**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР**

КАЛИНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б. З. ВУЛИХ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОНУСОВ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебное пособие

КАЛИНИН 1977

УДК 513.88

Учебное пособие Б.З.Вулиха «Геометрия конусов в нормированных пространствах» представляет введение в общую теорию конусов и рассчитано на студентов старших курсов университетов.

Научный редактор кандидат физико-математических наук, доцент В.Н. Никольский.

БОРИС ЗАХАРОВИЧ ВУЛИХ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОНУСОВ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебное пособие

Редактор Л.М. Быстрова
Технический редактор Н.В. Леглова
Корректор Т.В. Микушина

ЕА-00 48 2 Сдано в набор 4/II-77 г. Подписано в печать 28/II-77 г.
Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Бумага оберточная марки «0».
Физ. печ. л. 5,25. Усл. печ. л. 4,86. Уч.-изд. л. 4,64.
Тираж 500 экз. Заказ 165. Цена 50 коп.

Издано Калининским государственным университетом,
Темплан 1977, поз. 364.
170013 Калинин, 13, Желябова, 38.
Отпечатано на ротапринте КГУ.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Геометрией конусов в нормированных пространствах, в первую очередь в банаховых, начали заниматься в тридцатых годах нынешнего столетия в Одессе М.Г. Крейн и его ученики. В построенной в то же время в Ленинграде Л.В. Канторовичем общей теории полуупорядоченных пространств значительное внимание было также уделено нормированным полуупорядоченным пространствам — условно полным нормированный векторным решеткам, т. е. нормированным пространствам с конусом специального вида. Впоследствии, уже в пятидесятых годах, большой вклад в теорию конусов в банаховых пространствах внесли представители воронежской математической школы во главе о М.А. Красносельским. С тех пор и до настоящего времени в различных местах систематически появляются интересные результаты по геометрии конусов в нормированных пространствах.

Уже с середины пятидесятых годов математики в разных странах, следуя общей линии развития функционального анализа, приступили к изучению конусов в линейных топологических пространствах, обобщая, в частности, надлежащим образом и многие понятия, введенные ранее в нормированных пространствах. В настоящее время существует ряд книг, в том числе переведенная на русский язык книга Х. Шефера «Топологические векторные пространства», в которых излагается общая теория конусов в линейных топологических пространствах. Однако развитие более общей теории конусов не лишает интереса специальное изучение конусов в нормированных пространствах. Во-первых, многие результаты имеют в нормированных пространствах более простой вид и получаются значительно проще, чем в общем случае, а в то же время в ряде приложений функционального анализа нормированные пространства и сейчас продолжают играть основную роль. Во-вторых, в нормированных пространствах конусы поддаются более детальному изучению и здесь удается установить ряд специальных результатов, пока еще не перенесенных на общий случай. Поэтому наличие книг, где излагается общая теория конусов, не исключает, с нашей точки зрения, потребности в небольшой книге, посвященной теория конусов в нормированных пространствах. Вышедшая в 1962 году книга М.А. Красносельского «Положительные решения операторных уравнений» содержит сравнительно небольшое количество материала по теории конусов в банаховых пространствах, получившей значительное развитие в более поздние годы. В настоящей книге делается попытка дать современный подход к изложению основных понятий этой теории. При этом мы ограничиваемся «пространствами с одним конусом». Изучение пространств с двумя конусами потребовало бы существенного увеличения объема книги. Подчеркнем, что, в отличие от книги М.А. Красносельского, мы ведем основное изложение для произвольных нормированных пространств (их полнота не требуется), а конус не предполагается замкнутым.

Книга написана на основе специальных курсов, прочитанных автором неоднократно в Ленинградском, а также в Калининском университетах. Однако в нее включена только та часть материала этих спецкурсов, которая может быть рекомендована широкому кругу специалистов по разным разделам функционального анализа. Ряд более тонких вопросов теории конусов, рекомендуемых специалистам по функциональному анализу в упорядоченных пространствах, может составить содержание другого пособия. Литературу по этим вопросам можно найти в списке, приведенной в конца книги.

Предполагается„ что читатель знаком с основными понятиями и фактами теории нормированных пространств. Лишь в небольшом числе случаев в процессе доказательств используются некоторые более тонкие сведения из функционального анализа и топологии. Соответствующие доказательства отмечены знаком $*$. В конце книги помещено Дополнение, в котором излагаются некоторые менее элементарные факты, в основном — из функционального анализа, используемые в тексте.

Принцип нумерации теорем не требует пояснений. При ссылках на какой-нибудь параграф книги указываются только номера главы и параграфа, например: IV.3. Конец доказательств отмечается знаком $\square$.

Г.Я. Лозановский прочитал всю рукопись книги и внес ряд замечаний, позволивших существенно дополнить и улучшить первоначальное изложение. Автор выражает Г.Я. Лозановскому глубокую благодарность. Автор благодарит И.И. Чучаева и И.Ф. Даниленко, давших ему много полезных советов, О.С. Корсакову, И.П. Костенко и Г.Я. Ротковича, также прочитавших всю рукопись и оказавших помощь при окончательном редактировании книги.

I. УПОРЯДОЧЕННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть X — вещественное векторное пространство, т. е. векторное пространство над полем вещественных чисел. В дальнейшем, как правило, латинские буквы $x, y, z, \ldots$ обозначают элементы из X, а греческие $\lambda, \mu, \ldots$ — вещественные числа.

§ 1. КОНУС В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. Непустое множество $K \subset X$ называется *клином*, если:

1) $x, y \in K$, $\lambda, \mu \geq 0 \implies \lambda x + \mu y \in K$.

Если же клин K удовлетворяет дополнительному условию

2) $x, -x \in K \implies x = 0$,

то он называется *конусом*. Иногда клин, не удовлетворяющий условию 2), называют *несобственным конусом.*

Из определения клина K сразу следует, что $0 \in K$. Условие 1) означает, что клин — выпуклое множество, обладающее тем свойством, что вместе с любым своим элементом $x \neq 0$ оно содержит и весь луч, исходящий из 0 и проходящий через x. В частности, клин может содержать и всю прямую, проходящую через 0 и x. Условие 2) означает, что конус не может содержать такой прямой. Из этого условия сразу вытекает, что если $x, y \in K$ и $x + y = 0$, то $x = y = 0$. Назовем конус *нулевым*, если он состоит из одного нулевого элемента. Все пространство X может служить тривиальным примером клина.

В качестве примера рассмотрим двумерное векторное пространство $\mathbb{R}_2$ (его всегда можно интерпретировать как плоскость). Ненулевой конус в $\mathbb{R}_2$ это любой замкнутый или незамкнутый сектор с вершиной в 0 и с утлом раствора, меньший π, а также незамкнутый сектор с углом раствора π, т. е. полуплоскость (см. рис. 1). Сектор может быть и вырожденным — одномерным, т. е. сводиться к одному лучу, исходящему из 0 (сектор с углом раствора, равным 0). Замкнутая полуплоскость и вся плоскость — несобственные конусы. Пример незамкнутой полуплоскости показывает, что конус может содержать целую прямую, не проходящую через 0.

Рис. 1

Ясно, что пересечение двух клинов — тоже клин, а пересечение клина и конуса (в частности, пересечение двух конусов) — конус.

Определение. Клин K называется *воспроизводящим*, если $X = K - K$, т. е. любой элемент из X представим в виде разности двух элементов клина K.

В пространстве $\mathbb{R}_2$ воспроизводящим клином будет любой сектор с углом раствора, большим 0.

Рассмотрим один способ построения конусов в векторном пространстве, используемый в дальнейшем. Пусть $F \subset X$ — выпуклое множество, причем $0 \notin F$.

Составим множество (рис. 2)

$$K(F) = \bigcup_{0\le\alpha<+\infty} \alpha F = \{x \in X : \ \exists z \in F, \ \forall\lambda \ge 0 : \ x = \alpha z\}.$$

Покажем, что $K(F)$ — конус, и будем называть этот конус *натянутым на множество* F.

Рис. 2

Проверим, что если $x, y \in K(F)$, то $x + y \in K(F)$. Действительно, пусть $x = \alpha z$, $y = \beta u$, где $\alpha, \beta > 0$, $z, u \in F$ (случай, когда α или β равно 0, тривиален.). Тогда

$$x + y = (\alpha+\beta)v, \quad \text{где} \quad v = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}z + \frac{\beta}{\alpha+\beta}u.$$

Но вследствие выпуклости F, $v \in F$, а потому $x + y = (\alpha+\beta)F \subset K(F)$. Теперь уже ясно, что $K(F)$ — клин. Допустим, что $\pm x \in K(F)$ при $x \ne 0$. Полагая $y = -x$ и используя предыдущие обозначения, находим, что $v = 0$, а это противоречит включения $v \in F$. Таким образом, $K(F)$ — конус.

§ 2. УПОРЯДОЧЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть в X задан конус K. С его помощью введем в X частичное упорядочение, полагая $x \ge y$ (или $y \le x$), если $x - y \in K$. При таком определении неравенство $x \ge 0$ означает, что $x \in K$, и потому элементы конуса K будем называть *положительными.* Элементы конуса $-K$ (это, очевидно, конус) назовем *отрицательными*[1]. Относительно прочих элементов, не входящих в $K \cup (-K)$, будем говорить, что они *не сравнимы* с нулем. Также будем говорить, что x и y *не сравнимы* между собой, если $x - y$ не сравним с нулем.

Отметим следующие свойства введенного в X упорядочения, непосредственно вытекающие из определения:

1) $x \ge y, \ y \ge z \implies x \ge z$ (транзитивность порядка);
2) $x \ge \ \forall x \in X$ (рефлексивность);
3) $x \ge y, \ y \ge x \implies x = y$ (антисимметричность);
4) $x \ge y \implies x + z \ge y + z, \ \forall z \in X$;
5) $x \ge y \implies \lambda x \ge \lambda y \ \forall \lambda \ge 0$;
6) $x \ge y \implies \lambda x \le \lambda y \ \forall \lambda \le 0$.

Условимся называть $x \in X$ строго положительным и писать $x > 0$, если $x \in K$, но $x \ne 0$. Аналогично пишем $x > y$, если $x - y > 0$.

Например, если $X = \mathbb{R}_2$, а конус K состоит из 0 и всех векторов $x = (\xi_1, \xi_2)$ с координатами $\xi_1, \xi_2 > 0$, то $x > y$ $(y = (\eta_1, \eta_2))$ означает, что $\xi_1 > \eta_1, \ \xi_2 > \eta_2$.

Упомянем еще, что, как сразу следует из определения порядка, неравенства (одного смысла) допускают почленное сложение, а также приведем следующее простое предложение: *если для некоторых x и y выполнены оба неравенства $\pm x \le y$, то* $y \ge 0$. Действительно, почленно складывая данные неравенства, получим, что $0 \le 2y$, а тогда и $y \ge 0$.

[1]Отметим, что 0 входит в число и положительных, и отрицательных элементов, но других элементов, отличных от 0 и одновременно положительных и отрицательных, нет.

Всякое векторное пространство, в котором определено бинарное отношение $\geq$, удовлетворяющее условиям 1)–5) (условие 6) есть следствие из 5), называется *упорядоченным* (или *частично упорядоченным*) *векторным пространством.* При этом совокупность K элементов $x \geq 0$ оказывается конусом, а частичное упорядочение, порождаемое этим конусом, совпадает с исходным. Поэтому векторные пространства с конусом и упорядоченные векторные пространства, по существу, одно и то же, а упорядоченным векторным пространством (УВП) можно называть пару (X, K), где X — вещественное векторное пространство, а K — конус положительных элементов в нем. Однако для краткости, мы часто будем опускать вторую компоненту этой пары и говорить: УВП X.

Итак, пусть X — УВП. Наличие порядка позволяет ввести в X понятие интервала. Именно, если $y, z \in X$ и $y \leq z$, то *интервалом* с концами y и z называется множество

$$[y, z] = \{x \in X : \ y \leq x \leq z\}^2.$$

Например, если $X = \mathbb{R}_2$, а конус K состоит из всех векторов с неотрицательными координатами, то интервал $[y, z]$ изображается прямоугольником, указанным на рис. 3. Далее введем в X понятие множества, ограниченного сверху или снизу, а также понятие точных границ (граней). Так, например, *верхней гранью* (*супремумом*) непустого ограниченного сверху множества $E \subset X$ называется элемент $z \in X$, удовлетворяющий следующим условиям:

Рис. 3

а) $x \leq z \ \forall x \in E$ (z — верхняя граница множества E),

б) если $x \leq y \ \forall x \in E$, то $x \leq y$ (z — наименьшая верхняя граница множества E). Аналогично определяется *нижняя грань* (*инфимум*).

Легко проверить, что грани в УВП обладают многими обычными свойствами граней в множестве вещественных чисел. Например, если $\sup E$ существует, то для любого $y \in X$

$$y + \sup E = \sup(E + y).$$

Если $E, F \subset X$ и $\sup E$ и $\sup F$ существуют, то

$$\sup E + \sup F = \sup(E + F).$$

Однако не всякое непустое ограниченное сверху множество E имеет верхнюю грань, а из утверждения, что элемент y не является верхней границей множества E, вытекает лишь то, что существует $x \in E$, для которого неравенство $x \leq y$ не выполняется, но этот x может быть несравнимым с y.

Отметим следующее простое предложение: *для того чтобы конус K в УВП (X, K) был воспроизводящим, необходимо и достаточно, чтобы любое конечное множество элементов из X было ограничено сверху (или снизу).*

Действительно, если K — воспроизводящий, а $x_i \in X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то каждый x_i представим в виде $x_i = y_i - z_i$, где $y_i, x_i \in K$, и потому все $x_i \leq y \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$. Обратно, если множество из двух элементов x и 0 ограничено сверху, то существует такой $y \in K$, что $y \geq x$, и, следовательно» $y - x \in K$. При этом $x = y - (y - x)$.

[2] Мы употребляем термин «интервал» поскольку в векторном пространстве отрезком с концами y и z обычно называют совокупность элементов вида $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$, где $0 \leq \lambda \leq 1$.

В общем случае, если не предполагать конус K воспроизводящим, справедливо следующее утверждение: *если конечное множество элементов из X ограничено сверху, то оно ограничено и снизу.* Действительно, пусть $x_i \in X$ $x_i \leq x$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Легко видеть, что тогда каждый $x_i \geq y$, где $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - (n-1)x$.

Определение 1. Непустое множество $E \subset X$ называется *направленным по возрастанию* (*убыванию*), если для любых $x_1, x_2 \in E$ существует такой $x_3 \in E$, что $x_3 \geq x_1, x_2$ $(x_3 \leq x_1, x_2)$.

Определение 2. УВП X называется *дедекиндово полным*, если любое направленное по возрастанию, ограниченное сверху множество элементов из X имеет супремум.

Легко видеть, что в дедекиндово полном УВП любое направленное по убыванию, ограниченное снизу множество E элементов имеет инфимум. При этом

$$\inf E = -\sup(-E).$$

Простой пример дедекиндово полного пространства представляет n-мерное координатное пространство $\mathbb{R}_n$, в котором вектор $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \geq 0$ тогда и только тогда, когда все координаты $\xi_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Здесь непустое ограниченное сверху множество элементов имеет супремум, причем этот супремум вычисляется покоординатно.

Определение 3. УВП X называется *дедекиндово σ-полным*, если любая возрастающая, ограниченная сверху последовательность элементов из X $(x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq y)$ имеет супремум.

Так же очевидно, что в дедекиндово σ-полном УВП любая убывающая, ограниченная снизу последовательность элементов $(x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq y)$ имеет инфимум, причем $\inf x_n = -\sup(-x_n)$.

В дальнейшем мы часто будем использовать вертикальные стрелки для обозначения монотонных последовательностей: $x_n \uparrow$ означает, что последовательность возрастает, $x_n \downarrow$ означает, что последовательность убывает. Бели же последовательность возрастает и ограничена сверху элементом y, мы будем писать $x_n \uparrow y$.

§ 3. ПРИНЦИП АРХИМЕДА

Определение. УВП X называется *архимедовым*, если в нем выполнено следующее условие, называемое *принципом Архимеда*: если $x, y \in X$ и $nx \leq y$ для любого $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел), то $x \leq 0$ (т. е. $x \in -K$)[3].

Покажем, что в этом определении натуральные n можно заменить любой последовательностью чисел $\lambda_n \to +\infty$, иными словами, в архимедовом УВП верно следующее утверждение: *если $\lambda_n x \leq y$, причем $\lambda_n \to +\infty$, то $x \leq 0$.* Не уменьшая общности, можно считать, что $\lambda_n \uparrow +\infty$. Если $\lambda_n \leq \lambda \leq \lambda_{n+1}$, то $\lambda = \alpha\lambda_n + \beta\lambda_{n+1}$, где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$, а тогда ясно, что $\lambda x \leq y$. Таким образом, существует такое $\gamma > 0$, что $\lambda x \leq y$ при $\lambda \geq \gamma$, а тогда $n\gamma x \leq y$ при $n \in \mathbb{N}$ и по основной формулировке принципа Архимеда $\gamma x \leq 0$, следовательно и $x \leq 0$.

[3]Некоторые ученые, например, Г. Биркгоф, называют архимедово пространство целозамкнутым, а принципом Архимеда называют несколько более слабое утверждение: если $nx \leq y$ при любом $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то $x = 0$.

Как известно, в множестве вещественных чисел при его естественном упорядочении принцип Архимеда выполнен.

Теорема I.3.1. *Для того чтобы УВП (X, K) было архимедовым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in K$ имело место равенство*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n}\, x \right\} = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть X архимедово. Ясно, что $0 \leq \dfrac{1}{n}x$ для любого $x \geq 0$. Если $y \leq \dfrac{1}{n}x$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $ny \leq x$, и потому $y \leq 0$. Таким образом, (1) выполнено. Обратно, пусть условие теоремы выполнено и пусть $nx \leq y$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Заменяя n на $n+1$, мы сразу получим, что $nx \leq y - x$ или $x \leq \dfrac{1}{n}(y-x)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $y - x \geq 0$, то

$$\inf \left\{ \frac{1}{n}\,(y-x) \right\} = 0,$$

и потому $x \leq 0$. $\square$

Смысл принципа Архимеда становится еще более отчетливым, если учесть, что в произвольном УВП (X, K) верно лишь следующее утверждение.

Лемма. *Если $x \in K$ и если $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \dfrac{1}{n}x \right\}$ существует, то он равен* 0.

Доказательство. Если $y = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \dfrac{1}{n}x \right\}$, то $y \geq 0$. Но $y \leq \dfrac{1}{2n}x$ для любого $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $2y \leq \dfrac{1}{n}x$ $(n \in \mathbb{N})$, и поэтому $2y \leq y$, т. е. $y \leq 0$. Тем самым $y = 0$. $\square$

Теорема I.3.2. *Всякое дедекиндово σ-полное УВП (X, K) архимедово.*

Доказательство. Существование $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \dfrac{1}{n}x \right\}$ для любого $x \in K$ обеспечивается дедекиндовой σ-полнотой пространства X, а тогда остается применить лемму и предыдущую теорему. $\square$

Отметим еще, что если УВП (X, K) архимедово, то конус K не может содержать никакой прямой (ср. I.1). Действительно, допустим, что некоторая прямая $\{x \pm \lambda y\} \subset K$ $(0 \leq \lambda < +\infty)$. Тогда $\pm\lambda y \leq x$ и по принципу Архимеда $\pm y \leq 0$, т. е. $y = 0$.

Теорема I.3.3. *Если УВП X архимедово и $x \geq 0$, а множество вещественных чисел $\{\lambda_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ ограничено сверху и $\lambda = \sup\ \lambda_\alpha$, то*

$$\lambda x = \sup_{\alpha}\ \{\lambda_\alpha x\}.$$

Аналогично для множества, ограниченного снизу.

Доказательство. Ясно, что $\lambda x \geq \lambda_\alpha x$ для любого $\alpha \in A$. Пусть $y \geq \lambda_\alpha x$ для любого $\alpha \in A$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ существует $\alpha \in A$, для которого $\lambda_\alpha > \lambda - \dfrac{1}{n}$, и потому $y \geq \left(\lambda - \dfrac{1}{n}\right)x$. Отсюда $n(\lambda x - y) \leq x$ и, по принципу Архимеда, $\lambda x - y \leq 0$, т. е. $\lambda x \leq y$. $\square$

§ 4. СХОДИМОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С УПОРЯДОЧЕНИЕМ

В УВП естественным образом вводятся два вида сходимости. При этом нам придется существенно использовать не только обычные последовательности, но и направления (иначе называемые обобщенными последовательностями). Напомним это понятие. Пусть задано упорядоченное множество индексов $A = \{\alpha\}$ и каждому индексу $\alpha \in A$ сопоставлен элемент $x_\alpha \in X$. Если множество A направлено по возрастанию в том смысле, как это определено в 1.2, то функция $\{x_\alpha\}$ называется *направлением*. Частным случаем направления является обычная последовательность $\{x_n\}$, где индексы — натуральные числа. Направление называется *возрастающим* (*убывающим*), если $\alpha \le \beta$ ($\alpha,\ \beta \in A$) влечет $x_\alpha \le x_\beta$ ($x_\alpha \ge x_\beta$). Для обозначения монотонных направлений мы используем запись $x_\alpha \uparrow$ (или, соответственно, $x_\alpha \downarrow$).

Порядковая или (o)-*сходимость*: $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$, если существуют два «сжимающих» монотонных направления, убывающее $\{y_\beta\}$ и возрастающее $\{z_\gamma\}$, обладающие следующими свойствами: для любых β и γ существует такое $\alpha_0 \in A$, что

$$z_\gamma \le x_\alpha \le y_\beta \quad \text{при} \quad \alpha \ge \alpha_0 \quad \text{и} \quad x = \inf y_\beta = \sup z_\gamma.$$

Это определение может быть применено и к последовательности, однако для последовательностей обычно пользуются более простым определением: $x_n \xrightarrow{(o)} x$, если существуют такие «сжимающие» монотонные последовательности, убывающая $\{y_n\}$ и возрастающая $\{z_n\}$, что

$$z_n \le x_n \le y_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad x = \inf y_n = \sup z_n.$$

Именно так мы и будем в дальнейшем понимать (o)-сходимость в тех случаях, когда речь будет идти о последовательностях. Известно, что в общем случае определения (o)-сходимости последовательности с помощью «сжимающих» направлений и с помощью «сжимающих» последовательностей не равносильны (см., например, [13]).

Элементарно проверяются единственность предела и другие простейшие его свойства, например:

а) соотношения $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ и $x_\alpha - x \xrightarrow{(o)} 0$ равносильны;

б) если $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$, $y_\alpha \xrightarrow{(o)} y$, то $\lambda x_\alpha + \mu y_\alpha \xrightarrow{(o)} \lambda x + \mu y$ при любых λ и μ;

в) для возрастающего (убывающего) направления соотношение $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ равносильно тому, что $x = \sup x_\alpha$ ($x = \inf x_\alpha$). Для обозначения (o)-сходимости монотонных направлений мы также будем пользоваться вертикальными стрелками: $x_\alpha \uparrow x$ или, соответственно, $x_\alpha \downarrow x$.

Сходимость с регулятором или (r)-*сходимость* (здесь для простоты мы ограничимся определением для последовательностей): $x_n \xrightarrow{(r)} x$, если существуют такой $u \in K$ (называемый *регулятором сходимости*) и последовательность $\lambda_n \to +0$, что

$$\pm(x_n - x) \le \lambda_n u. \tag{2}$$

Ясно, что последовательность $\{\lambda_n\}$ можно считать убывающей.

В отличие от (o)-предела (r)-предел в УВП может не быть единственным, например, если существуют такие x и y, что $0 < nx \le y\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, то $\pm x \le \dfrac{1}{n} y$, и потому последовательность $x_n = x \xrightarrow{(r)} 0$. В то же время очевидно, что $x_n \xrightarrow{(r)} x$. Примером пространства, в котором требуемые x и y существуют, может служить пространство $\mathbb{R}_2$ с «лексикографическим» упорядочением: положительными считаются все элементы $x = (\xi_1, \xi_2)$, у которых или $\xi_1 > 0$, а ξ_2 — любое, или $\xi_1 = 0$, а $\xi_2 \geq 0$ (конус K — «полузамкнутая» полуплоскость). В таком пространстве можно положить $x = (0,1)$, $y = (1,0)$.

