифровых фильтров. Эти алгоритмы могут быть практически реализованы двумя способами.

1. Реализация алгоритмов цифровой фильтрации в виде программ на универсальной цифровой вычислитель-

ной машине. Этот способ удобен при моделировании различных систем цифровой обработки сигналов, так как позволяет легко изменять алгоритм фильтрации. Примеры реализации некоторых алгоритмов цифровой фильтрации в виде программ для ЭВМ «МИР» приведены в приложении 2.

2. Реализация цифровых фильтров в виде логических и цифровых схем, содержащих триггеры, регистры сдвига, счетчики и другие логические элементы. Вопросы схемной реализации цифровых фильтров подробно рассмотрены в [3] и [7].

Реализация цифровых фильтров в виде электрических схем удобна при создании систем цифровой обработки сигналов, работающих в реальном масштабе времени. Этот способ реализации довольно трудоемок, так как для создания даже простейшего цифрового фильтра требуются десятки интегральных микросхем. Однако такое устройство все же несравненно дешевле, чем универсальная цифровая вычислительная машина.

О преимуществах цифровых фильтров перед аналоговыми уже говорилось в гл. 1. Сейчас цифровые фильтры применяются в основном там, где эти преимущества наиболее значительны. Это в первую очередь системы управления различными объектами и процессами, где алгоритм обработки сигналов обычно бывает настолько сложен, что практически не может быть реализован с помощью аналоговых устройств.

Вторая важная область применения цифровых фильтров — это обработка низкочастотных и инфранизкочастотных сигналов в миниатюрной аппаратуре, когда использование аналоговых устройств затруднено вследствие больших габаритов основных элементов схем: индуктивных катушек и конденсаторов. Даже самые современные катушки и конденсаторы, пригодные для использования в фильтрах инфранизких частот, имеют габариты несколько кубических сантиметров. Современная микроэлектроника позволяет изготовить устройство для цифровой обработки инфранизкочастотных колебаний значительно более компактным, чем соответствующий аналоговый фильтр.

Весьма перспективной областью применения цифровых фильтров является обработка экспериментальных данных в геофизике, геологии и других естественных науках, которые связаны с проведением экспериментов в натуральных и полевых условиях. За сезон экспериментальной работы

накапливается такое количество данных, на обработку которых даже при использовании ЭВМ требуется несколько месяцев напряженного труда. Значительная часть этого времени затрачивается на программирование и ввод в ЭВМ огромных массивов экспериментальных результатов.

Поэтому было бы очень заманчиво обработку экспериментальных результатов производить непосредственно в процессе эксперимента. До недавних пор это было невозможно, так как аналоговые устройства не позволяют решить эту задачу, а универсальные ЭВМ были слишком громоздки для того, чтобы их можно было использовать в полевых условиях. Теперь благодаря развитию микроэлектронной техники стало возможным создание малогабаритных цифровых устройств, предназначенных для обработки экспериментальных данных непосредственно в процессе их получения.

Список возможных областей применения устройств для цифровой обработки сигналов можно продолжить; читатель сам, после некоторых размышлений, может назвать несколько конкретных примеров, где цифровые фильтры были бы полезны.

Основными факторами, которые препятствуют широкому применению цифровых фильтров, являются их значительная сложность и высокая стоимость.

По поводу стоимости цифровых фильтров можно сказать следующее. Конечно, цифровые фильтры дороже аналоговых, однако они позволяют решать совершенно новые задачи, а в отдельных случаях экономить месяцы человеческого труда, так что в итоге применение цифровых фильтров часто оказывается экономически оправданным.

Сложность цифровых фильтров является более серьезным препятствием к их широкому применению. Ведь даже относительно простой цифровой фильтр вместе с устройствами сопряжения содержит тысячи схемных элементов. Поэтому в недавнем прошлом разработка таких устройств была под силу лишь довольно большому коллективу специалистов. Однако в последние годы ситуация существенно изменилась. Разработаны и серийно выпускаются микропроцессоры, БИС памяти и др. Комбинируя эти устройства надлежащим образом, можно создавать устройства для цифровой обработки сигналов самого различного назначения.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти системную функцию цифрового фильтра с заданной импульсной характеристикой:

$$а) \quad g(kT) = \begin{cases} +1, & k = 0; \\ -1, & k = 1; \end{cases}$$

$$б) \quad g(kT) = \begin{cases} 1, & k - \text{четное}; \\ 0, & k - \text{нечетное}; \end{cases}$$

$$в) \quad g(kT) = 2 \exp(-k/3).$$

2. Для цифровых фильтров с импульсными характеристиками, приведенными в задаче 1, записать алгоритмы цифровой фильтрации и изобразить схемы фильтров.

