

Fritz Thümmeler

Fliehkraft und Beharrungs- regler. Versuch einer einfachen Darstellung der Regulierungsfrage im Tolleschen Diagramm

Fliehkraft und Beharrungsregler.

Versuch einer einfachen Darstellung der Regulierungsfrage im Tolleschen Diagramm

mit einem Anhang:

**Über den Einfluss des Reglers auf das Pendeln parallel
geschalteter Wechselstrommaschinen.**

(Hierzu 6 Tafeln.)

**Von der Königl. Sächs. Technischen Hochschule
zu Dresden**

zur

**Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte Dissertation**

vorgelegt von

Fritz Thümmler

Staatl. gepr. Bauführer und Diplom-Ingenieur.

Referent: Geh. Hofrat Prof. L. Lewicki.

Korreferent: Prof. Dr. Mollier.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1903

Additional material to this book can be downloaded from <http://extras.springer.com>

ISBN 978-3-662-32171-3

ISBN 978-3-662-32998-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-32998-6

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	5— 11

I. Teil.

Das Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen.

§ 1. Das Tollesche Diagramm als Schwingungsdiagramm . .	12— 16
§ 2. Dämpfung und Erhaltung von Schwingungen . . .	17— 19
§ 3. Die Schwingungen des Pendelreglers	19— 22
§ 4. Die bei der Rechnung gemachten Voraussetzungen . .	22— 26
§ 5. Elementare Ableitung der Differentialgleichung . . .	26— 34
§ 6. Durchrechnung eines Beispiels	34— 49
§ 7. Berechnung des Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 . . .	49— 56
§ 8. Der mindestens erforderliche Unempfindlichkeitsgrad ε .	56— 62
§ 9. Die Zusatzreibung der Ruhe und der Bewegung . . .	62— 76
§ 10. Vergleich zwischen Feder- und Gewichtsregler . . .	76— 81

II. Teil.

Das Verhalten der Regulierung bei konstanter Belastung.

§ 11. Grenzbezirk und Schwingungszeit	82— 88
§ 12. Das Tanzen des Reglers	88— 97

III. Teil.

Ölbremse und Beharrungsgewicht.

§ 13. Widerstände von der Form: $m_r \cdot k \cdot \frac{dx}{dt}$	98—118
§ 14. Beharrungsregler	118—136
§ 15. Zusammenfassung	136—138

Anhang: Der Einfluß des Reglers auf das Pendeln parallel geschalteter Wechselstrommaschinen	139—153
--	---------

Einleitung.

Das Kegelpendel wurde zuerst von Watt als Geschwindigkeitsregler angewendet, ohne daß man eingehende, analytische Betrachtungen über die statischen und dynamischen Eigenschaften, d. h. über den Beharrungszustand und die Schwingungen um denselben, anstellte. Durch die Beobachtung der Schwingungserscheinungen, welche unter Umständen eine Regulierung unbrauchbar machen konnten, wurde man veranlaßt, den Ursachen dieser unerwünschten Erscheinung nachzuspüren. England ist der Ausgangspunkt dieser Forschungen. Nicht nur im Maschinenbau, sondern auch in der Astronomie lag die Aufgabe vor, bei Mechanismen, selbstregistrierenden Instrumenten eine möglichst konstante Umdrehungsgeschwindigkeit zu erzeugen. Man gelangte sehr bald zu der Erkenntnis, daß die unerwünschten Pendelbewegungen, welche eine mehr oder weniger beträchtliche Schwankung der Drehgeschwindigkeit herbeiführten, nicht durch gewöhnliche, etwa konstante Reibungswiderstände gedämpft und in engen Grenzen gehalten werden konnten.

Bereits im Jahre 1851 wurde, wie Dr. Routh in seiner Dynamik starrer Körper berichtet, in den „Memoirs of the Astronomical Society of London“ Band 20 ein Vorschlag von Sir G. B. Airy veröffentlicht, der das Prinzip der Flüssigkeitsbremse enthält, die als sogenannte Ölbremse im Maschinenbau allgemein bekannt ist. Sir G. B. Airy schlägt vor, mit der Reglerhülse eine kreisförmige Platte zu verbinden, die sich in einem mit Wasser gefüllten vertikalen Cylinder von etwas größerem Durchmesser bewegt. So kann man den Schwingungen große Widerstände entgegensetzen und sie verringern, während der Ruheort, der von statischen oder sich nur langsam ändernden Kräften abhängt, dadurch nicht betroffen wird.

Seitdem sind zahlreiche Konstruktionen entstanden, die alle denselben Zweck zu erreichen suchen, und zwar nicht nur im

Maschinenbau, sondern auch auf anderen Gebieten. Prof. I. A. Ewing beschreibt in der „Nature“ Band 23, Jahrgang 1881, einen Geschwindigkeitsregler, den er an eine Uhrfeder anbrachte, die einen selbstregistrierenden Seismographen trieb, dessen Bewegung stetig und möglichst gleichmäßig sein sollte. Die häufigste und wichtigste Verwendung hat jedoch der Pendelregler im Maschinenbau gefunden, in der Hauptsache zur Geschwindigkeitsregulierung von Turbinen, Dampfmaschinen und Gasmotoren. Die Anforderungen an die Gleichförmigkeit der Drehbewegung sind fortwährend gestiegen, besonders bei Kraftmaschinen, die zum Antrieb von Dynamomaschinen dienen. Auch für den Antrieb von Spinnmaschinen wird z. B. ein geringer Ungleichförmigkeitsgrad der Drehbewegung verlangt, während für zahlreiche andere Zwecke eine weniger gleichförmige Umdrehungsgeschwindigkeit genügt.

Literatur. Die Grundlagen für die Behandlung der Regler auf analytischem oder graphischem Wege hat Grashof in seiner „Theoretischen Maschinenlehre“ gegeben. Die statischen Eigenschaften der Pendelregler fanden, soweit diese für die Praxis von Wert sind, bald ihre eingehende Erledigung, während die dynamischen Fragen, besonders unter Berücksichtigung gewöhnlicher Reibungswiderstände, nicht als abgeschlossen zu betrachten sind.

Was die Behandlung der statischen Eigenschaften anlangt, so entstand dieselbe zunächst in analytischem Gewande. Es ist das Verdienst von Prof. Herrmann, Aachen, zuerst auf die Vorteile hingewiesen zu haben, die bei der graphischen Behandlung sich ergeben, besonders wenn man die Gelenkreibung des Reglers berücksichtigt, auf deren Bedeutung Prof. Herrmann aufmerksam machte. Jedoch erst durch die Untersuchungen von S. M. Tolle, der das Reglerdiagramm zuerst in die Literatur einführte¹⁾, ist die graphische Methode zur allgemeinen Anerkennung und Verwendung gelangt. Zur Untersuchung von Federreglern, welche die mannigfaltigste Ausgestaltung erfahren haben, ist dieses Diagramm fast unentbehrlich. In den Jahrgängen 1895—96 der „Zeitschr. d. V. D. Ing.“ sind die graphischen Methoden Tolles veröffentlicht. Auch im Ingenieur-Taschenbuch „Hütte“ ist nach Tolle die Untersuchung und Berechnung der Pendelregler auf Grund von Diagrammen aufgenommen worden, so-

¹⁾ Das Reglerdiagramm ist schon lange vor Tolle verwendet worden, z. B. von Prof. Rittershaus, Dresden, u. a.

daß der Gebrauch des Tolleschen Reglerdiagramms wohl als bekannt vorausgesetzt werden darf. Weniger sachgemäß ist die Behandlung der dynamischen Fragen am Schlusse von Tolles Abhandlung. Er verzichtet auf eine genauere analytische Behandlung, d. h. auf die Verwendung der erforderlichen Differentialgleichung, und zeichnet in seinem Diagramm die Schwingungskurve als Ellipse, eine Annahme, die ihn zum Teil zu irrigen Schlußfolgerungen führt, während sonst die kleine Überschlagsrechnung, für die ein Anspruch auf Genauigkeit ausdrücklich nicht erhoben wird, den Einfluß der wichtigsten Größen, wie Trägheitsmoment des Schwungrades, Masse der Schwinggewichte, Pendelausschlag u. s. w., klar erkennen läßt. Die Bemerkung Tolles, daß die analytische Behandlung der Schwingungsfrage mit Hilfe der grundlegenden Differentialgleichungen in endlicher Form vielleicht gar nicht möglich sei, läßt vermuten, daß er von den Arbeiten des bereits erwähnten Dr. Routh keine Kenntnis besaß, der in seinem hervorragenden Werke: „A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies“, deutsch erst seit 1898 von A. Schepp, wohl als erster in den §§ 103—107 eine Schwingungstheorie des Wattschen Regulators gibt, die eine der zahlreichen Anwendungen seiner „Theorie der kleinen Schwingungen“ darstellt. Diese Theorie besitzt ein hohes praktisches Interesse, indem durch sie die Behandlung vieler mechanischer Probleme auf lineare Differentialgleichungen zurückgeführt wird, deren Integration bekanntlich in endlicher Form möglich ist.

Auf den von Dr. Routh geschaffenen Grundlagen für die analytische Behandlung der Regulierungsfrage fußen eine Reihe von weiteren Abhandlungen dieser Frage. Als Theoretiker hat Dr. Routh Voraussetzungen gemacht, die der Wirklichkeit nicht entsprechen. Er läßt den wichtigen Einfluß der gewöhnlichen Reibung unberücksichtigt und befaßt sich nur mit der Flüssigkeitsreibung als Dämpfungsmittel. Auch die Arbeiten von Prof. J. Wischnegradski, St. Petersburg, über „Direkt wirkende Regulatoren“, veröffentlicht im „Civil-Ingenieur“ 1877, und von Prof. Stodola, Zürich, über: „Das Siemenssche Regulierprinzip und die amerikanischen Inertie-Regulatoren (Beharrungsregler)“, erschienen 1899 in der „Zeitschr. d. V. D. Ing.“, berücksichtigen fast nur die Flüssigkeitsreibung als Widerstand gegen die Bewegung des Reglers. Die Abhandlung des Ingenieurs I. Isaachsen, erschienen 1899 im Verlag von Jul. Springer, Berlin, unter dem Titel: „Bedingungen für eine gute Regulierung“, außerdem

teilweise veröffentlicht in der „Zeitschr. d. V. D. Ing.“, bildet die wertvolle Ergänzung eines in der Praxis stehenden Ingenieurs zu der abstrakten Behandlung des Stoffes durch Dr. Routh, wie sie im Rahmen seines oben erwähnten Werkes nur erscheinen konnte. Isaachsen berücksichtigt außer anderen Gesichtspunkten, die für die Praxis Bedeutung haben, besonders die wichtigen Einflüsse der gewöhnlichen Reibung, des Ungleichförmigkeitsgrades des Schwungrades bei Dampfmaschinen, des Rückdruckes bei Ventilsteuerungen und des periodischen Festhaltens der Reglerhülse bei der Ridersteuerung oder durch ein eigens zu diesem Zwecke konstruiertes Hemmwerk. Er bedient sich dazu in weitgehender Weise des in der Schwingungslehre gebräuchlichen Kräftediagramms, und zwar eines „absoluten“ und eines „relativen“ Diagramms, während vom Tolleschen Reglerdiagramm kein Gebrauch gemacht wird. Auf die Abhandlung des Ingenieurs Isaachsen werden wir wiederholt Bezug nehmen. Die neueste Literatur über Fragen der Regulierung ist sehr zerstreut. Eine Anzahl Aufsätze, welche in dieser Arbeit berührt werden, sind in der „Zeitschr. d. V. D. Ing.“ und in der „E.T.Z.“ veröffentlicht und werden an der betreffenden Stelle angeführt werden.

Hauptaufgaben vorliegender Arbeit.

Soviel schon über Regulierungsfragen geschrieben worden ist, so wenig haben sich davon weitere Kreise zunutze gemacht. Dies hat seinen Grund außer in einer gewissen Schwierigkeit des Stoffes, die allen mechanischen Fragen mehr oder weniger anhaftet, besonders darin, daß die vielfach rein analytische Behandlung wenig übersichtlich ist und ein Einarbeiten in die Behandlungsweise erfordert, welches außer der nötigen Zeit auch ein gutes, mathematisches Verständnis voraussetzt. Es soll daher ein Versuch gemacht werden, die dynamischen Eigenschaften des Pendelreglers im Tolleschen Diagramm nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ an Beispielen zur Darstellung zu bringen, soweit das in einfacher Weise möglich ist. Quantitative Beziehungen für die dynamischen Eigenschaften der Regler sind bis jetzt nur wenige, z. B. von Tolle in seiner schon erwähnten Abhandlung angegeben worden. Die für unsere Zwecke erforderliche Differentialgleichung, die bereits Dr. Routh verwendet hat, soll in elementarer Weise abgeleitet werden.

So einleuchtend das Zustandekommen der günstigen, schwingungsdämpfenden Wirkung eines Flüssigkeitswiderstandes ist, so auffallend muß die Tatsache sein, daß man in der Praxis nicht nur vielfach ohne Ölbremse auskommt, sondern gerade ohne diese die besten Regulierungen erzielt hat. Deshalb soll der bisher allgemein unterschätzte und wenig berücksichtigte Einfluß der gewöhnlichen Reibung auf den Verlauf der Schwingungen eine eingehendere Behandlung erfahren, als es bis jetzt geschehen ist. Die gewöhnliche z. B. konstante Reibung hat freilich die für die Rechnung unangenehme Eigenschaft, daß sich bei jeder Bewegungsumkehr ihr Vorzeichen ändert, daß also die Gültigkeit einer Bewegungsgleichung nur bis zur ersten Bewegungsumkehr reicht. Dadurch entstehen besondere analytische Schwierigkeiten.

Ferner wollen wir uns fragen, was unter dem viel mißbrauchten Begriff „Regulierfähigkeit“ und unter den Begriffen „mindestens erforderlicher Unempfindlichkeitsgrad“ und „kleinster, zulässiger Ungleichförmigkeitsgrad“, wie sie von Tolle gebraucht worden sind, zu verstehen ist.

Im Gegensatz zu den bisher gebräuchlichen Untersuchungsmethoden hat Isaachsen in seiner Behandlung der Regulierungsfrage die Aufgabe in zwei Teile zerlegt. Diese sehr zweckmäßige Einteilung soll auch hier beibehalten werden, jedoch in umgekehrter Reihenfolge. Wir behandeln im ersten Teil der Arbeit:

I. Das Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen. — Der zweite Teil enthält:

II. Das Verhalten der Regulierung bei kleinen Belastungsänderungen und bei konstanter Belastung.

Der zweite Teil schließt die Betrachtungen über die vom Regler erreichbare Endstellung in sich, d. h. wie weit der Regler die einer neuen Belastung entsprechende Gleichgewichtslage tatsächlich erreichen oder sich ihr nähern kann, während es uns im ersten Teil nur darauf ankommt, zu erfahren, ob die bei einer großen, plötzlichen Belastungsänderung auftretenden Schwingungen zunächst abnehmen oder nicht, ohne uns darum zu kümmern, ob der Regler seine neue Beharrungsstellung auch wirklich einnimmt. Es genügt uns vor der Hand, zu wissen, daß unsere Regulierung stabil ist, d. h. dass bei eingetretener, großer Belastungsänderung die Schwingungen nicht zunehmen können, sondern daß der Regler zunächst seiner neuen Beharrungsstellung zustreben muß, also zunächst seinen Zweck erfüllt. Wie weit dieser Zweck erreicht wird, soll im zweiten Teil gezeigt werden. Der zweite Teil ist der schwierigere und Hauptgegenstand der Abhandlung von Isaachsen; er spielt für feine Regulierungen die Hauptrolle, während bei weniger hohen Ansprüchen an die Regulierung der zweite Teil entbehrlich wird.

Die Anforderungen, daß der Regler sowohl bei großen, als auch bei sehr kleinen Belastungsänderungen gut arbeiten soll, stehen sich zum Teil gegenüber. Auch aus diesem Grunde erscheint die Zerlegung der Aufgabe in zwei Teile zweckmäßig. Im Gegensatz zu der Abhandlung von Isaachsen soll dem ersten Teil, dem Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen, erhöhte Aufmerksamkeit zugewendet werden, da derselbe besonders geeignet ist, ein leichtes Verständnis für die wichtige Regulierungsfrage zu ermög-

lichen. Aus diesem Grunde soll das Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen zunächst und für sich betrachtet werden.

Indem wir jetzt an das bekannte Tollesche Reglerdiagramm anknüpfen, werden sich bei jedem Leser, der damit vertraut ist, wieder die Gedanken, welche er über Fragen der Regulierung gehabt hat, von selbst einstellen, und die Einzeichnung der Kraftkurve für die Schwingungsbewegung, sowie die Betrachtungen über dieselben werden gleichsam als etwas Selbstverständliches hinzukommen.

Die ersten Paragraphen sollen den Anschluß bez. Einführung in die Isaachsensche Anschauungsweise bilden.

I. Teil.

Das Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen.

§ 1. Das Tollesche Reglerdiagramm als Schwingungsdiagramm.

Im Laufe der folgenden Betrachtungen wird das in der Schwingungslehre für die Darstellung von Schwingungen gebräuchliche Kräfte-diagramm ausgedehnte Verwendung finden. Denken wir uns eine Masse m geradlinig um eine Gleichgewichtslage schwingen, und tragen wir die von der Masse zurückgelegten Wege x als Abscissen von einem Koordinatenanfang aus ab, während wir als Ordinaten die Kräfte P auftragen, unter deren Einfluß die Schwingung vor sich geht, so entsteht das Schwingungsdiagramm, aus dem alle vorkommenden Kräfte, Geschwindigkeiten, Wege und Zeiten entnommen werden können.

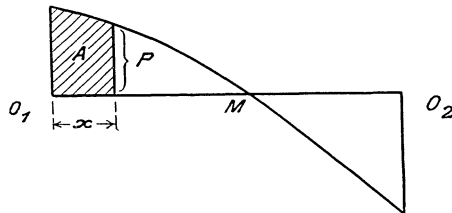


Fig. 1.

Bezeichnen wir die Endlagen der Schwingung mit O_1 und O_2 , die Mittellage mit M und die Zeit, die seit Verlassen der Endlage O_1 verstrichen ist, mit t , so ist die augenblickliche Geschwindigkeit v im Abstände x leicht zu ermitteln. Es bestehen die bekannten Beziehungen:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \int_0^x P \cdot dx = \text{Fläche } A \quad t = \int_0^x \frac{1}{v} dx.$$

Die Kraftkurve für die Pendelschwingungen des Reglers können wir im Tolleschen Diagramm einzeichnen, wenn wir alle schwingenden Massen auf den Schwerpunkt eines Schwunggewichts reduzieren. Das Wesen des Tolleschen Diagramms sei hier kurz angegeben.

Es handelt sich bei dem schwingenden Regler um die Betrachtung eines Systems starrer Körper, die miteinander in zwangsläufiger Verbindung stehen und um eine feste Achse mit wechselnder Geschwindigkeit rotieren. Das System besitzt einen Freiheitsgrad zweiter Ordnung. Zur vollständigen Beschreibung der entstehenden Bewegungserscheinungen gehören vor allen Dingen die Begriffe der Winkel-, Centripetal- und Coriolisbeschleunigung bzw. die entsprechenden Kräfte. Für die statischen Eigenschaften des Pendelreglers kommt jedoch nur die Fliehkraft in Betracht. Durch die Art der derselben entgegenwirkenden Feder- bzw. Schwerkkräfte sind die statischen Eigenschaften des Fliehkraftpendelreglers bestimmt. Von den Kräften, die durch Feder- oder Gewichtsbelastung entstehen, kommen nur die Komponenten in Betracht, die in Richtung der Fliehkraft dieser entgegenwirken, Arbeit aufnehmen oder leisten. Deshalb sind aber die Coriolis- und Winkelbeschleunigung der Drehbewegung um die Reglerspindel nicht ohne alle Wirkung auf die Regulierung. Die ihnen entsprechenden Trägheitskräfte der bewegten Massen haben das Bestreben, die in der Pendelebene zwangsläufig geführten Schwunggewichte aus derselben seitlich herauszuziehen¹⁾. Es entstehen also Biegungsspannungen in den Stangen der Schwunggewichte, zusätzliche Drücke und Reibungen in den Gelenken. Auf den Trägheitskräften, die durch beschleunigte bzw. verzögerte Drehbewegung der Reglerspindel entstehen, beruhen ebenfalls Geschwindigkeitsregler, die als Beharrungsregler bekannt sind. Siemens ist Erfinder dieser Art von Regler. (Stodola, Zeitschr. d. V. d. J. 1899 S. 506.)

Haben wir es aber mit einem gewöhnlichen Kegelpendelregler zu tun, so denken wir uns nur die Fliehkraft im Schwerpunkte der Schwunggewichte angreifen, auf welchen auch die Widerstandskräfte durch Feder- und Gewichtsbelastung zu reduzieren sind. Tragen wir diese reduzierten Widerstände senkrecht unter dem Schwer-

¹⁾ Bei Flachreglern kann natürlich ein seitliches Herausziehen der Schwungmassen aus der Schwingungsebene nicht stattfinden; es werden nur die Gelenkdrücke und Gelenkreibungen vergrößert.

14 Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen.

punkte eines Schwungkörpers auf, so entsteht die sogenannte Charakteristik oder W-Kurve, welche die statischen Eigenschaften eines Pendelreglers mit Hilfe der Fliehkraftstrahlen leicht erkennen läßt. Ist m die Masse der beiden Schwunggewichte, ω und n die Winkelgeschwindigkeit bzw. Umdrehungszahl der Reglerspindel, so

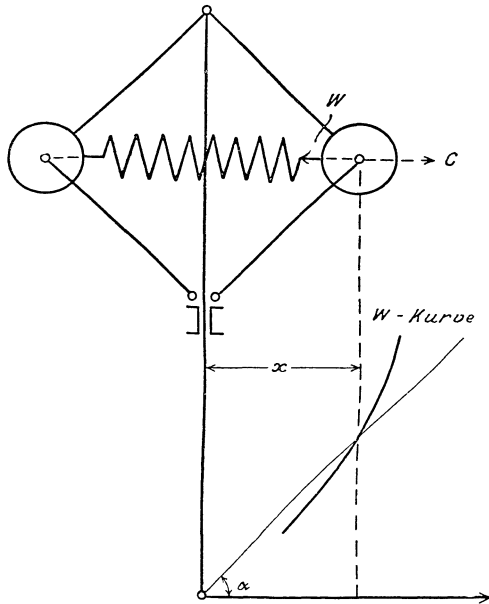


Fig. 2.

ist im Abstände x des Schwerpunktes der Schwunggewichte von der Reglerspindel die Größe der entwickelten Fliehkraft:

$$C = m \cdot x \cdot \omega^2 = \left(\frac{n}{30}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{g} \cdot G \cdot x$$

Unter g ist die Beschleunigung der Schwerkraft zu verstehen. Ist die Winkelgeschwindigkeit konstant, so wächst die Fliehkraft geradlinig mit der Entfernung x von der Reglerspindel, und jeder Umdrehungszahl entspricht ein bestimmter Fliehkraftstrahl, der gegeben ist durch $\operatorname{tg} \alpha = m \cdot \omega^2$ (Fig. 2). Höher liegenden Fliehkraftstrahlen oder größeren Winkeln α entsprechen höhere Umdrehungszahlen der Reglerspindel und umgekehrt. Die Gleichgewichtsstellung des Reglers

für eine bestimmte Umdrehungszahl findet man als Schnittpunkt des entsprechenden Fliehkraftstrahles mit der W-Kurve. Umgekehrt kann man auch für jede Stellung x des Reglers durch Herunterloten des Schwungkörperschwerpunktes den entsprechenden Fliehkraftstrahl, mithin die Umdrehungszahl n finden, die der Stellung x als Gleichgewichtslage entspricht. (Fig. 2.) Der Regler ist in einem Bereiche offenbar dann stabil, wenn in demselben größeren Pendelausschlägen größere Umdrehungszahlen, also höher liegende Fliehkraftstrahlen

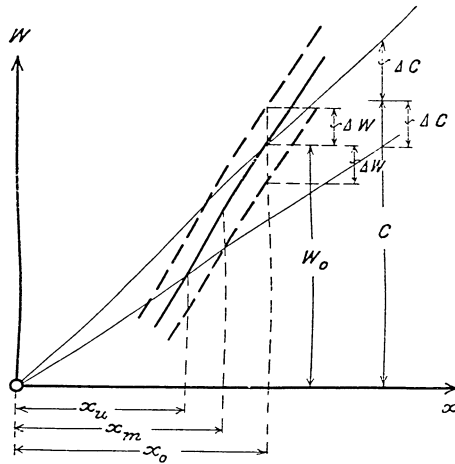


Fig. 3.

entsprechen. Die von den Ordinaten der W-Kurve bestrichene Fläche ist die gegen die Widerstandskräfte beim Aufwärtsgang von der Fliehkraft geleistete Arbeit. Zu den aktiven Widerständen eines Reglers, die durch Feder- oder Gewichtsbelastung hervorgebracht werden, treten noch passive Kräfte, Reibungswiderstände hinzu, welche das Aussehen der W-Kurve des reibungslosen Reglers mehr oder weniger abändern. Es entstehen zwei W-Kurven, eine für den Aufwärtsgang und eine andere, tiefer liegende für den Abwärtsgang des Reglers. In Fig. 3 sind diese W-Kurven gestrichelt eingezeichnet. Den durch Eigenreibung und Stellzeugwiderstand hervorgebrachten Unempfindlichkeitsgrad ϵ können wir im Diagramm (Fig. 3) mit genügender Genauigkeit abgreifen. Da die mittlere Umdrehungszahl n des Reglers groß ist gegen die dem Unempfindlichkeitsgrad ϵ ent-

sprechende Änderung der Umdrehungszahl Δn , so können wir schreiben statt:

$$\varepsilon = \frac{2 \Delta n}{n} = \frac{2 \Delta \omega}{\omega}$$

wodurch der Unempfindlichkeitsgrad ε definiert ist:

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{W} \text{ oder } \varepsilon = \frac{\Delta C}{C}.$$

W und C sind gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte. Es ist:

$$C = m \cdot x \cdot \omega^2$$

$$\Delta C = 2 \cdot x \cdot m \cdot \omega \cdot \Delta \omega = m \cdot x \cdot \omega^2 \cdot \frac{2 \Delta \omega}{\omega}$$

oder:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{2 \Delta \omega}{\omega} = \varepsilon.$$

Damit ist die Ableitung der einfachen Beziehung gegeben. Auch den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 eines Reglers können wir im Diagramm abgreifen. Derselbe ist:

$$\delta_0 = \frac{\Delta C}{C_m}$$

wobei ΔC und C_m die aus Fig. 3 ersichtliche Bedeutung haben. Die Gültigkeit dieser Beziehung für kleine Ungleichförmigkeitsgrade ist ebenfalls leicht zu erkennen.

Die vorstehenden Beziehungen gelten für den ganzen Verlauf der W -Kurve nur dann, wenn die Schwungkörper Umdrehungskörper sind, deren Drehachsen senkrecht zur Pendelebene stehen.

Ehe wir zur Rechnung übergehen, soll noch auf den durchaus verschiedenen Einfluß der Reibung bei Schwingungen gegen einen festen Raum im Gegensatz zu den Schwingungen gegen einen bewegten Raum hingewiesen werden. Bei der Betrachtung der selbstregulierenden Eigenschaften der Kraftmaschinen sind die folgenden Überlegungen, welche bereits von Isaachsen in ausführlicherer Weise, als es hier geschehen soll, angestellt worden sind, mit Vorteil zu verwenden.

§ 2. Dämpfung und Erhaltung von Schwingungen.

Die bekanntesten Schwingungen sind die unter dem Einfluß elastischer Kräfte. Das Kräfterdiagramm besteht in diesem Falle aus einer geraden Linie. Denken wir uns die Bewegung reibungslos, so bleiben die Schwingungen erhalten. Der Körper behält seine Energie, die ihm irgendwie mitgeteilt worden ist. Diese besitzt die Größe $\frac{1}{2} m \cdot v_0^2$, wenn v_0 die größte Geschwindigkeit der schwingenden Masse m ist. Treten aber irgendwelche Reibungswiderstände zu den elastischen Kräften hinzu, so müssen die Schwingungen allmählich kleiner werden und schließlich ganz aufhören, wenn die Ebene A (Fig. 4) gegen die Ebene B fest, d. h. wenn die Schwingung des

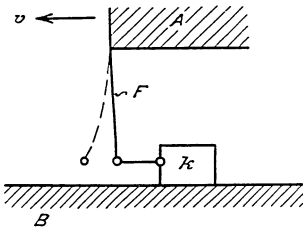


Fig. 4.

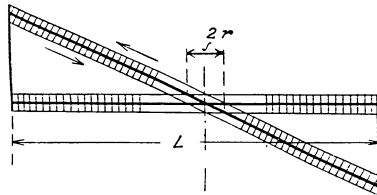


Fig. 5.

Körpers k gegen die Ebene B eine absolute, nicht nur eine relative ist. Es wird dem Körper k fortwährend Energie entzogen, die sich in Reibungswärme umsetzt. Tritt z. B. ein kleiner, konstanter Reibungswiderstand W hinzu, so ist die dem Körper k während einer vollen Schwingung entzogene Energie $2 \cdot W \cdot L$ (natürlich etwas kleiner, weil die Schwingungsweite L ein wenig abgenommen hat). In Fig. 5 ist dieser Energieverlust durch die schraffierte, schmale Fläche dargestellt, welche von der Kraftkurve eingeschlossen wird. Innerhalb der mit $2r$ bezeichneten Strecke muß der Körper k schließlich zur Ruhe kommen. Wollen wir die Schwingungen aufrecht erhalten, so muß die dem Körper durch Reibung entzogene Energie von außen wieder zugeführt werden. Beim Uhrpendel geschieht diese Zufuhr z. B. durch das bekannte Steigrad mit auf der Welle aufgewundenem Gewicht.

Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn die Wand A, an welcher die Feder F befestigt ist, selbst eine Bewegung ausführt.

Die Wand A möge sich z. B. in Richtung der Buchebene mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegen (Fig. 4). Ist v größer, als die größte Schwingungsgeschwindigkeit v_0 , so wird sich der Körper k niemals absolut rückwärts bewegen. Die konstante Reibung wirkt jetzt immer in derselben Richtung, sie behält ihr Vorzeichen bei. Sie erscheint im Diagramm als konstante, äußere Kraft, deren Richtung entgegengesetzt der Bewegung der Wand A ist. Wir erhalten als Kraftkurve eine einzige gerade Linie. Die Kraftkurve schließt keine negative Fläche mehr ein, und die Schwingungen bleiben trotz der Reibung erhalten. Nur der Schwingungsmittelpunkt wird, entsprechend der Größe der Reibungskraft, in Richtung derselben etwas verlegt. Die in der Zeiteinheit gegen die Reibung geleistete Arbeit $v \cdot W$ ist jetzt nicht von der Energie $\frac{1}{2} m \cdot v_0^2$ des schwingenden Körpers k bestritten worden, sondern sie ist von einer Kraft $R = -W$ geleistet worden, welche die Wand A in gleichmäßiger Fortbewegung erhält und an dieser angreifend zu denken ist.

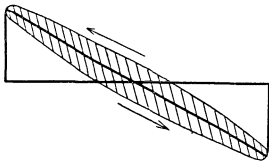


Fig. 6.

Sobald der Reibungswiderstand W nicht mehr konstant ist, decken sich auch die Kraftkurven für den Hin- und Rückgang nicht mehr. Nimmt z. B. der Reibungswiderstand mit der Geschwindigkeit zu, so nimmt für den Hingang die Reibung zu, für den Hergang ab, da die absolute Geschwindigkeit des schwingenden Körpers k , auf die es ankommt, für den Hingang größer ist, wie für den Hergang. Wir bekommen eine negative Diagrammfläche; die Schwingungen nehmen ab (Fig. 6). Nimmt jedoch die Reibung mit wachsender Geschwindigkeit ab, so wird die schraffierte Fläche (Fig. 6) in umgekehrter Richtung, wie die Pfeile andeuten, umfahren. Die von der Kraftkurve eingeschlossene Fläche wird positiv und die Schwingungen nehmen zu. Es tritt der anscheinend widersinnige Fall ein, daß die Schwingungen eines Körpers durch Reibungswiderstände nicht nur nicht gedämpft, sondern sogar erhalten und verstärkt werden, bis sie durch andere Einflüsse ihre Begrenzung finden (nach Isaachsen).

Man sieht, daß die Energiezufuhr zur Erhaltung der Schwingungen eines Körpers in ziemlich versteckter Weise geschehen kann und nicht immer so augenfällig vor sich zu gehen braucht, wie es bei den Schwingungen eines Uhrpendels der Fall ist. Wir wollen

jetzt zunächst noch ohne Rechnung einzusehen versuchen, wie die Erhaltung bzw. Dämpfung der Schwingungen beim Pendelregler zustande kommt.

§ 3. Die Schwingungen des Pendelreglers.

Der Regler soll mit konstanter Geschwindigkeit sich drehen und zunächst ohne Reibung gedacht werden. Wird das Pendel durch einen Anstoß in Schwingungen versetzt, die in der Pendelebene vor sich gehen, also relativ sind, so ist über diese relativen Schwingungen genau dasselbe zu sagen, wie über die gewöhnlichen Federschwingungen gegen einen festen Raum. Betrachten wir den Fliehkraftstrahl, welcher der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω entspricht, als Abscissenachse, so ist die W-Kurve des Reglers die Kraftkurve der Schwingung. Wir haben gegen Fig. 1 nur den Unterschied, daß im Tolleschen Diagramm die Koordinaten schiefwinklig sind. Bewegt sich der Schwungkörper nach außen, so wird die Arbeit A (Fig. 7), welche die Fliehkraft gegen die reduzierten Widerstandskräfte leistet, der Antriebswelle der Reglerspindel entnommen. Ein weiterer, gleich großer Energiebetrag A wird der Antriebswelle entnommen, um die Zunahme der kinetischen Energie des rotierenden Systems infolge der Vergrößerung des Trägheitsmomentes beim Aufwärtsgang zu bewirken. Beim Abwärtsgang des Reglers wird die Arbeitsmenge 2 A der Antriebswelle zurückgegeben. Bei jeder unendlich kleinen Bewegung der Schwungkörper haben wir:

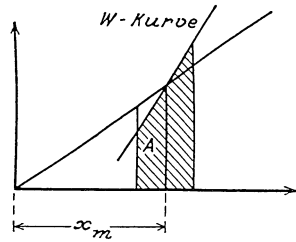


Fig. 7.

Änderung der potentialen Energie: $d E_p = C \cdot dx = m \cdot x \cdot \omega^2 \cdot dx$

Änderung der kinetischen Energie: $d E_k^x = d (\frac{1}{2} m \cdot x^2 \cdot \omega^2) = m \cdot x \cdot \omega^2 \cdot dx$.

Wäre die Drehbewegung nicht gleichförmig, dann würde noch eine weitere Änderung der kinetischen Energie eintreten, nämlich:

$$d E_k^{\omega} = d (\frac{1}{2} m \cdot x^2 \cdot \omega^2) = m \cdot x^2 \cdot \omega \cdot d\omega$$

solange aber die Winkelgeschwindigkeit ω konstant bleibt, haben wir nur:

$$d E_p + d E_k^x = 2 \cdot m \cdot x \cdot \omega^2 \cdot dx.$$

Dieser Arbeitsleistung muß für jede Lage x des Pendels ein bestimmtes Moment durch die Antriebswelle entsprechen. Für die Gleichgewichtslage x_m des Reglers (Fig. 7) haben wir z. B., wenn v_m die größte Schwingungsgeschwindigkeit ist:

$$M \cdot \omega \, dt = 2 \cdot m \cdot x_m \cdot \omega^2 \cdot dx \quad \text{oder da:} \quad \frac{dx}{dt} = v_m$$

$$M = 2 \cdot m \cdot x_m \cdot \omega \cdot v_m$$

entsprechend der zusammengesetzten Coriolisbeschleunigung:

$$p_c = 2 \cdot v_m \cdot \omega.$$

Bei dieser Betrachtung ist von allen anderen bewegten Massen außer denen der Schwungkörper abgesehen worden.

Während also der Regler auf- und abwärts schwingt, schwingt durch die Antriebswelle die Energie $2A$ in Form von potentieller und kinetischer Energie in das rotierende System hinein und heraus. Die Reglerspindel wird dabei auf Drehung abwechselnd nach beiden Seiten beansprucht. Solange aber die Winkelgeschwindigkeit konstant bleibt, besteht ein Gleichgewichtszustand. Es kann keine dauernde Energieanhäufung oder Energieentnahme im rotierenden System des Reglers stattfinden. Die Schwingungen bleiben bei Reibungslosigkeit in ihrer Größe bestehen. Setzen sich aber der Pendelbewegung Reibungswiderstände irgendwelcher Art entgegen, dann muß stets eine Dämpfung der Schwingungen eintreten, die das Pendel schließlich zur Ruhe bringt, genau so wie in Fig. 5.