Теорема I.4.1. *Если УВП X архимедово, то из $x_n \xrightarrow{(r)} x$ вытекает, что $x_n \xrightarrow{(o)} x$ и, в частности, (r)-предел — единственный.*

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{(r)} x$ с регулятором u. Таким образом, согласно неравенствам (2) и теореме I.3.3,

$$-\lambda_n u \leq x_n - x \leq \lambda_n u \quad (\lambda_n \downarrow 0), \quad \inf\{\lambda_n u\} = \sup\{-\lambda_n u\} = 0,$$

и потому $x_n - x \xrightarrow{(o)} 0$, т. е. $x_n \xrightarrow{(o)} x$. $\square$

Что касается отмеченных выше для (o)-сходимости свойств а) и б), то они переносятся и на (r)-сходимость. При этом свойство б) можно сформулировать так: если $x_n \xrightarrow{(r)} x$ с регулятором u, $y_n \xrightarrow{(r)} y$ с регулятором v, то $\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow{(r)} \lambda x + \mu y$ при любых λ и μ с регулятором $u + v$. Доказательство этого предложения совершенно элементарно.

Не входя в подробности, упомянем, что для обоих видов сходимости вопрос о предельном переходе в произведении по скалярному сомножителю решается в УВП значительно сложнее, т. е. из $\lambda_n \to \lambda$ может не вытекать, что $\lambda_n x \to \lambda x$ в смысле (o)- или (r)-сходимости. Однако можно доказать, что если УВП (X, K) архимедово, а конус K воспроизводящий, то из $x_n \xrightarrow{(o)} x$ $\left(\xrightarrow{(r)}\right)$ и $\lambda_n \to \lambda$ вытекает, что $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} \lambda x$ $\left(\xrightarrow{(r)}\right)$.

§ 5. ВЕКТОРНЫЕ РЕШЕТКИ

Определение. *Векторной решеткой* (или *K-линеалом*) называется такое УВП (X, K), в котором для любого множества из двух элементов x, y существует верхняя грань: $\sup(x, y)$ (иначе обозначается $x \vee y$).

По индукции сразу получается, что в векторной решетке любое конечное (непустое) множество имеет супремум, а тогда оно имеет и инфимум (см. 1.2). Инфимум (inf) обозначается также с помощью знака $\wedge$. При этом

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = -[(-x_1) \vee (-x_2) \vee \ldots \vee (-x_n)].$$

Геометрически наличие $x \vee y$ означает, что пересечение «транслированных конусов» $K^x = K + x$ и $K^y = K + y$ есть снова транслированный конус $K^z = K + z$. Этот элемент z и равен $x \vee y$. Конус K, обладающий таким свойством при любых x и y, называется *миниэдральным.*

Рис. 4

То, что в общем случае пересечение транслированных конусов может не быть транслированным конусом, обнаруживается уже при изучении конусов в $\mathbb{R}_2$ (см. рис. 4, на котором в пересечение $K^x \cap K^y$ его «вершина» u не попадает). Легко проверить, что среди конусов в $\mathbb{R}_2$ миниэдральными являются только все замкнутые конусы, кроме одномерного, а также полузамкнутая полуплоскость. В $\mathbb{R}_3$ уже среди замкнутых конусов есть не миниэдральные, например, «круглый». Вообще, для конечномерного пространства произвольной размерности можно указать следующую характеристику миниэдрального конуса: *для того чтобы конус K в n-мерном архимедовом УВП (X, K) был миниэдральным, необходимо и достаточно, чтобы конус K был натянут на некоторый $(n-1)$-мерный симплекс F с линейно-независимыми вершинами.*

Необходимость этого условия вытекает сразу из теоремы А.И. Юдина об изоморфизме архимедовой n-мерной векторной решетки евклидову пространству $\mathbb{R}_n$ с естественным покоординатным упорядочением (см. [9] , стр. 89). Благодаря этому изоморфизму за F можно принять симплекс, натянутый на координатные орты. Достаточность получается из более простых соображений. Если $K = K(F)$, где F — симплекс, натянутый на линейно-независимые векторы $e_1, \ldots, e_n$, то K состоит из всех векторов вида $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, где $\lambda_i \geq 0$. Следовательно, если систему $\{e_1, \ldots, e_n\}$ принять за базис в X, то упорядочение в X будет покоординатным, а тогда X — архимедова векторная решетка.

Векторным решеткам посвящена специальная литература[4], и мы будем приводить необходимые нам сведения о них без доказательства. Для любого $x \in X$ положим

$$x_+ = x \vee 0, \quad x_- = (-x) \vee 0, \quad |x| = x_+ + x_- = x \vee (-x)$$

(x_+, x_- — положительная и отрицательная части элемента x, $|x|$ — его модуль). Известно, что $x = x_+ - x_-$, следовательно, в векторной решетке конус положительных элементов — воспроизводящий. Кроме того,

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Отметим, что если в векторном УВП X конус K — воспроизводящий, то при проверке его миниэдральности достаточно ограничиться положительными x и y. Иными словами, если существование $x \vee y$ доказано для любых $x,\ y \geq 0$, то X — векторная решетка. Действительно, пусть $x = u_1 - v_1$, $y = u_2 - v_2$, где $u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2 \geq 0$. Положим

$$x_1 = x + v_1 + v_2, \quad y_1 = y + v_1 + v_2.$$

Тогда $x_1,\ y_1 \geq 0$ и, следовательно, $x_1 \vee y_1$ существует. Но теперь уже до общему свойству граней существует и

$$x \vee y = (x_1 \vee y_1) - (v_1 + v_2).$$

Определение. *K-пространством* (или *пространством Канторовича*) называется такая векторная решетка, в которой всякое непустое ограниченное сверху множество имеет супремум.

Двойственным образом в K-пространстве всякое непустое ограниченное снизу множество имеет инфимум.

[4] См., например: Б.З. Вулих, [9] или W.A.J. Luxemburg и A.C. Zaanen. Riesz spaces, I (North-Holland, 1971). Отметим также, что в зарубежной литературе векторные решетки часто называют пространствами Рисса, но это название, с нашей точки зрения, исторически не обосновано.

K-пространства и составляют тот основной класс пространств, которые были определены и изучены Л.В. Канторовичем при построении им теории полуупорядоченных пространств.

Теорема I.5.1. *Если векторная решетка X дедекиндово полна, то X — K-пространство.*

Доказательство. Пусть $E \subset X$ — непустое ограниченное сверху множество. Присоединяя к нему супремумы всех его конечных подмножеств, получим множество E_1, причем совокупности верхних границ множеств E и E_1 совпадают. Поэтому достаточно показать, что среди верхних границ множества E_1 есть наименьшая. Но это вытекает из определения дедекиндовой полноты, так как множество E_1 направлено по возрастанию. □

Определение. *K_σ-пространством* называется векторная решетка, в которой всякое счетное ограниченное сверху множество имеет супремум.

Еще проще доказывается, что дедекиндово σ-полная векторная решетка — K_σ-пространство.

По теореме I.3.2 всякое K_σ-пространство — архимедово. Покажем, что в векторной решетке принцип Архимеда вытекает из следующего более простого утверждения, которое можно назвать «принципом Архимеда на конусе положительных элементов»: если $x \geq 0$ и $nx \leq y \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, то $x = 0$.

Действительно, если $nx \leq y \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, то $nx_+ \leq y_+$, откуда по принципу Архимеда на конусе $x_+ = 0$, следовательно, $x = -x_- \leq 0$.

Однако в общем случае принцип Архимеда в полном объеме из принципа Архимеда на конусе не вытекает. Это подтверждается следующим примером: $X = \mathbb{R}_2$, K — открытая полуплоскость $\xi_1 > 0$, дополненная нулем. Если $x \geq 0$ и

$$nx \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (x = (\xi_1, \xi_2),\; y = (\eta_1, \eta_2)),$$

то $n\xi_1 \leq \eta_1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, и потому $\xi_1 = 0$, а тогда и $x = 0$. В то же время, если $x = (0, 1)$, $y = (1, 0)$, то $nx < y \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, но $x \notin -K$.

§ 6. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Пусть X — векторное пространство, а K — клин в нем (в частности, X — УВП). По-прежнему будем писать $x \geq y$, если $x - y \in K$, хотя сейчас отношение $\geq$ может не быть упорядочением (оно может не быть антисимметричным). Под *линейным функционалом* на X будем понимать любой аддитивный и однородный функционал. При этом мы будем рассматривать функционалы только с вещественными значениями.

Определение. Аддитивный функционал f, заданный на X, называется *положительным* (относительно клина K), если

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in K.$$

Для положительного функционала f очевидно:

1) если $\pm x \in K$, то $f(x) = 0$;

2) если $x \leq y$, то $f(x) \leq f(y)$ (монотонность f).

Теорема I.6.1. *Если аддитивный функционал f положителен, а клин K — воспроизводящий ($X = K - K$), то f — однороден и тем самым линеен.*

Доказательство. Хорошо известно, что из аддитивности функционала вытекает его «однородность относительно рациональных множителей»: $f(rx) = rf(x)$ при рациональных r. Если же $x \in K$ и λ — произвольное вещественное число, то заключаем λ между рациональными r_1 и r_2, $r_1 \le \lambda \le r_2$; при этом из монотонности и положительности f следует, что

$$r_1 f(x) \le f(\lambda x) \le r_2 f(x); \quad r_1 f(x) \le \lambda f(x) \le r_2 f(x).$$

Но так как r_1 и r_2 могут быть сколь угодно близкими к λ, отсюда вытекает, что $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Теперь то же соотношение получается и для произвольного $x \in X$, поскольку клин K — воспроизводящий. $\square$

Будем говорить, что некоторое множество $E \subset X$ *мажорирует* клин K, если для любого $x \in K$ существует такой $y \in E$, что $x \le y$.

Теорема I.6.2 (о распространении положительного линейного функционала). *Пусть E — линейное подмножество в X, мажорирующее клин K. Всякий линейный функционал f, заданный на E и положительный относительно клина $K \cap E$*[5]*, допускает линейное положительное распространение на все пространство X.*

Доказательство. Если $E \ne X$, то выберем произвольный $z \in X \setminus E$, составим линейное множество

$$E_1 = \{x + \alpha z : \ x \in E, \ -\infty < \alpha < +\infty\}$$

и рассмотрим два случая.

1) В E существует $x_1 \le z$. Тем самым $z - x_1 \in K$, следовательно, существует $y \in E$ такой, что $z - x_1 \le y$. Тогда $x_2 = x_1 + y \in E$ и $x_2 \ge z$. Аналогично, если существует такой $x_2 \in E$, что $x_2 \ge z$, то существует и такой $x_1 \in E$, что $x_1 \le z$. Из монотонности f вытекает, что если $x_1 \le z \le x_2$, то $f(x_1) \le f(x_2)$. Выберем число c так, что

$$\sup_{x_1 \in E, \ x_1 \le z} f(x_1) \le c \le \inf_{x_2 \in E, \ x_2 \ge z} f(x_2).$$

Теперь для любого элемента из E_1 положим

$$g(x + \alpha z) = f(x) + \alpha c.$$

Ясно, что g — линейный функционал на E_1. Проверим, что он положителен относительно клина $K \cap E_1$.

Пусть $x' = x + \alpha z \in K \cap E_1$. Если $\alpha = 0$, то $x' = x \in E$, а $g(x') = f(x) \ge 0$. Если $\alpha > 0$, то $z \ge -\dfrac{x}{\alpha}$, следовательно, $f\left(-\dfrac{x}{\alpha}\right) \le c$, т. е. $-\dfrac{1}{\alpha} f(x) \le c$ или $g(x') = f(x) + \alpha c \ge 0$. Если же $\alpha < 0$, то $z \le -\dfrac{x}{\alpha}$, следовательно, $f\left(-\dfrac{x}{\alpha}\right) \ge c$ и опять $g(x') \ge 0$.

2) В множестве E таких x_1 и x_2, что $x_1 \le z \le x_2$, нет. Определим функционал g так же, как в первом случае, беря в качестве c произвольное вещественное число. Но предыдущее рассуждение показывает, что теперь $x' = x + \alpha z \in K \cap E_1$ только при $\alpha = 0$ (и $x \in K$), а тогда функционал g положителен тривиальным образом.

[5] Не исключено, что клин K может быть нулевым, и тогда условие положительности f выполнено тривиально.

Доказательство завершается, как и в теореме Гана–Банаха о распространении непрерывных линейных функционалов в нормированных пространствах или в более общей теореме о распространении линейного функционала в векторном пространстве[6], с помощью известной леммы Цорна. Из этой леммы вытекает, что среди всевозможных линейных положительных распространений функционала f на более широкие линейные множества в X существует максимальное, т. е. такое, которое не допускает дальнейшего распространения. Но тогда это и должно быть распространением на все X, поскольку в противном случае по приведенной выше схеме можно было бы осуществить еще один шаг и получить еще более широкое распространение. □

В формулировке некоторых следствий из доказанной теоремы будет использовано следующее определение.

Определение. Пусть в векторном пространстве X с клином K существует такой элемент $u \in K \setminus \{0\}$, что $\forall x \in X \ \exists \lambda > 0$, при котором $-\lambda u \leq x \leq \lambda u$. Такой элемент u называется *сильной единицей* в X.

Так, если $X = C(T)$ — пространство ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве T, а K — конус неотрицательных непрерывных функций, то сильной единицей в X будет, например, функция $u(t) \equiv 1$.

Заметим, что если u — сильная единица и $K \neq X$, то $-u \notin K$. Действительно, в противном случае для любого $x \in X$ при некотором $\lambda > 0$ мы имели бы $x \geq -\lambda u \in K$ и, следовательно, $x \in K$.

Следствие 1. *Пусть X — векторное пространство с клином K, u — сильная единица, E — линейное подмножество в X, причем $u \in E$. Тогда всякий линейный положительный функционал, заданный на E, допускает линейное положительное распространение на все X.*

Действительно, из определения сильной единицы следует, что E мажорирует K, и потому теорема применима.

Следствие 2. *Если в X есть сильная единица u и $K \neq X$, то на X существует линейный положительный функционал, отличный от нулевого.*

Доказательство. В качестве E возьмем прямую, проходящую через 0 и u: $E = \{\lambda u\}$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$. Положим $f(\lambda u) = \lambda$. Ясно, что f — линейный положительный функционал на E, причем $f(u) = 1$. Остается применить следствие 1.

Рассмотрим векторное пространство $X^\sharp$ всех линейных функционалов на X. Ясно, что совокупность $K^\sharp$ положительных линейных функционалов — клин в $X^\sharp$. Для того, чтобы $K^\sharp$ было конусом, необходимо и достаточно, чтобы клин K был воспроизводящим.

Действительно, если линейные функционалы $\pm f \in K^\sharp$, то $f(x) = 0$ для любого $x \in K$, и если K воспроизводящий, то $f(x) \equiv 0$ на всем X. Если же K не воспроизводящий, т. е. линейное подмножество $K - K \neq X$, то существует такой линейный функционал f, отличный он нулевого, что $f(x) = 0$ на $K - K$. Но тогда $\pm f \in K^\sharp$ и $K^\sharp$ не является конусом.

[6] См., например: Люстерник Л.А. и Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965, или Колмогоров А.Н. и Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М., «Наука», 1968.

§ 7. УПОРЯДОЧЕННЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Переходим к основному классу пространств, изучаемых в этой книге.

Определение. Если векторное пространство X нормировано, то УВП (X, K) называется *упорядоченным нормированным пространством* (УНП). Если при этом X банахово, то УВП (X, K) называется *упорядоченным банаховым пространством* (УБП). Если же (X, K) — УНП (соотв. УБП) и векторная решетка, то такое пространство называется *решеточно упорядоченным нормированным (соотв. банаховым) пространством* (РУНП) (соотв. РУБП). Наконец, если РУНП (РУБП) является K-пространством, то оно называется (o)*-полным* РУНП (РУБП). Аналогично, если РУНП (РУБП) является K_σ-пространством, то оно называется $(o\sigma)$*-полным* РУНП (РУБП).

Таким образом, УНП — это тройка $(X, \|\cdot\|, K)$, состоящая из векторного пространства X, заданной на нем нормы и конуса K. Но, как и раньше, мы часто будем пользоваться более краткой записью, не отмечая в обозначении УНП норму, а иногда и конус K. Подчеркнем, что в определения УНП не предполагается заранее никакой связи между порядком и топологией. Однако в последующем мы будем изучать УНП с некоторыми дополнительными условиями, накладываемыми на конус K, которые уже будут связаны с топологией.

Определение. Норма в УНП (X, K) называется *монотонной на конусе* K (иногда для краткости будем говорить просто «монотонной»), если неравенство $0 \le x \le y$ влечет $\|x\| \le \|y\|$. Однако, если (X, K) — РУНП, то понятия монотонности нормы и ее монотонности на конусе различны. В этом случае норма называется *монотонной* (или *решетчатой*), если уже неравенство $|x| \le |y|$ влечет $\|x\| \le \|y\|$. РУНП (соотв. РУБП) с монотонной нормой называется *нормированной* (соотв. *банаховой*) *решеткой*, (o)-полное (соотв. $(o\sigma)$-полное) РУНП с монотонной нормой называется *нормированным K-пространством* (соотв. *K_σ-пространством*). Если нормированное K-пространство (соотв. K_σ-пространство) полно по норме, оно называется *банаховым K-пространством* (соотв. *банаховым K_σ-пространством*)[7].

Свойство полноты по норме нормированного пространства мы будем называть также (b)*-полнотой*, и поэтому банаховы пространства иногда будут называться (b)*-полными нормированными*. Сходимость по норме будет называться также (b)*-сходимостью*.

Примером банаховой решетки может служить пространство ограниченных непрерывных функций $C(T)$ с конусом неотрицательных функций и с равномерной нормой: $\|x\| = \sup\limits_{t \in T} |x(t)|$. Если же в пространстве $\mathbb{R}_2$ с евклидовой нормой за конус положительных элементов принять замкнутый сектор, указанный на рис. 5 (получится РУБП), то норма не будет монотонной даже на конусе: например, если $x = (2, 0)$, $y = (1, 1)$, то $0 \le x \le y$, но $\|x\| = 2$, $\|y\| = \sqrt{2}$.

Рис. 5

Определение. УНП (X, K) называется *интервально полным*, если любой

[7] В существующей литературе по теории векторных решеток нормированные (соотв. банаховы) решетки называются также KN-линеалами (соотв. KB-линеалами), а нормированные K- (соотв. K_σ-)пространства — KN-пространствами (соотв. $K_\sigma N$-пространствами). Однако, и мы это особо подчеркиваем, банахово K-пространство никогда не называлось KB-пространством, поскольку в теории полуупорядоченных пространств термин «KB-пространство» занят для пространств другого, более узкого класса.

интервал в нем полон по норме (т. е. полон как метрическое пространство).

Всякое УБП (X, K), в котором конус K замкнут, интервально полно. Действительно, любой интервал $[y, z]$ представим в виде

$$[y, z] = (y + K) \cap (z - K),$$

и потому замкнут (благодаря замкнутости K), а следовательно, и полон. Примером интервально полного, но не (b)-полного УНП может служить пространство $L^\infty[a, b]$ ограниченных измеримых функций с естественным упорядочением и с интегральной нормой, индуцированной из L^1.

§ 8. УПОРЯДОЧЕНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

Непрерывные линейные функционалы на нормированном пространстве X будем называть (b)-*линейными*. Сопряженное пространство — совокупность всех (b)-линейных функционалов на X, будем обозначать X'. Если же X — УНП, то обозначим через K' совокупность положительных (b)-линейных функционалов. Ясно, что K' — клин в X'; он называется *сопряженным клином*.

Определение. Конус K в нормированном пространстве X называется *пространственным*, если $\overline{K - K} = X$, т. е. линейное множество $K - K$ всюду плотно в X.

Всякий воспроизводящий конус в нормированном пространстве — пространственный. Обратное неверно, что подтверждается следующим примером.

Пример 1. Пусть банахово пространство ℓ^1 упорядочено с помощью конуса K, состоящего из всех векторов $x = \{\xi_k\}$, у которых $\xi_k \geq 0$ при любом k и $\xi_k = 0$ при $k > k_0(x)$ (векторы, удовлетворяющие последнему условию, называются финитными). Этот конус, очевидно, не воспроизводящий, но пространственный.

Далее считаем, что (X, K) — УНП.

Теорема I.8.1. *Для того чтобы сопряженный клин K' был конусом, необходимо и достаточно, чтобы конус K был пространственным*[8].

Доказательство. Пусть конус K пространственный, $\pm f \in K'$. Тогда $f(x) = 0$ при $x \in K$, следовательно, и для любого $x \in K - K$ и потому по непрерывности $f(x) \equiv 0$ на всем X. Если же $\overline{K - K} \neq X$, то существует ненулевой функционал $f \in X'$, для которого $f(x) = 0$ на $\overline{K - K}$, и, следовательно, $\pm f \in K'$. $\square$

Все сказанное в этом параграфе сохраняет силу и в том случае, когда X — нормированное пространство с клином K (ср. I.6). Таким образом, если конус (или даже клин) K пространственный, то X' можно рассматривать как УБП, если за конус положительных элементов в X' принять сопряженный конус K'. Если же K не пространственный, то бинарное отношение $\geq$, которое вводится в X' с помощью клина K', не является упорядочением.

Отметим также, что если K' — конус, то УБП (X', K') архимедово. Действительно, если $nf \leq g$ при любом $n \in \mathbb{N}$ ($f,\ g \in X'$), то $nf(x) \leq g(x)$ при всех $x \in K$ и $n \in \mathbb{N}$, и потому $f(x) \leq 0$ при $x \in K$, а это и означает, что $f \leq 0$.

[8] Обращаем внимание читателя на то, что в аналогичном утверждении для клина $K^\sharp$ (I.6) условие было другим: K — воспроизводящий.

§ 9. U-НОРМА

Определение. Пусть в УВП X элемент u — сильная единица (I.6). Неотрицательный функционал на X, определяемый по формуле

$$\|x\|_u = \inf\{\lambda : \ \pm x \le \lambda u\}, \tag{3}$$

называется *u-полунормой.*

То, что этот функционал обладает всеми свойствами полунормы, проверяется совершенно элементарно. Если же функционал $\|\cdot\|_u$ — норма, то он называется *u-нормой*[9].

Теорема I.9.1. *Если УВП X архимедово, то $\|\cdot\|_u$ — u-норма, а нижняя грань в формуле (3) достигается, т. е. среди таких λ, что $\pm x \le \lambda u$, есть наименьшее. В частности, $\pm x \le \|x\|_u \cdot u$.*

Доказательство. Положим $\lambda_0 = \|x\|_u$. Тогда по теореме I.3.3

$$\lambda_0 u = \inf\{\lambda u\} \quad (\lambda : \ \pm x \le \lambda u),$$

и потому $\pm x \le \lambda_0 u$, т. е. наименьшее λ существует. Теперь, если $\|x\|_u = 0$, то $\pm x \le 0$, откуда $x = 0$. $\square$

Итак, каждая сильная единица u в архимедовом УВП X порождает на X некоторую u-норму. При этом, если на X уже была ранее задана какая-то норма, то u-норма в общем случае никак с ней не связана. Однако u-норму можно ввести и не предполагая u сильной единицей, но тогда она будет определена, вообще говоря, не на всем пространстве X. Именно, пусть X — архимедово УВП и $u > 0$. Положим

$$X_u = \{x \in X : \ \exists\, \lambda : \ \pm x \le \lambda u\}.$$

Ясно, что X_u — линейное множество и с порядком, индуцированным из X, т. е. с конусом $K_u = X_u \cap K$, и оно будет архимедовым УВП. Но в X_u элемент u является сильной единицей и, следовательно, в X_u можно ввести u-норму. В дальнейшем X_u будет называться *подпространством (в X) элементов, ограниченных относительно* u, а сходимость по u-норме — *(u)-сходимостью.*

Ясно, что u-норма монотонна на конусе K_u. Если же X — векторная решетка, то $(X_u, \|\cdot\|_u, K_u)$ — нормированная решетка.

Приведем простой пример. Пусть $X = L^1[a,b]$, $u(t) \equiv 1$. Тогда X_u состоит из всех ограниченных измеримых функций на $[a,b]$, т. е. $X_u = L^\infty$, а u-норма есть равномерная норма на L^∞.

В дальнейшем мы всякую нормированную (банахову) решетку с сильной единицей u, норма в которой совпадает с u-нормой, будем называть *нормированной (банаховой) решеткой ограниченных элементов.*

Теорема I.9.2. *Пусть X — архимедово УВП, $u > 0$. Тогда в УНП $(X_u, \|\cdot\|_u, K_u)$ (r)-сходимость равносильна (u)-сходимости, т. е. для $x_n \xrightarrow{(r)} x$ необходимо и достаточно, чтобы $x_n \xrightarrow{(u)} x$.*

Доказательство достаточно провести для случая, когда $x = 0$. Пусть $\|x_n\|_u \to 0$. Но $\pm x_n \le \|x_n\|_u \cdot u$, следовательно, $x_n \xrightarrow{(r)} 0$ с регулятором u. Обратно, пусть

[9] Общее понятие u-нормы введено М.Г. Крейном.

