

В. В. КОТЕК

ЛЕОНАРД
ЭЙЛЕР




В. В. Котюк

ЛЕОНАРД
ЭЙЛЕР



ПЕРЕВОД С УКРАИНСКОГО
ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Министерства Просвещения РСФСР
МОСКВА · 1961



ПЕРВЫЙ ПЕРИОД ЖИЗНИ (1707—1741)

Детство; годы учения; переезд на работу в Петербургскую Академию наук

Имя Эйлера знаменует собой определенный этап в развитии математики, да и не только математики, — Эйлер положил краеугольный камень ряда дисциплин естествознания. В славной плеяде творцов отечественной науки Эйлеру принадлежит одно из почетных мест.

Леонард Эйлер принадлежал к семье, поселившейся в конце XVI века в швейцарском городе Базеле. Он был сын Павла Эйлера (1670—1745) — пастора одной из церквей этого города. Родился Леонард Эйлер 4(15) апреля 1707 г. в городе Базеле. В 1708 г. отец его получил приход в местечке Риэн, расположенном неподалеку от Базеля. Там, на лоне сельской природы, прошли детские годы Леонарда Эйлера. Матерью его была Маргарита Брукер (1677—1761), происходившая из рода, давшего Базелю многих известных ученых.

Первоначальное образование получил Эйлер у отца. Павел Эйлер обучал сына и математике, которую любил и ценил, будучи учеником известного математика Якова Бернулли (1654—1705). Предназначая сына к духовному званию, отец Эйлера никак не предполагал, что математика станет всепоглощающей страстью его сына; на свои уроки он смотрел только как на умственные развлечения для обучаемого. Следуя своему плану, он отправил сына в Базель

для изучения философии. Тринадцатилетний Эйлер — студент младшего философского факультета Базельского университета. Имея изумительную память, Эйлер легко справлялся со схоластической премудростью и в свободное время посещал лекции по математике, его любимой науке, в Базельском университете, которые читал другой представитель знаменитой семьи Бернулли, брат Якова, Иоганн (1667—1748). Иоганн Бернулли не мог не заметить таланта своего ученика; он предложил ему самостоятельно изучать математические творения самых знаменитых авторов, разрешив еженедельно по субботам приходить к себе домой для выяснения наиболее трудных вопросов. Знакомство с семьей Бернулли сыграло большую роль в жизни молодого Эйлера, он подружился с сыновьями Иоганна Бернулли — Николаем (1695—1726) и Даниилом (1700—1782), также усердно занимавшимися математикой.

Занятия Эйлера шли так успешно, что уже 9 июня 1722 г. он получил по философии свою первую степень «Первые лавры» (*prima laurea*), соответствующую степени бакалавра, а 8 июня 1724 г., семнадцати лет от роду, он произносит по-латыни речь о сравнении философских воззрений Ньютона и Декарта; за эту речь он получает ученую степень магистра искусств (*magister artium*). В связи с этим интересно отметить, что, еще будучи студентом философского факультета, Эйлер трижды привлекался в качестве оппонента при защите диссертаций: две были представлены на замещение кафедры логики, третья относилась к истории римского судопроизводства. Имя Эйлера в документах при этом сопровождалось эпитетами «*praestantissimus*», «*florētissimus*», «*ingeniosissimus*», т. е. «превосходнейший», «одареннейший», «талантливейший».

Осенью 1723 г. он по настоянию отца поступил на богословский факультет, где, помимо теологии, изучал греческий и древнееврейский языки, однако с математикой не порывал, отдавая ей все свободное время.

28 января (по ст. стилю) 1724 г. Петром I была основана Петербургская Академия наук, открытая уже после его смерти. В нее были приглашены среди прочих ученых братья Николай и Даниил Бернулли. Эйлеру хотелось последовать за ними и Бернулли обещали ему найти подходящее место. Год спустя, т. е. в 1726 г., они известили его о том, что он приглашается читать лекции по физиологии, и рекомендовали ему заняться медициной.

Получив это известие, Эйлер начинает ревностно заниматься медициной и даже записывается на медицинский факультет. Однако своих занятий физико-математическими науками Эйлер не бросал и защитил (18 февраля 1727 г.) диссертацию на право выступить кандидатом на занятие кафедры физики в Базельском университете. Диссертация называлась «Диссертация по физике о звуке» («Dissertatio physica de sono») и трактовала о природе и распространении звука. Более того, он представил на конкурс, объявленный Парижской Академией наук, сочинение о расположении мачт на корабле: «Размышление о проблеме расположения мачт на корабле» («Meditationes super problemate nautico de implantatione malorum»), удостоенное в 1727 г. почетного отзыва и напечатанное Академией в собрании премированных трудов; этим произведением начиналась серия знаменитых работ Эйлера по вопросам навигации. Предмет такого сочинения для уроженца гор кажется удивительным, но такова была могучая сила молодого таланта. Это «особенно замечательно, — говорит А. Н. Крылов в своей юбилейной речи на торжественном заседании Академии наук СССР в 1933 г., — ибо в гористой Швейцарии, из которой до того времени Эйлер никуда не выезжал, он, конечно, имел случай видеть корабль не иначе, как на картинках, если не считать малых речных и озерных судов».

Однако кафедру физики в Базеле Эйлер не получил: университетские вакансии в то время замещались путем жеребьевки среди отобранных кандидатов, в число же последних Эйлер не попал, видимо, по причине молодости, и Эйлер, к счастью для нашей Академии наук, остался на родине не у дел.

Наука в те времена вообще была в Швейцарии не в почете, и на ее содержание отпускались мизерные средства.

Вышеупомянутые братья Бернулли также не смогли найти применение своим дарованиям на родине, а потому охотно приняли в 1724 г. предложение переехать в Петербург. По этому поводу их отец, Иоганн Бернулли, писал: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз обижают и презирают».

5 апреля 1727 г. Эйлер навсегда покидает Швейцарию по вызову братьев Бернулли; сразу же по приезде в Петер-

бург 24 мая того же года он назначается адъюнктом Академии по математике. Ему в то время едва минуло 20 лет.

Конечно, не одна дружба с братьями Бернулли влекла Эйлера в далекий Питер. Главным для него было то, что он видел для себя возможность широкого поля научной деятельности, в чем и не ошибся. Нельзя также думать, что им руководили какие-либо корыстные мотивы: его зачислили только адъюнктом с окладом в 300 рублей, в то время как братья Бернулли получили сразу места академиков, академики же получали от 600 до 1500 рублей в год.

Длинен и тяжел был путь Эйлера от Базеля до Петербурга; по дороге он узнал о смерти своего друга Николая Бернулли, который вскоре по приезде в Петербург скончался от злокачественного нарыва. Можно представить себе, что чувствовал скромный юный Эйлер, сын благочестивого пастора, уезжая в далекую, суровую, неведомую страну, условия работы в которой сразу оказались неблагоприятными для новорожденной Академии. Академия по замыслу Петра должна была явиться рассадником знаний в России, причем должна была стать не только научным центром в нашем понимании («Академики должны приобрести нам в Европе доверие и честь, доказав на деле, что и у нас работают для науки и что пора перестать считать нас за варваров, пренебрегающих наукою!»¹ — писал Петр), но и кузницей интеллигенции, недаром ей были приданы университет и гимназия.

Екатерина I, сменившая на престоле Петра I, умерла за несколько дней до приезда Эйлера, а страной во время малолетства Петра II стали управлять временщики — то Меншиков, то Долгорукие, боровшиеся за власть. Холодно и косо смотрели правительственные верхи на ново-созданное научное учреждение, поглощавшее большие средства без, казалось бы, непосредственно ощутимой пользы. Правильного взгляда на Академию наук у преемников Петра и их окружения не было. В обязанности Академии входило тогда не только составление географических карт и предсказаний астрономических явлений и погоды, но также сочинение торжественных од по случаю победы или на день тезоименитства царствующих особ, составление

¹ А. С а т к е в и ч, Леонард Эйлер, «Русская старина», т. 132, 1907, стр. 468.

гороскопов по всем правилам астрологии, проектов «иллюминаций», «потешных огней» и прочих увеселений двора.

Академиками порой назначались бездарные и невежественные люди, так, благодаря «покровительству» временщика Бирона, Академия получила двух новых членов — его секретаря и учителя его детей. Одним словом, Академия находилась в приниженном положении, угрожала опасность самому ее существованию. Академики решили сами позаботиться о своей дальнейшей судьбе и начали покидать Россию. В этот период адмирал Сиверс, начальник русского флота, предугадывая, какую пользу может принести флоту такой способный математик, как Эйлер, выхлопотал ему чин лейтенанта флота и обещал дальнейшее немедленное продвижение по службе. Эйлер уже склонен был принять это предложение, однако отъезд нескольких академиков изменил положение дел.

Вернемся, однако, к вопросу об основании Петербургской Академии, составе ее членов и влиянии на ее работу приезда Эйлера.

Как уже было сказано, Петербургская Академия наук была учреждена 28 января 1724 г. особым указом сената (проект устройства Петербургской Академии наук и художеств, составленный лейб-медиком Блюментростом, впоследствии ее первым президентом, был утвержден Петром I 22 января 1724 г.). Первое собрание академической конференции состоялось 13 ноября 1725 г. уже после смерти Петра при Екатерине I. Первое торжественное публичное заседание Академии имело место 27 декабря 1727 г.

Между прочим, за границей тогда подобных научных учреждений было немного, если не считать итальянских академий, долго сохранявших характер частных ученых содружеств. Академии наук существовали только в Париже (с 1666 г.), в Лондоне (с 1660 г.) и в Берлине (с 1700, фактически с 1711 г.).

Подбор иностранных ученых для Академии был поручен русским правительством известному тогда немецкому философу и математику Христиану Вольфу (1679—1754). Подбор ученых оказался особенно удачным в области математики и механики: сказались при выборе профессоров по этим кафедрам и советы Лейбница, который был знаком с математиками и механиками того времени лучше, чем кто-либо другой. Кроме братьев Николая и Даниила Бернулли, приехали известный ученый «высоких матема-

тических наук первый профессор» Яков Герман (1678 — 1733); широко образованный человек, математик Христиан Гольдбах (1690—1764); специалист в области тригонометрии, «матези¹ профессор чрезвычайный» Фридрих Христовор Майер (умер в 1729 г.); известный физик и механик Бильфингер (1693—1750); математик, физик, метеоролог и астроном Георг-Вольфганг Крафт (1701—1754); несколько позже к ним присоединился и Эйлер.

Математики сразу заняли в Академии ведущее место; даже число их было значительно: из 22 профессоров и адъюнктов, приглашенных в 1725—1727 гг., было 8 математиков и механиков.

Русский математик академик А. Н. Крылов, образно характеризуя бескультурье тогдашней Руси и жестокость правящей царской клики, говорил, что даже самого слова «академия» «не существовало в тогдашнем русском языке, и Академия именовалась «де сиянс Академия»², а ее ученики «елевами»³.

Создание Петербургской Академии сыграло важную роль в русской науке и явилось поворотным пунктом в ее развитии. Более того, Петербург стал вскоре ведущим центром математической мысли во всем мире. Величайшее значение имели публикации Петербургской Академии, именно выход в свет первого русского научного журнала «Комментарии Петербургской Академии наук» (*Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*). Первый том этого журнала вышел в 1728 г., а уже во втором томе «Комментариев» были опубликованы три статьи Эйлера. В этом же журнале было напечатано большинство его бессмертных творений. По словам А. П. Юшкевича, публикации этого журнала «оказали поистине колоссальное влияние на развитие математических наук в XVIII веке, и ученые того времени с нетерпением ожидали выхода очередного тома ее мемуаров». В 40-х годах XVIII века в одном из писем к Эйлеру Д. Бернулли писал: «Я не могу вам довольно объяснить, с какою жадностью повсюду спрашивают о петербургских мемуарах (изданиях Академии). Желательно было бы, чтобы поспешили печатанием их»⁴. Эти

¹ μάθησις (греч.) — знание, наука.

² «Де сиянс» (франц.) — наук.

³ Élève (франц.) — ученик.

⁴ П. П. Пекарский, История Академии наук, т. I, стр. XI—XIII.

мемуары отличались исключительным богатством содержания, одно число работ по математике и механике было грандиозным: начиная от первого тома «Комментариев» и кончая пятнадцатым томом академических *Nova acta*, вышедших в 1806 г., это число превосходило 700 (причем среди них имелось около 400 работ Эйлера). Уже из сказанного видно, что первенствующим местом в развитии мировой математической мысли Петербург был обязан творческому гению Эйлера.

Но возвратимся к первым шагам деятельности Эйлера в Академии. Первое сохранившееся в делах академической канцелярии упоминание о его зачислении относится к 17 декабря 1726 г., это — распоряжение о посылке зачисленному Эйлеру 120 рублей денег на дорогу. Приехав в Петербург, Эйлер, несомненно, рад был увидеть своих земляков. Кроме Даниила Бернулли там жил и Яков Герман — дальний родственник Эйлера. Оба они оказывали ему возможное покровительство.

Первое публичное выступление Эйлера в Академии состоялось 5 августа 1727 г., когда двадцатилетний адъюнкт высшей математики начал читать свою работу «о количестве истекающей из отверстия воды». Мы уже упоминали, что Эйлера приглашали на работу во флот, но как раз в этот период освобождаются места в Академии — ряд иностранных ученых, недовольных состоянием дел в Академии, уезжают из России, и Эйлер в 1731 г., после отъезда Бильфингера, получает кафедру теоретической и экспериментальной физики, а в 1733 г., с отъездом Даниила Бернулли из Петербурга, он назначается на его место академиком математики. Дружеские отношения, существовавшие у Эйлера с Д. Бернулли, сохраняются и после отъезда последнего: ученые продолжали переписываться.

Биографы Эйлера (Лузин) утверждают, что время его вступления на научное поприще было неблагоприятным, так как еще светил блеск великих имен создателей математического анализа и аналитической геометрии — Ньютона, Лейбница, Декарта, Ферма; у всех в памяти были творения таких деятелей математической науки, как Гюйгенс, Иоганн и Яков Бернулли, Тейлор и другие, и что среднему уму поэтому невозможно было думать о соревновании с ними.

Однако великие ученые сделали далеко не все, и Эйлер это ясно видел. Интегральное исчисление находилось в

зачаточной форме, интегрирования дифференциальных уравнений и вариационного исчисления вовсе не было. Механика и наука о движении небесных тел были почти не разработаны, гидравлика еще не была создана. Баллистика и навигация покоились на шатких началах, представлявших сбор наблюдений, не связанных никакой теорией. Неправильности, наблюдаемые в движениях небесных тел, в особенности Луны, приводили математиков в совершенное отчаяние. Практическая астрономия страдала от несовершенства телескопов — их строили в то время почти ощупью. Одним словом, всюду предстоял великий труд.

Эйлер, «матезис сублимиорис адъюнктус»¹, так он был назван в академическом реестре 1727 г., быстро вырос как ученый в тревожные для Академии 1727—1730 гг. Вскоре по приезде он зарегистрировал в конференции 13 докладов. Его устные научные выступления не ограничивались чтением докладов и торжественных речей в Академии, он выступал в ней с публичными лекциями по логике и высшей математике и с лекциями в академическом университете, точнее гимназии, по физике и математике.

Кроме того, он писал научно-популярные статьи для так называемых «Примечаний» к «Санкт-Петербургским ведомостям». Так, Эйлер поместил в этом издании в 1738 г. ряд статей о форме земного шара под общим заглавием «О внешнем виде Земли». В этих статьях очень подробно и основательно излагаются доказательства шарообразности Земли и описывается истинная форма земного сфероида.

Наконец, для академической гимназии он составил учебник арифметики, первую часть которого перевел на русский язык его ученик, первый русский адъюнкт Ададуров; книга появилась в 1738 и 1740 гг. Вторая часть «Руководства к арифметике» Эйлера была переведена с немецкого на русский В. Кузнецовым только в 1750 г. Это «Руководство» сыграло большую роль в создании русской учебной литературы, ибо арифметика в нем была впервые изложена на русском языке как настоящая математическая дисциплина (Ю ш к е в и ч).

¹ «Матезис сублимиорис адъюнктус» (лат.) — присоединенный к высшим наукам (это было первое ученое звание Эйлера).

Почти каждый год вместе с другими академиками Эйлер принимал экзамены не только в академической гимназии, но и в шляхетском¹ сухопутном кадетском корпусе.

Эйлеру, как и другим академикам, приходилось выступать по многим техническим вопросам в роли консультанта и рецензента. Так, в 1732 г. ему вместе с Даниилом Бернулли и Лейтманом было поручено представить свои соображения относительно поднятия большого колокола в Москве; в 1738 г. он принимал деятельное участие в комиссии мер и весов, в частности, Эйлер изложил свое мнение о весах, изобретенных Петром Крекшиным; в 1739 г. он вместе с Г. Крафтом проводил испытание лесопильной мельницы на Галерной верфи.

Все это были частные поручения Академии. Из них наибольшее значение имела работа в Географическом департаменте Академии наук, где Эйлеру в 1735 г. было поручено помогать академику Делилю, за что к его годовому окладу в 660 рублей было прибавлено еще 200 рублей, «понеже оная должность не его, но чрезвычайная». Уместно здесь привести слова самого Эйлера, характеризующие его работы по русской картографии: «По крайней мере я уверен, что география российская через мои и господина профессора Гейнсиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли, и того бы довольно было до тех пор, пока достальные исправления учинить возможно будет». Под руководством Эйлера было скопировано и подготовлено к печати много карт (в частности, карта границ России со Швецией). Подготавливая материалы для атласа страны, Эйлер уточнял математическую основу карт различных геодезистов и приводил их к одному масштабу. Но плодотворная деятельность Эйлера по картографии продолжалась недолго, так как в 1741 г. он уехал из России. Упомянутый атлас России с приложением генеральной карты страны вышел в 1745 г. и отличался высокими достоинствами. По мнению Эйлера, «кроме Франции, почти ни одной земли нет, которая бы лучше карты имела».

Основной же для Эйлера, конечно, оставалась его научная работа. За первые 14 лет своего пребывания в Петербурге Эйлер опубликовал около 60 научных работ.

¹ Ш л я х е т с к и й — дворянский.

Эйлер никогда не отказывался от поручаемой ему работы, никакая работа не казалась ему ничтожной. Известен, кажется, только единственный случай отказа его от работы, работы столь же рискованной, сколь и своеобразной. Эйлеру поручили составить гороскоп¹ царевичу Ивану, впоследствии кратковременному императору (известному под именем Иоанна VI) и долголетнему шлиссельбургскому узнику.

Мы уже говорили, что Эйлер отличался феноменальной трудоспособностью, это был человек просто одержимый тягой к труду. В 1735 г. имел место поразительный факт, подтверждающий такую характеристику, печальный по своим последствиям для здоровья Эйлера. Академия получила от правительства задание выполнить спешное астрономическое вычисление, нужное для картографических целей. Уклониться от него Академия не могла, так как это поставило бы под угрозу само существование Академии. Для выполнения этого задания академики потребовали несколько месяцев, Эйлер же взялся выполнить его в три дня, и, ко всеобщему изумлению, выполнил в срок. Это Эйлеру не прошло даром, он заболел «нервной горячкой», в результате которой у него вытек правый глаз. «По-видимому, — говорит акад. Н. Н. Лузин, — здесь мы имеем непонятный нам случай доведенного до предела нервного напряжения, более которого человеческая природа не может выдержать и за которым начинается уже фактическое разрушение организма».

Необычна была реакция Л. Эйлера на потерю глаза. Это несчастье лишь вызвало у него замечание, что теперь он меньше будет отвлекаться от занятий математикой.

Г. К. Михайлов утверждает², что найденное недавно письмо Д. Бернулли к Эйлеру свидетельствует, что потеря правого глаза произошла не в 1735, а в 1738 г. и что общераспространенная версия не верна. Как бы то ни было, работа Эйлера над черчением карт переутомила его зрение и стоила ему потери глаза, о чем он писал Гольдбаху 21 августа 1740 г. В письме мы читаем: «География мне губительна. Вы знаете, что я за нее поплатился глазом, а теперь опять нахожусь в подобной опасности; когда мне сегодня утром

¹ Г о р о с к о п (греч.) — таблица расположения светил в момент рождения человека, на основании которой средневековые астрологи предсказывали судьбу.

² Ст. «Леонард Эйлер» («Известия АН СССР»), отд. техн. наук, 1955, № 1.

прислали часть карт на просмотр, то я тотчас почувствовал новый припадок, потому что эта работа, требуя всегда рассмотрения одновременно большого пространства, сильнее утомляет зрение, чем простое чтение или одно писание»¹.

Показателем роста значения Л. Эйлера в Академии может быть эволюция его «жалования»: в 1727 г. по должности адъюнкта он получал 300 рублей, в 1731 г. по должности профессора — 460 рублей, в 1733 г. — 660 рублей, за работу в Географическом департаменте — дополнительно 200 рублей. Последний оклад в первый петербургский период жизни Эйлера составлял 1200 рублей в год, это норма оплаты знаменитого предшественника Эйлера по кафедре математики — Даниила Бернулли, к должности которого он теперь был официально приравнен.

До 1736 г. Эйлер был известен в сравнительно узких кругах, мировую славу ему принес его двухтомный трактат по механике «Механика или наука о движении в аналитическом изложении» («*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, Petrop»). Этот трактат содержит механику свободной и несвободной материальной точки, движущейся под действием различным образом заданных сил в пустоте и в сопротивляющейся среде. Здесь Эйлером была блестяще решена задача перевода проблем динамики на язык нового, математического анализа. Ясность идей, точность формулировок, прекрасный порядок в изложении, а главное, общность и глубина трактата сразу же поставили автора на первое место среди математиков того периода. Это было время, когда еще был жив Иоганн Бернулли, а со времени первого издания «Начал» Ньютона прошло только 50 лет. Эйлеру было тогда 29 лет.

Мы уже говорили, что Эйлер заполнил «Комментарии» Петербургской Академии очень большим числом своих мемуаров, даже небольшая часть которых могла составить славу любого ученого. Сюда относятся многочисленные исследования по дифференциальному и интегральному исчислениям, по теории чисел, по бесконечным рядам, по притяжению эллипсоида и т. д.

¹ «Математическая и физическая переписка некоторых знаменитых геометров XVIII века», т. 1, Спб., 1843, стр. 102—103 (*Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle*); см. также: П. П. Пек а р с к и й, История Академии наук, т. 1, стр. 256.

Вариационное исчисление

Наиболее крупным из сделанных им в это время открытий следует считать решение знаменитой проблемы изопериметров. Простейшими изопериметрическими задачами являются: нахождение многоугольников заданного периметра, имеющих наибольшую площадь; нахождение замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь; определение замкнутой поверхности заданной площади, ограничивающей наибольший объем, и т. п. Такие задачи были известны уже древнегреческим ученым (Архимед, Зенодор и другие). Однако общее их изучение, с единой точки зрения, началось лишь в 1697 г., когда Яков Бернулли предложил задачу: среди всех кривых данной длины найти кривую, для которой некоторая величина, зависящая от кривой (например, площадь кривой), достигает максимума или минимума. Эта задача была им частично решена.

Но особое внимание ученых к задачам на нахождение наибольших или наименьших значений функционалов, как мы сказали бы теперь, т. е. к вариационным задачам, привлекла задача о брахистохроне, опубликованная Иоганном Бернулли годом раньше (1696) в журнале «Acta eruditiorum». Содержание ее таково: среди всех кривых, соединяющих две данные точки A и B , не лежащие на одной вертикальной прямой, найти ту кривую, по которой материальная точка под действием силы тяжести (без учета трения) скатится из точки A в точку B в кратчайшее время. По поводу этой задачи возник ожесточенный спор между братьями Бернулли Яковом и Иоганном, в некоторой мере способствовавший постановке проблем в этой области. Решение этой задачи дали Ньютон, Я. Бернулли, Лопиталь и сам автор задачи И. Бернулли. Оказалось, что линией «кратчайшего времени» — брахистохроной — является циклоида¹.

¹ Обыкновенной циклоидой называется кривая, которую описывает точка окружности, катящейся по неподвижной прямой без скольжения. Циклоидальные кривые имеют исключительное значение для техники. Профили зубьев шестерен, очертание многих типов эксцентриков, кулачков и иных деталей машин имеют форму этих кривых. Наиболее точными часами являются часы с циклоидальным маятником. Более подробное изложение свойств циклоиды можно найти в брошюре Г. Н. Бермана «Циклоида», Огиз, 1948.

Однако систематическое исследование этих задач было проведено только Леонардом Эйлером в ряде мемуаров, из коих первый относится к 1728 г. Особенно важен полный трактат по теории изопериметров, выпущенный Эйлером в свет позже, в 1744 г., под названием «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» («Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes, sive solutis problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti»). В этой работе Эйлер систематически рассматривает задачи на абсолютный и условный экстремум функционалов, развивает так называемый прямой метод решения и выводит известное дифференциальное уравнение, носящее его имя. Эти фундаментальные исследования Эйлера (1728—1744) привели к созданию новой математической дисциплины — вариационному исчислению, причем заметим, что сам термин «вариационное исчисление» принадлежит Эйлеру.