Anders liegen die Verhältnisse, sobald die Winkelgeschwindigkeit ω der Reglerspindel periodisch um einen mittleren Wert schwankt. Die den verschiedenen Stellungen des Pendels entsprechenden Fliehkräfte liegen jetzt nicht mehr auf einem Fliehkraftstrahle, wie es im vorigen Falle (Fig. 7) sein mußte. Unverändert bleibt nur die W-Kurve, welche wir deshalb von jetzt ab als die Abscissenachse des Diagramms betrachten wollen. Das in Frage kommende Stück der W-Kurve nehmen wir hinfür als Gerade an. Wächst die Winkelgeschwindigkeit und mithin die Fliehkraft, solange sich das Pendel links von der Gleichgewichtslage nach der Drehachse zu bewegt, und nimmt sie ab, sobald das Pendel auf der rechten Seite der Gleichgewichtslage sich befindet, so schließt die Kraftkurve eine Fläche, und zwar eine positive, ein, welche die Energie darstellt, die der Antriebswelle bei einer vollen Schwingung entnommen wird,

im rotierenden System verbleibt und sich dort anhäuft. Die Schwingungen werden andauernd verstärkt. Wird die Kraftkurve umgekehrt durchlaufen, wie in Fig. 8 angedeutet ist, so wird die Fläche negativ und die Schwingungen müssen allmählich aufhören. Im ersteren Falle muß sich aber selbst eine sehr kleine Schwingung, die durch eine Erschütterung zufällig entstanden sein kann, bald stark vergrößern, wenn der Regler reibungslos ist. Die Schwingung ist labil. Der in Fig. 8 gezeichnete Fall liegt nun bei dem mit der Steuerung in Verbindung stehenden Regler vor; denn solange er seine Gleichgewichtslage, entsprechend dem Beharrungszustand der Maschine, nicht erreicht hat, soll er eben durch Fliehkraftänderungen, die durch Winkelgeschwindigkeitsänderungen entstehen, nach seiner Beharrungsstellung hingetrieben werden und daselbst stehen

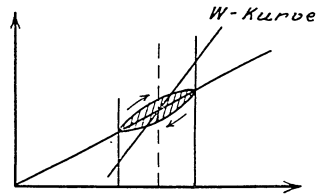


Fig. 8.

bleiben. Stehenbleiben kann das Pendel aber nur, wenn es mit der Geschwindigkeit null in seiner Beharrungsstellung ankommt. Es fragt sich, ob wir es praktisch erreichen können, daß bei einer plötzlich eintretenden großen Belastungsänderung der Regler die neue Beharrungsstellung mit der Geschwindigkeit null einnimmt, ohne erst hin- und herzuschwingen, zu überregulieren, wie man in der Praxis zu sagen pflegt. Die Schwingungslehre nennt diese Art von Dämpfung aperiodisch. Theoretisch ist natürlich eine aperiodische Dämpfung möglich, wenn wir nur den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers und den Flüssigkeitswiderstand groß genug machen. Die Frage, ob eine aperiodische Dämpfung auch durch gewöhnliche Reibung möglich sei, ist bisher kaum berührt worden.

Da bei vielen Regulierungen das Überregulieren in größerem oder geringerem Maße auftrat, so hat sich vielfach die Ansicht herausgebildet, daß ein Überregulieren praktisch unter allen Umständen auftreten müsse und daß es Aufgabe der Untersuchung sei, wie die Abnahme der auftretenden Schwingungen am schnellsten bewirkt werden könne. Diese Vorstellung liegt vielen Abhandlungen zu Grunde und wird zum Teil klar ausgesprochen. Tolle schreibt in seiner mehrfach erwähnten Abhandlung:

„... Demnach müssen unter allen Umständen die Schwingmassen mehrere Male hin- und herpendeln und gleichzeitig die

Winkelgeschwindigkeit anwachsen und wieder abnehmen, ehe die Kugeln in ihrer neuen Gleichgewichtslage zur Ruhe kommen können.“ Dabei hat Tolle die gewöhnliche Reibung als schwingungsdämpfendes Mittel angenommen. In ähnlicher Weise spricht sich auch Dr. Routh in seiner Mechanik starrer Körper aus. A. Föppl, welcher in der E.T.Z. 1902 einen Aufsatz veröffentlicht hat, meint, daß für die Stabilität der Schwingungen der konstante Teil der Reibungen erst in zweiter Linie in Betracht kommt. Nur Isaachsen zeigt an einem Beispiele, daß unter Umständen bei einer großen, plötzlichen Belastungsänderung der Regler seine neue Gleichgewichtslage in asymptotischer Annäherung von nur einer Seite her erreichen kann, bis auf eine gewisse Grenze, die einer besonderen Betrachtung unterworfen werden muß. Isaachsen geht jedoch auf eine nähere rechnerische Behandlung der gewöhnlichen Reibung als Dämpfungsmittel nicht näher ein, da er der Ansicht ist, daß die Annahme konstanter Reibung der Wirklichkeit zu wenig entspräche. Auf den Punkt, inwieweit die Annahme konstanter Reibung gegen die Pendelbewegung des Reglers in Wirklichkeit zutrifft, wird daher später besonders eingegangen werden.

Das Überregulieren des Reglers bei großen Belastungsänderungen braucht aber durchaus nicht einzutreten, wenn die Verhältnisse entsprechend gewählt sind, und zwar wird die Dämpfung der Schwingungen in erster Linie durch die gewöhnlichen Reibungswiderstände in Verbindung mit der erforderlichen Stabilität des Reglers und sonstigen zu erfüllenden Bedingungen bewirkt. In der Nähe der Beharrungsstellungen müssen aber auch bei guten Reglern ganz kleine, kaum sichtbare Schwingungen bestehen bleiben, die um so kleiner sind, je besser d. h. empfindlicher die Regulierung ist. Unter dem sogenannten Überregulieren wollen wir jedoch die kleinen Schwingungen bei konstanter Belastung nicht verstehen, sondern nur die großen Schwingungen, die bei großen Belastungsänderungen auftreten.

§ 4. Die bei der Rechnung gemachten Voraussetzungen.

Gewöhnlich wird das Beispiel des Pendelreglers in den Lehrbüchern der Mechanik benützt, um eine Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen bei Ableitung der Differentialgleichungen der

Bewegung zu geben. Die erhaltenen Differentialgleichungen werden darauf durch Voraussetzung 1. sehr vereinfacht und schließlich wird mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen, welcher unsere Voraussetzungen 2.—6. entsprechen, die bekannte Differentialgleichung für die Reglerschwingungen erhalten. Wir wollen den umgekehrten Weg einschlagen und die zu machenden Voraussetzungen so aussprechen, daß wir ihre Bedeutung im Tolleschen Diagramm erkennen. Unter Bezugnahme auf Fig. 9 sollen folgende Voraussetzungen für die Rechnung gemacht werden, deren Berechtigung, d. h. deren genügende Übereinstimmung mit der Wirklichkeit zum Teil sogleich, zum Teil an anderen Stellen besprochen werden soll.

1. Die im Regler enthaltene Energie sei verschwindend klein gegen die im Schwungrade der Kraftmaschine enthaltene Energie.

2. Der Muffenhub des Reglers, der Wert s (Fig. 9) sei so klein, daß wir für alle Stellungen des Reglers einen mittleren Wert der Fliehkraft $C_m = \frac{A}{s}$ annehmen können.

Diese beiden Bedingungen sind bei den in der Praxis vorkommenden Verhältnissen mit hinreichender Genauigkeit erfüllt, besonders wenn Federregler verwendet werden, die bei guten Regulierungen allein in Frage kommen.

3. Das benützte Stück der W-Kurve des Reglers werde als gerade Linie angesehen.

Diese Voraussetzung trifft bei manchen Reglern direkt zu, bei anderen ist es nicht ganz der Fall. Je kleiner aber der Muffenhub genommen wird, und bei einer guten Regulierung darf er verhältnismäßig nur klein sein, desto genauer wird die Voraussetzung erfüllt.

4. Die Fliehkraftstrahlen für die tiefste und höchste, sowie alle dazwischen liegenden Stellungen des Reglers werden als parallele Gerade angesehen.

Diese Annahme wird um so genauer erfüllt, je kleiner der gesamte Ungleichförmigkeitsgrad genommen wird, also wieder bei guten Regulierungen. Die Genauigkeit der Annahme ist etwa dieselbe, wie die Genauigkeit, mit welcher die meisten hier in Frage kommenden Begriffe definiert sind, z. B. der Unempfindlichkeitsgrad:

$$\varepsilon = \frac{2 \Delta n}{n} = \frac{\Delta W}{W}.$$

5. Die Regulierungskurve¹⁾ $T_m = \varphi(x)$ sei eine gerade Linie. Wir denken uns die Widerstände und die Kolbendrücke der Maschine auf den Kurbelkreis reduziert. Jeder Belastung bezw. reduziertem

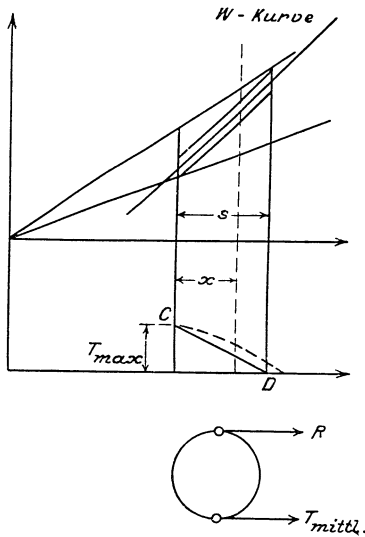


Fig. 9.

Widerstände R der Maschine entspricht eine ganz bestimmte Füllung bezw. mittlere Tangentialkraft T_m am Kurbelkreis, welcher wieder eine bestimmte Stellung x des Reglers entspricht (Fig. 9). Tritt eine Belastungsänderung der Maschine ein, so hat der Regler selbsttätig die richtige Umfangskraft T_m einzustellen. Je nach der Art der Steuerung und den sonstigen kinematischen Verhältnissen wird also T_m eine Funktion von x sein (Fig. 9 gestrichelte Kurve). $T_m = \varphi(x)$. Für die Rechnung ist dann diejenige Tangente zu Grunde zu legen, welche die ungünstigsten Verhältnisse ergibt. Eine

nähere Beleuchtung dieses Punktes folgt später. Für die folgende Betrachtung und Rechnung wird immer die mittlere Gerade CD zu Grunde gelegt werden.

6. Die Steuerung soll momentan und kontinuierlich wirken. Vom Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades bei Dampfmaschinen werde zunächst abgesehen²⁾. Man denke zunächst immer an eine Turbine mit innerhalb jeder Umdrehung gleichförmig umlaufendem Schwungrade, bei welcher der Regler auf den leicht beweglichen Schieber eines praktisch ohne Zeitverlust arbeitenden Kraftein Schalters wirkt. (Ein solcher ist z. B. der von Isaachsen erfundene. D.R.P. 91 416.)

¹⁾ Die Regulierungskurve könnte man besser auch „Triebkraftkurve“ nennen, weil sie die zu den jeweiligen Reglerstellungen zugehörigen mittleren Triebkräfte der Maschine darstellt.

²⁾ Ebenso vom ev. Rückdruck der Steuerungen.

7. Die Belastung der Maschine ist von einer bis zur anderen Belastungsänderung als konstant anzusehen. Die selbstregulierenden Eigenschaften der Kraftmaschinen werden nachträglich besprochen werden.

8. Der Weg des Schwungkörperschwerpunktes soll als Gerade angesehen werden. Beim Hartungschens Federregler, bei welchem bekanntlich die Bewegung der Schwungmassen immer senkrecht zur Reglerspindel erfolgt, erledigt sich diese Voraussetzung von selbst, während bei dem kleinen Muffenhub guter Federregler die gemachte Voraussetzung dem praktischen Wert der folgenden Rechnung wenig Eintrag tun wird.

9. Die gewöhnlichen Reibungswiderstände des Reglers seien im Vergleich zum Arbeitsvermögen desselben so gering, daß der Charakter der W-Kurven für Aufgang und Niedergang nicht wesentlich von der W-Kurve für den reibungslosen Regler abweicht. Diese Voraussetzung ist ebenfalls bei guten Regulierungen mit hinreichender Genauigkeit erfüllt. Isaachsen berichtet von einem Fall, bei dem der Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers 3,5 % betrug, während der gesamte Unempfindlichkeitsgrad nur $\frac{1}{4}$ % groß war. Ähnliche Verhältnisse müssen sehr gute Regulierungen aufweisen, wie wir sehen werden. Daß etwa gar eine W-Kurve für Aufwärts- oder Abwärts-gang infolge veränderlicher Reibungswiderstände labil werden könnte, wie es bei sehr großen Unempfindlichkeitsgraden unter Umständen möglich ist, bleibt bei den verhältnismäßig großen Werten des Ungleichförmigkeitsgrades und den kleinen Werten des Unempfindlichkeitsgrades der guten Regulierungen natürlich ganz ausgeschlossen.

10. Die reduzierte Reibung gegen die Pendelschwingung des Reglers sei konstant.

Diese Bedingung wird zwar niemals erfüllt sein, aber wenn nur überhaupt der Unempfindlichkeitsgrad eines Reglers kleiner ist als der Ungleichförmigkeitsgrad, dann wird auch, wie wir später sehen werden, eine mäßig veränderliche Reibung irgendwelcher Art bei großen Belastungsänderungen nur wenig von der Wirkung konstanter Reibung abweichen können. Bei den kleinen Schwingungen, die auch bei konstanter Belastung der Maschine auftreten, liegen die Verhältnisse freilich anders, wie im 2. Teil dieser Arbeit gezeigt werden soll. Die größere Reibung der Ruhe gegen die geringere Reibung der Bewegung, die stets

vorhanden ist und nicht ohne Einfluß auf die Bewegungsvorgänge sein kann, wollen wir nachträglich berücksichtigen. Den Betrag, um welchen die Reibung der Ruhe größer ist als die Reibung der Bewegung, wollen wir „zusätzliche Reibung der Ruhe“ nennen.

§ 5. Elementare Ableitung der Differentialgleichung der Bewegung.

Die Größe der mittleren Fliehkraft eines Reglers ist:

$$C_m = \frac{A}{s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bedeutet ferner:

ω die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Kraftmaschine,
 J das Trägheitsmoment des Schwungrades,
 $E_s = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$ die mittlere, kinetische Energie desselben,
 L die größte nutzbare Leistung der Kraftmaschine in 1 sec.,
 M das größte nutzbare Moment der Maschine bei Vollbelastung,
 entsprechend $T_{\max}$, der größten, mittleren Umfangskraft,
 so ist die Zeit T , welche die Maschine braucht, um sich bei Leerlauf aber voller Füllung vom Ruhezustand bis zur mittleren Winkelgeschwindigkeit ω zu beschleunigen:

$$T = \frac{J \cdot \omega}{M} = \frac{J \cdot \omega^2}{M \cdot \omega} = \frac{2 \cdot E_s}{L}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wir wollen, wie es bereits in mehreren Abhandlungen geschehen ist, die Zeit T die Anlaufzeit der Maschine nennen. Durch Differentiation erhalten wir:

$$\delta T = \frac{J \cdot \delta \omega}{M} = \frac{J \cdot \omega}{M} \delta = T \cdot \delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Läuft die Maschine nicht bei voller Entlastung, sondern beträgt die durch Widerstände nicht ausgeglichene, zur Beschleunigung des Schwungrades dienende mittlere Tangentialkraft nur einen Teil von $T_{\max}$, etwa: $T_m = \frac{1}{\mu_0} \cdot T_{\max}$, wobei $\frac{1}{\mu_0}$ ein echter Bruch sein muß, so wird die Anlaufzeit μ_0 mal größer:

$$T \cdot \mu_0 = \frac{2 E_s}{L} \cdot \mu_0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bezeichnen wir ferner das Produkt $\mu_0 \Delta T$ mit t , so ist:

$$t = \mu_0 \cdot T \cdot \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

t ist diejenige Zeit, welche notwendig ist, damit bei einer plötzlich eingetretenen Entlastung der Maschine von $\frac{1}{\mu_0} \cdot T_{\max}$ eine Änderung der mittleren Winkelgeschwindigkeit um den Betrag $\delta \cdot \omega$ herbeigeführt werden kann. Die eingetretene Entlastung bzw. Überlastung bleibt dabei in ihrer vollen Größe bestehen, ebenso bleibt die Füllung, bzw. die mittlere Tangentialkraft unverändert. Wird aber die mittlere Tangentialkraft durch den Regler verändert, um schließlich einen der Belastungsänderung entsprechenden Wert zu erhalten und so einen neuen Beharrungszustand herbeizuführen, dann müssen wir schreiben:

$$t = \int_0^{\delta} \mu \cdot T \cdot d\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Das Gesetz der Veränderung, d. h. die Beziehung zwischen den Größen der Gleichung (6) untereinander ist uns noch unbekannt.

Unter $\frac{1}{\mu}$ ist ein Wert zu verstehen, welcher den augenblicklich noch bestehenden Unterschied zwischen mittlerer Tangentialkraft T_m und dem vorhandenen reduzierten Widerstand R als Bruchteil der Vollbelastung angibt.

Zum Unterschiede von dem augenblicklichen Ungleichförmigkeitsgrade δ der Umdrehungsbewegung der Maschine, wollen wir den theoretischen Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers mit δ_0 bezeichnen. Schwingt der Regler um eine Beharrungsstellung, welche bis zur nächsten Belastungsänderung dieselbe bleibt, so ist der Wert μ nur abhängig von der Ausweichung aus der Gleichgewichtslage. Bezeichnen wir diese augenblickliche Ausweichung mit x , so ist:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{x}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

da wir angenommen haben, daß die Triebkraftkurve (Fig. 9) $T_m = \varphi(x)$ durch die Gerade CD dargestellt werden soll. Mit Hilfe der Beziehung (7) können wir für die Beziehung (6) schreiben:

$$d\delta = -\frac{1}{T} \cdot \frac{x}{s} \cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Das negative Vorzeichen kommt hinzu, da wir die Entfernungen x von der Beharrungsstellung auf der linken Seite nach der Regler-
spindel zu als negativ, auf der rechten Seite als positiv ansehen
wollen. Die Beharrungsstellung selbst bildet den Koordinatenanfang.
Sobald sich der Regler links davon befindet, ist x negativ, also δ
positiv. Es findet eine Geschwindigkeitszunahme statt, wie es beim
gewöhnlichen Pendelregler der Fall sein muß (Fig. 10). Wir wollen

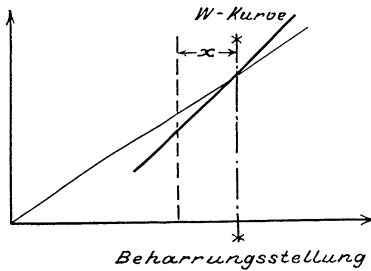


Fig. 10.

der weiteren Rechnung immer
die folgende Vorstellung zu
Grunde legen.

Bei konstanter Belastung
finden keine Schwingungen
statt. Der Regler ist in Ruhe.
Erst wenn eine plötzliche Be-
lastungsänderung eintritt, wird
der Regler in Schwingungen
versetzt. Er muß die ent-
sprechende neue Gleichgewichts-
lage, die bis zur nächsten Be-

lastungsänderung bestehen bleibt und bis dahin unseren Koordinaten-
anfang bildet, aufsuchen. Auf dem Wege dahin wollen wir den
Schwungkörper verfolgen. Ist z. B. eine plötzliche Entlastung von
der Größe $\frac{1}{\mu_0} \cdot T_{\max}$ eingetreten, so liegt die entsprechende, neue

Gleichgewichtslage von der alten um den Betrag $\frac{s}{\mu_0} = x_0$ entfernt,
und zwar nach rechts. Angenommen, der Schwungkörper sei auf
seinem Wege in die neue Gleichgewichtslage in die Stellung x ge-
langt, so steht er dort unter dem Einfluß zweier Kräfte. Würde die
Winkelgeschwindigkeit sich noch nicht geändert haben, so müßte
die Stabilität des Reglers den Schwungkörper in seine alte Stellung
zurücktreiben, und zwar mit der Kraft:

$$-(x_0 + x) \cdot \frac{2 \cdot \delta_0}{s} \cdot C_m = -(x_0 + x) \cdot 2 \cdot \delta_0 \cdot \frac{A}{s^2} \quad . \quad (9)$$

wenn C_m die mittlere Fliehkraft, A das Arbeitsvermögen des Reglers
ist (vergl. § 1). s ist die Projektion des größten Weges des Schwung-
körpermittelpunktes auf die Senkrechte zur Reglerspindel, ent-
sprechend dem Muffenhube des Reglers (Fig. 9). Wir wollen diese

eine Kraft, welche die Schwingungen des Reglers beeinflusst, nach Isaachsen mit „Triebkraft durch falsche Stellung“ bezeichnen. Außerdem wirkt noch auf den Regler eine andere Kraft, die „Triebkraft durch falsche Geschwindigkeit“. Da sofort nach Eintritt der Belastungsänderung auch die Winkelgeschwindigkeit, mithin die Fliehkraft sich ändern, so kommt die Fliehkraftänderung als zweite Kraft hinzu. Bezeichnen wir die seit Beginn der Belastungsänderung verstrichene Zeit mit t , so ist nach Beziehung (8) die zur Zeit t eingetretene Änderung der Gleichförmigkeit der Drehbewegung:

$$\delta = - \int_0^t \frac{1}{T} \cdot \frac{x}{s} \cdot dt. \quad (10)$$

Dem entspricht eine Fliehkraftänderung oder, wie wir sie genannt haben, eine „Triebkraft durch falsche Geschwindigkeit“ von:

$$- 2 \cdot \delta \cdot C_m = - \frac{2 A}{s^2 \cdot T} \cdot \int_0^t x \cdot dt. \quad (11)$$

Die Fliehkraftänderung wirkt in dem Sinne, daß der Regler nach der neuen Gleichgewichtslage hingetrieben wird; daher das negative Vorzeichen. Da bei einem reibungslosen Regler die Bewegung sofort nach Eintritt der Belastungsänderung beginnen muß, haben wir zur Zeit $t=0$ die Beziehungen:

$$x = \frac{s}{\mu_0} = x_0; \quad \frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0. \quad . . . (12)$$

Bezeichnen wir mit m_r die auf den Schwerpunkt eines Schwinggewichtes in Richtung der Fliehkraft reduzierten Massen aller schwingenden Teile des Reglers, so lautet unter ausschließlicher Berücksichtigung der beiden genannten Kräfte (9) und (11) die Differentialgleichung der Bewegung:

$$m_r \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = - (x_0 + x) \cdot 2 \cdot \delta_0 \frac{A}{s^2} - \frac{2 A}{s^2 \cdot T} \cdot \int_0^t x \cdot dt. \quad . . . (13)$$

Durch Differentiation nach t ergibt sich die bekannte, lineare Differentialgleichung, welche von Dr. Routh mit Hilfe der La Grangeschen Gleichungen und seiner Theorie der kleinen Schwingungen

30 Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen.

abgeleitet und verwendet worden ist, um damit die Vorgänge bei der Regulierung zu untersuchen.

$$m_r \cdot \frac{d^3x}{dt^3} = - \frac{2 \cdot A}{s^2} \cdot \phi_0 \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{2 A}{s^2 \cdot T} \cdot x \quad . \quad . \quad (14)$$

oder, wenn wir folgende Abkürzungen einführen:

$$a = \frac{2 \cdot A}{s^2 \cdot m_r} \cdot \phi_0 \qquad b = \frac{2 \cdot A}{s^2 \cdot m_r} \cdot \frac{1}{T}$$

nimmt die Gleichung (14) die einfache Gestalt an:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a \cdot \frac{dx}{dt} + b \cdot x = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Konstanten a und b können wir noch einfacher schreiben, wenn wir die Bezeichnung einführen:

$$s_r = \frac{s^2 \cdot m_r}{A} \cdot g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Der Ausdruck s_r hat, wohl von Tolle, die Bezeichnung erhalten: „reduzierter Muffenhub“. Diese Bezeichnung ist auch in den Taschenbüchern aufgenommen worden. Wir können schließlich den Konstanten a und b die Form geben:

$$a = \frac{2 \cdot g}{s_r} \cdot \phi_0 \qquad b = \frac{2 \cdot g}{s_r} \cdot \frac{1}{T} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Der Buchstabe g bedeutet, wie gewöhnlich, die Beschleunigung durch die Schwerkraft.

Will man den Einfluß einer Ölbremse in der gewöhnlichen Weise bei Ableitung der Differentialgleichung berücksichtigen, so hat man einfach zu Gleichung (13) ein Glied von der Form $- k \cdot \frac{dx}{dt}$

hinzuzufügen; zu Gleichung (15) kommt also $k \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ hinzu. Die Differentialgleichungen bleiben linear. So bequem auch die Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung in der Rechnung erscheint, soll dieselbe doch vorläufig unterbleiben. Wir wollen zunächst nur den reibungslosen Regler untersuchen und darauf einen reduzierten, konstanten Reibungswiderstand hinzunehmen.

Das vollständige Integral der linearen Differentialgleichung (15) hat die Form:

$$x = C_1 \cdot e^{w_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{w_2 \cdot t} + C_3 \cdot e^{w_3 \cdot t} \quad . \quad . \quad (18)$$

wenn C_1, C_2, C_3 die Integrationskonstanten und w_1, w_2, w_3 die Wurzeln der Gleichung sind:

$$w^3 + a \cdot w + b = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Diese Gleichung 3. Grades erscheint bereits in reduzierter Form. Da die Konstanten a und b immer positiv sind, gibt es nur eine reelle Wurzel, die wir w_1 nennen wollen. Die beiden andern Wurzeln sind konjugiert, komplexe Werte von der Form $q \pm q \cdot i$. Die reelle Wurzel w_1 hat dann die Größe: $w_1 = -2p$. Bekanntlich finden wir nach der Cardanischen Lösung die Wurzeln der Gleichung (19) zu:

$$w_1 = u + v; \quad w_{2, 3} = -\frac{u+v}{2} \pm \frac{u-v}{2} \sqrt{-3} = p \pm q \cdot i \quad (20)$$

wenn u und v die Bedeutung haben:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{4} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{b}{4} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} \quad (21)$$

Um die komplexen Werte der Exponenten in Gleichung (18) zu entfernen, geben wir dieser die Form:

$$x = C_1 \cdot e^{w_1 \cdot t} + e^{p \cdot t} \cdot (C_2 \cdot \cos q \cdot t + C_3 \cdot \sin q \cdot t). \quad . \quad (22)$$

Aus den bereits besprochenen Anfangsbedingungen (12), daß zur Zeit $t=0$ sein soll:

$$x = x_0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{dx}{dt} = 0;$$

berechnen sich die Konstanten C_1, C_2, C_3 zu:

$$C_1 = x_0 \cdot \frac{p^2 + q^2}{9p^2 + q^2}; \quad C_2 = x_0 \cdot \frac{8 \cdot p^2}{9p^2 + q^2}; \\ C_3 = x_0 \cdot \frac{2q^2 - 6p^2}{9p^2 + q^2} \cdot \frac{p}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Was wir aus der allgemeinen Form der Lösung (22) unserer Differentialgleichung ansehen können, ist nicht viel. Da a und b

positive Werte sind, wird die Wurzel w_1 negativ, der reelle Anteil p der komplexen Wurzeln besitzt aber einen positiven Wert. Die Schwingungen nehmen unbegrenzt zu; der völlig reibungslose Regler ist unbrauchbar. Die Schnelligkeit der Zunahme der Schwingungen ist also von der Größe des Wertes p abhängig. Je schneller die Schwingungen zunehmen, desto größer muß die zur Vermeidung derselben aufzuwendende Dämpfung sein. Offenbar wird der Exponent p klein, wenn a groß ist gegen b , d. h. wenn die „Triebkraft durch falsche Stellung“ gegen die „Triebkraft durch falsche Geschwindigkeit“ groß wird, wenn also die Kraftkurve nur wenig von einer geraden Linie abweicht, mithin eine kleine Fläche einschließt (Fig. 8). Aber nicht nur, wenn das Verhältnis $a:b$ groß ist, sondern auch wenn $a^3:b^2$ groß ist, wird der Wert von p und die aufzuwendende Dämpfung, die uns den Regler brauchbar machen soll, klein. Es ist:

$$p = -\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{27} \cdot \frac{a^3}{b^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \frac{b}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{27} \cdot \frac{a^3}{b^2}}} \right) \quad (24)$$

Wird die Quadratwurzel groß, dann wird p klein. Es muß also $\frac{a^3}{b^2}$ groß werden, wenn p klein werden soll. Für die Werte a und b können wir die unter (17) abgeleiteten Beziehungen einsetzen. Wir können dann das Verhältnis $\frac{a^3}{b^2}$ schreiben:

$$\frac{a^3}{b^2} = \frac{2g \cdot \sigma_0^3}{s_r} \cdot T^2 \quad (25)$$

Setzen wir bestimmte Dämpfungsverhältnisse voraus, sodaß der Wert $\frac{b^2}{a^3}$ eine bestimmte Größe k nicht überschreiten darf, damit die Dämpfung ausreicht, um eine Schwingungszunahme zu verhindern, so besteht die Beziehung:

$$\frac{1}{k} = 2g \cdot \frac{T^2}{s_r} \cdot \sigma_0^3 \quad (26)$$

Der Wert k ist als durch die Dämpfungsverhältnisse gegeben zu betrachten. Wir könnten demnach, wenn uns k bekannt wäre, aus der Gleichung (26) den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 berechnen, der erforderlich ist, damit wir eine gerade noch brauchbare Regulierung erhalten. Wir würden für δ_0 finden:

$$\delta_0 = k_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Das ist die von Tolle durch eine Überschlagsrechnung abgeleitete Beziehung. Unter ausschließlicher Annahme gewöhnlicher Reibung hat Tolle den Wert k_1 der Einheit gleich gesetzt. Für uns ist die Größe k_1 zunächst noch unbestimmt. Wir können aber bereits im allgemeinen die Bedingungen angeben, deren Erfüllung zur Erzielung eines geringen Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 notwendig ist. Erinnern wir uns, daß s_r und T die Werte (16) bzw. (2) besitzen, also:

$$s_r = \frac{m_r \cdot s^2}{A} \cdot g \qquad T = \frac{2 E_s}{L},$$

so sehen wir, daß bei einer guten Regulierung folgende Punkte zu berücksichtigen sind:

1. Die Energie E_s des Schwungrades muß groß sein im Verhältnis zur Leistung der Maschine. Da Umdrehungszahl und Durchmesser des Schwungrades in den meisten Fällen durch andere Rücksichten bestimmt sind, so bleibt nur übrig, das Schwungrad möglichst schwer zu machen.

2. Der reduzierte Muffenhub des Reglers muß klein sein. Das wird erreicht durch große, mittlere Fliehkraft des Reglers $C_m = \frac{A}{s}$

Die große Fliehkraft darf aber nicht durch große Massen, sondern nur durch große Abstände der Schwungmassen von der Regler-spindel und vor allen Dingen durch große Umdrehungszahlen erreicht werden. Alle schwingenden Massen, außer den zur Erzeugung der Fliehkraft erforderlichen, sind möglichst zu vermeiden.

3. Die Eigenreibung des Reglers ist möglichst gering zu halten; ebenso der durch Muffenbelastung entstehende Teil des Unempfindlichkeitsgrades.

Die dritte Bedingung ist nicht in der Beziehung (27) für δ_0 enthalten; sie wird später behandelt werden und ist nur der Vollständigkeit halber hier mit angeführt worden. Die erste Bedingung

hängt nur von der Kraftmaschine ab, die zweite nur vom Regler selbst. Wir können daher den Wert: $T = \frac{2 E_s}{L}$ als Regulierfähigkeit der Kraftmaschine ansehen. Der Wert des reduzierten Muffenhubes $s_r = \frac{m_r \cdot s^2}{A}$ würde der Maßstab für die Güte eines Reglers sein d. h. für seine Regulierfähigkeit, soweit diese nur von ihm abhängig ist. Außerdem ist noch die Eigenreibung des Reglers zu berücksichtigen. Der Ausdruck $\sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}}$ kann als Maßstab der Regulierfähigkeit der ganzen Anlage angesehen werden, soweit diese vom Schwungrad und der Güte des Reglers abhängt. Wir werden später sehen, daß die Regulierfähigkeit einer Anlage außerdem noch von den selbstregulierenden Eigenschaften der Kraftmaschine, von der Empfindlichkeit der Regulierung und vom toten Gang derselben abhängig ist.

§ 6. Durchrechnung eines Beispiels.

Die folgende Rechnung geschieht unter den in § 4 ausführlich gemachten Voraussetzungen. Als schwingungsdämpfendes Mittel ist nur ein konstanter, reduzierter Reibungswiderstand vorhanden. Wir nehmen an, daß der Regler sich in seiner Beharrungsstellung in relativer Ruhe zur Pendelebene befinde. Tritt jetzt eine plötzliche Belastungsänderung, z. B. eine Entlastung ein, so wird der Regler sich nicht eher in Bewegung setzen, bis die Fliehkraft um den Betrag der konstanten Reibung angewachsen ist, wenn das nicht schon vorher der Fall war. Sobald nun die Bewegung eintritt, ist dieselbe identisch mit der Bewegung des reibungslosen Reglers unter denselben Anfangsbedingungen. Die Identität reicht aber nur bis zur ersten Bewegungsumkehr, weil dann die Reibungskraft ihr Vorzeichen wechselt. Es dreht sich jetzt alles um den Punkt, wo und wann die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ des Schwungkörpers zum ersten Mal gleich null wird. Geschieht die erste Bewegungsumkehr des Reglers noch vor Erreichung der neuen Beharrungsstellung, so tritt eben das Überregulieren nicht ein. Geschieht die erste Bewegungsumkehr, die bei genügend großer Reibung nicht stattfindet, gerade in der neuen Gleichgewichtslage, so ist dieselbe mit der Geschwindigkeit null erreicht worden, ein Fall, der für uns der ideale wäre. Es ist

dieser Fall nicht nur theoretisch denkbar, sondern auch praktisch erreichbar. Sind jedoch nicht alle für eine gute Regulierung erforderlichen Bedingungen erfüllt, was sehr oft der Fall ist, so tritt das Überregulieren ein. Der Schwungkörper kommt erst jenseits der neuen Beharrungsstellung zum ersten Mal zur Ruhe, um dann wieder zurückzuschwingen und so fort. Im Kräfte-diagramm muß jedenfalls die Kraftkurve von einem zum andern Fliehkraftstrahle aufsteigen, solange die neue Beharrungsstellung noch nicht erreicht ist. Als Beispiel soll eine Eincylinderdampfmaschine dienen, welche vom Verfasser in den Konstruktionsübungen des Geh. Hofrats Prof. L. Lewicki, Dresden, entworfen worden ist. —

Eincylinderdampfmaschine ohne Kondensation. $N_e = 30$ PS.

Die Abmessungen der Maschine sind:

Cylinderdurchmesser	$D_1 = 275$ mm
Kurbelradius	$R = 241$ mm
Schwungraddurchmesser	$D = 2410$ mm
Schwungradgewicht	$Q = 1800$ kg
Auf den Umfang reduziertes Gewicht des Schwungrades	$Q_r = 1500$ kg
Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades	$\delta_s = 1 : 150$
Umdrehungszahl in der Minute	$n = 125$

Zunächst wollen wir uns einen Federregler mit der Maschine verbunden denken, der folgende Abmessungen besitzen soll (Fig. 11).

Reduziertes Gewicht eines Schwungkörpers . .	$G_r = 10$ kg
Wirkliches Gewicht eines Schwungkörpers . .	$G = 5$ kg
Mittlere Entfernung desselben von der Achse .	$r_m = 200$ mm
Horizontaler Weg der Schwungkörper (Fig. 11)	$s = 40$ mm
Minutliche Umdrehungszahl der Reglerspindel .	$n_r = 300$

Zu dem gewählten Beispiel sei bemerkt, daß ganz normale Verhältnisse angenommen sind. Das Schwungrad ist durchaus nicht besonders schwer gemacht worden. Der Federregler würde allerdings einem der besten gebräuchlichen Federregler entsprechen, etwa einem Tolleschen von der Größennummer 3. Die Tolleschen Federregler besitzen einen sehr geringen reduzierten Muffenhub, wie er von Gewichtsreglern nicht annähernd erreicht werden kann. Der Einfachheit halber sind in Fig. 11 die Massen der Stangen und

Feder gegen die Schwungmassen vernachlässigt worden. Das reduzierte Gewicht G_r , welches doppelt so groß ist wie das wirkliche Gewicht der Schwungkörper, kommt dann nur dadurch zustande, daß die Schwungmassen unter dem Winkel $\alpha = 45^\circ$ gegen die Horizontale schwingen. Deshalb ist:

$$G_r \cdot \cos^2 \alpha = G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Wir wollen jetzt für unser Beispiel den reduzierten Muffenhub s_r und die Anlaufzeit T berechnen.

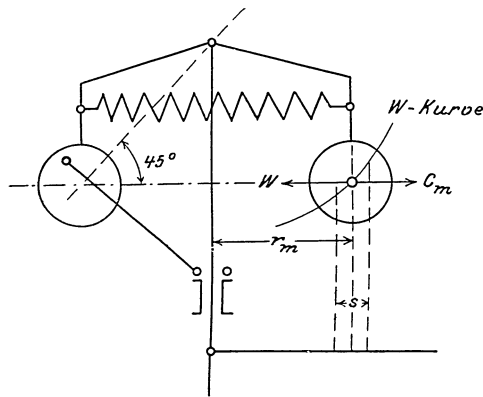


Fig. 11.