$x_n \xrightarrow{(r)} 0$ с некоторым регулятором $v \in K_u$. Тогда $\pm x_n \leq \lambda_n v$, где $\lambda_n \to 0$. Но $v \leq \alpha u$ при некоторой $\alpha > 0$, а потому $\pm x_n \leq \alpha \lambda_n u$ и $\|x_n\|_u \leq \alpha \lambda_n \to 0$. $\square$

Попутно мы показали, что в пространстве X_u (r)-сходимость с произвольным регулятором равносильна (r)-сходимости с регулятором u.

II. ТЕЛЕСНЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ КОНУСЫ

В пределах всей главы $(X, \|\cdot\|, K)$ — УНП, причем векторное пространство X предполагается не нулевым.

§ 1. ПРОСТРАНСТВА С ТЕЛЕСНЫМ КОНУСОМ

Определение. Конус K называется *телесным*, если он содержит внутреннюю точку. Все внутренние точки телесного конуса называются *сильно положительными элементами.* Если u — сильно положительный элемент, то пишем $u \gg 0$.

В классических пространствах $L_p[a,b]$ и ℓ^p $(1 \le p < +\infty)$, а также c_0 с естественным упорядочением конус положительных элементов не телесен, а в пространствах L^∞, ℓ^∞ и C — телесен. Конусы неотрицательных выпуклых или возрастающих функций в пространстве $C[a,b]$ не телесны.

Заметим, что 0 не может быть внутренней точкой конуса K, так в противном случае некоторый шар $S(0;\varepsilon)$ с центром 0 и радиусом $\varepsilon > 0$ входил бы в K, а тогда и все $X \subset K$, т. е. $K = X$, что невозможно. Очевидно, что множество сильно положительных элементов, дополненное нулем, есть также конус. Будем писать $x \gg y$, если $x - y \gg 0$. Отметим также:

а) если $x \gg y$, а $y \gg z$, или $x \ge y$, а $y \gg z$, то $x \gg z$;

б) если $x \gg y$, а $z \ge u$, то $x + z \gg y + u$;

в) если множество сильно положительных элементов не пусто, то оно всюду плотно в конусе K.

Утверждения а) и б) очевидны, а в) проверяется так: если $u \gg 0$, а $y \in K$, то $y + \varepsilon u \gg 0$ при любом $\varepsilon > 0$ (согласно б)).

Теорема II.1.1. *Если конус K телесен, то множество сильно положительных элементов совпадает с множеством сильных единиц.*

Доказательство. Пусть $u \gg 0$. Тогда замкнутый шар $\overline{S(u;\rho)} \subset K$, следовательно, для любого $x \in X$, отличного от 0, имеем

$$u \pm \frac{\rho}{\|x\|} x \in K, \quad \text{т. е.} \quad \pm x \le \frac{\|x\|}{\rho} u. \tag{1}$$

Тем самым u — сильная единица. Обратно, пусть u — сильная единица, а $x \gg 0$. По определению сильной единицы, $\pm x \le \lambda u$ при некотором $\lambda > 0$, откуда $\dfrac{1}{\lambda} x \le u$ и u сильно положителен, согласно а). □

Однако, заметим, что если конус K не телесен, то все же в пространстве X могут существовать сильные единицы. Так обстоит дело, например, в пространстве L^∞ почти всюду ограниченных измеримых функций с конусом неотрицательных функций и с интегральной нормой, индуцированной в L^∞ из L^1.

Следствие. *Телесный конус — воспроизводящий, причем всякий* $x \in X$ *представим в виде разности двух сильно положительных элементов.*

Действительно, если $u \gg 0$, то $x \le \lambda u$ при некотором $\lambda \ge 0$, а тогда $x \ll (\lambda+1)u$. При этом

$$x = (\lambda+1)u - [(\lambda+1)u - x]$$

и есть требуемое представление.

В конечномерном пространстве верно и обратное заключение и, таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема II.1.2. *Если* (X, K) *— конечномерное УБП, то конус* K *телесен тогда и только тогда, когда он воспроизводящий.*

Доказательство. Пусть конус K — воспроизводящий, а n — размерность пространства X. В конусе K выберем n линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_n$. Это возможно, так как K — воспроизводящий. Положим $u = x_1 + \ldots + x_n$. Тогда $u \in K$. Проверим, что $u \gg 0$. Так как в конечномерном нормированном пространстве (b)-сходимость равносильна сходимости по координатам, коэффициенты в разложении произвольного $x \in X$ по элементам базиса

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

суть непрерывные функция от x. Следовательно, существует такая окрестность U точки u, что

$$x \in U \Longrightarrow |\lambda_i - 1| < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Но из последнего неравенства вытекает, что $\lambda_i > 0$, и потому $U \subset K$. $\square$

В архимедовом пространстве X с телесным конусом K возьмем элемент $u \gg 0$ и построим u-норму. Из (1) следует, что

$$\|x\|_u \le \frac{1}{\rho}\|x\| \qquad \text{(здесь } \rho \text{ имеет прежний смысл: } \overline{S(u;\rho)} \subset K\text{)}$$

и, таким образом, u-топология в X, т. е. топология, определяемая u-нормой, оказывается слабее исходной топологии.

Теорема II.1.3. *Телесный конус в архимедовом УНП замкнут.*

Доказательство. Пусть $x_n \ge 0$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$. Тогда и $\|x_n - x\|_u \to 0$ $(u \gg 0)$, а потому $x_n - x \le \varepsilon_n u$, где $\varepsilon_n \to 0$. Отсюда следует, что $-x \le \varepsilon_n u$ и по принципу Архимеда $-x \le 0$, т. е. $x \ge 0$. $\square$

В дальнейшем множество в УНП будем называть (o)-*ограниченным*, если оно ограничено в смысле упорядочения, т. е. ограничено одновременно и сверху и снизу. Ограниченность по норме в нормированном пространстве будем называть (b)-*ограниченностью.*

Теорема II.1.4. *Для того чтобы в УНП* (X, K) (b)*-ограниченность множества влекла его* (o)*-ограниченность, необходимо и достаточно, чтобы конус* K *был телесным.*

Доказательство. Если K телесен, то (o)-ограниченность единичного шара вытекает из (1). Обратно, если единичный шар S (o)-ограничен, то

$$\pm x \le v \quad \forall\, x \in S\,[10].$$

[10] Непосредственно (o)-ограниченность S означает, что $z \le x \le y\ \forall\, x \in S$, причем $y \ge 0$, $z \le 0$. Но тогда $\pm x \le y - z$.

При этом $v \geq 0$. Тогда

$$v + x \geq 0 \quad \forall x \in S,$$

и потому $v \gg 0$. $\square$

Теорема II.1.5. *Если $(X, \|\cdot\|, K)$ — архимедово УНП и $u > 0$, то в пространстве $(X_u, \|\cdot\|_u, K_u)$ конус K_u телесен.*

Доказательство. Покажем, что u — внутренняя точка в K_u (в u-топологии). Действительно, если $\|x\|_u \leq 1$, то $\pm x \leq u$, т. е. $u + x \geq 0$. $\square$

Замечание. Почти все сказанное в этом параграфе переносится и на случай, когда K — клин в нормированном пространства X, отличный от всего X. Исключение составляют только факты, связанные с u-нормой, да и то лишь по причине, что мы вводили понятия u-нормы или u-полунормы только в УНП. При этом, хотя в случае клина K может существовать такой $x \neq 0$, что $\pm x \in K$, однако, если $u \gg 0$, то $-u \notin K$. Действительно, в противном случае из б) следовало бы, что $0 \gg 0$, т. е. 0 — сильно положителен, что невозможно. Таким образом, даже если K — телесный клин ($\neq X$), то множество его сильно положительных элементов, дополненное нулем, есть телесный конус.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ С ТЕЛЕСНЫМ КОНУСОМ

Будем считать, что (X, K) — УНП, однако последующее справедливо и в случае, когда K — клин, отличный от X.

Теорема II.2.1. *Если конус K телесен, то всякий положительный линейный функционал f на X (b)-линеен. При этом, если функционал f не нулевой, то $f(u) > 0$ для любого $u \gg 0$.*

Доказательство. Из (1) следует, что (при $x \neq 0$)

$$f(u) \geq \frac{\rho}{\|x\|} f(x).$$

Отсюда вытекает, что функционал f ограничен на единичном шаре, и потому (b)-линеен, а его норма

$$\|f\| \leq \frac{1}{\rho} f(u). \tag{2}$$

Тем самым, если функционал f не нулевой, то $f(u) > 0$. $\square$

Из доказанной теоремы и следствия 2 (I.6) вытекает, что в пространстве с телесным конусом (клином) всегда существует ненулевой (b)-линейный, положительный функционал.

Теорема II.2.2. *Если конус K телесен, а E — линейное подпространство в X, не содержащее сильно положительных элементов, существует такой ненулевой, (b)-линейный, положительный функционал f, что $f(x) = 0$ на E.*

Доказательство. Пусть $u \gg 0$, а

$$G = \{x : \ x = y + \lambda u, \ y \in E, \ -\infty < \lambda < +\infty\}.$$

Тогда G — линейное подмножество в X, причем для каждого $x \in G$ представление указанного вида единственно. Положим $f(x) = \lambda$ $(x \in G)$. Ясно, что f линеен;

проверим, что он положителен. Пусть $x = y + \lambda u > 0$ и допустим, что при этом $\lambda < 0$. Но тогда $-\lambda u \gg 0$ и поскольку $y \geq -\lambda u$, то и $y \gg 0$, вопреки условию. По следствию 1 из теоремы I.6.2 функционал f допускает линейное положительное распространение на X, а по предыдущей теореме это распространение будет и (b)-линейным. □

Следствие. *Если конус K телесен, а $x \in X$ таков, что $f(x) > 0$ для любого $f \in K' \setminus \{0\}$, то $x \gg 0$.*

Доказательство. Если допустить, что x не сильно положителен, то возможны два случая: или $-x \gg 0$ или оба элемента $\pm x$ не сильно положительны. В первом случае $f(-x) > 0$ для всех $f \in K' \setminus \{0\}$, и потому $f(x) < 0$. Во втором случае примем за E прямую, проходящую через x и $-x$, и применим предыдущую теорему. Тогда $f(x) = 0$ для некоторого $f \in K' \setminus \{0\}$. В обоих случаях имеем противоречие. □

Из результатов этого параграфа легко вывести часто используемую в дальнейшем теорему М. Эйдельгайта об отделимости выпуклых множеств в нормированных пространствах.

Теорема II.2.3. *Пусть X — нормированное пространство, A и B — непустые выпуклые множества в X, причем A открыто и $A \cap B = \varnothing$. Тогда существует замкнутая гиперплоскость H, отделяющая A и B, причем A лежит строго по одну сторону от H*[11].

Доказательство. Положим $C = A - B$. Ясно, что C — непустое выпуклое открытое множество, причем $0 \notin C$. Пусть K — конус, натянутый на C. При этом все точки из C суть внутренние точки конуса K. Тогда существует ненулевой (b)-линейный функционал f, для которого $f(x) > 0$ при любом $x \in C$. Следовательно, $f(x) > f(y)$ при любых $x \in A$ и $y \in B$. Примем за H гиперплоскость $f = c$, где c — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{y \in B} f(y) \leq c \leq \inf_{x \in A} f(x).$$

Тогда H отделяет A и B. Допустим, что $f(x) = c$ для некоторого $x \in A$. Так как $S(x; \rho) \subset A$ при некотором $\rho > 0$, то $c \pm f(z) \geq c$ при любом $z \in X$ с $\|z\| \leq \rho$, т. е. $f(z) = 0$ для всех таких z, а это означает, что функционал f — нулевой вопреки построению. Таким образом, $f(x) > c$ при $x \in A$. □

Следствие. *Если B — непустое, выпуклое, замкнутое множество в X, а $x_0 \notin B$, то x_0 и B отделимы замкнутой гиперплоскостью, не проходящей через x_0.*

Действительно, достаточно взять в качестве A некоторую шаровую окрестность точки x_0, которая не пересекается с B.

§ 3. ЗАМКНУТЫЕ КОНУСЫ

Как мы увидим здесь и дальше, замкнутые конусы в УНП играют существенную роль при решении ряда вопросов.

[11] Гиперплоскость H определяется уравнением $f(x) = c$ ($f \neq 0$ — линейный функционал). Замкнутость H означает, что функционал f (b)-линеен. Отделимость означает, что $f(x) \geq c$ для $x \in A$ и $f(x) \leq c$ для $x \in B$ (или наоборот), причем по отношению к A в теореме утверждается, что $f(x) > c$ при $x \in A$ (или, соответственно, $f(x) < c$).

Лемма. *Замкнутость конуса K в УНП (X, K) необходима и достаточна для того, чтобы в неравенстве можно было переходить к (b)-пределу*[12].

Доказательство. Если $x_n \geq y_n$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$, $y_n \xrightarrow{(b)} y$, то $x_n - y_n \in K$, и если K замкнут, то $x - y \in K$, т. е. $x \geq y$. Если же K не замкнут, то существует такая последовательность $x_n \xrightarrow{(b)} x$, что $x_n \geq 0$, а неравенство $x \geq 0$ выполняется. $\square$

Теорема II.3.1. *Если в УНП (X, K) конус K замкнут, $x_n \geq 0$ и $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (в смысле (b)-сходимости), то $x \geq 0$ и, более того,*

$$x \geq x_n, \quad x \geq \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Для любого n имеем

$$\sum_{k=1}^{n+p} x_k \geq \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Переходя к (b)-пределу при $p \to \infty$, получаем $x \geq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, а отсюда вытекает и все остальное. $\square$

С помощью той же леммы легко доказываются следующие предложения, справедливые в УНП (X, K) с замкнутым конусом K.

1. Если возрастающая последовательность $x_n \xrightarrow{(b)} x$, то $x = \sup x_n$.

Доказательство. Если $m \geq n$, то $x_m \geq x_n$. Переходя в этом неравенстве к (b)-пределу при $m \to \infty$, получаем $x \geq x_n$, и это верно при любом $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, если $x_n \leq y$ при всех n, то с помощью предельного перехода отсюда вытекает, что и $x \leq y$. Таким образом, $x = \sup x_n$. $\square$

2. Если $x_n \xrightarrow{(o)} x$ и $x_n \xrightarrow{(b)} y$, то $x = y$.

Доказательство. Пусть $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — «сжимающие» монотонные последовательности для $\{x_n\}$, $y_n \downarrow x$, $z_n \uparrow x$. Тогда при $m \geq n$ имеем

$$z_n \leq z_m \leq x_m \leq y_m \leq y_n,$$

а, следовательно, и $z_n \leq y \leq y_n$. Переходя в крайних членах неравенства к точным границам, получим, что $x \leq y \leq x$, откуда $x = y$. $\square$

Доказанные предложения справедливы и для направлений.

Теорема II.3.2. *Если конус K замкнут, то УНП (X, K) архимедово.*

Доказательство. Пусть $nx \leq y$ или $x \leq \dfrac{1}{n} y$ для всех n. Переходя в неравенстве к (b)-пределу, получим, что $x \leq 0$. $\square$

Из теорем II.1.3 и II.3.2 немедленно вытекает

Следствие. *В пространстве с телесным конусом принцип Архимеда равносилен замкнутости конуса.*

Аналогичный результат справедлив и в любых конечномерных пространствах без предположения о телесности конуса.

[12] Переход в неравенстве к (o)-пределу всегда возможен.

Теорема II.3.3. *Если (X, K) — конечномерное УБП, то принцип Архимеда равносилен замкнутости конуса K.*

Доказательство. Пусть конечномерное пространство (X, K) архимедово. Положим $E = K - K$. Тогда УБП (E, K) тоже архимедово. В E конус K воспроизводящий, и потому, по теореме II.1.2, телесен, а тогда по предыдущему следствию K замкнут в E. Но E, как подпространство в конечномерном пространстве X, замкнуто, а потому и конус K замкнут в X. $\square$

В то же время в бесконечномерном архимедовом УБП (X, K) конус может не быть замкнутым. Действительно, рассмотрим пространство ℓ^1 из примера 1 (I.8). Выделенный там конус, очевидно, не замкнут. С другой стороны, если

$$nx \le y \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x = \{\xi_k\}, \quad y = \{\eta_k\},$$

то $n\xi_k \le \eta_k$, и потому $\xi_k \le 0$. Кроме того, из неравенства $x \le y$ вытекает, что $\xi_k = \eta_k$ при $k > k_0$, где $k_0 \in \mathbb{N}$, а из неравенства $2x \le y$ вытекает, что $2\xi_k = \eta_k$ при всех $k > k_1$ ($k_1 \in \mathbb{N}$). Отсюда следует, что $\xi_k = 0$ при всех $k > k_0, k_1$. Таким образом, $x \le 0$ и принцип Архимеда выполнен.

Теорема II.3.4. *Если F — не пустое, (b)-ограниченное, замкнутое, выпуклое множество в нормированном пространстве X и $0 \notin F$, то натянутый на него конус $K(F)$ (см. I.1) замкнут.*

Доказательство. Пусть $x_n = \lambda_n y_n$, где $y_n \in F$, $\lambda_n > 0$, и пусть $x_n \xrightarrow{(b)} x \ne 0$. Проверим, что $x \in K(F)$. Так как F (b)-ограничено и замкнуто, а $0 \notin F$, то существуют такие постоянные $M \ge m > 0$, что $m \le \|y_n\| \le M$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и тогда

$$\frac{1}{M} \inf \|x_n\| \le \lambda_n \le \frac{1}{m} \sup \|x_n\|.$$

Следовательно, некоторая частичная последовательность $\lambda_{n_i} \to \lambda_0 > 0$. Тем самым

$$y_{n_i} = \frac{1}{\lambda_{n_i}} x_{n_i} \xrightarrow{(b)} \frac{1}{\lambda_0} x,$$

а потому $\dfrac{1}{\lambda_0} x \in F$ и $x \in K(F)$. $\square$

Рис. 6

Заметим, что в условии этой теоремы нельзя отбросить требование (b)-ограниченности множества F. Например, если в $\mathbb{R}_2$ в качестве F взять множество, указанное на рис. 6, где границей F служит ветвь гиперболы, то конусом $K(F)$ будет незамкнутый сектор.

§ 4. (b)-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ С ЗАМКНУТЫМ КОНУСОМ

Будем считать, что конус K в УНП (X, K) замкнут.

Лемма. *Если $x_0 \notin K$, то существует $f \in K'$, для которого $f(x_0) < 0$.*

Доказательство. По следствию из теоремы Эйдельгайта (II.2,3) конус K и точка x_0 отделимы замкнутой гиперплоскостью $f(x) = c$, не проходящей через x_0. Будем считать, что $f(x) \ge c$ на K и $f(x_0) < c$. Так как $0 \in K$ и $f(0) = 0$, то $c \le 0$, следовательно, $f(x_0) < 0$. С другой стороны, для любого $x \in K$

$$f(x) = \frac{1}{n}\, f(nx) \geq \frac{c}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

откуда $f(x) \geq 0$ и $f \in K'$.

Некоторые результаты из II.2 усиливаются в следующем направлении.

Теорема II.4.1. *Для любого $x_0 > 0$ существует такой $f \in K'$, что $f(x_0) > 0$.*

Эта теорема вытекает непосредственно из леммы, так как $-x_0 \notin K$.

Замечание. Из доказательств видно, что предыдущая лемма (но не теорема) верна и в случае пространства с замкнутым клином K. В то же время для незамкнутого конуса лемма и теорема не верны. Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_2$ с лексикографическим упорядочением (см. I.4) элемент $(0,1)$ можно представить как (b)-предел последовательности отрицательных элементов, а потому для любого (b)-линейного положительного функционала $f(0,1) = 0$. Обобщение теоремы II.4.1 для незамкнутого конуса будет сформулировано в следующем параграфе.

Теорема II.4.2 (М.Г. Крейн [20]). *В сепарабельном УНП X с замкнутым конусом K существует строго положительный (b)-линейный функционал f, т. е. такой, что $f(x) > 0$ для любого $x > 0$.*

Доказательство. Пусть $L = K' \cap B'$, где B' — замкнутый единичный шар в сопряженном пространстве X'. Известно, что B' в слабой топологии — компактное метрическое пространство[13], следовательно, оно сепарабельно, а тогда и L — сепарабельное метрическое пространство. Пусть $\{f_n\}_1^\infty$ — плотное множество в L. Положим

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n.$$

Тогда $f_0 \in K'$. Если $x \geq 0$, а $f_0(x) = 0$, то $f_n(x) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $f(x) = 0$ и для любого $f \in L$ тем самым, и для любого $f \in K'$. Отсюда, по предыдущей теореме, $x = 0$. $\square$

В несепарабельном пространстве эта теорема неверна. Действительно, рассмотрим пространство ℓ_T^∞, где T — произвольное несчетное множество с естественным покоординатным упорядочением. Ясно, что конус положительных элементов в этом пространстве замкнут. В то же время очевидно, что не может существовать положительный линейный функционал, который был бы больше 0 на всех ортах из пространства ℓ_T^∞.

§ 5. ЗАМЫКАНИЕ КОНУСА

Пусть теперь X — УНП с ненулевым конусом K. Ясно, что замыкание $\overline{K}$ — клин, однако $\overline{K}$ может не бить конусом. Например, если в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_2$ конус K — незамкнутая полуплоскость, то $\overline{K}$ — замкнутая полуплоскость, а это

[13] См. А.Н. Колмогоров и С.В. Фомин, IV.3. Поскольку нам не придется использовать слабую топологию, наведенную в сопряженном пространстве X' с помощью X'', мы для краткости будем называть $*$-слабую топологию просто слабой, и, соответственно, в этом же смысле будем понимать такие термины, как слабое замыкание, слабая компактность.

уже не конус. Более того, как показывает следующий пример, не исключено, что $\overline{K} = X$.

Пример 2. Пусть $X = \ell^1$, а конус K состоит из 0 и всех финитных векторов, у которых последняя не равная 0 координата положительна. Покажем, что $\overline{K} = X$, а для этого достаточно установить, что K плотен в множестве всех финитных векторов. Но если $x = (\xi_1, \dots, \xi_p, 0, \dots)$ — произвольный финитный вектор, то полагая

$$x_n = \left(\xi_1, \dots, \xi_p, \frac{1}{n}, 0, \dots\right),$$

мы сразу получим, что $x_n \in K$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$[14].

Составляя прямую сумму рассмотренного пространства с любым нормированным пространством, мы можем получить УНП, в котором $\overline{K}$ линейно, но не совпадает со всем пространством. Таким образом, возможны случая: 1) конус K плотен в X, 2) K не плотен, но $\overline{K}$ линейно, 3) K не плотен и $\overline{K}$ не линейно (из нелинейности $\overline{K}$, конечно, вытекает, что K не плотен). Если $\overline{K}$ линейно, то $\overline{K - K} = \overline{K}$; таким образом, для неплотного пространственного конуса его замыкание не может быть линейным.

Замечание. Если K — телесный конус, то его замыкание $\overline{K}$ также не может быть линейным множеством. При этом, если $u \gg 0$, то $-u \notin \overline{K}$. Действительно, согласно замечанию в конце II.1, если $u \gg 0$, то $-u \notin \overline{K}$. Но некоторая окрестность V элемента u состоит только из сильно положительных элементов, а тогда окрестность $-V$ элемента $-u$ не пересекается с K, и потому $-u \notin \overline{K}$.

Легко понять, что лемма из предыдущего параграфа переносится на УНП с незамкнутым конусом в следующем виде: если $x_0 \notin \overline{K}$, то существует $f \in K'$, для которого $f(x_0) < 0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить лемму из II.4 к пространству X с клином $\overline{K}$. Тем самым теореме II.4.1 можно придать следующий более общий вид: для того чтобы для заданного x_0 в пространстве X с клином K существовал такой $f \in K'$, что $f(x_0) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $-x_0 \notin \overline{K}$.

§ 6. ОБЩИЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ (b)-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть опять (X, K) — УНП с произвольным ненулевым конусом K.

Теорема II.6.1. а) *Для существования на X ненулевого функционала $f \in K'$ необходимо и достаточно, чтобы $\overline{K} \neq X$.*

б) *Для существования такого функционала $f \in K'$, который не равен тождественно 0 на конусе K, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{K}$ не было линейным множеством.*

Теорема сохраняется и в случае, когда K — клин.

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из рассмотрения следующих трех случаев. Если $\overline{K} = X$, а $f \in K'$, то $f(x) \geq 0$ для любого $x \in X$ и, следовательно, $f(x) \equiv 0$. Пусть теперь $\overline{K} \neq X$, но $\overline{K}$ — линейное множество. Пусть $x_0 \notin \overline{K}$. По лемме из II.4 (справедливой и для клина), существует такой (b)-линейный функционал f, что $f(x) \geq 0$ на $\overline{K}$, а следовательно, $f(x) \equiv 0$

[14] Любопытно, что в этом примере $K - K = K \cup (-K)$.