3. Алгоритм цифровой фильтрации имеет вид

$$y(nT) = 2x(nT) - \frac{1}{2}x(nT - T) + \frac{1}{2}y(nT - T).$$

Найти системную функцию и импульсную характеристику цифрового фильтра.

4. Системная функция цифрового фильтра имеет вид:

$$а) \quad H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}};$$

$$б) \quad H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}};$$

$$в) \quad H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

Определить его импульсную характеристику и записать алгоритм цифровой фильтрации.

5. Системная функция цифрового фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{2}{1 - 2z^{-1}}.$$

Устойчив ли такой фильтр? Найти его импульсную характеристику.

6. На вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой $g(kT) = e^{-2k}$ подается сигнал $x(kT) = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq 10, \\ 0, & k = 0, k > 10. \end{cases}$

Определить сигнал на выходе фильтра.

7. Решить задачу 6 для сигнала $f(kT) = e^{-2k}$ ($k \geq 0$).

8. На вход цифрового фильтра с системной функцией $H(z) = (1 + z^{-1})/(1 - z^{-1})$ подается сигнал $x(kT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq 4, \\ 0, & k > 4. \end{cases}$

Определить сигнал на выходе фильтра.

9. Решить задачу 8 для фильтра с системной функцией

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}}.$$

10. Для сигнала в виде 5 одинаковых отсчетов (дискретизированный прямоугольный импульс) используется согласованный цифровой фильтр, импульсная характеристика которого совпадает по форме с сигналом. Определить системную функцию фильтра, алгоритмы фильтра в рекурсивном и нерекурсивном вариантах. Найти сигнал на выходе фильтра.

11. При подаче на вход цифрового фильтра последовательности $1, 1/4, 1/16, \dots, 1/4^k, \dots$ на выходе получается последовательность $2, 1, 1/2, 1/4, \dots, 1/2^{k-1}, \dots$. Определить системную функцию, импульсную характеристику и схему фильтра.

12. Задана системная функция

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 + 1,2z^{-1} - 0,45z^{-2}}.$$

Определить положение нулей и полюсов на плоскости z .

13. Исследовать положение нулей и полюсов системной функции

$$H(z) = \frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$$

в зависимости от значения коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 . Указать, при каких значениях коэффициентов цифровой фильтр будет устойчив.

14. Найти частотную характеристику цифрового фильтра 2-го порядка с импульсной характеристикой $g(kT) = e^{-\alpha kT} \cos \omega_0 kT$. Определить расположение нулей и полюсов передаточной функции $K(p)$ в плоскости комплексной переменной p .

15. Системная функция цифрового фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2}}.$$

Изобразить схемы цифрового фильтра в прямой и канонической формах и записать соответствующие алгоритмы.

16. Системная функция цифрового фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{1 - 0,2 z^{-1} + 0,2z^{-2} + 0,8 z^{-3}}.$$

Найти последовательную и параллельную схемы фильтров и записать соответствующие алгоритмы цифровой фильтрации.

17. На вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой $g(kT) = e^{-0,5k}$ подается сигнал, значения которого округляются до первого десятичного знака (с точностью 0,1). Определить дисперсию шума квантования на выходе фильтра.

18. Решить задачу 17 для фильтра с системной функцией

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,8z^{-1}}.$$

19. При расчете параметров цифрового фильтра получено следующее выражение для алгоритма фильтрации

$$y(nT) = x(nT) + 0,9563y(nT - T).$$

После округления значение коэффициента принято равным 0,96. Оценить величину погрешности обработки сигнала, вызванной округлением значения коэффициента, если на вход подается последовательность, состоящая из 30 одинаковых отсчетных значений.