Теория музыки

К этому же периоду относится трактат Эйлера по теории музыки «Опыт новой теории музыки» («Tentamen novae theoriae musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae»), опубликованный в 1739 г. Этот труд не имел успеха, так как, по словам Н. Н. Лузина, «для математиков там было слишком много музыки, а для музыкантов — слишком много математики». Эйлер любил музыку, она была ему отдыхом после упорных трудов. В своем трактате он дал математическую теорию консонанса. Гармонические музыкальные интервалы, по Эйлеру, определяются простыми числовыми соотношениями чисел колебаний тонов (гамм), из которых одна почти точно совпадает с диатоническо-хроматической гаммой. В том же трактате содержится и теория музыкальных инструментов, представляющая высокую ценность.

Вопрос о морских приливах и отливах

Одна из первых астрономических работ Эйлера «Физическое исследование причин приливов и отливов морей» («Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris») относится к данной Ньютоном теории морских приливов

и отливов. Ньютон объяснил приливы притяжением водных масс Луной и Солнцем. Парижская Академия наук, сознавая важность этого вопроса, организовала в начале XVIII века многочисленные наблюдения над приливами во французских портах. При этом оказалось, что результаты этих наблюдений только отчасти могли быть объяснены теорией Ньютона. Поэтому Академия в 1740 г. объявила конкурс на лучшую работу по вопросу о морских приливах и отливах. Премия была присуждена трем ученым: Эйлеру, Даниилу Бернулли и Маклорену. Интересно отметить, что числовые результаты Д. Бернулли и Эйлера во многом совпадали. Созданная Ньютоном и более подробно разработанная Эйлером, Маклореном и в особенности Даниилом Бернулли так называемая «статическая теория приливов» допускает, что вся поверхность Земли покрыта глубоким океаном, что вода представляет собой жидкость, лишенную вязкости и инерции, и что поэтому в любой данный момент поверхность океана успевает принять форму равновесия, определяемую действием силы тяжести и приливных сил Луны и Солнца. Такой фигурой равновесия является эллипсоид вращения с большой осью, направленной к притягивающему светилу (рис. 1). Эта

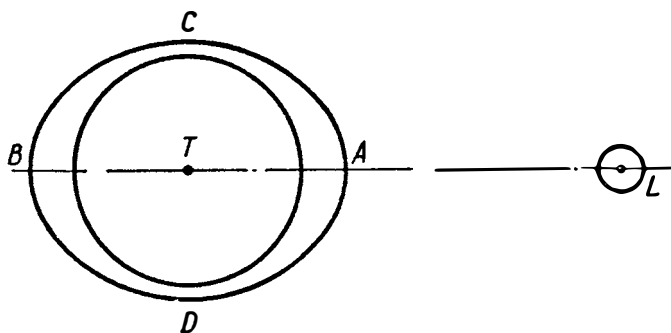


Рис. 1.

теория объясняла лишь главные черты явления. Недостатки статической теории вызвали попытки заменить эту теорию динамической, введенной Лапласом. Лаплас в своей теории рассматривал приливы как колебательное

волнообразное движение океана, покрывающего всю Землю, с периодами, равными периодам действующих сил. Так как эта теория не учитывала влияния трения и распределения материков, то и она была лишь довольно грубым приближением к действительности и была заменена впоследствии более совершенными теориями.

Видимо, в связи с работой Эйлера участники Камчатской экспедиции Петербургской Академии провели и некоторые океанографические исследования, касающиеся вопроса о приливах и отливах. В «Примечаниях» к «Санкт-Петербургским ведомостям» в 1740 г. была опубликована даже специальная инструкция, вероятно, составленная Л. Эйлером, «О том, как должно примечать морской прилив и отлив».

Теория теплоты

В физике XVIII века и даже в первой половине XIX господствовали воззрения, что причиной теплоты является особая невесомая жидкость, входящая в состав каждого тела; эта жидкость называлась теплородом. Причиной горючести тела считалось другое вещество, именуемое флогистоном. Однако уже в начале XVIII века появляется совсем иная теория, по которой теплота — не какое-то особое вещество, а особая форма движения материи. К числу первых физиков, придерживавшихся этой теории, принадлежит Даниил Бернулли (сочинение «Форономия или о силах и движениях жидкостей и твердых тел» — «Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum», 1716), которого на основании развитых им взглядов называли одним из основателей кинетической теории газов. Эти передовые взгляды были позднее развиты Д. Бернулли в его знаменитой «Гидродинамике», изданной в 1738 г. Ту же концепцию о сущности теплоты выдвинул в 1727 г. Эйлер в работе «Проба объяснения атмосферных явлений» («Tentamen explicationis phaenomenorum aëris»). В 1738 г. Эйлер получает премию Парижской Академии наук за свой главный мемуар, посвященный теплоте и горению: «Диссертация об огне, в которой поясняются его природа и свойства» («Dissertatio de igne, in qua ejus natura et proprietates explicantur»). Исходя в этой работе из обычного своего принципа «явления природы определяются материей и движением», Эйлер прихо-

дит к утверждению, что «теплота состоит в некотором движении мельчайших частиц тел». Однако в этой работе он признает существование особой «огненной материи», тем не менее она совершенно не похожа на «горючее начало» сторонников теории флогистона, так как является только носителем запаса механического движения, освобождаемого при горении. Можно сказать, что уступка Эйлера идеалистическим представлениям была только формальной, и гипотеза горения, как и гипотеза теплоты, выдвинутые Эйлером в его «Диссертации об огне», являлись чисто механическими. Хотя Д. Бернулли и Эйлером и были сделаны попытки построить количественную теорию теплоты, тем не менее подлинным творцом кинетической теории газов следует считать М. В. Ломоносова.

16 марта 1740 г. Эйлер заключает с Петербургской Академией наук новый контракт, в силу которого он обязывался «сделать высшую алгебру и трактат о морской науке и в Академию подать». По контракту оклад Эйлера оставался прежним — 1200 рублей в год.

В середине 1740 г. Эйлер получает от нового короля Пруссии Фридриха II приглашение перейти на работу в Берлин; возникает переписка по этому поводу, которая заканчивается отъездом Эйлера из Петербурга.

Отъезд Эйлера в Берлин и причины отъезда

Причины, заставившие Эйлера принять предложение Фридриха II, многочисленны. Во-первых, общие условия государственной жизни России. Они стали особенно тяжелыми после кончины императрицы Анны Иоанновны (1740), когда наступила эпоха правления временщиков. В апреле 1741 г. бывший регент Бирон был осужден на четвертование, замененное пожизненным заключением; многие государственные деятели, в числе их президент Академии К. Бревверн, были объявлены государственными преступниками. В своей автобиографии Эйлер пишет, что в Петербурге в это время «предвиделось нечто опасное» и что «после кончины достославной императрицы Анны, при наступившем после того регентстве, положение дел (в России) стало довольно тяжелым»¹. Какое впечатление

¹ «Автобиография Эйлера», «Записки Академии наук», т. 6. 1865, стр. 75; см. также: П. П. П е к а р с к и й, т. 1, стр. 258.

произвела на него мрачная эпоха бироновщины, эпоха царства «слова и дела», видно из следующего факта: на придворном балу, куда его пригласили, на расспросы прусской королевы Эйлер давал односложные ответы: «да», «нет». Свою неразговорчивость Эйлер объяснил придворным словами: «я приехал из страны, где тех, кто разговаривает, вешают».

Во-вторых, очень тяжелыми были условия жизни и самой Академии. Регламент Академии не был утвержден, прав на самоуправление академики не имели, а были полностью отданы административному произволу академической Канцелярии, во главе которой стоял грубый и малокультурный Шумахер; последний издевался над академиками как только хотел. Не только материальные условия академиков зависели от него, но нередко сами судьбы их. Благодаря этому наиболее выдающиеся из приглашенных иностранных ученых поторопились вскоре покинуть Россию. Так, Герман и Бильфингер уехали, как только кончился срок их контрактов (1731); Даниил Бернулли по своему характеру не имел никакой охоты вступать в борьбу с всесильным библиотекарем (Шумахером) и также в 1733 г. под предлогом слабого здоровья вышел из Академии и уехал из России.

В период регентства положение Академии стало совсем шатким. Отъезды ученых из России участились. В это тревожное время Эйлер торопливо «первым уехал в Берлин, Крафт в Тюбинген, а многие, еще оставаясь, готовились к дороге, чтобы уехать из России», — так позже говорил, вспоминая это время, один историк Академии. По выражению Ломоносова, ученые, будучи «Шумахером вытеснены», уезжали «горькие слезы утираючи».

Долгое время Петербургская Академия не могла заместить вакансии на кафедрах: иностранные ученые не хотели ехать, а отечественных ученых еще почти не было.

Правительственные учреждения относились к научной деятельности с подозрением и ставили ей всевозможные цензурные рогатки. Для характеристики условий, в которых проходила научная работа Академии, приведем такие примеры: в 1728 г. не была допущена к напечатанию по-русски речь академика Делиля, где утвердительно решался вопрос о вращении Земли; в 1731 г. не смели издать без разрешения высшего начальства сочинение Фонтенеля «Разговоры о множестве миров»; в 1734 г. синод запре-

тил опубликование Академией летописных источников из опасения, что это может вызвать в народе «соблазн»; на академика Мюллера за его рукописную тетрадь по русской истории, в которой говорилось о татарском иге, был сделан донос в оскорблении императорского величества.

Подозрительность к науке простиралась так далеко, что даже лица, обязанные по своему положению содействовать ученым в получении сведений, необходимых для научных работ, считали долгом ставить всевозможные препятствия для работы академиков.

На науку в период бироновщины отпускались ничтожные суммы. Так, на содержание Академии наук и Адмиралтейской академии было отпущено всего 47 тысяч рублей, в то время как на содержание двора тратилась огромная по тому времени сумма — 2 000 000 рублей золотом в год.

Таковы главные причины, побудившие Эйлера принять приглашение Фридриха II, короля Пруссии.

Могли влиять на отъезд и материальные трудности, так как Академия часто задерживала оплату. Например, в августе 1728 г. Эйлер еще не получил ни копейки из причитавшегося ему за этот год оклада (сенатский указ от 2 ноября 1732 г. прямо устанавливал, что «на нынешний год никому профессорам дачи жалованья не было»), в то время как в Берлин его приглашали на выгодных материальных условиях для занятия должности директора математического класса реформируемой Академии.

Наконец, к отъезду Эйлера побуждали и неблагоприятные климатические условия петербургской жизни, частые опустошительные пожары, обычай расквартировывать солдат на постой по квартирам обывателей.

В своем официальном прошении Эйлер главным образом опирается на суровость климатических условий. Он пишет: «Понеже силы моего здоровья час от часу умаляются и притом многие трудности в домашнем моем состоянии так умножаются, что я совершенно в несостояние прихожу положенную на меня должность исправлять как надлежит: того ради нахожусь принужден, как ради слабого здоровья, так и других обстоятельств, искать приятнейшего климата и принять от его королевского величества прусского учиненное мне призывание. Того ради прошу императорскую академию наук всеподданейше меня милостиво уволить и снабдить для моего и домашних моих

проезду потребным пашпортом. И как я, в бытность мою здесь, оказанную всякую великую и необычайную милость, доколе жив, с должным благодарением исповедать и повсюду прославлять буду, то обязуюсь еще притом найсильнейше всегда, по крайней возможности, о чести и пользе императорской академии наук трудиться и все оное, к чему меня оскудение сил моих до сего времени не допустило, с божьей помощью, сколько возможно дополнить. На сие мое подданнейшее прошение прошу императорскую академию наук всепокорно милостивое решение учинить, которой я с глубочайшим почтением и должною покорностью во все времена жизни своей пребываю»¹.

29 мая 1741 г. Эйлер увольняется от службы в Петербургской Академии наук. При увольнении ему присвоили звание почетного члена Академии и назначили ежегодную пенсию в размере 200 рублей.

Как мы увидим дальше, Эйлер уехал с определенными обязательствами не только организационного, но и научно-исследовательского характера. За границей он как бы продолжал оставаться членом Русской Академии. Более того, он уехал с какими-то обещаниями вернуться, на что намекает следующий пункт, содержащийся в отзыве Академии от 15 марта 1741 г. на его прошение: «5) А ежели ему, Эйлеру, при отпуске от академии наук какое милостивое награждение учинено будет, то сие оного профессора к тому побудит, что он, пришедши в лутчее здоровье, из немецкой земли опять в Россию возвратится и Академии наук большую пред нынешним услугу и пользу принести может»... Браверн, Гольдбах, Шумахер».

Эйлеру было тогда 34 года.

¹ «Материалы для истории Академии наук», т. IV, стр. 572.





БЕРЛИНСКИЙ ПЕРИОД ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЭЙЛЕРА (1741—1766)

Начало работы в Берлине

Приглашая Эйлера, прусский король Фридрих II имел в виду оживить работу Берлинской Академии наук, влачившей благодаря продолжительной войне жалкое существование. Академия эта была основана усилиями Лейбница еще в 1700 г., в 1744 она была реорганизована и Эйлер при этом получил место директора математического отделения.

Тотчас по приезде Эйлер поместил в издании Академии, называвшемся «*Miscellanea Berolinensis*» («*Mélanges de Berlin*»), что значит «Берлинские заметки» (смесь), пять мемуаров, из которых особенно примечателен один. В нем дается современный способ интегрирования рациональных дробей путем разложения на простые дроби и излагается обычно принятый в настоящее время способ интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Этот мемуар носит название «Об интегрировании дифференциальных уравнений высших степеней» («*De integratione aequationum differentialium altiorum graduum*»).

Впоследствии поток работ Эйлера в журнал Берлинской Академии наук не уменьшается: ежегодно он помещает в «*Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*» от 3 до 9 мемуаров.

Необходимо отметить при этом, что, дорожа связями с нашей Академией и выполняя взятые при отъезде обещания, Эйлер половину своих работ отсылал в Петербург. «В результате наряду с 119 работами, помещенными в научном органе Берлинской Академии наук, в Петербургских «Комментариях» появились за этот период 109 его научных статей... Обращает на себя внимание еще тот факт, что Берлинские мемуары Эйлера имеют преимущественно прикладной математический характер и написаны на французском языке, петербургские же публикации изложены по-латыни и притом в духе чисто математическом, отвлеченно-научном»¹.

Теория движения планет и комет

В 1744 г. был опубликован трехтомный трактат Эйлера, посвященный теории движения планет и комет: «Теория движения планет и комет, содержащая легкий метод, позволяющий посредством нескольких наблюдений определить орбиты как планет, так и комет» («Theoria motuum planetarum et cometarum, continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum planetarum tum cometarum determinandi»), в котором, как это явствует из самого названия, дается способ определения орбит посредством нескольких наблюдений.

Остановимся несколько на существе вопроса.

Лучшей проверкой теории тяготения Ньютона было объяснение ею сложного движения планет. В простейшем случае задачи двух тел, т. е. когда рассматривается движение одного небесного тела относительно другого (например, планеты относительно Солнца, спутника относительно планеты) с учетом только их взаимного притяжения, движение одного тела всегда происходит с постоянной секторной скоростью². Вспомним второй закон Кеплера: радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равные площади (рис. 2) по коническому сечению (на рисунке эллипс), в фокусе которого находится другое тело. Такие орбиты называются невозмущенными или кеплеровыми (рис. 3).

¹ С а т к е в и ч, цит. соч., стр. 483.

² С е к т о р н а я с к о р о с т ь — величина, численно равная площади, описываемой радиусом-вектором за единицу времени.

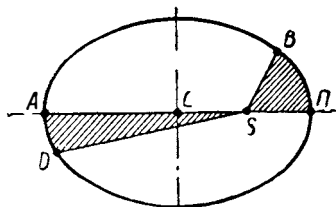


Рис. 2.

ситетом (ϵ); плоскость, в которой эллипс расположен, определяется положением так называемой линии узлов, т. е. линии пересечения этой плоскости с некоторой постоянной плоскостью, за которую обыкновенно принимается плоскость эклиптики¹, и взаимным наклоне-

Каждая из них определяется шестью величинами, носящими название элементов орбиты.

Пусть наша планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Рассмотрим элементы орбиты: размер и форма эллипса определяются длиной его большой оси (a) и эксцентриситетом (ϵ);

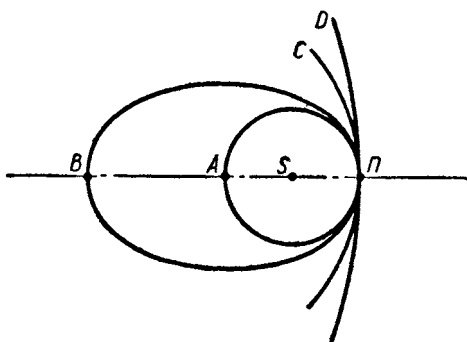


Рис. 3. Невозмущенные орбиты:

A — окружность (эксцентриситет $\epsilon = 0$);
 B — эллипс ($0 < \epsilon < 1$); C — парабола ($\epsilon = 1$);
 D — гипербола ($\epsilon > 1$); Π — перигелий, точка наименьшего расстояния от орбиты до фокуса конического сечения, занимаемого центральным телом.

нением (i) этих двух плоскостей. В качестве третьего элемента обыкновенно принимают угол Ω между осью

¹ Эклиптикой называется плоскость, в которой движется Земля вокруг Солнца.

Sx и направлением SN , где N — восходящий узел орбиты (рис. 4). Он носит название долготы восходящего узла.

При постоянстве этих четырех величин эллипс еще может вращаться около своего фокуса в собственной плоскости, но если установить направление линии апсид¹, то положение эллипса уже вполне определится.

Это направление определяют углом ω — угловым расстоянием перигея от перигея центра.

Если, далее, известно положение планеты на эллипсе в какой-нибудь определенный момент (можно взять момент T прохождения светила через перигея), то становится возможным заранее вычислить ее положение для любого данного момента.

На самом же деле, движение небесных тел значительно сложнее благодаря так называемым возмущающим влияниям других тел, так что орбиты могут быть чрезвычайно разнообразными. Изучение таких «возмущенных» орбит представляет большие математические трудности уже в случае трех тел.

Эйлер сделал много чрезвычайно важных, хотя и не вполне совершенных добавлений к планетной теории. Трехтомный трактат, вышедший в 1744 г., являлся одним из первых в ряде работ, посвященных разбираемому вопросу.

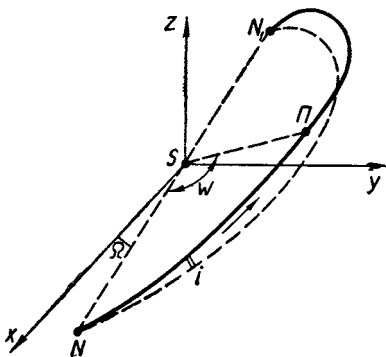


Рис. 4. Элементы, определяющие положение орбиты в пространстве: N и N_1 — восходящий и нисходящий узлы орбиты; P — перигей, S — фокус конического сечения, занимаемый центральным телом.

¹ Линией апсид называется отрезок прямой, соединяющий апсиды, т. е. две точки эллиптической орбиты небесного тела, одна из которых P , перигей, является наиболее близкой к центральному телу, а другая A , апогей — наиболее удаленной от него (рис. 2). Эти точки лежат на концах большой оси AP эллипса, которая, следовательно, и есть линия апсид. Апсиды Луны относительно Земли называются перигей и апогей, Земли относительно Солнца — перигелий и афелий.

Главнейшими неравенствами планетных движений, обнаруженными из наблюдений в эпоху до Ньютона, считалось поступательное движение линии апсид и крайне медленное уменьшение наклона эклиптики. К ним можно добавить изменение скоростей движения Юпитера и Сатурна, подмеченные Галлеем. Ньютон в общем показал, что перемещение линии апсид данной планетной орбиты, а также изменение в относительных положениях плоскостей, в которых движутся возмущающая и возмущаемая планеты, происходит в результате так называемого возмущающего влияния одной планеты на другую, но не произвел детальных вычислений.

Неправильности движения Земли, обнаруживающиеся в неправильностях кажущегося движения Солнца, а также Юпитера и Сатурна, являлись важнейшими из планетных неравенств, и потому Парижская Академия неоднократно назначала премии за работу по тому или другому из этих вопросов. Эйлер не раз пытался дать объяснение неправильностям движения Юпитера и Сатурна, при этом ему удалось показать, что возмущающее влияние остальных планет должно подвигать линию апсид земной орбиты на $13''$ вперед ежегодно, а наклонение эклиптики уменьшать приблизительно на $48''$ в столетие. Оба эти результата оказались в полном согласии с наблюдениями и с произведенными впоследствии более тщательными вычислениями.

В работе, удостоенной академической премии 1756 г., но впервые обнародованной лишь в 1771 г., Эйлер с достаточной полнотой развил метод исследования возмущений, на который он указал в своей лунной теории в 1753 г. Метод этот, известный под названием вариации элементов или параметров, сыграл очень видную роль в последующих изысканиях.

Попытаемся дать некоторое понятие об этом методе. Если пренебречь возмущениями, то планету можно считать движущейся по эллипсу с Солнцем в фокусе. Как выше было сказано, шесть величин вполне определяют движение планеты, не подверженной возмущениям.

При возмущениях путь, описываемый планетой в течение одного обращения, уже не представляет собой эллипса, хотя обычно и не слишком отличается от него. С течением времени эти эллипсы меняются, варьируют, так как меняются элементы орбиты, например, между эпохами

Птолемея (150 лет после н. э.) и Эйлера направление линии апсид земной орбиты изменилось почти на 5° , изменились отчасти и некоторые другие элементы. Так что истинный путь, описываемый планетой в продолжение длительного числа обращений, представляет собой кривую, весьма мало похожую на эллипс. Если, например, линия апсид равномерно обращается около фокуса, в то время как остальные элементы остаются без изменения, то описываемый планетой путь напоминает рисунок 5.

Следовательно, возмущаемая планета как бы описывает во всякий момент эллипс, который, однако, непрерывно изменяет свои элементы. Таким образом, задача исследования движения сводится к определению элементов того эллипса, который изображает движение планеты в данное время.

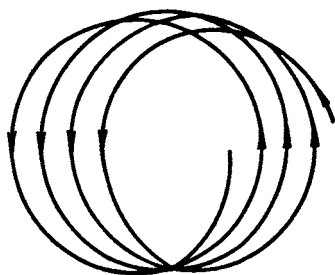


Рис. 5.

Эйлер разобрал несколько простейших случаев. В частности (в 1744 и 1780 гг.), он предложил метод определения орбит комет, когда орбита заранее предполагается параболической (эксцентриситет $e = 1$). Тогда решение выражается шестью уравнениями с пятью неизвестными, а не шестью уравнениями с шестью неизвестными, как это имеет место в общем случае.

Не один Эйлер занимался вопросами небесной механики в XVIII веке, быстрое развитие астрономии тяготения в рассматриваемую эпоху обязано, кроме Эйлера, еще усилиям четырех крупных математиков — Клеро, Даламбера, Лагранжа и Лапласа.

Решение задачи определения орбиты по трем наблюдениям в общем случае было развито в работах немецкого математика и астронома И. Ламберта, и особенно французского ученого Ж. Лагранжа. Существенные дополнения внес Гаусс: пользуясь своим методом, он мог произвести вычисление орбиты в течение одного часа, на что еще Эйлеру требовалось три дня.

Теория магнетизма

В том же 1744 г. Эйлер получил премию Парижской Академии наук за свою теорию магнетизма (сочинение «Новая теория магнита» — «Nova theoria Magnetis»), основанную на вихрях. Согласно воззрениям Эйлера магнитные явления объясняются наличием невидимой магнитной жидкости, более тонкой, даже нежели эфир. Во всех телах магнитная жидкость смешана, по Эйлеру, с эфиром, представляющим также тонкую жидкость, но в магните и железе они отделены друг от друга. Магнит и железо имеют «столь малые поры, что в них не может проникнуть даже эфир и входит лишь одна магнитная жидкость». Эти поры образуют тонкие трубки или каналы, по которым магнитная жидкость течет всегда в одном направлении; она «не только проходит через магнит от полюса к полюсу, но, выходя через один полюс наружу, возвращается через другой снова в магнит». Находясь в быстром постоянном движении, магнитная жидкость образует вокруг магнита непрерывный вихрь. «Этим, — говорит Эйлер, — он (магнит. — В. К.) и отличается от всех прочих тел».

Таким образом, в объяснении магнитных явлений Эйлер вернулся к картезианской¹ теории вихревых истечений особой магнитной жидкости. Пользуясь своей теорией, Эйлер объясняет все известные в его время явления магнетизма.

Баллистика

Война за австрийское наследство (1741—1748) вызвала особый интерес к артиллерии: опыт войн первой половины XVIII века показал, что этот вид оружия имеет решающее значение в бою. Поэтому прусское правительство обратилось к Эйлеру за советом относительно лучшего трактата по этому предмету. Эйлер рекомендует труд «Новые начала артиллерии» Б. Робинса («New principles of gunnery», Лондон, 1742), известного изобретением баллистического маятника. Он переводит этот труд с английского на немецкий и снабжает его своими «Добавлениями», являющимися, собственно, новой теорией полета снаряда. В них

¹ К а р т е з и а н с к и й — от латинизированного имени французского философа и математика Рене Декарта (1596—1650) — Картезий (Cartesius).

Эйлер выводит закон сопротивления в виде двучлена, первый член которого, пропорциональный квадрату скорости, обуславливается ударом шарового снаряда о воздух; второй же член, пропорциональный четвертой степени скорости, обуславливается перевесом давления сжатых частей струй воздуха на переднюю часть над давлением разреженных частей струй на заднюю.