на $\overline{K}$ и $f(x_0) < 0$. Наконец, если $\overline{K}$ — не линейное множество, то существует такой $x_0 \in \overline{K}$, что $-x_0 \in \overline{K}$. Тогда существует такой (b)-линейный f, что $f(x) \geq 0$ на $\overline{K}$ и $f(-x_0) < 0$, а тем самым $f(x_0) > 0$. Но тогда по непрерывности f существует и $x \in K$, для которого $f(x) > 0$. $\square$

Учитывая замечание в конце II.5, мы сразу получим доказанный выше (II.2) результат о существовании ненулевых (b)-линейных положительных функционалов в пространстве с телесным конусом.

§ 7. О РАЗЛОЖЕНИИ (b)-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Теорема II.7.1 (И. Намиока [41]). *Пусть в УБП (X, K) конус K замкнут. Если $f \in X'$ ограничен на любом (o)-ограниченном подмножестве из X, то он представим в виде разности двух положительных (b)-линейных функционалов.*

Доказательство. Для любого $x \geq 0$ положим

$$p(x) = \sup_{0 \leq y \leq x} f(x).$$

Тогда очевидно:

1) $0 \leq p(x) < +\infty$; $f(x) \leq p(x)$;

2) функционал p положительно однороден;

3) $p(x_1 + x_2) \geq p(x_1) + p(x_2)$ для любых $x_1,\ x_2 \in K$.

Покажем, что существует такая постоянная C, что $p(x) \leq C\|x\|$ для любого $x \in K$. Если это не так, то существует последовательность элементов $x_n \in K$, для которых

$$\|x_n\| = \frac{1}{n^2}, \quad p(x) > n.$$

Тогда при любом n существует такой $y_n \leq x_n$ $(y_n > 0)$, что $f(y_n) > n$. Однако все $y_n \leq x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и по условию множество $\{f(y_n)\}$ должно быть ограничено.

Рассмотрим вспомогательное пространство $Z = X \times \mathbb{R}_1$ (его элементы суть пары $z = (x, \lambda)$) с нормой $\|z\| = \|x\| + |\lambda|$. В Z выделим конус

$$K_1 = \{z :\ x \geq 0,\ \lambda \leq p(x)\}.$$

Элемент $z_0 = (0, 1) \notin \overline{K}_1$. Действительно, если предположить, что существуют такие $z_n = (x_n, \lambda_n) \in K_1$, что $z_n \xrightarrow{(b)} z_0$, то $x_n \xrightarrow{(b)} 0$, $\lambda_n \to 1$. Но $\lambda_n \leq p(x_n) \to 0$ и мы приходим к противоречию. По лемме из II.4 на Z существует такой (b)-линейный функционал ψ, что $\psi(z) \geq 0$ на $\overline{K}_1$ и $\psi(z_0) < 0$. Напомним, что лемму из II.4 мы могли бы применить и в случае, если бы $\overline{K}_1$ оказалось клином.

Теперь положим $\varphi(x) = \psi(x, 0)$. Ясно, что φ — (b)-линейный функционал на X, а так как $(x, 0) \in K_1$, если $x \in K$, то $\varphi \in K'$. Для любого $z = (x, \lambda)$ имеем

$$\psi(z) = \varphi(x) + \lambda\psi(z_0).$$

Если $x \in K$, то $z = (x, p(x)) \in K_1$, и потому

$$\varphi(x) + p(x)\psi(z_0) \geq 0,$$

откуда $p(x) \leq g(x)$, где $g(x) = -\dfrac{\varphi(x)}{\psi(z_0)}$. Но $g \in K'$, а $f \leq g$, и потому равенство $f = g - (g - f)$ дает требуемое представление. $\square$

Следствие. *Если (X, K) удовлетворяет условиям теоремы, а функционал $f \in X'$ представим в виде разности двух линейных положительных функционалов, то он представим и в виде разности (b)-линейных положительных функционалов.*

Вытекает из того, что всякий линейный положительный функционал ограничен на любом (o)-ограниченном множестве.

§ 8. ПОЧТИ ВНУТРЕННИЕ ТОЧКИ КОНУСА

Пусть (X, K) — УНП, в котором $\overline{K} \neq X$. Напомним, что в этом случае, согласно теореме II.6.1, $K' \setminus \{0\} \neq \varnothing$.

Определение. Точка $u \in K$ называется *почти внутренней*, если $f(u) > 0$ для любого $f \in K' \setminus \{0\}$[15].

Почти внутренние точки могут существовать только, если конус K — пространственный. Действительно, в противном случае, по теореме I.8.1, сопряженный клин K' — не конус, т. е. существует такой f, что $\pm f \in K' \setminus \{0\}$.

Из теоремы II.2.1 и следствия из теоремы II.2.2 вытекает, что если конус K телесен, то почти внутренние точки конуса K совпадают с его внутренними точками. Однако, если конус K не телесен, т. е. внутренних точек нет, то почти внутренние точки все же могут существовать. Например, в пространстве L^1, построенном на любом пространстве с σ-конечной мерой, при естественном его упорядочении, любая функция, которая больше 0 почти всюду, — почти внутренняя точка конуса положительных элементов (а этот конус не телесен). С другой стороны, в дискретном пространстве $\ell^2(T)$, где T — несчетное множество, также при естественном его упорядочении, в конусе положительных элементов нет ни одной почти внутренней точки.

Ясно, что множество почти внутренних точек, дополненное нулем, — конус. Так же, как в II.1 проверяется, что если множество почти внутренних точек не пусто, то оно всюду плотно в конусе K. Следующая теорема дает некоторые условия, при которых гарантируется существование почти внутренних точек.

Теорема II.8.1. *Если в сепарабельном УБП (X, K) конус K — замкнутый и пространственный, то почти внутренние точки существуют.*

Доказательство. Выделим в конусе K счетное всюду плотное множество элементов $x_n > 0$. Положим

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|x_n\|} x_n.$$

Ясно, что $u \in K$. Если $f \in K'$ и $f(u) = 0$, то и $f(x_n) = 0$ для любого n, а потому $f(x) = 0$ для любого $x \in K$. Но поскольку конус K пространственный, отсюда следует, что $f(x) \equiv 0$ на X. Таким образом, u — почти внутренняя точка конуса K. $\square$

С понятием почти внутренней точки тесно связано понятие квазивнутренней точки. Именно, элемент $u > 0$ называется *квазивнутренней точкой* конуса K, если множество X_u элементов, ограниченных относительно u, плотно в пространстве

[15] Почти внутренние точки изучались И.А. Бахтиным [5].

X ([28], стр. 304). Легко видеть, что квазивнутренняя точка u является и почти внутренней. Действительно, если $f \in K'$ и $f(u) = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на всем X_u, а потому и на X. Значит, u — почти внутренняя точка. Легко проверить, что в нормированной решетке понятия квазивнутренних и почти внутренних точек совпадают.

III. НЕСПЛЮЩЕНННЫЕ КОНУСЫ

Хотя изложение ведется для УНП (X, K), но все последующее справедливо и для пространств с клином K.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА НЕСПЛЮЩЕННОГО КОНУСА

Определение. Конус K называется *несплющенным*, если существует такое число M, что любой $x \in X$ представим в виде $x = u - v$, где $u,\ v \in K$, причем $\|u\|,\ \|v\| \le M\|x\|$. В этом случае мы будем также говорить, что конус K *несплющен с константой* M. Если конус K не является несплющенным, мы будем называть его иногда *сплющенным*.

По самому определению несплющенный конус — воспроизводящий. Однако не всякий воспроизводящий конус — несплющенный. Соответствующий пример приведен в § 3. Из определения также следует, что если конус несплющен, то констант несплющенности бесчисленное множество. Однако, как показывает следующий пример, среди них может не быть наименьшей.

Пример 3. Рассмотрим $\mathbb{R}_2$ с нормой $\|x\| = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$ и с конусом $K = \{x \in \mathbb{R}_2 :\ \xi_1 > 0,\ \xi_2 \ge 0\} \cup \{0\}$. Так как для любого $x \in \mathbb{R}_2$ при любом $\varepsilon > 0$ справедливо разложение

$$x = (\xi_1^+ + \varepsilon, \xi_2^+) - (\xi_1^- + \varepsilon, \xi_2^-)$$
$$(\xi^+ = \max(\xi, 0), \quad \xi^- = \max(-\xi, 0)),$$

то K несплющен с любой константой $M > 1$. Однако 1 уже не является для него константой несплющенности. Например, если $x = (1, -1)$, то его представление в виде разности положительных элементов возможно лишь такое:

$$x = (1 + \varepsilon, \delta) - (\varepsilon, 1 + \delta) \quad (\varepsilon > 0,\ \delta \ge 0).$$

При этом $\|(1 + \varepsilon, \delta)\| > 1$, тогда как $\|x\| = 1$.

Несплющенность конуса K с константой M означает, что множество $B \cap K - B \cap K$ (где B — единичный шар из X) содержит шаровую окрестность нуля радиуса $\dfrac{1}{M}$ и, следовательно, само является окрестностью нуля[16].

Отметим следующие простые предложения:

а) Если конус несплющен, то он остается несплющенным и при переходе к любой другой эквивалентной норме. Однако константы несплющенности при переходе к

[16] В [37] и [46] про конус, обладающий таким свойством, говорится, что он дает открытое разложение пространства X, а норма в этом случае называется разложимой.

эквивалентной норме могут изменяться. В частности, эквивалентную норму всегда можно ввести так, что любое число, большее 1, будет константой несплющенности. Для этого достаточно принять за новую норму $\|\cdot\|'$ функционал Минковского[17], построенный по окрестности нуля $B \cap K - B \cap K$ (эта окрестность выпукла, симметрична и ограничена). Эквивалентность этой нормы и первоначальной $\|\cdot\|$ вытекает из очевидного неравенства $\frac{1}{2}\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$ (M — прежняя константа несплющенности).

б) Всякий телесный конус несплющен. Действительно, из формулы (1) гл. II вытекает, что равенство

$$x = \frac{\|x\|}{\rho}u - \left(\frac{\|x\|}{\rho}u - x\right) \quad (u \gg 0)$$

дает представление элемента x в виде разности положительных, причем $M = \frac{\|u\|}{\rho}+1$ — константа несплющенности.

в) Константа несплющеннности (в ненулевом пространстве) не может быть меньше $\frac{1}{2}$. В то же время существует пример УБП, построенный И.И. Чучаевым, в котором конус несплющен о константой $\frac{1}{2}$.

Теорема III.1.1. *Если в УНП (X, K) конус K несплющен, а Y — пополнение пространства X по норме и $\overline{K}_Y$ — замыкание конуса K в Y, то $\overline{K}_Y$ — воспроизводящий клин.*

Доказательство. Пусть $y \in Y$. Тогда существуют такие $x_n \in X$, что $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, $\|x_n\| < \frac{1}{n^2}$ при $n \geq 1$. Для каждого n существуют такие $u_n,\ v_n \in K$, что $x_n = u_n - v_n$, $\|u_n\|,\ \|v_n\| < \frac{M}{n^2}$ при $n \geq 1$ (M — константа несплющенности конуса K). Положим $u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, $v = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$. Тогда $u_n,\ v_n \in \overline{K}_Y$, а $y = u - v$. $\square$

Следующее определение имеет смысл и тогда, когда конус K не воспроизводящий, а лишь пространственный.

Определение. Конус K называется *почти несплющенным*, если для любого $x \in X$ существуют такие (b)-ограниченные последовательности положительных элементов $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, что $u_n - v_n \xrightarrow{(b)} x$.

Всякий воспроизводящий конус почти несплющен: любой x имеет вид $x = u - v$ ($u,\ v \in K$) и достаточно положить $u_n = u$, $v_n = v$. Примером почти несплющенного, но не воспроизводящего конуса может служить конус финитных векторов с неотрицательными координатами в пространстве ℓ^1.

[17]Если V — выпуклая, симметричная и ограниченная окрестность нуля, то соответствующий функционал Минковского определяется формулой

$$\rho(x) = \inf\{\lambda :\ \lambda \geq 0,\ x \in \lambda V\},$$

и это и есть норма.

§ 2. ТЕОРЕМА КРЕЙНА–ШМУЛЬЯНА

Пусть снова (X, K) — произвольное УНП. Для любого числа $\lambda > 0$ положим $E_\lambda = \{x \in X :$ существуют такие $u,\ v \in K$, что $x = u - v$, $\|u\|,\ \|v\| \le \lambda\}$. Ясно, что множество E_λ симметрично (если $x \in E_\lambda$, то и $-x \in E_\lambda$) и выпукло. А тогда и множество $\overline{E}_\lambda$ тоже симметрично и выпукло.

Лемма 1. *Если* $\overline{S(0;r)} \subset \overline{E}_\lambda$, *то* $\overline{S(0;\alpha r)} \subset \overline{E}_{\alpha\lambda}$ *(*$\alpha > 0$*).*

Очевидно.

Лемма 2. *Если пространство X банахово, а конус K замкнут, и если существуют такие r и λ, что* $\overline{S(0;r)} \subset \overline{E}_\lambda$, *то K несплющен с константой* $M = 2\dfrac{\lambda}{r}$.

Доказательство. Пусть $\|x\| \le r$. Тогда $\dfrac{3}{4}x \in \overline{E}_\lambda$ и, следовательно, существует такой $x_1 \in E_\lambda$, что $\left\|\dfrac{3}{4}x - x_1\right\| < \dfrac{r}{4}$. При этом $\|x_1\| < r$, а $\|x - x_1\| < \dfrac{r}{2}$. По лемме 1 $S\left(0; \dfrac{1}{2}r\right) \subset \overline{E}_{\frac{1}{2}\lambda}$, и потому аналогично существует такой $x_2 \in E_{\frac{1}{2}\lambda}$, что $\|x_2\| < \dfrac{r}{2}$, $\|(x - x_1) - x_2\| < \dfrac{r}{4}$. Продолжая рассуждать по индукции, мы построим последовательность элементов x_n так, что $x_n \in E_{\frac{1}{2^{n-1}}\lambda}$, $\|x_n\| < \dfrac{r}{2^{n-1}}$, $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right\| < \dfrac{r}{2^n}$. А тогда $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n = u_n - v_n$, где $u_n,\ v_n \in K$ и $\|u_n\|,\ \|v_n\| \le \dfrac{\lambda}{2^{n-1}}$. Положим $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $v = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ((b)-сходимость этих рядов обеспечена (b)-полнотой пространства X). Тогда $x = u - v$, $u,\ v \in K$, $\|u\|,\ \|v\| \le 2\lambda$. □

Лемма 3. *Если в УБП (X, K) конус K замкнутый и почти несплющенный, то он несплющен.*

Доказательство. Из определения почти несплющенности следует, что для любого $x \in X$ существует такое натуральное ρ, что $x \in \overline{E}_\rho$. Таким образом, $X = \bigcup\limits_{\rho=1}^{\infty} \overline{E}_\rho$. Вследствие (b)-полноты пространства X существует такое ρ, при котором $\overline{E}_\rho$ содержит некоторый шар $\overline{S(x_0;r)}$. Тогда и шар $\overline{S(-x_0;r)} \subset \overline{E}_\rho$ вследствие симметричности множества $\overline{E}_\rho$. Если теперь $\|y\| \le r$, то $y = \dfrac{1}{2}[(x_0+y)+(-x_0+y)] \in \overline{E}_\rho$ благодаря выпуклости множества $\overline{E}_\rho$. Таким образом, $\overline{S(0;r)} \subset \overline{E}_\rho$ и остается сослаться на лемму 2.

В доказанной лемме содержится как частный случай следующая

Теорема III.2.1 (М.Г. Крейн, В.Л. Шмульян [18]). *Если в УБП (X, K) конус K замкнутый и воспроизводящий, то он несплющен*[18].

Следствие. *Если в УБП (X, K) клин $\overline{K}$ — воспроизводящий, то конус K почти несплющен.*

Доказательство. По теореме Крейна–Шмульяна клин $\overline{K}$ несплющен; тогда для любого $x \in X$ справедливо разложение $x = u - v$ ($u,\ v \in \overline{K}$), где $\|u\|,\ \|v\| \le M\|x\|$ (M — постоянная). Но $u = (b)\text{-}\lim u_n$, $v = (b)\text{-}\lim v_n$, где $u_n,\ v_n \in K$, и обе

[18] Еще раз подчеркнем, что теорема Крейна–Шмульяна справедлива и для пространства с клином.

последовательности (b)-ограничены. $\square$

Заметим, однако, что если конус в УБП замкнутый и пространственный, то нельзя утверждать, что он почти несплющен. Например, в пространстве $C[a,b]$ с обычной нормой конус неотрицательных возрастающих (в широком смысле) функций — пространственный: каждая непрерывная функция есть предел равномерно сходящейся последовательности функций ограниченной вариации, например, полиномов. Однако этот конус не почти несплющен, так как в противном случае: по лемме 3 он был бы воспроизводящим, что неверно.

Теорема III.2.2. *Если в УБП (X,K) конус K замкнутый и воспроизводящий, то всякий положительный линейный функционал на X (b)-линеен.*

Доказательство. Пусть f — положительный линейный функционал на X, B — единичный шар в X, $B_+ = B \cap K$. Проверим ограниченность f на B_+. Допуская противное, мы построим последовательность элементов $x_n \in B_+$, для которых $f(x_n) > n^2$. Положим $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n^2}$. Тогда $x \geq 0$ и при любом N $f(x) \geq \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^2} f(x_n) > N$, что невозможно. Теперь для любого $x \in B$, благодаря несплющенности конуса K, найдем такие $u,\ v \geq 0$, что $x = u - v$, $\|u\|,\ \|v\| \leq M$ (M — константа несплющености). Следовательно, $|f(x)| \leq f(u) + f(v) \leq 2M \sup\limits_{x \in B_+} f(x)$ и тем самым функционал f ограничен на B, и поэтому (b)-линеен. $\square$

Замечание. В доказанной теореме условие замкнутости конуса существенно. Именно покажем, что в любом бесконечномерном банаховом пространстве X можно ввести упорядочение с помощью некоторого воспроизводящего конуса K так, что в УБП (X,K) будут существовать положительные линейные, но не непрерывные функционалы.

С этой целью выделим в пространстве X базис Гамеля $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и образуем конус K из всех элементов, разложение которых по базису Гамеля $x = \sum c_\alpha(x) e_\alpha$ имеет неотрицательные коэффициенты[19]. Тогда конус K — воспроизводящий, а коэффициенты $c_\alpha(x)$ суть линейные положительные функционалы в УБП (X,K). Докажем, что непрерывных функционалов среди них может быть лишь конечное число. Допустим, что для некоторого счетного множества индексов α_k $(k = 1, 2, \ldots)$ функционалы c_{α_k} непрерывны. Подберем числа $\lambda > 0$ так, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_{\alpha_k}$ (b)-сходится, и пусть x — его сумма, а x_n — его частичные суммы: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_{\alpha_k}$, $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_{\alpha_k}$. Тогда $c_{\alpha_k}(x_n) \to c_{\alpha_k}(x)$ при любом k. Но среди коэффициентов $c_\alpha(x)$ может быть лишь конечное число отличных от 0, следовательно, существует k, при котором $c_{\alpha_k}(x) = 0$. С другой стороны, если $n \geq k$, то $c_{\alpha_k}(x_n) = \lambda_k > 0$, и мы получаем противоречие с предположенной непрерывностью c_{α_k}.

[19] Базисом Гамеля в векторном пространстве X называется всякая система линейно независимых элементов, линейная оболочка которой равна X. Базис Гамеля существует во всяком векторном пространстве. Таким образом, если $\{e_\alpha\}$ — базис Гамеля, то любой $x \in X$ представим единственным способом в виде $x = \sum c_\alpha(x) e_\alpha$, где на самом деле имеется лишь конечное число слагаемых, отличных от 0. Легко проверить, что в бесконечномерном банаховом пространстве базис Гамеля несчетен.

§ 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕСПЛЮЩЕННОСТЬЮ КОНУСА (b)-ПОЛНОТОЙ ПРОСТРАНСТВА

(b)-полнота пространства в теореме Крейна–Шмульяна играет существенную роль. Например, в УНП (X,K) функций ограниченной вариации на отрезке $[0,1]$ с конусом K неотрицательных возрастающих функций и с равномерной нормой $\|x\| = \sup|x(t)|$ конус K замкнутый и воспроизводящий, однако он сплющен. Последнее мы обнаружим, если рассмотрим функцию $x(t) = \sin 2\pi nt$ ($n \in \mathbb{N}$). Если $y \in K$ и $y \geq x$, то непременно $y(1) \geq 2n$, а, следовательно, и $\|y\| \geq 2n$, тогда как $\|x\| = 1$.

Приведем попутно пример, показывающий, что в теореме Крейна–Шмульяна нельзя отказаться и от замкнутости конуса K, а именно, незамкнутый и к тому же миниэдральный конус в УБП может быть сплющенным.

Пример 4 (Г.Я. Лозановский [23]). В банаховом пространстве $C[a,b]$ выберем базис Гамеля, состоящий из неотрицательных функций $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$, и образуем конус K из всех функций, разложение которых по базису Гамеля $x = \sum c_\alpha(x)\varphi_\alpha$ имеет неотрицательные коэффициенты. Тогда УБП (X,K) оказывается изоморфным как упорядоченное векторное пространство K-пространству финитных векторов $\{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ с покоординатным упорядочением, а конус K — воспроизводящий. При этом, если $x \in K$, то $x(t) \geq 0$ при всех t (обратное неверно), а потому если $0 \leq x \leq y$, то $\|x\| \leq \|y\|$.

Допустим, что K несплющен с константой M. Пространство C сепарабельно, и потому в конусе K существует счетное всюду плотное множество $P = \{x_k\}$. Множество A' тех индексов α, при которых α-ая координата хоть одного из x_k отлична от 0, счетно. Пусть $\alpha_0 \in A \setminus A'$ (ведь A несчетно), $x = \varphi_{\alpha_0} \in K$. При любом $\varepsilon > 0$ существует такой $x_k \in P$, что $\|x - x_k\| < \varepsilon$. Тогда $x - x_k = u - v$, где $u,\ v \in K$, $\|u\|,\ \|v\| < M\varepsilon$. Отсюда $x_k + u \geq x = \varphi_{\alpha_0}$. Но так как $c_{\alpha_0}(x_k) = 0$, то предыдущее неравенство возможно лишь при $u \geq x$. Следовательно, $\|x\| \leq \|u\| < M\varepsilon$ и, вследствие произвольности ε, $\|x\| = 0$, что невозможно. Тем самым мы доказали, что конус K сплющен.

Теорема III.3.1. *Пусть (X,K) — УНП и конус K замкнутый и воспроизводящий. Для того чтобы пространство X было (b)-полным, необходимо и достаточно, чтобы:*

а) *конус K был несплющен,*

б) *каждая возрастающая (b)-фундаментальная последовательность элементов из K имела (b)-предел.*

Доказательство. Необходимость условий получается с помощью теоремы Крейна–Шмульяна, докажем их достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ (b)-фундаментальна. Переходя, если это нужно, к частичной последовательности, можно сразу считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < +\infty.$$

Благодаря несплющенности конуса K существуют такие $u_n,\ v_n \in K$, что

$$x_{n+1} - x_n = u_n - v_n; \qquad \|u_n\|,\ \|v_n\| \leq M\|x_{n+1} - x_n\|$$

(M — постоянная). Из последней оценки вытекает, что последовательности частичных сумм рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ (b)-фундаментальны, а потому, согласно условию б), эти ряды (b)-сходятся. Но тогда и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ тоже (b)-сходится и $(b)\text{-}\lim x_n$ существует. □

Замечание. Из доказательства видно, что в части достаточности теорема верна и без предположения о замкнутости конуса K.

§ 4. ДЕДЕКИНДОВА ПОЛНОТА СОПРЯЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

Лемма. *Если (X, K) — УНП с несплющенным конусом K, а f, g, h — линейные функционалы на X, причем $f \le g \le h$*[20] *и $f, h \in X'$, то и $g \in X'$.*

Доказательство. Не уменьшая общности можно считать, что $f = 0$. Если $x_n \in K$ и $x_n \xrightarrow{(b)} 0$, то $h(x_n) \to 0$, а из неравенства $0 \le g(x_n) \le h(x_n)$ следует, что и $g(x_n) \to 0$. Для произвольной последовательности $x_n \xrightarrow{(b)} 0$ находим такие $u_n,\ v_n \in K$, что

$$x_n = u_n - v_n, \quad \text{а} \quad \|u_n\|,\ \|v_n\| \le M\|x_n\|,$$

где M — константа несплющенности. Тогда и $u_n \xrightarrow{(b)} 0$, $v_n \xrightarrow{(b)} 0$, следовательно, $g(u_n) \to 0$, $g(v_n) \to 0$, а вместе с тем и $g(x_n) \to 0$. □

Теорема III.4.1. *Если в УНП (X, K) конус K несплющен, то сопряженное пространство (X', K') дедекиндово полно.*

Доказательство. Пусть множество $E \subset X'$ направлено по возрастанию и ограничено сверху, h — его верхняя граница ($h \in X'$). Тогда при любом $x \in K$ и для любого $f \in E$ имеем $f(x) \le h(x)$. Положим

$$g(x) = \sup_{f \in E} f(x) \le h(x) \qquad (x \in K).$$

Совершенно элементарно проверяется (с учетом того, что множество E направлено по возрастанию), что функционал g обладает на K свойством аддитивности. Впрочем, тот же функционал g можно определить как предел направления, $g(x) = \lim\limits_{E} f(x)$, и тогда его аддитивность будет сразу вытекать из общих свойств предела. Положительная однородность g очевидна.