Вывод формулы спектральной плотности дискретизированного сигнала

Определим спектр дискретизированного сигнала $\psi(t)$, представляющего собой последовательность δ -функций, «промодулированных» исходным непрерывным колебанием $f(t)$:

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \delta(t - kT) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT). \quad (\text{П1.1})$$

Как следует из (П1.1), дискретизированный сигнал $\psi(t)$ представляет собой произведение функции $f(t)$ на функцию

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT),$$

которая в свою очередь представляет собой периодическую последовательность δ -функций. Чтобы найти спектр функции $\psi(t)$, найдем сначала спектр периодической последовательности δ -функций.

Как всякую периодическую функцию, $\eta(t)$ можно разложить в ряд Фурье

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t}, \quad (\text{П1.2})$$

где

$$F_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \eta(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

На интервале $(-T/2, T/2)$ функция $\eta(t)$ есть единичный импульс $\delta(t)$. Следовательно,

$$F_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{2}{T}. \quad (\text{П1.3})$$

Подставляя (П1.3) в (П1.2), получим

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jn \frac{2\pi}{T} t}. \quad (\text{П1.4})$$

Таким образом, сигнал $\eta(t)$ можно представить в виде бесконечной суммы гармонических составляющих с одинаковой амплитудой.

Как известно, спектральная плотность гармонического сигнала

$$x(t) = A \cos \omega_0 t = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

описывается выражением

$$S_x(\omega) = \pi A \delta(\omega - \omega_0) + \pi A \delta(\omega + \omega_0). \quad (\text{П1.5})$$

Поскольку функция $\eta(t)$ представлена в виде бесконечной суммы гармонических составляющих (П1.4), а каждая гармоническая составляющая имеет спектральную плотность (П1.5), получим выражение для спектральной плотности сигнала $\eta(t)$ в виде бесконечной последовательности δ -функций:

$$S_\eta(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right). \quad (\text{П1.6})$$

В связи с тем, что дискретизированный сигнал $\psi(t)$ равен произведению сигналов $f(t)$ и $\eta(t)$, его спектральная плотность равна свертке спектральных плотностей сомножителей:

$$S_\psi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega - \nu) S_\eta(\nu) d\nu. \quad (\text{П1.7})$$

Подставляя (П1.6) в (П1.7) получим

$$S_\psi(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_f\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right). \quad (\text{П1.8})$$

Приложение 2

Примеры программ реализации некоторых алгоритмов на ЭЦВМ «МИР»

Дискретное преобразование Фурье. Ниже приводятся программы дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Программы быстрого преобразования Фурье рассматривать не будем, так как детальное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки курса «Радиотехнические цепи и сигналы». Кроме того, при решении простейших учебных задач мы будем рассматривать сигналы с малым числом степеней свободы, для которых применение быстрого преобразования Фурье нецелесообразно.

Главная трудность в программировании ДПФ—запись арифметических действий над комплексными числами. Чтобы обойти эту трудность, имеет смысл ограничиться вычислением ДПФ симметричных сигналов, описываемых четной функцией времени. При этом формула ДПФ значительно упрощается:

$$S(n\Omega) = T \left[f(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} f(kT) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right]. \quad (\text{П2.1})$$

Соответствующая ей программа имеет вид

***6."ДЛЯ" N=0"Ш" I"ДО" L"ВЫП"(S=T*(F0+2*Σ(K=1,L,F[K]*COS(2*3.14159*K*K*N/NC))); "ВЫВ" "ТАБ" I,N,S)"ГДЕ" L=...; NC=...; F0=...; F[L]=..."КОН"

Исходный сигнал в этой программе задается центральным значением F_0 и массивом $F[L]$, который описывает правую половину сигнала при $k > 0$; число элементов в массиве $L = (NC - 1)/2$, где NC — число степеней свободы сигнала, т. е. общее число задаваемых выборок сигнала.