Die mittlere Fliehkraft C_m beider Schwungkörper ist:

$$C_m = 2 \cdot G \cdot r_m \cdot \left(\frac{n_r}{30}\right)^2 = 2 \cdot 5 \cdot 0,2 \cdot \left(\frac{300}{30}\right)^2 = 200 \text{ kg.} \quad (29)$$

Das Arbeitsvermögen des Reglers ist:

$$A = C_m \cdot s = 0,04 \cdot 200 = 8 \text{ mkg} (30)$$

Der reduzierte Muffenhub ist demnach:

$$s_r = \frac{G_r \cdot s^2}{A} = \frac{20 \cdot 0,04^2}{8} = 0,004 \text{ m oder } s_r = 4 \text{ mm.} \quad (31)$$

Der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 ist bei den Tolleschen Reglern einstellbar. Bei Berechnung der Konstanten a (17) haben wir uns

für einen bestimmten Wert von δ_0 zu entscheiden. Zur Berechnung von b (17) brauchen wir noch die Anlaufzeit T . Es ist:

$$T = \frac{2 E_s}{L} = \frac{M_r \cdot v^2}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

wenn M_r die auf den Umfang des Schwungrades reduzierte Masse, und v die Geschwindigkeit derselben bedeutet. Nun ist:

$$v^2 = \left(\frac{D \cdot \pi \cdot n}{60} \right)^2 = \frac{(2,41 \cdot \pi \cdot 125)^2}{3600} = 250 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad . \quad . \quad (33)$$

D war der Durchmesser des Schwungrades, n die minutliche Umdrehungszahl desselben. Die reduzierte Schwungradmasse ist:

$$M_r = \frac{Q_r}{g} = \frac{1500}{9,81} \approx 150 \text{ kg s}^2/\text{m} \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Da die Maschine eine nutzbare Leistung von $N_e = 30$ PS. geben soll, ist:

$$L = 30 \cdot 75 = 2250 \text{ mkg/sec} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Schließlich erhalten wir für die Anlaufzeit T den Wert:

$$T = \frac{M_r \cdot v^2}{L} = \frac{150 \cdot 250}{2250} = 16,6 \text{ sec} \quad . \quad . \quad . \quad (35a)$$

Jetzt können wir auch die Konstanten a und b (17) berechnen, wenn wir zunächst dem Federregler den hohen Ungleichförmigkeitsgrad von $\delta_0 = 6\%$ geben. Es ist:

$$a = \frac{2g}{s_r} \cdot \delta_0 = \frac{2g \cdot 0,06}{0,004} = 300 \text{ 1/sec}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

$$b = \frac{2g}{s_r} \cdot \frac{1}{T} = \frac{2 \cdot g}{0,004 \cdot 16,6} = 300 \text{ 1/sec}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Nun ist alles vorbereitet, um die Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3 (23) des vollständigen Integrals (22) numerisch zu ermitteln:

Machen wir noch die weitere Annahme:

$$\frac{1}{\mu_0} = -1/2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

38 Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen.

d. h. wir denken uns, daß die Hälfte der Vollbelastung plötzlich ausgerückt wird, so ist die Anfangslage des Schwungkörpers:

$$x_0 = \frac{s}{\mu_0} = -\frac{40}{2} = -20 \text{ mm} \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

und die Berechnung ergibt dann:

$$C_1 = -19,87 \quad C_2 = -0,13 \quad C_3 = -1,13 \quad . \quad (40)$$

Die Wurzeln der Gleichung 3. Grades (19) ergeben sich zu:

$$w_1 = -1,00 \quad w_{2,3} = 0,5 \pm 17,2 \cdot i \quad . \quad . \quad (41)$$

Nach Einsetzung der gefundenen numerischen Werte lautet das vollständige Integral (22) und seine 2. Ableitung:

$$x = -19,87 \cdot e^{-1,0 \cdot t} - e^{0,5 \cdot t} \cdot (0,13 \cdot \cos 17,5 \cdot t + 1,13 \cdot \sin 17,5 \cdot t) \quad (42)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -19,87 \cdot e^{-1,0 \cdot t} + e^{0,5 \cdot t} \cdot (19,87 \cdot \cos 17,5 \cdot t + 342 \cdot \sin 17,5 \cdot t) \quad (43)$$

Da wir x_0 (39) bei Berechnung der Konstanten C_1, C_2, C_3 (23) in mm eingeführt haben, ergeben sich die Werte von x ebenfalls in mm, die von $\frac{d^2 x}{dt^2}$ in $\frac{\text{mm}}{\text{sec}^2}$. Da beide reduzierte Schwunggewichte zusammen 20 kg wiegen, so ist unsere reduzierte Masse:

$$m_r = \frac{20}{g} \simeq 2 \frac{\text{s}^2 \cdot \text{kg}}{\text{mm}} \quad (44)$$

und die Kräfte P , unter deren Einfluß die Schwungmassen schwingen, sind:

$$P = \frac{m_r}{1000} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2}{1000} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ kg} \quad (45)$$

Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen (42) und (43) kann nun die Kraftkurve des Reglers bei $\delta_0 = 6\%$ gezeichnet werden. Damit wir ein Bild von den hier in Betracht kommenden Zeiten erhalten, ist eine Anzahl der für die Kraftkurve berechneten Punkte in einer Tabelle angegeben worden, und zwar folgen die Punkte einander in Zeitabständen von $\frac{1}{10}$ Sekunde. Die Punkte sind der Reihe nach in der Kraftkurve (1) angedeutet worden.

Nach Annahme 4., § 4 wurden die Fliehkraftstrahlen parallel gezeichnet. Außerdem wurden dieselben, um ein rechtwinkliges

Koordinatensystem zu bekommen, horizontal gelegt (vergl. Fig. 3). Der Neigungswinkel der W-Kurve gegen die Fliehkraftstrahlen ist aus der Beziehung zu finden:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \delta_0 \cdot \text{Cm}}{s} \quad (46)$$

Als Kräftemaßstab sämtlicher Kraftkurven ist festgesetzt worden, daß 3 mm die Einheit der Kraft 1 kg bedeuten. Ferner sind die Wege der Schwunggewichte um das 3 fache vergrößert worden.

Kraftkurve (Fig. 1) für den reibungslosen Federregler bei $\delta_0 = 6\%$.

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
mm	x	-20,0	-19,2	-15,7	-13,6	-14,3	-12,8	-9,5
kg	P	+ 0,00	+ 0,66	- 0,33	- 0,69	+ 0,56	+ 0,49	- 0,86

sec.	t	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
mm	x	- 9,6	- 10,6	- 7,9	- 5,5	- 7,5	- 7,6	- 3,8
kg	P	- 0,28	+ 1,00	- 0,10	- 1,11	+ 0,49	+ 1,01	- 0,92

sec.	t	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
mm	x	- 3,7	- 6,7	- 4,5	- 0,9	- 3,8	- 5,7	- 1,2
kg	P	- 0,79	+ 1,32	+ 1,37	- 1,61	+ 0,18	+ 1,69	- 0,85

sec.	t	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
mm	x	+ 0,1	- 4,8	- 3,8	+ 1,8	- 1,0	- 5,7	- 0,5
kg	P	- 1,58	+ 1,51	+ 1,17	- 2,10	- 0,52	+ 2,50	- 0,36

Wie schon erwähnt, ist $\frac{1}{\mu_0}$ zu $-\frac{1}{2}$ angenommen worden. Wir stellen uns etwa vor, daß die Maschine bei $\frac{3}{4}$ Belastung im Beharrungszustand arbeitet. Plötzlich werden 50% der Vollbelastung ausgerückt. Die Maschine hat nur noch $\frac{1}{4}$ der größten Leistung zu liefern und den entsprechenden Beharrungszustand mit Hilfe des Reglers anzunehmen.

Wie uns die Tabelle und die gezeichnete Kraftkurve (1) lehren, tritt bei dem gewählten, hohen Ungleichförmigkeitsgrad von $\delta_0 = 6\%$

ein Überregulieren tatsächlich nicht ein. Der reibungslose Regler nähert sich in der aus Kraftkurve (1) erkennbaren, eigenartigen Weise, wiederholt die Geschwindigkeit null annehmend, der neuen Gleichgewichtslage und schwingt in immer größer werdenden Ausschlägen um diese herum. Die Kraftkurve wird schließlich zur Spirale, deren erste Windung noch gezeichnet worden ist.

Haben wir einen genau konstanten, reduzierten Reibungswiderstand als Dämpfungsmittel, der größer ist als die größte auftretende Kraft P in der ersten Welle der Kraftkurve, so tritt die erste, weit vor der neuen Beharrungsstellung liegende Bewegungsumkehr nicht ein. Bis dahin ist aber, wie schon erwähnt, die Kraftkurve genau dieselbe, wie für den reibungslosen Regler. An Stelle der Bewegungsumkehr tritt eine endliche Pause in der Bewegung ein, die solange dauert, bis die Fliehkraft die nötige Größe erreicht hat, um die konstante Reibung überwinden zu können. Dann beginnt die Bewegung im selben Sinne, wie vorher, von neuem, entsprechend den veränderten Anfangsbedingungen.

Die Bewegungspause beträgt in unserem Beispiel 0,085 sec. Wir finden dieselbe, wenn wir uns der früher erkannten Beziehung (6) erinnern:

$$dt = T \cdot \frac{s}{x} \cdot d\vartheta.$$

Da während der Pause x konstant bleibt, etwa gleich x_1 , so haben wir einfach:

$$t = T \cdot \frac{s}{x_1} \cdot \vartheta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

wobei ϑ_1 aus der Kraftkurve (1) zu entnehmen ist. Wir finden:

$$\vartheta_1 = \frac{\Delta C}{C_m} = 0,175 \% \quad \text{und} \quad x_1 = 13,6 \text{ mm (nat. Gr.)} \quad . \quad (48)$$

Erinnern wir uns der Werte von T (35a) und s , so finden wir:

$$t_1 = 16,6 \cdot 0,00175 \cdot \frac{40}{13,6} = 0,085 \text{ sec.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Da die Konstanten C_1 , C_2 , C_3 der Bewegungsgleichung (22) alle den gemeinsamen Faktor $x_0 = \frac{s}{\mu_0}$ haben, wobei x_0 die Entfernung von der neuen Gleichgewichtslage bei Eintritt der Belastungsänderung oder, was dasselbe ist, bei Bewegungsbeginn war, so er-

scheinen bei der wieder beginnenden Bewegung des Reglers die Werte x und P einfach im Verhältnis $\frac{x_1}{x_0}$ verkleinert gegenüber den entsprechenden Werten der ersten Kraftwelle des Reglers. Die Wellen der so entstehenden neuen Kraftkurve sind einander ähnlich. Sie werden nach der neuen Beharrungsstellung zu, welcher sich der Regler asymptotisch nähert, immer kleiner und kleiner. Die nach der zweiten Kraftwelle eintretende Bewegungspause ist:

$$t_2 = T \cdot \frac{s}{x_2} \cdot \delta_2.$$

Da aber $\frac{\delta_2}{x_2} = \frac{\delta_1}{x_1}$ infolge der Ähnlichkeit der einzelnen Kraftwellen ist, so werden alle Bewegungspausen gleich lang.

Unter der ausschließlichen Berücksichtigung genau konstanter, reduzierter Reibung entsteht also die 2. Kraftkurve. Auch diese Kraftkurve entspricht noch nicht der Wirklichkeit, da die Annahme konstanter Reibung immer unzulässiger wird, je kleiner die Wellen der Kraftkurve werden, je mehr wir uns der Beharrungsstellung nähern. Die Reibung der Ruhe wird immer größer sein wie die Reibung der Bewegung. Für die Rechnung können wir die Vorstellung verwerten, daß die Reibung bei Bewegungsbeginn plötzlich um einen gewissen Betrag sinkt, dann aber konstant bleibt und bei aufhörender Bewegung plötzlich um einen gleich großen Betrag wieder steigt. Unter dieser Annahme ist die 4. Kraftkurve gezeichnet worden, die uns ein der Wirklichkeit besser entsprechendes Bild von der Bewegung des Reglers bei einer plötzlichen großen Belastungsänderung gibt.

Wir sehen, daß durch den zusätzlichen Betrag der Reibung der Ruhe die einzelnen Kraftwellen der Kurve verlängert werden. Die großen Wellen der Kraftkurve (2) sind verhältnismäßig nur wenig, die kleinen Wellen verhältnismäßig sehr stark verlängert worden. Wenn nun auch der Betrag der zusätzlichen Reibung der Ruhe noch so klein sein mag, besonders wenn die Reibung überhaupt gering ist, so gibt es doch immer in der Nähe der Gleichgewichtslage eine Grenze, innerhalb welcher infolge der zusätzlichen Reibung der Ruhe die Wellen der Kraftkurve so verlängert werden, daß der Regler erst jenseits der Beharrungsstellung wieder zur Ruhe kommt, d. h. er überreguliert. Diese durch die zusätzliche Reibung der Ruhe zu stande kommenden kleinen Schwingungen, die sich ganz

in der Nähe der Beharrungsstellung abspielen und mit bloßem Auge bei einem empfindlichen Federregler kaum sichtbar sind, werden im zweiten Teil dieser Arbeit behandelt. Unter dem Überregulieren wollen wir nur die großen Schwingungen infolge großer, plötzlicher Belastungsänderungen verstehen, während die kleinen Schwingungen, deren Entstehung wir eben besprochen haben, auch bei konstanter Belastung andauern. Die bisherigen Abhandlungen, welche rechnerisch die Schwingungsfrage verfolgen, befassen sich fast ausschließlich mit den Schwingungen bei konstanter Belastung. Es ist deshalb für nötig befunden worden, nochmals auf den Unterschied der Schwingungen des Reglers infolge großer Belastungsänderungen und der kleinen Schwingungen, welche infolge der zusätzlichen Reibung der Ruhe entstehen und bei konstanter Belastung nicht verschwinden, hinzuweisen.

Um den Zusammenhang nicht zu stören, wird die Berechnung der 4. Kraftkurve erst später gegeben werden. Schon die 2. Kraftkurve, von welcher für das Überregulieren ja nur die Länge der ersten Kraftwelle von Bedeutung ist, besitzt für uns eine praktische Brauchbarkeit. Trotzdem daß die zusätzliche Reibung der Ruhe bei Zeichnung der 4. Kraftkurve viel größer angenommen worden ist, als der Wirklichkeit entspricht (vergl. § 9), zeigt die erste Kraftwelle nur eine unbedeutende Verlängerung. Diese wird um so unbedeutender, je empfindlicher der Regler ist. Geschieht der Antrieb desselben durch Zahnräder, so wird seine Empfindlichkeit noch größer, da er fortwährenden Erschütterungen unterliegt. Vom Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades wollen wir vorläufig noch absehen. Die Abweichung der Kraftkurve unter Annahme konstanter Reibung von der Kraftkurve unter Berücksichtigung der „zusätzlichen Reibung der Ruhe“ soll vorläufig nicht weiter erörtert werden (vergl. § 9). Zunächst wollen wir untersuchen, wie die Kraftkurve des Reglers ohne Reibung bzw. mit konstanter Reibung sich ändert, wenn wir den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers ändern.

Kraftkurve (Fig. 7) $\delta = 3\%$.

Die numerische Berechnung der Konstanten ergibt:

$$a = 150 \qquad b = 300 \qquad (50)$$

$$C_1 = -19,05 \qquad C_2 = -0,95 \qquad C_3 = -2,94 \qquad (51)$$

Wir bekommen folgende Bewegungsgleichungen:

$$x = -19,05 \cdot e^{-1,95 \cdot t} - e^{0,975 \cdot t} \cdot (0,95 \cdot \cos 12,38 \cdot t + 2,94 \cdot \sin 12,38 \cdot t) \quad (52)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -72,5 \cdot e^{-1,95 \cdot t} + e^{0,975 \cdot t} \cdot (72,5 \cdot \cos 12,38 \cdot t + 468 \cdot \sin 12,38 \cdot t) \quad (53)$$

Die Einheiten der Wege und Kräfte sind dieselben wie bei den Bewegungsgleichungen (42) und (43). Ebenso soll der Bewegungszustand bei dieser und allen folgenden Kraftkurven immer von $1/10$ zu $1/10$ Sekunde angegeben werden.

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
mm	x	-20,0	-19,0	-14,2	-7,4	-4,8	-8,3	-11,4	-7,5	+0,8
kg	P	+0,00	+0,90	+0,46	-0,93	-1,36	+0,05	+1,59	+1,02	-1,26

In dieser, sowie in den nächsten Kraftkurven ist immer nur die erste Welle berechnet und gezeichnet worden. Der spiralförmige Teil hat für uns kein Interesse und kommt tatsächlich nicht zustande. Die erste Bewegungsumkehr erfolgt auch bei $\delta_0 = 3\%$ noch vor der neuen Beharrungsstellung. Ein Überregulieren tritt nicht ein. Stellen wir jetzt einen Ungleichförmigkeitsgrad von $\delta_0 = 2\%$ an unserem Federregler ein, so wird sich bei der Berechnung der Kraftkurve 8 zeigen, daß jetzt die erste Bewegungsumkehr auf die andere Seite der neuen Beharrungsstellung fällt. Deshalb ist die Regulierung offenbar noch recht wohl zu gebrauchen. Es ist wieder dieselbe Belastungsänderung von der Hälfte der Vollbelastung angenommen worden.

Kraftkurve (Fig. 8) $\delta_0 = 2\%$.

Wir erhalten die Bewegungsgleichungen:

$$x = -17,5 \cdot e^{-2,78 \cdot t} - e^{1,39 \cdot t} \cdot (2,5 \cdot \cos 10,29 \cdot t + 4,4 \cdot \sin 10,29 \cdot t) \quad (54)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -135 \cdot e^{-2,78 \cdot t} + e^{1,39 \cdot t} \cdot (135 \cdot \cos 10,29 \cdot t + 528 \cdot \sin 10,29 \cdot t) \quad (55)$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
mm	x	-20,0	-19,0	-13,6	-4,1	+3,1	+1,5	-8,0	-15,8
kg	P	+0,00	+1,01	+1,11	-0,44	-1,89	-1,77	+0,32	+2,62

Kraftkurve (Fig. 9) für den astatischen Regler.

Da die Konstante a verschwindet, vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu:

$$x = -6,66 \cdot e^{-6,694 \cdot t} - 13,33 \cdot e^{3,347 \cdot t} \cos 5,8 \cdot t \quad (57)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -299 \cdot e^{-6,694 \cdot t} + e^{3,347 \cdot t} (299 \cdot \cos 5,8 \cdot t + 518 \cdot \sin 5,8 \cdot t) \quad (56)$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
mm	x	-20,0	-19,0	-12,1	+5,1	+34	+69	+93	+84	+15	-128	-332
kg	P	+0,00	+1,19	+2,16	+2,44	+1,32	-1,72	-6,7	-12,2	-15,5	-12,6	+0,98

Die Kraftkurve ist für den reibungslosen astatischen Regler eine Spirale. Tritt der Bewegung ein genügend großer konstanter Reibungswiderstand entgegen, so entstehen zwar zunächst Bewegungspausen beim Geschwindigkeitswechsel, aber wir erhalten trotzdem eine Spirale, deren Windungen sich immer mehr von der Beharrungsstellung entfernen. Der astatische Regler ist also für Zwecke der Regulierung unbrauchbar, während bei $\delta_0 = 2\%$ die Kraftkurve (8) erkennen läßt, daß zunächst eine starke Abnahme der Reglerschwingungen eintreten muß. Die Abnahme der Schwingungen geht solange vor sich, bis wir in das Gebiet der kleinen Schwingungen bei konstanter Belastung geraten.

Man sieht, daß bei Anwendung gewöhnlicher Reibung als Dämpfungsmittel sich der Regler in zweierlei Weise seiner neuen Beharrungsstellung nähern kann. In beiden Fällen geschieht die Annäherung ruckweise asymptotisch. Tatsächlich wird aber die neue Gleichgewichtslage nicht ganz erreicht. Die asymptotische Annäherung hört auf, sobald der „Grenzbezirk der kleinen Schwingungen“ erreicht ist, wie wir uns ausdrücken wollen. Die ruckweise asymptotische Annäherung an die Beharrungsstellung von nur einer Seite her würde der aperiodischen Dämpfung bei Anwendung von Flüssigkeitsreibung entsprechen, und wir wollen in diesem Sinne den Begriff „aperiodisch“ auch auf die Schwingungsdämpfung durch gewöhnliche Reibung übertragen.

Nach unseren Vorstellungen können wir die Bedingung für eine gute Regulierung dahin aussprechen, daß die erste Bewegungsumkehr desselben in den Grenzbezirk der kleinen Schwingungen fallen muß, wenn infolge einer großen, plötzlichen Belastungsänderung eine Verstellung der Regulierorgane erforderlich ist. Was den

Grenzbezirk der kleinen Schwingungen anbetrifft, so wird dieser um so kleiner, je weniger der Regler zum Überregulieren neigt und je empfindlicher er ist (vergl. § 11).

Der Regler soll also mit der ersten Welle der Kraftkurve und mit der Geschwindigkeit null in die nächste Nähe der neuen Beharrungsstellung gelangen. Das ist, wie wir an Kraftkurve 7 gesehen haben, tatsächlich praktisch erreichbar. Es ist aber wohl zu beachten, daß die Möglichkeit einer aperiodischen Regulierung erst in neuester Zeit mit Hilfe der besten Federregler praktisch geschaffen worden ist, vorausgesetzt, daß wir einen höheren Ungleichförmigkeitsgrad als ungefähr $\delta_0 = 3\%$ nicht zulassen wollen. In unserem Beispiele haben wir bei $\delta_0 = 3\%$ mit einem der besten Federregler, welcher, abgesehen von seiner nicht unbeträchtlichen Eigenreibung, an der Grenze des Erreichbaren steht, gerade das Überregulieren verhindert. Wir könnten allerdings das Schwungrad der Maschine noch schwerer machen und dadurch den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers weiter herunterdrücken. Die Vergrößerung der Schwungradmasse ist sehr wirksam, denn die ihr proportionale Anlaufzeit T der Maschine erscheint in der Beziehung (27) für δ_0 in der zweiten Potenz. Wenn wir aber, wie es für viele Zwecke der Fall ist, mit einem Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades von $\delta_s = \frac{1}{150}$ auskommen, dann werden wir uns

nur sehr ungern zu einer Vergrößerung des Schwungradgewichtes entschließen. Wir wollen deshalb in unserem Beispiel der Encylindermaschine die gewählten Schwungradabmessungen fernerhin beibehalten. Das Schwungradgewicht ist für unsere Betrachtungen konstant. Solange die Regulierung nur mit einem Gewichtsregler versehen ist, können wir nicht daran denken, bei einem Ungleichförmigkeitsgrad von etwa $\delta_0 = 3\%$ eine aperiodische Schwingungsdämpfung zu erreichen. Auch eine Ölbremse kann uns nicht dazu verhelfen (vergl. § 13). Wir wollen gleich einige allgemeine Betrachtungen über die praktisch zur Verfügung stehenden Dämpfungsmittel anstellen. Zu diesem Zwecke wenden wir vorerst unsere Aufmerksamkeit den zur Stellbewegung des Reglers erforderlichen Zeiten zu.

Die Zeit, welche der Regler braucht, um seine neue Gleichgewichtslage zu erreichen, ist um so kürzer, je weniger statisch der Regler ist. Der astatische Regler braucht die wenigste Zeit. Beachtenswert ist die absolute Größe der Zeit. Bei einem Ungleich-

förmigkeitsgrad von $\delta_0 = 2\%$ (Kraftkurve (8)) wird die neue Gleichgewichtslage in etwa 0,35 sec. erreicht. Wir haben immer angenommen, daß ein Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades nicht vorhanden ist. Das ist aber eine Vernachlässigung, die wir ohne weiteres nicht machen dürfen. Unsere Maschine macht in der Sekunde etwa zwei Umdrehungen. Der doppeltwirkende Dampfeylinder erhält also nur aller $\frac{1}{4}$ Sekunden eine Füllung. Die Annahme, daß die Steuerung momentan und kontinuierlich wirkt, ist demnach nicht richtig. Während der ganzen Verstellung des Reglers, die nur 0,35 sec. dauert, wirkt in der Hauptsache ein und dieselbe Füllung, welche nur in Zeiträumen von 0,25 Sekunden geändert werden kann. Es wäre vielleicht richtiger, anzunehmen, daß der Regler auf seinem Wege in die neue Beharrungsstellung eine Änderung der mittleren Tangentialkraft nicht bewirkt, sondern daß er erst die der Belastungsänderung entsprechende Füllung einstellt, nachdem er die neue Beharrungsstellung erreicht hat. Bis dahin könnten wir annehmen, steht die Maschine unter dem beschleunigenden bzw. verzögernden Einfluß der Belastungsänderung. Eine allmähliche, gleichzeitige Änderung der Tangentialkraft findet bei keiner Kraftmaschine statt, ganz abgesehen von dem Zeitverlust, der durch einen eventl. Krafteinschalter herbeigeführt wird. Ist dieser Zeitverlust anscheinend auch sehr gering, so wird er dennoch nicht ohne merklichen Einfluß sein, denn die Zeit, in welcher die Verstellung des Reglers erfolgt, ist ebenfalls sehr gering. Es handelt sich hier um Bruchteile von Sekunden. In 0,35 sec. ist z. B. bei Kraftkurven (8) die ganze Verstellung bewirkt, die bei einer Belastungsänderung von der Hälfte der größten, nutzbaren Maschinenleistung erforderlich ist. Die eben angestellten Überlegungen sollen uns auf den folgenden § 7 vorbereiten.

Jedes schwingungsdämpfende Mittel bewirkt einen Zeitverlust d. h. eine Verlangsamung der Bewegung des Reglers und damit eine Vergrößerung des augenblicklichen Ungleichförmigkeitsgrades δ (10) der Maschine. Auch wenn wir die schwingungsdämpfende Wirkung der konstanten Reibung vergrößern, indem wir einen höheren Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers einstellen, wird die Verstellungsbewegung verlangsamt, wie uns die gezeichneten Kraftkurven gelehrt haben. Während aber beim Vorhandensein von nur konstanter Reibung die Verlangsamung der Stellbewegung ziemlich gering ist, wird sie bei allen anderen schwingungsdämpfenden Mitteln

größer. Die konstante Reibung in Verbindung mit dem richtigen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers wirkt geradezu ideal. Der erste Teil der Stellbewegung geht fast genau so schnell vor sich wie beim astatischen Regler (vergl. Kraftkurve (8) und (9)). Der ganze Teil der Kraftkurve (8) von der alten bis zur neuen Beharrungsstellung liegt nur wenig höher wie der entsprechende Teil der Kraftkurve (9) des astatischen Reglers, d. h. die bis zur Erreichung der neuen Gleichgewichtslage eingetretene Geschwindigkeitsschwankung der Maschine ist bei mäßig hohem Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers nur wenig von der beim astatischen Regler eintretenden Geschwindigkeitsschwankung verschieden. An praktisch in Frage kommenden, schwingungsdämpfenden Mitteln stehen uns außer der gewöhnlichen Reibung noch zur Verfügung die Ölbremse und die periodische Vernichtung der kinetischen Energie der Schwingkörper durch Festhalten der Reglerhülse. Bei Dampfmaschinen kann das Festhalten durch die Steuerung geschehen (Ridersteuerung, rückdruckfreie Ventil- und Corlißsteuerung). Außerdem kann das Festhalten der Reglerhülse durch ein zu diesem Zwecke konstruiertes Hemmwerk erfolgen, wie es von Voith bei Turbinen zur Anwendung gebracht worden ist¹⁾. In letzterem Falle handelt es sich um einen indirekt wirkenden Regler, mit welchen sich diese Arbeit nicht befaßt.

Wir haben gleich zu Anfang darauf hingewiesen, daß bei einem Regler zwei verschiedene Arten von Schwingungen unterschieden werden können, die kleinen Schwingungen bei konstanter Belastung und die großen Schwingungen, die bei periodischer Dämpfung durch plötzliche, große Belastungsänderungen entstehen. Solange der Regler einen genügend großen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 besitzt, sind die beiden Arten von Schwingungen leicht voneinander zu unterscheiden. Bei aperiodischer Dämpfung treten z. B. große Schwingungen überhaupt nicht auf. Wir haben dann nur die kleinen, bei konstanter Belastung auftretenden Schwingungen. Ist aber der Regler nahezu astatisch, dann gehen die beiden Arten von Schwingungen ineinander über. Die kleinen Schwingungen bei konstanter Belastung haben sich so vergrößert, daß ein Bestreben des Reglers, sich einem bestimmten Beharrungszustand zu nähern, überhaupt nicht mehr zu erkennen ist. Dieser Zustand, der gewöhnlich das

¹⁾ Vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1896. S. 1008 u. D.R.P. 69179.

Überregulieren genannt wird, tritt bei Reglern mit großem reduzierten Muffenhub, also bei Gewichtsreglern schon auf, wenn wir noch ziemlich weit von der Astasie entfernt sind. Um aber mit dem Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers nicht zu hoch zu kommen, sucht man die großen, unter Umständen labilen Schwingungen des Reglers auf andere Weise zu verhüten. Dazu sind die beiden Mittel, Ölbremse und Festhalten der Reglerhülse wohl geeignet, sie besitzen aber den großen Nachteil, daß sie bei eintretenden, großen und plötzlichen Belastungsschwankungen die Ursache zu großen, vorübergehenden Geschwindigkeitsschwankungen der Maschine werden. Das periodische Festhalten der Reglerhülse und die scharf angezogene Ölbremse verzögern die Bewegung des Reglers beträchtlich. Wird aber die zur Stellbewegung erforderliche Zeit groß, dann wächst auch der vorübergehende, augenblickliche Ungleichförmig-

keitsgrad: $\delta = \int_0^t \frac{1}{T} \cdot \frac{x}{s} \cdot dt$ stark an. Die Anwendung der beiden

besprochenen Dämpfungsmittel ist also nur ratsam, wenn im Betriebe große und plötzliche Belastungsänderungen nicht vorkommen, wenn die Maschine also entweder bei fast konstanter Belastung arbeitet, oder wenn die Belastungsänderungen nur ganz allmählich vor sich gehen. Wird hingegen verlangt, daß die Regulierung sowohl bei konstanter Belastung, als auch bei starken und plötzlichen Belastungsschwankungen vorzüglich arbeiten soll, dann müssen wir bestrebt sein, nur mit der gewöhnlichen Reibung in Verbindung mit dem richtigen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers auszukommen. Das ist wohl möglich, wenn wir alle für die Dämpfung günstigen Umstände genügend berücksichtigen. Gelingt uns dies, dann ist die gewöhnliche Reibung das beste Dämpfungsmittel.

Es ist gezeigt worden, daß die gewöhnliche Reibung nicht an sich dämpfend wirken kann, sondern immer nur in Verbindung mit einem gewissen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers. Von der Größe der vorhandenen Reibung wird nur ein bestimmter Teil zur Schwingungsdämpfung herangezogen, der bei gegebenen Abmessungen des Reglers und der Maschine nur von dem Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des ersteren abhängt. Will man die schwingungsdämpfende Wirkung der gewöhnlichen Reibung vergrößern, dann ist eben nicht der Reibungswiderstand, sondern der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des

Reglers zu vergrößern, wie die Erfahrung sehr bald gezeigt hat. Es fragt sich nun, wie groß der Wert δ_0 bei einem vorgelegten Regler zu wählen ist, damit eine genügende Schwingungsdämpfung nur durch die gewöhnliche Reibung erzielt werden kann. Man könnte ja im gegebenen Falle den erforderlichen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers durch Probieren ermitteln, indem man einfach mit δ_0 allmählich so hoch geht, daß ein Überregulieren nicht mehr eintritt; es ist jedoch von Interesse, schon vorher zu wissen, wie hoch wir etwa mit δ_0 kommen und ob wir mit der gewöhnlichen Reibung bei mäßig hohem Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers eine hinreichende Schwingungsdämpfung erzielen können. Ist der Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers nicht verstellbar, dann ist auch ein Probieren ausgeschlossen, und es ist in diesem Falle besonders erwünscht, den erforderlichen Ungleichförmigkeitsgrad zu ermitteln, damit wir einen passenden Regler mit entsprechendem Ungleichförmigkeitsgrad im voraus wählen können. Es soll deshalb im folgenden Paragraphen eine Berechnung des Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 gegeben werden.

§ 7. Berechnung des Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 .

Die analytische Beziehung für δ_0 könnten wir unter Annahme konstanter Reibung aus unseren Bewegungsgleichungen gewinnen. Soll der Regler bei der ersten Bewegungsumkehr die neue Beharrungsstellung gerade erreicht haben, also soll eine aperiodische Dämpfung eintreten, dann sind die Bedingungen zu erfüllen:

$$x=0 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt}=0. \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Aus der einen Bedingung ist die Zeit t zu rechnen und in die andere einzusetzen. Wir erhalten so eine Bedingungsgleichung für δ_0 , in welcher nur die Größen s_r und T vorkommen. Mit unseren Bewegungsgleichungen ist aber wenig anzufangen, da die Zeit t implizite enthalten ist. Wenn wir uns nicht auf Reihenentwicklung einlassen wollen, müssen wir auf die Verwendung unserer bisher benützten Differentialgleichung verzichten. Um zu einem brauchbaren Ergebnis zu gelangen, knüpfen wir an das im vorigen Paragraphen Seite 46 Gesagte an. Es war darauf hingewiesen worden, daß die Annahme momentaner und kontinuierlicher Wirkung der

Steuerung nicht richtig sei und daß wir der Wirklichkeit näher kommen, wenn wir während der Zeit der Stellbewegung des Reglers die mittlere Tangentialkraft der Maschine als unveränderlich ansehen. Die Regulierungskurve, welche in Fig. 9 als die Gerade CD angenommen worden ist, würde demnach eine zur Abscissenachse parallele Gerade werden. Diese neue Annahme ist freilich etwas zu ungünstig, weil z. B. in Kraftkurve (8) schon vor der neuen Beharrungsstellung des Reglers eine Füllungsänderung eintreten muß. Die Zeit der Stellbewegung ist etwa 0,35 sec., während die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Füllungen nur 0,25 Sekunden beträgt. Diese zu ungünstige Annahme kommt uns aber zu statten, denn wir können uns dadurch den Einfluß der schädlichen, zusätzlichen Reibung der Ruhe ausgeglichen denken, solange wir noch keine bessere Vorstellung über den Unterschied der Wirkung konstanter und gewöhnlicher Reibung gewonnen haben. Jedenfalls kann die folgende Rechnung, deren Richtigkeit wir durch Beispiele kontrollieren werden, nicht mehr weit von der Wirklichkeit abweichen.

Die Annahme einer Konstanten als Regulierungskurve vereinfacht unsere Differentialgleichung (13). Da $\frac{x}{s}$ konstant bleiben soll, nämlich gleich $\frac{x_0}{s}$, so können wir den Wert des Integrals (10) angeben. Wir erhalten:

$$\vartheta = -\frac{1}{s \cdot T} \int_0^t x \cdot dt = -\frac{x_0}{s \cdot T} \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Unsere Differentialgleichung (15) geht über in:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a \cdot \frac{dx}{dt} + b \cdot x_0 + 0 \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

wobei die Konstanten a und b ihre frühere Bedeutung haben. Die Integration der Differentialgleichung (60) ergibt, wenn zur Zeit $t=0$ sein soll $\frac{dx}{dt}=0$; $\frac{d^2x}{dt^2}=0$ und $x=x_0$, folgende, einfache Beziehungen:

$$x = x_0 \cdot \frac{b}{a} \cdot \left(t - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t \right) - x_0 \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

$$\frac{dx}{dt} = x_0 \frac{b}{a} \cdot (1 - \cos \sqrt{a} \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x_0 \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Die Beziehung (62) läßt erkennen, daß eine Bewegungsumkehr jetzt nicht mehr stattfindet. Die Geschwindigkeit kann ihr Vorzeichen nicht mehr wechseln, wohl aber kann sie den Wert null annehmen. Unter den in diesem Paragraph gemachten Voraussetzungen, daß die mittlere Tangentialkraft T_m bis zur Erreichung der neuen Beharrungsstellung konstant bleibt und daß auch der reduzierte Reibungswiderstand konstant ist, wollen wir für einen Ungleichförmigkeitsgrad von $\delta_0 = 3\%$ unseres Federreglers die Kraftkurve zeichnen und mit den bereits gefundenen vergleichen.

Kraftkurve (13). $\delta_0 = 3\%$ und $T_m = \text{const.}$

Die Werte der Konstanten sind:

$$a = 150 \quad b = 300 \quad x_0 = -20 \text{ mm} \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Wir erhalten die Bewegungsgleichungen:

$$x = 40 \cdot t - 3,264 \cdot \sin 12,25 \cdot t - 20 \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 490 \cdot \sin 12,25 \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

In derselben Weise wie früher soll der Bewegungszustand der Schwungkörper von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ sec. angegeben werden.