Книга Робинса на немецком языке с добавлениями Эйлера: «Новые очерки артиллерии Робинса» («Neue Grundsrisse der Artillerie von Robins»), вышла в 1744 г. Французское правительство немедленно перевело эту книгу с немецкого языка на французский и ввело преподавание теории Эйлера в военных школах. Книга была переведена и на английский язык. Впоследствии Эйлер совершенствует формулы баллистики и придает им вид, удобный для применения (сочинения «*Varia opuscula*», 1746, и «Исследование истинной кривой, которую описывают тела, брошенные в воздух либо в какую-нибудь иную жидкость» «*Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jétés dans l'air ou dans une autre luide quelconque*», *Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin*, 1753 г.).

Надо сказать, что Эйлер вообще интересовался вопросами внешней баллистики¹, посвятив этой области до сорока работ. Занимался он и вопросами внутренней баллистики².

Однако, исправив ряд положений Робинса, Эйлер выступил против предложенной Робинсом системы нарезных орудий и своим авторитетом задержал их введение в войсках на целое столетие³.

Теория света

Эйлер уделяет много внимания теории света. Он занимается ею почти полвека. До Эйлера в теоретической оптике существовали два основных взгляда на природу света — волновая теория Гюйгенса (1629—1695) и корпускулярная или эмиссионная теория Ньютона

¹ Внешняя баллистика изучает движение снаряда в воздухе.

² Внутренняя баллистика изучает движение снаряда под действием пороховых газов в канале орудия.

³ В. Е. Прудников, Русские педагоги-математики XVIII—XIX вв., Учпедгиз, 1956, стр. 49—50.

(1643—1727). Первая точка зрения в XVIII веке достигла наибольшего развития у М. В. Ломоносова и особенно у Эйлера. Приведенные им в защиту волновой теории доказательства были настолько убедительными, что многие ученые долгое время считали подлинным основателем этой теории именно его, Эйлера, а не Гюйгенса.

Выступая против ньютоновской теории света, Эйлер говорил, что «материальные частицы не могут двигаться со скоростью света, потому что они имели бы тогда неустойчивую траекторию и масса Солнца была бы исчерпана за несколько секунд». Эйлер считал, что гипотеза пустоты мирового пространства, принятая Ньютоном, находится в противоречии с фактом испускания (Солнцем, звездами) материальных частиц.

Затем если принять теорию Ньютона, пишет Эйлер, то бесчисленные потоки световых частиц, испускаемые во всех направлениях звездами, должны были бы сталкиваться и искажать прямолинейное распространение света, что не наблюдается.

Наконец, теория Ньютона несет еще третье затруднение: поскольку световые лучи совершенно свободно и прямолинейно распространяются с огромной скоростью сквозь прозрачные тела во всех направлениях, то пришлось бы заключить, что эти тела пронизаны прямолинейными порами во всех направлениях; последнее, по мнению Эйлера, является совершенно абсурдным.

По мнению Эйлера, материальные частицы, образующие, по Ньютону, лучи Солнца и звезд, скрещивались бы повсюду, наполняли бы все пространство и представляли бы такое сопротивление движению планет, какого не может оказать эфир, отрицаемый Ньютоном как раз по этой самой причине.

Сам Эйлер берет за исходную точку зрения аналогию между звуком и светом, рассматривая последний как вибрацию эфира.

Замечательно, что, развивая эфирную теорию света, Эйлер пытался на волновой основе объяснить световое давление.

Теория корабля

Наконец, много сил, энергии и внимания тратит Эйлер на вопросы, связанные с теорией корабля, что, несомненно, было в значительной мере естественной данью эпохе.

Живя на берегах Невы, в городе, являвшемся морским портом, где было сосредоточено все судостроение тогдашней России, Эйлер не мог не заинтересоваться вопросами кораблестроения. Им он посвятил уже первую юношескую научную работу и не перестает заниматься ими всю свою жизнь. Эйлер первый превращает теорию корабля в точную науку. Напомним, кстати, что в 1733 г. Эйлер едва не попал на службу во флот.

В 1749 г. наша Академия публикует большой двухтомный труд Эйлера по теории корабля: «Морская наука или трактат о конструкции кораблей и их вождении» («*Scientia navalis seu tractatus de construendis et dirigendis navibus*»). В том же году вышел автореферат этой книги на русском языке. Труд этот был написан по особому поручению Петербургской Академии, связанной с той ролью, которую играла Россия в качестве морской державы.

Устойчивость и равновесие судов, вопросы о качке на зыби, о форме судов и кораблестроении, о движении судов силою ветра и управление судном — все это было охвачено этим произведением. Сочинение Эйлера «Корабельная наука» показало, что исследование корабля дает обширный материал для приложения математики.

С 1753 г. Парижская Академия наук предложила на премию ряд тем по теории корабля. В конкурсах принимают участие Эйлер, братья Бернулли и другие математики того времени. Появляется необходимость расчета корабля как целого сооружения, причем теория корабля должна доставить строительной механике корабля величины тех усилий, которым корабль может подвергаться на волнении. Общие приемы такого исследования были даны Эйлером в 1759 г. в премированном мемуаре, представленном на конкурс в Парижскую Академию наук. Мемуар этот носил название «Исследование усилий, которые должны выносить все части корабля во время боковой и килевой качки».

Эти труды Эйлера были написаны с широким использованием высшей математики, а потому мало доступны практикам морского дела. Поэтому впоследствии Эйлер опубликовал полную теорию кораблестроения и маневрирования судов в популярной форме, чтобы ее выводами могли пользоваться непосредственно и капитан, и строитель. Труд этот появился в 1773 г. под названием «Полная теория конструкции и вождения кораблей, приспособленная

к уровню изучающих навигацию» («Théorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux, mise à la portée de ceux qui s'appliquent à la navigation») и имел необычайный успех. «Никогда еще книга, содержащая теоремы геометрии, не имела такого успеха», — говорит Н. Н. Лузин; труд был издан во Франции, Англии и Италии. Французское правительство ассигновало 6000 ливров Эйлеру за его открытия в морском деле и ввело этот труд в качестве учебного пособия в своих навигационных школах. В 1778 г. в Петербурге был издан русский перевод этого учебника Эйлера, выполненный М. Е. Головиным, племянником М. В. Ломоносова и учеником Л. Эйлера. Называлась эта книга «Полное умозрение строения и вождения кораблей, сочиненное в пользу учащихся Навигации Леонгардом Эйлером, а с французского подлинника переведенное Академии наук Адъютантом Михайлом Головиным». Этот перевод является первым русским учебным пособием, посвященным в основной своей части теории устойчивости.

Помимо упомянутых общих вопросов теории корабля, Л. Эйлер занимался вопросами корабельных движителей. Он изучал влияние оснастки, теорию весел, гребных колес и винтов и др. Одна из его работ посвящена реактивному судовому движителю.

Прусское правительство, как, впрочем, и русское, давало Эйлеру поручения чисто инженерного характера. Так, в 1749 г. он осматривает канал между Гавелем и Одером и указывает на необходимость исправления недостатков; далее, ему поручено было исправить водоснабжение королевского дворца в Сан-Суси в Потсдаме; он должен был дать заключение о солеварнях у Шенебека. В связи с этим появилось немало статей Эйлера, написанных в разное время.

Трактат по математическому анализу

Эйлер задумал объединить в единое целое многочисленные свои работы по анализу бесконечно малых, написанные в течение многих лет и рассеянные в самых различных академических изданиях. Такому курсу математического анализа он решил предпослать «Введение», в котором были бы изложены основные понятия предмета. Таким образом

было создано знаменитое «Введение в анализ бесконечно малых» («Introductio in analysis infinitorum», Лозанна, 1748), сочинение, создавшее эпоху в развитии математики. В начале «Введения» Эйлер подчеркивает, что основным в математическом анализе является изучение функций, и дает свое определение функции как «аналитического выражения, составленного каким-либо образом из переменного количества и чисел или постоянных количеств». Впервые в трактате Эйлера было дано построение математического анализа на базе арифметики и алгебры, без обращения к геометрии и механике. Чисто аналитическая манера изложения отразилась на том, что ни в первом томе «Введения», ни в «Дифференциальном исчислении» Эйлера не приводится ни одного чертежа. В первом томе «Введения» излагаются свойства рациональных и трансцендентных функций, причем здесь Эйлером впервые рассматриваются систематически элементарные функции не только действительного, но и комплексного переменного и впервые излагается современное учение о показательной, логарифмической и тригонометрической функциях. Во втором томе исследуются кривые второго, третьего и четвертого порядков и впервые дается исследование поверхностей второго порядка. В связи с преобразованием координат здесь впервые вводятся знаменитые углы, до сих пор именуемые эйлеровыми углами, играющие фундаментальную роль в кинематике твердого тела. «Введение» принесло Эйлеру славу величайшего математика. По словам академика Н. Н. Лузина, «почти все, что преподается и теперь в курсах высшей алгебры и высшего анализа, находится в этой книге Эйлера»¹. «Введение в анализ» Эйлера отличают и высокие педагогические достоинства: благодаря ясности и простоте изложения, умению автора приобщить читателя к самому процессу открытия математических истин и ценным примерам она долгое время была настольной книжкой всякого приступающего к изучению высшей математики. За «Введением» последовал и самый трактат по анализу бесконечно малых в четырех томах, причем первый том, посвященный дифференциальному исчислению («Institutiones Calculi differentialis, cum eius usu in Analysisi Finitorum ac doctrina serierum»), был издан в Берлине

¹ Н. Н. Лузин, Эйлер, журн. «Социалист. реконструкция и наука», вып. 8, 1933.

в 1755 г., хотя и был написан по заданию Петербургской Академии, давшей средства на издание, а остальные три тома, посвященные интегральному исчислению («Institutiones Calculi Integralis»), изданы нашей Академией в 1768—1770 гг. В «Дифференциальном исчислении» Эйлер принимает в качестве основного понятия производную и этим отходит от традиционной школы Лейбница, в которой основным объектом дифференциального исчисления служил дифференциал. При этом Эйлер делает попытку обосновать анализ путем построения своеобразного «исчисления нулей», в котором бесконечно малые рассматриваются как настоящие нули. Однако попытка Эйлера, несмотря на его гениальность, оказалась мало эффективной, верный путь к обоснованию анализа шел через теорию пределов (Ньютон, Даламбер, Гурьев, Коши).

Интересно отметить, что Эйлеру не было чуждо и современное понимание функции, только оно не было у него действенным. В его «Дифференциальном исчислении» мы находим такую фразу: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых». Эйлер добавляет к этому такие пророческие слова: «Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других».

Если дифференциальное исчисление в отношении общих правил дифференцирования было доведено до конца еще Лейбницем, то роль Эйлера в развитии интегрального исчисления огромна: на протяжении 150 лет после его смерти математика мало добавила новых квадратур к тем, которые были найдены Эйлером. «Современные учебники по интегральному исчислению являются лишь переделками трактата Эйлера» (Л у з и н). «Основы интегрального исчисления» Эйлера до сих пор не потеряли значения благодаря богатству содержания и гениальной изобретательности приемов интегрирования. Это сочинение, говорит А. Н. Крылов, «не только охватывает предмет в его полном объеме и систематизирует все тогда известное, в значительной степени принадлежащее самому Эйлеру, но многие вопросы развиваются заново, так что самое сочинение включает много совершенно нового. Все изложено с таким совершенством, что стало классическим, перешло

во множество последующих руководств и изучается и по днес в форме, приданной Эйлером, начиная от самого начертания формул».

В первом томе разбираемого сочинения содержатся методы интегрирования функций одного аргумента, приближенное интегрирование, а также приемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Второй том посвящен учению об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений второго и высших порядков.

Третий том содержит уравнения с частными производными как первого, так и высших порядков. В этом же томе изложено вариационное исчисление — новая наука, введенная в основном Эйлером.

Труд Эйлера по математическому анализу произвел большое впечатление на современников.

Спор о природе логарифмов

Эйлер первый обосновал теорию логарифмов чисел и положил конец горячему спору по этому вопросу, возникшему между И. Бернулли и Лейбницем. Иоганн Бернулли утверждал, что $\ln(-x) = \ln x$, Лейбниц же утверждал, что логарифмы отрицательных чисел не могут быть действительными. В споре принял участие и Даламбер, однако также исходя из неверных позиций. Показав, что ни один из противников не сумел обосновать свои утверждения, Эйлер дал правильное решение. Он объяснил, что недостаточно утверждать, что логарифмы отрицательных (и мнимых) чисел мнимы, как это делал Лейбниц. Нужно еще знать, что логарифм каждого числа имеет не одно, но бесконечное множество различных значений, отличающихся друг от друга на кратные $2\pi\sqrt{-1}$. При этом для действительного положительного числа лишь одно из значений логарифма действительно, а все остальные — мнимые; для действительных отрицательных и для мнимых чисел все значения логарифма являются мнимыми. Решение Эйлера вытекало из знаменитой формулы $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, установленной им же. Разбор вопроса о природе логарифмов содержится в статье Эйлера «О споре между Бернулли и Лейбницем о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» (1749). Эта статья напечатана в V томе «Memoires de Berlin» (1751)

Работы по оптике

Гений Эйлера не мог удержаться в определенных рамках, как бы широки они ни были. Эйлер был обуреваем идеей подчинить исчислению доступные ему измеримые величины природы. Так, Эйлер исправил ошибку Ньютона, утверждавшего, что устранение хроматической аберрации¹ невозможно. Под влиянием авторитета Ньютона исследователи начали считать немислимым усовершенствование рефракторов и они стали заменяться зеркальными телескопами.

В своем трактате «Об усовершенствовании объективов очков» («*Sur la perfection des verres objectifs des lunettes*», 1747) Эйлер замечает, что наш глаз представляет собой оптический прибор, который, хотя и сводит падающие на него лучи в изображения, но цветорассеяния не дает. Так как при образовании изображений в глазу участвуют среды с различными показателями преломления — роговая оболочка, хрусталик, стекловидное тело, — то Эйлер пришел к мысли устраивать стекла для труб и микроскопов сочетанием двух стеклянных чечевиц с слоем воды между ними. Построенные Эйлером объективы, хотя не обладали желательной отчетливостью изображения, но практически не давали хроматической аберрации, из-за которой был забракован рефрактор. Английский оптик Джон Доллонд горячо ухватился за идею Эйлера и после многих опытов пришел к изобретению ахроматического объектива (1758), составившего эру в астрономии и диоптрике.

Спор о принципе наименьшего действия

Этот спор возник в 1751 г. между швейцарским математиком Кенигом и французским ученым П. Мопертюи, с 1745 г. состоявшим президентом Берлинской Академии наук. Мопертюи провозгласил закон наименьшего действия (*la loi de la moindre action*), а Кениг оспаривал при-

¹ Хроматическая аберрация — явление, заключающееся в том, что лучи различного цвета, вышедшие из одной светящейся точки, после прохождения через линзу не пересекаются в одной точке; причина этого — неодинаковая преломляемость лучей различного цвета; в результате линза дает нерезкое и окрашенное изображение предметов.

оритет Мопертюи, приписывая его Лейбницу. Этот закон, или принцип, был выдвинут Мопертюи в 1744 г. без всякого доказательства, как некоторый общий закон природы. В своем сочинении «Законы движения и покоя, полученные из метафизического принципа» («Les lois du mouvement et du repos déduites du principe métaphysique») Мопертюи изложил этот принцип в следующих выражениях: «Если в природе совершается какое-нибудь изменение, то требующиеся для него издержки наивозможно малы». Как видно уже из заглавия произведения, Мопертюи устанавливает свой принцип метафизически, в силу «мудрости создателя и управителя вселенной», исключаяющей возможность бесполезной траты работы. Мопертюи применил его сначала для объяснения законов отражения и преломления света, а затем и явлений удара. Хотя Эйлер, как и Мопертюи и некоторые другие ученые XVIII века, придавал этой идее также теологическую окраску, однако он ясно понимал огромную роль вариационных методов в естествознании и, разрабатывая их, имел в виду прежде всего их приложения в механике и физике. Он писал: «...в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума; поэтому нет никакого сомнения, что все явления мира с таким же успехом можно определить из причин конечных при помощи метода максимумов и минимумов, как и из самых причин производящих»¹.

Эйлер дал строгую математическую формулировку простейшего принципа наименьшего действия, а Даламбер высказал начало возможных перемещений.

В столкновении между Мопертюи и Кенигом Эйлер решительно принял сторону своего президента, проявив даже, по мнению Кондорсе, «слишком много жестокости в своих ответах Кенигу». Берлинская же Академия наук в угоду своему президенту даже исключила Кенига из числа своих иностранных сочленов. За свою нетерпимость Мопертюи дорого поплатился: он сделался посмешищем Европы благодаря остроумному памфлету Вольтера («Diatribes d'Akakia»), принявшему сторону Кенига. По прика-

¹ Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, 1934, стр. 447 русск. перевода.

занию прусского короля этот памфлет был сожжен рукой палача — любопытная деталь, характеризующая нравы той эпохи.

Труды по механике

В области механики Эйлер — продолжатель дела Ньютона: в то время как Ньютон сформулировал основные понятия и принципы классической механики, Эйлер стал основоположником механики твердого тела. В 1765 г. появляется его второй крупный трактат по механике: «Теория движения твердых тел» («*Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, Rostoch»), посвященный кинематике и динамике твердого тела. Он явился дополнением к его первому трактату 1736 г., посвященному движению точки и системы конечного числа точек. В этом трактате содержится общепринятый теперь метод кинематического описания движения твердого тела при помощи трех эйлеровых углов. Фундаментальную роль в дальнейшем развитии динамики и многих ее технических приложений сыграли установленные Эйлером основные дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижного центра. Эти уравнения явились аналитическим выражением открытой Эйлером теоремы моментов количества движения, представляющей необходимое дополнение к закону количества движения, сформулированному в общем виде Ньютоном в «Началах». Трактат Эйлера, вышедший в 1765 г., положил начало теории гироскопа, а также оказал прогрессивное влияние на развитие теории движения небесных тел и навигации.

Топология

Леонарда Эйлера можно считать основоположником топологии. Важное соотношение $V - E + F = 2$, связывающее число вершин, ребер и граней выпуклого многогранника (V — число вершин, E — ребер и F — граней), было подмечено еще Декартом около 1685 г. Эйлер вновь открыл в 1752 г. это соотношение и опубликовал его в 1758 г. в статье «Основы учения о твердых телах» («*Elementa doctrinae solidorum*»). Приведенный результат обычно известен под названием формулы Эйлера — Декарта. Типические черты этого топологического утверждения стали очевидными гораздо позднее — после того как

французский математик Пуанкаре (1854—1912) в «формуле Эйлера» и ее обобщениях усмотрел одну из центральных теорем топологии.

Топологический характер имеет также знаменитая задача о кенигсбергских мостах, решенная Эйлером еще во время его первого пребывания в Петербурге (1735) и обнародованная в 1741 г. в статье «Решение проблемы, относящейся к геометрии положения» («Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis»). В задаче решается вопрос: как можно пройти по семи кенигсбергским мостам через реку Прегель, пройдя по каждому мосту не более одного раза?

К теореме Эйлера о многогранниках дана задача о раскраске карт. Если деформировать многогранник так, чтобы он имел поверхность сферы, то на поверхности мы получим карту с F странами, отделенных E границами, которые встречаются в U точках. В конце XIX века в географических ведомствах возникла задача: «Какое наименьшее количество различных красок нужно для географической карты, если разные цвета должны иметь лишь страны с общими границами». С помощью теоремы Эйлера доказано, что произвольную карту можно напечатать пятью красками.

Топологической является и эйлерова задача о ходе конем. В литературе она впервые появилась в работе Эйлера «Решение одного интересного вопроса, не поддающегося с первого взгляда никакому анализу», которая была опубликована в 15-м томе мемуаров Берлинской Академии наук в 1766 г. Задача эта состоит в следующем: требуется разместить в 64 клетках шахматной доски 64 числа от 1 до 64 так, чтобы любые две клетки, в которых содержатся два последовательных числа, были связаны ходом коня. Эйлер первый разработал методы ее решения.

Рассмотренные задачи относят, как мы уже заметили, к топологии¹ или геометрии положения, названной Лейбницем и Эйлером *Analysis situs*.

¹ Топология — отрасль геометрии, изучающая свойства фигур, которые остаются неизменными при непрерывных взаимно однозначных преобразованиях, т. е. таких, при которых сохраняются соотношения смежности точек и не сохраняются ни метрические, ни проективные свойства фигур.

Слово «топология» происходит от греческих слов *topos* — место, местность и *logos* — понятие, учение.

Работы Эйлера по гидродинамике и гидравлике

Гидродинамика как наука оформилась в середине XVIII века. Ее основоположниками являются члены Петербургской Академии наук Леонард Эйлер и Даниил Бернулли.

Чтобы правильно разрешить основную задачу о взаимодействии жидкой среды с движущимися в ней телами, нужно было сформулировать основные законы движения жидкости. Это и было выполнено Эйлером совместно с Даниилом Бернулли; жидкость при этом бралась идеальной, т. е. полностью лишенной вязкости, и в течение почти 150 последующих лет исследования в области гидродинамики за немногими исключениями велись применительно к идеальной жидкости.

Эйлеру принадлежит заслуга установления основной системы уравнений движения идеальной жидкости (1755). Ему же гидромеханика обязана представлением о давлении в движущейся жидкости, новыми формулировками общих теорем количеств движения и моментов количеств движения и применением их к практическим вопросам, поэтому Эйлер и Бернулли являются и основоположниками гидравлики как самостоятельной науки. Так, в 1750 г. Эйлер впервые дал математический анализ рабочего процесса центробежного насоса и реактивной турбины и установил основное уравнение рабочего процесса турбин, носящее его имя. Теоретические основы гидромашин и лопастных насосов, разработанные Бернулли и Эйлером, оставались неиспользованными около 150 лет (до конца XIX века), пока в качестве приводящего двигателя для насоса не стали применять электродвигатель и паровую турбину.

Гидродинамическая теория Эйлера нашла применение в объяснении и многих других явлений природы, в частности в динамической метеорологии, так Эйлер объяснил общую причину ветров разностью давлений и температур воздушных масс, в частности муссоны и периодические ветры в Индии.

Применяя свои общие уравнения к воздуху, Эйлер мог дать объяснения возникновения и распространения звука в духовых инструментах.

С именем же Даниила Бернулли связана установленная им фундаментальная теорема, выражающая связь между скоростью, давлением и высотой над горизонтом жид-

кости, движущейся в поле тяжести. Эта теорема, представляющая частный случай закона сохранения энергии, получила широкое применение в практических задачах.



Таковы в весьма кратком изложении главные результаты научной деятельности Эйлера за берлинский период, продолжавшийся 25 лет (с 1741 по 1766 г.). Научная слава его гремела по всей Европе, работы его привлекали к себе большое внимание. В 1755 г. Парижская Академия наук, вопреки обычаю, зачислила его своим членом (*Associé étranger*) сверх штата. Число членов по статутам Парижской Академии составляло восемь. Но для Эйлера Парижская Академия сделала исключение и, в обход статута, с согласия французского правительства, определила его своим девятым «присоединенным членом», постановив, что первое освободившееся место присоединенного члена не будет замещено никем.

Связь с Петербургской Академией наук

За все время своего пребывания в Берлине Эйлер не порывал своих связей с Петербургской Академией наук. Связи эти носили самый разнообразный характер.

Прежде всего следует отметить научные работы, присылаемые Эйлером в Петербург из Берлина, составлявшие, как мы уже отмечали, приблизительно около половины общей творческой продукции Эйлера. В связи с этим интересно привести отзыв об Эйлере, помещенный в представлении нашей Академии в 1744 г. о возобновлении пенсий заграничным почетным членам. В нем мы читаем следующее: «Профессор Эйлер отпущен от Академии в 1741 г., и по резолюции бывшего тогда кабинета определена ему была пенсия по 200 рублей в год. Какую он пользу и честь здешней Академии учинил множеством присланных от него ученых сочинений в то же время, когда отсюда отлучился, оное все здешние профессора тем наипаче признать имеют, что он праведно за украшение ученого совета почитается и в состоянии математический класс учеными сочинениями один наполнить, ежели бы нужда того требовала. Его две книги — одна о навигации или морепла-

вании, а другая о счете интегральном и дифференциальном той пенсии уже достойны, которую он получать имел, хотя бы для Академии, будучи в отсутствии, и ничего больше не делал»¹.

Эйлер сообщал Петербургской Академии о новых изобретениях и научных открытиях за границей.

В 1749 г. Петербургская Академия наук объявила первый международный конкурс. Эйлер принимал активное участие в его подготовке и проведении. Он составил темы для конкурса, а также рассматривал присланные на конкурс работы. В письме от 27 августа 1749 г. Шумахер так рассказал о моменте, когда зачитывались на академическом заседании присланные Эйлером задачи: «Как только г. г. профессора прочитали задачи, то закричали, что их составил Эйлер». По содержанию задач всем сразу стало ясно, что их придумал великий ученый.

Первой из предложенных Эйлером тем было исследование теории Ньютона о движении Луны. Из четырех статей, присланных на конкурс, одна обратила на себя особенное внимание Эйлера, она принадлежала известному французскому математику Клеро; работа эта была увенчана премией нашей Академии.