Спектральная плотность симметричного сигнала описывается также действительной четной функцией, поэтому для вычисления обратного ДПФ используется формула, аналогичная формуле прямого ДПФ (П2.1):

$$f(kT) = \frac{1}{T_c} \left[S(0) + 2 \sum_{n=1}^{\frac{(N-1)}{2}} S(n\Omega) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right]. \quad (\text{П2.2})$$

В силу идентичности выражений (П2.1) и (П2.2) программа вычисления обратного ДПФ оказывается аналогичной записанной ранее программе прямого ДПФ:

***6."ДЛЯ" K=0"Ш" I"ДО" L"ВЫП"(F=(S0+2*Σ(N=1,L,S[N]*COS(2*3.14159*K*K*N/NC)))/TC; "ВЫВ" "ТАБ" I,K,F)"ГДЕ" L=...; NC=...; TC=...; S0=...; S[L]=..."КОН"

Для демонстрации действия алгоритма дискретного преобразования Фурье целесообразно вычислить ДПФ для какого-нибудь симметричного сигнала с числом степеней свободы 11 или 13 и затем, применив обратное ДПФ, убедиться в том, что получается тот же результат.

Вычисление дискретной свертки. Для записи программы вычисления дискретной свертки можно воспользоваться формулой (3.24), в которой нижний предел суммирования следует взять равным 1. При этом программа будет иметь вид

***6."ДЛЯ" N=1"Ш" I"ДО" M"ВЫП" F[N]=Σ(K=1,N,X[K]*Y[N-K]); "ВЫВ" "МАСС" F"ГДЕ" M=...; X[M]=...; Y[M]=...; F[M] "КОН"

Чтобы все члены суммы могли быть вычислены, размер M исходных массивов $X[M]$ и $Y[M]$ должен быть равен сумме числа отсчетов сигналов x_k и y_k . Например, при вычислении свертки двух дискретизированных прямоугольных импульсов: x_k , заданного 3 отсчетами и y_k , заданного 5 отсчетами, размер массивов должен быть принят равным 8. При этом программу вычисления свертки можно записать в виде

***6."ДЛЯ" N=1"Ш" I"ДО" 8"ВЫП" F[N]=Σ(K=1,N,X[K]*Y[N-K]); "ВЫВ" "МАСС" F"ГДЕ" X[8]=1,1,0,0,0,0,0; Y[8]=1,1,1,1,0,0,0; F[8] "КОН"

Программы цифровой фильтрации. В качестве первого примера программы цифровой фильтрации можно рассмотреть цифровой фильтр 1-го порядка, эквивалентный RC-цепи, и сравнить алгоритмы этого фильтра в рекурсивной и нерекурсивной реализациях. Такой фильтр был подробно рассмотрен в гл. 4. Его алгоритм в нерекурсивной реализации имеет вид

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) g(nT - kT),$$

где $g(kT) = e^{-kT/\tau}$.

Обозначим $T/\tau = A$ и положим для определенности $A = 0,2$, входной сигнал возьмем в виде дискретизированного прямоугольного импульса, заданного 5 отсчетами. Тогда программу цифровой фильтрации можно записать в виде

```
"6."ДЛЯ"N-1"Ш"1"ДО"20"ВЫП"Y[N]-Σ(K-1,N,X[K]×EXP(-A×(M-K)));
"ВЫВ"
"МАСС"Y"ГДЕ"А-.2;X[20]-1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;Y[20]"КОН"
```

Длина массивов X и Y выбрана равной 20, что достаточно для получения наглядного представления о характере выходного сигнала. В результате расчета по данной программе получается следующий результат:

	.181873 ₁₀ 1	.248905 ₁₀ 1	.303786 ₁₀ 1
.348718 ₁₀ 1	.285506 ₁₀ 1	.233753 ₁₀ 1	.191381 ₁₀ 1
.156689 ₁₀ 1	.128286 ₁₀ 1	.105032 ₁₀ 1	.085993 ₁₀ 1
.070406 ₁₀ 1	.057644 ₁₀ 1	.047195 ₁₀ 1	.03864 ₁₀ 1
.031636 ₁₀ 1	.025901 ₁₀ 1	.021207 ₁₀ 1	.017363 ₁₀ 1

Построив график этого сигнала (рис. П2.1), нетрудно убедиться, что он повторяет вид сигнала на выходе RC-цепи при воздействии на ее вход прямоугольного импульса.