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
mm	x	-20,0	-19,1	-14,1	-6,4	-0,8	+0,6	+1,2
kg	P	+0,00	+0,92	+0,63	-0,49	-0,96	-0,17	+0,85

Vergleichen wir Kraftkurve (13) mit Kraftkurve (10), so sehen wir, daß durch die Annahme $T_m = \text{const.}$ die erste Welle der Kraftkurve (10) eine beträchtliche Verlängerung erfahren hat. Die ersten Hälften der beiden Kraftkurven (10) und (13) stimmen noch ziemlich gut mit einander überein. Wir haben früher durch Überlegung gefunden, daß Kraftkurve (10) noch nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmen kann, weil wir die „zusätzliche Reibung der Ruhe“ nicht

berücksichtigt haben. Ebenso wenig entspricht Kraftkurve (10) völlig der Wirklichkeit, wohl aber kann es mit der Länge der ersten Kraftwelle der Fall sein. Die Länge der ersten Kraftwelle ist es nun gerade, die uns an der ganzen Kraftkurve (13) interessiert, weil besagte Länge allein für die Brauchbarkeit eines Reglers in Betracht kommt. Soll unsere Regulierung aperiodisch werden, dann muß die neue Beharrungsstellung gerade erreicht sein, wenn die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ (62) zum ersten Male gleich Null geworden ist, oder die Länge der ersten Kraftwelle muß so groß sein, wie der Abstand der alten und neuen Beharrungsstellung von einander. Der Fall tritt ein, wenn:

$$\sqrt{a} \cdot t = 2\pi \text{ oder } t = \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \text{ ist} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Wir haben somit die analytische Bedingung:

$$x = 0 = x_0 \cdot \frac{b}{a} \cdot \left(t - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t \right) - x_0 \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

und wenn wir die Zeit t mit Hilfe der Bedingung (67) entfernen:

$$x_0 = x_0 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \text{ oder auch: } \frac{a^3}{b^2} = 4\pi^2 \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Durch Einführung der Werte (17) für a und b ergibt sich:

$$\delta_0^3 = 2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{s_r}{g \cdot T^2} \text{ oder schließlich: } \delta_0 = 2,7 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \quad (70)$$

Wir haben somit die Bedingung für den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers ermittelt, welche erfüllt werden muß, damit wir bei ausschließlicher Anwendung von gewöhnlicher Reibung als Dämpfungsmittel eine aperiodische Regulierung erhalten. Der Regler würde auch noch brauchbar sein, wenn wir den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 kleiner wählen, als Beziehung (70) angibt. Die untere Grenze der Brauchbarkeit ist offenbar die, bei welcher die erste Bewegungsumkehr des Reglers soweit jenseits der neuen Beharrungsstellung liegt, wie die alte Beharrungsstellung diesseits davon liegt. Der Fall wird ungefähr eintreten, wenn der Regler die neue Gleichgewichtslage mit der größten Schwingungsgeschwindigkeit oder, was dasselbe

ist, mit der Beschleunigung null erreicht. Aus Gleichung (61) und (63) erhalten wir die analytischen Bedingungen:

$$x = 0 = x_0 \cdot \frac{b}{a} \cdot \left(t - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t \right) - x_0 \quad . \quad . \quad (71)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 = x_0 \cdot \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Die Vereinigung der beiden Gleichungen (71) und (72) ergibt:

$$a \cdot \sqrt{a} = b \cdot \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Durch Einführung der Werte (17) für a und b ergibt sich weiter:

$$\delta_0^3 = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{s_r}{g \cdot T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Schließlich erhalten wir als untere Grenze des Ungleichförmigkeitsgrades:

$$\delta_0^u = 1,7 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Von Tolle, welcher ungefähr unter denselben Voraussetzungen rechnet, wie es hier geschehen ist, wurde der kleinste zulässige Ungleichförmigkeitsgrad ohne Anwendung einer Ölbremse niedriger angegeben, nämlich:

$$\delta_0^r = \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Die von Tolle annäherungsweise aufgestellte Beziehung (76) ergibt zu geringe Werte für δ_0 , während die Beziehung (75) zu hohe Werte ergibt. Der Unterschied der beiden Formeln (75) und (76) kommt daher, daß wir die „zusätzliche Reibung der Ruhe“ und den Zeitverlust durch die Steuerung zu stark in der Rechnung berücksichtigt haben, während diese beiden schwingungsvergrößernden Einflüsse in der Formel (76) gar nicht berücksichtigt worden sind. Für konstante Reibung, sowie für momentan und kontinuierlich wirkende Steuerung gilt indessen die Formel (76) sehr genau. Wir wollen uns durch Berechnung einer Kraftkurve davon überzeugen. Für unseren Federregler ergibt die Formel (75):

$$\delta_0^u = 1,7 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} = 1,7 \cdot \sqrt[3]{\frac{0,004}{9,81 \cdot 16,6^2}} = 1,95 \% \quad . \quad (77)$$

54 Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen.

also ungefähr 2%. Die Kraftkurve für $\delta_0 = 2\%$ haben wir schon unter Annahme konstanter Reibung gezeichnet (Fig. 8). Ist der Zeitverlust und die „zusätzliche Reibung der Ruhe“ nicht allzu groß, dann nehmen die Schwingungen des Reglers ab. Er ist brauchbar. Nach Beziehung (76) erhalten wir:

$$\delta_0 = \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} = \sqrt[3]{\frac{0,004}{9,81 \cdot 16,6^2}} = 1,14\% \quad . \quad . \quad (78)$$

Wenn wir die Kraftkurve (25) für diesen Ungleichförmigkeitsgrad berechnen, so wird sich zeigen, daß die Schwingungen des Reglers bei konstanter Reibung gerade noch stabil sind. Aber schon eine kleine zusätzliche Reibung der Ruhe muß bei $\delta_0 = 1,14\%$ die Schwingungen labil machen. Praktisch müssen wir also dem Regler einen etwas höheren Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 geben, als nach Formel (76) für noch zulässig erklärt wird. Jedenfalls müssen wir einen Koeffizienten zwischen 1,7 und 1,0 wählen, um eine praktisch brauchbare Formel zu erhalten. In Formel (70) ist der Koeffizient 2,7 auch etwas zu reichlich bemessen. Vorläufig wollen wir die Koeffizienten 2,7 und 1,7 in den Formeln (70) und (75) für δ_0^0 und δ_0^u als obere Grenze betrachten, bis wir weitere Anhaltspunkte zur Beurteilung des Einflusses der zusätzlichen Reibung der Ruhe und des Zeitverlustes durch die Steuerung gewonnen haben.

Kraftkurve (25) für $\delta_0 = 1,14\%$.

Wir haben die Konstanten:

$$a = 57 \quad b = 300 \quad x_0 = -20 \text{ mm} \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Nach Berechnung der Konstanten C_1, C_2, C_3 erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

$$x = -13,79 \cdot e^{-4,076 \cdot t} - e^{2,038 \cdot t} \cdot (6,21 \cdot \cos 47,8 \cdot t + 5,23 \cdot \sin 47,8 \cdot t) \quad (80)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -229,0 \cdot e^{-4,076 \cdot t} + e^{2,038 \cdot t} \cdot (229,0 \cdot \cos 47,8 \cdot t + 553,1 \cdot \sin 47,8 \cdot t) \quad (81)$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
mm	x	-20,0	-19,0	-13,0	-0,6	+13,4	+19,5	+9,75
kg	P	+0,00	+1,08	+1,39	+0,4	-1,59	-3,34	-3,20

Die Kraftkurve (25) ist nur im halben Maßstabe der anderen Kraftkurven gezeichnet worden.

Tolle hat noch eine Regel über die Größe des Unempfindlichkeitsgrades ε eines Reglers angegeben. Diese Regel, welche in den Taschenbüchern für Ingenieure allgemein Eingang gefunden hat, lautet:

„Der Unempfindlichkeitsgrad ε eines Reglers sollte bei Maschinen mit hin- und hergehender Bewegung nie geringer sein, als der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des zugehörigen Schwungrads, um ein unnötiges Zucken des Reglers innerhalb eines jeden Maschinenhubes zu vermeiden. Er darf ferner nicht kleiner sein, als der kleinste zulässige Ungleichförmigkeitsgrad δ_0^r (76) des Reglers. Es soll etwa sein: $\varepsilon = \frac{3}{4} \cdot \delta_0$.“ —

Nach unseren Anschauungen können wir ebenfalls von einem „mindestens erforderlichen Unempfindlichkeitsgrad“ reden, denn wir haben gesehen, daß der reibungslose Regler unbrauchbar ist. Zwar kann der Reibungswiderstand, welcher im Falle der aperiodischen Dämpfung jede Bewegungsumkehr zu verhindern hat, um so kleiner werden, je statischer der Regler ist, weil dann die Kraftwellen immer kleiner (kürzer) und die Kräfte P , unter deren Einfluß sich der Regler bewegt, immer kleiner werden; aber ein gewisser Reibungswiderstand muß unbedingt vorhanden sein. Die von Tolle angegebene Regel: $\varepsilon = \frac{3}{4} \delta_0$ ist offenbar nicht richtig. Nach derselben müßte der Unempfindlichkeitsgrad ε mit dem Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 zunehmen und im Grenzfalle sogar unendlich groß werden, während doch für einen unendlich statischen Regler der notwendige Reibungswiderstand nur unendlich klein zu sein braucht.

Wenn auch die Berechnung des „mindestens erforderlichen Unempfindlichkeitsgrades ε “ tatsächlich einen praktischen Wert nicht hat, so ist es doch von Interesse, etwas Näheres über die Größe des „mindestens erforderlichen Unempfindlichkeitsgrades“ zu erfahren; z. B. muß uns die Frage interessieren, ob praktisch die Empfindlichkeit einer Regulierung so weit getrieben werden kann, daß eine Schwingungsdämpfung durch die noch vorhandene, geringe Reibung allein nicht mehr einzutreten vermag. Offenbar ist dieser Fall recht wohl theoretisch möglich, und da gegenwärtig viele Patente auf Regler den Zweck verfolgen, die Eigenreibung gering zu halten, um den gesamten Unempfindlichkeitsgrad ε möglichst klein machen zu

können, so kann die aufgeworfene Frage nicht mehr als überflüssig angesehen werden. Wir wollen deshalb versuchen, eine analytische Beziehung für den „mindestens erforderlichen Unempfindlichkeitsgrad ε “ zu gewinnen.

§ 8. Der mindestens erforderliche Unempfindlichkeitsgrad ε .

Der reduzierte konstante Reibungswiderstand muß so groß sein, daß bei einer Bewegungsumkehr des Reglers potentielle Energie nicht mehr vorhanden sein kann. Ist das der Fall, dann wird bei aperiodischer Bewegung (70) eine Umkehr in der Stellbewegung des Reglers überhaupt nicht zu stande kommen. Ist aber der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers kleiner als Formel (70) angibt, dann müssen Schwingungen auftreten. Ist nun der reduzierte Reibungswiderstand gerade so groß wie die Kraft P bei der Bewegungsumkehr, dann tritt eine Pause in der Bewegung des Reglers nicht ein; ist aber die Kraft P kleiner als die Reibung, dann muß eine Bewegungspause eintreten, bis die Fliehkraft eine der äußeren W -Kurven erreicht hat. Die Größe der Bewegungspause kann nach Formel (47) berechnet werden. Es ist nicht nötig, daß zur Erzielung einer Schwingungsdämpfung alle potentielle Energie bei der Bewegungsumkehr durch die Reibung vernichtet wird; wir wollen es aber als wünschenswert hinstellen, daß auch bei großen Belastungsänderungen von etwa $\frac{1}{2}$ der Vollbelastung die Größe des reduzierten Reibungswiderstandes gerade noch hinreicht, um eine potentielle Energie nicht entstehen zu lassen. Die bisher gezeichneten Kraftkurven lehren uns, daß die Kraft P bei der ersten Bewegungsumkehr die in der betreffenden Kraftwelle größte Kraft ist. Wir wollen sie $P_{\max}$ nennen. Am Anfang und Ende jeder Kraftkurve sind die Kräfte P am größten, und zwar am Anfang ein wenig kleiner wie am Ende. Da nun die ersten Hälften der Kraftkurven (10) und (13) ziemlich gut miteinander übereinstimmen, d. h. derjenigen Kraftkurven, welche mit Hilfe der ursprünglichen Differentialgleichung (15) und der vereinfachten Differentialgleichung (60) gefunden worden sind, so können wir die einfachere Differentialgleichung (60) zur ungefähren Ermittlung von $P_{\max}$ sehr wohl verwenden. Es ist nach Gleichung (63) die Kraft P , unter deren Einfluß der Regler schwingt:

$$P = m_r \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m_r \cdot x_0 \cdot \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t. \quad (82)$$

Der größte Wert von P ergibt sich, wenn: $\sqrt{a} \cdot t = \frac{\pi}{2}$ ist. Also:

$$P_{\max} = m_r \cdot x_0 \cdot \frac{b}{\sqrt{a}}. \quad (83)$$

Der reduzierte doppelte Reibungswiderstand, welcher bei der Bewegungsumkehr in Frage kommt, lautet durch den Unempfindlichkeitsgrad ε des Reglers ausgedrückt:

$$2 \cdot W = 2 \cdot \varepsilon \cdot C_m = 2 \varepsilon \cdot \frac{A}{s}. \quad (84)$$

Aus (83) und (84) erhalten wir die Bedingungsleichung:

$$2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{A}{s} = m_r \cdot x_0 \cdot \frac{b}{\sqrt{a}}. \quad (85)$$

Führen wir für a und b ihre Werte (17) und für x_0 die Beziehung $\frac{s}{\mu_0}$ ein, so finden wir schließlich:

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu_0 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\delta_0^r}}. \quad (86)$$

Da nun immer noch fast dieselbe Schwingungsdämpfung eintritt, wenn der reduzierte Reibungswiderstand W ein Stückchen kleiner ist wie $P_{\max}$, so wollen wir in der Formel (86) 2 statt $\sqrt{2}$ setzen.

Bezeichnen wir ferner nach Beziehung (76) den Ausdruck $\sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}}$ mit δ_0^r , so hätten wir für den „mindestens erforderlichen Unempfindlichkeitsgrad ε “ die einfache Beziehung gefunden:

$$\varepsilon = \frac{1}{2 \mu_0} \cdot \delta_0^r \cdot \sqrt{\frac{\delta_0^r}{\partial_0}}. \quad (87)$$

Die Größe δ_0^r ist für jede Maschine mit Regler eine unveränderliche Größe, die man auch die „Regulierfähigkeit“ der Anlage nennen könnte (S. 33 und 34). Die Größe δ_0 ist hingegen als veränderlicher Wert zu betrachten; δ_0 ist der beliebig einstellbare Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers. Der Wert $\frac{1}{\mu_0}$ gibt die Größe der vorkommenden, größten Belastungsänderung der Maschine an. Es bedeutet

z. B. $\frac{1}{\mu_0} = \mp \frac{1}{4}$, daß der vierte Teil der größten Belastung der Maschine aus- oder eingerückt worden ist. Die Formel (87) sagt demnach aus, daß bei kleinen Belastungsänderungen auch wenig Reibung erforderlich ist. Bei konstanter Belastung dürfte der Unempfindlichkeitsgrad des Reglers null sein. Ferner besagt die Formel, daß wir den Regler um so empfindlicher machen können, je kleiner δ_0^r , d. h. je größer die Regulierfähigkeit der Maschine mit Regler ist. Wir wissen, daß große Regulierfähigkeit erreicht wird durch kleinen reduzierten Muffenhub s_r (16) des Reglers und durch großes Gewicht des Schwungrades der Maschine (vergl. Anlaufzeit T (2)). Außerdem wird ε um so kleiner, je größer δ_0 d. h. je stabiler der Regler ist, während für den astatischen Regler der Unempfindlichkeitsgrad ε unendlich groß werden müßte. Das Resultat kommt daher, daß wir bei Ableitung der Formel (87) konstante mittlere Umfangskraft T_m der Maschine bis zur ersten Bewegungsumkehr angenommen haben. Unter dieser Annahme kann aber der astatische Regler überhaupt nicht umkehren bzw. die Geschwindigkeit null annehmen. Die Wege x und die Kräfte P könnten immer nur in demselben Sinne anwachsen, deshalb ergibt für den Grenzfall die Formel (87) $\varepsilon = \infty$ bei $\delta_0 = 0$. Die Ableitung unserer Formel ging davon aus, daß alle potentielle Energie durch Reibung vernichtet werden und daß deshalb die Reibung der größten Kraft P gleich sein sollte. Beim astatischen Regler kann überhaupt keine potentielle Energie in unserem Sinne entstehen; die Gleichsetzung von $P_{\max}$ und $2W$ verliert somit ihre Bedeutung. Es ist wohl zu beachten, daß die Formel (87) nicht schlechthin angibt, bei welcher Größe von ε eine Schwingungsdämpfung eintritt, sondern daß die Formel einen Sinn erst erlangt, wenn durch konstante Reibung eine Dämpfung der Schwingungen überhaupt möglich ist. Sobald aber diese Möglichkeit besteht, gibt uns die Formel (87) den Wert von ε an, bei welchem unter allen Umständen die konstante Reibung hinreicht, um die Schwingungsdämpfung zu bewirken.

Wir wollen die bisher gefundenen Formeln für δ_0 und ε einmal auf unser Beispiel anwenden und auch auf eine Regulierung, die von Isaachsen ausgeführt und beobachtet worden ist. In unserem Beispiel war:

$$s_r = 0,004 \text{ m}; \quad T = 16,6 \text{ sec.}; \quad g = 9,81 \text{ m/sec.}^2.$$

Die numerische Berechnung ergibt:

$$j_0^r = \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} = 1,14 \% \text{ (Regulierfähigkeit der Anlage). } (88)$$

$$j_0^u = 1,7 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} = 1,95 \% \text{ (Regler gerade praktisch brauchbar). } (89)$$

(Fig. 8.)

$$j_0^0 = 2,7 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} = 3,1 \% \text{ (Aperiodische Regulierung). } (90)$$

(Fig. 7.)

$$\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot j_0^r \cdot \sqrt{\frac{j_0^r}{j_0^0}} = 0,17 \% \left(\text{Angenommen: } \frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{2} \right). \quad (91)$$

Sind die Belastungsschwankungen kleiner als die Hälfte der Vollbelastung, etwa nur $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$, dann würde bei aperiodischer Bewegung des Reglers etwa $\frac{1}{10} \%$ Unempfindlichkeitsgrad vollkommen genügen. Nach Tolle würde sich ergeben:

$$\varepsilon = \frac{3}{4} j_0^0 = 2,2 \% (92)$$

Bei dieser Höhe des Unempfindlichkeitsgrades ist aber eine gute Regulierung ausgeschlossen.

Man sieht, daß schon ziemlich kleine Unempfindlichkeitsgrade für die Schwingungsdämpfung genügen. Die Befürchtung ist überflüssig, daß die Regulierung einer Maschine einmal zu empfindlich werden und die zur Schwingungsdämpfung nötige Reibung fehlen könnte. Selbst noch kleinere Unempfindlichkeitsgrade als die oben angegebenen würden zur Schwingungsdämpfung genügen. Stellen wir uns vor, daß z. B. in Kraftkurve (7) die Reibung nicht genügen würde, um eine Bewegungsumkehr zu verhindern, so würde der Regler, weil noch etwas potentielle Energie vorhanden ist, ein klein wenig zurückschwingen und darauf wieder nach der neuen Gleichgewichtslage zu sich bewegen. Bei der nun folgenden viel kleineren Kraftwelle genügt aber die Reibung vollkommen, um keine potentielle Energie mehr entstehen zu lassen. Daß tatsächlich sehr kleine Unempfindlichkeitsgrade zur Schwingungsdämpfung genügen, wie sie ungefähr von uns berechnet worden sind, soll ein Fall be-

stätigen, der von Isaachsen beobachtet und in seiner Abhandlung angegeben worden ist. Isaachsen schreibt:

„Bei einer großen Dampfmaschinenmaschine tanzte der Regulator, welcher den rückdruckfreien Kolbenschieber eines Krafteinschalters verstellte, selbst bei kleineren Maschinenleistungen, wo der Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades zu weniger als $\frac{1}{4}\%$ berechnet worden war. Der Unempfindlichkeitsgrad des Stellzeuges mit Regulator war also kleiner als $\frac{1}{4}\%$. Da nun der Ungleichförmigkeitsgrad des Regulators ungefähr $3,5\%$ betrug, wäre nach der Formel von Tolle „der mindestens erforderliche Unempfindlichkeitsgrad“

$\varepsilon = \frac{3}{4} \cdot 3,5 = 2,75\%$. Der Regulator regulierte aber tatsächlich vorzüglich, sogar fast aperiodisch, und zwar ohne Ölbremse, auch beim plötzlichen Ausrücken von weit über 50% der Belastung. Eine Ölbremse wurde später angebracht, aber nur, um das Tanzen zu mäßigen und die durch dasselbe eventuell entstehenden Abnützungen zu vermeiden.“

Es sei zunächst bemerkt, daß Isaachsen den sehr geringen Unempfindlichkeitsgrad von weniger als $\frac{1}{4}\%$ durch besondere Konstruktionen eines Federreglers und eines Krafteinschalters erreicht hat. Beide Konstruktionen sind der Firma C. E. Rost & Co., Dresden, durch Patente geschützt. D.R.P. 90 824 (Federregler) und D.R.P. 91 416 (Krafteinschalter). Abgesehen von dem Tanzen des Reglers, auf das wir später zu sprechen kommen, liegen also die Verhältnisse ganz ähnlich wie bei unserer Kraftkurve (7) für $\delta_0 = 3\%$. Als Dämpfungsmittel ist nur gewöhnliche Reibung vorhanden, entsprechend einem Unempfindlichkeitsgrade von $\varepsilon = \frac{1}{4}\%$. Die geringe Reibung genügt allein und vollständig, um eine fast aperiodische Schwingungsdämpfung zu bewirken¹⁾. Nehmen wir an, daß die Regulierfähigkeit δ_0^r (88) der von Isaachsen beobachteten Maschinenanlage etwa ebenso groß war, wie die unseres Beispiels, so würde bei 50% Belastungsänderung die Größe des „mindestens erforderlichen Unempfindlichkeitsgrades ε “ betragen:

$$\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot \delta_0^r \cdot \sqrt{\frac{\delta_0^r}{\delta_0}} = \frac{1,14}{2 \cdot 2} \sqrt{\frac{1,14}{3,5}} = \frac{1}{6}\% \quad . \quad . \quad (93)$$

¹⁾ Von der günstigen schwingungsdämpfenden Wirkung der „Zusatzreibung der Bewegung“, welche im folgenden Paragraph behandelt wird, soll zunächst noch ganz abgesehen werden.

Der von Isaachsen beobachtete Fall ist also nach unseren Anschauungen und den hier abgeleiteten Formeln recht wohl möglich. Selbst bei noch kleineren Unempfindlichkeitsgraden als $\frac{1}{4}\%$ würde der Regler noch ebenso vorzüglich oder vielmehr noch besser reguliert haben. Praktisch dürfte aber wohl mit $\frac{1}{4}\%$ Unempfindlichkeitsgrad für Regler mit Stellzeug die obere Grenze der Empfindlichkeit schon ziemlich erreicht sein.

Isaachsen schreibt am Schlusse seiner Abhandlung, daß bei vielen in der Praxis stehenden Ingenieuren die Ansicht verbreitet und fest eingewurzelt sei, das sogenannte Überregulieren, welches sich in fortwährenden Schwingungen bei konstanter Maschinenleistung zeigt, käme von einem „zu empfindlichen“ Regulator. Wenn auch die von uns abgeleitete Beziehung (87) für „den mindestens erforderlichen Unempfindlichkeitsgrad ε “ einen besonderen Anspruch auf Genauigkeit nicht machen kann, so dürfte sie doch geeignet sein, unrichtige Vorstellungen über die Größe des „mindestens erforderlichen Unempfindlichkeitsgrades“ zu beseitigen. Der Leser wird im Laufe der Untersuchung gefunden haben, daß wir auf die zu Anfang ausführlich aufgezählten Voraussetzungen recht wohl eine Rechnung gründen können, welche praktischen Zwecken dienen kann und welche geeignet ist, recht hübsche Einblicke in die immerhin ziemlich verwickelten Vorgänge einer Regulierung zu gestatten. Besonders in der Anwendung auf empfindliche Regulierungen können wir der Rechnung eine gewisse praktische Brauchbarkeit und Genauigkeit nicht absprechen. Der folgende Paragraph soll dazu dienen, uns weiterhin zu überzeugen, daß die bereits gezeichneten und noch zu zeichnenden Kraftkurven von der Wirklichkeit nicht mehr weit entfernt sein können. Zuvor wollen wir noch einmal auf die Voraussetzung (5) § 4 zurückkommen, daß die Regulierungskurve durch die Gerade CD dargestellt werde (Fig. 9). Was wird geschehen, wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft? Unsere Rechnung gilt dann nur für den Teil der Regulierungskurve, welcher der Geraden CD parallel ist. Für die anderen Teile der Regulierungskurve wird der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers teils etwas zu hoch, teils etwas zu niedrig sein. Wenn δ_0 etwas zu reichlich bemessen ist, so kann das natürlich nichts schaden, wohl aber könnten in dem Teil der Regulierungskurve, für den δ_0 zu niedrig ist, die Reglerschwingungen ihre genügende Stabilität eingebüßt haben. Wir sind dann gezwungen, den Ungleichförmigkeits-

grad δ_0 des Reglers im ganzen etwas höher zu halten. Demnach liegen die Verhältnisse am günstigsten, wenn die Regulierungskurve nur wenig von der Geraden CD abweicht. Für praktische Zwecke wird es meist genügen, den Mittelweg einzuschlagen. Man wird den Regler nicht unnötig stabil machen, um z. B. für alle Belastungen der Maschine eine aperiodische Schwingungsdämpfung zu erhalten, sondern man wird für den einen Teil der Regulierungskurve ein geringes Überregulieren zulassen und dafür den Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers etwas niedriger halten. Kennt man den Verlauf der Regulierungskurve nicht genau, was oft der Fall sein wird, so bleibt nichts übrig, als die Gerade CD der Rechnung zu Grunde zu legen. Aus alledem folgt, daß der Ungleichförmigkeitsgrad eines Reglers, den wir für eine gute Regulierung verwenden wollen, in einfacher Weise verstellbar sein muß. Auch wenn Formeln für den Ungleichförmigkeitsgrad einen mehr oder weniger guten Anhalt zur Berechnung desselben bieten, so möchten wir doch die Möglichkeit haben, durch Probieren etwaige Mängel der Rechnung nachträglich zu beseitigen; denn die richtige Einstellung des Ungleichförmigkeitsgrades bedingt in erster Linie die Güte einer Regulierung.

§ 9. Die zusätzliche Reibung der Ruhe und der Bewegung.

Wir wollen es als Tatsache hinnehmen, daß der schwingungsdämpfende Einfluß eines sich mit der Geschwindigkeit vergrößernden, auf den Kurbelkreis reduzierten Widerstandes sehr wenig in Frage kommt, wenn wir es mit Regulierungen zu tun haben, an die hohe Ansprüche gestellt werden. Die Abhandlung von Isaachsen befaßt sich etwas eingehender mit den selbstregulierenden Eigenschaften der Kraftmaschinen. Es sei hier nur bemerkt, daß die meisten Widerstände, welche die Kraftmaschinen zu überwinden haben, mit der Geschwindigkeit wachsen. Es ist leicht einzusehen, daß ein mit der Geschwindigkeit zunehmender Widerstand schwingungsdämpfend wirken muß, daß hingegen ein mit der Geschwindigkeit abnehmender Widerstand die Schwungradschwingungen und somit die relativen Reglerschwingungen vergrößert. Wir können unmittelbar die in § 2 über relative Schwingungen angestellten Untersuchungen auf die relativen Schwingungen des Schwungrades gegen eine mit konstanter mittlerer Winkelgeschwindigkeit rotierende konzentrische Scheibe

anwenden. Nach der Auffassung, welche sich an die Darstellung der Bewegung des Reglers im Tolleschen Diagramm anschließt, können wir uns auch vorstellen, daß zu jeder eingetretenen plötzlichen großen Belastungsänderung während der Bewegung des Reglers noch weitere kleine Belastungsänderungen im gleichen oder entgegengesetzten Sinne hinzukommen, sodaß die den Beharrungszustand störende Ursache etwas vergrößert bzw. zum Teil wieder beseitigt wird. Diese kurze Erklärung ist natürlich unvollkommen; doch um Bekanntes nicht nochmals zu behandeln, sei dieser Punkt hiermit erledigt.

Von den 10 Voraussetzungen, die in § 4 gemacht wurden, haben jetzt alle ihre Besprechung gefunden bis auf den Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades, von dem auch bei der folgenden Betrachtung noch abgesehen werden soll. Es ist schon wiederholt darauf hingewiesen worden, daß die Reibung der Ruhe immer größer ist wie die Reibung der Bewegung, daß wir es also nicht mit einem konstanten Widerstand zu tun haben, wie bisher bei der Berechnung von Kraftkurven vorausgesetzt wurde. Ist $W = \varepsilon \cdot C_m$ die Reibung während der Bewegung des Reglers, so wird die Reibung der Ruhe größer sein, etwa:

$$W \cdot (1 + \alpha) = (1 + \alpha) \cdot \varepsilon \cdot C_m, \quad (94)$$

wobei $\alpha \cdot W$ der Betrag der zusätzlichen Reibung der Ruhe sein würde, um welchen bei Bewegungsbeginn die Reibung plötzlich sinkt und beim Aufhören der Bewegung plötzlich steigt. Berücksichtigen wir die zusätzliche Reibung der Ruhe in unserer Differentialgleichung (13), so würde einfach die konstante Kraft $\alpha \cdot W$ hinzuzufügen sein. Beim Differenzieren bekommen wir aber wieder die frühere Differentialgleichung (15). Nur die Konstanten C_1, C_2, C_3 des vollständigen Integrals (22) müssen andere Werte annehmen, entsprechend den veränderten Anfangsbedingungen, daß zur Zeit $t = 0$ sein soll:

$$x = x_0; \quad \frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} \cdot m_r = \pm \alpha \cdot W. \quad . (95)$$

Das positive Vorzeichen der bei Bewegungsbeginn wirkenden konstanten Kraft gilt für den Aufwärtsgang des Reglers, das negative Vorzeichen für den Abwärtsgang. Bezeichnen wir die Anfangsbeschleunigung mit p_0 , also:

$$p_0 = \frac{\alpha \cdot W}{m_r} = \frac{\alpha \cdot \varepsilon \cdot C_m}{m_r}, \quad (96)$$

so nehmen die Konstanten C_1 , C_2 , C_3 für den Aufwärtsgang (Entlastung der Maschine) folgende Werte an:

$$C_1 = \frac{x_0 \cdot (p^2 + q^2) + p_0}{9 p^2 + q^2}; \quad C_2 = \frac{x_0 \cdot 8 p^2 - p_0}{9 p^2 + q^2};$$

$$C_3 = \frac{x_0 [2 q^2 - 6 p^2] - 3 p_0}{9 p^2 + q^2} \cdot \frac{p}{q}. \quad (97)$$

Über die Größe α muß nun eine Annahme gemacht werden, wenn wir zur Berechnung und Zeichnung von Kraftkurven verschreiten wollen. Da die folgenden Betrachtungen nur den Zweck haben, zu zeigen, daß der Einfluß der zusätzlichen Reibung der Ruhe auf die Stabilität der Reglerschwingungen sehr gering ist, so kommt es bei der Wahl eines Wertes für α nur darauf an, daß wir die zusätzliche Reibung der Ruhe nicht zu gering annehmen. In der „Hütte“ (1899) findet sich für die Reibungskoeffizienten der Ruhe (μ_0) bzw. der Bewegung (μ) für Gußeisen auf Gußeisen oder Bronze angegeben:

$$\mu = 0,15 \quad \mu_0 = 0,16 \text{ (wenig gefettet)} . . . (98)$$

$$\mu = 0,18 \quad \mu_0 = 0,19 \text{ (trocken)}. (99)$$

Diesen Zahlen würden die Werte

$$\alpha = \frac{1}{15} \text{ bzw. } \alpha = \frac{1}{18} (100)$$

entsprechen.

Speziell für Regler mit Kegelpendel dürfte der Wert von α etwas höher anzunehmen sein, da in den Gelenken des Reglers ein gewisses Festklemmen eintreten muß (vergl. § 1 Seite 13). Wird der Regler in seiner Drehbewegung um die Spindel beschleunigt, dann sucht die Trägheitskraft des Schwungkörpers diesen aus der Pendelebene herauszuziehen. Das geht natürlich nur soweit, als die elastischen Kräfte der zwangsläufigen Führung des Pendels in der Pendelebene es gestatten. Im Drehpunkte des Pendels müssen Drücke und Reibungen hinzukommen. Freilich müssen wir wohl beachten, daß die durch die Winkelbeschleunigung $\frac{d\omega}{dt}$ im Drehpunkt M entstehende Reibung, die wir „klemmende Reibung“ nennen wollen, zwar allmählich verschwindet, je näher der Schwungkörper G an seine neue

Beharrungsstellung gelangt; dafür entsteht aber bei der Bewegung des Pendels eine andere, „klemmende Reibung“, welche durch die Coriolisbeschleunigung $2v \cdot \omega_r$ (Fig. 12) entsteht. Man hat bei dem Kegelpendel bekanntlich drei verschiedene Trägheitskräfte zu unterscheiden. Betrachten wir die relativen Pendelschwingungen des Reglers als absolute Schwingungen, dann müssen wir, um das Trägheitsgesetz und die dynamische Grundgleichung zu erfüllen, zwei scheinbare oder Zusatzkräfte anbringen. Wenn das Pendel nicht schwingt, dann haben wir nur eine Zusatzkraft, die bekannte Fliehkraft: $m_r \cdot r_m \cdot \omega_r^2$; führt aber das Schwinggewicht G eine Relativbewegung mit der relativen Geschwindigkeit v aus, dann tritt noch eine zweite scheinbare Kraft hinzu, die nach Coriolis benannt ist,

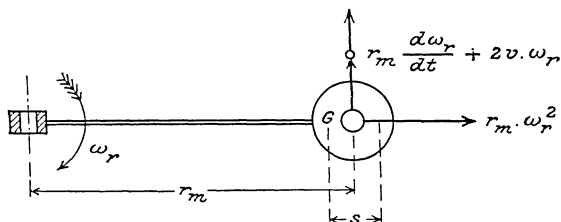


Fig. 12.

nämlich: $2 m_r \cdot \omega_r \cdot v$. Während nun bei andauernden Schwingungen des Reglers die Winkelbeschleunigung $\frac{d\omega_r}{dt}$ in dem Augenblicke null wird, in welchem das Pendel die Beharrungsstellung durchschreitet, erreicht die Coriolisbeschleunigung $2 \omega_r \cdot v$ gerade dann ihren größten Wert. Demnach nimmt auch die „klemmende Reibung“ durch die Coriolisbeschleunigung zu; die „klemmende Reibung“ durch die Winkelbeschleunigung nimmt ab. Es ist offenbar die Möglichkeit vorhanden, daß durch Überwiegen der „klemmenden Reibung“ durch Coriolisbeschleunigung die gesamte veränderliche reduzierte Reibung den Charakter nicht nur eines konstanten, sondern sogar eines mit der Geschwindigkeit zunehmenden Widerstandes erlangen kann. Die Möglichkeit ist um so größer, je schneller der Regler schwingt (großes v) und je kleiner die durch Fliehkraft und Stellzeugwiderstand erzeugte Reibung ist, also bei empfindlichen Federreglern. Jedenfalls ist beim Kegelpendel immer ein mit der Geschwindigkeit zunehmender Widerstand gegen die Reglerschwingungen vorhanden,

welcher von der Coriolisbeschleunigung $2\omega_r \cdot v$ herrührt. Die Coriolisbeschleunigung bzw. Kraft ist der Schwingungsgeschwindigkeit v des Pendels proportional, also muß es auch die erzeugte „klemmende Reibung“ sein. Es soll noch einmal kurz zusammengefaßt werden, was wir eben gefunden haben.

„Beim Pendelregler¹⁾ entstehen außer der durch das Gewicht des Pendels und die Fliehkraft C_m erzeugten Reibung zwei weitere Zusatzreibungen, welche wir „klemmende Reibungen“ nennen. Die „klemmende Reibung“ durch die Winkelbeschleunigung des Reglers nimmt proportional dem Ausschlag x aus der Beharrungsstellung zu, während die „klemmende Reibung“ durch die Coriolisbeschleunigung einen mit der Geschwindigkeit zunehmenden Widerstand darstellt.“

Es sei nun bemerkt, daß das Verhältnis der beiden Zusatzreibungen sehr zu Gunsten der Regulierung ausfällt. Wir wollen für die beiden Trägheitskräfte, welche die beiden Zusatzreibungen der Bewegung verursachen, die Bezeichnungen P_B und P_C einführen.

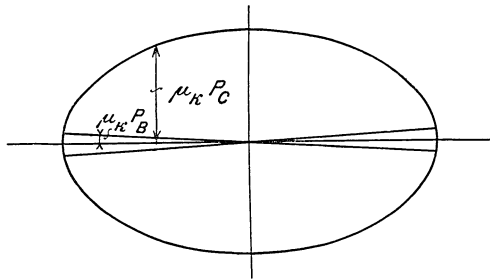


Fig. 13.

Es sei P_B die Trägheitskraft, welche der Winkelbeschleunigung der rotierenden Reglerspindel entspricht. Weil diese Trägheitskraft bei den „Beharrungsreglern“ zur Stellzeugbewegung mit benutzt wird, wollen wir sie „Beharrungskraft“ nennen. P_C sei die der Coriolisbeschleunigung entsprechende Trägheitskraft, und weil diese die Zusatzkraft ist, welche bei der Relativbewegung in einem rotierenden

¹⁾ Sowohl Kegelpendel als Flachregler.