Находясь за границей, Эйлер читал сочинения Ломоносова и отсылал на них отзывы в Петербургскую Академию. Он всегда отзывался с похвалой о Ломоносове. Так, в письме к президенту русской Академии Разумовскому он писал: «Все сии диссертации не токмо хороши, но и весьма превосходны, ибо он (Ломоносов. — В.К.) пишет о материях физических и химических весьма нужных, которые по ныне не знали и истолковать не могли самые остроумные люди, что он учинил с успехом, что я совершенно уверен о справедливости его изъяснений»².

Из краткой «Истории академической канцелярии» М. В. Ломоносова мы узнаем, что всесильный тогда правитель канцелярии Петербургской Академии Шумахер был враждебно настроен к Ломоносову и «хотел его определить к переводам, а от профессорства отлучить». Надежды Шумахера на нелестный отзыв Эйлера не оправдались.

¹ П. П. Пекарский, История Академии наук, т. I, 1870, стр. 259.

² П. П. Пекарский, История Академии наук, т. II, стр. 361—362.

В письме от 31 января 1743 г., сообщая, что Берлинская Академия задачей на конкурс 1749 г. избрала вопрос о происхождении селитры, Эйлер писал: «Я сомневаюсь, чтобы мог кто-либо, кроме г. Ломоносова, написать об этом лучше, почему и прошу убедить его приняться за эту работу»¹.

В 1753 г. (письмо к Шумахеру от 29 декабря этого года) Эйлер дает весьма лестный отзыв о работе Ломоносова об атмосферном электричестве. В письме к Шумахеру от 3 января 1750 г. он находит «похвальное слово» Ломоносова «на день восшествия на престол Елизаветы» «образцовым в своем роде».

У Эйлера учились ряд будущих русских ученых. Его учениками были адъюнкты и будущие академики С. К. Котельников (1723—1806), С. Я. Румовский (1734—1812), адъюнкт М. Софронов (1729—1753). Эйлер весьма добросовестно относился к своим обязанностям ответственного руководителя, он являлся и наставником этих молодых людей. Живя в доме Эйлера, они вошли в его семью. Жена Эйлера была к русским ученикам, по крайней мере к Румовскому, очень внимательна: Румовский в письмах к сыну Эйлера впоследствии называл ее «Votre et ma tège»². Однако вскоре с большой силой встал финансовый вопрос. Академия присылала слишком мало средств своим «аспирантам» на прожитие и через несколько лет, не желая увеличить свои ассигнования, отозвала их обратно.

Эйлера по праву можно считать представителем нашей Академии за границей, так он защищал там ее интересы. Через него шло приглашение ученым на работу в Петербургскую Академию. Так, например, по его представлению Академия пригласила знаменитого впоследствии биолога К. Ф. Вольфа. Ему поручалось иногда вернуть в Академию ушедших из нее корифеев. В 1747 г. много хлопот доставила Эйлеру миссия уговорить Даниила Бернулли вернуться в Россию. Все же Бернулли отказался и в Петербург не поехал, не желая работать с Шумахером.

Эйлер выполнял за границей для Академии и разные мелкие поручения: сюда относится приобретение книг, журналов, аппаратуры, типографских и других станков. Особым поручением было добывание для придворных

¹ П. П. Пекарский, цит. соч., т. 2, стр. 378.

² «Ваша и моя мать».

празднеств проекционного и вообще «волшебных» фонарей и фейерверков. Подобное оформление придворных празднеств входило в обязанности Академии.

Живя за границей, Эйлер продолжал трудиться для Петербургской Академии. В сущности он никогда не прекращал работы для нашей Академии, даже в те годы, когда он был совсем лишен пенсии. Академическая канцелярия очень ценила эту деятельность. «Я до сих пор работал для Академии, — писал сам Эйлер в 1760 г. в Россию, — не как отсутствующий член, но наверное также много, как бы я состоял там на лицо»¹.

Отъезд Эйлера обратно в Россию

В Петербурге не забывали об Эйлере, и, хотя он выехал в Берлин в 1741 г., уже в 1746 г. последовало первое приглашение вернуться. Даниил Бернулли, находившийся уже в Швейцарии, внимательно следил за деятельностью Петербургской Академии. Он сочувственно относился к переезду Эйлера обратно в Петербург и возлагал надежды на улучшение дел Петербургской Академии при новом президенте Разумовском, от имени которого и последовало упомянутое приглашение Эйлеру. На приглашение Разумовского Эйлер ответил отказом: его не могла привлекать перспектива снова попасть «под начало» Шумахера. По-видимому, и всесильный академический советник Шумахер не особенно сочувственно отнесся к проекту возвращения Эйлера, так как ему было бы трудно обходиться со знаменитым теперь математиком с той же бесцеремонностью, с какой он привык обращаться со всеми прочими членами Академии.

Однако вскоре обстановка в Берлине начала не удовлетворять Эйлера. В 1743 г. он писал: «Я замечаю, что склонность к изящной литературе начинает здесь более и более брать верх над математикою, так что у меня является опасение, что моя личность скоро станет здесь лишнею».

Дело в том, что Фридрих II, любивший показать себя просвещенным монархом и почитателем наук и искусств, мало разбирался в ценности математического анализа и

¹ П. П. Пекарский, История Академии наук, т. I, 1870, стр. 259.

ценил Эйлера только с точки зрения практических приложений математики. Чтобы убедить Фридриха в пользе дифференциального исчисления, Эйлер даже написал интересную заметку об этом предмете. С другой стороны, Эйлер не умел играть роль придворного собеседника и Фридрих находил его скучным. Кроме того, в то время религия не была в моде при берлинском дворе. Фридрих II, считавший себя «вольнодумцем» и переписывавшийся с Вольтером, говорил, что от Эйлера «попахивает попом». Эйлер действительно был религиозным человеком. Высокоразвитое в Эйлере чувство собственного достоинства, его упорство в отстаивании своих взглядов, деловые разногласия по вопросам, касавшимся Берлинской Академии наук, — все это из года в год ухудшало отношения между ученым и королем.

После смерти Мопертюи Эйлер несколько лет фактически возглавлял Берлинскую Академию наук и был обижен тем фактом, что Фридрих II не нашел нужным назначить его на пост президента. Когда же до Эйлера дошли слухи, что Фридрих II собирается пригласить на этот пост знаменитого французского математика и философа Даламбера (1717—1783), то Эйлер твердо решает покинуть Берлин. Следует сказать, что вначале отношения между двумя математиками были довольно прохладны, их взаимное неудовольствие нашло свое отражение в письмах обоих к Лагранжу. Поэтому Эйлер боялся враждебного к нему отношения со стороны Даламбера, но в этом он сильно ошибся: если Фридрих II не понимал всего значения Эйлера для науки, то Даламбер ценил Эйлера очень высоко и делал все возможное, чтобы убедить Фридриха II в важности работы Эйлера в Берлинской Академии наук. Это видно из писем Даламбера к Эйлеру от 29 июня 1763 г., 14 и 20 августа того же года, от 16 марта и 25 июня 1764 г., от 28 апреля 1766 г. Приведем для примера несколько мест из этих писем; так, 29 июня 1763 г. он пишет: «Хотя мне не остается и месяца пробыть в этой стране, однако я не могу удержаться, чтобы не сочувствовать ей и особенно не жалеть Академии, если она будет иметь несчастье потерять Вас. Что до меня касается, когда бы мне пришлось остаться здесь, то я бы сделал все на свете для удержания Вас. Решились ли Вы окончательно? Вы должны быть уверены, что я уже говорил и буду еще говорить о Вас королю со всем уважением, которого Вы заслуживаете».

те». В письме от 20 августа 1763 г. мы читаем: «Я совершенно убедил его величество, что в Вас Академия понесет невознаградимую потерю, которая нанесет удар славе короля. Я полагаю, еще до моего отъезда поручить его вниманию Ваши интересы».

В результате Фридрих II на все прошения Эйлера об отставке долго отвечает решительным отказом (официально от поста директора математического класса Берлинской Академии Эйлер отказался в конце ноября 1765 г.), наконец, 2 мая 1766 г. сухой и лаконичной запиской Фридрих II уведомляет о своем разрешении уехать в Россию. Эйлер, между прочим, в своих прошениях об увольнении опирался на свои права швейцарского гражданства.

9 июня 1766 г. Эйлер со своей семьей покидает Берлин, где он прожил 25 лет в полном блеске своей славы.

Свою досаду по поводу отъезда великого математика король выразил следующей «остротой» в своем письме к Даламберу от 25 июня того же года: «г. Эйлер, до безумия любящий Большую и Малую Медведицу, приблизился к Северу для большего удобства к их наблюдению. Корабль, нагруженный его X, X, его K, K, потерпел крушение — все пропало, а это жалко, потому что там было чем наполнить шесть фолиантов статей, испещренных от начала до конца цифрами. По всей вероятности, Европа лишится приятной забавы, которая была бы ей доставлена их чтением».

Место Эйлера в Берлине занял Лагранж, на которого указал Эйлер, как на наиболее желательного своего преемника. В связи с этим вскоре после отъезда Эйлера Фридрих II цинично заявил, что доволен обменом криеого математика на математика с двумя глазами. Все это показывает нам, как мало ценило прусское правительство научные заслуги Эйлера.

Совсем другим было отношение русского правительства. Когда о желании Эйлера вернуться было доведено до сведения Екатерины II, она тотчас приказала пригласить Эйлера возвратиться в Петербург в Академию, где он будет управлять математическим классом, исполнять звание конференц-секретаря и получать жалованье 1800 рублей. Сыну его было обещано место ординарного академика с жалованьем 600 рублей в год, на проезд же обоим было предложено 500 рублей. В конце этих предложений было добавлено, что Эйлер, если ему не нравятся такие

условия, может сообщить свои, лишь бы только не медлил своим приездом в Петербург. Предложение Екатерины II было датировано 26 мая 1763 г.

Не следует думать, что столь хорошее отношение Екатерины II к Эйлеру диктовалось только попечениями о славе и развитии науки. Главную роль играли здесь личные мотивы: являясь подобно Фридриху II монархом эпохи «просвещенного абсолютизма» и соревнуясь с ним в заботах о просвещении, Екатерина II старалась прослыть «философом на троне», для чего материально поддерживала французских энциклопедистов, приглашала их в Россию, вела переписку с Вольтером, Дидро и другими руководителями «просвещенного общественного мнения»¹. На самом деле, Екатерина II, этот, по словам А. С. Пушкина, «Тартюф в юбке и короне», стремилась использовать популярность идей французских просветителей для обоснования и осуществления задачи укрепления крепостнического государства.

¹ К. Маркс и Ф. Энгельс, Сочинения, т. 13, ч. 1, стр. 159—160.





ВТОРОЙ ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПЕРИОД ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЭЙЛЕРА (1766—1783)

Деятельность Эйлера по прибытии в Россию

После заявления об уходе из Берлинской Академии Эйлер (24 декабря 1765 г.) обращается прямо к русскому канцлеру, графу Воронцову, с просьбой о принятии его в Петербургскую Академию. В результате имевших место переговоров между русским правительством и Эйлером последнему были обеспечены в русской столице исключительные материальные условия: сам Эйлер получил особо высокий оклад в 3000 рублей в год, его жене была обещана солидная пенсия на случай кончины мужа, старший его сын Иоганн-Альбрехт получил в Академии кафедру физики с окладом в 1000 рублей в год, второй и третий сыновья были устроены в медицинском и артиллерийском ведомствах. Кроме того, Эйлеру было выдано 8000 рублей на покупку дома на Васильевском острове, неподалеку от Академии.

Екатерина II рассчитывала на помощь Эйлера в реорганизации Академии. В письме к канцлеру Воронцову от 6 января 1766 г. она писала: «Необходимо также уведомить г. Эйлера, что до его приезда я не предпринимаю никаких перемен в Академии на тот конец, чтобы лучше уговориться с ним об улучшениях, о которых мне представлены разные неудовлетворительные предположения».

17 июля 1766 г. Эйлер прибыл в Петербург и был тотчас представлен Екатерине II. Что касается проектов реорганизации Академии, то следует заметить, что в то



сударственном архиве сохранился написанный по-французски проект по улучшению положения Академии наук, видимо, принадлежавший Эйлеру. Однако проект этот не был принят.

Впервые, после приезда, на заседании академической конференции Эйлер присутствовал 4 августа 1766 г. Вскоре после приезда в Петербург его постигло большое несчастье: болезнь второго, левого, глаза закончилась образованием катаракты, в результате Эйлер ослеп совершенно.

С потерей зрения трудоспособность Эйлера не пала, а даже возросла. Мальчик-портной, приехавший с Эйлером из Берлина, не имевший математического образования, сделан был писцом, которому Эйлер продиктовал свои «Элементы алгебры», или «Универсальную арифметику» в двух томах («Anleitung zur Algebra»). Это сочинение было издано сначала на русском языке в 1768—1769 гг. (перевод П. Иноходцева и И. Юдина с немецкой рукописи Эйлера), затем появился немецкий оригинал (1770), а в 1774 г. появился французский перевод с приложениями Лагранжа, касающимися диофантова анализа. Это сочинение выдержало около 30 изданий на 6 европейских языках (из них трижды по-русски). Удивляет ясность и стройность этого произведения; дух открытий царит в этом совсем элементарном курсе, содержащем, среди прочих новостей, изложение диофантова анализа (Л у з и н). По словам А. П. Юшкевича, «отбор материала, его расположение и метод изложения оказали решающее влияние на последующее преподавание алгебры в средних школах всего мира». Это было первым сочинением, продиктованным Эйлером.

После приезда академика В. Л. Крафта, который принимал участие в оптических исследованиях Эйлера, Эйлер издает свою «Диоптрику». Три объемистых тома ее появляются в свет один за другим на протяжении трех лет (1769, 1770, 1771). В «Диоптрике» Эйлер объединяет в одно целое все написанное им за 30 лет по теории оптических инструментов. В первом томе изложена общая теория этой науки, которая до Эйлера просто не существовала. Второй и третий томы «Диоптрики» содержат правила наилучшего расчета рефракторов, рефлекторов и микроскопов. «Вычисление аберрации, проистекающей от сферичности стекол, есть настоящий шедевр математического анализа. Можно изумляться искусству, с которым математический анализ в руках Эйлера дал ответ на самые

жгучие вопросы о наиболее выгодных качествах инструмента: наибольшей яркости изображения, наибольшем поле зрения, наименьшей длине инструмента, наибольшем увеличении и о числе окуляров» (Л у з и н). Словом, здесь решалась слепым Эйлером проблема наилучшего видения во всем объеме.

Эйлер посвятил оптике около 60 оригинальных работ и по праву считался «самым выдающимся оптиком своего времени» (В а в и л о в).

По расчетам Эйлера и его ученика Н. Н. Фусса в 1774 г. русскими мастерами в Академии наук при участии И. П. Кулибина была предпринята первая попытка изготовить ахроматический трехлинзовый объектив (диаметр линз 3,5 мм) микроскопа. Первый же ахроматический объектив «телескопического» (с длинным тубусом) микроскопа был сконструирован петербургским академиком Ф. Эпинусом около 1784 г. (изготовлен в 1805—1808 гг.).

В то время как публиковались томы «Диоптрики», Эйлером были подготовлены к печати и сданы в набор три тома «Писем к немецкой принцессе», три тома «Интегрального исчисления», два тома «Элементов алгебры» (о которых мы уже говорили), «Навигация», «Новая теория Луны» (1772), «Вычисление кометы 1769 г.», «Вычисление затмения Солнца и прохождения Венеры», которое было в этом же году, и много других мемуаров.

«Письма к принцессе». Мироззрение Эйлера

«Письма к одной немецкой принцессе о различных вопросах физики и философии» («Lettres à une Princesse d'Allemagne sur quelques sujets de Physique et de Philosophie») Эйлера появились на французском языке в 1768—1772 гг. Они сразу же были переведены на русский язык учеником Эйлера С. Я. Румовским, затем появилось французское издание и немецкий перевод. Эти письма имели большое значение: с одной стороны, они излагали философские взгляды Эйлера, его мироззрение, с другой стороны, являлись очерком состояния наук в то время. Написанные мастерской рукой, они были весьма популярны в широких кругах интеллигенции; ведь это единственное, кроме «Универсальной арифметики», сочинение Эйлера, доступное многим нисколько не посвященным в тайны математики, но представляющее интерес и для ученых вслед-

ствие глубоких ясных мыслей, рассеянных во всем сочинении. Произведение это выдержало около 40 изданий на 9 европейских языках, в том числе три издания на русском языке.

Приведем здесь общую характеристику эйлеровых «Писем», данную М. И. Сухомлиновым в его «Истории Российской Академии» (вып. 2, 1875, стр. 123—129). «В письмах Эйлера находится превосходная картина умственной жизни того времени; содержание их весьма разнообразно: в них сообщается много в высшей степени важных и любопытных данных и соображений, относящихся к области наук естественных, математических и философских. С необычайной простотой и наглядностью Эйлер объясняет понятия пространства, скорости, свойства звука, света и т. п., приводя множество общедоступных примеров и доказательств. Система мира, законы движения светил, явления электричества и целая вереница научных вопросов затронуты в длинном ряде беглых, но мастерских очерков. В области философии Эйлер говорит о предметах, имевших особенное значение и живой интерес для мыслящих людей того времени: о духовном и физическом начале в человеке, о свободной воле, о существенных особенностях господствовавшей тогда философии Лейбница и Вольфа и т. д. Обнимая своей гениальной мыслью всю совокупность сил и законов природы, насколько это возможно для человеческого ума, Эйлер не сочувствует односторонним ученым, отрицающим все, что не укладывается в узкие рамки их специальности, и смеется над мечтателями, самонадеянно толкующими о вещах, далеко превышающих их скудное разумение. Есть люди, говорит он, которые кричат, что глаз человеческий устроен из рук вон плохо, и вообще недовольны тем, что при мироздании не обращались к ним за советом: тогда бы многое было создано не в пример лучше. Но оказывается, что если устроить глаз так, как желают эти умники, то вместо ясных изображений получались бы на сетчатой оболочке какие-то пятна, и человек не мог бы ничего разглядеть... Неверность суждений и выводов, замечает Эйлер, часто происходит оттого, что требуют одного только рода доказательств и остаются глухи и слепы ко всем другим. Этот недостаток обыкновенно встречается у односторонних химиков, анатомов и физиков, которые все ушли в свои опыты. Все то, что они не могут разложить в ретортах или разрезать но-

жом, не производит на их ум никакого впечатления. Сколько бы им ни говорили о свойствах и существовании души, они соглашались только с тем, что поражает их внешние чувства...»

Мы не можем полностью принять приведенную оценку «Писем»: в мировосприятии Эйлера многое нам чуждо; так, не подлежит сомнению глубокая религиозность Эйлера, он признавал всемогущего творца, бессмертие души, абсолютную свободу воли, земной мир как лучший из возможных, загробную жизнь и прочие атрибуты ортодоксального христианства вплоть до геенны огненной для грешников. В этом отношении он был далек от передовых идей своей эпохи и свежий ветер свободомыслия французских материалистов XVIII века не коснулся его. В 1747 г. Эйлер даже издал трактат в защиту христианства против атеизма; мы имеем в виду его «Защиту божественного откровения от нападков свободомыслящих» («*Rettung des göttlichen Offenbahrung gegen die Einwürfe der Freigeister*»). Он даже строил новые «доказательства» бытия бога. Увлечение Эйлера теологическими спекуляциями — причина отрицательного отношения к нему, как философу, его знаменитых современников — Даламбера и Лагранжа.

По своему мировоззрению Эйлер был довольно ярко выраженным дуалистом: он признавал существование двух субстанций: духовной и материальной.

Однако если в вопросах религии Эйлер был только сыном своего века, то в своей натурфилософии он стоял на позициях естественнонаучного материализма и свою веру он резко отделял от своей творческой деятельности. Он считал, что «чем меньше вмешивать бога и божественные силы в светские дела, в том числе и в науку, тем лучше и для науки, и для авторитета бога».

В «Письмах» Эйлер неоднократно утверждал неоспоримость существования объективного мира, независимого от нашего сознания, считая, что всякого сомневающегося в существовании внешнего мира «приняли бы за сумасшедшего...но как только философ выступает с такими мнениями, он хочет, чтобы восхищались его умом и его познаниями».

В «Письмах» мы встречаем деление всех философов на три категории: идеалистов, эгоистов (следует понимать — солипсистов) и материалистов (следует понимать — вульгарных материалистов).

Гносеологические вопросы решались Эйлером в основном в материалистическом аспекте. В процессе познава-

ния, по Эйлеру, важнейшая роль принадлежит особой способности интеллекта, называемой абстракцией. Путем абстракции получают понятия, выражающие общие и притом характерные признаки множества индивидуальных предметов. Этой способности интеллекта образовывать понятия мы обязаны всеми нашими знаниями. Понятия человека получены, по мнению Эйлера, не из его духа, не врождены ему, не подарены богом, а образованы путем отвлечения от реальных предметов. Математические понятия не представляют исключения: число, по Эйлеру, есть абстракция от количественных отношений реального мира: «увидев два или три человека или других объекта, интеллект образует понятие «двух» или «трех», которые больше не связываются с этими людьми». Подобным же образом возникают понятия геометрии.

По Эйлеру, основными характеристиками материального тела являются протяженность, инерция и непроницаемость; геометрия имеет своим предметом изучение первую из названных объективных характеристик тела. «Известно, что прохождение есть подлинный объект геометрии, — говорит Эйлер, — где тела рассматриваются постольку, поскольку они протяженны, абстрагируясь от непроницаемости и инерции».

Материалистическое трактование предмета математики было характерным для большинства русских и французских математиков того времени и Эйлер в этом смысле не представлял исключения.

Эйлер ясно сознает все громадное значение абстракций для науки, для познания мира, пророчески считая, что «заслуга каждой науки будет тем более великой, чем более она восходит к более общим понятиям, т. е. более абстрактным».

В «Письмах» Эйлер резко выступал против эмпиризма, обожествления фактов, характерного для неумеренных ньютонианцев. Великий Ломоносов являлся единомышленником Эйлера в этом отношении.

В своем учении об источниках знания Эйлер различает истины трех родов: истины чувств, истины разума и истины веры. Следует отметить, что у Эйлера, так же как, например, у Аристотеля и Локка, наряду с внешними чувствами, дающими знание, фигурирует разум, духовное начало.

В таких произведениях, как «Механика» (1736), «Теория движения твердых тел» (1765) и особенно «Письма»,

раскрываются взгляды Эйлера на основные понятия механики: Эйлер принимает концепцию ньютоновского абсолютного пространства, в котором движется материя. Однако он отступает от динамизма ньютонианцев в вопросах о внешних началах движения. Признавая, что «силы являются внешней причиной» движения, так как тела сами по себе не могут изменить свое состояние, причиной этих сил Эйлер считает инерцию в сочетании с непроницаемостью.

Во времена Эйлера в механику проникла теория таинственного мистического дальнего действия. Дело в том, что ньютоновская теория тяготения не могла объяснить, почему небесные тела, находясь на грандиозных расстояниях, отделенные друг от друга пустым пространством, тяготеют друг к другу. Эйлер же считал, что если наделить протяженную материю Декарта свойствами инерции и непроницаемости, то без теории нематериального дальнего действия вполне можно обойтись.

В своих «Письмах» Эйлер с несокрушимой энергией обрушивается на модную в его эпоху систему объективного идеализма Лейбница, систему предустановленной гармонии, неотъемлемой составной частью которой было учение о монадах. Эта система давала философское обоснование упомянутому учению о дальнем действии через пустоту. Ломоносов также поддерживал Эйлера и в его борьбе против «шершней-монадистов».

Против идеализма Лейбница и Вольфа направлена и работа Эйлера «Размышления о пространстве и времени» («*Reflexions sur l'espace et le temps*», 1748, напеч. в 1750). Лейбниц и Вольф, а раньше и Беркли утверждали, что такие понятия, как «пространство» и «время», мнимы и лишены тени какой-либо реальности. Выступая против идеалистов, Эйлер отстаивал объективную реальность пространства и времени и считал абсурдным, чтобы законы, управляющие движением реальных тел, могли бы основываться на вещах (имеются в виду пространство и время. — В. К.), существующих в нашем воображении. Время и пространство, говорит Эйлер, — «реальные вещи, которые существуют даже вне нашего воображения»

В заключение отметим, что, хотя Эйлер не создал оригинальной философской системы, однако пытался ответить на основные философские вопросы, волновавшие его современников.

Теория Луны

Эйлеру удалось найти решение важнейшей для мореплавания задачи — задачи определения долготы.

Дело в том, что после открытия Америки, пути в Индию, кругосветного плавания Магеллана мореходство было выведено из бассейна Средиземного моря и от побережий Европы на простор океанов. Возникла настоятельная необходимость уметь определять место корабля в море, т. е. находить его географические координаты, широту и долготу. Широту места умели определять с достаточной для практических целей точностью, пользуясь секстантом, изобретенным Гарлеем в 1730 г., в то время как для определения второй координаты — долготы — никаких методов не было, если не считать наблюдений таких редких явлений, как лунные затмения, которыми для этой цели пользовались еще в древности.

Задача определения долготы корабля на море была признана столь неотложной, что по предложению Ньютона английский парламент в 1714 г. назначил премию в 20 000 фунтов стерлингов (это около 2 миллионов рублей золотом) тому, кто изобретет способ определения долготы на море с точностью до $\frac{1}{2}$ градуса.