Рассмотрим теперь алгоритм этого же фильтра в рекурсивной реализации

$$y(nT) = x(nT) + e^{-T/\tau} y(nT - T).$$

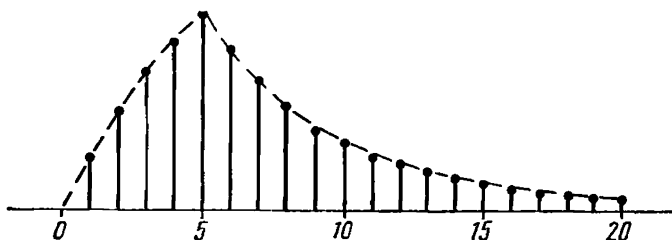


Рис. П2.1. Сигнал на выходе цифрового фильтра 1-го порядка

Обозначая, как и раньше, $T/\tau = A$, запишем программу фильтрации (для того же сигнала на входе)

```

**6.1. В=EXP(-A); Y[1]=X[1]; "ДЛЯ" К=2 "Ш" 1 "ДО" N "ВЫП" Y[K]=X[K]+В*Y[K-1];
"ВЫВ" "МАСС" Y "ГДЕ" А=.2; N=20; X[20]=1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0; Y[20]
"КОН"

```

Сравнительный расчет с помощью этих двух программ очень нагляден; время обработки сигнала рекурсивным фильтром оказывается значительно меньше, чем нерекурсивным.

Кроме рассмотренного решения задачи моделирования фильтра 1-го порядка утащимся полезно поупражняться в составлении и реализации нескольких простых программ цифровых фильтров с заданной импульсной характеристикой или системной функцией.

Например, рассмотрим цифровой фильтр с импульсной характеристикой

$$g(kT) = \begin{cases} +1, & k=0, \\ -1, & k=1. \end{cases}$$

Этой импульсной характеристике соответствует системная функция

$$H(z) = 1 - z^{-1}.$$

Алгоритм фильтра имеет вид

$$y(nT) = x(nT) - x(nT - T).$$

Этому алгоритму соответствует программа цифровой фильтрации

```

**6. Y[1]=X[1]; "ДЛЯ" К=2 "Ш" 1 "ДО" N "ВЫП" Y[K]=X[K]-X[K-1]; "ВЫВ" "МАСС"
Y "ГДЕ" N=4; X[4]=0,1,-1,0; Y[4] "КОН"

```

Записанный в программе этого фильтра входной сигнал очень прост: он имеет лишь два ненулевых отсчета.

В заключение рассмотрим программу цифрового фильтра, согласованного с сигналом в виде последовательности 5 одинаковых отсчетов (см. задачу 10 к гл. 4). Импульсная характеристика такого фильтра имеет вид

$$g(kT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq 4, \\ 0, & k > 4. \end{cases}$$

На основании импульсной характеристики можем сразу записать алгоритм фильтра в нерекурсивной реализации и составить программу фильтра:

```

**6.1. Y[1]=X[1]; Y[2]=X[1]+X[2]; Y[3]=Y[2]+X[3]; Y[4]=Y[3]+X[4]; "ДЛЯ" К=5 "Ш" 1
"ДО" N "ВЫП" Y[K]=X[K]+X[K-1]+X[K-2]+X[K-3]+X[K-4]; "ВЫВ" "МАСС" Y
"ГДЕ" N=10; X[10]=1,1,1,1,0,0,0,0,0,0; Y[10] "КОН"

```

В качестве входного сигнала здесь взята последовательность 5 одинаковых отсчетов.

Для определения алгоритма рекурсивного фильтра сначала найдем системную функцию

$$H(z) = \sum_{k=0}^4 z^{-k} = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}.$$

Этой системной функции соответствует алгоритм фильтрации

$$y(nT) = x(nT) - x(nT - 5T) + y(nT - T).$$

Запишем программу, соответствующую этому алгоритму:

```

"6.1. Y[1]=X[1];" для "К=2" ш "1" до "5" вып "Y[K]=X[K]+Y[K-1];" для "К=6" ш "1"
"до "N" вып "Y[K]=X[K]-X[K-5]+Y[K-1];" выв "MASS" Y где "N=10; X[10]=1,
1,1,1,0,0,0,0,0; Y[10]" кон
    
```

Обработка сигнала $x(kT)$ из 5 единичных отсчетов по этим двум программам приводит к одинаковому результату

Y[10]			
1	2	3	4
5	4	3	2
1	0		

К главе 2

1. $T = T_H/4$.