Raume außer der besser bekannten Fliehkraft noch anzubringen ist, wollen wir sie schlechthin „Zusatzkraft“ nennen. Unter Beibehaltung der bisher gebrauchten Bezeichnungen können wir die Werte der beiden Trägheitskräfte leicht angeben. Es ist die „Beharrungskraft“:

$$P_B = m_r \cdot \frac{d\omega_r}{dt} \cdot r_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94a)$$

oder da die Winkelbeschleunigung $\frac{d\omega}{dt}$ den Wert $\frac{n_r \cdot \pi}{30} \cdot \frac{x}{T \cdot s}$ besitzt, worin n_r die minutliche Umdrehungszahl der Reglerspindel war, so können wir auch schreiben, wenn $\frac{n_r \cdot \pi}{30} = \omega_r$ gesetzt wird:

$$P_B = \frac{m_r \cdot x_0 \cdot \omega_r}{T \cdot s} \cdot r_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95a)$$

Die „Zusatzkraft“ besitzt den Wert:

$$P_C = 2 \cdot m_r \cdot \omega_r \cdot v_{\max} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96a)$$

Das Verhältnis der beiden Trägheitskräfte, welches auch das Verhältnis der durch sie erzeugten „klemmenden Zusatzreibungen“ der Bewegung ist, lautet:

$$\frac{P_C}{P_B} = \frac{2 \cdot v_{\max} \cdot s}{x_0 \cdot r_m} \cdot T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97a)$$

Unter $v_{\max}$ ist die größte Schwingungsgeschwindigkeit des Schwungkörpers zu verstehen, wenn die Schwingungsweite $2x_0$ bzw. die Belastungsänderung, welche die Schwingung hervorruft, $\frac{1}{\mu_0}$ ist. Den

Wert von $v_{\max}$ können wir am einfachsten aus den von uns gezeichneten Kraftkurven entnehmen. Die vom Schwungkörper in jeder $\frac{1}{10}$ Sekunde zurückgelegten Wege haben wir durch kleine Kreise begrenzt, also stellt die 10 mal so große Strecke die Geschwindigkeit dar. Wir finden z. B. in Kraftkurve (25) für den Federregler bei $\delta_0 = 1,14\%$:

$$v_{\max} = 0,130 \text{ m} \quad (\text{sehr groß, da } \delta_0 \text{ sehr klein}) \quad . \quad (98a)$$

Bei Gewichtsreglern wird die Stellbewegung des Reglers durch die Trägheitskräfte der großen zu bewegend Massen beträchtlich ver-

zögert. Wir finden deshalb aus Kraftkurve (16) für einen noch zu besprechenden Gewichtsregler bei $\delta_0 = 3\%$ nur:

$$v_{\max} = 0,03 \text{ m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99a)$$

Bei einer Schwingungsweite, welche durch einen Belastungswechsel von $\frac{1}{2}$ der Vollbelastung hervorgerufen wird, besitzen die Trägheitskräfte (95a) und (96a) für unseren Federregler den numerischen Wert:

$$P_C = 2 \cdot 2 \cdot 0,130 \cdot \frac{\pi \cdot 300}{30} = 16,36 \text{ kg} \quad . \quad . \quad (100a)$$

Die Größe der Beharrungskraft ist beträchtlich kleiner, nämlich:

$$P_B = \frac{2 \cdot 300 \cdot \pi \cdot 0,2}{2 \cdot 16,6 \cdot 30} = 0,38 \text{ kg} \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Das Verhältnis der „klemmenden Zusatzreibungen“ ist:

$$\frac{P_C}{P_B} = \frac{16,36}{0,38} = 43,0 \quad (\text{zu groß für normale Verhältn.}) \quad (102)$$

Für den Gewichtsregler ergibt die numerische Rechnung:

$$P_C = 3,78 \text{ kg} \quad P_B = 0,38 \text{ kg} \quad \frac{P_C}{P_B} = 10,0 \quad (103)$$

Bei Gewichtsreglern wird die von uns berechnete Beharrungskraft (95) zu klein, weil ja die Gewichtsbelastung, die zwar in der Nähe der Reglerspindel angebracht wird, auch Beharrungskräfte erzeugt. Es wird deshalb P_B größer als (103) berechnet worden ist. Trotzdem wird stets die „Zusatzkraft“ P_C mehrere Male größer werden, als die „Beharrungskraft“ P_B . Die Formeln (94) bis (97) gelten nur für reine Federregler, bei welchen alle anderen Massen gegen die Schwunggewichtsmassen vernachlässigt werden können.

Das ungefähre Verhältnis der „Zusatzkraft“ P_C zur Beharrungskraft P_B läßt sich noch auf andere Weise durch folgende kleine Überschlagsrechnung ermitteln.

Da beide Kräfte P_C und P_B in derselben Richtung wirken und genau dieselben Wege zurücklegen, so ist das Verhältnis der Arbeiten beider Kräfte auch gleich dem Verhältnis der Kräfte selbst. Nun ist aber nach § 3 die Arbeit der Zusatz-(Coriolis-)Kraft: $2 A = 2 C_m \cdot s = 2 \cdot m_r \cdot r_m \cdot \omega^2 \cdot s$. Die Arbeit der Beharrungskraft

ist nur: $d \left(\frac{1}{2} m_r \cdot r_m^2 \cdot \omega^2 \right) = m_r \cdot r_m^2 \cdot \omega^2 \cdot \delta_0$, wenn wir die Schwingungsweite des Pendels beispielweise zu s annehmen. Das Verhältnis der Arbeiten der Kräfte P_C und P_B bzw. der Kräfte selbst ist demnach:

$$\frac{P_C}{P_B} = \frac{2 m_r \cdot r_m \cdot \omega^2 \cdot s}{m_r \cdot r_m^2 \cdot \omega^2 \cdot \delta_0} = \frac{2 \cdot s}{r_m \cdot \delta_0} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (103a)$$

Nehmen wir ferner an, daß das Verhältnis $\frac{s}{r_m}$, wie in unserem Beispiel (Fig. 11), durchschnittlich den Wert $\frac{1}{5}$ und der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 den Wert 0,03 besitzt, so ist nach (103a):

$$\frac{P_C}{P_B} = \frac{2 \cdot 1}{0,03 \cdot 5} = 13,3 \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (103b)$$

Bei reinen Federreglern ist das Verhältnis $\frac{P_C}{P_B}$ sicher größer, während es bei reinen Gewichtsreglern mit großem Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 kleiner sein wird, wie soeben nach (103b) berechnet worden ist. Jedenfalls ist soviel klar, daß immer die Zusatzkraft P_C ganz beträchtlich größer ist, wie die Beharrungskraft P_B , da nach der letzten Überslagsrechnung die erstere Kraft während einer Schwingung viel größere Arbeitsleistungen zu liefern hat, wie die letztere, die Wege beider Kräfte aber gleich sind.

Wir können daher besonders bei Federreglern die durch die „Beharrungskraft“ erzeugte „klemmende Zusatzreibung“ gegenüber der durch die „Zusatzkraft“ erzeugten „klemmenden Zusatzreibung der Bewegung“ vernachlässigen (Fig. 13) oder mit anderen Worten:

„Die klemmende Zusatzreibung der Bewegung ist fast ausschließlich ein mit der Schwingungsgeschwindigkeit v des Pendels sich ändernder Widerstand.“

Die Zusatzreibung der Bewegung beeinträchtigt demnach die Empfindlichkeit eines Reglers fast gar nicht, denn bei Bewegungsbeginn ist sie fast null. Sie wirkt genau wie ein Flüssigkeitswiderstand, nur ohne schädliche Nebenwirkung, wie bei der Ölbremse. Eine Vergrößerung der bewegten Massen findet nicht statt, eine Vergrößerung des Unempfindlichkeitsgrades nur in ganz geringem Maße. Die Zusatzreibung der Bewegung ist nicht unbeträchtlich, wie die angestellte Rechnung (100a) gezeigt hat. Eine Anzahl Patente zielen darauf hin, die Zusatzreibung der Bewegung zu verringern. Diese Bestrebungen sind nicht nur zwecklos, sondern verschlechtern

sogar die Regulierung. Den durch die Zusatzkraft P_G hervorgerufenen, geradezu idealen schwingungsdämpfenden Widerstand sucht man zu beseitigen und nimmt dann event. seine Zuflucht zu dem viel weniger idealen Widerstand der Ölbremse. Glücklicherweise gelingen obige, verfehlte Bestrebungen nur in sehr bescheidenem Maße, sodaß auch in den betreffenden patentierten Konstruktionen die günstige, schwingungsdämpfende Zusatzreibung der Bewegung zum größten Teil erhalten bleibt.

Nach dieser Erörterung über die Zusatzreibung der Bewegung wollen wir zur Zusatzreibung der Ruhe zurückkehren. Wir machen die sicher zu reichlich bemessene Annahme:

$$\alpha = \frac{1}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Es würde dann z. B. die „Zusatzreibung der Ruhe“ bei $\varepsilon = 6\%$ unseres Federreglers betragen (94):

$$\alpha \cdot W = \alpha \cdot \varepsilon \cdot C_m = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{100} \cdot 200 = 2 \text{ kg} \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

Bei einem gesamten Unempfindlichkeitsgrad von nur $\varepsilon = 3\%$ wäre die Zusatzreibung der Ruhe:

$$\alpha \cdot W = 1 \text{ kg} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

Auch den Zeitverlust durch die Steuerung wollen wir wieder berücksichtigen. Kraftkurve (1) bis (5) sollte die Abänderung der Kraftkurve eines reibungslosen Reglers durch gewöhnliche Reibung und durch Zeitverlust infolge Unvollkommenheit der Steuerung darstellen. Kraftkurve (1) stellt die Bewegung eines reibungslosen Reglers bei idealer Steuerung dar. Bei Kraftkurve (2) wurde ein genau konstanter, reduzierter Widerstand berücksichtigt, in Kraftkurve (3) außerdem ein Zeitverlust durch die Steuerung. Wir wollten uns vorstellen, daß die mittlere Umfangskraft T_m der Maschine während des Verlaufs einer Kraftwelle konstant bleibt und erst am Ende einer Kraftwelle, entsprechend der augenblicklichen Stellung, plötzlich einen anderen Wert annimmt, der nun wieder während des Verlaufs der nächsten Kraftwelle unveränderlich bleibt. Die Berechnung der Kraftkurven (1) und (2) war bereits gegeben worden; die Berechnung der Kraftkurve (3) soll jetzt erfolgen.

Kraftkurve (3).

Es ist:

$$a = 300 \quad b = 300 \quad x_0 = -20 \text{ mm}$$

Die Gleichungen (61) und (63) lauten:

$$x = -1,154 \cdot \sin 17,32 \cdot t + 20 \cdot t - 20 \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +346 \cdot \sin 17,32 \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

1. Kraftwelle.

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
mm	x	-20,0	-19,2	-15,6	-13,0	-12,7
kg	P	+0,00	+0,68	-0,22	-0,71	+0,42

2. Kraftwelle.

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
mm	x	-12,8	-12,3	-10,0	-8,3	-8,1
kg	P	+0,00	+0,44	-0,14	-0,46	+0,27

3. Kraftwelle.

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
mm	x	-8,2	-7,9	-6,4	-5,3	-5,2
kg	P	+0,00	+0,28	-0,09	-0,29	+0,17

Die Kraftkurve (3) zeigt, daß die einzelnen Kraftwellen einander ähnlich sind. Der Regler nähert sich immer noch asymptotisch der neuen Beharrungsstellung. Das wird anders, sobald wir eine „zusätzliche Reibung der Ruhe“ hinzunehmen, wie es in Kraftkurve (4) und (5) geschehen ist. In Kraftkurve (4) ist noch angenommen, daß die Steuerung momentan und kontinuierlich wirkt; in Kraftkurve (5) ist jedoch der Zeitverlust in derselben Weise wie in Kraftkurve (3) berücksichtigt worden.

Kraftkurve (4).

Es ist wieder:

$$a = 300 \quad b = 300 \quad x_0 = -20 \text{ mm.}$$

72 Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen.

Die Konstanten sind jetzt nach Beziehung (97) zu berechnen. Nehmen wir nach (106) die zusätzliche Reibung der Ruhe zu $\alpha \cdot W = 1$ kg an, dann ist nach Formel (96):

$$p_0 = 500 \text{ mm/sec}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

und die Berechnung der Konstanten C_1, C_2, C_3 ergibt:

$$C_1 = -18,25 \quad C_2 = -1,75 \quad C_3 = -1,085 \quad . \quad (110)$$

Schließlich lauten die Bewegungsgleichungen für die

1. Kraftwelle.

$$x = -18,25 \cdot e^{-1,0 \cdot t} - e^{0,5 \cdot t} \cdot (1,75 \cdot \cos 17,5 \cdot t + 1,085 \cdot \sin 17,5 \cdot t) \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & -18,25 \cdot e^{-1,0 \cdot t} + e^{0,5 \cdot t} \cdot (518,25 \cdot \cos 17,5 \cdot t \\ & + 363 \cdot \sin 17,5 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112) \end{aligned}$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
mm	x	-20,0	-17,3	-12,9	-13,6	-14,8
kg	P	+1,00	+0,50	-1,39	-0,06	+1,50

Für die zweite Kraftwelle müssen wir von neuem die Konstanten C_1, C_2, C_3 berechnen, denn es haben sich die Anfangsbedingungen geändert, wenn nach der ersten Bewegungspause die Bewegung von neuem beginnt. Zählen wir die Zeit bei der 2. Kraftwelle wieder von null an, so muß zur Zeit $t=0$ sein:

$$x_0 = -12,8 \text{ mm} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \frac{d^2x}{dt^2} = p_0 = 500 \quad . \quad (113)$$

Den Wert von x_0 greifen wir auf der Zeichnung der 1. Kraftwelle ab. Die Bewegungsgleichungen der 2. Kraftwelle lauten:

$$x = -11,1 \cdot e^{-1,0 \cdot t} - e^{0,5 \cdot t} \cdot (1,7 \cdot \cos 17,5 \cdot t + 0,585 \cdot \sin 17,5 \cdot t) \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & -11,1 \cdot e^{-1,0 \cdot t} + e^{0,5 \cdot t} \cdot (511,1 \cdot \cos 17,5 \cdot t \\ & + 208,9 \cdot \sin 17,5 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115) \end{aligned}$$

2. Kraftwelle.

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
mm	x	-12,8	-10,4	-7,1	-8,7	-
kg	P	+1,00	+0,20	-1,23	+0,01	-

In derselben Weise ist auch die Berechnung der 3. und 4. Kraftwelle vorgenommen worden.

3. Kraftwelle.

sec.	t	0,0	0,1	0,2
mm	x	- 7,1	- 4,8	- 2,7
kg	P	+ 1,00	+ 0,01	- 1,03

4. Kraftwelle.

sec.	t	0,0	0,1	0,2
mm	x	- 2,6	- 0,45	+ 0,9
kg	P	+ 1,00	- 0,14	- 0,99

Mit der 4. Kraftwelle sind wir in den Grenzbezirk der kleinen Schwingungen gelangt. Die Schwingungen können nicht aufhören. Nur durch Zufall kann der Regler genau in seine neue Beharrungsstellung gelangen und dort stehen bleiben; aber ebenso gut kann ein anderer Zufall, z. B. eine kleine Erschütterung, ihn wieder aus der Gleichgewichtslage herausbringen. Die Schwingungen, welche freilich innerhalb gewisser Grenzen bleiben müssen, beginnen wieder. Der Regler kann niemals vollständig zur Ruhe kommen, auch wenn die Belastung genau konstant bleibt.

Kraftkurve (5) soll zeigen, wie der durch die Steuerung verursachte Zeitverlust die einzelnen Kraftwellen der Kraftkurve (4) etwas verlängert. Entsprechend den veränderten Anfangsbedingungen, daß zur Zeit $t=0$ sein muß:

$$x = x_0 \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \frac{d^2x}{dt^2} = p_0$$

gehen die Bewegungsgleichungen (61) und (63) über in:

$$x = -\frac{1}{a \cdot \sqrt{a}} \cdot (p_0 \cdot \sqrt{a} \cdot \cos \sqrt{a} \cdot t - b \cdot x_0 \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t) + \frac{x_0}{a} \cdot (a - b \cdot t) + \frac{p_0}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot (p_0 \cdot \sqrt{a} \cdot \cos \sqrt{a} \cdot t - b \cdot x_0 \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Nach diesen Gleichungen ist Kraftkurve (5) berechnet.

Kraftkurve (5).

Es ist:

$$a = 300 \quad b = 300 \quad x_0 = -20 \text{ mm} \quad p_0 = 500 \text{ mm/s}^2$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen (116) und (117) ein, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen der 1. Kraftwelle.

74 Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen.

$$x = -1,666 \cdot \cos 17,32 \cdot t - 1,154 \cdot \sin 17,32 \cdot t + 20 \cdot t - 18,334 \quad (118)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 500 \cdot \cos 17,32 \cdot t + 346 \cdot \sin 17,32 \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

1. Kraftwelle.

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3
mm	x	-20,0	-17,2	-12,4	-12,1
kg	P	+1,00	+0,52	-1,17	-0,14

Die Bewegungsgleichungen für die 2. Kraftwelle werden gefunden, wenn wir in die Gl. (116) und (117) statt $x_0 = -20$ mm jetzt $x_0 = -12$ mm einführen. Das x_0 für die 2. Kraftwelle ist der Zeichnung zu entnehmen. Die Zeit wird wieder von Bewegungsbeginn an gezählt. Ebenso ist die 3. und 4. Kraftwelle zu berechnen.

2. Kraftwelle.

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3
mm	x	-12,0	-9,56	-6,15	-6,91
kg	P	+1,00	+0,25	-1,08	+0,04

3. Kraftwelle.

sec.	t	0,0	0,1	0,2
mm	x	-6,0	-3,64	-1,45
kg	P	+1,00	+0,04	-1,01

4. Kraftwelle.

sec.	t	0,0	0,1	0,2
mm	x	-0,65	+1,31	+3,73
kg	P	+1,00	-0,14	-0,94

Die gezeichneten Kraftkurven (1) bis (5) bedürfen im einzelnen weiter keiner Erklärung. Man erkennt sofort den schon beschriebenen, charakteristischen Einfluß der zusätzlichen Reibung der Ruhe.

So sehr verschieden im Vergleich zu dem Regler mit konstanter Reibung der erreichbare Endzustand beim Vorhandensein zusätzlicher Reibung der Ruhe ist, so gering ist deren Einfluß auf den ersten Teil der Stellbewegung, auf die großen Schwingungen. Die erste Kraftwelle, deren Verlauf über die Brauchbarkeit eines Reglers entscheidet, wird selbst durch so bedeutende „zusätzliche Reibung der Ruhe“, wie sie in Wirklichkeit offenbar nicht vorkommt, nur wenig verlängert. Die bereits gezeichneten und noch zu zeichnenden Kraftkurven unter Berücksichtigung sehr starker zusätzlicher Reibung

der Ruhe beweisen, daß für die Stabilität der großen Schwingungen die „zusätzliche Reibung der Ruhe“ ganz wenig in Rechnung zu ziehen ist. Man ist geneigt, den schädlichen, schwingungsvergrößern- den Einfluß der zusätzlichen Reibung der Ruhe zu überschätzen; ebenso ist man geneigt, den günstigen, schwingungsdämpfenden Ein- fluß der Ölbremse zu hoch anzuschlagen. Kraftkurve (4) und (5) zeigen, daß die Annäherung an die neue Beharrungsstellung selbst bei starker zusätzlicher Reibung der Ruhe zunächst nur wenig von der asymptotischen Annäherung bei konstanter Reibung abweicht. Die ersten 3 Wellen der Kraftkurven (4) und (5) sind nur wenig länger wie die der Kraftkurven (2) und (3). Die geringe Verlänge- rung der ersten Kraftwellen hat darin ihren Grund, daß infolge der Anfangsbeschleunigung p_0 die Bewegung schneller vor sich geht. Daher wird der Einfluß der „Triebkraft durch falsche Geschwindig- keit“ verringert. Je größer die Anfangsbeschleunigung p_0 ist, desto mehr nähert sich die Bewegung der reinen Sinusschwingung, desto geringer werden die Fliehkraftänderungen während der Bewegung. Bei der Ölbremse ist das Gegenteil der Fall. Infolge der durch sie hervorgerufenen Bewegungsverzögerung werden die Fliehkraftände- rungen während der Bewegung größer wie beim Regler mit kon- stanter oder gewöhnlicher Reibung; dafür erzeugt die gewöhnliche Reibung einen Unempfindlichkeitsgrad, während ein reiner Flüssig- keitswiderstand die Empfindlichkeit des Reglers nicht beeinträchtigt.

Wir wollen noch für einen Ungleichförmigkeitsgrad von $\delta_0 = 3\%$ die Kraftkurve unseres Federreglers unter Berücksichtigung der zu- sätzlichen Reibung der Ruhe berechnen.

Kraftkurve (II).

Wir wollen annehmen (106), es sei:

$$\alpha \cdot W = 1 \text{ kg} \qquad p_0 = 500 \text{ mm/sec}^2.$$

Für $\delta_0 = 3\%$ sind die Konstanten a und b.

$$a = 150 \qquad b = 300.$$

Die Konstanten C_1 , C_2 , C_3 berechnen sich nach Formel (97) zu:

$$C_1 = -15,95 \qquad C_2 = -4,05 \qquad C_3 = -2,205.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten schließlich:

76 Verhalten der Regulierung bei großen Belastungsänderungen.

$$x = -15,95 \cdot e^{-1,95 \cdot t} + e^{0,975 \cdot t} \cdot (4,5 \cdot \cos 12,38 \cdot t + 2,205 \cdot \sin 12,38 \cdot t) \quad (120)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -60,7 \cdot e^{-1,95 \cdot t} + e^{0,975 \cdot t} \cdot (560,7 \cdot \cos 12,38 \cdot t + 434 \cdot \sin 12,38 \cdot t) \quad (121)$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
mm	x	-20,0	-17,0	-8,6	-2,7	-5,5
kg	P	+1,0	+1,2	-0,51	-1,96	-0,9

Auch für eine ganz außerordentlich große Zusatzreibung der Ruhe wollen wir die Kraftkurve des Federreglers bei $\delta_0 = 3\%$ zeichnen.

Kraftkurve (12).

Es sei:

$$\alpha \cdot W = 2 \text{ kg}$$

$$p_0 = 1000 \text{ mm/sec}^2.$$

Die Bewegungsgleichungen heißen:

$$x_0 = -12,85 \cdot e^{-1,95 \cdot t} - e^{0,975 \cdot t} \cdot (7,15 \cdot \cos 12,38 \cdot t + 1,47 \cdot \sin 12,38 \cdot t) \quad (122)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -49,00 \cdot e^{-1,95 \cdot t} + e^{0,975 \cdot t} \cdot (1049 \cdot \cos 12,38 \cdot t + 396,5 \cdot \sin 12,38 \cdot t) \quad (123)$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
mm	x	-20,0	-14,6	-3,0	+1,9	-6,3
kg	P	+2,00	+1,50	-1,48	-3,00	-0,43

Die Kraftkurve (11) zeigt nur eine geringe Verlängerung durch die Zusatzreibung der Ruhe von $\alpha \cdot W = 1 \text{ kg}$. Erst bei der übertrieben großen Annahme (105) $\alpha \cdot W = 2 \text{ kg}$ entsteht eine wesentliche Verlängerung der Kraftwelle (12). Um noch weitere Unterlagen und Vergleichspunkte zu gewinnen, soll ein Vergleich zwischen dem bisher betrachteten, reinen Federregler und einem reinen Gewichtsregler von gleich großem Arbeitsvermögen angestellt werden. —

§ 10. Vergleich zwischen Feder- und Gewichtsregler.

Unser bisher betrachteter, reiner Federregler besaß ein Arbeitsvermögen von 8 mkg (30) und entsprach etwa einem Tolleschen Federregler No. 5 (vergl. „Hütte“ 1899, S. 598). Wählen wir einen reinen Gewichtsregler nach Pröll oder Steinle zum Vergleich, so würden nach den Angaben der Hütte (1899, S. 595) etwa die Größennummern Va (Pröll) und 8 (Steinle) dem Tolleschen Federregler No. 5 entsprechen. Für unsere Rechnung ist nur der reduzierte Muffenhub s_r eines Reglers erforderlich. Tolle gibt an, daß bei Reglern mit verhältnismäßig großer Gewichtsbelastung der Muffe (großer Umdrehungszahl) der reduzierte Muffenhub ungefähr gleich dem Muffenhub s ist. Eine Überschlagsrechnung an verschiedenen Beispielen lehrt, daß diese Regel im allgemeinen zutrifft. Für die betreffenden Gewichtsregler nach Pröll oder Steinle ist eine minutliche Umdrehungszahl von $n = 120$ und ein Muffenhub von $s = 8$ cm angegeben. Für unseren Federregler hatten wir einen reduzierten Muffenhub von $s_r = 0,4$ cm berechnet. Da nach Tolle für Gewichtsregler $s_r \propto s$ ist, so wäre der reduzierte Muffenhub für den Gewichtsregler 20 mal größer wie für den Federregler.

Um einen direkten Vergleich der zu zeichnenden Kraftkurven des Gewichtsreglers mit denen des Federreglers zu ermöglichen, wollen wir annehmen, daß der in Richtung der Fliehkraft von den Schwungkörpermittelpunkten zurückgelegte Weg, welcher dem Muffenhub entspricht, 4 cm betrage wie beim Federregler. Die auf den Schwungkörperschwerpunkt reduzierte Masse sei 15 mal so groß wie beim Federregler. Da die reduzierte Masse des Federreglers den Wert $m_r = 2$ hatte, würde die des Gewichtsreglers sein:

$$m_{rg} = 30. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

Wir haben somit einen 15 mal größeren reduzierten Muffenhub für den Gewichtsregler wie für den Federregler. Um den Gewichtsregler nicht zu ungünstig zu beurteilen, ist absichtlich der Muffenhub (reduzierte) des Gewichtsreglers nicht 20 mal so groß, wie sich nach der Regel von Tolle ergeben würde, gemacht worden. Der reduzierte Muffenhub des Gewichtsreglers ist:

$$s_{rg} = 0,06 \text{ m.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

Nehmen wir ferner an, daß der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Gewichtsreglers einstellbar sei und zunächst $\delta_0 = 6\%$ betrage, so würden die Konstanten a und b der Differentialgleichung (15) die Werte haben:

$$a = 20 \qquad b = 20. (126)$$

Die Kraftkurven (14) bis (17) veranschaulichen die Stellbewegung des Gewichtsreglers bei $\delta_0 = 6\%$. Zum Vergleich sind die entsprechenden Kraftkurven des Federreglers mit eingezeichnet worden. Es zeigt sich, daß die Bewegung des Gewichtsreglers sehr viel langsamer wie die des Federreglers vor sich geht, da beträchtlich größere Massen zu beschleunigen sind. Beim Federregler wurde eine Kraftwelle in ungefähr 0,3 Sekunden zurückgelegt. Der Gewichtsregler braucht mindestens 0,9 Sekunden. Wir wollen jetzt die Berechnung der gezeichneten Kraftkurven des Gewichtsreglers vornehmen.

Kraftkurve (16).

Die Reibung ist konstant und die Steuerung wirkt ideal. Bei $\delta_0 = 6\%$ und einer reduzierten Masse $m_{rg} = 30$ sind die Werte von a und b (17)

$$a = 20 \qquad b = 20.$$

Wir berechnen die Integrationskonstanten nach den Formeln (23) und erhalten schließlich die Bewegungsgleichungen:

$$x = -18,42 \cdot e^{-0,952 \cdot t} - e^{0,476 \cdot t} \cdot (1,58 \cdot \cos 4,55 \cdot t + 3,68 \cdot \sin 4,55 \cdot t). (127)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -16,61 \cdot e^{-0,952 \cdot t} + e^{0,476 \cdot t} \cdot (16,61 \cdot \cos 4,55 \cdot t + 82,5 \cdot \sin 4,55 \cdot t). (128)$$

Da wir eine reduzierte Masse von $m_{rg} = 30$ haben, so ist jetzt:

$$P = \frac{30}{1000} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \text{ kg} (129)$$

Die Werte von x ergeben sich in mm.

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
mm	x	-20,0	-19,9	-19,5	-18,3	-16,5	-13,8
kg	P	+0,00	+1,16	+1,74	+2,52	+2,46	+1,76

sec.	t	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
mm	x	-10,6	-7,3	-4,2	-1,9	-0,8	-1,2
kg	P	+0,55	+0,98	+2,50	+3,69	+4,23	+3,93

Kraftkurve (16) zeigt, daß der Gewichtsregler bereits mit der ersten Kraftwelle ganz in die Nähe der neuen Beharrungsstellung gelangt. Wollen wir die aperiodische Stellbewegung des Gewichtsreglers behalten, so dürfen wir den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 nicht kleiner als 6 % machen. Kraftkurve (17) zeigt, daß eine starke „zusätzliche Reibung der Ruhe“ von $\alpha \cdot W = 2$ kg (105), entsprechend einem Unempfindlichkeitsgrad von $\varepsilon = 6$ %, nicht im stande ist, die aperiodische Bewegung des Reglers wesentlich zu stören. Wir sehen, daß sowohl bei empfindlichen Federreglern, als auch bei unempfindlichen Gewichtsreglern die Wirkung der gewöhnlichen Reibung nur wenig von der Wirkung konstanter Reibung abweicht, solange die Schwingungen noch eine gewisse Größe besitzen.

Kraftkurve (17).

Die Steuerung wirkt ideal. Die zusätzliche Reibung der Ruhe beträgt: $\alpha \cdot W = 2$ kg.

Nach Formel (96) ist die Anfangsbeschleunigung:

$$p_0 = 66,67 \text{ mm/sec.}^2.$$

Die Konstanten C_1 , C_2 , C_3 sind nach den Formeln (97) zu berechnen. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$x = -15,46 \cdot e^{-0,952 \cdot t} - e^{0,476 \cdot t} \cdot (4,54 \cdot \cos 4,55 \cdot t + 2,76 \cdot \sin 4,55 \cdot t). \quad (130)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -14,0 \cdot e^{-0,952 \cdot t} + e^{0,476 \cdot t} \cdot (80,67 \cdot \cos 4,55 \cdot t + 76,2 \cdot \sin 4,55 \cdot t). \quad (131)$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
mm	x	-20,0	-19,6	-18,2	-15,8	-12,7	-8,8
kg	P	+2,00	+2,97	+3,27	+2,85	+1,80	+0,09

sec.	t	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
mm	x	— 4,9	— 1,6	+ 0,5	+ 1,0	+ 0,0	— 2,8
kg	P	— 1,80	— 3,62	— 4,86	— 5,22	— 4,53	— 2,84

Wir hätten nun noch den eventl. Zeitverlust durch die Steuerung zu berücksichtigen. Die Bewegung des Gewichtsreglers vollzieht sich aber so langsam, daß es sich nicht lohnt, wenn wir die Kraftkurve zeichnen unter der Annahme, daß sich die Umfangskraft der Maschine sprunghaft von 0,25 zu 0,25 Sekunden ändert. Die Annahme konstanter Reibung und idealer Steuerung kommt im Falle des langsam schwingenden Gewichtsreglers der Wirklichkeit schon sehr nahe. Betrachtet man die mittlere Umfangskraft T_m als konstant während des ganzen Verlaufs einer Kraftwelle, so erhält man eine allzu starke Verlängerung derselben, wie sie der Wirklichkeit nicht entspricht. Die Berechnung der Kraftkurven (14) und (15) ist deshalb fortgelassen worden. Diese Kraftkurven sollen nur zeigen, daß wir die Länge der ersten Hälfte der ersten Kraftwelle zur Berechnung des „mindestens erforderlichen Ungleichförmigkeitsgrades“ zu reichlich angenommen haben.

Auf Grund der eben gezeichneten Kraftkurven können wir unter Berücksichtigung der „zusätzlichen Reibung der Ruhe“ eine Berücksichtigung der Formeln (70) und (75) für den Ungleichförmigkeitsgrad eines Reglers vornehmen. Die Formeln stimmen für unsere Kraftkurven, wenn wir schreiben:

$$\delta_0^u = 1,1 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \quad \delta_0^0 = 2,2 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \quad . \quad (132)$$

Da bei schnellschwingenden Federreglern der Zeitverlust einen größeren schädlichen Einfluß ausübt, als bei langsam schwingenden Gewichtsreglern, so können die Werte für δ_0^u und δ_0^0 bei Federreglern um ein Unbedeutendes höher liegen. Den günstigen schwingungsdämpfenden Einfluß der „klemmenden Zusatzreibung der Bewegung“ haben wir bisher in den Formeln (132) noch nicht berücksichtigt. In § 13, wo der Einfluß eines mit der Geschwindigkeit zunehmenden Widerstandes behandelt wird, werden wir noch einmal auf die „klemmende Zusatzreibung der Bewegung“ zurückkommen.

Die Kraftkurve (18) für den astatischen Gewichtsregler ist besonders geeignet, den bewegungsverzögernden Einfluß der Gewichts-

belastung erkennen zu lassen. Die mit der Verzögerung der Bewegung des Reglers verbundene größere Fliehkraft bzw. Geschwindigkeitsänderung ist weit über doppelt so groß, als beim Federregler unseres Beispiels. Ein Gewichtsregler kann durch kein Mittel für eine gute Regulierung brauchbar gemacht werden. Selbst wenn es möglich wäre, den Gewichtsregler bei einem Ungleichförmigkeitsgrad von $\delta_0 = 0\%$ brauchbar zu machen, indem der Regler stets dann durch einen besonderen Mechanismus festgehalten wird, wenn er seine neue Beharrungsstellung erreicht hat, so würde doch bei einer Belastungsänderung von der Hälfte der Vollbelastung eine Geschwindigkeitsänderung von $1,5\%$ eintreten, wie wir aus Kraftkurve (18) abgreifen können (vergl. § 1). Beim Federregler würde sich nur $0,6\%$ Geschwindigkeitsänderung ergeben. Schon durch ihre meist sehr starke Eigenreibung ($1-2\%$) sind Gewichtsregler für Regulierungen, an welche sehr hohe Anforderungen gestellt werden, nicht geeignet, ganz besonders dann, wenn im Betriebe öfters große und plötzliche Belastungsschwankungen vorkommen. Die Bewegungsgleichungen für den astatischen Gewichtsregler lauten:

Kraftkurve (18).

$$x = -6,67 \cdot e^{-2,714 \cdot t} - 13,33 \cdot e^{1,357 \cdot t} \cdot \cos 2,35 \cdot t \quad . \quad (133)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -49,2 \cdot e^{-2,714 \cdot t} + e^{1,357 \cdot t} \cdot (49,2 \cdot \cos 2,35 \cdot t + 85,4 \cdot \sin 2,35 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
mm	x	-20,0	-19,9	-19,4	-18,1	-15,7	-11,8	-6,0	+1,7	+13,0
kg	P	+0,00	+1,20	+2,40	+3,51	+4,56	+5,40	+5,94	+6,09	+5,70

II. Teil.

Das Verhalten der Regulierung bei konstanter Belastung.

§ 11. Grenzbezirk und Schwingungszeit.

Es ist im ersten Teile dieser Arbeit gezeigt worden, daß die durch eine plötzliche große Belastungsänderung hervorgerufenen Schwingungen durch Einwirkung der gewöhnlichen Reibung des Reglers¹⁾ eine Abnahme erfahren. Die Kraftkurven (4) und (5) des Federreglers lehrten uns aber, daß die Abnahme der Schwingungen nicht unbegrenzt fort dauern, daß also der Regler sich seiner neuen Beharrungsstellung nicht unbegrenzt, sondern nur bis auf eine gewisse Grenze nähern kann. Innerhalb dieser Grenze, die wir Grenzbezirk nennen wollen, schwingt der Regler andauernd um seine Gleichgewichtslage herum. Die einzelnen Kraftwellen sind der Kraftkurve für die reine Sinusschwingung sehr ähnlich geworden, d. h. sie weichen nur wenig von einer Geraden ab. Wir wollen uns jetzt mit den kleinen Schwingungen bei konstanter Belastung, welche bei empfindlichen Federreglern kaum sichtbar sind, etwas eingehender befassen.

Zu diesem Zwecke nähern wir uns dem Grenzbezirk einmal von der anderen Seite her, als wir es eben getan haben. Wir nehmen an, die Belastung der Kraftmaschine sei genau konstant und der Regler befinde sich mit der Geschwindigkeit null genau in seiner Beharrungsstellung. Durch eine kleine Erschütterung möge der Regler plötzlich aus seiner Gleichgewichtslage herausgebracht worden sein, so daß er sich nun mit der Geschwindigkeit null in der sehr kleinen Entfernung x_0 von seiner Beharrungsstellung befindet. Ist der Wert von x_0 negativ, wie in Fig. 14, so wird die Fliehkraft

¹⁾ in Verbindung mit dem erforderlichen Unempfindlichkeitsgrad.

anwachsen, bis sie schließlich die obere W-Kurve erreicht hat, vorausgesetzt, daß es nicht schon vorher der Fall war. Wir wissen, daß der Regler sich erst in Bewegung setzt, nachdem die Fliehkraft noch um den Betrag der zusätzlichen Reibung der Ruhe $\alpha \cdot W = \Delta W$ gestiegen ist. Nunmehr beginnt die Bewegung des Reglers. Die Kraftkurve wird fast eine Gerade, da die Triebkraft durch falsche Geschwindigkeit in der Nähe der Beharrungsstellung klein ist. Die reine Sinusschwingung erfährt nur eine geringe Störung. In Fig. 14 ist die Kraftkurve der Sinusschwingung so gezeichnet worden, daß der Schwingungsmittelpunkt gerade mit der Beharrungsstellung zusammenfällt.