Теперь для любого $x \in X$ полагаем $g(x) = g(u) - g(v)$, где $u,\ v \in K$, $x = u - v$. Благодаря аддитивности g на K это определение однозначно, причем функционал g линеен. Для любого $f \in E$ справедливо неравенство $f \le g \le h$, следовательно, по лемме $g \in X'$. Так как при этом $g \le h$, а в качестве h можно взять любую верхнюю границу множества E, то $g = \sup E$. □

Следствие. *Если X — УНП с несплющенным конусом K и если сопряженное пространство (X', K') — векторная решетка, то (X', K') — K-пространство.*

Вытекает сразу же из предыдущей теоремы и теоремы I.5.1.

Приведем пример, построенный Г.Я. Лозановским, который показывает, что в общем случае, даже если пространство X банахово, а конус K замкнут, сопряженное пространство может оказаться векторной решеткой, но не быть дедекиндово σ-полным.

[20] Здесь подразумевается, что пространство линейных функционалов $X^\sharp$ упорядочено с помощью конуса $K^\sharp$ (см. I.6).

Пример 5. Пусть $X = L^2[0,1]$, а конус K состоит из всех неотрицательных невозрастающих функций (точнее, из функций, эквивалентных неотрицательным невозрастающим) из X. Конус K, очевидно, замкнутый, но не воспроизводящий, поскольку каждая функция из K ограничена на любом промежутке вида $[\delta, 1]$, где $0 < \delta < 1$. Однако, конус K — пространственный. Действительно, все функции вида

$$x(t) = 1 - t^n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

а также неотрицательные константы входят в K, поэтому все полиномы входят в его линейную оболочку $K - K$. По теореме I.8.1 сопряженный клин K' — конус.

Сопряженное пространство X' реализуется тоже в виде $L^2[0,1]$. Каждый $f \in X'$ представим по формуле

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt, \tag{1}$$

и функционалы $f \in X'$ можно отождествлять с функциями $y \in L^2$. Выясним, из каких функций y состоит K'. Легко видеть, что линейные комбинации с положительными коэффициентами характеристических функций промежутков вида $[0,h]$, где $0 \le h \le 1$ составляют множество, плотное в K. Поэтому для того чтобы $y \in K'$, необходимо и достаточно, чтобы функционал (1) имел неотрицательные значения на всех характеристических функциях промежутков $[0,h]$, а это означает, что для функции y должно выполняться условие

$$\int_0^h y\,dt \ge 0 \qquad \forall\, h \in [0,1]. \tag{2}$$

Далее всякая неотрицательная функция $y \in L^2$ определяет функционал (1), входящий в K', следовательно, K' содержит весь конус неотрицательных функций, и потому K' — воспроизводящий.

Проверим, что (X', K') — векторная решетка. Пусть $y,\ z$ удовлетворяют условию (2). Положим

$$Y(h) = \int_0^h y\,dt, \quad Z(h) = \int_0^h z\,dt, \quad U(h) = \max[Y(h), Z(h)].$$

Элементарно проверяется, что функция U абсолютно непрерывна и, следовательно, является интегралом от своей производной u. Действительно, приращение функции U на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ или совпадает с приращением одной из функций Y или Z, или не превосходит одного из них по абсолютной величине. Из этих же соображений легко следует, что в любой точке $t \in [0,1]$, где все три функции Y, Z и U имеют производные, $|U'(t)| \le \max(|Y'(t)|, |Z'(t)|)$, и потому $|u(t)| \le \max(|y(t)|, |z(t)|)$ почти всюду, и, значит, $u \in L^2$.

Наконец убедимся, что УБП (X', K') не является дедекиндово σ-полным[21]. Пусть

$$y_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le t \le \dfrac{1}{2}, \\[2mm] 2n & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} < t < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}, \\[2mm] 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} \le t \le 1, \end{cases}$$

[21]Это утверждение вытекает также из доказываемой ниже теоремы V.4.3.

а $Y_n(h) = \int\limits_0^h y_n\,dt$. Легко подсчитать, что $Y_{n+1}(h) - Y_n(h) \geq 0$ при любом $h \in [0,1]$, и потому y_n образуют в (X', K') возрастающую последовательность. С другой стороны, при вычислении поточечного супремума имеем

$$Z(h) = \sup Y_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Если бы в (X', K') существовала функция $y = \sup y_n$, то ее интеграл Y должен был бы быть наименьшей абсолютно непрерывной функцией с производной из L^2, мажорирующей все Y_n, а, следовательно, и Z. Но если бы такая функция существовала, то она ни в одной точке не могла бы быть больше $Z(h)$, а равенство $Y(h) \equiv Z(h)$ невозможно, поскольку Z — разрывная функция.

§ 5. НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ЗАМКНУТОСТИ КОНУСА

Приведем два признака, позволяющие при некоторых условиях проверять замкнутость конуса только с помощью монотонных последовательностей.

Теорема III.5.1. *Пусть (X, K) — архимедово УНП, причем:*

1) *конус K несплющен,*

2) *всякая возрастающая (b)-фундаментальная последовательность элементов из K ограничена сверху.*

Тогда конус K замкнут.

Доказательство. Пусть $x_n \in K$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\|x_n - x\| < \dfrac{1}{n^3}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Таи как конус K несплющен, то существуют такие элементы $u_n \in K$, что $x_n - x \leq u_n$, причем $\|u_n\| < \dfrac{M}{n^3}$ (M — константа несплющенности). Последовательность элементов $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$ — возрастающая и (b)-фундаментальная, следовательно, по предположению существует $y \geq y_n$. Тогда при любом n имеем $-x \leq x_n - x \leq u_n \leq \dfrac{1}{n} y_n \leq \dfrac{1}{n} y$ и по принципу Архимеда $-x \leq 0$, т. е. $x \in K$. □

Следующая теорема является дополнением к теореме III.3.1.

Теорема III.5.2. *Пусть (X, K) — архимедово УНП, причем:*

1) *конус K несплющен,*

2) *всякая возрастающая (b)-фундаментальная последовательность элементов из K имеет (b)-предел, принадлежащий конусу K.*

Тогда конус K замкнут (а пространство X, согласно теореме III.3.1, банахово).

Доказательство. Проверим, что из условия 2) этой теоремы вытекает условие 2) предыдущей теоремы. Пусть $x_n \in K$ и образуют возрастающую (b)-фундаментальную последовательность. Тогда $x_n \xrightarrow{(b)} x \in K$. При любом фиксированном n элементы $x_m - x_n$ $(m \geq n)$ принадлежат K и образуют (b)-фундаментальную возрастающую последовательность, следовательно, по условию 2), $x - x_n = (b)\text{-}\lim(x_m - x_n) \in K$, т. е. $x \geq x_n$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. Остается применить теорему III.5.1. □

Замечания. 1. Предположение, что пространство (X, K) архимедово, в обеих теоремах существенно. Например, если плоскость $\mathbb{R}_2$ упорядочить с помощью открытого сектора, то все условия обеих теорем, кроме принципа Архимеда, будут выполнены.

2. В отличие от теоремы III.5.2, из условий теоремы III.5.1 (b)-полнота пространства X не вытекает. Действительно, если в любом не банаховом нормированном пространстве X ввести упорядочение с помощью замкнутого телесного конуса K, то все условия теоремы III.5.1, включая и принцип Архимеда, будут выполнены (см. теоремы II.1.4 и II.3.2).

IV. НОРМАЛЬНЫЕ КОНУСЫ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНОГО КОНУСА

Понятие нормальности конуса, введенное М.Г. Крейном [19], играет особенно важную роль во всей теории пространств с конусами. Пусть, как и раньше, (X, K) — УНП.

Определение. Конус K называется *нормальным*, если существует такое $\delta > 0$, что

$$\|x+y\| \geq \delta \quad \text{для любых} \quad x,\ y \in K \quad \text{с} \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

Из определения сразу следует, что несобственный конус не может быть нормальным. Таким образом, результаты этой главы уже не распространяются на пространства с клином.

Легко понять, что в пространстве $\mathbb{R}_2$ всякий сектор с углом раствора меньшим π является нормальным конусом, а конус, изображаемый открытой или полуоткрытой полуплоскостью, не нормален. Конечно, в общем случае, особенно в бесконечномерном пространстве, такой простой характеристики нормального конуса уже нет. Однако все же нормальность означает, что конус в каком-то смысле не должен быть слишком «широким».

Если конус K нормален, то его замыкание $\overline{K}$ — тоже нормальный конус. Действительно, пусть $x,\ y \in \overline{K}$ и $\|x\| = \|y\| = 1$. Тогда существуют такие $x_n,\ y_n \in K$, что $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x,\ y_n \xrightarrow{(b)} y$. Так как $\|x_n + y_n\| \geq \delta$, то и $\|x+y\| \geq \delta$. В конечномерном пространстве верен следующий более сильный результат.

Теорема IV.1.1. *Для того чтобы конус K в конечномерном УБП (X, K) был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы его замыкание $\overline{K}$ было конусом. В частности, любой замкнутый конус в конечномерном пространстве нормален.*

Доказательство. Необходимость условия уже доказана для любого УНП. Докажем теперь, что если X — конечномерно и конус K замкнут, то он нормален. Допустим, что K не нормален. Тогда существуют такие последовательности элементов $x_n,\ y_n \in K$, что $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, а $\|x_n + y_n\| \to 0$. Так как единичная сфера в конечномерном пространстве компактна, то, переходя к частичным последовательностям и сохраняя те же обозначения для элементов, можно считать, что $x_n \xrightarrow{(b)} x,\ y_n \xrightarrow{(b)} y$. При этом $x,\ y \in K$, а $\|x\| = \|y\| = 1$. Но $x + y = (b)\text{-}\lim(x_n + y_n)$ и потому $x + y = 0$, а $y = -x$, что невозможно, поскольку K — конус.

Теперь уже ясно, что если K — произвольный конус в конечномерном пространстве, а $\overline{K}$ — тоже конус, то $\overline{K}$ нормален, а потому и K нормален. $\square$

Следующий пример показывает, что в бесконечномерном пространстве (и даже банаховом) эта теорема не верна.

Пример 6. Пусть $X = C^1$ — пространство непрерывно-дифференцируемых функций на отрезке $[0, 2\pi]$ с нормой

$$\|x\| = \max|x(t)| + \max|x'(t)|,$$

и пусть конус K состоит из всех неотрицательных функций из X. Ясно, что конус K замкнут. Если

$$x(t) = \frac{1}{n+2}(1 + \sin nt), \qquad y(t) = \frac{1}{n+2}(1 - \sin nt),$$

то $x,\ y \in K$, $\|x\| = \|y\| = 1$, а $\|x+y\| = \dfrac{2}{n+2}$ и, таким образом, $\|x+y\|$ за счет n может быть сделана сколь угодно малой.

Лемма 1. *Если конус K нормален, то для любых $x,\ y \in K$*

$$\|x+y\| \geq \frac{\delta}{2}\|x\|, \tag{1}$$

где δ — постоянная из определения нормальности.

Доказательство. Так как из определения нормальности ясно, что $\delta \leq 2$, то при $y = 0$ неравенство (1) тривиально. Так же тривиально оно и при $x = 0$. Далее ясно, что неравенство (1) достаточно доказать в предположении, что $\|x\| \geq \|y\|$, а заменяя x и y на $\dfrac{1}{\alpha}x$ и $\dfrac{1}{\alpha}y$, где $\alpha = \|x\|$, можно сразу считать, что $0 < \|y\| \leq \|x\| = 1$. Имеем $\|x+y\| \geq 1 - \|y\|$, $\|x+y\| = \left\|\left(x + \dfrac{y}{\|y\|}\right) - \left(\dfrac{1-\|y\|}{\|y\|}y\right)\right\| \geq \delta - (1 - \|y\|)$, откуда после почленного сложения получаем $2\|x+y\| \geq \delta$. $\square$

Из доказанной леммы, в частности, вытекает, что нормальность конуса сохраняется при переходе к эквивалентной норме.

Лемма 2 (В.И. Ажоркин, И.А. Бахтин [2]). *Если конус K нормален, то существует такой телесный и нормальный конус $K_1 \subset X$, что $K \subset K_1$.*

Доказательство. Возьмем любой $x_0 > 0$. Так как замыкание $\overline{K}$ — тоже нормальный конус, то по теореме II.4.1 существует такой $f \in K'$, что $f(x_0) = a > 0$. Пусть $F = S\left(x_0; \dfrac{a}{2\|f\|}\right)$. Если $z \in F$, то $f(z) \geq \dfrac{a}{2}$, и потому $0 \notin F$. Обозначим через L телесный конус, натянутый, на F. Ясно, что если $z \in L$ и $f(z) = \alpha$, то $z = \lambda z'$, где $z' \in F$ и $\lambda \leq \dfrac{2\alpha}{a}$. Таким образам, если $z_n \in L$ и $f(z_n) \to 0$, то $z_n \xrightarrow{(b)} 0$.

Положим $K_1 = K + L$. Тогда K_1 — телесный клин. Проверим, что он нормален; тем самым K_1 — конус. Если допустить, что K_1 не нормален, то должны существовать такие две последовательности элементов $x_n,\ x'_n \in K_1$, что

$$\|x_n\| = \|x'_n\| = 1, \qquad x_n + x'_n \xrightarrow{(b)} 0.$$

Но $x_n = y_n + z_n$, $x'_n = y'_n + z'_n$, где $y_n,\ y'_n \in K$, $z_n,\ z'_n \in L$. Тогда

$$0 \leq f(z_n) \leq f(z_n + z'_n) \leq f(x_n + x'_n) \to 0,$$

следовательно, $f(z_n) \to 0$, и потому $z_n \xrightarrow{(b)} 0$. Аналогично, $z'_n \xrightarrow{(b)} 0$. Отсюда вытекает, что $\|y_n\| \to 1$, $\|y'_n\| \to 1$, а $y_n + y'_n \xrightarrow{(b)} 0$, что противоречит лемме 1. $\square$

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ НОРМАЛЬНОСТИ КОНУСА

Определение. Норма в УНП (X, K) называется *полумонотонной* на конусе K, если существует такая постоянная M (*константа полумонотонности*), что из неравенства $0 \le y \le x$ вытекает $\|y\| \le M\|x\|$.

Теорема IV.2.1. *Для того чтобы конус K в УНП (X, K) был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы норма была полумонотонной на конусе K.*

Доказательство. Если K нормален и $0 \le y \le x$, то, записывая x в виде $x = y + (x - y)$ и применяя лемму 1, мы сразу получаем, что $\|x\| \ge \frac{\delta}{2}\|y\|$. Обратно, если норма полумонотонна на конусе K, $x,\ y \in K$ и $\|x\| = \|y\| = 1$, то из неравенства $0 < x < x + y$ следует, что $\|x\| \le M\|x + y\|$ или $\|x + y\| \ge \frac{1}{M}$. $\square$

Следствие 1. *Нормальность конуса K равносильна справедливости в X теоремы о «сжатой» последовательности: если $x_n \le y_n \le z_n$ и $v = (b)\text{-}\lim x_n = (b)\text{-}\lim z_n$, то и $y_n \xrightarrow{(b)} v$.*

Доказательство. Если K нормален, а $x_n \le y_n \le z_n$, то $\|y_n - x_n\| \le M\|z_n - x_n\|$. Поэтому, если $x_n \xrightarrow{(b)} v$, $z_n \xrightarrow{(b)} v$, то и $y_n \xrightarrow{(b)} v$. Обратно, пусть теорема о «сжатой» последовательности справедлива, но предположим, что конус K не нормален, а, следовательно, норма не полумонотонна на K. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие $x_n,\ y_n \in K$, что $y_n < x_n$, но $\|y_n\| > n\|x_n\|$. Полагая $x'_n = \frac{1}{n\|x_n\|}x_n$, $y'_n = \frac{1}{n\|x_n\|}y_n$, получим

$$0 < y'_n < x'_n, \quad \|x'_n\| = \frac{1}{n} \to 0, \quad \|y'_n\| > 1,$$

и мы приходим к противоречию с теоремой о «сжатой» последовательности. $\square$

Следствие 2. *Если конус K нормален и если $y \le x \le z$, причем $\|y\|,\ \|z\| \le A$, то $\|x\| \le (2M+1)A$, где M — константа полумонотонности нормы на конусе. Тем самым всякий интервал в X (b)-ограничен.*

Доказательство. Если $y \le x \le z$, то $\|x - y\| \le M\|z - y\|$, следовательно,

$$\|x\| \le \|x - y\| + \|y\| \le M\|z - y\| + \|y\| \le M(\|z\| + \|y\|) + \|y\| \le (2M + 1)A. \quad \square$$

Ниже будет показано, что обратное утверждение справедливо при некоторых ограничениях.

Следствие 3. *Если конус K в РУНП (X, K) нормален, то эта решетка архимедова.*

Доказательство. Как показано в 1.5, принцип Архимеда в векторной решетке достаточно проверить на конусе. Но если $x \ge 0$ и $nx \le y$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то, по предыдущему следствию, множество $\{nx\}$ (b)-ограничено, что возможно лишь при $x = 0$. $\square$

Следствие 4. *Если в УНП (X, K) конус K телесен, нормален и миниэдрален, то он замкнут.*

Действительно, из нормальности и миниэдральности вытекает принцип Архимеда и остается сослаться на следствие из теоремы II.3.2.

Теорема IV.2.2 (И.А. Бахтин [3]). *Пусть (X, K) — УБП и конус K замкнут. Если всякая (o)-ограниченная возрастающая последовательность положительных элементов из X (b)-ограничена, то конус K нормален.*

В этой теореме, очевидно, содержится и такое утверждение: если в УБП (X, K) с замкнутым конусом K каждый интервал (b)-ограничен, то конус K нормален.

Доказательство. Допустим, что K не нормален, и подберем такие $x_n,\ y_n \in K$, что $\|x_n\| = \|y_n\| = n$, а $\|x_n + y_n\| < \dfrac{1}{n^2}$. Затем положим

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n).$$

По теореме II.3.1 $x \in K$,

$$z_n = \sum_{p=1}^{n}(x_p + y_p) + x_{n+1} \leq x$$

и z_n образуют возрастающую последовательность. Следовательно, по условию, $\|z_n\|$ должна быть ограничена. Но, с другой стороны,

$$\|z_n\| \geq \|x_{n+1}\| - \sum_{p=1}^{n}\|x_p + y_p\| > n + 1 - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty. \quad \square$$

Приведем примеры, показывающие, что в этой теореме нельзя отбросить ни одно из ограничений, наложенных на (X, K).

Пример 7 (И.И. Чучаев [27]). Пусть X — пространство всех финитных числовых последовательностей $x = \{\xi_i\}$ с нормой

$$\|x\| = \max\{|\xi_1|,\ \max_{i\geq 2}|\xi_i - \xi_{i-1}|\},$$

а конус K состоит из всех векторов (из X) с неотрицательными координатами.

В этом пространстве (b)-сходимость влечет сходимость по координатам, и потому конус K замкнут. Последовательность элементов

$$x_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right\},$$

очевидно, (b)-фундаментальна, но (b)-предела у нее нет, так что пространство X не банахово. При этом заметим, что оно, как легко видеть, интервально полно.

Проверим, что конус K не нормален. Положим

$$x_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1, \frac{n-1}{n}, \ldots, \frac{2}{n}, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right\},$$

а через e_n обозначим n-ый координатный орт. Тогда $x_n,\ e_n \in K$ и $e_n < x_n$. При этом $\|x_n\| = \dfrac{1}{n}$, $\|e_n\| = 1$, откуда следует, что норма не полумонотонна на конусе K и, следовательно, K не нормален.

В то же время, если возрастающая последовательность положительных элементов x_n (o)-ограничена, $x_n \le y$, то координаты элементов x_n не превосходят соответствующих координат элемента y. При этом если $y = \{\eta_i\}$ и $\eta_i \le A$, то $\|x_n\| \le A$.

Пример 8 (И.И. Чучаев [27]). Пусть $X = \ell^1$ с классической нормой, а конус K состоит из всех финитных векторов $x = \{\xi_i\}$, у которых $\xi_1 \ge 0$, а $|\xi_i| \le \xi_1$ при всех $i \ge 2$, причем последняя, отличная от нуля координата положительна. Пространство X банахово, а конус K не замкнут. Проверим, что K не нормален. Положим

$$x = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots \right\},$$

$$y = \left\{ \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots \right\}$$

(здесь x и y имеют n координат, отличных от 0). Тогда $x,\ y \in K$, $\|x\| = \|y\| = 1$, а

$$x + y = \left\{ \frac{2}{n}, 0, 0, 0, \dots, 0, \frac{2}{n}, 0, 0, \dots \right\},$$

и потому $\|x+y\| = \dfrac{4}{n}$. Таким образом, конус K не нормален.

Рассмотрим опять возрастающую последовательность положительных элементов x_n, ограниченную сверху элементом $y = \{\eta_i\}$. Если $\eta_i = 0$ при $i > p$, то и у всех x_n координаты с номерами $i > p$ должны быть равны 0, а все прочие координаты по абсолютной величине не превосходят η_1. Отсюда и вытекает (b)-ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

В пространстве с телесным конусом верен следующий более простой признак нормальности.

Теорема IV.2.3 (Д.П. Мильман, см. [20]). *Если конус K в УНП (X, K) телесен и для некоторого $u \gg 0$ интервал $\Delta = [0, u]$ (b)-ограничен, то K — нормален.*

Доказательство. Пусть $\|x\| \le c$ для любого $x \in \Delta$. Возьмем $x,\ y \in K$ с нормой $\|x\| = \|y\| = 1$. Если $\overline{S(u;\rho)} \subset K$, то по формуле (1) из главы II

$$x + y \le \frac{1}{\rho}\|x+y\|u,$$

следовательно, и $x \le \dfrac{1}{\rho}\|x+y\|u$ или $\dfrac{\rho x}{\|x+y\|} \in \Delta$. Тогда $\dfrac{\rho}{\|x+y\|} \le c$ или $\|x+y\| \ge \dfrac{\rho}{c}$ и, по определению, конус K нормален. $\square$

Теорема IV.2.4 (М.Г. Крейн [19]). *Для того чтобы конус K в УНП (X, K) был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве X существовала эквивалентная норма, монотонная на конусе K.*

Доказательство. Достаточность условия вытекает из теоремы IV.2.1. Докажем его необходимость. Пусть B — единичный шар из X, а $Q = \{x \in X : \exists\, u,\ v \in B$ такие, что $u \le x \le v\} = (B - K) \cap (B + K)$. Ясно, что $B \subset Q$ (для $x \in B$ можно взять $u = v = x$). Согласно следствию 2 из теоремы IV.2.1, множество Q (b)-ограничено. Таким образом, Q — выпуклая, симметричная и (b)-ограниченная окрестность нуля. Пусть p — порождаемый ею функционал Минковского. Тогда p —

норма, эквивалентная первоначальной норме $\|\cdot\|$ в X. При этом если $0 \le y \le x$ и $p(x) = \lambda$, то $x \in (\lambda+\varepsilon)Q$ при любом $\varepsilon > 0$; следовательно, существует такой $v \in B$ (зависящий от ε), что $0 \le \dfrac{x}{\lambda+\varepsilon} \le v$. Но тогда и $0 \le \dfrac{y}{\lambda+\varepsilon} \le v$, и потому $y \in (\lambda+\varepsilon)Q$. Отсюда $p(y) \le \lambda$. Таким образом, норма p монотонна на конусе K. □

Чтобы установить еще одну характеристику нормальности конуса, введем

Определение. Будем говорить, что в архимедовом УВП $x_n \xrightarrow{(*\text{-}r)} x$, если из любой частичной последовательности $\{x_{n_i}\}$ можно выделить подпоследовательность $x_{n_{i_k}} \xrightarrow{(r)} x$.

Установим несколько предложений.

1. Если в УБП (X, K) конус K замкнутый и воспроизводящий, то всякая (b)-сходящаяся последовательность элементов из X $(*\text{-}r)$-сходится к тому же пределу.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай сходимости к 0. Пусть сначала $x_n \in K$ и $x_n \xrightarrow{(b)} 0$. Выделим возрастающую последовательность индексов n_k так, что $\|x_{n_k}\| \le \dfrac{1}{k^3}$, а затем положим

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} k x_{n_k}.$$

Тогда $x_{n_k} \le \dfrac{1}{k} y$ при любом k, следовательно, $x_{n_k} \xrightarrow{(r)} 0$. Так как то же рассуждение применимо и к любой частичной последовательности, выделенной из $\{x_n\}$, то отсюда и вытекает, что $x_n \xrightarrow{(*\text{-}r)} 0$.