2. $T = T_H/5$:

$$3. S(\omega) = 5E \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{5\omega T}{2} - 5n\pi\right)}{\frac{5\omega T}{2} - 5n\pi},$$

где E — амплитуда импульса.

$$4. S(\omega) = 2E \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\omega T - 2n\pi)}{(\omega T - 2n\pi)^2},$$

где E — амплитуда импульса.

$$5. S(\omega) = 10E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(5\omega T - 10n\pi)}{5\omega T - 10n\pi},$$

где $E = 5$ В; $T = 5$ мкс; $\tau = 2$ мкс; полоса ФНЧ — 100 кГц.

$$6. S(\omega) = \frac{5}{2} E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{5}{4}\omega T - \frac{5}{2}n\pi\right)}{\left(\frac{5}{4}\omega T - \frac{5}{2}n\pi\right)^2},$$

где $E = 10$ В; $T = 10$ мкс; $\tau = 1$ мкс; полоса ФНЧ — 50 кГц.

К главе 3

1. $S(0) = 3T$; $S(\pm \Omega) = 0$.

2. $S(0) = 2,247 T$; $S(\pm \Omega) = 1,454T$; $S(\pm 2\Omega) = 0,376 T$.

3. $S_0 = 0$; $S_1 = -1$; $S_2 = 0$; $S_3 = 1$.

4. $S(0) = Na$; $S(k\Omega) = 0$ ($k \neq 0$).

6. а) 1; б) $\frac{1}{1 - e^{-pT}}$; в) $\frac{1}{1 - e^{-(p+a)T}}$.

$$7. f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{-pkT} dp.$$

$$8. \text{ a) } \frac{a(1-z^{-N+1})}{1-z^{-1}}; \text{ б) } z^{-1}; \text{ в) } \frac{1}{1-z^{-2}}.$$

$$9. \text{ a) } z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}; \text{ б) } \frac{1 - (e^{-aT} z^{-1})^N}{1 - e^{-aT} z^{-1}}; \text{ в) } \frac{1}{2} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right); \text{ г) } a \sum_{k=1}^8 k z^{-k}.$$

$$11. \text{ a) } f(kT); \text{ б) } f(kT - T); \text{ в) } 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Глава 4

$$1. \text{ а) } H(z) = 1 - z^{-1}; \text{ б) } H(z) = \frac{1}{1 - z^{-2}}; \text{ в) } H(z) = \frac{2}{1 - e^{-1/3} z^{-1}}.$$

$$2. \text{ а) } y(nT) = x(nT) - x(nT - T); \text{ б) } y(nT) = x(nT) + y(nT - 2T); \text{ в) } y(nT) = 2x(nT) + e^{-1/3} y(nT - T).$$

$$3. H(z) = \frac{2 - \frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}; \quad g(kT) = \begin{cases} 2, & k=0, \\ \frac{1}{2^k}, & k>0. \end{cases}$$

$$4. \text{ а) } g(kT) = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 2, & k>0, \end{cases} \\ y(nT) = x(nT) + x(nT - T) + y(nT - T);$$

$$\text{б) } g(kT) = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 3/2^k, & k>0, \end{cases}$$

$$y(nT) = x(nT) + x(nT - T) + \frac{1}{2} y(nT - T);$$

$$\text{в) } g(kT) = 2; 1; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \dots$$

$$y(nT) = 2x(nT) + x(nT - T) + \frac{1}{2} y(nT - 2T).$$

$$5. \text{ Неустойчив, } g(kT) = \begin{cases} 2, & k=0, \\ 3 \cdot 2^k, & k>0. \end{cases}$$

$$6. 0; 1; 1,6065; 1,9744; 2,1975; 2,3329; 2,4150; 2,4647; 2,4949; 2,5133; 2,5244; 1,5311; 0,9287; 0,5633; 0,3416; 0,2072; \dots$$

7. 1; 0,7419; 0,4683; 0,2865; 0,1741; 0,1056; 0,0641; 0,0389; 0,0236; 0,0143; 0,0087; ...

8. 1; 3; 5; 7; 9; 10; 10; 10; 10; 10; ...