В это время теоретически были известны два пути для решения вопроса. Первый путь, рекомендованный еще Апианом (1495—1552) в его «Космографии», состоял в следующем. Луна благодаря своему обращению вокруг Земли быстро изменяет свое местоположение, поэтому расстояние этого светила от определенных неподвижных звезд, меняющееся непрерывно с минуты на минуту, может служить для сравнения местных времен и, таким образом, для определения долготы. Для этого требуются лишь таблицы, которые давали бы для определенного места Земли расстояние Луны от неподвижных звезд для каждого дня, часа и минуты. Если потом в месте, где желают определить долготу, соответствующее расстояние Луны от данной звезды наблюдается в другое время дня, то из разницы этих времен можно вычислить разницу долгот.

Другой путь, предложенный Геммой Фризиусом (Gemma Frisius) (1508—1555), основывается на употреблении точных хронометров, которые во все время путешествия

указывают местное время пункта, служащего исходной точкой при определении долготы.

Ясно, что для составления таблиц движения Луны нужно было знать точный закон этого движения (на основании одних только наблюдений составить таблицы не удавалось, погрешности по отношению к ее местоположению составляли до $1/2$ градуса, что соответствовало погрешности в долготе в целый час, т. е. примерно 1000 километров в средних широтах). Движение же Луны было очень сложным, подверженным ряду неправильностей. Надо было исходить из взаимного притяжения Луны, Земли и Солнца. Решение такой задачи трех тел явилось лучшей проверкой недавно сформулированной теории тяготения Ньютона. В 1747 г. Даламбер представил Парижской Академии решение задачи. В этом же году появилось решение Клеро. Эйлер также работал над этой проблемой (на основании своих вычислений он еще в 1746 г. выпустил свои таблицы «Новые исправленные таблицы для расчета положений Луны», Берлин, «*Novae et correctae tabulae ad loca Lunae computanda*»). Интересно, что для скорости лунного апогея у них получалась величина меньше действительной. Это повело к поправкам, и в 1751 г. Клеро получил премию Парижской Академии уже за исправленное решение, которое в полном виде появилось в 1765 г. в его «Теории Луны» («*Théorie de la lune*»). Даламбер изложил свою теорию в «Исследовании некоторых важных вопросов системы мира», 3 тома, Париж, 1754—1756 («*Recherches sur plusieurs points importants du système du monde*»).

Эйлер переработал и видоизменил теорию Клеро и придал ей вид более удобный для составления таблиц движения Луны. Теория Эйлера была опубликована в 1753 г. в сочинении «Теория движения Луны, содержащая все неравенства тел, с добавлением» («*Theoria motus lunae exhibens omnes corporum inaequalitates cum additamento*», Berlin). Именно теория Эйлера получила наибольшее практическое применение, так как она послужила основанием для составления геттингенским астрономом Тобиасом Майером (Mayer) знаменитых лунных таблиц, годившихся для определения долгот с достаточной точностью («Новые таблицы движений Солнца и Луны»—«*Novae tabulae motuum Solis et Lunae*», 1752). Вдова Майера получила часть премии английского парламента в размере 3000 фунтов, Эйлер за свои формулы получил 300 фунтов.

Рассмотрим теперь, каковы были успехи на втором пути для определения долгот. Довольно точный хронометр был изготовлен в 1758 г. часовых дел мастером Джоном Гаррисоном. Гаррисон получил в 1765 г. половину суммы, назначенной парламентом, т. е. 10 000 фунтов стерлингов. Чтобы колебания температуры не могли влиять на длину маятника, Гаррисон изготовил по методу Грегора (Graham, 1675—1751) компенсационный, или уравнильный, маятник, соединив для этой цели металлы с различными коэффициентами расширения (латунь и железо).

Способ определения долгот по лунным расстояниям вошел во всеобщее употребление и удержался в практике мореплавания примерно 100 лет или несколько более, пока изобретенный Гаррисоном морской хронометр был настолько удешевлен и усовершенствован, что вошел во всеобщее употребление. В наше время подача сигналов по радио позволяет даже при помощи несовершенного хронометра всегда определить довольно точно гринвичское время (долготы считаются от гринвичского меридиана).

Но вернемся к работам Эйлера по теории Луны.

В 1770 и 1772 гг. Парижская Академия наук избрала темой для соискания премий усовершенствование теории Луны, и Эйлер получил обе эти премии за работы: «Теория Луны и, в частности, векового уравнения» (1770) («Théorie de la lune et spécialement sur l'équation séculaire») и «Новые изыскания движения Луны» (1772) (Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la lune). В написании этих работ принял участие его старший сын.

В 1772 году Эйлер издает новую теорию движения Луны, которая позволяла с меньшей, чем прежде, ошибкой производить определение долгот на земной поверхности, изложенную в сочинении «Теория Луны, обработанная новым методом вместе с астрономическими таблицами, с помощью которых можно легко вычислить положение Луны для любого времени», Петербург («Theoria motuum Lunae nova methodo pertractata, una cum tabulis astronomicis, unde ad quoduis tempus loca Lunae expedite computare licet», Petrop). Он переобосновал всю теорию Луны с помощью своего старшего сына, профессоров Крафта и Лекселя и довел изыскания вплоть до построения новых

таблиц, присоединенных к основному труду. В этой своей работе Эйлер нашел способ учесть некоторые неравенства в движении Луны, которые ему были недоступны в первой его теории. В математическом смысле вторая теория представляла больше интереса и имела огромное значение как базис для дальнейших усовершенствований. Успех этой работы был огромным. Д. Бернулли писал сыну Эйлера: «Я приношу Вам тысячу поздравлений и тысячу Вашему отцу с поразительным успехом, которого этот несравненный математик добился в конечном счете в теории Луны. Признаюсь, что такой полный успех всегда казался мне невозможным... Какая слава для него, для его потомков, для Академии, для нашего века!» Работа Эйлера была настолько выдающейся, что, по словам академика А. Н. Крылова, он в ней опередил свой век на 100 лет: новейшие лунные теории американских астрономов Дж. Хилла и Э. Брауна являются в некотором смысле возвратом к методам Эйлера. Дело в том, что притяжение Солнца оказывается столь значительным, что даже в первом приближении лунную орбиту нельзя считать эллиптической. Здесь для первого приближения приходится брать гораздо более сложную, так называемую промежуточную орбиту, т. е. орбиту, уже включающую часть влияния притяжения Солнца. Наилучший путь получения промежуточной орбиты для изучения движения Луны и был указан Эйлером в его работе 1772 г. Его идеи были развиты упомянутыми астрономами Хиллом и Брауном. Сходимость бесконечных рядов, положенных Хиллом в основу теории движения Луны (1877), была доказана знаменитым русским математиком А. М. Ляпуновым (1896). В 1934 г. «Новая теория Луны» Эйлера была переведена на русский язык А. Н. Крыловым.

Солнечный параллакс

Как старейший академик, как ученый с мировым именем, Эйлер во второй период своей жизни в Петербурге пользовался огромным влиянием. Всякое большое предприятие Академии требовало его участия, таким была, например, организация наблюдений над прохождением Венеры по солнечному диску в 1769 г., предпринятая для определения солнечного параллакса. Формально во главе организационных работ стоял ученик Эйлера С. Я. Ру-

мовский, но вся сложная переписка, усовершенствование метода наблюдений и обработка их, привлечение некоторых иностранных наблюдателей, закупка инструментов — все это исходило от Эйлера. В вычислениях благодаря Эйлеру и под его, как выразился Румовский, «предводительством» были применены все лучшие достижения тогдашнего математического анализа. Итоги этой грандиозной русской экспедиции дали в среднем для солнечного параллакса $8'',62$ (в другом отчете $8'',67$). Этот блестящий результат вызвал огромный интерес за границей, и он действительно представляет большое достижение. Достаточно указать, что он гораздо ближе к истинному значению параллакса, принимаемому в настоящее время, именно $8'',79$, чем значение немецкого астронома Энке, выведенное им уже в XIX веке на основании наблюдений над прохождением Венеры через солнечный диск 1761 и 1769 гг. ($8'',5776$). Таким образом, астрономия обязана Эйлеру большим прогрессом, вытекающим из определения параллакса Солнца со значительной точностью.

Общее количество работ Эйлера по астрономии составит в издающемся в Швейцарии полном собрании сочинений десять томов. Эти работы относятся как к теоретической, так и к практической астрономии, но особенно многочисленны работы Эйлера по теоретической астрономии, и это не удивительно, так как именно в этой области новосозданный математический анализ мог найти себе наиболее плодотворное применение. Работы Эйлера, а также и Ломоносова составили эпоху в развитии не только русской, но и мировой астрономии и выдвинули Россию на одно из первых мест в этой области наук.

Пожар. Потеря зрения

В этот период своей интенсивной работы Эйлер переживает новое бедствие: в 1771 г. (22 мая) пожар уничтожил его дом почти со всем имуществом. Самогó великого ученого вынес из горевшего дома живший в нем ремесленник — швейцарец Петр Гримм. Благодаря распорядительности удалось спасти от пожара большую часть его рукописей. Русское правительство снова пришло на помощь Эйлеру и выдало ему единовременное пособие в размере 6000 рублей для постройки нового дома.

Вскоре, в том же году (15. IX), известный венский окулист Венцель удачной операцией снял с левого глаза катаракту и вернул Эйлеру утраченное зрение. При этом на некоторый срок Эйлеру было запрещено работать, однако для такого человека, как Эйлер, это было выше сил, он не выполнил предписаний врача и вторично, уже навсегда, потерял зрение и притом в страшных мучениях.

Простого смертного такая утрата, конечно, сломила бы совершенно, лишив трудоспособности. Не то было с Эйлером: его изумительная память и пламенное воображение еще более усилились от концентрации ума, который теперь не отвлекался никакими внешними впечатлениями. Эйлер в этом отношении подобен великому Бетховену, который в последние двадцать лет своей жизни, лишившись слуха, неослабно продолжал писать свои волшебные творения, которые живут и в наши дни.

Эйлеру приходилось пользоваться чужими глазами: оба его сына (и прежде всего старший Иоганн-Альбрехт), В. Крафт, А. Лексель, Н. И. Фусс и М. Е. Головин представляли в его распоряжение все свои силы. Однако впоследствии, хоть в очень незначительной степени, Эйлер все же пользовался зрением и сам, как это видно из письма Иоганна III Бернулли (1744—1807), племянника Даниила Бернулли, посетившего Петербург летом 1777 г. В этом письме Иоганн III пишет: «Здоровье его (Эйлера. — В. К.) довольно хорошо, и этим он обязан очень умеренному и правильному образу жизни. Зрением, по большей части утраченным, а одно время вовсе потерянным, он, однако, теперь лучше пользуется, чем многие воображают! Хотя он не может узнать никого в лицо, читать черного на белом и писать пером на бумаге, однако пишет на черном столе свои математические вычисления мелом очень ясно и порядочно в обыкновенную величину. Потом они вписываются в большую книгу одним или другим из его адъютантов Фуссом или Головиным (чаще первым из них). И из этих-то материалов составляются под его руководством статьи. Таким образом, в продолжение пяти лет, которые прожил г. Фусс в доме Эйлера, приведено к окончанию 120 или 130 статей»¹.

¹ «Русская старина», т. 132, ст. Саткевича, 1907, стр. 496.

Продуктивность творчества Эйлера

Несмотря на все волнения, связанные с потерей зрения, пожаром и смертью жены (1773), несмотря на преклонный возраст, Эйлер продолжает интенсивно творить более того — его научная продуктивность не падает, как обычно с возрастом, а возрастает: время со своим разрушающим влиянием как бы отступает перед силой его гения. Это видно из следующей таблицы трудов Эйлера, составленной Н. И. Фуссом приблизительно по десятилетиям:

Годы	Число трудов
с 1727 по 1733	24
с 1734 по 1743	49
с 1744 по 1753	125
с 1754 по 1763	99
с 1764 по 1772	104
с 1773 по 1782	355
<hr/>	
Всего:	756

Как видно из этой таблицы, почти половина написанного Эйлером падает на последнее десятилетие. Следует при этом отметить, что эти данные не вполне точно отражают с количественной стороны научное наследие Эйлера: сейчас известно значительно большее число его произведений, оно равняется, согласно библиографическому справочнику Энестрема¹, 886. Подсчет Энестрема показывает, что в период первого пребывания Эйлера в России (1727—1740) им написаны 102 работы, за годы его службы в Берлине (1741—1766) — 375 работ, а за годы вторичного проживания в Петербурге (1767—1783) — 409 работ. В среднем годовом выражении это дает для первого периода несколько больше 7 работ, для второго — несколько больше 14, а для последнего — 24 работы.

Отдельно следует упомянуть его письма (около 3000), часто представлявшие краткие научные сообщения.

Общий объем научного наследия Леонарда Эйлера кажется нам непостижимым: подсчитано, что лишь для того, чтобы переписать труды его при ежедневной восьмичасовой работе, понадобилось бы 50 лет.

Швейцарское общество естествоиспытателей приступи-

¹ G. Eneström, Verzeichniss der Schriften L. Eulers, Leipzig, 1910—1913.

ло к изданию полного собрания сочинений Л. Эйлера (Орега оптіа) в 75 томах, к 1956 г. вышло 40 томов.

По своему составу произведения Эйлера приблизительно распределяются следующим образом: 40% работ посвящено анализу, арифметике и алгебре, около 30% — механике и физике, около 20% — геометрии, примерно 10% — астрономии, причем большая часть исследований по геометрии и естествознанию состоит в применении к их задачам методов математического анализа.

Для характеристики трудоспособности Эйлера, которую можно назвать феноменальной, приведем такой факт: Эйлер получил от В. Орлова, директора Петербургской Академии, довольно странное на наш взгляд предложение оставить после своей смерти столько мемуаров, чтобы наполнить ими Actes нашей Академии наук в течение 20 лет. Как говорит Н. И. Фусс¹, Эйлер обещание дал и слово сдержал, для чего Эйлер в течение семи лет представил 70 мемуаров и оставил после смерти в готовом виде около 250 мемуаров. На самом деле, печатание неопубликованных при жизни Эйлера мемуаров происходило не 20 лет после его смерти, а продолжалось до 1862 г., что в четыре раза перекрывало данное им обещание.

Теория вероятностей

Занимался Эйлер и теорией вероятностей, но интересовался в ней только узким кругом задач. Общие нарекания в Германии на кассы страхования и обвинения в пристрастности то к предпринимателям, то к вкладчикам побудили Эйлера найти способ вести кассы так, чтоб они не обижали ни тех, ни других. Он мог это сделать лишь в той мере, в какой это позволяло несовершенство таблиц смертности. Эйлер положил начало работам по страховому делу и в России. Его ученик Н. И. Фусс издал, в частности, «Пояснение о публичных учреждениях в пользу вдов и покойных лиц, с описанием нового рода пожизненных рент... Вычислены Н. Ф. под руководством г. Леонарда Эйлера» (Спб., 1776). Занимался Эйлер и задачами, связанными с теорией азартных игр, теоретическими вопросами демографии и теорией ошибок наблюдений.

¹ С. Н. Чернов, Леонард Эйлер и Академия наук Сб. «К 150-летию со дня смерти Эйлера», 1933, стр. 224.

Работа Эйлера в комиссиях Академии наук

В первое время по приезде Эйлер состоял членом Академической комиссии, а также был деканом и старейшиной Академии. Комиссия была создана в 1766 г. взамен упраздненной Канцелярии Академии, однако обеспечить автономию Академии эта комиссия не могла, так как фактически вся власть в Академии была сосредоточена в руках ее директора, каковым был назначен В. Г. Орлов. В 1775 г. Орлова на посту директора Академии сменяет С. Г. Домашнев, грубый деспот, восставший против себя почти всю Академию и вызвавший своим поведением открытый протест академиков. Что касается Эйлера, то он вскоре оставил комиссию и участие в управлении общеакадемическими делами, которым ранее уделял много энергии и внимания. Причиной было то, что Эйлер являлся решительным противником того бюрократического режима в Академии, который установили Орлов и в особенности Домашнев. Мы уже говорили, что проект переустройства Академии, предложенный Эйлером, не был принят. Проект этот предоставлял Академии некоторую автономию. В период управления Домашнева Эйлер все время оставался в тени и глухой оппозиции, которая только очень редко прорывалась каким-нибудь его бурным выступлением против директора.

В это время в Академии укрепились традиции, начало которым положил Ломоносов своей борьбой за передовую национальную науку. Верные этим традициям, академики открыто заявили о своем нежелании подчиняться Домашневу. Борьба академиков с Домашневым окончилась их победой и «просвещенная» царица вынуждена была уволить Домашнева. Место директора заняла кн. Е. Р. Дашкова. Общее положение дел в Академии при Дашковой значительно улучшилось, однако она оказалась для правительства феодально-крепостнической монархии слишком либеральной, в 1794 г. она была отстранена от должности, а с воцарением Павла I отправлена в ссылку.

Отношение Е. Р. Дашковой к Эйлеру было совсем другим, чем у ее предшественников. Она демонстративно подчеркивала свое уважение к нему и просила у него советов по управлению Академией. Интересен рассказ Дашковой о вступлении на новую должность. Назначена она была на пост директора Академии наук 24 января

1783 года. Рассказ этот рисует нам образ жизни Эйлера в последний год его жизни. Вот он: «Я ознакомилась также с именами примечательных членов Академии и на другое утро, прежде нежели отправилась туда, посетила знаменитого Эйлера, который знал меня уже несколько лет и всегда оказывал мне особенное благорасположение. В негодовании на поступки Домашнева он совсем перестал ездить в Академию, разве когда представлялась возможность противодействовать заодно с другими вредным распоряжениям бывшего директора, о которых он не раз письменно представлял государыне. Этот ученый был, без сомнения, одним из первых математиков своего века. Сверх того, он был сведущ почти во всех науках, а сила его духа и постоянная деятельность так были необыкновенны, что он, даже потеряв зрение, вовсе не ослабил своих умственных трудов. С помощью г. Фусса, мужа его внучки, который читал ему вслух и писал по его диктовке, он готовил множество материалов, служивших к обогащению изданий Академии, даже в продолжении многих лет после его смерти. Я просила его не оставлять меня в то утро, чтобы мне при первом вступлении моем в должность начальника ученого общества иметь некоторую опору в его соупутствии. Вместе с тем я обещала, что если ему неудобно или тягостно сопровождать меня, то я в случаях обыкновенных не буду его беспокоить. Моя просьба, казалось, польстила ему. Его проводил до моей кареты сын его, непременный секретарь академических заседаний, которого я также пригласила с собою. К нам еще присоединился внук его, на котором лежала обязанность вести знаменитого слепца. Вошедши в залу заседаний, я тотчас обратилась к собравшимся там профессорам и членам и изъявила сожаление о скудости собственных моих ученых заслуг, но сослалась на глубокое уважение, какое почитаю к науке, заметив, что самым верным залогом этого может служить присутствие г. Эйлера среди тех, которых я просила сопровождать меня при посещении Академии.

После этого краткого приветствия, я заняла свое место и увидела, что г. Штелин, профессор аллегории, как его звали, сел на кресло рядом с директорским. Этот человек, которого ученость, может быть, согласовалась с наименованием, его отличавшим, получил свой необыкновенный титул в царствование Петра III и вместе с тем произведен был в статские советники. Гордясь чином, соответствующим генерал-майорскому, он полагал, что имеет право на

первенство между членами Академии. Поэтому я, обратясь к Эйлеру, сказала: «Сядьте где вам угодно: какое место вы ни займете, ваше место везде будет первым». Эта неприготовленная дань его дарованиям произвела самое благоприятное действие — и не на одних его родственников. Между присутствовавшими профессорами не было ни одного (за исключением профессора аллегории), который бы не разделял их удовольствия и со слезами на глазах не отдавал справедливости заслугам и превосходству благородного старца». Через несколько дней, 10 февраля 1783 г. конференция, распределяя медали «В память торжественного открытия конной статуи Петра Великого» («*Sur l'inauguration de la statue équestre du Pierre le Grand*»), единственную большую медаль присудила Л. Эйлеру. Но это были уже последние месяцы жизни Эйлера.

Теперь отметим некоторые конкретные действия Эйлера по Академии.

Интересна попытка Эйлера провести публичное выступление не с речью или докладом, а с демонстрацией опытов. В 1778 г. он хотел поставить публично опыты по «магнетизму». Эйлер вел официальную переписку в качестве старейшины, рецензировал поступавшие в Академию научные статьи. Ему приходилось участвовать и в обсуждении, и испытании разнообразных проектов, приходивших в Академию из других учреждений или непосредственно в нее подававшихся. Так, в 1769 г. он принимал участие в рассмотрении проекта о лучшем устройстве школьного дела в империи и представил вместе с академиком — сыном Иоганном-Альбрехтом письменное мнение о нем. В 1776 г. он участвовал в качестве одного из экспертов в испытании модели одноарочного моста через Неву, проект которого был составлен знаменитым Кулибиным. Биограф последнего замечает, что Эйлер был единственным академиком, который помог Кулибину в вычислениях и затем с самого начала и до конца испытания оставался благосклонным к автору проекта: «Славный математик Эйлер проверил представленное Кулибиным трудное исчисление и, найдя его совершенно правильным, с примечаниями, чрезвычайно лестными для неученого математика, напечатал оное в «Комментариях» Академии наук». Несмотря на, казалось бы, достаточно авторитетное мнение Л. Эйлера, другие ученые «забавлялись» «на счет» Кулибина как до освидетельствования модели, так и во время его. Лишь полный

успех испытания «превратил в пасмурные» «веселые лица насмешников» и заставил «всех единогласно поздравить Кулибина с благополучным успехом».

Эйлер подготовил закон о мерах 1797 г. Этим законом была введена троичная система гирь, наиболее удобная, если гири класть на обе чашки весов. Как замечает И. Е. Деман, наша Родина этим законом дала, по-видимому, единственный пример пользования троичной системой. Об участии Эйлера в работах комиссии мер и весов сохранилось много документов. От Эйлера требовалось также дать заключение о качестве пожарного насоса; он назначался в комиссию для проверки «машинных дел подмастерья» в знании «машинного дела» и т. д.

Из других работ Эйлера по академической конференции надо отметить его участие в выработке тем для объявленных Академией премий.

Смерть Эйлера

В последние годы жизни Эйлер, если не считать потери зрения, обладал хорошим здоровьем, стал лишь слабеть слух. До самого дня смерти он сохранял полнейшую ясность мышления и всю мощь своего творческого дарования. Только несколько припадков головокружения в первых числах сентября (по старому стилю) 1783 г. были предвестниками его смерти. Они не помешали ему окончить сложное математическое вычисление полета аэростата. Это недавнее открытие занимало все умы Европы. В день смерти, 7 (18) сентября 1783 г., Эйлер, обедая в кругу семьи, беседовал с Лекселем о новой планете Уран, открытой Гершелем, и о вычислениях, определяющих ее орбиту. Немного позднее привели его внука, с которым он забавлялся, выпив несколько чашек чая. Неожиданно трубка выпала из его рук, он успел только сказать окружавшим его: «я умираю», после этих слов он не произносил уже ничего больше и находился в состоянии агонии до 11 часов вечера, когда скончался¹. Эйлер умер 76 лет, 5 месяцев и 2 дней от роду. Похоронен он был на Смоленском евангелическом кладбище в Петербурге. Над его могилой воздвигнут памятник из серого финляндского гранита с надписью: «Leo-

¹ Г. Е. Павлова, Забытое свидетельство современника о смерти Л. Эйлера. Сб. «Л. Эйлер», 1958, стр. 606.



FIG. 6

phardo Eulero Academia Petropolitana». В 1956 г. его прах был перенесен в Ленинградский некрополь.

22 сентября 1783 г. состоялось заседание конференции Академии, посвященное кончине ее старейшего члена. 3 ноября того же года на торжественном заседании Академии ученик Л. Эйлера Николай Фусс произнес известную похвальную речь памяти своего учителя, а 14 января 1785 г. в зале заседаний Петербургской Академии напротив кресла президента был поставлен бюст Эйлера на мраморной колонне. В настоящее время бюст помещается в одной из зал Президиума Академии наук СССР в Москве.

15 августа 1957 г., в день 250-летия со дня рождения Эйлера, в Ленинграде на доме, где жил Эйлер (набережная Лейтенанта Шмидта, 15) была установлена мемориальная доска.

Посмертные почести, оказанные Эйлеру в России, произвели глубокое впечатление за границей. В речи, посвященной памяти Эйлера и произнесенной во французской Академии наук, Кондорсе выразил это впечатление в следующих словах: «Итак, народ, который мы в начале этого века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе — как чествовать великих людей при жизни и уважать их память после смерти; и другим нациям приходится в данном случае краснеть, что они не только в этом отношении не могли предупредить Россию, но даже не в состоянии ей подражать»¹.

Семейное положение Эйлера

Эйлер имел большую семью; он был женат дважды. Первый раз он женился в 1733 г. в Петербурге на Екатерине Гзель, дочери академического живописца, которого Петр Великий вывез из Голландии и который родом был также из Швейцарии. Первая его жена скончалась в 1773 г. Эйлер женился в 1776 г. второй раз, имея от роду 69 лет, на Саломее Абигель Гзель, дочери того же живописца, от второго брака. От первой жены Эйлер имел 13 детей, из которых 8 умерли в детском возрасте. Старший сын его, математик и механик Иоганн-Альбрехт (1734—1800) был академиком, в частности конференц-

¹ Башмакова И. Г. и Юшкевич А. П., Леонард Эйлер, «Историко-математические исследования», т. VII, стр. 464.