Теперь рассмотрим произвольную последовательность $x_n \xrightarrow{(b)} 0$. По теореме Крейна–Шмульяна конус K несплющен, поэтому каждый x_n представим в виде $x_n = u_n - v_n$, где $u_n,\ v_n \in K$ и $u_n,\ v_n \xrightarrow{(b)} 0$. По доказанному выше $u_n \xrightarrow{(*\text{-}r)} 0$ и $v_n \xrightarrow{(*\text{-}r)} 0$, а тогда ясно, что и $x_n \xrightarrow{(*\text{-}r)} 0$. □

Замечание. Оба условия, наложенные в этом предложении на K, также и необходимы для того, чтобы всякая (b)-сходящаяся последовательность $(*\text{-}r)$-сходилась к тому же пределу (пространство X предполагается архимедовым).

Действительно, дня любого $x \in X$ последовательность $\dfrac{1}{n}x \xrightarrow{(b)} 0$; если предположить, что (b)-сходимость влечет $(*\text{-}r)$-сходимость, то должна существовать частичная последовательность индексов n_k, для которой $\dfrac{1}{n_k}x \xrightarrow{(r)} 0$ с некоторым регулятором u. А тогда $\pm x \le n_k u$ при достаточно большом k и тем самым конус K — воспроизводящий. Если же $x_n \in K$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$, то $x_{n_k} \xrightarrow{(r)} x$, а потому и $x_{n_k} \xrightarrow{(o)} x$ (теорема I.4.1). Но тогда уже ясно, что $x \in K$. □

2. Пусть (X, K) — УНП с замкнутым конусом K. Для того чтобы каждая $(*\text{-}r)$-сходящаяся последовательность элементов из X (b)-сходилась к тому же пределу, необходимо и достаточно, чтобы каждый интервал в X был (b)-ограничен.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $(*\text{-}r)$-сходимость влечет (b)-сходимость, но допустим, что некоторый интервал из X не (b)-ограничен. Не уменьшая общности, можно считать, что он имеет вид $[0, u]$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такой $x_n \in [0, u]$, что $\|x_n\| > n^2$. Положим $y_n = \dfrac{1}{n}x_n$. Тогда

$0 \le y_n \le \dfrac{1}{n}u$, и потому $y_n \xrightarrow{(r)} 0$, а тем самым по условию $y_n \xrightarrow{(b)} 0$, но $\|y_n\| > n$ и мы приходим к противоречию.

б) Достаточность. Пусть каждый интервал в X (b)-ограничен. Если $x_n \xrightarrow{(r)} 0$ с регулятором u, то $\pm x_n \le \varepsilon_n u$, где $\varepsilon_n \to 0$. Но нормы элементов из $[-u, u]$ ограничены в совокупности некоторым числом C, и потому $\|x_n\| \le \varepsilon_n C$, следовательно, $x_n \xrightarrow{(b)} 0$. Если теперь $x_n \xrightarrow{(*\text{-}r)} 0$, то, по уже доказанному, из любой ее частичной последовательности можно выделить подпоследовательность, которая (b)-сходится к 0, а тогда и $x_n \xrightarrow{(b)} 0$. □

Теорема IV.2.5. *Пусть (X, K) — УНП, а конус K замкнут. Для того чтобы K был нормальным, необходимо, а в случае (b)-полного X и достаточно, чтобы каждая $(*\text{-}r)$-сходящаяся последовательность элементов из X (b)-сходилась к тому же пределу.*

Доказательство. Если K нормален, то по следствию 2 из теоремы IV.2.1 каждый интервал в X (b)-ограничен и остается сослаться на предложение 2. Обратно, если выполнено условие теоремы, а пространство X банахово, то нормальность конуса K вытекает из теоремы IV.2.2 с помощью того же предложения 2. □

Следствие. *Если (X, K) — УБП, а конус K — замкнутый, воспроизводящий и нормальный, то $(*\text{-}r)$-сходимость в X совпадает с (b)-сходимостью, т. е. $x_n \xrightarrow{(*\text{-}r)} x$ тогда и только тогда, когда $x_n \xrightarrow{(b)} x$.*

Вытекает из доказанной теоремы с помощью предложения 1. Однако обратное утверждение справедливо без требования (b)-полноты пространства X. Точнее, имеет место следующее предложение.

3. Если в архимедовом УНП (X, K) $(*\text{-}r)$-сходимость совпадает с (b)-сходимостью, то конус K — замкнутый, воспроизводящий и нормальный.

Доказательство. Из замечания к предложению 1 уже следует, что конус K — замкнутый и воспроизводящий. Допустим, что он не нормален. Тогда существуют такие последовательности элементов x_n и y_n, что

$$0 < y_n < x_n, \quad x_n \xrightarrow{(b)} 0, \quad \|y_n\| \not\to 0.$$

По условию $x_n \xrightarrow{(*\text{-}r)} 0$, следовательно, из любой частичной последовательности $\{x_{n_k}\}$ можно выделить подпоследовательность так, что $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{(r)} 0$. Тем более $y_{n_{k_i}} \xrightarrow{(r)} 0$, а потому $y_n \xrightarrow{(*\text{-}r)} 0$. Отсюда, снова по условию предложения, следует, что $y_n \xrightarrow{(b)} 0$ и мы получаем противоречие. □

В заключение параграфа дадим одно дополнение к теореме III.3.1, представляющее собою обобщение известной теоремы И. Амемия [29].

Теорема IV.2.6. *Пусть (X, K) — УНП и конус K нормален и несплющен. Если каждая (b)-фундаментальная возрастающая последовательность положительных элементов из X имеет верхнюю грань, то пространство X (b)-полно*[22].

Доказательство. Пусть $x_n \ge 0$ образуют возрастающую (b)-фундаментальную последовательность. Выделим из нее частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$ так, что

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{k^3} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

[22] Очевидно, что если конус K замкнут, то это условие и необходимо. В то же время можно показать, что замкнутость конуса K вытекает из прочих условий теоремы.

По условию существует $x = \sup x_n$, а тогда

$$x = x_{n_1} + (o)\text{-}\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})\,^{23}.$$

Составим ряд

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} k(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}).$$

Из (2) следует, что частичные суммы этого ряда образуют (b)-фундаментальную последовательность, а тогда существует их верхняя грань y, так что

$$x_{n_1} + (o)\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} k(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = y.$$

Теперь покажем, что $x_{n_k} \xrightarrow{(b)} x$. Действительно

$$x - x_{n_k} = (o)\text{-}\sum_{l=k}^{\infty}(x_{n_{l+1}} - x_{n_l}),$$

а потому

$$k(x - x_{n_k}) \le (o)\text{-}\sum_{l=k}^{\infty} l(x_{n_{l+1}} - x_{n_l}) \le y.$$

Следовательно, $0 \le x - x_{n_k} \le \dfrac{1}{k}y$. Но $\dfrac{1}{k}y \xrightarrow{(b)} 0$, а тогда по следствию 1 из теоремы IV.2.1, $x - x_{n_k} \xrightarrow{(b)} 0$, т. е. $x_{n_k} \xrightarrow{(b)} x$. Отсюда вытекает, что и $x_n \xrightarrow{(b)} x$ и остается сослаться на теорему III.3.1 и учесть также замечание к ней[24]. $\square$

Следствие. *Если в дедекиндово σ-полном УНП (X, K) конус K нормален и телесен, то пространство X банахово.*

Доказательство. Пусть $x_n \in K$, $x_n \uparrow$ и последовательность $\{x_n\}$ (b)-фундаментальна. Из (b)-фундаментальности вытекает (b)-ограниченность $\{x_n\}$, а так как конус K телесен, то эта последовательность и (o)-ограничена (теорема II.1.4). Теперь из дедекиндовой σ-полноты (X, K) вытекает существование $\sup x_n$ и по предыдущей теореме пространство X (b)-полно[25]. $\square$

§ 3. ТЕОРЕМА О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ

Теорема IV.3.1 (Ф. Бонсол [33]). *Пусть (X, K) — УНП с нормальным конусом K. Если $x_\alpha \in K$ и образуют убывающее направление, причем $x_\alpha \xrightarrow{\text{сл}} 0$ ($\{x_\alpha\}$ слабо сходится к 0), то $x_\alpha \xrightarrow{(b)} 0$.*

---

[23] (o) здесь означает, что сумма ряда понимается как (o)-предел последовательности частичных сумм.

[24] Напомним, что в части достаточности теорема III.3.1 верна и без требования, чтобы конус K был замкнутым.

[25] Несплющенность K вытекает из его телесности (III.1).

Эту теорему можно рассматривать как абстрактную трактовку известной теоремы Дини об убывающей последовательности непрерывных функций.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что норма в X монотонна на конусе K. Допустим, что x_α удовлетворяют условиям теоремы, но $\|x_\alpha\| \not\to 0$, т. е. $\|x_\alpha\| > \varepsilon$ при всех α для некоторого $\varepsilon > 0$. Обозначим через A выпуклую оболочку множества $\{x_\alpha\}$. Тогда для любого $x \in A$

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_{\alpha_i}, \quad \text{где} \quad \lambda_i > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,$$

и потому $x \geq x_\alpha$ при $\alpha \geq \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Тем самым $\|x\| > \varepsilon$ и пересечение множества A с открытым шаром $S(0; \varepsilon)$ пусто. По теореме II.2.3 отделяем эти два множества гиперплоскостью $H: \ f(x) = c$ $(f \in X')$. Так как $S(0; \varepsilon)$ лежат строго по одну сторону от H, то $c \neq 0$ и, не умаляя общности, можно считать $c > 0$. Но тогда $f(x) \geq c$ для любого $x \in A$, в частности, $f(x_\alpha) \geq c$ и $f(x_\alpha) \not\to 0$. Получено противоречие. □

Замечание. Доказанная теорема верна и без предположения, что $x_\alpha \in K$. Действительно, если конус K замкнут, то это включение вытекает из прочих условий теоремы. Именно, если допустить, что некоторый $x_{\alpha_0} \notin K$, то существует функционал $f \in K'$, для которого $f(x_\alpha) < 0$, и так как направление $\{f(x_\alpha)\}$ — убывающее, то $f(x_\alpha) \not\to 0$. Если же конус K не замкнут, то заменим его на $\overline{K}$. При этом $\overline{K}$ нормален, а x_α по-прежнему образуют убывающее направление и, следовательно, по доказанному выше $x_\alpha \xrightarrow{(b)} 0$.

§ 4. ПРОСТРАНСТВА ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть в архимедовом УНП (X, K) выделен элемент $u > 0$. Рассмотрим пространство $(X_u, \|\cdot\|_u, K_u)$ элементов, ограниченных относительно u (1.9). Пространство X_u — архимедово. Так как u-норма монотонна на конусе K_u (1.9), конус K_u нормален. Кроме того, K_u — телесен (теорема II.1.5). По теореме II.1.3 конус K_u замкнут в пространстве X_u.

Теорема IV.4.1. *Если конус K в УНП (X, K) нормален, то u-топология в X_u сильнее первоначальной, т. е. индуцированной из X.*

Доказательство. Рассмотрим оператор вложения I пространства X_u в X. Так как конус K нормален, интервал $[-u, u]$ (b)-ограничен в пространстве X (следствие 2 из теоремы IV.2.1). Тот же интервал является единичным шаром в пространстве $(X_u, \|\cdot\|_u)$. Таким образом, оператор I ограничен, а значит и непрерывен. Поэтому сходимость по u-норме влечет сходимость по $\|\cdot\|$ к тому же пределу. □

Следствие. *Если конус K нормален, а $u \gg 0$, то нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_u$ эквивалентны в пространстве X.*

Действительно, если $u \gg 0$, то X_u совпадает с X по составу элементов, и остается учесть, что u-топология в X в этом случае всегда слабее исходной топологии (II.1).

Приведем пример. В пространстве $X = C[0, 1]$ с естественным упорядочением возьмем $u(t) = t(1-t)$. Тогда включение $x \in X_u$ означает, что $|x(t)| \leq \lambda t(1-t)$. Следовательно,

$$\|x\| \leq \|x\|_u \max t(1-t) = \frac{1}{4}\|x\|_u.$$

Переходим к вопросу об (u)-полноте пространств X_u[26]. Основные результаты в этом направлении получаются как простые следствия из одной теоремы, на которую внимание автора обратил Г.Я. Лозановский и которая относится к общей теории банаховых пространств и не использует идей порядка:

пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, B — его замкнутое, симметричное, выпуклое подмножество, X_B — линейная оболочка множества B, т. е.

$$X_B = \{x \in X : \; x = \lambda y, \; \text{где } y \in B\},$$

p — функционал Минковского, построенный в X_B по множеству B. Для того чтобы p было нормой[27] *и пространство (X_B, p) было банаховым, необходимо и достаточно, чтобы множество B было (b)-ограниченным в X* (см. дополнение 1).

Теорема IV.4.2. *Пусть в УБП $(X, \|\cdot\|, K)$ конус K замкнут. Для того чтобы пространство X_u было (u)-полным, необходимо и достаточно, чтобы интервал $[0, u]$ был (b)-ограничен в пространстве $(X, \|\cdot\|, K)$.*

Эта теорема моментально вытекает из предыдущей; нужно положить $B = [-u, u]$, тогда X_B совпадает с X_u, p с u-нормой, а (b)-ограниченность интервала $[-u, u]$ равносильна (b)-ограниченности интервала $[0, u]$, что следует сразу из равенства

$$[-u, u] = [0, 2u] - u.$$

Следствие 1. *Пусть в УБП $(X, \|\cdot\|, K)$ конус K замкнут. Если конус K_u нормален в пространстве $(X, \|\cdot\|)$, то пространство $(X_u, \|\cdot\|_u)$ (u)-полно.*

Действительно, из нормальности конуса K_u в $(X, \|\cdot\|)$ вытекает (b)-ограниченность интервала $[0, u]$.

Следствие 2 (И.А. Бахтин [7]). *Пусть в УБП $(X, \|\cdot\|, K)$ конус K замкнут. Для того чтобы пространство $(X_u, \|\cdot\|_u)$ было (u)-полным, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная M, что для любых $x, \; y \in K_u$ из неравенства $x \leq y$ вытекает*

$$\|x\| + \|x\|_u \leq M(\|y\| + \|y\|_u).$$

Назовем сумму $\|\cdot\| + \|\cdot\|_u$ суммарной нормой в пространстве X_u. Тогда условие, сформулированное в теореме, означает нормальность конуса K_u относительно суммарной нормы в X_u.

Доказательство. Пусть интервал $[0, u]$ (b)-ограничен в пространстве $(X, \|\cdot\|)$, т. е. существует такая постоянная N, что $0 \leq x \leq u$ влечет $\|x\| \leq N$. Тогда для любых $x, \; y \in K$ из неравенства $x \leq y$ следует, что $\|x\| \leq N\|y\|_u$ (так как $y \leq \|y\|_u u$). Отсюда, учитывая монотонность u-нормы на K_u, мы сразу получим, что суммарная норма полумонотонна с константой $M = N + 1$. Обратно, из полумонотонности суммарной нормы моментально вытекает (b)-ограниченность интервала $[0, u]$. $\Box$

Отметим, что условие нормальности конуса K_u в $(X, \|\cdot\|)$ уже не является необходимым для (u)-полноты X_u. Соответствующий пример приведен в [7].

Теорема IV.4.3 (М.А. Красносельский [16], В.А. Гейлер, И.Ф. Даниленко, И.И. Чучаев [12]). *Пусть (X, K) — УБП с замкнутым конусом K. Для того чтобы при любом $u > 0$ пространство $(X_u, \|\cdot\|_u)$ было*

[26] Под (u)-полнотой мы понимаем полноту по u-норме.

[27] В общем случае p — полунорма.

полным (в (u)*-топологии), необходимо и достаточно, чтобы конус* K *был нормальным.*

Доказательство. Достаточность условия вытекает из предыдущей теоремы, поскольку нормальность K влечет (b)-ограниченность каждого интервала в X. Необходимость вытекает из той же теоремы с помощью теоремы IV.2.2. □

Предыдущую теорему можно рассматривать также как критерий (r)-полноты пространства X. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ из X (r)-фундаментальна, если существует такой $u > 0$ (регулятор), что

$$\pm(x_n - x_m) \leq \varepsilon_n u \quad \text{при} \quad m > n, \quad \text{причем} \quad \varepsilon_n \to 0. \tag{3}$$

Определение. Архимедово УВП (X, K) называется (r)*-полным*, если всякая (r)-фундаментальная последовательность его элементов сходится с некоторым регулятором к пределу.

Прежде всего заметим, что если $\{x_n\}$ (r)-фундаментальна с регулятором u и $x_n \xrightarrow{(r)} x$ с регулятором v, то $x_n \xrightarrow{(r)} x$ и с регулятором u. Действительно, по теореме I.4.1 из (r)-сходимости вытекает (o)-сходимость, а переход к (o)-пределу в условии (3) дает, что $\pm(x_n - x) \leq \varepsilon_n u$. Отсюда уже следует, что $x_n \xrightarrow{(r)} x$ с регулятором u.

Теорема IV.4.4. (r)*-полнота архимедова УВП* (X, K) *равносильна одновременной* (u)*-полноте всех пространств* $(X_u, \|\cdot\|_u)$ $(u > 0)$*. Таким образом, для того чтобы УБП* (X, K) *с замкнутым конусом* K *было* (r)*-полным, необходимо и достаточно, чтобы конус* K *был нормальным.*

Доказательство. Пусть X (r)-полно, а $\{x_n\}$ (u)-фундаментальна в некотором X_u. Тогда, по определению u-нормы, $\{x_n\}$ (r)-фундаментальна с регулятором u, и потому $x_n \xrightarrow{(r)} x$, т. е. $x_n \xrightarrow{(u)} x$ в X_u. Следовательно, все X_u полны. Обратно, пусть $\{x_n\}$ (r)-фундаментальна в X с некоторым регулятором u, т. е.

$$\pm(x_n - x_m) \leq \varepsilon_n u \quad (m > n, \ \varepsilon_n \to 0).$$

Отсюда вытекает, что $x_n - x_m \in X_u$ и при фиксированном m последовательность $\{x_n - x_m\}_n$ фундаментальна по u-норме в X_u. Следовательно, благодаря полноте X_u, $x_n - x_m \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ $(y \in X_u)$ по u-норме. Но это значит, что $x_n - x_m \xrightarrow[n\to\infty]{(r)} y$ с регулятором u или $x_n \xrightarrow{(r)} y + x_m$. □

Следствие. *Если в* $(o\sigma)$*-полном РУБП* (X, K) *конус* K *замкнут, то он нормален.*

Вытекает непосредственно из предыдущей теоремы, поскольку из теории векторных решеток известно, что всякое K_σ-пространство (r)-полно ([9], лемма V.3.1).

§ 5. ТЕОРЕМА КРЕЙНА

В этом параграфе (X, K) — произвольное УНП. Мы докажем одну из центральных теорем всей теории пространств с конусами.

Теорема IV.5.1 (М.Г. Крейн [19]). *Для того чтобы любой* $f \in X'$ *был представим в виде разности двух* (b)*-линейных положительных функционалов, необходимо и достаточно, чтобы конус* K *был нормальным.*

Иначе эту теорему можно сформулировать так: *для того чтобы в сопряженном пространстве X' клин K' был воспроизводящим, необходимо и достаточно, чтобы конус K был нормальным.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $f \in X'$. По условию $f = g - h$, где $g,\ h \in K'$. Введем множество

$$A = \{y \in X:\ \exists x \in K \text{ такой, что } 0 \leq y \leq x,\ \|x\| = 1\}.$$

Тогда, если $y \in A$, то

$$|f(y)| \leq g(y) + h(y) \leq g(x) + h(x) \leq \|g\| + \|h\|.$$

Следовательно, каждый $f \in X'$ ограничен на множестве A, а это влечет (b)-ограниченность самого A: $\|y\| \leq M$ для всех $y \in A$. Отсюда уже сразу вытекает, что норма полумонотонна на конусе K с константой M, и по теореме IV.2.1 конус K нормален.

б) Достаточность. Пусть конус K нормален. Обозначим через Y пополнение пространства X по норме, а через $\overline{K}_Y$ замыкание конуса K в Y. Так как K нормален, то $\overline{K}_Y$ тоже нормальный конус. Любой функционал $f \in X'$ допускает единственное (b)-линейное распространение на Y; обозначим это распространение той же буквой f. По следствию 2 из теоремы IV.2.1 всякое (o)-ограниченное множество из $(Y, \overline{K}_Y)$ (b)-ограничено, а тогда и функционал f на нем ограничен, следовательно, f удовлетворяет условию теоремы II.7.1, и потому представим в виде разности (b)-линейных положительных (по отношению к конусу $\overline{K}_Y$) функционалов. Переходя к их сужениям на X, мы получим требуемое представление и для первоначально заданного функционала $f \in X'$[28]. □

Замечание. Если конус K нормален, то сопряженное пространство (X', K') удовлетворяет всем условиям теоремы Крейна–Шмульяна, а потому клин K' несплющен. Следовательно, любой $f \in X'$ представим в виде $f = g - h$, где $g,\ h \in K'$, а $\|g\|,\ \|h\| \leq M\|f\|$ (M — константа несплющенности K').

§ 6. ДВОЙСТВЕННАЯ ТЕОРЕМА АНДО

Оказывается, что если предположить пространство X (b)-полным, а конус K замкнутым, то в теореме Крейна конусы K и K' можно поменять местами. Предварительно докажем более общую теорему.

Теорема IV.6.1. *Пусть (X, K) — УНП. Для того чтобы сопряженный конус K' был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы конус K удовлетворял следующему условию (промежуточному между несплющенностью и почти несплющенностью): существует такая постоянная M, что любой $x \in X$ представим в виде*

$$x = (b)\text{-}\lim(u_n - v_n), \quad \textit{где} \quad u_n,\ v_n \in K \quad \textit{и} \quad \|u_n\|,\ \|v_n\| \leq M\|x\|.$$

[28] Первоначальное доказательство М.Г. Крейна было сложнее. Позднее были даны более простые, чем у М.Г. Крейна, прямые доказательства этой теоремы, не опирающиеся на теорему Намиоки.

Доказательство. а). Достаточность. Пусть $f,\ g \in K'$ и $g \le f$. Для любого $x \in X$ с $\|x\| = 1$, используя представление, данное в условии теоремы, имеем

$$g(x) = \lim[g(u_n) - g(v_n)],$$

$$|g(u_n) - g(v_n)| \le g(u_n) + g(v_n) \le f(u_n) + f(v_n) \le 2M\|f\|,$$

откуда $|g(x)| \le 2M\|f\|$. Следовательно, $\|g\| \le 2M\|f\|$ и норма в X' полумонотонна на K', т. е. K' нормален.

б). Необходимость. Эта часть доказательства основана на более тонких соображениях[29]. Пусть K' нормален. Обозначим через B (соответственно, B') замкнутый единичный шар в X (соответственно, в X') и рассмотрим множество

$$D' = (B' - K') \cap (B' + K').$$

Если $f \in D'$, то существуют такие $g,\ h \in B'$, что $g \le f \le h$, а потому, по следствию 2 из теоремы IV.2.1, множество D' (b)-ограничено в пространстве X'.

Ясно, что $B' = P(B)$, $\pm K' = P(\mp K)$, где через $P(E)$ обозначается поляра множества E. С другой стороны, так как единичный шар B' слабо компактен, а конус K' слабо замкнут, то множества $B' \pm K'$ слабо замкнуты. Следовательно, $B' \pm K'$ совпадает со слабо замкнутой выпуклой оболочкой множества $B' \cup (\pm K')$ (соответственно), а потому

$$B' \mp K' = P(\pm B_+), \quad \text{где} \quad B_+ = B \cap K.$$

Отсюда вытекает, что $D' = P(B_+ \cup B_-)$, где $B_- = -B_+ = B \cap (-K)$. Но если поляра множества из X (b)-ограничена , то его биполяра $P(D')$ содержит некоторый шар с центром в 0. В то же время

$$\overline{\mathrm{co}(B_+ \cup B_-)} \subset \overline{B_+ + B_-}.$$

Следовательно, существует такое $r > 0$, что

$$\overline{S(0;r)} \subset \overline{B_+ + B_-}.$$

Но тогда условие теоремы выполнено с постоянной $M = \dfrac{1}{r}$. $\square$

---

[29] В этом доказательстве мы используем следующие сведения из теории поляр. При этом мы ограничимся не вполне точными формулировками, достаточными для наших целей. Если множество $E \subset X$, то его *полярой* называется множество

$$P(E) = \{f \in X' :\ f(x) \le 1 \text{ при всех } x \in E\}.$$

Аналогично, если $E' \subset X'$, то поляра

$$P(E') = \{x \in X :\ f(x) \le 1 \text{ при всех } f \in E'\}.$$

Поляра поляры какого-нибудь множества из X называется его *биполярой.* Поляра объединения двух множеств равна пересечению их поляр; поляра пересечения двух слабо замкнутых выпуклых множеств, каждое из которых содержит 0, равна слабо замкнутой выпуклой оболочке объединения их поляр, биполяра множества из X, содержащего 0, совпадает с его замкнутой выпуклой оболочкой (см., например, [28], стр. 160–161).