9. 1; 2; 2,5; 2,5; 4,75; 3,50; 1,125; -0,625; -1,1875; -0,875; -0,28125; 0,15625; 0,2979; ...

$$10. H(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}.$$

Нерекурсивный алгоритм

$$y(nT) = x(nT) + x(nT - T) + x(nT - 2T) + x(nT - 3T) + \\ + x(nT - 4T).$$

Рекурсивный алгоритм

$$y(nT) = x(nT) - x(nT - 5T) + y(nT - T).$$

Сигнал на выходе фильтра: 1; 2; 3; 4; 5; 4; 3; 2; 1.

$$11. H(z) = \frac{2 - \frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}; \quad g(kT) = \begin{cases} 2, & k = 0; \\ \frac{1}{2^k}, & k > 0; \end{cases}$$

$$y(nT) = 2x(nT) - \frac{1}{2} x(nT - T) + \frac{1}{2} y(nT - T).$$

12. Нули при $z = 0,5 \pm j0,5$; полюсы при $z = 0,3$ и $z = -1,5$.

$$13. \text{ Нули при } z = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2};$$

$$\text{полюсы при } z = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2};$$

$$\text{фильтр устойчив при } \left| \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} \right| < 1.$$

$$14. K(\omega) = \frac{1 - e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T e^{-j\omega T}}{1 - 2e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T e^{-j\omega T} + e^{-2\alpha T} e^{-2j\omega T}}.$$

$$\text{Нули при } p = -\alpha + \frac{1}{T} \ln \cos \omega_0 T + j \frac{2\pi n}{T};$$

$$\text{полюсы при } p = -\alpha \pm j\omega_0 + j \frac{2\pi n}{T} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

15. Прямая форма

$$y(nT) = x(nT) - 2x(nT - T) + x(nT - 2T) + \frac{1}{2} \times \\ \times y(nT - T) + \frac{1}{2} y(nT - 2T).$$

Каноническая форма

$$u(nT) = x(nT) + \frac{1}{2} u(nT - T) + \frac{1}{2} u(nT - 2T);$$

$$y(nT) = u(nT) - 2u(nT - T) + u(nT - 2T).$$

16. Последовательная форма

$$u(nT) = x(nT) + x(nT - T) - 0,8u(nT - T);$$

$$y(nT) = u(nT) + 2u(nT - T) + u(nT - 2T) + y(nT - T) - \\ - y(nT - 2T).$$

Параллельная форма определяется неоднозначно. Один из возможных алгоритмов имеет вид

$$u(nT) = 1,246 x(nT) + x(nT - T) - 0,8u(nT - T);$$

$$v(nT) = -0,246 x(nT) + 3,443x(nT - T) + v(nT - T) - \\ - v(nT - 2T);$$

$$y(nT) = u(nT) + v(nT).$$

17. $\sigma_{\text{вых}}^2 = 1,32 \cdot 10^{-3}$.

18. $\sigma_{\text{вых}}^2 = 0,005$.

19. 0,37%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М., 1977.
2. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. М., 1973.
3. Гольденберг Л. М., Левчук Ю. П., Поляк М. Н. Цифровые фильтры. М., 1974.
4. Введение в цифровую фильтрацию/Под ред. Р. Богнера и А. Константинидиса. М., 1976.
5. Верешкин А. Е., Катковник В. Я. Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. М., 1973.
6. Хьюлсман Л. П. Активные фильтры. М., 1972.
7. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., 1978.
8. Трахтман А. М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М., 1972.
9. Маркюс Ж. Дискретизация и квантование. М., 1969.
10. Бахтияров Г. Д., Дикий С. Л. Аналого-цифровые преобразователи (обзор). Зарубежная радиоэлектроника, 1975, № 1.
11. Гиллемин Э. А. Синтез пассивных цепей. М., 1970.
12. Секен К., Томпсет М. Приборы с переносом заряда. М., 1978.
13. Мизин И. А., Матвеев А. А. Цифровые фильтры. М., 1979.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Общее понятие о цифровой обработке сигналов	7
§ 1.1. Дискретные и цифровые сигналы	7
§ 1.2. Дискретные и цифровые фильтры	9
§ 1.3. Преимущества и недостатки цифровой обработки сигналов	12
Глава 2. Дискретизация и восстановление непрерывных сигналов	13
§ 2.1. Основы дискретизации непрерывных сигналов	13
§ 2.2. Квантование сигналов	24
§ 2.3. Устройства для дискретизации, квантования и восстановления непрерывных сигналов	28
Задачи и упражнения	33
Глава 3. Преобразования дискретных сигналов	34
§ 3.1. Постановка задачи	34
§ 3.2. Дискретное преобразование Фурье	35
§ 3.3. Быстрое преобразование Фурье	43
§ 3.4. Дискретное преобразование Лапласа	47
§ 3.5. z -преобразование	48
§ 3.6. Обратное z -преобразование	49
§ 3.7. Основные свойства z -преобразования	51
Задачи и упражнения	54
Глава 4. Цифровые фильтры	55
§ 4.1. Вводные замечания	55
§ 4.2. Важнейшие характеристики цифровых фильтров	56
§ 4.3. Частотные характеристики цифровых фильтров	66
§ 4.4. Формы реализации цифровых фильтров	70
§ 4.5. Основы синтеза цифровых фильтров	73
§ 4.6. Эффекты квантования в цифровых фильтрах	85
§ 4.7. Вопросы реализации и применения цифровых фильтров	92
Задачи и упражнения	95
Приложения	98
Ответы к задачам и упражнениям	104
Литература	108