секретарем Академии; второй — Карл (1740—1790) — придворным медиком, третий — Христофор (1743—1812) — директором оружейного завода в Сестрорецке, генералом русской армии. Христофор Эйлер известен и в науке своими астрономическими наблюдениями в Орской крепости (при прохождении Венеры через диск Солнца) и в Яицком городке. Сыновья Эйлера превосходно знали математику, приобретая эти знания мимоходом, без всякого труда. Из дочерей старшая, Екатерина (Елена) была замужем за майором Белем; вторая, Шарлотта, — за бароном Деленом. Одна из внучек Л. Эйлера была замужем за математиком академиком Фуссом; другая внучка вышла замуж за племянника Даниила Бернулли, Якова II Бернулли (1759—1789), который недолгое время состоял профессором в Петербурге, но утонул, купаясь в Неве.

В момент смерти Эйлер имел 26 внуков.

Большая часть детей и внуков Эйлера жила в России и принимала активное участие в русской жизни. Показателем того, что дети Эйлера натурализовались¹ в России, может служить хотя бы такой характерный факт: сын Эйлера, Христофор, возглавлявший астрономическую экспедицию и посетивший Запорожскую Сечь в 1770 г., был принят в войско запорожское, о чем ему был выдан соответствующий аттестат. Приводим текст этого любопытного документа:

АТТЕСТАТ

«Астрономической экспедиции главный предводитель, артиллерии бомбардирского полку господин поручик, Христофор Леонтиев Эйлер, в приезд свой в нынешнее время в Сечь Запорожскую, по его прошению, в войско запорожское, в число куреня Куцевского товарищей, принят и между товариство того куреня, на всегдашнее изчисление в куренные регестры, с нижеписанного числа записан. Для чего ему, г. поручику Эйлеру, когда где надобность укажет объявления, сей аттестат из Коша войска запорожского низового при подписании и печати войсковой выдан. В Сечи Запорожской августа 4 дня 1770 года».

(М. П.) «Войска запорожского низового кошевой атаман Петр Калнишевский, с старшиною и товариством»².

¹ Натурализоваться — приобрести права гражданства в чужой стране.

² А В Скальковский, журн. «Киевская старина», т. 4, Киев, октябрь, 1882.

Среди прямых наследников Л. Эйлера в прошлом веке можно указать нескольких высших офицеров русской армии и флота. Часть прямых наследников Л. Эйлера и ныне проживает в СССР; некоторые из потомков Эйлера присутствовали на юбилейной сессии Академии наук СССР, которая состоялась в апреле 1957 г. в Ленинграде.

Школа Эйлера

Деятельность Л. Эйлера оказала весьма плодотворное влияние на прогресс математической культуры в России XVIII века. Эйлер явился основателем первой русской математической школы в Петербурге. Умирая, он оставил членами Академии восемь своих учеников. Это были: его сын Иоганн-Альбрехт, Котельников, Румовский, В. Л. Крафт, Лексель, Иноходцев, Головин и Николай Фусс. По словам Кондорсе, шестнадцать профессоров Петербургской Академии гордились тем, что могли приписать к своим ученым званиям слова «ученик Эйлера».

Воспитанные им ученики продолжали разрабатывать его научное наследие.

Особо велико влияние Эйлера на создание русской учебной литературы по математическим наукам. Образование сильного русского централизованного государства, рост промышленности, мореплавания и торговли в России, развитие военного дела и т. п. поставили проблему подготовки математически образованных кадров технической интеллигенции и военных специалистов. Для целей математического просвещения нужны были хорошие учебники. Ряд таких учебных руководств и написал Эйлер; они отличались высоким научным уровнем и обладали несомненными педагогическими достоинствами, из них прежде всего отметим «Руководство к арифметике» и «Универсальную арифметику».

«Руководство» Эйлера по арифметике положительно отразилось на преподавании этой дисциплины, особенно благодаря популярным учебникам преподавателя Морского кадетского корпуса Н. Г. Курганова (1725—1796). Курс алгебры Эйлера («Универсальная арифметика»)

явился отправным пунктом для авторов всех последующих школьных учебников вплоть до наших дней. Ученик Эйлера Н. И. Фусс (1755—1826) составил «Начальные основания алгебры, выбранные из алгебры Леонарда Эйлера». Этот труд, являясь сокращением «Универсальной арифметики», был неплохим учебником для того времени. В нем, между прочим, впервые в нашей учебной литературе были введены понятия о независимости уравнений и о невозможных системах.

Выдающийся воспитанник Академического университета и ученик Эйлера, С. Я. Румовский (1734—1812) написал учебник «Сокращения математики. Часть первая, содержащая начальные основания арифметики, геометрии и тригонометрии» (Спб., 1760). Тригонометрический раздел этого учебника был составлен на основе исследований Л. Эйлера.

Под прямым влиянием оригинальных работ Эйлера был написан и передовой по тому времени учебник тригонометрии М. Е. Головина «Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами» (Спб., 1789). Очевидная потребность военных и военно-технических школ в преподавании тригонометрии вызвала появление ряда тригонометрических руководств. За 100 лет их появилось на русском языке около 15. Книга Головина оставила далеко позади все более ранние учебники по тригонометрии и по своему научному уровню стояла значительно выше даже и многих позднейших русских и иностранных руководств. Как уже видно из самого заглавия книги, изложение носило (как и у Эйлера) аналитический характер. Интересно, что в своей работе М. Е. Головин отказался от тех тригонометрических функций, которые считал малоупотребительными; к таким он отнес секанс, косеканс и синус-верзус.

Первое русское руководство по математическому анализу принадлежит С. К. Котельникову, оно вошло во второй том его перевода на русский язык «Сокращения первых оснований математики» Х. Вольфа (Спб., 1771). Надобность в нем была очень велика, так как латинские труды Эйлера не были в то время переведены на русский язык, да и в силу своей полноты не могли служить целям обучения. Главными источниками работы Котельникова послужили «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление» Эйлера.

Труды Эйлера по механике отразились на другом учебнике Котельникова — «Книге, содержащей в себе учение о равновесии и движении тел» (Спб., 1774). Это был первый русский учебник по механике, посвященный главным образом статике. Котельникову же принадлежит одно из первых русских руководств по геодезии: «Молодой геодет или первые основания геодезии» (Спб., 1766).

М. Е. Головин также написал «Краткое руководство к механике» (1785), которое было просмотрено и одобрено Эйлером. Замечательно, что в этой книге Головин применял по сути дела понятие вектора, которое оформилось в науке лишь в конце XIX века. Головин был также первым физиком-методистом и организатором преподавания физики в начальных школах России.

Первые русские авторы отказались от догматического обучения и пропагандировали обучение систематическое, доказательное и доступное. Они утверждали, что если учение не будет таким, то учащиеся не сумеют применить полученные знания в разнообразных жизненных условиях, не станут творчески развитыми людьми. Таких же взглядов по сути придерживался и М. В. Ломоносов.

Ученики Эйлера занимались переводами некоторых его работ. Так, Румовскому принадлежит русский перевод «Писем к одной немецкой принцессе», Головину — перевод «Полного умозрения строения и вождения кораблей».

Ученики Эйлера были и прекрасными педагогами ряда учебных заведений, сам Эйлер; как мы уже знаем, читал по поручению Академии публичные лекции и вел занятия в университете.

Трактаты самого Эйлера по математическому анализу и аналитической геометрии не потеряли своей ценности и в наши дни, их перевод с латыни на русский язык продолжается и сейчас. Для многочисленных авторов руководств по этим предметам они служили классическим образцом для подражания.

Эйлер — отечественный ученый

Эйлер не был русским по рождению, однако мы с полным правом называем величайшего математика XVIII века нашим отечественным ученым. И вот почему.

В Швейцарии Эйлер оказался не у дел, ему негде было приложить свои великие дарования. К счастью для России

и для всего человечества, а также к счастью для самого Эйлера, последовало приглашение из Петербурга. Он сам прекрасно понимал, что для молодого ученого решающим является возможность работать в любимой отрасли науки. О том, как расценивал Эйлер свой переезд в Петербург и работу в Петербургской Академии, мы узнаем из его собственных слов: «Я и все прочие, имевшие счастье некоторое время состоять при Русской императорской Академии, должны признать, что всем, что собой представляем, обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых мы там находились. Что собственно до меня касается, то при отсутствии такого превосходного обстоятельства я бы вынужден был главным образом обратиться к другим занятиям, в которых, по всем признакам, мог бы заниматься только крохоборством. Когда его королевское величество (Фридрих II прусский. — *В. К.*) недавно меня спрашивал, где я изучал то, что знаю, я, согласно истине, ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской Академии»¹. Россия стала для Эйлера второй родиной.

Эйлер прожил в России 31 год, с момента приезда в 1727 г. его деятельность так или иначе была связана с Петербургской Академией. Мы уже писали о разносторонней помощи нашей Академии, которую оказывал Эйлер в качестве ее почетного члена в период своей жизни в Берлине. Когда же А. Нартов, временно правивший Петербургской Академией, известил Эйлера, что заграничным членам Петербургской Академии пенсия в дальнейшем выплачиваться не будет, то Эйлер ответил ему по-русски, что «ныне с чином почетного члена и без жалования весьма удовольствуюсь».

Заслуживает особенного внимания ясно выраженное намерение Эйлера готовить чисто русских ученых для замещения вакантных должностей в России. Эта идея сказалась в следующих его рекомендациях.

Когда Петербургская Академия просила Эйлера указать ученого для занятия кафедры механики, он писал 7 августа 1753 г. «Я еще не имею никаких известий о способном механике и чем далее, тем более сомневаюсь, най-

¹ Из письма Эйлера к Шумахеру от 18 ноября 1749 г., см статью И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича в VII томе «Истор.-мат. иссл.», стр. 457.

дется ли такой, за которого бы мог заслужить признательность. Лучше всего будет заместить это место способным русским, для чего, конечно, потребуется время»¹.

На просьбу найти в Германии ректора и конректора для Московской гимназии при университете он 26 июня 1755 г. отвечал: «г. Котельников сказывал мне, что по этой части трудно найти людей более способных, как два русских студента (Козицкий и Мотонис), слушающие лекции в Лейпциге. Один из них, как думает Котельников, мог бы удобно быть отдан от Академии университету. Это будет лучший совет, когда Академия насчет этих студентов не имеет особенных видов, так как, кроме того, что немцы чрезвычайно требовательны, рекомендация может оказаться также и неудачною»². Козицкий и Мотонис, молодые украинцы из Киева, впоследствии оба были адъюнктами нашей Академии.

Когда в 1754 г. надо было найти кандидата для замещения вакантной должности при кафедре математики, то Эйлер поддержал мнение большинства академической конференции о том, что наиболее подходящим лицом является русский ученый Котельников. В письме непременно секретарю Академии Мюллеру Эйлер 24 декабря 1754 г. сообщал, что Котельников по своим знаниям и дарованиям гораздо выше ученых вроде Кюна, Кастильоне и Кестнера, которых выдвигали в качестве кандидатов на свободные места академиков и желали вызвать из Германии.

Приводим подлинные слова Эйлера по этому поводу: «...то, что я писал вашему высокоблагородию об успехах г. Котельникова во второй раз, столь же совершенно согласуется одно с другим, как и с моею совестью. Доколе речь шла о г. Кюне, или г. Кастильоне, или также г. Кестнере, я мог справедливо утверждать, что его не только не следует ставить позади таких людей, но даже предпочесть им»³.

В более раннем письме к Мюллеру от 27 августа 1754 г. Эйлер, между прочим, дает уничтожающую характеристику средней немецкой профессуры того времени: «Господи-

¹ «Русская старина», т. 132, ст. Саткевича «Леонард Эйлер», 1907, стр. 484.

² Там же.

³ А. П. Юшкевич, Эйлер и русская математика в XVIII в. Труды Института истории естествознания, т. 3, 1949, стр. 53.

на Клемма из Вюртенберга, — писал Эйлер, — я знаю очень хорошо, так как он жил некоторое время здесь и столовался у меня, но мне никогда не пришло бы в голову предложить его в преподаватели высшей математики, так как я мог бы предложить на эту должность с равным правом любого начинающего. Его основное занятие — богословие, и благодаря выгодному браку он получил уже доходное место по этой специальности в Штутгарте. О г-не Рюге я уже раньше сказал свое мнение: в его произведениях чувствуется туго мыслящий ум, который, благодаря своим ложным предпосылкам, настолько заблуждается во всех важнейших вопросах, что только с величайшим трудом можно убедить его в наличии у него ошибок. Наиболее ярким свидетельством этого является его безвкусное и избыточное грубейшими ошибками сочинение, помещенное в *Commentarii*. Кто так превратно рассуждает в области математики, от того, наверное, мало оснований ждать чего-либо толкового и в других науках. Что касается г-на Ганау, то из его произведений я не видел ничего, кроме нелепого исследования о квадратуре круга, превосходящего по своей абсурдности даже все то, что до сих пор появлялось по этому вопросу. Эти субъекты, как мне кажется, из-за своего необыкновенного трудолюбия потеряли здравый человеческий смысл. По сравнению с ними я могу с полным правом считать Котельникова Архимедом или Ньютоном. В самом деле, во всяком случае несомненно, что во всей Германии не найти более трех человек, которые в математике заслуживали бы предпочтения перед Котельниковым, но я надеюсь, что в течение года я добьюсь с ним того, что он превзойдет и этих людей¹.

Эйлер, обязанный столь многим России, понимал, что России нужно создать свои национальные кадры и в этом патриотическом деле ему принадлежала видная роль, как основателю первой русской математической школы.

Он заботливо и тепло относился к своим русским ученикам, поддерживая их и давая благожелательные отзывы на их работы. Это относится в равной мере к Котельникову, Румовскому, Софронову, Никите Попову. Оценивая их успехи, Эйлер писал: «...в изучении же наук они постоянно выказывали такое усердие, что, наверно, принесут честь

¹ С. Я. Лурье, Неопубликованная научная переписка Леонарда Эйлера. Сб. «Леонард Эйлер», 1935.

и пользу Академии»¹ (см. подробный разбор этого вопроса в ст. А. П. Юшкевича «Эйлер и русская математика в XVIII в.» в томе 3 «Трудов Института истории естествознания», 1949). Ряд лет Эйлер руководил математической подготовкой Н. И. Фусса и М. Е. Головина.

Дружеские отношения существовали между Эйлером и лидером русской оппозиции в Академии, великим Ломоносовым. Их взгляды во многом совпадали. Как известно, влиятельные, реакционно настроенные иностранные члены и советники академической Канцелярии Шумахер и Тауберт весьма неблагосклонно смотрели на проникновение русских ученых в Академию. Вспомним хотя бы восклицание Тауберта: «...разве-де нам десять Ломоносовых нужно? и один-де нам в тягость», или высказывание Шумахера: «Я де-великую прошибку в политике сделал, что допустил Ломоносова в профессору».

Вопреки им Ломоносов старался всеми силами умножать русские кадры и добиваться возведения «природных россиян» в ученые звания, и Эйлер своей деятельностью (обучением и отзывами) помогал Ломоносову в его великом патриотическом деле.

Здесь же следует напомнить, какую значительную роль играли весьма лестные рецензии Эйлера на научные работы самого Ломоносова; первый отзыв на работы Ломоносова Эйлер дал в ноябре 1747 г. Ему были посланы в Берлин по постановлению Канцелярии Академии две работы Ломоносова («Диссертация о действиях химических растворителей вообще» и «Физические размышления о причинах теплоты и холода») по той причине, что «о сем деле из здешних профессоров ни один основательно рассудить довольно не в состоянии». В своем письме к президенту Академии Разумовскому Эйлер так отозвался о приведенных работах Ломоносова: «Все сии сочинения не токмо хороши, но и превосходны, ибо он изъясняет физические и химические материи, самые нужные и трудные, кои совсем неизвестны и невозможны были к истолкованию самым остроумным ученым людям, с таким основательством, что я совсем уверен о точности его доказательств. При сем случае я должен отдать справедливость господину Ломоносову, что он одарован самым счастливым остроумием для объ-

¹ М. И. Сухомлинов, История Российской Академии, т. 2, Спб., 1874—1887, стр. 42.

яснения явлений физических и химических. Желать надобно, чтобы все прочие Академии были в состоянии показать такие изобретения, которые показал господин Ломоносов».

Несколько позже (20 января 1748 г.) Эйлер писал Шумахеру, что Берлинская Академия наук в качестве темы на премию 1749 г. выбрала вопрос о происхождении селитры, и рекомендовал Ломоносова как наилучшего кандидата для написания работы на этот конкурс. При этом Эйлер добавлял: «Было бы, конечно, весьма почетно, если бы член императорской Академии, да к тому же **русский** (подчеркнуто мной. — В. К.) удостоился нашей премии».

С февраля этого года между великими учеными установилась дружеская переписка, ценная для обоих, обоюдополезная для их творчества.

В письме к Разумовскому от 13 августа 1748 г. Эйлер, давая оценку работам Ломоносова о природе тяжести тел, писал: «...я никого не знаю, кто был бы в состоянии лучше разъяснить этот трудный предмет, чем этот гениальный человек, который своими познаниями делает честь не только императорской Академии, но и всему народу».

И позднее, когда отношения между Ломоносовым и Шумахером начали резко ухудшаться, Эйлер продолжает давать столь же лестные отзывы на работы Ломоносова, всячески стараясь оградить его от нападок враждебно настроенных лиц в Академии, в первую очередь Шумахера.

Следует отметить, что Ломоносов со своей стороны высоко ценил Эйлера, того «чьи заслуги и авторитет в ученом мире велики», и был глубоко благодарен ему за моральную поддержку.

Сам Ломоносов, хотя не был математиком по специальности, однако хорошо знал математику, в частности ряд работ Эйлера, и применял ее в естествознании (вопрос о взаимоотношениях Эйлера и Ломоносова детально освещен в статье В. Л. Ченакала «Эйлер и Ломоносов» в сборнике Академии наук СССР, посвященном 250-летию со дня рождения Л. Эйлера, 1958).

В берлинский период жизни Эйлера произошла Семилетняя война (1756—1763). В 1756 г. Россия готовилась к походу против Пруссии, и Эйлер письмо к Мюллеру от 29 июня 1756 г. о вознаграждении за обучение живших у него адъюнктов Русской Академии заканчивает словами: «Не хочу я верить, чтобы общественные беспокойства пре-

рвали нашу переписку и помешали моей преданности императорской Академии»¹.

Когда же русские войска заняли Берлин в 1760 г., то Эйлер писал (7.X.1760) тому же Мюллеру: «Впрочем, я всегда желал, что если бы когда-либо суждено было Берлину быть занятым иностранными войсками, то пускай это были бы русские»². Интересно, что офицеры вошедших в Берлин победоносных русских войск, конечно, исполняя инструкции свыше, отнеслись к нему как соотечественнику: когда его мыза в Шарлоттенбурге (западное предместье Берлина) пострадала от постоя казаков, то его имение было ограждено почетным караулом и он получил вскоре очень крупную по тому времени компенсацию.

Это является лишним подтверждением, что русское правительство никогда не считало Эйлера во время его пребывания в Берлине иностранцем.

Добавим ко всему этому, что Эйлер хорошо знал русский язык, писал на нем письма и даже статьи. Дети и внуки Эйлера в основном остались жить в России.

Эйлер как человек

Академик П. П. Пекарский со слов Н. И. Фусса дает следующую характеристику Эйлеру как человеку в своей «Истории Академии наук»³: «У Эйлера было великое преимущество не выставлять на показ своей учености, скрывать свое превосходство и быть на уровне всех и каждого. Всегда ровное расположение духа, веселость кроткая и естественная, некоторая насмешливость с примесью добродушия, разговор наивный и шуточный — все это делало беседу с ним столь же приятною, сколько и привлекательною. Чрезвычайная живость иногда была причиною, что он легко раздражался, но гнев проходил у него так же быстро, как появлялся, и он ни на кого не досадовал долго».

Скромность его доходила до того, что он не обращал внимания на плагиаты, сделанные из его сочинений, так, например, Лагранж указывал ему на подобный поступок Кондорсе, но Эйлер считал, что он достаточно богат для

¹ П. П. Пекарский, История Академии наук, т. I, 1870, стр. 278.

² Там же.

³ П. П. Пекарский, История Академии наук, т. I, 1871, стр. 299.

того, чтобы без неудовольствия предоставить другому некоторые свои открытия; книгу Робинса он скромно снабдил комментариями, создав на самом деле целую новую теорию.

Эйлер никогда не отказывал в помощи многочисленным ученым, техникам, изобретателям, обращавшимся к нему. Особенно охотно он оказывал поддержку выходцам из народа, в частности великому Ломоносову и талантливому Кулибину. Авторитет его, как мирового ученого, был настолько велик, что Г. В. Петцингер, один из изобретателей, полагал, что Эйлер «в несколько минут может сделать то, для чего другому понадобятся многие годы».

Эйлер обладал исключительной эрудицией; по отзывам современников, он хорошо знал «лучших писателей древнего мира», «древнюю литературу по математике», «историю всех времен и народов», языки «древние», «восточные», современной Европы, в том числе и русский, а также знал ботанику, химию, физику, анатомию и медицину в такой степени, что приводил в удивление специалистов. Все, чем Эйлер когда-либо занимался, глубоко врезывалось в его память. Так, он не только без ошибки мог произнести наизусть всю «Энеиду», но и назвать первые и последние стихи на каждой странице того ее издания, которым он сам пользовался. При этом математика настолько безраздельно господствовала в его сознании, что, даже читая Вергилия, он не терял ее из виду. Эйлер сам признается, что на решение одного вопроса механики его натолкнуло как раз чтение одного из стихов Энеиды.

Театром и новой художественной литературой Эйлер почти не интересовался. Известен один любопытный факт: когда приятели привели его в театр, то он, «посидев несколько времени нахмурившись; и вымеряв глазомером и пространство и фигуру театра и вычислив сам в себе, как голос до слуха человеческого доходит, хлопнул дверью и ушел, не дослушавши самого прекрасного места в трагедии»¹.

Изумительны были его память и сила воображения. Примером может быть следующее. Эйлер давал своим внукам уроки по алгебре. Извлечение корней принуждало Эйлера предлагать им только такие числа, которые являлись точными степенями. Для этого он вычислил в уме шесть первых степеней всех чисел от 1 до 100 и точно сохранил их

¹ В. Е. Прудников, Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков, 1956, стр. 37.

в памяти. Кондорсе сообщает еще такой факт: двое учеников Эйлера вычислили на бумаге довольно сложный сходящийся ряд до 17-го члена, причем у них оказалось расхождение на единицу в пятидесятой цифре. За разрешением спора они обратились к своему учителю, т. е. Эйлеру. Эйлер проделал все выкладки в уме и дал правильный ответ.

Вечно погруженный в занятия математикой, он мало знал жизнь и людей. Правда, он умел ладить с Шумахером и другими лицами, руководившими Академией, но он был человеком честным и справедливым, неспособным, конечно, на низость. Добавим, что Эйлер был замечательным семьянином и любил детей.

Неправильно было бы рисовать его образ только в розовых тонах, черточки бюргерства и меркантилизма были присущи его характеру. Так, привыкнув отдавать деньги по 4 и 5% взаймы, он высказывал опасение, можно ли будет это делать и в Петербурге. На почве денежных расчетов с Академией у него стали портиться отношения с жившими у него в Берлине русскими учениками, которые писали, что он «во всех своих обхождениях крайнее неудовольствие показывает», хотя, с другой стороны, он, видимо, материально их не обижал, судя по тому, что писал Мюллеру 26 июня 1756 г.: «Но я не ограблю добрых людей и удовольствуюсь тем, что решительно договорился с ними раз навсегда».

Значение Эйлера для Петербургской Академии наук

Имя Эйлера освещает немеркнущей славой первые полвека существования Русской Академии. Многим обязанный Академии, Эйлер оплатил ей воистину сторицей. По словам С. И. Вавилова, «вместе с Петром I и Ломоносовым Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность». Главным образом это он вывел Русскую Академию на международную научную арену; благодаря именно его знаменитым мемуарам ее «Комментарии» рано приобрели мировую славу. Связи Академии с учеными Запада окрепли благодаря его личной корреспонденции. Еще в XVIII веке письма служили важным средством обмена мнений, так как научных журналов было мало и книги печатались медленно. Эйлер состоял в переписке почти со всеми выдающимися учеными своего времени; известна его переписка с Иоганном и Да-

нилом Бернулли, Даламбером, Лагранжем, Лапласом, Клеро, Ломоносовым, Мопертюи, Стирлингом и другими. Его корреспонденция громадна и значительная доля ее должна быть включена в его научную продукцию наравне с изданными трудами.

Общая характеристика творчества Эйлера

Член Петербургской Академии наук, Леонард Эйлер является величайшим математиком XVIII века и одновременно одним из гениальнейших математиков всех времен и народов. Имя его с полным правом может быть поставлено рядом с именами таких титанов человеческой мысли, как Галилей, Декарт, Ньютон и Лейбниц.