Теорема IV.6.2 (Т. Андо [30]). *Если (X, K) — УБП с замкнутым конусом K, то следующие условия равносильны:*

а) *конус K воспроизводящий;*

б) *конус K' нормальный.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Если конус K воспроизводящий, то по теореме Крейна–Шмульяна (III.2.1) он несплющен и, следовательно, применима предыдущая теорема.

б) $\Rightarrow$ а). В предыдущей теореме доказано, в частности, что если конус K' нормальный, то K почти несплющен. Но тогда по лемме 3 из III.2 конус K — несплющенный и, тем самым, воспроизводящий. □

Следствие. *Если УНП (X, K) таково, что K' нормален, то сопряженное пространство (X', K') дедекиндово полно.*

Доказательство. Так как переход от УНП (X, K) к его (b)-пополнению и к замыканию конуса K не влияет на сопряженное пространство и сопряженный клин, то можно считать, что пространство X банахово, а конус K замкнут. Но тогда по доказанной теореме конус K воспроизводящий, следовательно, и несплющенный, и остается сослаться на теорему III.4.1. □

§ 7. РЕАЛИЗАЦИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Остановимся на реализации УНП с помощью непрерывных функций. Если T — компактное хаусдорфово пространство, то через $C(T)$ обозначим пространство всех вещественных непрерывных функций на T с конечными значениями и с обычной равномерной нормой. Порядок в $C(T)$ вводим естественным образом: функция $y \in C(T)$ считается положительной, если $y(t) \geq 0$ при всех $t \in T$. В таком случае $C(T)$ оказывается банаховой решеткой ограниченных элементов; норма в $C(T)$ совпадает с u-нормой, если за u принята функция $u(t) \equiv 1$. Рассматривая подпространство[30] из $C(T)$, будем считать, что норма и порядок в них индуцированы из $C(T)$.

Будем говорить, что УНП (X, K) и УНП (Y, L) *изоморфны* (алгебраически, порядково и топологически), если существует взаимнооднозначное и взаимно непрерывное линейное отображение ψ пространства X на пространство Y, при котором $\psi K = L$.

Теорема IV.7.1. *Для всякого УНП (X, K) с замкнутым, нормальным и несплющенным конусом K существует такое компактное хаусдорфово пространство T, что (X, K) изоморфно некоторому подпространству из $C(T)$.*

Доказательство. В сопряженном пространстве (X', K') рассмотрим множество $B'_+ = B' \cap K'$, где B' — замкнутый единичный шар в X'. Так как B' — слабо компактное множество, а K' слабо замкнуто, то B'_+ слабо компактно. Это множество мы и примем за T; таким образом, его точки суть положительные (b)-линейные функционалы $f \in B'_+$, а топология в T индуцируется слабой топологией сопряженного пространства. Если $x \in X$, то для любого $f \in B'_+$ положим

$$y_x(f) = f(x).$$

Тогда функция y_x непрерывна, т. е. $y_x \in C(T)$, отображение $y_x = \psi(x)$ линейно. Если

[30] Подпространством мы называем здесь любое линейное подмножество, необязательно замкнутое.

$y_x(f) \equiv 0$, то $f(x) = 0$ для любого $f \in B'_+$, а следовательно и для любого $f \in K'$. Но так как конус K нормален, то K' — воспроизводящий (теорема IV.5.1), и потому $f(x) = 0$ для любого $f \in X'$, а это означает, что $x = 0$. Таким образом, отображение ψ взаимно однозначно. Если $x \in K$, то $f(x) \geq 0$ для любого $f \in B'_+$, и потому $y_x \geq 0$. Обратно, если $y_x \geq 0$, то $f(x) \geq 0$ для любого $f \in K'$. Тогда, по лемме из II.4, $x \in K$. Значит, ψK совпадает с конусом положительных функций из ψX, а (X, K) и $(\psi X, \psi K)$ алгебраически и порядково изоморфны.

Остается проверить, что отображение ψ взаимно непрерывно. Для любого $x \in X$ имеем

$$|y_x(f)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\|,$$

следовательно, $\|y_x\| \leq \|x\|$ и ψ непрерывно. С другой стороны, так как пространство X' банахово, а конус K' — замкнутый и воспроизводящий, то он несплющен. Пусть M — его константа несплющенности. Для любого $f \in B'$ существует представление $f = g - h$, где $g,\ h \in K'$, $\|g\|,\ \|h\| \leq M$. Тогда $g = Mg_1$, $h = Mh_1$, где $g_1,\ h_1 \in B'_+$, и для любого $x \in X$

$$|f(x)| \leq |g(x)| + |h(x)| = M(|g_1(x)| + |h_1(x)|) \leq 2M\|y_x\|.$$

Отсюда $\|x\| \leq 2M\|y_x\|$, а потому и обратное отображение ψ^{-1} непрерывно. □

Теорема IV.7.2. *Всякое сепарабельное УНП (X, K) с замкнутым, нормальным и несплющенным конусом K изоморфно некоторому подпространству из $C[0, 1]$.*

Доказательство. Эта теорема может быть получена тем же методом, что и классическая теорема Банаха–Мазура об алгебраическом изоморфизме и изометрии сепарабельного нормированного пространства некоторому подпространству из $C[0, 1]$. Используем, например, доказательство теоремы Банаха–Мазура из книги Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова «Функциональный анализ в нормированных пространствах». В этом доказательстве по заданному $x \in X$ строится непрерывная функция $y_x(t)$ на отрезке $[0, 1]$ с использованием всех функционалов f из единичного шара B' (B' в указанной книге обозначено через Γ). В нашем случае нужно заменить B' на B'_+ и тогда требуемый изоморфизм устанавливается так же, как в предыдущей теореме. При этом вместо изометрии, доказываемой в теореме Банаха–Мазура, в нашем случае, как и в предыдущей теореме, получается лишь эквивалентность норм. □

Теорема IV.7.3. *Всякое УБП (X, K) с телесным, нормальным и миниэдральным конусом K изоморфно пространству $C(T)$, где T — некоторое компактное хаусдорфово пространство.*

Доказательство. Выберем сильно положительный элемент $u \in X$ и введем u-норму. По следствию из теоремы IV.4.1 u—норма эквивалентна исходной норме в X. С другой стороны, $(X, \|\cdot\|_u, K)$ — банахова решетка ограниченных элементов и по известной теореме Крейнов–Какутани из теории векторных решеток[31] эта банахова решетка алгебраически и порядково изоморфна и изометрична банаховой решетке непрерывных функций на некотором компактном хаусдорфовом пространстве. □

Замечание. Если отказаться от (b)-полноты пространства X, то предыдущая теорема остается верной в следующей ослабленной формулировке: *для всякого УНП (X, K) с телесным, нормальным и миниэдральным конусом K существует такое компактное хаусдорфово пространство T, что (X, K) изоморфно некоторому*

[31] См. [9], теорема VII.5.1.

подпространству Z из $C(T)$, плотному в $C(T)$ причем Z является подрешеткой в $C(T)$, т. е. грани конечных множеств функций из Z вычисляются, как и в $C(T)$, поточечно.

Это предложение доказывается так же, как и сама теорема, поскольку для нормированной решетки ограниченных элементов можно использовать теорему Крейнов–Какутани в ослабленной форме (см. замечание к теореме Крейнов–Какутани в [9]).

V. ПРОСТРАНСТВА С ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ СВОЙСТВОМ

§ 1. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО СВОЙСТВА

Определение. Будем говорить, что УВП (X, K) обладает *интерполяционным свойством Рисса ((и.св.))*, если для любых четырех элементов a_1, a_2, b_1, b_2, удовлетворяющих неравенствам $a_i \leq b_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, существует такой «промежуточный» элемент $c \in X$, что

$$a_i \leq c \leq b_j \qquad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Ясно, что по индукции (и.св.) распространяется на любые конечные множества элементов a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $(a_i \leq b_j)$. Заметим также, что для проверки (и.св.) достаточно убедиться, что промежуточный элемент c существует при дополнительном условии: $a_1,\ a_2 \geq 0$. Действительно, если $a_i \leq b_j$, $(i,\ j = 1,\ 2)$, то (ср. I.2) существует элемент $d \leq a_1,\ a_2$, например, $d = a_1 + a_2 - b_1$, и от произвольных $a_i,\ b_j$ можно перейти к $a_i - d$, $b_j - d$.

Лемма 1. *(И.св.) равносильно каждому из следующих двух свойств:*

а) *Если $0 \leq y \leq x_1 + x_2$, где $x_1,\ x_2 \geq 0$, то существуют такие $y_1,\ y_2 \geq 0$, что $y_i \leq x_i$ $(i = 1,\ 2)$, а $y = y_1 + y_2$.*

б) *Если $x = x_1 + x_2$, где $x_i \geq 0$, а, с другой стороны, $x = y + z$, где $y,\ z \geq 0$, то каждый x_i можно представить в виде $x_i = y_i + z_i$ так, что все $y_i,\ z_i \geq 0$ и что*

$$y = y_1 + y_2, \quad z = z_1 + z_2.$$

Доказательство. (И.св.) $\Longrightarrow$ а). Если y, x_1 и x_2 удовлетворяют указанным условиям, то положим $a_1 = 0$, $a_2 = y - x_1$, $b_1 = y$, $b_2 = x_2$ и воспользуемся (и.св.). Обозначая через c промежуточный элемент, мы легко убедимся, что $y_1 = y - c$ и $y_2 = c$ удовлетворяют требуемым условиям.

а) $\Longrightarrow$ б). Если x_1, x_2, y и z удовлетворяют указанным в б) условиям, то, в частности, $0 \leq y \leq x_1 + x_2$. Найдем y_1 и y_2, удовлетворяющие условию а), и положим $z_i = x_i - y_i$ $(i = 1,\ 2)$. Тогда $z_i \geq 0$ и $z = z_1 + z_2$.

б) $\Longrightarrow$ (и.св.). Если $a_i \leq b_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, то положим $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $v_1 = b_1 - a_2$, $v_2 = b_2 - a_1$, $u = u_1 + u_2 = v_1 + v_2$. Все эти элементы положительны и, согласно б), существуют такие $t_{ij} \geq 0$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, что

$$u_i = t_{i1} + t_{i2} \quad (i = 1,\ 2), \qquad v_j = t_{1j} + t_{2j} \quad (j = 1,\ 2).$$

Тогда элемент $a_1 + t_{12}$ и будет промежуточным между a_i и b_j. Проверка этого утверждения совершенно элементарна, если заметить, что $a_1 + t_{12} = b_2 - t_{22}$. $\square$

Замечание. Ясно, что оба утверждения а) и б) могут быть по индукции распространены на любое конечное число слагаемых, и таким образом, в частности, получается следующая теорема о двойном разбиении положительных элементов.

Теорема V.1.1. *Для того чтобы УВП (X, K) обладало (и.св.), необходимо и достаточно выполнение следующего условия: если $x = x_1 + \ldots + x_n$, где все $x_i \geq 0$, и, с другой стороны, $x = y + z$, где $y,\ z \geq 0$, то существуют такие $y_i,\ z_i \geq 0$, что $x_i = y_i + z_i$ при всех i, а*

$$y = y_1 + \ldots + y_n, \qquad z = z_1 + \ldots + z_n.$$

(И.св.) пространства (X, K) означает, что для любых $y,\ z \in K$

$$[0, y] + [0, z] = [0, y + z].$$

Действительно, включение левой части в правую справедливо в любом УВП, а обратное включение есть непосредственное следствие из пункта а) леммы.

Лемма 2 (Т. Андо [30]). *Пусть (X, K) — УБП, а конус K — замкнутый и нормальный. Пусть выполнено следующее условие: если $a_i \leq b_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $c \in X$ и $y \in K$, что $\|y\| < \varepsilon$ и*

$$a_i \leq c \leq b_j + y \qquad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Тогда (X, K) обладает (и.св.).

Доказательство. По индукции сразу получается, что если данное условие выполнено для множеств из двух элементов, то оно выполнено и для любых конечных множеств. Пусть $a_i \leq b_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$. По условию существуют такие $c_1 \in X$ и $y_1 \in K$, что

$$a_i \leq c_1 \leq b_j + y_1 \quad (i,\ j = 1,\ 2); \quad \|y_1\| < \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим множества $\{a_1, a_2, c_1 - y_1\}$ и $\{b_1, b_2, c_1\}$. К этим множествам снова можно применить данное условие, и потому существуют такие $c_2 \in X$ и $y_2 \in K$, что

$$a_1,\ a_2,\ c_1 - y_1 \leq c_2 \leq b_1 + y_2,\ b_2 + y_2,\ c_1 + y_2; \quad \|y_2\| < \frac{1}{2^2}.$$

Отсюда вытекает, что $-y_1 \leq c_2 - c_1 \leq y_2$. Пусть уже построены $c_i \in X$ и $y_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, что $\|y_i\| < \dfrac{1}{2^i}$ и при $i \leq 2$

$$a_1,\ a_2,\ c_{i-1} - y_{i-1} \leq c_i \leq b_1 + y_i,\ b_2 + y_i,\ c_{i-1} + y_i.$$

Рассмотрим множества $\{a_1, a_2, c_n - y_n\}$ и $\{b_1, b_2, c_n\}$, найдем такие $c_{n+1} \in X$ и $y_{n+1} \in K$, что $\|y_{n+1}\| < \dfrac{1}{2^{n+1}}$, а

$$a_1,\ a_2,\ c_n - y_n \leq c_{n+1} \leq b_1 + y_{n+1},\ b_2 + y_{n+1},\ c_n + y_{n+1}. \tag{1}$$

При этом $-y_n \leq c_{n+1} - c_n \leq y_{n+1}$. Этот процесс продолжается до бесконечности.

Из нормальности конуса K вытекает, что

$$\|c_{n+1} - c_n\| \leq A \cdot 2^{-n},$$

где A — некоторая постоянная (см. следствие 2 из теоремы IV.2.1). Следовательно, существует $c = (b)\text{-}\lim c_n$ и переход к (b)-пределу в неравенстве (1) дает, что

$$a_i \le c \le b_j \qquad (i,\ j = 1,\ 2). \qquad \square$$

Остановимся теперь на (и.св.) в пространстве (X, K) с телесным конусом K. Будем говорить, что это пространство обладает *сильным (и.св.)*, если для любых $a_i,\ b_j \in X$, удовлетворяющих условию $a_i \ll b_j$, $(i,\ j = 1,\ 2)$, существует такой элемент $c \in X$, что

$$a_i \ll c \ll b_j \qquad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Теорема V.1.2. *Пусть (X, K) — УБП и конус K телесен. Если пространство (X, K) обладает (и.св.), то оно обладает и сильным (и.св.). Обратно, если пространство (X, K) обладает сильным (и.св.), а телесный конус K замкнут и нормален, то (X, K) обладает (и.св.).*

Доказательство. а) Пусть X обладает (и.св.), K телесен и пусть $a_i \ll b_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$. Выберем сильно положительный элемент u. Так как $b_j - a_i \gg 0$ и, следовательно, являются сильными единицами в X, существуют такие $\varepsilon_{ij} > 0$, что $2\varepsilon_{ij} u \le b_j - a_i$. Положим

$$\varepsilon = \min_{i,\, j} \varepsilon'_{ij}; \quad a'_i = a_i + \varepsilon u, \quad b'_j = b_j - \varepsilon u.$$

Тогда $a'_i \le b'_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$. Согласно (и.св.) существует промежуточный элемент $c \in X$:

$$a'_i \le c \le b'_j \qquad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Но $a_i \ll a'_i$, $b_j \gg b'_j$, следовательно, $a_i \ll c \ll b_j$.

б) Пусть конус K замкнут, нормален и телесен, а пространство (X, K) обладает сильным (и.св.), и пусть $a_i \le b_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$. Выберем элемент $u \gg 0$, зададим $\varepsilon > 0$ и положим $b'_j = b_j + \varepsilon u$. Тогда $a_i \ll b'_j$ и, следовательно, существует такой $c \in X$, что $a_i \ll c \ll b'_j$. Таким образом, для пространства (X, K) выполнено условие предыдущей леммы, и потому оно обладает (и.св.). $\square$

§ 2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ СВОЙСТВОМ И МИНИЭДРАЛЬНОСТЬЮ КОНУСА

Если (X, K) — векторная решетка, а $a_i,\ b_j \in X$ — такие, что $a_i \le b_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, то промежуточным элементом будет, например, элемент $c = a_1 \vee a_2$ или $c = b_1 \wedge b_2$. Таким образом, всякая векторная решетка обладает (и.св.). Однако обратное неверно, как показывает следующий простой пример. Пусть $X = \mathbb{R}_2$, а упорядочение введено в нем с помощью конуса

$$K = \{x = (\xi_1, \xi_2) :\ \xi_1 > 0,\ \xi_2 > 0 \ \text{ или } \ \xi_1 = \xi_2 = 0\}.$$

Проверку (и.св.) в этом пространстве предоставляем читателю. В то же время этот конус не миниэдральный. Например, у множества из двух элементов $(0, 0)$ и $(1, -1)$ нет супремума.

Приведем менее тривиальный пример, принадлежащий И. Намиоке [41].

Пример 9. Пусть векторное пространство X состоит из всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,4]$, удовлетворяющих дополнительному условию:

$$x(2) = x(1) + x(3), \tag{2}$$

а конус K состоит из всех неотрицательных функций из X. При норме, индуцированной в X из $C[0,4]$, (X,K) становится банаховым пространством, а конус K замкнут в нем. Пусть x — функция на отрезке $[0,4]$, заданная следующим способом:

$$x(0) = x(1) = 1, \quad x(3) = x(4) = -1,$$

а в промежутках между указанными точками $x(t)$ определяется по закону линейного интерполирования (рис. 7). Тогда $x \in X$. Если бы в X существовал элемент $y = x \vee 0$, то легко понять, что при всех $t > 2$ мы имели бы $y(t) = 0$, а $y(1) \geq 1$. Но тогда $y(2) = y(1) + y(3) \geq 1$ и нарушается непрерывность функции y.

Рис. 7

Проверим, что X обладает (и.св.). Пусть даны четыре элемента x, y, z, $u \in X$, причем $x,\ y \leq z,\ u$. Положим

$$p(t) = \max[x(t), y(t)], \qquad q(t) = \min[z(t), u(t)].$$

Тогда $p(t) \leq q(t)$ при всех $t \in [0,4]$. Эти функции могут не входить в X, так как для них может не выполняться условие (2). В то же время легко видеть, что справедливо неравенство

$$p(2) \leq p(1) + p(3) \leq q(2).$$

Теперь положим

$$r(t) = \begin{cases} p(t) & \text{при} \quad t \in [0,1] \cup [3,4], \\ p(1) + p(3) & \text{при} \quad t = 2 \end{cases}$$

и определим $r(t)$ по закону линейного интерполирования в интервалах $(1,2)$ и $(2,3)$. Далее вводим функции

$$s(t) = \max[p(t), r(t)], \qquad v(t) = \min[q(t), s(t)].$$

Легко видеть, что

$$s(1) = v(1) = p(1), \quad s(3) = v(3) = p(3), \quad s(2) = v(2) = p(1) + p(3).$$

Таким образом, $v \in X$. Кроме того, $p(t) \leq v(t) \leq q(t)$ при всех t, а потому $x,\ y \leq v \leq z,\ u$.

Дадим теперь одно обобщение теоремы I.5.1.

Теорема V.2.1. *Если УВП (X,K) обладает (и.св.) и дедекиндово полно, а конус K — воспроизводящий, то (X,K) — K-пространство.*

Доказательство. В силу теоремы I.5.1 достаточно проверить, что (X,K) — векторная решетка. Возьмем любые $x,\ y \in X$. Так как конус K — воспроизводящий, множество $\{x,y\}$ ограничено сверху. Если z и u — любые две его верхние границы, то благодаря (и.св.) существует промежуточный элемент c:

$$x,\ y \leq c \leq z,\ u.$$

Этот элемент c также является верхней границей множества $\{x, y\}$ и, следовательно, совокупность верхних границ этого множества направлена по убыванию. Благодаря дедекиндовой полноте пространства X, существует инфимум совокупности верхних границ, который, очевидно, также является верхней границей множества $\{x, y\}$. Это и есть $x \vee y$. $\square$

Следствие. *Если в УНП (X, K) конус K несплющен и нормален, то в сопряженном пространстве (X', K') (и.св.) равносильно миниэдральности конуса K'.*

Действительно, по теореме III.4.1 сопряженное пространство (X', K') дедекиндово полно, а по теореме Крейна (IV.5.1) конус K' — воспроизводящий. Поэтому если предположить, что (X', K') обладает (и.св.), то по теореме V.2.1 (X', K') — векторная решетка.

§ 3. МИНИЭДРАЛЬНОСТЬ СОПРЯЖЕННОГО КОНУСА

(И.св.) играет решающую роль при выяснении, когда сопряженный конус будет миниэдральным. Метод доказательства приводимой ниже теоремы существенно заимствован из работ Ф. Рисса [43] и Л.В. Канторовича [15].

Теорема V.3.1. *Если УНП (X, K) обладает (и.св.), а конус K несплющен и нормален, то сопряженное пространство (X', K') — K-пространство.*

Доказательство. Согласно следствию из теоремы III.4.1 достаточно проверить, что (X', K') — векторная решетка. Так как конус K нормален, то K' — воспроизводящий. Поэтому достаточно рассмотреть произвольные функционалы $g,\ h \in K'$ и доказать существование их супремума $g \vee h$ (см. I.5). С этой целью положим для любого $x \in K$

$$f(x) = \sup_{y+z=x;\ y,\, z \in K} \{g(y) + h(z)\}.$$

Так как $g(y) + h(z) \le g(x) + h(x)$, то $f(x) \le g(x) + h(x) < +\infty$. Проверим, что f обладает свойством аддитивности на K.

Пусть $x = x_1 + x_2$ $(x_1,\ x_2 \in K)$. Если $y_1 + z_1 = x_1$, $y_2 + z_2 = x_2$ $(y_i,\ z_i \in K)$, то положим $y = y_1 + y_2$, $z = z_1 + z_2$. Тогда

$$[g(y_1) + h(z_1)] + [g(y_2) + h(z_2)] = g(y) + h(z) \le f(x)$$

и, следовательно, переходя к супремумам в скобках, получаем

$$f(x_1) + f(x_2) \le f(x). \tag{3}$$

Обратно, возьмем произвольные $y,\ z \in K$, для которых $y + z = x$. По лемме 1 из V.1 существуют такие $y_i,\ z_i \in K$, что $x_i = y_i + z_i$ $(i = 1,\ 2)$, а $y = y_1 + y_2$, $z = z_1 + z_2$. Тогда

$$g(y) + h(z) = [g(y_1) + h(z_1)] + [g(y_2) + h(z_2)] \le f(x_1) + f(x_2)$$

и, переходя в левой части к верхней грани, получим

$$f(x) \le f(x_1) + f(x_2). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$.

Теперь функционал f с сохранением аддитивности распространяем обычным способом на все X. Получим линейный функционал, который, как элемент из $X^\sharp$, удовлетворяет неравенству $0 \le f \le g + h$. Тогда по лемме из III.4, $f \in K'$. $\square$

Доказанная теорема позволяет легко указать много примеров пространств, не обладающих (и.св.). Именно, пусть X — рефлексивное банахово пространство, упорядоченное с помощью замкнутого, воспроизводящего и нормального конуса K. Предположим, что (X, K) обладает (и.св.). Тогда сопряженное пространство (X', K') — векторная решетка, причем конус K', очевидно, замкнутый, а также воспроизводящий по теореме Крейна и нормальный по двойственной теореме Андо. Следовательно, второе сопряженное пространство (X'', K''), где K'' — конус, сопряженный к K', тоже векторная решетка. Но X'' можно отождествить с X, а тогда, по лемме из II.4, K'' совпадает с K. Таким образом, оказывается, что и (X, K) — векторная решетка. Следовательно, если конус в рефлексивном пространстве удовлетворяет указанным выше условиям, но не миниэдральный, то это пространство не обладает (и.св.). В частности, в конечномерных пространствах с замкнутым воспроизводящая конусом (и.св.) равносильно миниэдральности конуса[32]. В то же время, пример, приведенный в V.2, показывает, что конечномерное пространство с незамкнутым воспроизводящим конусом может обладать (и.св.), но не быть решеткой.