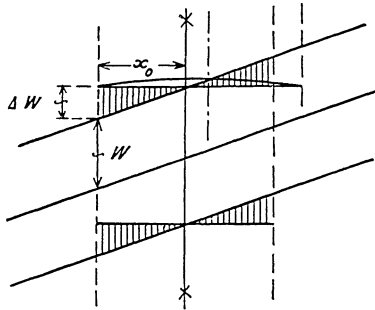


Fig. 14.

Könnten wir die Störung der Sinusschwingung vernachlässigen, so würde diese Schwingung allein in der gezeichneten Größe bestehen bleiben. Nachdem der Regler auf der anderen Seite der Gleichgewichtslage wieder in der Entfernung x_0 zur Ruhe gekommen ist, sinkt die Fliehkraft allmählich um den Betrag $2W$, und der Regler setzt sich in der entgegengesetzten Richtung wieder in Bewegung. Das Spiel beginnt von neuem, wenn die Regelmäßigkeit desselben nicht durch Zufälligkeiten gestört würde. Die mit den kleinen Schwingungen verbundenen Geschwindigkeitsschwankungen bewegen sich innerhalb des Unempfindlichkeitsgrades des Reglers. Tatsächlich können wir aber die Triebkraft durch falsche Geschwindigkeit nicht vernachlässigen. So klein dieselbe in der nächsten Nähe der Beharrungsstellung auch ist, bewirkt sie doch zunächst eine fortgesetzte Vergrößerung der kleinen Sinusschwingungen (Fig. 14). Erst dann findet eine Zunahme offenbar nicht mehr statt, wenn der Regler mit der Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ durch

die Gleichgewichtslage hindurchschwingt. In diesem Falle muß sogar wieder eine kleine Abnahme der Schwingungen eintreten, denn Fig. 15 zeigt, daß die von der Kraftkurve und der W-Kurve eingeschlossenen Flächen um den Betrag der beiden kleinen, schraffierten Dreiecke von einander verschieden sind. Jedenfalls gewährt

aber die analytische Beziehung $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ als äußere Grenze einen brauchbaren Anhalt für rechnerische Betrachtungen über den Grenzbezirk. Den entsprechenden Wert von x wollen wir x_g nennen (Fig. 15). Zur Berechnung von x_g können wir die Gleichungen (116) und (117) benützen. Infolge der den Gleichungen zu Grunde

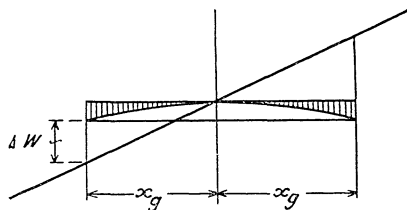


Fig. 15.

liegenden Annahme, daß die mittlere Umfangskraft während des Verlaufs einer Kraftwelle konstant sei, wird sich der Wert von x_g etwas zu groß ergeben, genau so, wie wir bei Ableitung der Formeln (70) und (75) für ∂_0^u und ∂_0^0 zu große Werte erhalten haben. Der Wert x_0 wird zum Grenzbezirk x_g , wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$x = 0 = -\frac{1}{a \cdot \sqrt{a}} \cdot (p_0 \cdot \sqrt{a} \cdot \cos \sqrt{a} \cdot t - b \cdot x_0 \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t) \\ + \frac{x_0}{a} \cdot (a - b \cdot t) + \frac{p_0}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 = +\frac{1}{a \cdot \sqrt{a}} \cdot (p_0 \cdot \sqrt{a} \cdot \cos \sqrt{a} \cdot t - b \cdot x_0 \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t) \quad (136)$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir:

$$0 = x_0 \cdot (a - b \cdot t) + p_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

oder, wenn wir x_g für x_0 setzen und vom Vorzeichen absehen:

$$x_g = \frac{p_0}{a - b \cdot t_g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

Nun ist t_g die Zeit, welche der ersten Hälfte der Kraftwelle entspricht. Bei der reinen Sinusschwingung ist diese Zeit $\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$. Für unsere kleine Reglerschwingung ist die Zeit t_g , welche verfließt, bis

zum erstenmal $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ geworden ist, ein wenig größer. Die Zeit t_g wäre aus der Beziehung zu berechnen:

$$t_g = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arcsin \frac{-b \cdot x_0}{\sqrt{b^2 \cdot x_0^2 + a \cdot p_0^2}} \quad (139)$$

Bei der Berechnung von t_g findet sich, daß der erhaltene Wert immer nur wenig von $0,5 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a}}$ abweicht. Für unsere Kraftkurven ergibt sich ungefähr $0,58 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a}}$. Wir wollen diesen Wert mit t_g bezeichnen.

$$t_g = 0,58 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a}} \quad (140)$$

Damit ist die Größe des Grenzbezirks x_g als gegeben zu betrachten. „Die Größe x_g ist diejenige Ausweichung aus der Gleichgewichtslage, bei welcher eine Schwingungszunahme nicht mehr eintreten kann; es muß sogar eine kleine Schwingungsabnahme eintreten.“

Wenn die Reibung konstant, also $p_0 = 0$ ist, verschwindet der Grenzbezirk. Die kleinen Schwingungen kommen bei konstanter Belastung nur durch die „zusätzliche Reibung der Ruhe“ zu stande. Ist der Nenner: $a - b \cdot t_g \leq 0$, so hat das die Bedeutung, daß die Reglerschwingungen labil sind. Die Zeit, in welcher eine volle Schwingung bei konstanter Belastung ausgeführt wird, setzt sich aus 2 Teilen zusammen. Einmal haben wir die Zeit, welche zur Hin- und Herbewegung des Reglers erforderlich ist. Diese Zeit stimmt fast genau mit der Periode der reinen Sinusschwingung überein. Sie ist:

$$t_s = \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \quad (141)$$

Zweitens haben wir die Zeit, welche die Fliehkraft braucht, um sich zweimal um den Betrag $2W = 2 \cdot \varepsilon \cdot C_m$ zu ändern (Fig. 14). Nennen wir diese Zeit $2 \cdot t_\varepsilon$, dann können wir die Zeit der ganzen „kleinen Schwingung“ schreiben:

$$T_k = 2t_s + t_s \quad (142)$$

Nach Formel (47) ist aber: $t_\varepsilon = \varepsilon \cdot T \cdot \frac{s}{x_g}$, wobei ε den Unempfindlichkeitsgrad des Reglers bedeutet. Wir können somit T_k schreiben:

$$T_k = 2 \cdot \varepsilon \cdot T \cdot \frac{s}{x_g} + \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

Es ist bemerkenswert, daß die Schwingungszeit T_k von dem Unempfindlichkeitsgrad ε des Reglers unabhängig ist. Führen wir den Wert (138) des Grenzbezirks x_g in (143) für T_k ein und bedenken wir ferner, daß die Anfangsbeschleunigung p_0 den Wert (96) besitzt:

$$p_0 = \frac{\alpha \cdot \varepsilon \cdot C_m}{m_r} = \frac{\alpha \cdot \varepsilon \cdot A}{m_r \cdot s} \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

oder, wenn wir $\frac{A}{s}$ mit Hilfe des reduzierten Muffenhubes:

$$s_r = \frac{m_r \cdot s^2}{A} \cdot g \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

ausdrücken, auch den Wert:

$$p_0 = \alpha \cdot \varepsilon \cdot g \cdot \frac{s}{s_r}, \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

so läßt sich die Schwingungszeit T_k schreiben:

$$T_k = \frac{2 \cdot T \cdot s_r}{\alpha \cdot g} \cdot (a - b \cdot t_g) + \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

Führen wir noch für a und b ihre Werte (17) ein, so ist schließlich:

$$T_k = \frac{4}{\alpha} \cdot (\partial_0 \cdot T - t_g) + \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

Der Grenzbezirk x_g (138) lautet, wenn wir den Wert (144) für p_0 einsetzen:

$$x_g = \frac{\alpha \cdot \varepsilon \cdot s \cdot g}{s_r (a - b \cdot t_g)} \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

Nach Formel (148) muß die Schwingungszeit T_k dieselbe bleiben, ob der Regler sehr empfindlich oder sehr unempfindlich ist. Wollen wir die Schwingungszeit T_k eines Reglers recht groß machen, oder überhaupt zur Erreichung eines besonderen Zweckes verändern, dann nützt es uns nichts, wenn wir den Regler empfindlicher oder unempfindlicher machen; die Schwingungszeit T_k bleibt dieselbe, vorausgesetzt, daß der Wert von α konstant bleibt. Nur durch Änderung des Wertes α ist die Zeit T_k eines vorgelegten Reglers vom Ungleichförmigkeitsgrad ∂_0 zu beeinflussen. Durch gute Schmierung, Kugellager etc. könnten wir z. B. die Reibung der Ruhe verkleinern, dadurch T_k vergrößern und somit die Schwingungen weniger fühlbar machen, weil sie langsamer verlaufen. Wir wollen einmal die Formeln (148) und (149) für die Schwingungszeit T_k und den Grenz-

Das wesentlichste Merkmal der eben betrachteten kleinen Schwingungen des Reglers bei konstanter Belastung liegt darin, daß sich die Schwingungszeit aus zwei Teilen zusammensetzt, aus der Zeit, die fast genau der Periode der Sinusschwingung gleich ist, und aus der Zeit, welche erforderlich ist, damit die Fliehkraft sich zweimal von der einen bis zur andern, äußeren W-Kurve ändern kann. Die in diesem Paragraphen angestellten Betrachtungen hatten zur besonderen Voraussetzung, daß der Regler nicht tanzt. Sowohl der Rückdruck der Steuerung, als auch der Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades muß klein sein gegen den Unempfindlichkeitsgrad des Reglers, damit auch wirklich die oft erwähnte, allmähliche Änderung der Fliehkraft von einer bis zur anderen äußeren W-Kurve eintreten kann. Wenn der Regler tanzt, dann gibt es die besprochenen Bewegungspausen in den Totpunkten der Schwingung überhaupt nicht mehr. Die Schwingungszeit wird infolgedessen eine ganz andere. Sie hängt jetzt auch nicht mehr mit der Periode der Sinusschwingung zusammen, sondern sie wird einfach gleich der Periode der störenden Kraft, wie im nächsten Paragraph gezeigt werden soll. —

§ 12. Das Tanzen des Reglers.

Werden die höchsten Ansprüche an die Regulierung gestellt, dann müssen wir auch die mit den kleinen Schwingungen des Reglers verbundenen kleinen Geschwindigkeitsschwankungen der Maschine bei konstanter Belastung zu beseitigen suchen. Das einzige Mittel dazu ist das Tanzen des Reglers, wodurch ein Unempfindlichkeitsgrad erreicht wird, der praktisch null ist. Außer durch den Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades kann das Tanzen durch den Rückdruck der Steuerung verursacht werden. In diesem Falle kann der Unempfindlichkeitsgrad des Reglers bedeutend größer sein, als der Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades, da der Rückdruck der Steuerung meist von beträchtlicher Größe ist. Isaachsen hat zuerst die günstige Einwirkung des Reglertanzes auf die Regulierung klar erkannt oder wenigstens ausgesprochen. Er schreibt: „Zwei Eigentümlichkeiten bei Dampfmaschinen, welche allgemein, besonders bei Ventilsteuerungen, nur als Übelstand bezeichnet werden und deren Beseitigung in einer Anzahl von Regulierungen sogar besonders angestrebt wird, sind es, welche trotz ihrer allgemeinen Verkenning die einzige Rettung für die feineren Regulierungen bilden. Es sind

dies der Rückdruck vieler Steuerungen auf den Regulator und die Ungleichförmigkeit der Drehbewegung aller Dampfmaschinen durch die Ungleichförmigkeit der Drehkraft“. —

Zu den beiden Triebkräften, welche wir bis jetzt ausschließlich berücksichtigt haben, tritt also bei Dampfmaschinen eine 3. Triebkraft hinzu. Wir wollen sie „Triebkraft durch den Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades bzw. durch den Rückdruck der Steuerung“ nennen. In der Rechnung können wir die 3. Triebkraft durch ein Glied von der Form $S \cdot \sin(\alpha \cdot t + \beta)$ einführen; zunächst wollen wir aber ohne Rechnung den Einfluß der 3. Triebkraft auf die Regulierung zu erkennen suchen.

Damit durch das Tanzen des Reglers nicht neue Geschwindigkeitsschwankungen hervorgerufen werden, muß die durch die 3. Triebkraft erzwungene Schwingung in mäßigen Grenzen gehalten werden. Erforderlichen Falles kann dies durch eine Ölbremse geschehen. Wir können uns vorstellen, daß der tanzende Regler zwar nicht immer gerade die richtige Füllung, welche der konstanten Belastung entspricht, einstellt, er gibt bald etwas zu kleine, bald etwas zu große Füllung, daß aber die Füllungsschwankungen, welche nur sehr klein sein können, sich gegenseitig ausgleichen, weil sie eben in beiderlei Sinn erfolgen. Jedenfalls ist es Tatsache, daß bei mäßigem Tanzen des Reglers eine Geschwindigkeitsschwankung der Maschine praktisch nicht eintritt. Die durch den tanzenden Regler eingestellte, mittlere Füllung entspricht genau der konstanten Belastung der Maschine. Die dieser Belastung entsprechende Beharrungsstellung bildet den Schwingungsmittelpunkt der durch die 3. Triebkraft erzwungenen Schwingung.

Sobald der Schwingungsmittelpunkt nicht mehr der Belastung entspricht, wenn z. B. eine kleine Belastungsänderung eingetreten ist, beginnt unverzüglich die Verlegung des Schwingungsmittelpunktes in Richtung der Fliehkraftänderung. Ist diese auch noch so klein, so muß sie doch eine ihrer Größe entsprechende Wirkung ausüben. Bezeichnen wir den konstanten, reduzierten Reibungswiderstand mit W , mit l die Größe der Schwingung und mit ΔC die Änderung der Fliehkraft, dann wird bei jeder halben Schwingung der Schwingungsmittelpunkt um die Strecke $\Delta x = \frac{\Delta C \cdot l}{W}^*)$ verlegt; denn wirkt die Kraft

*) Nur ungefähr richtig.

in der Bewegungsrichtung des Reglers, dann leistet sie die Arbeit $\Delta C.l$ gegen die Trägheitskräfte des Reglers, also muß die Schwingung um die Strecke Δx vergrößert werden, wirkt aber die Fliehkraftänderung der Schwingungsbewegung der Massen entgegen, dann entzieht sie diesen die Energie $\Delta C.l$, also muß die Schwingung um die Strecke Δx eher zum Stillstand kommen.

Obgleich nun der Regler gewissermaßen den Unempfindlichkeitsgrad null erhalten hat, ist die Größe der Reibung W doch nicht ohne Einfluß auf die Bewegung des Reglers. Es ist: $\Delta x = \frac{\Delta C.l}{W}$, demnach steht die Schnelligkeit der Stellbewegung im umgekehrten Verhältnis zur Größe der Reibung. Sobald der Regler tanzt, kann zwar auch ein großer Unempfindlichkeitsgrad ε die Güte einer Regulierung verhältnismäßig nur wenig beeinträchtigen, vorausgesetzt, daß große, plötzliche Belastungsänderungen nicht eintreten. In letzterem Falle müssen wir aber auch beim tanzenden Regler den Unempfindlichkeitsgrad niedrig halten. Andernfalls wird die Stellbewegung zu stark verzögert; wir bekommen beträchtliche, vorübergehende Geschwindigkeitsschwankungen. Aus demselben Grunde ist auch, wenn möglich, die Anbringung einer Ölbremse am tanzenden Regler zu vermeiden. Die allgemeinen Betrachtungen, die im 1. Teil über die Brauchbarkeit eines Reglers angestellt wurden, behalten ihre Gültigkeit. Die Dämpfung der Schwingungen durch gewöhnliche Reibung muß aber einer besonderen Betrachtung unterzogen werden. Die Kraftkurven der Stellbewegung erhalten ein ganz anderes Aussehen, weil die Kraftkurve der erzwungenen Schwingung hinzukommt. Die Berechnung und Zeichnung der Kraftkurven unter Berücksichtigung der 3. Triebkraft $S \cdot \sin(\alpha \cdot t + \beta)$ bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Die Differentialgleichung der Bewegung lautet jetzt, wenn wir $\frac{S}{m_r}$ mit p_s bezeichnen:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a \cdot \frac{dx}{dt} + b \cdot x = \alpha \cdot p_s \cdot \cos(\alpha \cdot t + \beta) \quad . \quad (151)$$

Das ist wieder eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, zu welcher jetzt eine Störungsfunktion hinzugetreten ist. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist bekannt. Geben wir der linearen Differentialgleichung (151) die allgemeine Form:

Die allgemeine Lösung unserer jetzigen Differentialgleichung ist von derselben Form wie die frühere, nur ist infolge des Einflusses der störenden Kraft $S \cdot \sin(\alpha \cdot t + \beta)$ noch ein Glied von der Form $F_{(t)}$ hinzugetreten; außerdem erhalten auch die Konstanten $C_1, C_2 \dots C_n$ andere Werte. Die Funktion $F_{(t)}$ wird die erzwungene Schwingung genannt; sie ist ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (152) und bleibt allein übrig, wenn infolge der Anfangsbedingungen die Konstanten $C_1, C_2 \dots C_n$ verschwinden. Für unsere Differentialgleichung (151) 3. Ordnung erhalten wir durch die in der angegebenen Weise durchgeführte Rechnung für die Funktion $F_{(t)}$ den Ausdruck:

$$F_{(t)} = \alpha \cdot \frac{S}{m_r} \left(\frac{w_1 \cdot \cos \alpha \cdot t - \alpha \cdot \sin \alpha \cdot t}{(w_1^2 + \alpha^2)(w_1 - w_2)(w_3 - w_1)} + \frac{w_2 \cdot \cos \alpha \cdot t - \alpha \cdot \sin \alpha \cdot t}{(w_2^2 + \alpha^2)(w_2 - w_3)(w_1 - w_2)} \right. \\ \left. + \frac{w_3 \cdot \cos \alpha \cdot t - \alpha \cdot \sin \alpha \cdot t}{(w_3^2 + \alpha^2)(w_3 - w_1)(w_2 - w_3)} \right) \dots \dots (156)$$

Der Anfangswinkel β ist der Einfachheit halber gleich null gesetzt worden.

Aus der angestellten Rechnung ersehen wir folgendes:

Die Werte w_1, w_2, w_3 sind für den tanzenden Regler dieselben wie für den nicht tanzenden. Ist der Regler reibungslos, dann findet dieselbe Schwingungszunahme statt, ob er tanzt oder nicht. Erst durch Widerstände kann der Regler brauchbar gemacht werden.

Wir wissen, daß dies auf zweierlei Weise geschehen kann; entweder ist die Dämpfung hinreichend, um eine allmähliche Schwingungsabnahme herbeizuführen, oder sie ist so kräftig, daß außer der erzwungenen Schwingung $F_{(t)}$ (157) Schwingungen überhaupt nicht zustande kommen. Geschieht die Dämpfung lediglich durch Widerstände von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$, dann tritt zu der Differentialgleichung (151) noch das Glied $k \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ hinzu, und es geben die Wurzelwerte der kubischen Gl.:

$$w^3 + k \cdot w^2 + a \cdot w + b = 0 \dots \dots (158)$$

in einfacher Weise darüber Aufschluß, ob überhaupt eine Dämpfung und welche Art der Dämpfung eintritt. Soll der Regler brauchbar sein, dann muß der reelle Anteil der komplexen Wurzeln $p \pm q \cdot i$ negativ werden. Wünschen wir eine aperiodische Stellbewegung des Reglers, dann müssen alle 3 Wurzeln der kubischen Gl. (158) reell

und negativ werden. Durch geeignete Wahl der Koeffizienten a , b und k haben wir es ganz in der Hand, die Art der Wurzelwerte zu bestimmen. Der zur Herbeiführung einer aperiodischen Dämpfung erforderliche Ungleichförmigkeitsgrad δ_0^0 und der erforderliche Dämpfungskoeffizient k können leicht berechnet werden. (§ 13.) Die Rechnung bleibt dieselbe, ob der Regler tanzt oder nicht, weil ja die kubische Gleichung (158) dieselbe bleibt. —

„Das Tanzen hat auf die Dämpfungsverhältnisse, d. h. auf die Stabilität der Reglerschwingungen keinen Einfluß, wenn die Dämpfung durch Widerstände von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$ geschieht.“ —

Anders liegen die Verhältnisse, wenn die Dämpfung nur durch gewöhnliche, etwa konstante Reibung erzielt werden soll. Die reduzierte kubische Gleichung: $w^3 + a \cdot w + b = 0$ gibt weder für den tanzenden, noch für den nicht tanzenden Regler Auskunft über die Dämpfungsverhältnisse, d. h. über die zur Dämpfung erforderliche Größe des Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 und des Unempfindlichkeitsgrades ε . Wir müssen uns auf andere Weise zu helfen suchen. Für den nicht tanzenden Regler haben wir uns im 1. Teil dieser Arbeit Aufschluß über die Dämpfungsverhältnisse zu verschaffen bemüht. Die gefundenen Ergebnisse können wir jedoch nicht ohne weiteres auf den tanzenden Regler übertragen. Durch das Tanzen sind wesentliche Änderungen in den Dämpfungsverhältnissen eingetreten.

Während beim nicht tanzenden Regler immer nur ein Teil der konstanten Reibung zur Dämpfung jeder einzelnen Kraftwelle herangezogen wurde und zwar in der Weise, daß im allgemeinen bei jeder Bewegungsumkehr infolge Mangels aller potentiellen Energie eine Bewegungspause eintreten mußte, sind durch den Einfluß einer störenden Kraft die Schwingungen so groß geworden, daß beim tanzenden Regler im allgemeinen Bewegungspausen nicht mehr stattfinden. Es kann nun recht wohl der Fall eintreten, daß die Größe der konstanten Reibung, welche beim nicht tanzenden Regler vollauf zur Dämpfung genügte, nicht mehr imstande ist, beim tanzenden Regler allein die Schwingungsdämpfung zu bewirken. Wir müßten dann eine Ölbremse zur Hilfe nehmen. Die Erfahrung lehrt, daß wir auch bei überaus empfindlichen Federreglern tatsächlich einer Ölbremse zur Schwingungsdämpfung nicht bedürfen. Die Erklärung

dieser verblüffenden Wirklichkeit liegt in dem Vorhandensein der „klemmenden Zusatzreibung der Bewegung“, welche, wie in § 9 gezeigt worden ist, einen Widerstand von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$ darstellt. Natürlich trägt auch der konstante Teil der Reibung wesentlich zur Schwingungsdämpfung bei. Die durch die 3. Triebkraft erzwungene Schwingung ist nicht in so einfacher Form darstellbar, wenn die Dämpfung nur durch konstante Reibung bewirkt wird. Wir wollen uns deshalb das Zustandekommen der Dämpfung durch konstante Reibung an der Kraftkurve der erzwungenen Schwingung durch den Augenschein zu erklären suchen. Haben wir nur Widerstände von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$, dann ist die Kraftkurve der nach Abdämpfung der Reglerschwingung allein übrig bleibenden erzwungenen Schwingung eine einzige Gerade. Diese Gerade stellt die resultierende Kraftkurve aus den 4 Kraftkurven der 4 Kräfte dar, welche auf die schwingenden Massen einwirken. Jede dieser 4 Kräfte bewirkt eine Sinusschwingung, welche gegen die resultierende, erzwungene Schwingung einen Phasenverschiebungswinkel φ besitzt. Die betreffende Kraft leistet daher entweder positive oder negative Arbeit. Nur wenn der Winkel φ null ist, wird keine Arbeit geleistet. Soll die Schwingung stabil sein, so muß die algebraische Summe der Arbeiten aller Einzelkräfte null werden. Die 4 Kräfte sind:

1. „Triebkraft durch falsche Stellung.“ Es ist: $\varphi = 0$. Die Kraftkurve ist eine Gerade. Die Kraft leistet keine Arbeit. —
2. „Triebkraft durch den Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrads.“ Der Phasenverschiebungswinkel muß immer positiv sein, weil ja die Kraft die Ursache der erzwungenen Schwingung ist. Es ist: $\varphi = 0 - 180^\circ$. Die Kraftkurve ist eine schräg liegende Ellipse von positivem Flächeninhalt. Die Kraft leistet positive Arbeit. —
3. „Triebkraft durch falsche Geschwindigkeit.“ Es ist: $\varphi = +90^\circ$. Die Kraftkurve ist eine wagerecht liegende Ellipse von positivem Flächeninhalt. Die Kraft leistet positive Arbeit. —
4. „Widerstandskraft von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$.“ Es ist: $\varphi = -90^\circ$. Die Kraftkurve ist eine wagerecht liegende Ellipse von negativem Flächeninhalt. Die Kraft ist die einzige, welche negative Arbeit leistet. —

Es ist leicht einzusehen, warum ein Widerstand von bestimmter Größe $k \cdot \frac{dx}{dt}$ immer auch die Dämpfung für den tanzenden Regler besorgen kann, wenn er es für den nicht tanzenden konnte. Die von der 4. Kraft aufgenommene Arbeit wächst in demselben Verhältnis wie die Summe der von der 2. und 3. Kraft geleisteten Arbeiten. Die erzwungene Schwingung kann die Stabilität der Reglerschwingungen nicht beeinflussen. Die Dämpfung durch die 4. Kraft von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$ ist unabhängig von der Periode und der Größe der erzwungenen Schwingung.

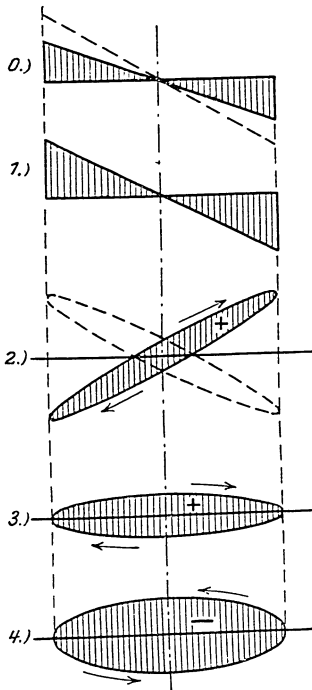


Fig. 16.

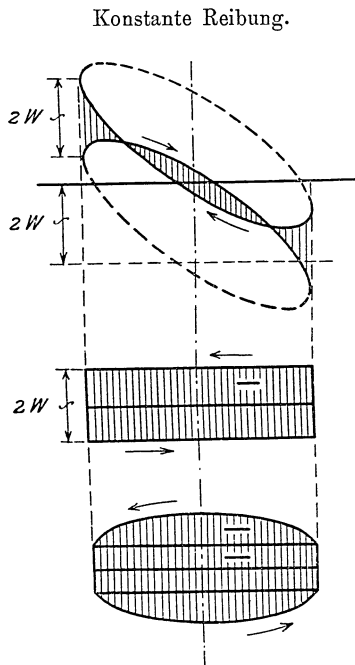


Fig. 17.

Anders ist es, wenn nur konstante Reibung die Schwingungsdämpfung bewirken soll. Sicherlich ist die konstante Reibung dazu geeignet, sobald die erzwungene Schwingung gewisse Grenzen nicht über-

schreitet. Die Kraftkurve der dann allein übrig bleibenden erzwungenen Schwingung muß durch 2 Funktionen ausgedrückt werden. Die eine gilt für den Hingang, die andere für den Hergang, genau wie bei der Kraftkurve der konstanten Reibung: $W = \pm \text{konst.}$ Bei der Bewegungsumkehr springen die Kraftkurven plötzlich um den doppelten Betrag des konstanten Widerstandes W . Die resultierende Kraftkurve der erzwungenen Schwingung wird durch zwei sich schneidende, kongruente Ellipsen dargestellt, von denen nur die ausgezogenen Hälften der Kraftkurve angehören (Fig. 17). Die algebraische Summe der von der Kraftkurve eingeschlossenen Flächen muß bei genügender Dämpfung gleich null sein. Die Schwingung ist dann permanent. Wird jedoch die störende Kraft im Verhältnis zum konstanten Widerstand zu groß, dann ist eine Schwingungsdämpfung in der eben beschriebenen Weise nicht mehr möglich. Die von der resultierenden Kraftkurve eingeschlossene Fläche wird positiv und die Schwingungen sind labil. Die von dem konstanten Widerstand aufgenommene Arbeit wächst mit größer werdender erzwungener Schwingung nicht so schnell wie die von den Kräften 2 und 3 geleistete Arbeit. Die Größe des beim tanzenden Regler zur Schwingungsdämpfung erforderlichen konstanten Widerstandes wächst mit der Größe der erzwungenen Schwingung, genau so wie beim nicht tanzenden Regler der „mindestens erforderliche Unempfindlichkeitsgrad ε “ von der Größe der Entlastung $\frac{1}{\mu_0}$ und der Größe der dadurch hervorgerufenen Schwingung abhängig war (vergl. § 8). Während aber für den nicht tanzenden Regler sehr kleine Unempfindlichkeitsgrade auch bei großen Entlastungen genügten, reichen diese beim tanzenden Regler nur für erzwungene Schwingungen von beschränkter Größe hin. Bei sehr empfindlichen Federreglern würden die Reglerschwingungen schon bei mäßigem Tanzen labil werden, wenn uns nicht die „klemmende Zusatzreibung der Bewegung“ zu Hilfe käme. Die „klemmende Zusatzreibung“ ist von beträchtlicher Größe. Sie kommt zu der konstanten Reibung des Reglers hinzu und würde die Schwingungsdämpfung sogar allein bewirken können (§ 13), wenn die konstante Reibung nicht vorhanden, der Regler also absolut empfindlich wäre. Wir können sagen:

Die „klemmende Zusatzreibung der Bewegung“ bildet die natürliche Ölbremse im Regler.“ — (Vgl. § 13 (213).)

Isaachsen spricht die Wirkung des Reglertanzens mit anderen Worten aus. Er sagt, daß durch das Tanzen des Reglers die gewöhnliche Reibung, die sonst so schädlich wirkt, in eine Widerstandsform umgewandelt wird, die schwingungsdämpfend, also günstig wirkt. Er spricht deshalb von „durch Regulatortanzen modifizierter Reibung“.

Diese Ausdrucksweise könnte den Leser zu der irrigen Vorstellung verleiten, daß es möglich sei, einen Regler, welcher infolge zu geringen Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 überreguliert, mit Hilfe von „durch Regulatortanzen modifizierter Reibung“ schwingungsfrei zu machen. Das ist natürlich ein Irrtum. Die schwingungsdämpfende Wirkung der „modifizierten Reibung“ bezieht sich nur auf die kleinen Schwingungen des Reglers bei konstanter Belastung der Maschine. Wenn bei sehr empfindlichen Federreglern der geringe Unempfindlichkeitsgrad ε zur Schwingungsdämpfung gerade ausreicht, falls der Regler nicht tanzt, so würde gerade durch das Tanzen, durch das „Modifizieren der Reibung“ die Schwingungsdämpfung wieder zunichte gemacht werden, wenn nicht die „klemmende Zusatzreibung der Bewegung“ die Dämpfung aufrecht erhielte. Die eigenartige Wirkung des Tanzens liegt in der Beseitigung der Bewegungspausen. Es ist gezeigt worden, daß beim nicht tanzenden Regler fortwährende kleine Schwingungen auftreten, welche Geschwindigkeitsschwankungen der Maschine mindestens innerhalb des Unempfindlichkeitsgrades des Reglers zur Folge haben, selbst wenn die Belastung genau konstant bleibt. Diese kleinen Geschwindigkeitsschwankungen sind es, welche durch das Tanzen des Reglers erfolgreich beseitigt werden. Der Regler wird absolut empfindlich. Das ist der wichtige und einzige Zweck des Reglertanzens. Auf die Größe des zur Dämpfung der Reglerschwingungen erforderlichen Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 hat das Tanzen keinen Einfluß. Die Größe von δ_0 bleibt dieselbe, ob der Regler tanzt oder nicht. Genügt der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 nicht, um beim nicht tanzenden Regler das Überregulieren zu verhindern, dann kann dieser Übelstand nicht etwa durch ein Tanzen des Reglers beseitigt werden.

§ 13. Der Flüssigkeitswiderstand.

Die Wirkung der Flüssigkeitswiderstände auf die Regulierung wird in der Regel mit wenig Worten abgetan. In den meisten Taschenbüchern steht geschrieben, daß die Anwendung einer Ölbremse einen etwas kleineren Ungleichförmigkeitsgrad ermöglicht, als nach der von Tolle angegebenen Formel: $\delta_0 = \sqrt[3]{\frac{s_r}{g T^2}}$ mindestens erforderlich ist, daß aber durch den mit der Ölbremse verbundenen gewöhnlichen Reibungswiderstand ein etwas größerer Unempfindlichkeitsgrad erzeugt wird.

Es ist im 1. Teil dieser Arbeit gezeigt worden, daß die gewöhnliche, ungefähr konstante Reibung zur Schwingungsdämpfung nur herangezogen werden kann, indem wir den Regler mit dem nötigen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 versehen. Nun läßt sich zwar aus der Gleichung (158): $w^3 + k \cdot w^2 + a \cdot w + b = 0$ leicht nachweisen, daß ein Widerstand von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$ im Grenzfalle sogar einen astatischen Regler brauchbar machen kann, wenn k nur groß genug (im Grenzfalle ∞) gewählt wird, aber deshalb können wir nun nicht beliebig weit mit dem Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 heruntergehen. Wenn wir näher zusehen, zeigt sich, daß die Größe k außerordentlich schnell wachsen muß, damit bei abnehmendem δ_0 noch eine Schwingungsabnahme erzielt wird. Dadurch wird aber die Verzögerung der Stellbewegung so stark, daß bei plötzlichen Belastungsänderungen ganz unzulässig große, vorübergehende Geschwindigkeitsschwankungen entstehen.

Geschieht die Schwingungsdämpfung des Reglers ausschließlich durch konstante Reibung, dann bekommen wir ein Minimum an Bewegungsverzögerung. Die von uns gezeichneten Kraftkurven lassen erkennen, daß die Fliehkraft- bz. Geschwindigkeitsänderungen bei einer plötzlichen Belastungsänderung niemals die Größe $\varepsilon + \frac{\delta_0}{\mu_0}$ überschreiten können, wenn $\frac{1}{\mu_0}$ die Größe der Belastungsänderung im Verhältnis zur Vollbelastung ist. Wir erkennen, daß der augenblickliche Ungleichförmigkeitsgrad δ (10) des in Bewegung befindlichen Reglers verhältnismäßig wenig von dem Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des in Ruhe befindlichen Reglers abweicht, oder mit anderen Worten, daß die Kraftkurve ganz in der Nähe der W-Kurve verläuft.

Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn die Schwingungsdämpfung durch einen Flüssigkeitswiderstand von einiger Größe geschieht. Die Bewegungsverzögerung, der entstehende Zeitverlust wird dann leicht so groß, daß innerhalb desselben wider Erwarten große, vorübergehende Ungleichförmigkeitsgrade entstehen können.

Aus der Beziehung (10): $\delta = \frac{1}{s \cdot T} \cdot \int_0^t x \, dt$ ersieht man, daß der

augenblickliche Ungleichförmigkeitsgrad um so größer wird, je langsamer die Stellbewegung des Reglers vor sich geht. Die Geschwindigkeitsschwankungen können bei einigermaßen starker Bewegungsverzögerung so groß werden, daß die durch die Stabilität des Reglers bei einer Belastungsänderung bedingte Geschwindigkeitsänderung dagegen verschwindet.

Kommen nun in einem Betriebe größere, plötzliche Belastungsschwankungen öfters vor und wollen wir dennoch möglichst geringe Geschwindigkeitsschwankungen haben, so darf die Größe des anzuwendenden Flüssigkeitswiderstandes gewisse Grenzen nicht überschreiten, sonst erreichen wir gerade das Gegenteil. Es fragt sich also, wie weit wir in der Größe des ev. anzubringenden Flüssigkeitswiderstandes gehen können, damit die durch Bewegungsverzögerung entstehenden, vorübergehenden Geschwindigkeitsschwankungen in mäßigen Grenzen bleiben, und wieviel die Verringerung des Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 des Reglers betragen kann, wenn eine solche bei der sehr zu beschränkenden Größe des Flüssigkeitswiderstandes noch möglich ist.

Wir wollen wieder eine Vorstellung von der Größe der durch eine Ölbremse verursachten Bewegungsverzögerung zu gewinnen suchen, indem wir zur Berechnung und Zeichnung von Kraftkurven unter Berücksichtigung verschieden großer Flüssigkeitswiderstände verschreiten. In der Rechnung wird ein solcher Widerstand gewöhnlich der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional gesetzt,

also: $W = k \cdot \frac{dx}{dt}$; ob diese Annahme der Wirklichkeit entspricht

und wie groß die Abweichung von derselben, insbesondere bei der gewöhnlichen Ausführungsform der Ölbremse, sein kann, ist natürlich ohne weiteres nicht zu entscheiden. Einwandfreie Versuche darüber liegen wohl nicht vor. Der günstige, schwingungsdämpfende Einfluß dürfte aber durch das Glied $k \cdot \frac{dx}{dt}$ bei der Ölbremse kaum

zu geringe Berücksichtigung in der Rechnung finden, wenn wir bedenken, daß mit der Anbringung einer Ölbremse eine Vergrößerung der gewöhnlichen Reibung und der bewegten Massen unvermeidlich ist. Die beiden letztgenannten Einflüsse sind aber schwingungsvergrößernder Natur. Wir wollen demnach für die folgenden Betrachtungen die ausdrückliche Voraussetzung machen, daß die Wirkung einer gewöhnlichen Ölbremse durch ein Glied von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$ mit hinreichender Genauigkeit in der Rechnung Berücksichtigung findet. Unsere Differentialgleichung nimmt dann die Form an:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + k \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + a \cdot \frac{dx}{dt} + b \cdot x = 0. \quad . \quad . \quad (159)$$

Falls der Regler tanzt, erscheint noch die Störungsfunktion auf der rechten Seite der Gleichung.