XVIII век в области математики — это век Эйлера. Это было время, когда трудами Лейбница и Ньютона уже были заложены основы анализа бесконечно малых; в то время как дифференциальное исчисление в основном имело современную форму, интегральное исчисление находилось еще почти в зачаточном состоянии и Эйлер придал ему такой вид, что в течение более 150 лет после его смерти наука немного добавила.

Будучи прямым преемником И. Бернулли и продолжателем школы Лейбница, он обратил все свои силы на аналитическое изложение высшей математики, отойдя от геометрических методов, играющих столь большую роль в произведениях Ньютона, его учеников и последователей. Эйлер — чистый аналитик. В качестве разительного примера укажем, что в двух его основополагающих работах по математическому анализу: в «Введении в анализ бесконечно малых» (первый том) и в «Дифференциальном исчислении» — на протяжении более 800 страниц нет ни одного чертежа. Потому Лаплас и назвал его отцом современного математического анализа.

Выраженная аналитически, проблема требовала только искусства в вычислениях, мастерства в обращении с формулами, умения предчувствовать ее результаты; в этом отношении Эйлер не имел соперников. По словам академика Н. Н. Лузина, «самая громоздкая формула гнулась в его сильных руках, как мягкий воск, и послушно давала под его усилиями все, что угадывала в ней его пронизательность...» «Можно без преувеличения сказать, что в глазах Эйлера математические формулы жили своей собственной

жизнью и рассказывали глубочайшие вещи о явлениях природы и что ему достаточно было только прикоснуться к формулам, чтобы они из немых превращались в говорящих и дающих ответы, полные глубокого смысла». Эйлера несколько не тяготили самые трудные, самые громоздкие вычисления. «Эйлер вычислял с необыкновенной легкостью; вычисления были его стихией; всякий физический вопрос, которым он занимался, он спешил привести к вычислению»¹ (Араго). То же самое подтверждает и Лагранж: «Изыщество вычислений доведено у него до высшей степени»². Араго сравнивал Эйлера в этом отношении с орлом, который постоянно стремится в высшие слои атмосферы.

Но было бы глубоко ошибочным считать Эйлера главным образом вычислителем, хотя бы и гениальным. Почти все его работы не только оригинальны по мысли и изложению, — в них Эйлер выступает творцом, родоначальником новых взглядов и новых методов. Слепой, он силой своего творческого гения осветил дороги в будущее для математики, да и не только в математике проложил он новые пути.

Все области математики его интересовали, здесь ему принадлежит вереница результатов, с трудом поддающихся учету.

Эйлер создал вариационное исчисление, заложил основы теории чисел и аналитических функций; он придал современную форму интегральному исчислению, изложению тригонометрии и арифметики; благодаря главным образом его работам теория дифференциальных уравнений вылилась в особую дисциплину; вместе с Монжем им были заложены основы теории поверхностей. Продолжив работу Лейбница и Ньютона по аналитической геометрии, Эйлер создал теорию поверхностей второго порядка, благодаря чему эта дисциплина приняла в основном современную структуру. Более подробно о математических работах Эйлера будет сказано ниже.

Но Эйлер был не только великим математиком: целый ряд наук с полным правом могут зачислить Эйлера в число основных творцов своей области. Дело в том, что круг интересов Эйлера был необычайно обширен, он охватывал все области современного ему знания, где только можно было приложить математику. Так, Эйлера можно считать

¹ Е. Ф. Литвинова, Лаплас и Эйлер, 1892, стр. 12.

² Там же, стр. 43.

основателем теоретической физики, основоположником механики твердого тела и вместе с Даниилом Бернулли основоположником гидродинамики и гидравлики как самостоятельных наук. Эйлер был творцом науки мореплавания, создателем основ теории корабля и теории устойчивости упругих стержней.

Велики его заслуги в оптике и астрономии, — работы его, его учеников и сотрудников имели важное значение для изучения движения Луны, для создания теории вращения Земли. Эйлер заложил основу теории расчета турбин, выведя турбинное уравнение; своими работами по теории турбин Эйлер настолько опередил свой век, что только в 1943 г. впервые была выполнена модель турбины непосредственно по описанию Эйлера. Основные его исследования по теории гидротурбин изложены им в сочинении «Наиболее полная теория машин, приводимых в движение реакцией воды» (1754); одни его работы по гидромашинам дают право назвать его ученым-инженером в современном смысле этого слова.

В прикладной механике имя Эйлера связано с вопросами кинематики фигурных колес, расчета трения между канатом и шкивом, вопросами о насыпных плотинах, о прочности мостов, об испытании весов, исследованиями о принципе действия пил, о шлифовке оптических стекол и многими другими. Так, в работе «Основы теории машин» («Principia theoriae machinarum», 1760—1761) Эйлер рассматривает вопрос об отношении между скоростью действующей силы и скоростью передвигаемого ею груза, причем принимались во внимание не только машины, но и характерные для домашнего производства «двигатели» — человек и животное. Перечисленное позволяет считать Л. Эйлера одним из основоположников практической механики.

Большое значение имеют работы Эйлера по внешней баллистике; в них он дал решение основной задачи, при одночленном законе сопротивления воздуха. Интересовался он и биологической физикой, дав первое математическое исследование движения крови в сосудах, изучив явление возникновения звуков в гортани, развив теорию цветов и опубликовав блестящие этюды по теории музыки.

Занимался он и теоретическими вопросами демографии и страхования, теории азартных игр, так

что и теория вероятностей не оказалась вне его поля зрения.

В картографии им открыты так называемые равновеликие конические проекции; кроме того, Эйлер впервые аналитически доказал неразвертываемость поверхности шара на плоскость.

Даже сельское хозяйство интересовало его: его статья об опытах по разведению озимой пшеницы напечатана на русском языке в трудах вольного экономического общества за 1767 г.

Краткую характеристику философских воззрений Эйлера мы уже приводили. Добавим, что в основном философском произведении Эйлера: «Письмах к одной немецкой принцессе» — мы находим также глубокие мысли о связи языка и мышления, а также экскурсы в область формальной логики.

Уже сам приведенный перечень основных достижений Эйлера говорит о том, что он был универсальным мыслителем, теоретиком, в работах которого ярко выражены прикладные мотивы. Вопросы практики в его эпоху властно ставили ряд проблем, и Эйлер охотно находил их решения, пользуясь средствами математического анализа, который для решения этих проблем необходимо развивать. Развитию этого исчисления Эйлер и посвящает свои главные усилия, главную часть своей разносторонней деятельности.

Так, потребности русского кораблестроения вызвали к жизни «Морскую науку» Эйлера, это первое монографическое произведение по теории устойчивости, содержащее также основы теории малых колебаний. Его труды по баллистике вызваны нуждами развития артиллерийской науки. Работы по механике, гидродинамике в конечном счете связаны с развитием морского транспорта. Умение определять местонахождение корабля в море требовало решения задачи определения астрономических долгот, отсюда — блестящие работы Эйлера по теории движения Луны. Астрономические исследования и ориентировка в море требовали усовершенствования оптических инструментов, отсюда — эйлерова трехтомная «Диоптрика».

Имя Эйлера и сейчас знакомо каждому студенту, изучающему точные науки: открывая учебные пособия, он постоянно встречает это имя, связанное с основными положениями той или иной науки. То это «эйлеровы уравне-

ния вращения твердого тела», то «эйлеровы уравнения движения жидкости», то «эйлерова формула сопротивления стоек продольному сжатию», то «эйлеровы углы», то «теорема Эйлера об однородных функциях», или «эйлеровы подстановки», или «эйлеровы интегралы 1-го и 2-го рода», или «формула Эйлера» ($e^{iz} = \cos z + i \sin z$), или «турбинное уравнение Эйлера» и т. д.

Мы привели только несколько примеров наудачу.

Работы Эйлера по математике

Поскольку математика была основным стержнем научных интересов Леонарда Эйлера, его любимейшей отраслью знаний, в которой особенно ярко раскрывалась вся мощь его дарований, то остановимся отдельно на его достижениях в этой области. Только перечислить с должной полнотой все сделанные им здесь открытия было бы весьма трудной задачей, поэтому приведем лишь главнейшее: Эйлер впервые преобразовал исчисление бесконечно малых в целостную теорию обширных классов функций и начал излагать его на числовой основе как аналитическую дисциплину, в противовес еще сильно геометризованной манере построения у первых его творцов и их ближайших последователей. На основе фундаментального понятия о функции как аналитическом выражении Эйлер дал современную классификацию функций, впервые употребив привычное для нас обозначение $f(x)$. Для рациональных функций он дал их разложение на простейшие дроби, применяемое в интегральном исчислении, а для квадратичных иррациональностей указал способ их рационализации (так называемые «эйлеровы подстановки»).

Очень много им сделано в учении о трансцендентных функциях: впервые тригонометрические функции трактуются им как отношения, а не как отрезки, так что тригонометрия в его руках приобретает современную аналитическую форму. Эйлер открыл здесь неожиданную для всех тесную и неразрывную связь между тригонометрическими, показательной и логарифмической функциями (так называемые «формулы Эйлера»). Далее с помощью теоремы о степени бинома Эйлер вывел разложения в бесконечные ряды элементарных трансцендентностей, впервые получил ряд важных разложений функций в бесконечные произведения, как $\sin \pi x$ и др. Существенно новым у Эйлера

было применение рядов к исследованию свойств представляемых ими функций. Интересно отметить, что трактовка Эйлером обобщенных методов суммирования расходящихся рядов, которая десятилетиями подвергалась резкой критике, была возрождена и правильно оценена лишь в конце прошлого столетия.

Эйлер впервые на континенте Европы выдвинул понятие производной в качестве основного понятия дифференциального исчисления и связал дифференциальное исчисление с исчислением конечных разностей. В теории рядов Эйлеру принадлежит множество результатов. Он открыл так называемую формулу суммирования Эйлера—Маклорена, предложил преобразование рядов, носящее его имя, определил суммы большого числа рядов, ввел в математику новые типы рядов, например тригонометрические.

В дифференциальном исчислении Эйлеру, в частности, принадлежит теорема о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования, правило раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty - \infty$.

Отметим попутно здесь, что многие общепринятые теперь математические обозначения, как π , e , i , $f(x)$, Δx , Σ , обозначения тригонометрических функций (\sin , \cos , tg) и обратных тригонометрических восходят к Эйлеру. Сюда же относится обозначение посредством букв a , b , c сторон треугольника ABC , предложенное Эйлером.

В интегральном исчислении Эйлеру принадлежит ряд методов вычисления неопределенных интегралов, введение понятия двойного интеграла, исследования по эллиптическим интегралам, вычисление многих несобственных интегралов, как например $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, и многое другое.

Выделение теории дифференциальных уравнений в самостоятельную дисциплину обязано трудам Даниила Бернулли, Даламбера и особенно Леонарда Эйлера. Последнему принадлежит учение об интегрирующем множителе, теорема об однородных функциях, условие интегрируемости полного дифференциала, общая теория уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами, метод вариации произвольных постоянных, исследование уравнения Риккати, интегрирование линейных уравнений с переменными коэффициентами с помощью бесконечных рядов, методы приближенного интегрирования, решение ряда

уравнений с частными производными, возникающих в задачах о колеблющейся пластинке, и многое другое.

Основы теории аналитических функций были заложены Эйлером. Им было введено понятие функции комплексного переменного, разработана теория элементарных функций комплексного переменного, ему принадлежит применение функций комплексного переменного к задачам гидромеханики, конформного отображения и интегрального исчисления и изучение ряда неэлементарных функций (введение гамма-функции, дзета-функции, цилиндрических функций и др.).

Велики заслуги Эйлера в аналитической геометрии. Он исследовал общее уравнение второй степени с тремя переменными, создал формулы преобразования координат в пространстве («эйлеровы углы»), ввел пространственные полярные координаты. Изложению аналитической геометрии посвящен второй том «Введения в анализ бесконечно малых». В этом произведении Эйлер, рассмотрев кривые первого и второго порядка, переходит к кривым третьего порядка, классифицируя их по характеру бесконечных ветвей, и сводит 72 вида этих кривых, указанных Ньютоном, к 16 родам. Этот же метод он применяет и к кривым четвертого порядка, которых насчитывает 146 родов. В этом же произведении дается общее учение о касательных к кривым и круге кривизны и впервые излагается, как выше замечено, классификация поверхностей второго порядка. Своими работами Эйлер придал аналитической геометрии в основном ее современную форму.

В дифференциальной геометрии Эйлером были заложены основы теории поверхностей; он впервые пользовался криволинейными координатами и установил простую формулу, связывающую кривизну произвольного нормального сечения в данной точке поверхности с главными кривизнами (так называемая «формула Эйлера»). Он также ввел понятие наложимости поверхностей и рассмотрел поверхности, наложимые на плоскость.

Своими работами 1753 и 1779 гг. Эйлер привел в систему всю сферическую тригонометрию, указав ряд новых основных формул решения сферических косоугольных треугольников.

Очень много сделал Эйлер в тригонометрии, как элементарной, так и высшей. Как уже отмечено, ему мы обязаны аналитической трактовкой тригонометрии. До Эй-

лера каждая формула выводилась только из чертежа и по большей части выражалась словесно. Эйлер показал, как можно вывести всю систему формул тригонометрии из нескольких исходных; при этом он открыл ряд новых соотношений. Эйлер впервые исследовал знаки тригонометрических функций во всех четвертях и дал формулы приведения для общего случая. Техника записи формул была значительно упрощена благодаря единообразному обозначению сторон и противолежащих углов треугольника (см. стр. 86) и принятию радиуса основного круга равным единице.

Его знаменитые формулы, связывающие тригонометрические функции с показательными, позволили строить тригонометрию совершенно независимо от геометрии и под аргументом тригонометрической функции понимать любые величины; это дало возможность применять тригонометрию к вопросам самого разнообразного характера.

Наконец, вариационное исчисление обязано своим появлением на свет в значительной степени трудам Леонарда Эйлера, причем основное уравнение в этой дисциплине носит его имя.

Особо остановимся на работах Эйлера по теории чисел. Одной из отличительных особенностей этого универсального гения была его равная сила как в области математики непрерывного, так и математики дискретного.

Проблемы высшей арифметики интересовали Эйлера на протяжении всей его жизни. Он посвятил им 148 работ.

Эйлер возродил теорию чисел, заложив ее фундамент; до него эта отрасль науки считалась несерьезной и бесперспективной.

До Эйлера вопросами теории чисел занимался Пьер Ферма, который нашел многие важные теоремы. Однако почти ни одно доказательство не сохранилось. Эйлер доказал почти все теоремы Ферма и обобщил многие из них. Так, в 1640 г. Ферма дал основной результат зарождающейся теории сравнений — теорему, утверждающую, что число вида $a^{p-1} - 1$ всегда делится на p , если p — число простое и если a не делится на p . Это положение, носящее название «малой теоремы Ферма», было не только доказано, но и обобщено Эйлером, причем его доказательство 1758—1759 гг. является первым в математике чисто теоретико-групповым доказательством.

Ряд вопросов, поставленных Ферма, относился к так называемому диофантову анализу, т. е. к решению неопределенных уравнений в целых числах. Теория алгебраических чисел тесно связана с диофантовыми уравнениями. Изучение последних, в особенности попытки доказать так называемую великую теорему Ферма о невозможности решения в целых положительных числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ ($n > 2$), стимулировало развитие теории алгебраических чисел; проблема разложения алгебраических чисел на простые множители привела к построению теории идеалов.

В 1760 г. Эйлер дал доказательство теоремы Ферма для случая $n = 3$, причем при доказательстве он впервые рассмотрел выражения вида $a + b\sqrt{-3}$ как целые числа, т. е. обобщил само понятие целости.

Этими изысканиями Эйлера было положено начало многочисленным работам XIX века по алгебраической теории чисел.

Проблема простых чисел является одной из старейших, труднейших и основных проблем теории чисел. Решению вопроса о том, как распределены простые числа в ряде натуральных, посвящено много усилий математиков всех времен и народов. Мечтой теоретиков в области теории чисел является нахождение такой функции $f(n)$, которая давала бы только простые числа для всех положительных n . Около 1640 г. Ферма высказал предположение, что $f(n) = 2^{2^n} + 1$ есть простое для каждого натурального n , но это оказалось неверным: Эйлер установил, что $f(5)$ — составное.

Ферма открыл ряд положений о представимости простых чисел. Так, те и только те простые числа, которые имеют вид $4n + 1$, представимы формой $x^2 + y^2$, формой $x^2 + 3y^2$ — простые числа вида $3n + 1$, формой $x^2 + 2y^2$ — простые числа вида $8n + 1$ и $8n + 3$. Эйлер дал строгое доказательство двум первым утверждениям Ферма и поставил проблему определения вида простых чисел, могущих быть делителями формы $x^2 \pm Ny^2$. Этот общий подход позволил Эйлеру установить в 1772 г. фундаментальную теорему всей теории делимости — так называемую «золотую теорему» о квадратичном законе взаимности. Первое строгое доказательство этого закона было дано Гауссом.

Своими работами Эйлер положил начало и другому направлению теоретико-числовых исследований, а именно так называемой аналитической теории чисел, в которой свойства и отношения целых чисел исследуются методами анализа бесконечно малых.

Мы вообще до сих пор мало знаем о простых числах. Первый существенный результат был получен Эвклидом, доказавшим, что их бесконечное множество. Эйлер в первом томе «Введения в анализ» (раздел 15) дал новое доказательство этой теоремы, основанное на тождестве

$$\frac{1}{\prod(1 - \frac{1}{p^k})} = \sum_n \frac{1}{n^k} \quad (k > 1),$$

установленном им самим. (Здесь

умножение ведется по всем простым $p > 1$, а суммирование— по всем натуральным n .)

Этим Эйлер и положил начало применению аппарата математического анализа к исследованию проблем дискретного переменного.

Впоследствии с помощью введенной Эйлером дзета-функции $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ Чебышев и Риман установили ряд

закономерностей в распределении простых чисел в натуральном ряду.

Наконец, нельзя не упомянуть, что от Эйлера ведут свое начало почти все исследования по аддитивной теории чисел. Особенно знамениты две проблемы этой теории: проблема Варинга и проблема Гольдбаха — и в решении обеих Эйлер сделал некоторый шаг вперед.

В 1770 г. английский математик Варинг (1736—1798) высказал гипотезу, формулировка которой следующая: для всякого $n \geq 2$ существует такое $r = r(n)$, что всякое $N > 0$ может быть представлено в виде $N = x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n$ ($x_i \geq 0$ и целые), т. е. надо доказать, что при любом целом положительном n всякое целое число N может быть представлено в виде суммы ограниченного числа n -х степеней целых чисел. Ферма догадывался, что всякое натуральное число есть сумма четырех квадратов, и это было доказано впервые Эйлером. Первое общее доказательство (для произвольного n) было найдено Д. Гильбертом в 1909 г., однако он получил слишком грубую

оценку для r . В 1934 г. советский математик академик И. М. Виноградов дал новое решение проблемы Варинга; при этом он сильно снизил оценку для числа слагаемых, необходимых для представления достаточно больших N : $r < 6n (\ln n + 1)$ при $n \geq 16$. Оценка, данная Виноградовым, близка к окончательной.

Так называемая проблема Гольдбаха возникла из переписки в 1742 г. между петербургским академиком Христианом Гольдбахом (1690—1764) и Леонардом Эйлером. Она заключается в том, что всякое целое число, большее трех, может быть разложено на сумму не более чем трех простых чисел. В своем ответе Гольдбаху Эйлер (в письме от 30. VI. 1742) заметил, что для решения проблемы достаточно доказать, что каждое четное число есть сумма двух простых. Как и проблема Варинга, проблема Гольдбаха долго не поддавалась решению. В 1937 г. тому же И. М. Виноградову удалось доказать ослабленную теорему, состоящую в том, что всякое достаточно большое нечетное число представляется суммой трех простых чисел.

Задача Эйлера о разбиении четного числа на сумму двух простых еще не решена.

Приоритет Эйлера в ряде открытий

Интересно отметить, что имеется ряд положений в математике, которые принято связывать с именами ряда ученых, между тем они либо были указаны много раньше Эйлером, либо так или иначе связаны с трудами Эйлера. Приведем ряд примеров.

1. Если Эйлер даже писал, что «комплексные числа существуют только в нашем воображении», то в одной из своих последних работ он высказался за возможность геометрического представления комплексных чисел вида $a + bi$ как точек плоскости («Opuscula analytica», т. 11, Спб., 1785, стр. 80 и др.), однако реализовать ее не смог. Впервые идея геометрического представления мнимых чисел содержится в работе «Руководство алгебры» (1685) английского математика Джона Валлиса (1616—1703), затем геометрическую интерпретацию комплексных чисел дали Арган, Гаусс и другие.

2. Знаменитые условия Коши — Римана в теории аналитических функций по справедливости должны называться

условиями Даламбера — Эйлера. Они впервые найдены Даламбером в 1752 г. (работа «Опыт новой теории сопротивления жидкости») и Эйлером (работа «Последнее исследование формул мнимых интегралов» — «Ulterior disquisitio de formulis integrabilis imaginariis», доложенная в Петербургской Академии наук 21 марта 1777 г., напечатанная в 1797 г., а также работа «О представимости поверхности на плоскости» — «De representatione superficiei super plano», Acta Sc. Petrop.; I, 1777). В этой работе Эйлер показал, что рассматриваемые условия являются условиями конформности отображения. Эйлер положил начало теории конформных отображений. Термин «конформный» ввел несколько позднее в 1789 г. петербургский академик Ф. И. Шуберт.

3. Знаменитое уравнение Лапласа мы встречаем в работах Лагранжа, а еще раньше в работах Эйлера по гидродинамике 1752—1754 гг.; Лапласом это уравнение было рассмотрено в 1782 г. в его трудах по теории тяготения.

4. Интеграл $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, важный в теории вероятностей, впоследствии названный интегралом Пуассона, был известен Эйлеру.

5. Так называемые интегралы Френеля $\int_0^t \cos \frac{\pi u^2}{2} du$ и $\int_0^t \sin \frac{\pi u^2}{2} du$ в действительности были известны Эйлеру; так, в работе, доложенной в Петербургской Академии наук 30 апреля 1781 г. и опубликованной в 1794 г., Эйлер получил интегралы $\int_0^{\infty} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, т. е. они были получены еще до рождения французского физика О. Френеля (1788—1827).

6. Формулы для вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, так называемые формулы Фурье, были известны уже Эйлеру, который дал их вывод посредством почленного интегрирования в 1777 г. (опубликовано в 1798 г.). Однако следует отметить, что до Эйлера они были указаны Клеро в 1757 г. Кроме того, Фурье ими широко пользовался, в то время как у Эйлера и Клеро они исполь-

зовались спорадически. Сами же тригонометрические ряды, или так называемые ряды Фурье, впервые ввел Эйлер в 1748 г. Они вскоре нашли многочисленные приложения как в работах самого Эйлера, так и в трудах Д. Бернулли, Даламбера, Клеро и других.

7. Так называемый метод вариации произвольных постоянных (вариации параметров) Лагранжа впервые был применен Эйлером в его сочинении о морских приливах и отливах (1740), а затем в некоторых работах по небесной механике, в частности приложении к его первой лунной теории (*Theoria motuum Lunae*), опубликованной в 1753 г. Этот же прием независимо открыл Д. Бернулли (1740). Впоследствии Лагранж развил этот метод и пользовался им с большим успехом.

8. Гипергеометрический ряд иногда исторически неправильно называют «гауссовым рядом», хотя он был уже знаком Эйлеру, и он исследовал в 1778 г. его свойства (опубл. в 1801 г. «Опыт преобразования особых рядов» — *Specimen transformationis singularis serierum, Nova acta*», т. 12, стр. 58—70).

9. Нужно также отметить, что так называемые уравнения Лагранжа первого и второго рода были уже написаны в «Механике», «Теории движения твердых тел» и в гидродинамических работах.

10. Так называемый «парадокс Даламбера» в гидродинамике был дан и доказан еще ранее Эйлером в его примечаниях к книге Робинса «Новые начала артиллерии» (*Neue Grundsätze der Artillerie mit Anmerkungen von L. Euler*), Берлин, 1745). В отличие от Даламбера Эйлер дал строгое общее доказательство и разъяснил также причину расхождения «парадокса» с опытом («Пояснение сопротивления жидкостей» — *Dilucidationes de resistentia fluidorum, Novi Comm. Acad. Sc. Petr.*», 8, 1760—1761). В качестве причины этого несоответствия между содержанием парадокса и действительностью Эйлер указывает на срыв струй с задней стороны тела и в связи с этим предлагает заострять корму корабля.

Список подобных примеров можно было бы увеличить.

Отмечая приоритет Эйлера в ряде открытий, вовсе не утверждается, что все связанное с той или иной теорией принадлежит Эйлеру — сделанное им было часто развито, обобщено и углублено его последователями.

Главнейшие труды Эйлера

Феноменальной была трудоспособность Эйлера, ни с чем не сравнимая производительность; он всегда рвался к работе и скорей отказывался от пищи, чем от занятий. Известно сейчас не менее 886 его сочинений по самым разнообразнейшим труднейшим вопросам. Указанное число работ составляется в основном из следующего: 600 статей в периодических изданиях и сборниках Петербургской Академии наук, 130 статей в мемуарах Берлинской Академии и изданных в Берлине сборниках, 30 статей в разных журналах Германии, Франции, России и других стран, 40 книг отдельных сочинений и 15 мемуаров, представленных на соискание премий Парижской Академии наук.