§ 4. ТЕОРЕМЫ КРЕЙНА И АНДО

Значительно сложнее предыдущей теоремы доказывается обратный результат, справедливый в банаховых пространствах с замкнутым воспроизводящим конусом.

Теорема V.4.1 (Т. Андо [30]). *Пусть (X, K) — УБП и конус K — замкнутый и воспроизводящий. Если сопряженное пространство (X', K') — векторная решетка*[33]*, то (X, K) обладает (и.св.), а конус K — нормален.*

Приводимое ниже доказательство этой теоремы предложено И.Ф. Даниленко.

Доказательство. Так как в векторной решетке (X', K') конус K' должен быть воспроизводящим, то нормальность конуса K вытекает из теоремы Крейна (IV.5.1). Будем проверять, что (X, K) обладает (и.св.).

Пусть $a_i \le b_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$; при этом последующее рассуждение достаточно провести в предположении, что $a_i \ge 0$. Введем вспомогательное банахово пространство $Y = X \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, с нормой, определенной по формуле $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$. Сопряженное пространство Y', очевидно, имеет вид $Y' = X' \times \mathbb{R}$, причем

$$\|(f, \lambda)\| = \max(\|f\|, |\lambda|) \qquad (f \in X',\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

В Y' выделим четыре конуса:

$$\underline{L}_i = \{(f, \lambda):\ f \in K',\ 0 \le \lambda \le f(a_i)\},$$

$$\overline{L}_j = \{(f, \lambda):\ f \in K',\ \lambda \ge f(b_j)\} \qquad (i,\ j = 1,\ 2)$$

[32] Отсюда следует, что пространство $\mathbb{R}_3$, упорядоченное с помощью «круглого» замкнутого конуса, не обладает (и.св.).

[33] Отсюда благодаря теоремам I.5.1 и III.4.1, уже следует, что (X', K') — K-пространство.

(то, что это — конусы, очевидно), а с их помощью определим клин

$$L = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 - \overline{L}_1 - \overline{L}_2.$$

Пусть $(f, \lambda) \in L$. Это значит, что $f = \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_1 - \psi_2$, а $\lambda = \mu_1 + \mu_2 - \nu_1 - \nu_2$, причем $(\varphi_i, \mu_i) \in \underline{L}_i$, $(\psi_j, \nu_j) \in \overline{L}_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, и потому

$$0 \le \mu_i \le \varphi_i(a_i), \quad \nu_j \ge \psi_j(b_j) \qquad (i,\ j = 1,\ 2). \tag{5}$$

Функционал f можно представить в виде $f = f^+ - f^-$, где f^+ и f^- — положительная и отрицательная части f (см. I.5). При этом

$$0 \le f^+ \le \varphi_1 + \varphi_2, \quad 0 \le f^- \le \psi_1 + \psi_2.$$

Так как векторная решетка обладает (и.св.), то по лемме 1 из V.1 существуют такие функционалы $f_1^+,\ f_2^+,\ f_1^-,\ f_2^- \in K'$, что

$$f^+ = f_1^+ + f_2^+, \quad f^- = f_1^- + f_2^-, \quad f_i^+ \le \varphi_i, \quad f_j^- \le \psi_j \quad (i,\ j = 1,\ 2). \tag{6}$$

Далее положим

$$g_i = \varphi_i - f_i^+, \quad h_j = \psi_j - f_j^- \quad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Тогда

$$g_1 + g_2 = \varphi_1 + \varphi_2 - f^+ = \psi_1 + \psi_2 + f - f^+ = \psi_1 + \psi_2 - f^- = h_1 + h_2.$$

По теореме о двойном разбиении положительных элементов (V.1.1) существуют такие функционалы $\ell_{ij} \in K'$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, что

$$g_i = \ell_{i1} + \ell_{i2}, \quad h_j = \ell_{1j} + \ell_{2j} \quad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Теперь будем оценивать число λ (вторую компоненту взятого из L элемента (f, λ)). Из (5) следует, что

$$\lambda \le \varphi_1(a_1) + \varphi_2(a_2) - \psi_1(b_1) - \psi_2(b_2) = f_1^+(a_1) + f_2^+(a_2) - f_1^-(b_1) - f_2^-(b_2) + A,$$

где

$$\begin{aligned} A = g_1(a_1) + g_2(a_2) - h_1(b_1) - h_2(b_2) = \\ = \ell_{11}(a_1) + \ell_{12}(a_1) + \ell_{21}(a_2) + \ell_{22}(a_2) - \ell_{11}(b_1) - \ell_{21}(b_1) - \ell_{12}(b_2) - \ell_{22}(b_2). \end{aligned}$$

Но так как $a_i \le b_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, то $A \le 0$. Следовательно,

$$\lambda \le f_1^+(a_1) + f_2^+(a_2) - f_1^-(b_1) - f_2^-(b_2).$$

Из этого неравенства вытекает, что λ можно представить в виде $\lambda = \lambda_1^+ + \lambda_2^+ - \lambda_1^- - \lambda_2^-$, где

$$0 \le \lambda_i^+ \le f_i^+(a_i), \quad \lambda_j^- \ge f_j^-(b_j) \quad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Таким образам,

$$(f, \lambda) = (f_1^+, \lambda_1^+) + (f_2^+, \lambda_2^+) - (f_1^-, \lambda_1^-) - (f_2^-, \lambda_2^-), \tag{7}$$

причем

$$(f_i^+,\lambda_i^+)\in\underline{L}_i,\quad (f_j^-,\lambda_j^-)\in\overline{L}_j\quad (i,\ j=1,\ 2),$$
$$f_1^+ + f_2^+ = f^+,\quad f_1^- + f_2^- = f^-.$$

Теперь покажем, что клин L слабо замкнут в Y'. По известному критерию слабой замкнутости Крейна–Шмульяна[34] достаточно проверить, что пересечение L_1 клина L с замкнутым единичным шаром из Y':

$$L_1 = L\cap(B'\times[-1,1])$$

(B' — замкнутый единичный шар из X'), слабо замкнуто. Пусть направление $(f_\alpha,\lambda_\alpha)\xrightarrow{\text{сл}}(f,\lambda)$, причем $(f_\alpha,\lambda_\alpha)\in L_1$. Это означает, что $f_\alpha\xrightarrow{\text{сл}} f$ в X', $\lambda_\alpha\to\lambda$, и притом $f_\alpha\in B'$, $\lambda_\alpha\in[-1,1]$. Но тогда и $f\in B'$, $\lambda\in[-1,1]$, следовательно, $(f,\lambda)\in B'\times[-1,1]$. Остается проверить, что $(f,\lambda)\in L$. Поскольку конус K' замкнутый и воспроизводящий в УБП (X',K'), то, по теореме III.2.1, он несплющен. Пусть M — его константа несплющенности. По двойственной теореме Андо (IV.6.2) конус K' нормален. Пусть N — константа полумонотонности нормы в X'. Представим каждый элемент $(f_\alpha,\lambda_\alpha)$ по формуле (7):

$$(f_\alpha,\lambda_\alpha)=(f_{\alpha1}^+,\lambda_{\alpha1}^+)+(f_{\alpha2}^+,\lambda_{\alpha2}^+)-(f_{\alpha1}^-,\lambda_{\alpha1}^-)-(f_{\alpha2}^-,\lambda_{\alpha2}^-),$$

причем

$$f_{\alpha1}^+ + f_{\alpha2}^+ = (f_\alpha)^+,\quad f_{\alpha1}^- + f_{\alpha2}^- = (f_\alpha)^-,$$
$$0\le\lambda_{\alpha i}^+\le f_{\alpha i}^+(a_i),\quad \lambda_{\alpha j}^-\ge f_{\alpha j}^-(b_j)\quad (i,\ j=1,\ 2). \tag{8}$$

Но так как каждый f_α допускает еще и представление в виде $f_\alpha=g_\alpha-h_\alpha$, где $g_\alpha,\ h_\alpha\in K'$, и притом $\|g_\alpha\|,\ \|h_\alpha\|\le M\|f_\alpha\|\le M$, а

$$0\le f_{\alpha1}^+,\ f_{\alpha2}^+\le(f_\alpha)^+\le g_\alpha,\quad 0\le f_{\alpha1}^-,\ f_{\alpha2}^-\le(f_\alpha)^-\le h_\alpha,$$

то $\|f_{\alpha1}^+\|,\ \|f_{\alpha2}^+\|,\ \|f_{\alpha1}^-\|,\ \|f_{\alpha2}^-\|\le NM$. Отсюда следует, что

$$\lambda_{\alpha i}^+\le f_{\alpha i}^+(a_i)\le NM\|a_i\|\quad (i,\ j=1,\ 2),$$

а

$$\lambda_{\alpha1}^- + \lambda_{\alpha2}^-\le\lambda_{\alpha1}^+ + \lambda_{\alpha2}^+ + |\lambda_\alpha|\le NM(\|a_1\|+\|a_2\|)+1.$$

Теперь, благодаря слабой компактности замкнутых шаров в X' и компактности отрезка $[-1,1]$, из направления индексов α можно выделить такое поднаправление $\{\alpha_\beta\}$, что

$$f_{\alpha_\beta i}^+\xrightarrow{\text{сл}} g_i,\quad f_{\alpha_\beta j}^-\xrightarrow{\text{сл}} h_j,\quad \lambda_{\alpha_\beta i}^+\to\mu_i,\quad \lambda_{\alpha_\beta j}^-\to\nu_j\quad (i,\ j=1,\ 2)$$

(см. дополнение 2). А тогда

$$(f,\lambda)=(g_1,\mu_1)+(g_2,\mu_2)-(h_1,\nu_1)-(h_2,\nu_2).$$

[34]Критерий Крейна–Шмульяна заключается в следующем: если выпуклое множество $E\subset X'$ таково, что его пересечение с любым кратным nB' замкнутого единичного шара $B'\subset X'$ слабо замкнуто, то и E слабо замкнуто. См., например: Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, М., ИИЛ, 1962, том I, стр. 465. Поскольку здесь мы применяем критерий Крейна–Шмульяна к клину, достаточно проверить слабую замкнутость пересечения клина с единичным шаром.

Из (8) вытекает, что
$$0 \le \mu_i \le g_i(a_i), \quad \nu_j \ge h_j(b_j),$$
следовательно, $(g_i, \mu_i) \in \underline{L}_i$, $(h_j, \nu_j) \in \overline{L}_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, а $(f, \lambda) \in L$. Слабая замкнутость L_1, а тем самым и L, доказана.

Покажем, что элемент $(0, 1)$ из Y' не входит в L. Действительно, если допустить, что $(0, 1) \in L$, и воспользоваться формулой (7) при $f = 0$ и $\lambda = 1$, то мы получим, что $f_1^+ = f_2^+ = f_1^- = f_2^- = 0$ и $\lambda_1^+ = \lambda_2^+ = 0$. Но, с другой стороны, $\lambda_1^+ + \lambda_2^+ \ge \lambda = 1$, и мы приходим к противоречию.

Как известно, существует такой $C \in Y$, что гиперплоскость $F(C) = k$ отделяет клин L от элемента $(0, 1)$ (см. дополнение 3). Здесь $C = (c, \rho)$, где $c \in X$, $\rho \in \mathbb{R}$, $F = (f, \lambda) \in Y'$. Таким образом, уравнение отделяющей гиперплоскости можно записать в виде
$$f(c) + \lambda\rho = k.$$
Не умаляя общности, можно считать, что $f(c) + \lambda\rho \ge k$ при всех $(f, \lambda) \in L$, а так как L — клин, то $f(c) + \lambda\rho \ge 0$ при всех $(f, \lambda) \in L$. В то же время, поскольку $(0, 0) \in L$, то $F(C) < 0$ при $F = (0, 1)$, т. е. $\rho < 0$. Снова, не умаляя общности, можно считать, что $\rho = -1$. Элемент $(f, f(a_i)) \in \underline{L}_i \subset L$ $(i = 1,\ 2)$ при любом $f \in K'$, поэтому $f(c) - f(a_i) \ge 0$, откуда $f(c) \ge f(a_i)$. Так как это верно при любом $f \in K'$, то по лемме из II.4 $c \ge a_i$ $(i = 1,\ 2)$. Аналогично, элемент $(f, f(b_j)) \in \overline{L}_j \subset -L$ $(j = 1,\ 2)$ при любом $f \in K'$, поэтому $f(c) - f(b_j) \le 0$, откуда $f(c) \le f(b_j)$, а $c \le b_j$ $(j = 1,\ 2)$. Тем самым, существование «промежуточного» элемента c доказано. □

Значительно раньше, чем была доказана теорема Андо, М.Г. Крейн установил аналогичную теорему для пространств с телесным конусом. Мы докажем эту теорему с помощью теоремы Андо.

Теорема V.4.2 (М.Г. Крейн [18]). *Если (X, K) — УБП с замкнутым телесным и нормальным конусом K, то для того чтобы сопряженное пространство (X', K') было векторной решеткой, необходимо и достаточно, чтобы (X, K) обладало сильным (и.св.).*

Доказательство. Согласно теореме V.1.2 сильное (и.св.) в условиях теоремы Крейна равносильно (и.св.). Кроме того, телесность конуса влечет его несплющенность. Остается сослаться на теоремы V.3.1 и V.4.1. □

К теоремам V.3.1 и V.4.1 примыкает следующая

Теорема V.4.3. *Пусть (X, K) — УБП и конус K замкнут. Для того чтобы сопряженное пространство (X', K') было K-пространством, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *конус K был воспроизводящим и нормальным,*

2) *(X, K) обладало (и.св.).*

При этом необходимость условий 1)–2) вытекает уже из предположения, что (X', K') — K_σ-пространство.

Несложное доказательство этой теоремы мы опускаем.

ДОПОЛНЕНИЯ

§ 1. ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННОГО ЗАМКНУТЫМ СИММЕТРИЧНЫМ ВЫПУКЛЫМ МНОЖЕСТВОМ

Приведем доказательство теоремы, сформулированной в IV.4.

а) Необходимость. Пусть p — норма и пространство (X_B, p) банахово. Покажем сначала, что оператор вложения (X_B, p) в $(X_B, \|\cdot\|)$ непрерывен, а для этого достаточно установить, что график этого оператора замкнут. Пусть $x_n \in X_B$, $p(x_n) \to 0$ (достаточно рассмотреть этот случай), а $x_n \xrightarrow{(b)} x$ в пространстве X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ включение $x_m \in \varepsilon B$ справедливо при $m \geq n(\varepsilon)$. Поскольку множество εB замкнуто в пространстве $(X, \|\cdot\|)$, отсюда следует, что и $x \in \varepsilon B$. Таким образом, $p(x) = 0$, а потому и $x = 0$.

Из непрерывности оператора вложения вытекает, что множество B, ограниченное по отношению к норме p в пространстве X_B, (b)-ограничено в пространстве $(X, \|\cdot\|)$.

б) Достаточность. Пусть множество B (b)-ограничено в пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Отсюда сразу следует, что p — норма в X_B. Множество B совпадает с замкнутым единичным шаром пространства (X_B, p), а потому существует такая постоянная M, что $\|x\| \leq Mp(x)$ для любого $x \in X_B$. Рассмотрим (p)-фундаментальную последовательность $\{x_n\}$ в пространстве X_B: $p(x_m - x_n) \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$. Тогда и $\|x_n - x_m\| \to 0$, следовательно, в пространстве X существует $x = (b)\text{-}\lim x_n$. При любом $\varepsilon > 0$ $x_m - x_n \in \varepsilon B$, если $m \geq n$, а n достаточно велико. Снова используя замкнутость множества εB, получим, что $x - x_n \in \varepsilon B$. Отсюда вытекает, что $x \in X_B$, а $p(x - x_n) \leq \varepsilon$. Таким образом, $p(x - x_n) \to 0$ и пространство (X_B, p) полно. $\square$

§ 2. О КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Сначала введем понятие поднаправления. Пусть задано направление $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$, состоящее из элементов произвольного множества. Направление $\{y_\beta\}$ $(\beta \in B)$ называется *поднаправлением*, выделенным из $\{x_\alpha\}$, если существует такое отображение множества B в A: $\beta \to \alpha_\beta$, что

1) $y_\beta = x_{\alpha_\beta} \quad \forall\, \beta \in B$;

2) для любого $\alpha \in A$ существует такое $\beta_0 \in B$, что $\alpha_\beta \geq \alpha$ при всяком $\beta \geq \beta_0$.

Ясно, что если $\{y_\beta\}$ — поднаправление, выделенное из $\{x_\alpha\}$, а $\{z_\gamma\}$ — поднаправление, выделенное из $\{y_\beta\}$, то $\{z_\gamma\}$ также является поднаправлением и по отношению к $\{x_\alpha\}$.

Теорема. *Множество E из некоторого топологического пространства компактно тогда и только тогда, когда из любого направления точек множества E можно выделить поднаправление, топологически сходящееся к некоторой точке из E.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге Дж. Келли «Общая топология» (стр. 184). В нашей книге теорема о компактных множествах применяется к слабо компактным множествам, т. е. к множествам, компактным в слабой топологии. Напомним, что слабая топология в сопряженном пространстве (см. сноску к доказательству теоремы II.4.2) вводится следующим образом: база окрестностей точки $f_0 \in X'$ состоит из множеств вида

$$V(f_0; \varepsilon; x_1, \ldots, x_n) = \{f \in X' : \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)\},$$

где $\varepsilon > 0$, а $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — любое конечное множество элементов из X.

§ 3. ТЕОРЕМЫ ОТДЕЛИМОСТИ

В главе II доказана теорема Эйдельгайта (II.2.3) об отделимости выпуклых множеств в нормированных пространствах. Эта теорема остается верной и в линейных топологических пространствах, в частности, она верна в сопряженном пространстве, которое снабжено слабой топологией (см. [28], II.9). При этом следует учесть, что всякий линейный функционал F на X', непрерывный по отношению к слабой топологии, имеет вид $F(f) = f(x)$, где x — некоторый элемент из X. См., например, уже упоминавшуюся книгу Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова, стр. 378 (по изд. 1959 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1 Абрамович Ю.А., Лозановский Г.Я. *О некоторых числовых характеристиках KN-линеалов.* Матем. заметки, вып. 5, 1973, 14, 723–732.

2 Ажоркин В.И., Бахтин И.А. *К геометрии конусов линейных положительных операторов в пространстве Банаха.* Труды центрального зонального объединения математических кафедр. Функциональный анализ и теория функций, вып. 2. Калинин, 1971, 3–10.

3 Бахтин И.А. *Об одном критерии нормальности конуса.* Труды семинара по функциональному анализу, вып. 6. Воронеж, 1958, 19.

4 Бахтин И.А. *К геометрии конусов в пространстве Банаха.* Сиб. мат. журнал, 1965, 6, № 2, 262–270.

5 Бахтин И.А. *О продолжении линейных положительных функционалов.* Сиб. мат. журнал, 1968, 9, № 3, 475–484.

6 Бахтин И.А. *К геометрии правильных конусов.* Функциональный анализ, Межвузовский сборник, вып. 2. Ульяновск, 1974, 94–104.

7 Бахтин И.А. *К задаче о полноте пространства E_{u_0}.* Функциональный анализ, вып. 3. Ульяновск, 1974, 24–28.

8 Бахтин И.А., Красносельский М.А., Стеценко В.Я. *О непрерывности линейных положительных операторов.* Сиб. мат. журнал, 1962, 3, № 1, 156–160.

9 Вулих Б.З. *Введение в теорию полуупорядоченных пространств.* М., Физматгиз, 1961.

10 Вулих Б.З. *О линейных структурах, эквивалентных структурам с монотонной нормой.* ДАН СССР, 1962, 147, № 2, 271–274.

11 Вулих Б.З., Корсакова О.С. *О пространствах, в которых сходимость по норме совпадает с порядковой сходимостью.* Матем. заметки, 1973, 13, вып. 2, 259–268.

12 Гейлер В.А., Даниленко И.Ф., Чучаев И.И. *О связи между относительно равномерной сходимостью и нормальностью конуса в упорядоченном векторном пространстве.* «Оптимизация», вып. 12 (29). Новосибирск, 1973, 29–33.

13 Гуревич Э.Е., Роткович Г.Я. *Сравнение различных определений ()-сходимости в структурах.* Учен. зап. Ленинградского пед. ин-та им. А.И. Герцена, 1965, 274, 52–58.

14 Даниленко И.Ф. *О нормальных и оштукатуриваемых конусах в локально выпуклых пространствах.* Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 15. Харьков, 1972, 102–110.

15 Канторович Л.В. *К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах.* ДАН СССР, 1936, I, 271–274.

16 Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений.* М., Фиэматгиз, 1962.

17 Красносельский М.А. *Правильные и вполне правильные конусы.* ДАН СССР, 1960, 135, № 2, 255–257.

18 Крейн М.Г. *О минимальном разложении функционала на положительные составляющие.* ДАН СССР, 1940, 28, № 1, 18–22.

19 Крейн М.Г. *Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха.* ДАН СССР, 1940, 28, № 4, 13–17.

20 Крейн М.Г., Рутман М.А. *Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха.* Успехи матем. наук, 1948, 3, вып. 1 (23), 3–95.

21 Лифшиц Е.А. *К теории полуупорядоченных банаховых пространств.* Функциональный анализ и его приложения,1969, 3, вып. 1, 91–92.

22 Лифшиц Е.А. *Идеально выпуклые множества.* Функциональный анализ и его приложения, 1970, 4, вып. 4, 76–77.

23 Лозановский Г.Я. *О конусах в нормированных структурах.* Вестник Ленинградского университета, 1962, 19, 148–150.

24 Макаров Б.М. *О топологической эквивалентности B-пространств.* ДАН СССР, 1956, 107, № 1, 17–18.

25 Рубинов А.М. *Бесконечномерные модели производства.* – Сиб. мат. журнал, 1969, 10, № 6, 1375–1386.

26 Чучаев И.И. *Об оштукатуриваемых конусах в локально выпуклых пространствах.* Вестник Ленинградского университета, 1975, 7, 70–77.

27 Чучаев И.И. *Некоторые примеры конусов в нормированных пространствах.* Вопросы современной математики и ее преподавания в высшей школе, № 108. Саранск, 1974, 24–30.

28 Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* М., Мир, 1971.

29 Amemiya J. *A generalization of Riesz–Fischer theorem.* J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, 353–354.

30 Ando T. *On fundamental properties of a Banach space with a cone.* Pacific J. Math., 1962, 12, 1163–1169.

31 Asimow L. *Directed B-spaces of affine functions.* Trans. A.M.S., 1969, 143, 117–132.

32 Bishop B., Phelps R.R. *Support functionals of a convex set.* Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.; VII, Convexity, 1963, 27–35.

33 Bonsall F.F. *Endomorphisms of a partially ordered vector space without order unit.* J. Lond. M. Soc., 1955, 30, 144–153.

34 De Marr R.E. *Order convergence in linear topological spaces.* - Pacific J. Math., 1964, 14, № 1, 17–20.

35 Edwards D.A. *On the homeomorphic affine embedding of a locally compact cone into a Banach dual space endowed with the vague topology.* Proc. Lond. M.S., 1964, 14, 399–414.

36 Ellis A.J. *The duality of partially ordered normed linear spaces.* J. Lond. M.S., 1964, 39, 730–744.

37 Jameson Gr. *Ordered linear spaces.* Springer-Verlag, 1970.

38 Kakutani S. *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem.* Ann. of Math., 1941, 42, 523–537.

39 Luxemburg W.A.J., Zaanen A.O. *Notes on Banach function spaces.* X. Proc. Nederl. Akad. Wetensch., Ser A, 1964, 67, № 5, 493–506; XVI A; 1965, 68, № 1, 648–657.

40 Nakano H. *Modulared semi-odrered linear spaces.* Tokyo, Maruzen Co; LTD, 1950.

41 Namioka I. *Partially ordered linear topological spaces.* Memoirs A.M.S., 1957, 24.

42 Ogasawara T. *Theory of vector lattices.* J. Hirosima Univ., Ser A, 1942, 12, 37–100; 1944, 13, 41–161.

43 Riesz F. *Sur la décomposition des opérations linéaires.* Atti Congresso Bologna, 1928, 3, 143–148.

44 Waterman A.G. *The normal completion of certain partially ordered vector spaces.* Proc. A.M.S., 1970, 25, № 1, 141–144.

45 Wickstead A.W. *Spaces of linear operators between partially ordered Banach spaces.* Proc. Lond. M.S., 1974, 28, № 1, 141–158.

46 Wong Yau-Chuen, Ng Kung-Fu. *Partially ordered topological vector spaces.* Oxford, Clarendon Press, 1973.

Примечание. Уже после подготовки рукописи этой книги к печати автору стало известно о выходе в свет книги:

Бахтин И.А. *Конусы в пространствах Банаха.* Ч. I. Изд. Воронежского пед. ин-та, 1975.

Многие встречавшиеся выше ссылки на журнальные статьи И.А. Бахтина могут быть заменены ссылками на его новую книгу.

Предметный указатель