Genau so, wie wir früher bei ausschließlicher Verwendung von gewöhnlicher Reibung als schwingungsdämpfendes Mittel von einem „mindestens erforderlichen Ungleichförmigkeitsgrad“ (δ_0^o und δ_0^u) und einem „mindestens erforderlichen Unempfindlichkeitsgrad“ gesprochen haben, können wir auch bei ausschließlicher Verwendung eines Widerstandes $k \cdot \frac{dx}{dt}$ von einem „mindestens erforderlichen Ungleichförmigkeitsgrad“ und einem „erforderlichen Dämpfungskoeffizienten“ reden, die notwendig sind, damit sich der Regler aperiodisch bewegt oder überhaupt brauchbar wird.

Zunächst wollen wir die Beziehung zwischen den Koeffizienten a , b und k zu ermitteln suchen, welche bestehen muß, damit eine aperiodische Dämpfung der Reglerschwingungen eintreten kann. Es war (17):

$$a = \frac{2g}{s_r} \cdot \delta_0 \quad b = \frac{2g}{s_r} \cdot \frac{1}{T}$$

Die Größe b ist bei einer vorgelegten Regulierung als konstant anzusehen. Wir können nur a verändern, indem wir einen andern Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers einstellen. Um die Wurzeln der Gl. (158):

$$w^3 + k \cdot w^2 + a \cdot w + b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

zu finden, müssen wir sie auf die reduzierte Form bringen. Wir machen die Substitution: $w = x - \frac{k}{3}$ und erhalten die reduzierte, kubische Gl.:

$$x^3 + p_1 \cdot x + q_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

worin p_1 und q_1 die Bedeutung haben:

$$p_1 = a - 3 \cdot \left(\frac{k}{3}\right)^2 \quad q_1 = 2 \cdot \left(\frac{k}{3}\right)^3 - a \cdot \left(\frac{k}{3}\right) + b \quad (162)$$

Die Bedingung dafür, daß die Bewegung des Reglers aperiodisch wird, ist:

$$\left(\frac{q_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_1}{3}\right)^3 \leq 0 \quad (163)$$

oder wenn wir für p_1 und q_1 die Werte (162) einführen:

$$k^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot k^2 - \frac{9}{2} \cdot a \cdot k + \frac{a^3}{b} + \frac{27}{4} b \leq 0 \quad (164)$$

Nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, werden alle drei Wurzeln der Gleichung (160) reell und negativ. Denken wir uns b unveränderlich, so ist durch geeignete Wahl von a und k offenbar die Möglichkeit vorhanden, daß die Ungleichung (164) erfüllt wird. Ist diese Möglichkeit durch genügend große Stabilität (großes a) des Reglers eingetreten, dann wird die Gl. (164) im allgemeinen von 2 positiven Werten von k erfüllt, und alle zwischen diesen beiden Wurzeln liegenden Werte von k erfüllen die Ungleichung (164). Fallen nun die beiden positiven Wurzelwerte k_1 und k_2 zusammen, dann befinden wir uns gerade an der Grenze der Möglichkeit aperiodischer Bewegung des Reglers. Die analytische Bedingung dafür lautet:

$$\left(\frac{q_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{3}\right)^3 = 0 \quad (165)$$

wobei q_2 , p_2 die Koeffizienten der aus Gl. (164) durch die Substitution

$$k = k' + \frac{1}{12} \cdot \frac{a^2}{b} \quad (166)$$

erhaltenen kubischen Gleichung:

$$k'^3 + p_2 \cdot k' + q_2 = 0 \quad (167)$$

sind, und die Werte besitzen:

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= -\frac{9}{2} \cdot a - \frac{1}{48} \cdot \frac{a^4}{b^2} \\ q_2 &= \frac{5}{8} \cdot \frac{a^3}{b^2} + \frac{27}{4} \cdot b - \frac{2}{12^3} \cdot \frac{a^6}{b^3} \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Durch Einführung der Werte (168) für p_2 und q_2 in Gl. (165) erhalten wir:

$$\frac{a^9}{b^6} - 3^4 \cdot \frac{a^6}{b^4} + 3^7 \cdot \frac{a^3}{b^2} - 3^9 = 0 \quad (169)$$

Führen wir in Gleichung (169) das Zeichen y für $\frac{a^3}{b^2}$ ein, so erhalten wir die rein kubische Gleichung:

$$y^3 - 3^4 \cdot y^2 + 3^7 \cdot y - 3^9 = 0 = (y - 3^3)^3 \quad . \quad (170)$$

Die Bedingung dafür, daß bei Verwendung eines Widerstandes von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$ zur Schwingungsdämpfung gerade eine aperiodische Bewegung des Reglers möglich wird, lautet also:

$$y = \frac{a^3}{b^2} = 27 \quad \text{oder} \quad a = 3 \cdot \sqrt[3]{b^2} \quad . \quad (171)$$

Führt man für die Konstanten a und b ihre Werte (17) ein, so erhält man für den Ungleichförmigkeitsgrad ϕ_0^0 die Bedingung:

$$\phi_0^0 = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{2 \cdot g \cdot T^2}} \quad \text{oder} \quad \phi_0^0 = 2,38 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \quad . \quad (172)$$

Die Wahl des Dämpfungskoeffizienten liegt zwischen zwei unendlich benachbarten Grenzen, d. h. es gibt nur einen Wert von k , bei welchem aperiodische Dämpfung eintreten kann. Der Wert von k ist aus Gl. (164) zu ermitteln. Durch Einführung der für a gefundenen Beziehung (171) geht Gl. (164) über in die Gleichung:

$$k^3 - \frac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot k^2 - \frac{27}{2} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot k + \frac{135}{4} \cdot b = 0 \quad . \quad (173)$$

Dafür können wir schreiben:

$$\left(k + \frac{15}{4} \cdot \sqrt[3]{b}\right) \cdot \left(k - 3 \cdot \sqrt[3]{b}\right)^2 = 0 \quad . \quad (174)$$

Es sind demnach die Wurzeln der Gl. (173):

$$k_{1,2} = 3 \cdot \sqrt[3]{b} \quad \text{und} \quad k_3 = -\frac{15}{4} \cdot \sqrt[3]{b} \quad . \quad (175)$$

Für unsere Zwecke kommt nur die positive Doppelwurzel in Betracht. Nachdem wir a (171) und k (175) ermittelt haben, können wir endlich zur Berechnung der Wurzeln unserer ursprünglichen kubischen Gleichung (160) verschreiten. Diese Gl. (160) geht durch Einführung der Werte für a (171) und k (175) über in die Gl.:

$$w^3 + 3 \cdot \sqrt[3]{b} \cdot w^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot w + b = 0 \quad . \quad (176)$$

Gleichung (176) ist wieder eine rein kubische Gl. Wir schreiben:

$$(w + \sqrt[3]{b})^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

Die Wurzeln w_1, w_2, w_3 sind alle einander gleich, sind negativ und haben den Wert:

$$w = -\sqrt[3]{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

Das durch vorstehende Rechnung gefundene Ergebnis lautet:

„Geschieht die Dämpfung der Schwingungen eines Reglers
„lediglich durch einen Widerstand von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$, so müssen
„wir zur Erzielung einer aperiodischen Bewegung dem Regler einen
„Ungleichförmigkeitsgrad geben von mindestens:

$$\delta_0 = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{2g \cdot T^2}}.$$

„Der Dämpfungskoeffizient muß dann den Wert besitzen: $k = 3\sqrt[3]{b}$.
„Ist er größer oder kleiner, dann findet eine aperiodische Bewegung
„nicht mehr statt. Nimmt aber der Dämpfungskoeffizient den Wert:
„ $k = 3\sqrt[3]{b}$ an, dann erhalten wir gerade eine aperiodische Regu-
„lierung. Da in diesem Falle die Wurzeln der Gleichung:

$$w^3 + k \cdot w^2 + a \cdot w + b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (179)$$

„alle drei einander gleich sind, so nimmt das vollständige Integral
„unserer Differentialgleichung die Form an:

$$x = e^{w \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t + C_3 \cdot t^2) \quad . \quad . \quad . \quad (180)$$

„wenn C_1, C_2, C_3 die Integrationskonstanten sind.“

Für die Anfangsbedingungen, daß zur Zeit $t = 0$

$$x = x_0; \quad \frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad . \quad . \quad (181)$$

ist, besitzen die Integrationskonstanten die Werte:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = -w \cdot x_0; \quad C_3 = \frac{1}{2} \cdot w^2 \cdot x_0 \quad . \quad (182)$$

Bis zur ersten Bewegungsumkehr bleibt die Kraftkurve dieselbe, falls zu dem Flüssigkeitswiderstand $k \cdot \frac{dx}{dt}$ noch ein konstanter Reibungswiderstand hinzutritt.

Unter Berücksichtigung der zusätzlichen Reibung der Ruhe und der nicht momentanen, kontinuierlichen Wirkung der Steuerung, ist im 1. Teile dieser Arbeit die Beziehung für δ_0^0 zur Erreichung einer aperiodischen Regulierung gefunden worden:

$$\varphi_0^0 = \varphi \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (183)$$

wobei φ innerhalb der Grenzen 2,2 bis höchstens 2,3 liegen muß. Die niedrigen Werte von φ gelten für Regler mit großer Schwingungszeit (Gewichtsregler); die hohen Werte von φ beziehen sich auf Regler mit sehr kleiner Schwingungszeit (reine Federregler). Die Formel (183) galt nur bei ausschließlicher Verwendung ungefähr konstanter Reibung als schwingungsdämpfendes Mittel. Jetzt haben wir gefunden, daß bei ausschließlicher Verwendung eines Flüssigkeitswiderstandes dem Regler ein Ungleichförmigkeitsgrad von mindestens:

$$\varphi_0^0 = 2,38 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (184)$$

gegeben werden muß, falls eine aperiodische Stellbewegung des Reglers gewünscht wird. Dabei haben wir die schädlichen Einflüsse der zusätzlichen Reibung der Ruhe, der nicht vollkommenen Wirkung der Steuerung, der Massenvergrößerung und der Vergrößerung des Unempfindlichkeitsgrades durch die Ölbremse noch nicht in Betracht gezogen. Jedenfalls werden wir mit dem Koeffizienten 2,38 noch nicht ganz auskommen, und wenn wir einen entsprechenden Zuschlag geben wollen, wie wir es bei der gewöhnlichen Reibung auch getan haben, dann kommen wir auf einen Koeffizienten $\varphi = 2,4$ bis 2,5. Es ist somit bewiesen, daß durch Anwendung einer Ölbremse der Ungleichförmigkeitsgrad φ_0^0 eines Reglers erhöht werden muß, wenn die Stellbewegung aperiodisch bleiben soll. Die einzige Annahme war die Form des Widerstandes: $W = k \cdot \frac{dx}{dt}$.

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn durch die Ölbremse die Regulierung nicht gerade aperiodisch, sondern überhaupt brauchbar gemacht werden soll. Es besteht dann eine gewisse Unabhängigkeit des Dämpfungskoeffizienten k von dem Ungleichförmigkeitsgrad φ_0 des Reglers. Damit die Reglerschwingungen gerade stabil werden, muß der reelle Anteil der komplexen Wurzeln der Gl.

$$w^3 + k \cdot w^2 + a \cdot w + b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (185)$$

negativ werden. Das ist der Fall, wenn die Bedingung erfüllt wird:

$$k \cdot \frac{a}{b} \geq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186)$$

denn führt man $\frac{a}{b} = k$ in Gl. (185) ein, so läßt sich diese schreiben:

$$(a \cdot w + b) (a + w^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

und ihre Wurzeln sind:

$$w_1 = -\frac{b}{a}; \quad w_{2,3} = \pm \sqrt{-a} \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

Es ist also für $k = \frac{b}{a}$ der positive reelle Anteil der komplexen Wurzeln gerade verschwunden; für $k > \frac{b}{a}$ wird er dann negativ.

Führt man für a und b ihre Werte (17) in Gl. (186) ein, so ergibt sich die überaus einfache Beziehung:

$$k \cdot \delta_0 \cdot T \geq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (189)$$

d. h. wenn der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 und der Dämpfungskoeffizient k klein bleiben soll, muß die Anlaufzeit T , also das Schwungrad groß werden.

Die reduzierte Schwungmasse m_r muß aber klein werden, damit der Dämpfungswiderstand: $W = m_r \cdot k$ klein wird.

Anmerkung.

Die Beziehung zwischen dem Dämpfungskoeffizienten k und dem Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 (bezw. zwischen k u. a.) kann graphisch dargestellt werden.

Für alle Wertepaare k und δ_0 , welche nicht in der schraffierten Fläche F_2 liegen, tritt eine Dämpfung der Reglerschwingungen ein. Für alle Wertepaare, welche speziell in die Fläche F_1 fallen, tritt aperiodische Dämpfung ein.

Bereits im Jahre 1877 ist von Wischnegradski (vgl. Civilingenieur) die graphische Beziehung zwischen den Konstanten a , b und k (b als konstant anzusehen) der Diff.-Gl. d. Bewegung gegeben worden, aber ohne nähere Angaben darüber, in welcher mathematischen Abhängigkeit die Konstanten a und b von den Eigenschaften des Reglers und der Maschine stehen. —

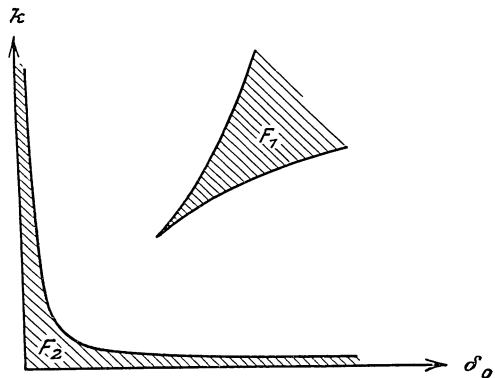


Fig. 18.

Es würde demnach selbst ein astatischer Regler gerade noch brauchbar gemacht werden können, wenn wir den Dämpfungskoeffizienten ∞ groß machen. Praktisch sind wir aber mit der Größe von k sehr beschränkt, weil sonst die Verzögerung der Stellbewegung zu beträchtlich wird. Auf die durch diese Verzögerung hervorgerufenen Geschwindigkeitsschwankungen haben wir jetzt unser Augenmerk zu richten, damit sie keine unzulässige Größe erreichen. Solange der Regler sich wirklich aperiodisch bewegt, sind natürlich größere augenblickliche Geschwindigkeitsschwankungen, als die bei einer Belastungsänderung durch die Stabilität des Reglers hervorgerufenen nicht denkbar. Wir bekommen die beste Vorstellung von den durch Bewegungsverzögerung hervorgerufenen Geschwindigkeitsschwankungen, wenn wir endlich zur Berechnung und Zeichnung einiger Kraftkurven für unseren Gewichts- und Federregler verschreiten.

Zunächst wollen wir die Richtigkeit der für die Ölbremse gefundenen Beziehungen bei aperiodischer Dämpfung vor Augen führen.

Kraftkurve (19).

Für unseren Federregler besaß die Konstante b den Wert: $b = 300$. Damit die Ölbremse aperiodische Dämpfung bewirken kann, muß nach den gefundenen Beziehungen (171), (172), (175), (178) sein:

$$a = 3 \cdot \sqrt[3]{b^2}; \quad \sigma_0^0 = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{2g \cdot T^2}}; \quad k = 3 \cdot \sqrt[3]{b}; \quad w = -\sqrt[3]{b} \quad (190)$$

Da für unseren Federregler (37) $b = 300$ ist, ergibt sich:

$$a = 134,45; \quad \sigma_0^0 = 2,69 \text{ }_0; \quad k = 20,083; \quad w = -6,6943; \quad (191)$$

Die Bewegungsgleichungen (180) lauten schließlich, nachdem die Konstanten (182) C_1 , C_2 , C_3 , berechnet worden sind:

$$x = -e^{-6,694 \cdot t} \cdot (20 + 133,9 \cdot t + 448 \cdot t^2) \quad . \quad . \quad (192)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-6,694 \cdot t} \cdot 3000 \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad (193)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-6,694 \cdot t} \cdot (6000 \cdot t - 20 \cdot 083 \cdot t^2) \quad . \quad . \quad . \quad (194)$$

Der augenblickliche Flüssigkeitswiderstand hat die Größe:

$$W = m_r \cdot k \cdot \frac{dx}{dt}; \quad W = \frac{2 \cdot 20,083}{1000} \cdot \frac{dx}{dt} \text{ kg} \quad . \quad (195)$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
mm	x	— 20,00	— 19,40	— 17,00	— 13,56	— 10,05	— 7,06
kg	P	+ 0,00	+ 0,41	+ 0,21	— 0,00	— 0,11	— 0,14
kg	W	+ 0,00	+ 0,62	+ 1,27	— 1,46	— 1,33	— 1,07

sec.	t	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
mm	x	— 4,76	— 3,11	— 1,98	— 1,22	— 0,76
kg	P	— 0,13	— 0,11	— 0,08	— 0,05	— 0,04
kg	W	— 0,79	— 0,55	— 0,37	— 0,24	— 0,15

Die Kraft P ist die resultierende Kraft aus 3 Kräften, aus der Triebkraft durch falsche Geschwindigkeit (Fliehkraftänderung), der Triebkraft durch falsche Stellung (Stabilität) und dem Flüssigkeitswiderstand. Alle diese Kräfte sind im Kräftediagramm (19) vorhanden. Die Ordinaten zwischen den beiden gekrümmten Kurven stellen die in der betr. Stellung des Reglers herrschende, resultierende Kraft dar.

Zum Vergleich mit der eben gezeichneten Kraftkurve (19) wollen wir noch die Kraftkurve des Federreglers bei demselben Ungleichförmigkeitsgrad $\delta_0 = 2,69\%$ aber mit konstantem Reibungswiderstand berechnen.

Kraftkurve (20).

Es ist:

$$a = 134,45$$

$$b = 300$$

Die Bewegungsgleichungen (22) mit den Konstanten (23) lauten:

$$x = -18,75 \cdot e^{-2,157 \cdot t} - e^{1,0785 \cdot t} \cdot (1,25 \cdot \cos 11,76 \cdot t + 3,32 \cdot \sin 11,76 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -87,25 \cdot e^{-2,157 \cdot t} - e^{1,0785 \cdot t} \cdot (87,25 \cdot \cos 11,76 \cdot t + 486,7 \cdot \sin 11,76 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
mm	x	— 20,0	— 18,6	— 14,0	— 6,5	— 2,8	— 6,12	— 11,3	— 9,8	— 0,4
kg	P	+ 0,00	+ 0,90	+ 0,59	— 0,83	— 1,57	— 0,43	+ 1,50	+ 1,73	— 0,44

Die Kraftkurve (20) zeigt, daß die Bewegung des Reglers bei konstanter Reibung beträchtlich schneller vor sich geht, als wenn wir eine Ölbremse anwenden. Die erste Bewegungsumkehr liegt noch vor der neuen Beharrungsstellung. Selbst wenn wir eine starke zusätzliche Reibung der Ruhe (106) von $\alpha \cdot W = 1 \text{ kg}$ annehmen, entsprechend einem Unempfindlichkeitsgrad $\varepsilon = 3\%$ des Reglers, haben wir noch eine aperiodische Bewegung, wie die Kraftkurve (21) veranschaulicht, deren Berechnung sogleich folgen soll.

Kraftkurve (21)

Es ist:

$$a = 134,45$$

$$b = 300$$

$$d_0 = 2,69$$

$$\alpha \cdot W = 1 \text{ kg}, \quad \text{entsprechend:} \quad \varepsilon = 3\%, \quad \alpha = 1/6,$$

die Konstanten C_1, C_2, C_3 sind nach Formel (97) zu berechnen. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$x = -15,39 \cdot e^{-2,157 \cdot t} - e^{1,0785 \cdot t} \cdot (4,61 \cdot \cos 11,76 \cdot t + 2,396 \cdot \sin 11,76 \cdot t) \quad (198)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -71,5 \cdot e^{-2,157 \cdot t} + e^{1,0785 \cdot t} \cdot (571,5 \cdot \cos 11,76 \cdot t + 445 \cdot \sin 11,76 \cdot t) \quad (199)$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
mm	x	-20,0	-16,7	-8,0	-0,9	-2,8
kg	P	+1,00	+1,26	-0,31	-2,00	-1,43

Geschieht die Schwingungsdämpfung aperiodisch durch eine Ölbremse, dann verläuft die Kraftkurve vollständig über der W-Kurve des Reglers (19), geschieht aber die Dämpfung durch gewöhnliche Reibung, dann sinkt die Kraftkurve (20 und 21) gegen das Ende der Stellbewegung wesentlich unter die W-Kurve. Allerdings ändert sich die Fliehkraft noch weiter, aber nunmehr ganz allmählich. Es beginnen, falls der Regler nicht tanzt, die kleinen Schwingungen bei konstanter Belastung innerhalb des Grenzbezirks. Die erste, große, auf die plötzliche Belastungsänderung folgende Geschwindigkeitsschwankung ist aber immer wesentlich kleiner (etwa um 40 %), wenn nur gewöhnliche Reibung zur Schwingungsdämpfung verwendet wird, als wenn wir eine Ölbremse dazu benützen. Die erste große

Geschwindigkeitsschwankung ist aber maßgebend für die Güte der Regulierung. Die folgenden Geschwindigkeitsschwankungen bei konstanter Belastung bleiben dann für den Regler dieselben, ob er eine Ölbremse besitzt oder nicht. Kraftkurve (21) zeigt, daß schon nach 0,3 sec., also nach einer reichlichen halben Umdrehung der Maschine, fast genau die richtige Füllung eingestellt wird, wenn die Hälfte der Belastung ausgerückt wurde und die Dämpfung durch gewöhnliche Reibung geschieht. Benützen wir hingegen eine Ölbremse zur Dämpfung, dann hat der Regler nach Verlauf von 0,3 sec. etwa erst den dritten Teil der Stellbewegung ausgeführt. Dieser Umstand ist von Bedeutung, wenn trotz häufiger großer und plötzlicher Belastungsänderungen die entsprechende plötzliche Geschwindigkeitsänderung klein bleiben soll. Allmähliche Geschwindigkeitsschwankungen sind immer weniger störend als plötzliche Schwankungen, selbst wenn die ersteren etwas größer sind. Das gilt besonders vom elektrischen Lichtbetrieb.

Der Verlauf der eben besprochenen Kraftkurven (19) bis (21) macht es durch den Augenschein erklärlich, daß zur Erzielung aperiodischer Bewegung die gewöhnliche Reibung geeigneter ist als die Flüssigkeitsreibung. Für unseren Gewichtsregler genügte z. B. ein Ungleichförmigkeitsgrad von $\delta_0^0 = 6\%$ vollkommen, um die gewöhnliche Reibung zur aperiodischen Dämpfung heranzuziehen (Kraftkurve 16). Die Flüssigkeitsreibung verlangt einen Ungleich-

förmigkeitsgrad von mindestens $\delta_0^0 = 2,38 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}}$ d. i. $\delta_0^0 = 6,5\%$

für den Gewichtsregler. Diese auffallende Tatsache, daß gegenüber der konstanten Reibung die Flüssigkeitsreibung die erste und einzige Kraftwelle bei aperiodischer Dämpfung verlängert, während sie bei periodischer Dämpfung jede Kraftwelle verkürzt (vergl. Kraftkurve (19) und (20) bzw. (22) und (23)), hat darin ihren Grund, daß bei periodischer Dämpfung zum großen Teil in der Nähe der Beharrungsstellung die Bewegungsverzögerung besorgt wird, während bei aperiodischer Dämpfung die Bewegungsverzögerung schon vor Erreichung der Gleichgewichtslage erledigt sein muß. Deshalb wachsen in letzterem Falle die Fliehkräfte schneller an als in ersterem, sodaß in ersterem Falle Kraftkurve (23) mit Ölbremse nur wenig höher zu liegen kommt als ohne dieselbe, und dennoch wird die Kraftwelle beträchtlich verkürzt. Die idealste Dämpfung

wäre die, bei welcher die Geschwindigkeitsvernichtung der schwingenden Massen erst ganz kurz vor der Erreichung der Gleichgewichtslage geschieht. Dieser idealen Dämpfung kommt die Dämpfung durch konstante Reibung am nächsten. Dafür hat die konstante Reibung den Nachteil, daß sie einen Unempfindlichkeitsgrad mit sich bringt, während die Flüssigkeitsreibung die Empfindlichkeit des Reglers nicht beeinträchtigt. Da nun aber stets gewöhnliche Reibungswiderstände gegen die Bewegung des Reglers so wie so vorhanden sind, kommen wir am besten, wenn wir diese durch den nötigen Ungleichförmigkeitsgrad zur aperiodischen Dämpfung heranziehen.

Wir wollen uns jetzt zur Beantwortung der Frage wenden, inwieweit die Anbringung einer Ölbremse von Vorteil sein kann, wenn es sich darum handelt, eine Regulierung bei niedrigem Ungleichförmigkeitsgrad ohne die Bedingung aperiodischer Dämpfung brauchbar zu machen. Es ist von vornherein klar, daß durch Anwendung einer Ölbremse niemals viel herauspringen kann. Die Ölbremse ist immer nur als Notbehelf zu betrachten, z. B. wenn der Ungleichförmigkeitsgrad eines Reglers nicht einstellbar ist oder wenn wir das allzu starke Tanzen eines Reglers mäßigen müssen.

Als untere Grenze der Brauchbarkeit ergibt sich für unseren Gewichtsregler nach der Formel (132): $\delta_0^u = 1,1 \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}}$ ein Ungleichförmigkeitsgrad von $\delta_0^u = 3\%$. Bei diesem niedrigen Werte von δ_0^u ergibt zwar die Kraftkurve (22) theoretisch eine Schwingungsabnahme, die aber praktisch kaum genügen kann. Wir wollen daher versuchen, ob sich durch Anbringung eines geeigneten Ölbremswiderstandes eine bessere Schwingungsdämpfung bei demselben Ungleichförmigkeitsgrad von $\delta_0 = 3\%$ erzielen läßt, ohne daß unzulässig große vorübergehende Geschwindigkeitsschwankungen entstehen. Es fragt sich, wie groß wir den Dämpfungskoeffizienten zu wählen haben.

Zunächst sei noch die Berechnung der Kraftkurve (22) für den Gewichtsregler bei konstanter Reibung und $\delta_0^u = 3\%$ gegeben.

Kraftkurve (22).

$$a = 10 \qquad b = 20 \qquad \delta_0 = 3 \text{ } \%$$

Die Integrationskonstanten sind nach Formel (23) zu berechnen. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$x = -14,1 \cdot e^{-1,64 \cdot t} - e^{0,82 \cdot t} \cdot (5,9 \cdot \cos 3,49 \cdot t + 5,16 \cdot \sin 3,49 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad (200)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -38,0 \cdot e^{-1,64 \cdot t} + e^{0,82 \cdot t} \cdot (38,0 \cdot \cos 3,49 \cdot t + 93,2 \cdot \sin 3,49 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad (201)$$

Die reduzierte Masse des Gewichtsreglers war: $m_r = 30$, daher:

$$P = \frac{m_r}{1000} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \text{ kg.}$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
mm	x	-20,0	-19,9	-19,4	-18,1	-15,8	-12,3	-7,8	-2,4	+3,5
kg	P	+0,00	+1,23	+2,34	+3,12	+3,48	+3,33	+2,61	+1,29	-0,51

Soll eine Ölbremse zur Schwingungsdämpfung verwendet werden, dann sind bei Berechnung der Kraftkurve zunächst die Wurzeln w aus der Gleichung (160) zu bestimmen:

$$w^3 + k \cdot w^2 + 10 \cdot w + 20 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (202)$$

Für $k=1$ wird der reelle Anteil der komplexen Wurzeln noch nicht negativ, wohl aber für $k=2$ und alle höheren Werte von k . Wir wollen zunächst für $k=3$ die Kraftkurve des Gewichtsreglers berechnen. Die kubische Gleichung (202) lautet dann:

$$w^3 + 3 \cdot w^2 + 10 \cdot w + 20 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (203)$$

Die Berechnung der Wurzeln von Gleichung (203) ergibt:

$$w_1 = -2,357; \quad w_{2,3} = -0,3215 \pm 2,894 \cdot i; \quad p = -0,3215; \quad q = 2,894 \quad . \quad . \quad . \quad (204)$$

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (15) lautete:

$$x = C_1 \cdot e^{w_1 t} + e^p \cdot (C_2 \cdot \cos q \cdot t + C_3 \sin q \cdot t) \quad . \quad . \quad (205)$$

War zur Zeit $t=0$, $x=0$; $\frac{dx}{dt}=0$; $\frac{d^2x}{dt^2}=0$; dann besitzen C_1 , C_2 , C_3 die Werte:

$$C_1 = x_0 \cdot \frac{p^2 + q^2}{(w-p)^2 + q^2}; \quad C_2 = x_0 \cdot \frac{(w-p)^2 - p^2}{(w-p)^2 + p^2};$$

$$C_3 = \frac{p^2 - q^2 - p \cdot w}{(w-p)^2 + q^2} \cdot \frac{w}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (206)$$

Nach Berechnung der numerischen Werte von (206) ergibt sich für den Gewichtsregler bei $\delta_0 = 3\%$ und $k=3$ das vollständige Integral (205) zu:

Kraftkurve (23).

$$x = -13,51 \cdot e^{-2,357 \cdot t} - e^{-0,3215 \cdot t} \cdot (6,49 \cdot \cos 2,894 \cdot t + 11,72 \cdot \sin 2,894 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (207)$$

$$\frac{dx}{dt} = 31,90 \cdot e^{-2,357 \cdot t} + e^{-0,3215 \cdot t} \cdot (-31,9 \cdot \cos 2,894 \cdot t + 22,57 \cdot \sin 2,894 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (208)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -75,5 \cdot e^{-2,357 \cdot t} + e^{-0,3215 \cdot t} \cdot (75,5 \cdot \cos 2,894 \cdot t + 85,10 \cdot \sin 2,894 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (209)$$

Da $m_r = 30$ ist, besitzen die resultierende Kraft P und der Flüssigkeitswiderstand W die Werte:

$$P = \frac{30}{1000} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \text{ kg}; \quad W = \frac{3 \cdot 30}{1000} \cdot \frac{dx}{dt} \text{ kg}.$$

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
mm	x	-20,0	-19,96	-19,7	-18,7	-16,9	-14,6
kg	P	+0,00	+0,88	+1,69	+1,96	+1,86	+1,62
kg	W	+0,00	-0,19	-0,64	-1,22	-1,85	-2,41

sec.	t	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
mm	x	-11,6	-8,2	-4,6	-1,1	+2,0	+4,7
kg	P	+1,09	+0,44	-0,27	-0,95	-1,55	-1,99
kg	W	-2,85	-3,10	-3,12	-2,95	-2,56	-2,01

Kraftkurve (23) läßt erkennen, daß durch Anbringung eines Ölbremswiderstandes tatsächlich eine viel bessere Schwingungsdämpfung erreicht worden ist als durch die konstante Reibung allein, ohne daß die Geschwindigkeitsschwankungen unzulässig groß geworden sind. Die ganze Kraftkurve (23) liegt nicht wesentlich höher als die Kraftkurve (22). Wir dürfen aber nicht vergessen, daß die durch die Ölbremse hervorgerufene Vergrößerung der bewegten Massen und des Unempfindlichkeitsgrades, sowie die zusätzliche Reibung der Ruhe und der Zeitverlust durch die Steuerung von uns bei Zeichnung der Kraftkurve (23) nicht berücksichtigt worden ist. Trotzdem wird die Regulierung bei einer Größe des Dämpfungskoeffizienten von $k=3$ beträchtlich verbessert werden, vorausgesetzt daß die Ölbremse selbst nur sehr wenig konstante Reibungswiderstände und bewegte Massen besitzt. Wählen wir einen höheren Wert als $k=3$, so werden die Dämpfungsverhältnisse wieder ungünstiger, d. h. es werden wohl die Geschwindigkeitsschwankungen durch die vermehrte Bewegungsverzögerung größer, aber eine schnellere Abnahme der Schwingungen findet nicht statt. Um diese Tatsache zu veranschaulichen, wollen wir die Kraftkurve (24) berechnen, bei welcher der Dämpfungskoeffizient sehr groß, nämlich $k=60$ angenommen wurde.

Kraftkurve (24).

Es ist:

$$a = 10 \quad b = 20 \quad \delta_0 = 3\% \quad k = 60 \quad x_0 = -20 \text{ mm.}$$

Die Wurzeln der kubischen Gleichung (160):

$$w^3 + 60 \cdot w^2 + 10 \cdot w + 20 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (210)$$

sind:

$$w_1 = -59,84 \quad w_{2,3} = -0,08 \pm 0,52 \cdot i.$$

Nach Berechnung der Konstanten C_1, C_2, C_3 (206) erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

$$x = -0,00114 \cdot e^{-59,84 \cdot t} - e^{-0,08 \cdot t} \cdot (20 \cdot \cos 0,52 \cdot t + 3,2 \cdot \sin 0,52 \cdot t) \quad (211)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = 0,068 \cdot e^{-59,84 \cdot t} + e^{-0,08 \cdot t} \cdot (-0,068 \cdot \cos 0,52 \cdot t \\ + 10,656 \cdot \sin 0,52 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad (212) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = -4,076 \cdot e^{-59,84 \cdot t} + e^{-0,08 \cdot t} \cdot (4,076 \cdot \cos 0,52 \cdot t \\ - 1,064 \cdot \sin 0,52 \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad (213) \end{aligned}$$

Die Größe der Widerstandskraft W und der resultierenden Kraft P sind:

$$W = \frac{30 \cdot 60}{1000} \cdot \frac{dx}{dt} \text{ kg}; \quad P = \frac{30}{1000} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \text{ kg} \cdot (214)$$

sec.	t	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0
mm	x	— 20,0	— 17,5	— 11,0	— 2,7	+ 5,0
kg	P	+ 0,00	+ 0,08	+ 0,05	— 0,01	— 0,06
kg	W	— 0,00	— 8,96	— 13,95	— 15,10	— 12,2

Die Stellbewegung des Reglers ist so stark verzögert worden, daß in der Kraftkurve (24) der Bewegungszustand nur von Sekunde zu Sekunde angegeben worden ist. Die vorübergehenden Geschwindigkeitsschwankungen sind durch die starke Bewegungsverzögerung sehr groß geworden. Selbst wenn wir nur eine Belastungsänderung von $\frac{1}{10}$ der Vollbelastung annehmen, beträgt der größte vorübergehende Ungleichförmigkeitsgrad immer noch ungefähr 0,75 %, also für Hin- und Hergang 1,5 % (10). Kraftkurve (24) ist geeignet, die irrtümliche Vorstellung zu beseitigen, daß durch Anziehen der Ölbremse (d. i. Vergrößerung von k) eine stärkere Dämpfung oder gar eine aperiodische Bewegung des Reglers erzielt werden könne.

Auch die Flüssigkeitsreibung $m_r \cdot k \cdot \frac{dx}{dt}$ kann genau wie die etwa konstante gewöhnliche Reibung in höherem Maße und in geeigneter Weise zur Schwingungsdämpfung nur dann herangezogen werden, wenn wir den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers erhöhen. Ist außer der Flüssigkeitsreibung noch konstante Reibung vorhanden, was stets der Fall ist, dann bewirkt auch jetzt noch die konstante Reibung eine schnellere Abnahme der Schwingungen, indem sie bei jeder Bewegungsumkehr potentielle Energie nicht entstehen läßt. Wir können überhaupt den Unterschied der Wirkung konstanter Reibung und der Flüssigkeitsreibung dahin aussprechen, daß die Flüssigkeitsreibung dämpfend wirkt durch Verkürzung jeder einzelnen Kraftwelle des Reglers ohne Reibung, während die konstante Reibung die einzelnen Kraftwellen des reibungslosen Reglers weder verkürzen noch verlängern kann, sondern nur dadurch zur Wirkung kommt, daß sie keine oder nur zum Teil potentielle Energie entstehen läßt. Deshalb kann die konstante Reibung überhaupt nicht mehr dämpfend wirken, sobald beim reibungslosen Regler das Ende einer Kraft-

welle weiter von der Beharrungsstellung abliegt als der Anfang der betreffenden Kraftwelle.