Владимир Герасимович Карташев

ОСНОВЫ ТЕОРИИ
ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ
И ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Научный редактор Ю. А. Евсиков
Редактор издательства И. Г. Волкова
Художник Т. А. Нефедкина
Художественный редактор Т. М. Скворцова
Технический редактор А. К. Нестерова
Корректор Р. К. Коснянова

ИБ № 2965

Изд. № ЭР-255. Сдано в набор 15.05.81. Подп. в печать 02.03.82. Т— 06403
Формат 84×108¹/₃₂. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать вы-
сокая. Объем 5,88 усл. печ. л. 6,09 усл. кр.-отт. 5.40 уч.-изд. л. Тираж
10 000 экз. Зак. № 366. Цена 20 коп.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14. Издательство «Высшая школа».

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном
комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.
150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»

выпустит в свет в 1982 году
для студентов радиотехнических вузов
и факультетов
следующие учебные пособия:

Гусев В. Г., Гусев Ю. М. Электроника: Учеб. пособие. — 36 л., ил. — В пер.: 1 р. 30 к.

В книге рассмотрены основы теории и принцип работы различных элементов электронных цепей, применение современных аналоговых интегральных микросхем; приведены основные сведения об усилительных каскадах и способах построения их на основе многокаскадных усилителей; изложены основы теории обратной связи применительно к электронным усилительным устройствам и инженерные методы проверки устойчивости электронных цепей; рассмотрены линейные и нелинейные преобразователи на пассивных и активных элементах.

Малашин М. С., Каминский Р. П., Любченко Ю. Б. Основы проектирования лазерных локационных систем: Учеб. пособие. — 12 л., ил. — 45 к.

В пособии рассматривается проектирование лазерных локационных станций (ЛЛС) различного назначения; излагается общая методология оптимального проектирования локационных систем, описываются принципы построения и элементы ЛЛС, даются рекомендации по рациональному выбору варианта построения и структурной схемы ЛЛС, приводится методика расчета их основных параметров и характеристик, рассматриваются вопросы моделирования оптических сигналов и отдельных трактов ЛЛС на АВМ и ЭВМ и т. п.

Нарышкин А. К. Цифровые и оптические методы обработки радиолокационных сигналов: Учеб. пособие. — 12 л., ил. — 45 к.

В пособии изложены методы инженерного синтеза цифровых (на интегральных схемах), дискретно-аналоговых (на приборах с зарядовой связью) и аналоговых (акустических и оптических) устройств обработки радиолокационных сигналов; рассмотрены погрешности аналого-цифрового преобразования случайных сигналов и показаны пути их минимизации; выведены алгоритмы и синтезированы схемы устройств квазиоптимального обнаружения параметров радиолока-

ционных сигналов станций кругового обзора; дан анализ вопросов автозахвата и определения параметров траекторий целей; приведены краткие сведения из теории массового обслуживания и обзор способов трехмерного отображения результатов обработки.

Уважаемые читатели!

Издательство «Высшая школа» выпускает учебники, учебные и методические пособия, плакаты. Подробнее познакомиться с учебной литературой вам поможет аннотированный план выпуска литературы на 1982 год (вузы и техникумы), который имеется в книжных магазинах.

Предварительные заявки на книги вы можете сделать в магазинах Книготорга или потребительской кооперации.