Наиболее крупные труды Эйлера следующие:

- 1) Введение в арифметику (1738—1740, немецк., два тома, Спб.).
- 2) Введение в алгебру (1770, немецк., Спб.).
- 3) Введение в анализ бесконечно малых (1748, латынь, два тома, Лозанна).
- 4) Дифференциальное исчисление (1755, латынь, Берлин).
- 5) Интегральное исчисление (1768—1770, латынь, три тома, Спб.).
- 6) Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума (1744, латынь, Лозанна).
- 7) Механика в аналитическом изложении (1736, латынь, два тома, Спб.).
- 8) Теория движения твердых тел (1765, латынь, Росток).
- 9) Механика жидких тел (наиболее важный мемуар относится к 1769, латынь, Спб.).
- 10) Сопrotивление колонн (1757, франц., Берлин).
- 11) Новые начала артиллерии Робинса, переведенные с английского и снабженные необходимыми объяснениями и многими примечаниями (1745, немецк., Берлин).
- 12) Теория движения планет и комет (1744, латынь, Берлин).
- 13) Теория движения Луны (1753, латынь, Берлин).
- 14) Теория движения Луны, пересмотренная новым методом (1772, латынь, Спб.).

- 15) Теория приливов и отливов (1740, латынь, Париж).
- 16) Устройство объективов из двух стекол (ахроматических, латынь, 1762, Спб.).
- 17) Диоптрика (1769—1771, латынь, три тома, Спб.).
- 18) Теория музыки (1739, латынь, Спб.).
- 19) Диссертация о магните (1743—1744, латынь, Париж).
- 20) Морская наука (1749, латынь, Спб.).
- 21) Полная теория конструкции и вождения кораблей (1773, франц., Спб.).
- 22) Письма к одной немецкой принцессе о разных предметах физики и философии (1768—1772, франц., три тома, Спб.).

Высказывания об Эйлере видных ученых

Эйлер был избран членом королевского общества в Лондоне (Английской Академии наук), был также членом Туринской, Лиссабонской и Базельской Академий, иностранным сочленом Парижской Академии наук.

Леонард Эйлер был при жизни наивысшим авторитетом для математиков всего мира.

«Если вы действительно любите математику, — говорил Лагранж, — читайте Эйлера; изложение его сочинений отличается удивительной ясностью и точностью».

«Читайте, читайте Эйлера, — говорил Лаплас, — он учитель нас всех».

Даламбер в одном из своих писем к Лагранжу называет Эйлера «*ce diable d'honneur*» («этот дьявол»), как бы желая высказать этим, что сделанное Эйлером превышает силы человеческие.

Дидро, знаменитый французский философ-материалист (1713—1784), писал, что «он охотно отдал бы» все им созданное «за страницу трудов г. Эйлера».

Гаусс отмечал, что изучение трудов Эйлера является наилучшей школой в различных областях математики и что ничто не может заменить этого изучения.

Д. Бернал, современный английский историк науки, называет Эйлера в своем известном труде «Наука и общество» «королем всех математиков».

Высоко ставили Эйлера и последующие крупнейшие наши русские математики. Так, Чебышев считал Эйлера

гениальным математиком вслед за Ньютоном, часто указывая на то, что многие вопросы науки, разрабатываемые в его время, были намечены Эйлером. М. В. Остроградский добивался у министра просвещения царской России издания полного собрания произведений Эйлера. В письме к Н. Н. Фуссу он писал: «Эйлер создал современный анализ, один обогатил его более, чем все его последователи, вместе взятые, и сделал его могущественнейшим орудием человеческого разума».

А. Н. Крылов говорил, что «Эйлер в то время справедливо считался первым математиком в мире» и что, «создав новые методы, показав их приложения к решению новых вопросов», он, «так сказать, проложил новые пути для быстрого движения науки вперед».

Бывший президент Академии наук СССР, известный физик С. И. Вавилов характеризует широту творческих интересов Эйлера так: «Деятельность Эйлера многогранна и разностороння. Он занимался почти всем, что интересовало в то время математиков от теории чисел до теории движения Луны, от вопроса продольного изгиба стержней до теоретических вопросов суммирования функций».

* * *

*

Недавно, 15 апреля 1957 г. наша страна, а вместе с ней и все прогрессивное человечество отмечало славную дату 250-летия со дня рождения Л. Эйлера. Этому событию были посвящены две торжественные сессии, созванные Академией наук СССР в Ленинграде (15—18 апреля 1957 г.) и Германской Академией наук в Берлине (21—23 марта 1957 г.). В связи с юбилейной датой изучению творческого наследия великого ученого наши советские научные работники посвятили десятки оригинальных работ. Появился и ряд переводов капитальных трудов Л. Эйлера на русский язык.



ЛИТЕРАТУРА

для желающих углубить свои знания о жизни
и творчестве Л. Эйлера

Сочинения по истории естествознания (отдельные разделы)

- Д а н н е м а н Ф., История естествознания, т. 2 и 3, ОНТИ, 1938.
- «История Академии наук СССР», т. I, изд. АН СССР, М.—Л., 1958.
- «История естествознания в России», т. I, ч. I, 1957.
- К у д р я в ц е в П. С., История физики, т. I, Учпедгиз, 1948.
- К у з н е ц о в Б. Г., Развитие научной картины мира в физике XVII—XVIII вв., изд. АН СССР, 1955.
- Л а з а р е в П. П., Очерки по истории русской науки, изд. АН СССР, 1950.
- Р о з е н б е р г е р Ф., История физики, Гостехиздат, 1933.
- Р а й н о в Т. П., Русское естествознание второй половины XVIII в. и Ломоносов. Сб. «Ломоносов», изд. АН СССР, 1940.
- С о б о л ь С. Л., История микроскопа, изд. АН СССР, М—Л., 1949.
- Г а н н е р и П., Исторический очерк развития естествознания в Европе, Гостехиздат, 1934.

Общие работы по истории математики (отдельные разделы)

- Г н е д е н к о Б. В., Очерки по истории математики в России, Гостехиздат, 1946.
- Г н е д е н к о Б. В., Курс теории вероятностей. Краткий очерк истории теории вероятностей, Гостехиздат, 1950.
- Д е л о н е Б. Н., Математика и ее развитие в России, изд. «Правда», 1948.
- Д е л о н е Б. Н., Развитие теории чисел в России, «Ученые записки МГУ», вып. 91, т. I, кн. I, 1947.
- Д е п м а н И. Е., Рассказы о математике, Детгиз, 1954.
- К л е й н Ф., Лекции о развитии математики в XIX ст., Гостехиздат, 1937.

Колмогоров А. Н., Математика. Ст. в БСЭ, т. 26, 1954
Маркушевич А. И., Очерки по истории теории аналитических функций, Гостехиздат, 1951.

Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.

Молодой В. Н., Очерки по вопросам обоснования математики, Учпедгиз, 1958.

Тимченко И. Ю., Основания теории аналитических функций, «Записки математ. отд. Новороссийского об-ва естествоиспытателей», Одесса, 1892—1899.

Цейтлен Г. Г., История математики в XVI и XVII веках, ОНТИ, 1938.

Шереметевский В. П., Очерки по истории математики, Учпедгиз, 1940.

Юшкевич А. П., Исторический очерк истории развития теории дифференциальных уравнений в книге В. В. Степанова «Курс дифференциальных уравнений», Гостехиздат, 1953.

Bell E. T., Mathematics Queen and Servant of Science, 1951.

Bell E. T., Men of Mathematics, 1937.

Eves H., An introduction to the history of mathematics, New York, 1953.

Cantor M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 3, Leipzig, 1898.

Работы по истории механики и техники

Данилевский В. В., Русская техника, Лениздат, 1947.

Моисеев Н. Д., Очерки развития теории устойчивости. Гостехиздат, 1949

Космодемьянский А. А., Очерки по истории теоретической механики в России, «Ученые записки МГУ», вып. 122, т. 2, 1948.

Работы, содержащие данные для общей характеристики жизни и творчества Л. Эйлера, а также биографические сведения

Башмакова И. Г. и Юшкевич А. П., Леонард Эйлер, «Историко-математические исследования», т. 7, Гостехиздат, 1954.

Бобылев, Эйлер. Статья в энциклопед. словаре Брокгауза и Эфрон, т. 79, 1904.

Винтер Э. и Юшкевич А. П., О переписке Леонарда Эйлера и Г. Ф. Моллера Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Глинка М. Е., Леонард Эйлер (опыт иконографии) Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Даниэль М., Леонард Эйлер, «Известия Краснодарского инженерно-строительного института», № 1, 1934.

Князев Г. А. Силуэтные портреты Леонарда Эйлера работы Ф. Антинга. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

К о л ь м а н Э., Вклад Эйлера в развитие математики в России, «Вопросы истории естествознания и техники», т. 4, 1957.

К о п е л е в и ч Ю. Х., Материалы к биографии Леонарда Эйлера, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

К о п е л е в и ч Ю. Х., Переписка Л. Эйлера и Я. В. Брюса, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

К о п е л е в и ч Ю. Х. и К р а с о т к и н а Т. А., Эпистолярное наследие Л. Эйлера в архивах СССР, «Вестник истории мировой культуры», т. 3, 1957.

К р а с о т к и н а Т. А., Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

К о с т р о в о в К. И., Об одной попытке издать труды Леонарда Эйлера, «Историко-математические исследования», т. 7, Гостехиздат, 1954.

К р ы л о в А. Н., Леонард Эйлер. Сб. «К 150-летию со дня смерти Эйлера», изд. АН СССР, 1933.

К у л ь б к о Е. С., Педагогические воззрения Леонарда Эйлера. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Л а в р е н т ь е в М. А., Вступительная речь на юбилейной научной сессии, посвященной 250-летию со дня рождения Л. Эйлера. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Л и т в и н о в а Е. Ф., Лаплас и Эйлер, «Библиотека Ф. Павленкова», 1892.

Л и т в и н о в а Е. Ф., Даламбер, его жизнь и научная деятельность, «Библиотека Ф. Павленкова», 1891.

Л и т в и н о в а Е. Ф., Л. Эйлер, «Сотрудничество», 1919.

Л о м о н о с о в М. В., Избранные философские произведения, изд. МГУ, 1950.

Л у з и н Н. Н., Эйлер, журн. «Социалистическая реконструкция и наука», вып. 8, 1933.

М и х а й л о в Г. К., Леонард Эйлер, «Известия АН СССР, отд. тех. наук», № 1, 1955.

М и х а й л о в Г. К., Къ переезду Леонарда Эйлера в Петербург, «Известия АН СССР, отд. тех. наук», № 3, 1957.

М и х а й л о в Г. К., Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

М и х а й л о в Г. К., Леонард Эйлер, ПММ, 21, 1957. «Материалы к биографии Эйлера», журн. Министерства народного просвещения, № 11, 1834.

М о л о д ш и й В. Н., Основы учения о числе в XVIII веке, Учпедгиз, 1953.

О т р а д н ы х Ф. П., Жизнь и творчество Чебышева, «Советская наука», 1953.

П е к а р с к и й П. П., История Академии наук, т. I, изд. Академии наук, 1870; т. 2, 1873.

П е к а р с к и й П. П., Наука и литература в России при Петре Великом, изд. «Общественная польза», т. 1—2, 1862.

П е к а р с к и й П. П., Екатерина II и Эйлер, «Записки Академии наук», т. 6, 1865.

Прудников В. Е., Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков, Учпедгиз, 1956.

Саткевич А., Леонард Эйлер, «Русская старина», т. 132, 1907.

Смирнов В. И., Кулябко Е. С., Михаил Софронов, русский математик середины XVIII века, изд. АН СССР, 1954.

Смирнов В. И., Переписка Леонарда Эйлера. Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. 2, М., 1956.

Смирнов В. И., Леонард Эйлер, «Вестник АН СССР», т. 3, 1957.

Сухомлинов М. И., История Российской Академии наук, вып. 1, 2, 3, изд. Академии наук, 1874—1888 гг.

Павлова Г. Е., Забытое свидетельство современника о смерти Леонарда Эйлера. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Петров А. Н., Памятные эйлеровские места в Ленинграде. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

«Ученая корреспонденция Академии наук XVIII века» (1766—1782), изд. АН СССР, 1937.

Холщевников, Эйлер. Ст. БСЭ, стар. изд., т. 63.

Ченакал В. Л., Эйлер и Ломоносов (к истории их научных связей). Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Чернов С. Н., Леонард Эйлер и Академия наук. Сб. «К 150-летию со дня смерти Эйлера», изд. АН СССР, 1933.

«Леонард Эйлер». Очерк жизни и деятельности, «Вестник инженеров и техников», № 10, 1938.

Юшкевич А. П., Эйлер и русская математика XVIII века. Труды Института истории естествознания, т. 3, 1949.

Юшкевич А. П., Леонард Эйлер, «Успехи математических наук», 12 : 4 (76), 1957.

Юшкевич А. П., Эйлер Леонард. Ст. БСЭ, т. 48, 1957.
E n s t r ö m G., Verzeichniss der Schriften L. Eulers, Leipzig, 1910—1913.

Condorcet, Eloge d' Euler, 1783.

Fuss N., Eloge de m. Leonhard Euler (Nova acta Ac Sc. Petr., 1787).

Füter R., Leonhard Euler, Basel, 1948.

Мировоззрение Эйлера

Котек В. В., Учение Леонарда Эйлера об абстракции. «Научн. записки Укр. Академии с.-х. наук», т. 9, 1957.

Котек В. В., К вопросу о мировоззрении Леонарда Эйлера, Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. 4, 1959.

Котек В. В., Про філософські погляди Леонарда Ейлера Історико-матем. збірник, т. I, вид. АН УРСР, 1959.

Кузнецов Б. Г., Физика Эйлера и учение Лейбница о монадах. Труды Института истории естествознания, т. 2, изд. 1948.

Кузнецов Б. Г., Абсолютное пространство в механике Эйлера. Труды Института истории естествознания, т. 1 изд. 1947.

Работы, характеризующие Эйлера как математика

Александрова Н. В., Некоторые вопросы истории вариационного исчисления. Труды Института истории естествознания и техники, т. 22, изд. АН СССР, 1959.

Башмакова И. Г., О доказательстве основной теоремы алгебры «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

Болгарский Б. В., Основные этапы развития тригонометрии и ознакомление с ними учащихся, «Математика в школе», 1956, № 1.

Белозеров С. Е., Роль Эйлера в развитии теории функций комплексного переменного, «Ученые записки Ростовского н/Д университета», т. 14, серия физ.-мат., вып. I, 1951.

Бирман К. Р., Задачи галуэзского лото в работах классиков теории вероятностей, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

Венков Б. А., О работах Эйлера по теории чисел. Сб. «К 150-летию со дня смерти Эйлера», изд. АН СССР, 1933.

Выгодский М. А., Вступительная статья к «Дифференциальному исчислению» Эйлера, Гостехиздат, 1949.

Выгодский М. А., Математическая строгость в XVIII в. Труды совещания по истории естествознания 24—26 декабря 1946, М.—Л., 1948.

Выгодский М. А., Предисловие к русскому переводу первого тома «Интегрального исчисления» Эйлера, 1956.

Гнеденко Б. В., О работах Л. Эйлера по теории вероятностей, теории обработки наблюдений и страхованию. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Гнеденко Б. В., Про дослідження Л. Ейлера з теорії ймовірностей, теорії обробки спостережень, демографії та страхування. Іст.-матем. зб., т. I, вид. АН УРСР, 1959.

Гельфонд А. О., Роль работ Л. Эйлера в развитии теории чисел. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Гельфонд А. О., О некоторых характерных чертах идей Л. Эйлера в области математического анализа и его «Введение в анализ бесконечно малых» «Успехи математических наук», 12 : 4(76), 1957.

Делоне Б. Н., Эйлер как геометр. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Добровольский В. О., Граве Д. О. про пріоритет Ейлера в одному питанні аналізу. Іст.-мат. зб. т. I, вид. АН УРСР, 1959.

Кравчук М. Ф., Влияние Эйлера на дальнейшее развитие математики, 1935.

Кушнир Е. А., Решение Л. Эйлером разностных обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами методом определенных интегралов, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

Курант Р. и Роббинс Г., Что такое математика, Огиз, 1947.

Лурье С. Я., Эйлер и его «исчисление нулей». Сб. «К 150-летию со дня смерти Эйлера», изд. АН СССР, 1933.

Л у р ь е С. Я., Неопубликованная научная переписка Эйлера. Сб. «К 150-летию со дня смерти Эйлера», изд. АН СССР, 1933.

Л у р ь е С. Я., Вступительная статья к «Введению в анализ бесконечно малых» Эйлера, ОНТИ, 1936.

М а р к у ш е в и ч А. И., Основные понятия математического анализа и теории функций в трудах Эйлера. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

М а т в и е в с к а я Г. П., Неопубликованные рукописи Л. Эйлера по Диофантову анализу. Труды Института истории естествознания и техники, т. 22, изд. АН СССР, 1959.

М и х а й л о в Г. К., и С м и р н о в В. И., Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

М е л ь н и к о в И. Г., Эйлер и его арифметические работы, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

М е л ь н и к о в И. Г. и К и с е л е в А. А., К вопросу о доказательстве Эйлером теоремы существования первообразного корня, «Историко-математические исследования, т. 10, 1957.

О т р а д н ы х Ф. П., Математика XVIII века и Леонард Эйлер, «Советская наука», 1954.

«Очерки по истории Академии наук». Сб. «Физ.-мат. науки», изд. АН СССР, 1945.

Р е м е з Е. Я., М а е р г о й з Д. М., Логарифми та зв'язан: з ними питання шкільної математики, «Радянська школа», 1949.

Р о з е н ф е л ь д Б. А., Геометрические преобразования в работах Л. Эйлера, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

Р ы б н и к о в К. А., Первые этапы развития вариационного исчисления, «Историко-математические исследования», т. 2, ГТТИ, 1949.

С и м о н о в Н. И., О научном наследии Л. Эйлера в области дифференциальных уравнений, «Историко-математические исследования», т. 7, 1954.

С и м о н о в Н. И., Исследования Л. Эйлера в области дифференциальных уравнений и их приложений. Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда т. 2, М., 1956.

С и м о н о в Н. И. О первом периоде исследований Л. Эйлера в области обыкновенных дифференциальных уравнений. УМН, 10 : 4(66), 1956.

С и м о н о в Н. И., О первых исследованиях Ж. Даламбера и Л. Эйлера по теории линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, «Историко-математические исследования», т. 9, 1956.

С и м о н о в Н. И., Прикладные методы анализа у Эйлера, 1957.

С и м о н о в Н. И., Об исследованиях Л. Эйлера по интегрированию линейных уравнений и систем линейных уравнений с частными производными, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

Симонов Н. И., Дослідження Л. Ейлера з теорії звичайних диференціальних рівнянь. Іст.-матем. збірник, вид. АН УРСР, 1959.

Соколов Ю. Д., Основні праці Л. Ейлера в галузі аналізу нескінченно малих та теорії чисел. Іст.-матем. збірник, вид. АН УРСР, 1939.

Тесленко І. Ф., Про елементарно-геометричні роботи Л. Ейлера. Наукрві записки Львівського пед. ін-та, т. 14, 1958.

Франкль Ф. И., Об исследованиях Л. Эйлера в области теории уравнений в частных производных, «Историко-математические исследования», т. 7, 1954.

Юшкевич А. П., Математика и ее преподавание в России в XVII—XIX вв., «Математика в школе», 1947, № 4, 5.

Юшкевич А. П., Последнее письмо Л. Эйлера к Х. Гольдбаху, «Историко-математические исследования», т. 7, 1954.

Юшкевич А. П., Леонард Эйлер о квадратуре круга, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

Хованский А. Н., Работы Л. Эйлера по теории цепных дробей, «Историко-математические исследования», т. 10, 1957.

Хованский А. Н., Работы Л. Эйлера по теории цепных дробей. Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. 1, 1956.

Сочинения, содержащие данные о работе Эйлера в разных областях естествознания

Берри А., Краткая история астрономии, Огиз, 1946.

Вавилов С. И., Физическая оптика Эйлера. Сб. «К 150-летию со дня смерти Эйлера», изд. АН СССР, 1933.

Варвак П. М., Эйлер і технічні науки. Іст.-матем. збірник, т. 1, вид. АН УРСР, 1959.

Гнучева В. Ф., Ломоносов и географический департамент Академии наук. Сб. «Ломоносов», изд. АН СССР, 1940.

Дорфман Я. Г., Физические воззрения Леонарда Эйлера. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Елисеев А. А., Физический кабинет Академии наук в 1-ой половине XVIII в. и Ломоносов. Сб. «Ломоносов», изд. АН СССР, 1940.

Зубов Н. Н., Динамическая океанология, 1947.

Иванов А. А., Астрономия, 1940.

Идельсон Н. И., Замечания по поводу теории Ломоносова о кометных хвостах и вызванной ею дискуссии. Сб. «Ломоносов», изд. АН СССР, 1940.

Кириллов И. И., К 200-летию со времени выхода в свет трудов Эйлера по теории турбомашин. Труды Бежицкого ин-та транспортного машиностроения, вып. 15, 1955.

Крылов А. Н., Мои воспоминания, 1945.

Минченко Л. С., Физика Эйлера. Труды Института истории естествознания и техники, т. 19, изд. 1957.

Погребиський И. Б., Эйлер как механик. Іст.-матем. зб., т. 1, вид. АН УРСР, 1959.

Полак Л. С., Некоторые вопросы механики Леонарда

Эйлера. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Р а й к о в Б. Е., Очерки по истории гелиоцентрического мировоззрения в России», изд. АН СССР, 1947.

Р а й н о в Т. И., О роли русского флота в развитии естествознания XVIII века. Труды института истории естествознания, т. I, изд. АН СССР, 1947.

Р а с к и н Н. М., Л. Эйлер и рассмотрение проектов моста через р. Неву, ИАН, ОТН, 1957, № 3.

Р а с к и н Н. М., Вопросы техники у Эйлера. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

С л ю с а р е в Г. Г., «Диоптрика» Эйлера. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

С р е т е н с к и й Л. Н., Динамика твердого тела в работах Эйлера. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

С у б б о т и н М. Ф., Астрономические работы Леонарда Эйлера. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Ш р е д е р К., О трудах Леонарда Эйлера в области прикладных наук. Сб. «К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера», изд. АН СССР, 1958.

Ф е с е н к о в В. Г., Очерк истории астрономии в России в XVII и XVIII столетиях. Труды Института истории естествознания, т. 2, изд. АН СССР, 1948.

Ф р а н к л ь Ф. И., Гидродинамические работы Эйлера, УМН, т. 5, вып. 4, 1950.

Ф р а н к л ь Ф. И., Реферативный журн. «Механика», 1954, № 6, реферат № 3577.

Ч е н а к а л В. Л., Оптика в дореволюционной России. Труды Института истории естествознания, изд. АН СССР, т. I, 1947.

Ю р ь е в Б. Н., Советская школа аэродинамики, изд. АН СССР, 1945.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Первый период жизни (1707—1741)

Детство; годы учения; переезд на работу в Петербургскую Академию наук	3
Вариационное исчисление	14
Теория музыки	15
Вопрос о морских приливах и отливах	—
Теория теплоты	17
Отъезд Эйлера в Берлин и причины отъезда	18

Берлинский период деятельности Эйлера (1741—1766)

Начало работы в Берлине	22
Теория движения планет и комет	23
Теория магнетизма	28
Баллистика	—
Теория света	29
Теория корабля	30
Трактат по математическому анализу	32
Спор о природе логарифмов	35
Работы по оптике	36
Спор о принципе наименьшего действия	—
Труды по механике	38
Топология	—
Работы Эйлера по гидродинамике и гидравлике	40
Связь с Петербургской Академией наук	41
Отъезд Эйлера обратно в Россию	44

Второй петербургский период деятельности Эйлера (1766—1783)

Деятельность Эйлера по прибытии в Россию	48
«Письма к принцессе». Мировоззрение Эйлера	50
Теория Луны	55
Солнечный параллакс	58
Пожар. Потеря зрения	59
Продуктивность творчества Эйлера	61
Теория вероятностей	62
Работа Эйлера в комиссиях Академии наук	63
Смерть Эйлера	66
Семейное положение Эйлера	68
Школа Эйлера	70

Эйлер — отечественный ученый	72
Эйлер как человек	78
Значение Эйлера для Петербургской Академии наук	80
Общая характеристика творчества Эйлера	81
Работы Эйлера по математике	85
Приоритет Эйлера в ряде открытий	91
Главнейшие труды Эйлера	94
Высказывания об Эйлере видных ученых	95
Литература	97

Вадим Вячеславович Котек

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

Редактор *З. А. Родионова*

Художник *Ю. М. Сичов*

Художественный редактор *И. Л. Волкова*

Технический редактор *М. С. Дранникова*

Корректор *Т. Н. Смирнова*

Сдано в набор 16/XII 1960 г. Подписано
к печати 15/II 1961 г. 84×108¹/₃₂.

Печ. л. 6,75 (5,53) + вкл. 0,205.

Уч.-изд. л. 5,52 + вкл. 0,08.

Тираж 16 000 экз. А04215.

Цена без переплета 16 к., переплет 8 к.

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд

Марьиной рощи, 41.

Полиграфкомбинат

Саратовского совнархоза,

г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Заказ № 2061.

Цена 24 коп.

УЧПЕДГИЗ

1961

2/2