Kraftkurve (24) sagt uns ferner, daß selbst eine sonst vorzügliche Regulierung durch eine zu scharf angezogene Ölbremse einbüßen kann, was sie an guten Eigenschaften besaß. Sind wir z. B. gezwungen, infolge starken Rückdruckes der Steuerung einen großen Ölbremswiderstand anzubringen, dann dürfen wir uns nicht wundern, wenn bei plötzlichen Belastungsänderungen starke Geschwindigkeitsschwankungen vorkommen, trotzdem wir alles getan haben, was sonst zur Erzielung einer guten Regulierung geschehen kann. Bei so starken Geschwindigkeitsschwankungen, wie sie in Kraftkurve (24) vorkommen, spielen dann auch die selbstregulierenden Eigenschaften der Kraftmaschine eine Rolle. Da die meisten Widerstände gegen die Maschinenleistung mit wachsender Geschwindigkeit zunehmen, so wird sich die Maschine von selbst mehr belasten, wenn sie beschleunigt wird, und entlasten, wenn sie verzögert wird.

Sehr starkes Tanzen des Reglers sollte man nicht durch eine Ölbremse, sondern durch Vorrichtungen an der Steuerung selbst zu mäßigen suchen. Wenden wir eine Ölbremse nur dazu an, um das Tanzen des Reglers zu mäßigen, dann kommt uns zur Erreichung dieses Zweckes die Vergrößerung der bewegten Massen und des Unempfindlichkeitsgrades durch die Ölbremse zu statten; denn die erzwungene Schwingung wird offenbar um so kleiner, je größer der Unempfindlichkeitsgrad und die zu bewegendenden Massen des Reglers sind. Als zu bewegendende Masse ist auch die Flüssigkeit selbst in der Ölbremse aufzufassen. Bei der gewöhnlichen Ausführungsform derselben wird das Öl in einem Kreislauf herumgetrieben. Es nimmt also bei der Beschleunigung durch den Kolben kinetische Energie auf, welche es bei der Verzögerung wieder abgibt.

Wir haben noch immer nicht die Frage beantwortet, wie groß nun eigentlich der Dämpfungskoeffizient k zu wählen ist, wenn wir entschlossen sind, eine Ölbremse zur Schwingungsdämpfung heranzuziehen, und wie groß dann der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers gemacht werden muß. Ehe wir diese Frage beantworten, wollen wir uns erst einmal darüber klar zu werden versuchen, wie groß eigentlich der im Regler selbst bereits vorhandene Widerstand von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$ sein mag, den wir „klemmende Zusatzreibung der Bewegung“ genannt

haben (§ 9). Die Größe der „Zusatzkraft“ P_C , welche die Schwungkörper seitlich aus der Pendelebene herauszuziehen bestrebt ist, hatten wir schon berechnet. Es war (96a):

$$P_C = 2 \cdot \omega_r \cdot \frac{dx}{dt} \cdot m_r \quad . \quad . \quad . \quad (215)$$

Diese Kraft erzeugt in den Gelenken, welche die zwangsläufige Führung des Pendels in seiner Ebene zu besorgen haben, eine „klemmende Zusatzreibung“ von der Größe: $\mu_k \cdot P_C$, wenn wir unter μ_k den Koeffizienten der „klemmenden Reibung“ verstehen. Dieser Koeffizient μ_k kann sogar größer als die Einheit werden,

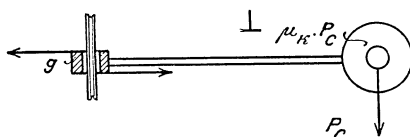


Fig. 19.

wenn das führende Cylinderpaar g recht kurz gemacht wird (Fig. 19). Es müßte dann zur Fortbewegung des Pendels eine größere Kraft in der Pendelebene aufgewendet werden, als zur Erzeugung der „klemmenden Reibung“ erforderlich ist. Jedenfalls sagt uns schon das Gefühl, daß derartige Reibungskoeffizienten μ_k nicht besonders klein ausfallen werden. In Fig. 19 steht die Reibungskraft $\mu_k \cdot P_C$ senkrecht zur Buchenebene. Unter Einführung des Koeffizienten μ_k können wir die Größe des durch die „Zusatzkraft“ (215) erzeugten Dämpfungskoeffizienten k_k schreiben:

$$k_k = 2 \cdot \omega_r \cdot \mu_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (216)$$

oder wenn wir für die Winkelgeschwindigkeit der Reglerspindel ω_r die minutliche Umdrehungszahl n_r einführen:

$$k_k = \frac{\pi \cdot n_r}{15} \cdot \mu_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217)$$

Praktisch bei Reglern vorkommende Werte von μ_k dürften kaum anders als versuchsmäßig zu ermitteln sein. Machen wir die willkürliche Annahme: $\mu_k = 0,2$, welche vielleicht noch zu niedrig ist, so erhalten wir für unseren Federregler mit $n_r = 300$ nach Formel (217):

$$k_k = 12,6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (218)$$

Wir sehen, daß der Dämpfungskoeffizient k_k der „klemmenden Zusatzreibung der Bewegung“ recht beträchtliche Werte besitzt. Um die aperiodische Dämpfung des Federreglers allein bewirken zu können, mußte der Widerstand $k \cdot \frac{dx}{dt}$ den Koeffizienten $k=20,083$ (191) besitzen. Ist μ_k größer als 0,2, dann kommen wir leicht auf diesen Wert. Wir wünschen aber gar nicht so hohe Werte von k_k . Der Vorteil der Flüssigkeitsreibung $k \cdot \frac{dx}{dt}$ tritt gegenüber der konstanten Reibung erst bei periodischer Dämpfung hervor (Kraftkurve 19—23), und für periodische Dämpfung genügen schon sehr geringe Werte des Dämpfungskoeffizienten k . Für den Federregler bei $\delta_0 = 2\%$ geht, wenn $k=3$ ist, die allgemeine Gl. (160) über in die numerische Gl.:

$$w^3 + 3 \cdot w^2 + 100 \cdot w + 300 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (219)$$

Die Wurzeln der Gl. (219) sind:

$$w_1 = -3; \quad w_2 = +10 \cdot i; \quad w_3 = -10 \cdot i \quad . \quad (220)$$

Der reelle Anteil der komplexen Wurzeln ist null, also genügt bei $\delta_0 = 2\%$ schon der Wert $k=3$ zur Schwingungsdämpfung ohne Mitwirkung der konstanten Reibung. Den Wert $k=3$ würden wir schon erhalten, wenn der Reibungskoeffizient nur eine Größe von $\mu_k = 0,05$ besäße. Nach Formel (217) ergibt sich sogar $k_k = 3,15$. Bei Federreglern ist demnach ganz sicherlich immer die Dämpfung durch die „zusätzl. Reibung der Bewegung“ groß genug, um ganz allein, selbst bei absolut empfindlichen Reglern die Schwingungsdämpfung zu bewirken¹⁾.

¹⁾ Es ist früher der „mindestens erforderliche Ungleichförmigkeitsgrad“

zu: $\delta_0^u = 1,1 \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}}$ angegeben worden unter Annahme von nur konstanter Reibung als Dämpfungsmittel. Da nun beim Pendelregler die konstante Reibung durch die „Zusatzreibung der Bewegung“ in der Schwingungsdämpfung unterstützt wird, so dürfte tatsächlich der von Tolle angegebene „mindestens erforderliche Ungleichförmigkeitsgrad“: $\delta_0^u = \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}}$ zur Sicherung einer genügenden Stabilität der Reglerschwingungen hinreichen, während ohne die „Zusatzreibung der Bewegung“ eine Stabilität bei diesem Ungleichförmigkeitsgrad wohl kaum erzielt werden würde.

Bei Gewichtsreglern liegen die Verhältnisse etwas anders, da sich der Dämpfungskoeffizient im Verhältnis der Fliehkraft erzeugenden Massen zur gesamten, schwingenden Masse verkleinert. Es ist:

$$k_k = \frac{m_r}{m_{rg}} \cdot 2 \omega_r \cdot \mu_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

Die Fliehkraft erzeugende Masse hat nämlich nicht allein durch die von ihr erzeugte „klemmende Zusatzreibung der Bewegung“ verzögert zu werden, sondern wir haben auch noch die schwingende Gewichtsbelastung zu verzögern, obgleich sie eine „Zusatzreibung der Bewegung“ nicht erzeugt, weil sie nicht gegen die Drehachse der Reglerspindel, sondern in Richtung derselben schwingt. (Vgl. S. 68). Immerhin erhält auch der Gewichtsregler durch die „Zusatzreibung der Bewegung“ eine so vorteilhafte Unterstützung der Wirkung der konstanten Reibung, daß ein weiteres Hinzufügen von Ölbremswiderständen kaum eine Verbesserung der Regulierung bedeuten kann. Sicherlich läßt sich durch eine Ölbremse der Ungleichförmigkeitsgrad eines Gewichtsreglers weiter herunterdrücken, aber der erreichte Vorteil steht zu den Nachteilen in schlechtem Verhältnis.

Die Richtigkeit der analytischen Behandlung der Reglerschwingungen ist vielfachen Zweifeln begegnet, welche durch den Hinweis auf die vielen ohne Ölbremse vorzüglich wirkenden Regler begründet wurden. Diese Zweifel sind nicht unberechtigt. Die Tatsache, daß gerade ohne Ölbremse sehr gute Regulierungen erzielt worden sind, dürfte durch die vorstehenden Untersuchungen hinreichende Erklärung gefunden haben. Soviel steht schon durch die rein theoretischen Betrachtungen dieses § fest, daß bei reinen Federreglern ein reichlich großer Widerstand von der Form $k \cdot \frac{dx}{dt}$ (mathematisch genau!) im Regler selbst als „klemmende Zusatzreibung der Bewegung“ vorhanden ist, so daß die Anbringung einer Ölbremse an einen Federregler nicht nur entbehrlich, sondern sogar schädlich ist. —

§ 14. Beharrungsregler.

In der neuesten Zeit schenkt man dem Siemensschen Regulierprinzip, welches schon mehr als ein halbes Jahrhundert alt ist, auch in Deutschland eine größere Beachtung, nachdem in Amerika die

dort sogenannten „Inertie-Regler“ schon längst eine vielseitige Durchbildung, in der Hauptsache als Flachregler gefunden haben. Die Flachregler eignen sich besonders zur Anbringung von Beharrungsgewichten¹⁾, weil die Drehachsen sowohl der Beharrungsmassen, als auch der Schwungmassen in ein und dieselbe Richtung fallen, während sie beim Kegelpendelregler sich rechtwinklig schneiden. Deshalb macht in letzterem Falle die einfache und vorteilhafte Anbringung von Beharrungsgewichten erhebliche Schwierigkeiten, doch hat man in letzter Zeit auch an Kegelpendelreglern Beharrungsgewichte angebracht. Die analytische Behandlung bleibt für beide Arten von Reglern dieselbe. Nachdem wir in ausführlicher Weise die Kraftkurven von reinen Fliehkraftreglern im Tolleschen Diagramm untersucht haben, ist es interessant zu erfahren, in welcher Weise durch Anbringung eines Beharrungsgewichtes die Kraftkurven verändert werden. Wir wollen uns die Frage vorlegen: „Welche Vorteile und Nachteile sind mit der Anbringung eines Beharrungsgewichtes an einen Fliehkraftregler verbunden?“ —

Wir haben gesehen, daß das Tanzen des Reglers einen sehr wichtigen Einfluß auf die Regulierung ausübt, nämlich den, daß die Geschwindigkeitsschwankungen infolge des Unempfindlichkeitsgrades verschwinden. Der Regler wird absolut empfindlich. Auf die Stabilität der Reglerschwingungen hatte das Tanzen bei Flüssigkeitsdämpfung gar keinen Einfluß. Es ist von Vorteil für die Klarheit der Darstellung, zunächst den nicht tanzenden Regler für sich zu untersuchen, und erst nachträglich den Einfluß der störenden Kraft zu berücksichtigen. Auch beim Beharrungsregler wollen wir nach diesem Gesichtspunkte die Behandlung des Stoffes in zwei Teile zerlegen. Es wird sich zeigen, daß das Tanzen auf den Beharrungsregler einen ungleich wichtigeren Einfluß ausübt, als auf den reinen Fliehkraftregler. Durch das Tanzen erlangt der Beharrungsregler erst seine Bedeutung, während ohne Tanzen das Beharrungsgewicht praktisch eher einen schädlichen als einen nützlichen Einfluß ausübt. —

¹⁾ Aus bekannten Gründen kann ein Beharrungsgewicht immer nur in Verbindung mit einem Fliehkraftregler zu Regulierungszwecken Verwendung finden.

a) Der nicht tanzende Beharrungsregler.

Als Schema eines Beharrungsreglers soll immer Fig. 20 gelten. Das Beharrungsgewicht ist auf der Reglerhülse verschraubbar angeordnet und zwar so, daß das Gewicht sich nur um die Reglerspindel drehen, nicht aber in Richtung derselben verschieben kann. Durch

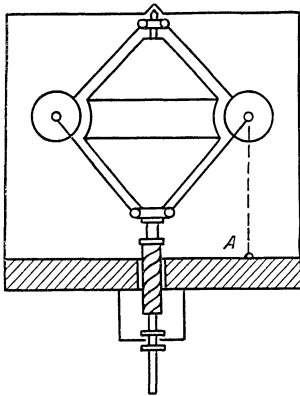


Fig. 20.

den drillbohrerartigen Fortsatz der Reglerhülse steht das Beharrungsgewicht in zwangläufiger Verbindung mit dem Schubkurbelgetriebe des Reglers. Es sei θ das Trägheitsmoment der Beharrungsmasse. Die auf den Schwungkörpermittelpunkt reduzierte Beharrungsmasse sei $c^2 \cdot \theta$, so daß nunmehr in Richtung der Fliehkraft die Masse $m_r + c^2 \cdot \theta$ beim Federregler bzw. $m_{rg} + c^2 \cdot \theta$ beim Gewichtsregler zu bewegen ist. Die Vergrößerung der reduzierten Masse würde natürlich sehr schädlich wirken, wenn nicht gleichzeitig eine Kraft zur

Bewegung der größeren Masse entstünde. Das ist die Beharrungskraft P_B (95a), deren Größe wir bereits abgeleitet haben. Die Beharrungskraft ist dem Ausschlag x des Reglers aus seiner Beharrungsstellung proportional. Da $c^2 \cdot \theta$ die reduzierte Masse des Beharrungsgewichtes ist, so muß die auf den Schwungkörpermittelpunkt reduzierte Beharrungskraft den Wert besitzen:

$$P_B = c \cdot \theta \cdot \frac{\omega_r}{T} \cdot \frac{x}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

Die Kraft kommt zu den beiden Triebkräften durch falsche Stellung (Stabilität) bzw. falsche Geschwindigkeit (Fliehkraftänderung) hinzu, sodaß die Diff. Gl. (14) übergeht in die Differentialgleichung:

$$(m_r + c^2 \cdot \theta) \cdot \frac{d^3 x}{dt^3} = - (a \cdot m_r + c \cdot \theta \cdot \frac{\omega_r}{T \cdot s}) \cdot \frac{dx}{dt} - b \cdot m_r \cdot x \quad (223)$$

oder wenn wir die konstanten Koeffizienten mit a_1 und b_1 bezeichnen:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + b_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (224)$$

Die Diff. Gl. (224) ist von derselben Art wie unsere frühere Diff. Gl. (15), nur haben sich die Werte der Konstanten geändert. Es ist:

$$a_1 = \frac{a \cdot m_r + c \cdot \Theta \cdot \frac{\omega_r}{T \cdot s}}{m_r + c^2 \cdot \Theta} \quad b_1 = \frac{b \cdot m_r}{m_r + c^2 \cdot \Theta} \quad (225)$$

Das Verhältnis $\frac{a_1^3}{b_1^2}$, von welchem die Stabilität der durch die Diff. Gl. (224) ausgedrückten Schwingungen abhängt, ist ein ganz anderes geworden. Es kann jetzt $a \leq 0$, d. h. es kann der Regler astatisch oder labil sein, ohne daß die Schwingungen bei hinreichender Dämpfung labil zu werden brauchen. Wir können in derselben Weise wie früher den zur aperiodischen oder periodischen Dämpfung durch konstante Reibung erforderlichen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 berechnen. Es war:

$$\delta_0 = \varphi \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{a^3}{b^2} = 27 \text{ bis } 2 \text{ entspr. } \varphi = 2,38 \text{ bis } 1,0 \quad (226)$$

Für $\varphi = 1,0$ war noch Dämpfung durch konstante Reibung möglich.

Die Berechnung von δ_0 aus der Beziehung $\frac{a_1^3}{b_1^2} = 27 \text{ bis } 2$ ergibt:

$$\delta_0 = \varphi \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r}{g \cdot T^2} \cdot \left(1 + \frac{c \cdot \Theta^2}{m_r}\right) - c \cdot \Theta \cdot \frac{\omega_r}{T \cdot s} \cdot \frac{s_r}{2 \cdot g} \cdot \frac{1}{m_r}} \quad (227)$$

Es sind die Werte (17) für a und b in die Ausdrücke (225) für a_1 und b_1 eingeführt worden. Setzen wir in der Formel (227) für δ_0 das Trägheitsmoment $\theta = 0$, d. h. ist kein Beharrungsgewicht vorhanden, dann ergibt sich wieder die frühere Formel (226) für den reinen Fliehkraftregler. Erinnern wir uns der Beziehung (16) für den reduzierten Muffenhub s_r , nämlich $s_r = \frac{m_r \cdot s^2}{A} \cdot g$, dann erhält das negative Glied der Formel (227), welches δ_0^b heißen mag, die Form:

$$\delta_0^b = c \cdot \Theta \cdot \frac{\omega_r}{T} \cdot \frac{s}{2 \cdot A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (228)$$

Bezeichnen wir ferner die Vergrößerung des reduzierten Muffenhubes s_r mit s_r^b , also:

$$s_r^b = s_r \cdot \frac{c^2 \cdot \Theta}{m_r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229)$$

so läßt sich Formel (227) schreiben:

$$\delta_0 = \varphi \cdot \sqrt[3]{\frac{s_r + s_r^b}{g \cdot T^2}} - \delta_0^b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230)$$

Die Formel (230) oder (227) gibt die Größe des für einen Beharrungsregler erforderlichen Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 an, wenn die Art der Dämpfung durch den Koeffizienten φ ausgedrückt wird. Für nur konstante Reibung als Dämpfungsmittel ergibt $\varphi = 2,2$ aperiodische, $\varphi = 1,0$ (132) gerade hinreichende periodische Dämpfung. Je größer das Trägheitsmoment θ der Beharrungsmasse gemacht wird, desto kleiner wird δ_0 (227), weil das negative Glied schneller wächst als die Wurzel. Andererseits zeigt die Formel (227), daß es zur Verringerung des Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 um so größerer Beharrungsmassen bedarf, je besser die Regulierung bereits war, d. h. je größer die Anlaufzeit T der Maschine und je kleiner der reduzierte Muffenhub s_r des reinen Fliehkraftreglers war. Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß unter s_r der reduzierte Muffenhub des Reglers ohne Beharrungsgewicht zu verstehen ist. Durch das Beharrungsgewicht wird der reduzierte Muffenhub des Reglers vergrößert auf:

$$s_r^1 = s_r + s_r^b = s_r \cdot \left(1 + \frac{c^2 \cdot \Theta}{m_r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231)$$

Der Wert δ_0^b ist derjenige Ungleichförmigkeitsgrad, welcher der Beharrungskraft entspricht. Bei Ableitung der Diff.-Gl. (223) hat sich gezeigt, daß die Beharrungskraft die Triebkraft durch falsche Stellung (die Stabilität) vergrößert, also muß ihr ein Ungleichförmigkeitsgrad δ_0^b , der aber in der W-Kurve des Reglers nicht vorhanden ist, entsprechen. Es ist:

$$2 \cdot \frac{A}{s} \cdot \delta_0 \cdot \frac{x}{s} = \text{Triebkraft durch falsche Stellung} \quad . \quad . \quad (232)$$

$$c \cdot \Theta \cdot \frac{\omega_r}{T} \cdot \frac{x}{s} = \text{Beharrungskraft (222)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (233)$$

also entspricht der Beharrungskraft ein in der W-Kurve des Reglers unsichtbarer Ungleichförmigkeitsgrad von:

$$\delta_0^b = c \cdot \Theta \cdot \frac{\omega_r}{T} \cdot \frac{s}{2A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (234)$$

Das ist aber der Wert des negativen Gliedes in Formel (227) bz. (228), welches deshalb mit δ_0^b bezeichnet worden ist. Es ist vielleicht gut, die Formel (230) einmal in Worte zu fassen. Sie sagt:

„Durch das Beharrungsgewicht werden zwar einerseits die schwingenden Massen vergrößert (Vergrößerung von s_r um s_r^b), so daß zur Aufrechterhaltung der Stabilität der Schwingungen eigentlich der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 vergrößert werden müßte, wie es auch der größere Wert der Wurzel in Formel (230) angibt, andererseits bewirkt aber die Beharrungskraft eine Vergrößerung der Stabilität der Schwingungen, welche so wirkt, als ob der Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers um δ_0^b erhöht worden wäre, sodaß die Stabilität der Schwingungen nicht nur gesichert bleibt, sondern sogar mehr erhöht wird als der Massenvergrößerung entspricht. Wir können daher, um dieselbe Art der Dämpfung wie ohne Beharrungsgewicht zu bekommen, den Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers mit Beharrungsgewicht auf den Wert δ_0 herabsetzen, den die Formel (230) oder (227) angibt.“ —

Umgekehrt kann auch aus Formel (227) das Trägheitsmoment θ berechnet werden, welches zur Erzielung einer gewünschten Dämpfung (Wert von φ) bei einem vorgeschriebenen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers die Beharrungsmasse besitzen muß. Soll z. B. der Regler astatisch werden ($\delta_0 = 0$), dann ergibt die Formel (227) eine kubische Gleichung, aus welcher der Wert von θ zu berechnen ist.

$$\theta^3 - \theta \cdot p_1 - q_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (235)$$

Durch Einführung des Wertes (17) $b = \frac{2g}{s_r} \cdot \frac{1}{T}$ erhalten die Werte von p_1 und q_1 die Form:

$$p_1 = \frac{2}{b} \cdot \left(\frac{2 \cdot A \cdot \varphi}{c \cdot \omega_r \cdot s} \right)^3 \cdot \frac{c^2}{m_r} \quad q_1 = \frac{2}{b} \cdot \left(\frac{2 \cdot A \cdot \varphi}{c \cdot \omega_r \cdot s} \right)^3 \quad (236)$$

Um etwas Positives vor Augen zu haben, wollen wir für unsere Maschine mit Federregler nebst Beharrungsgewicht die Kraftkurve im Tolleschen Diagramm zeichnen, und zwar wollen wir uns vornehmen, durch Hinzufügung eines entsprechend großen Beharrungsgewichtes eine astatische und auch aperiodische Regulierung zu erreichen. Das Beharrungsgewicht soll so angebracht werden, wie die Fig. 20 zeigt. Praktisch ist natürlich die zwangsläufige Verbindung des Beharrungsgewichtes mit dem Schubkurbelgetriebe durch eine Schraube wegen zu großer Reibung und wegen des toten Ganges kaum verwendbar. Der Übersicht halber soll aber das einfache Schema beibehalten werden. Von den praktischen Übelständen

können wir leicht abstrahieren. Die Größe des Durchmessers unseres kreisförmigen Beharrungsgewichtes betrage 0,6 m, sodaß der ganze Regler eingehüllt werden kann. In der Größe des Übersetzungsverhältnisses c dürfen wir nicht zu weit gehen, da sonst zu viel toter Gang, zu große Drücke in den Gelenken und schließlich Selbstsperrung eintreten würden. Wir nehmen an, die Steigung der Schraube sei so bemessen, daß der Punkt A (Fig. 20) unter dem Schwungkörpermittelpunkt dieselbe Schwingungsgeschwindigkeit besitze wie der Schwungkörper in Richtung der Fliehkraft. Da der mittlere Abstand des Schwungkörpers von der Reglerspindel $r_m = 0,2$ m war (Fig. 11) und die Masse des Beharrungsgewichtes in der Entfernung 1 zu θ angenommen wurde, so ist das Übersetzungsverhältnis $c = 5$. Aus Gl. (235) ist das Trägheitsmoment θ zu rechnen. Die Gleichung ist reduziert und besitzt nur einen positiven, für uns brauchbaren Wert. Es war für den Federregler:

$$b = 300; A = 8 \text{ mkg}; s = 0,04 \text{ m}; m_r = 2; \omega_r = 10\pi = \frac{\pi \cdot n_r}{30}; \quad (237)$$

Wir wollen aperiodische Flüssigkeitsdämpfung, also $\varphi = 2,38$ annehmen. Wir berechnen die Konstanten p_1 und q_1 (236) und erhalten die kubische Gl.:

$$\Theta^3 - 18,54 \cdot \Theta - 1,483 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (238)$$

Der positive Wurzelwert ist:

$$\Theta = 4,35 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (239)$$

Der durch die Beharrungskraft geschaffene Ungleichförmigkeitsgrad, der besser Stabilitätsgrad¹⁾ genannt würde, ist nach Formel (228):

$$j_0^b = 5 \cdot 4,35 \cdot \frac{10 \cdot \pi}{16,6} \cdot \frac{0,04}{2 \cdot 8} = 10,28 \% \quad . \quad . \quad . \quad (240)$$

Diesen großen Ungleichförmigkeitsgrad müßte die W-Kurve des Federreglers aufweisen, wenn das Beharrungsgewicht eine Beharrungskraft nicht erzeugte, sondern nur als Massenvergrößerung mitschwänge. Die Konstanten der Diff.-Gl. (224) besitzen die Werte:

$$a_1 = 9,27 \quad b_1 = 5,42 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (241)$$

¹⁾ Weil er eine Ungleichförmigkeit der Drehbewegung der Maschine nicht verursacht.

Nach Formel (175) muß der Dämpfungskoeffizient k den Wert haben:

$$k = 3 \cdot \sqrt[3]{b}. \quad \text{Es ergibt sich: } k = 5,268 \quad . \quad . \quad (242)$$

Die kubische Gl. (160) zur Bestimmung der Wurzelwerte w lautet:

$$w^3 + 5,268 \cdot w^2 + 9,27 \cdot w + 5,42 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (243)$$

Nach Gleichung (178) besitzt die 3 fache Wurzel der Gleichung (160) den Wert:

$$w = -\sqrt[3]{b}. \quad \text{Es ergibt sich: } w = -1,756 \quad . \quad (244)$$

Das vollständige Integral der Diff.-Gl. unseres Beispiels lautet (180):

$$x = e^{w \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t + C_3 \cdot t^2) \quad . \quad . \quad . \quad (245)$$

Ist der Regler reibungslos (d. h. absolut empfindlich) und befindet er sich zu Beginn der Belastungsänderung in Ruhe, dann ist zur Zeit: $t = 0$

$$x = x_0; \quad \frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = p_0 = \frac{P_B}{m_r + c^2 \cdot \Theta}; \quad . \quad (246)$$

Die Berechnung der Konstanten C_1, C_2, C_3 ergibt dann:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = -x_0 \cdot w; \quad C_3 = \frac{1}{2} (p_0 + w^2 \cdot x_0); \quad (247)$$

Wir berechnen diese Konstanten numerisch, und das vollständige Integral (245) lautet schließlich mit seinen Ableitungen:

$$x = e^{-1,756 \cdot t} \cdot (-20 - 35,12 \cdot t + 61,9 \cdot t^2) \quad . \quad . \quad (248)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-1,756 \cdot t} \cdot (0,0 + 185,5 \cdot t - 108,8 \cdot t^2) \quad . \quad . \quad (249)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-1,756 \cdot t} \cdot (185,5 - 543,6 \cdot t + 191,0 \cdot t^2) \quad . \quad . \quad (250)$$

Der Flüssigkeitswiderstand W und die resultierende Kraft P sind:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{m_r + c^2 \cdot \Theta}{1000} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{110,8}{1000} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \text{ kg;} \\ W &= \frac{m_r + c^2 \cdot \Theta}{1000} \cdot k \cdot \frac{dx}{dt} = 0,584 \cdot \frac{dx}{dt} \text{ kg;} \end{aligned} \right\} . \quad . \quad (251)$$

Wir berechnen in der gewohnten Weise den Bewegungszustand des Reglers von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ Sekunde und erhalten folgende Werte:

Kraftkurve (26).

sec.	t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
mm	x	— 20,0	— 19,2	— 17,3	— 14,7	— 11,9	— 9,2	— 6,6
kg	P	+ 20,56	+ 12,36	+ 6,58	+ 2,59	— 0,07	— 1,78	— 2,77
kg	W	— 0,00	— 8,85	— 13,46	— 15,80	— 16,40	— 15,90	— 14,62

sec.	t	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
mm	x	— 4,2	— 2,1	— 0,3	+ 1,2	+ 2,7	+ 3,2	+ 4,0
kg	P	— 3,29	— 3,46	— 3,40	— 3,20	— 2,92	— 2,59	— 2,24
kg	W	— 13,05	— 11,23	— 9,50	— 7,73	— 5,97	— 4,68	— 3,39

sec.	t	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1
mm	x	+ 4,44	+ 4,78	+ 4,95	+ 5,03	+ 5,00	+ 4,90	+ 4,70	+ 4,50
kg	P	— 1,91	— 1,60	— 1,30	— 1,05	— 0,83	— 0,62	— 0,46	— 0,32
kg	W	— 2,34	— 1,40	— 0,65	— 0,03	+ 0,47	+ 0,84	+ 1,12	+ 1,32

sec.	t	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
mm	x	+ 4,25	+ 4,00	+ 3,75	+ 3,48	+ 3,22	+ 2,94	+ 2,68	+ 2,46
kg	P	— 0,20	— 0,11	— 0,03	+ 0,02	+ 0,07	+ 0,10	+ 0,13	+ 0,15
kg	W	+ 1,45	+ 1,54	+ 1,57	+ 1,57	+ 1,55	+ 1,49	+ 1,42	+ 1,36

Kraftkurve (26) stellt also die aperiodische Stellbewegung eines astatischen Federreglers mit Beharrungsgewicht dar. Der Regler ist vollständig empfindlich, der Stellzeugwiderstand null. Die Dämpfung geschieht durch einen idealen Ölbremswiderstand, die Steuerung wirkt momentan und kontinuierlich. Die W-Kurve des Federreglers fällt mit dem Fliehkraftstrahl, welcher der mittleren Geschwindigkeit der Maschine entspricht, zusammen und ist in Kraftkurve (26) die horizontale Linie a — a. Von dieser Linie aus sind die Fliehkraftänderungen aufgetragen und zwar nach oben, während die Beharrungskräfte $P_B = c \cdot \theta \cdot \frac{\omega_r}{T} \cdot \frac{x}{s}$ nach unten aufgetragen sind, sodaß sie sich addieren, weil beide Kräfte zunächst in demselben

Sinne wirken. Die Kraftkurve der Beharrungskräfte bildet die schräg liegende Gerade $b - b$. Sie vertritt die Stelle der W-Kurve, nur liegt die Gerade $b - b$ nicht fest im Reglerdiagramm, wie es doch die W-Kurve eines Reglers tut, sondern sie verlegt sich parallel mit der jeweiligen Beharrungsstellung. Die stellvertretende W-Kurve $b - b$ wandert im Diagramm mit der Belastung der Maschine hin und her. Dieser wandernden W-Kurve ($b - b$) entspricht der von uns berechnete Ungleichförmigkeitsgrad δ_0^b (234). Diesen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0^b müßte der Federregler besitzen, wenn das Beharrungsgewicht nicht in einer Ebene senkrecht zur Reglerspindel, sondern mit in der Pendelebene schwingen, also eine Beharrungswirkung nicht ausüben würde. Besäße z. B. unser Regler die Beharrungsmasse als Gewichtsbelastung, sodaß die reduzierte Masse statt m_r nun $m_r + c^2 \theta$ ist und der zur aperiodischen Dämpfung erforderliche Ungleichförmigkeitsgrad nicht nur $\delta_0^0 = 2,69\%$ (Kraftkurve 19), sondern $\delta_0^0 = 10,28\%$ sein muß, so würde mathematisch genau statt der Kraftkurve (19) die Kraftkurve (26) entstehen, wenn wir den Regler mit Gewichtsbelastung aus seiner Beharrungsstellung heraus in die Entfernung $x_0 = 20$ mm versetzen und ihn dort nach Vernichtung der Geschwindigkeit plötzlich wieder loslassen. Die Belastung der Maschine bleibt indessen unverändert.

Wie wir sehen, liegt sogar praktisch die Möglichkeit vor, eine astatische, aperiodische Regulierung zu schaffen. Wäre der Regler nicht astatisch, dann wird einfach der Stabilitätsgrad der Schwingungen δ_0^b um den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers erhöht und im Diagramm muß die zusammengesetzte, wandernde W-Kurve einen entsprechend steileren Verlauf nehmen, wenn die Fliehkraftstrahlen wieder horizontal gelegt werden. In Kraftkurve (26) haben wir jedoch den Regler astatisch angenommen und es muß bei jeder Belastung, sobald der Beharrungszustand eingetreten ist, immer ein und dieselbe Umdrehungszahl der Maschine sich einstellen. Obgleich aber der Regler astatisch ist, müssen doch vorübergehende Geschwindigkeitsschwankungen bei jeder Belastungsänderung entstehen. Der augenblickliche oder vorübergehende Ungleichförmigkeitsgrad (10)

$$\delta = \int_0^t \frac{1}{T} \cdot \frac{x}{s} \cdot dt \text{ kann natürlich nicht verschwinden; wir können}$$

für jeden Augenblick der Stellbewegung die Größe δ der augen-

blicklichen Geschwindigkeitsabweichung von der mittleren Drehgeschwindigkeit in der Kraftkurve (26) abgreifen. Die Maschine nimmt zwar eine gewisse Zeit nach der Belastungsänderung ihre ursprüngliche Umdrehungszahl wieder an, aber bis dahin treten vorübergehende Schwankungen auf, deren Größe nicht zu unterschätzen ist. Die Schwingungszeit des Reglers ist durch das Beharrungsgewicht beträchtlich größer geworden. Für den reinen Fliehkraftregler war die Zeit der ungestörten Sinusschwingung $t_s = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}$

(141). Beim Beharrungsregler ist die Konstante a zu a_1 (225) geworden. Der Wert von a_1 ist viel kleiner als der Wert von a ; deshalb wird die Schwingungszeit t_s größer, mithin auch die Störung der

Sinusschwingung und der Ungleichförmigkeitsgrad $\delta = \int_0^t \frac{1}{T} \cdot \frac{x}{s} \cdot dt$.

Wir dürfen uns daher nicht wundern, wenn die Fliehkraftschwankungen in Kraftkurve (26) für den astatischen Beharrungsregler sogar etwas größer sind wie für den statischen, reinen Fliehkraftregler (Kraftkurve (19)). Zwar haben wir als beschleunigende Kraft die sehr große Beharrungskraft gewonnen, aber dafür sind auch die zu beschleunigenden Massen sehr viel größer geworden. Wollten wir die bei einer Belastungsänderung entstehende Beharrungskraft als Stellkraft benützen, sodaß die Anfangsbeschleunigung der Stellbewegung gerade null ist, dann würde die Kraftkurve (26) einfach die Gestalt der Kraftkurve (27) bei Flüssigkeitsdämpfung oder (28) bei konstanter Reibung annehmen. Die Geschwindigkeitsschwankung

würde sein: $\delta = \frac{1}{\mu_0} \cdot \delta_0^b$ bzw. für Dämpfung durch konstante

Reibung ziemlich genau: $\delta = 0,6 \cdot \frac{\delta_0^b}{\mu_0}$; z. B. würde bei einer Be-

lastungsänderung von $\frac{1}{2} = \frac{1}{\mu_0}$ der Vollbelastung die Geschwindig-

keitsschwankung betragen: $\delta = \frac{1}{2} \cdot 10,28\% = 5,14\%$ bzw. $3,08\%$.

Es nehmen die Geschwindigkeitsschwankungen einfach die Größe des Unempfindlichkeitsgrades an, wenn wir Flüssigkeitsdämpfung allein haben. Ist in der Hauptsache nur konstante Reibung vorhanden, dann sind die Schwankungen etwas kleiner. Es gelten überhaupt für den nicht tanzenden Beharrungsregler ganz dieselben

Betrachtungen, wie wir sie für den nicht tanzenden reinen Fliehkraftregler angestellt haben, nur beginnt beim Beharrungsregler die Bewegung mit einer Anfangsbeschleunigung, wenn die Belastungsänderung groß genug ist. Die Beharrungskraft ersetzt einfach die Stabilität. Wenn auch bei großen Belastungsänderungen die Stellbewegung sofort beginnt, der Regler absolut empfindlich wird, so bleiben doch die Geschwindigkeitsschwankungen innerhalb des Unempfindlichkeitsgrades, und wenn der Regler schließlich seine neue Beharrungsstellung einnimmt, so steht es ihm frei, irgend eine Umdrehungszahl innerhalb des Unempfindlichkeitsgrades einzustellen. Es ist nichts dadurch gewonnen, daß der Regler bei großen Belastungsänderungen absolut empfindlich wird; nur die Geschwindigkeitsschwankungen durch den Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers fallen fort, weil wir den Regler astatisch machen können. Waren die Geschwindigkeitsschwankungen beim nicht tanzenden Fliehkraftregler höchstens $\varepsilon + \frac{1}{\mu_0} \cdot \delta_0$, so besitzen sie durch den Einfluß des Beharrungsgewichtes nur noch die Größe $\varepsilon + 0$, wenn der Regler völlig astatisch ist. Wollen wir einen größeren Unempfindlichkeitsgrad ε nicht zulassen, dann dürfen wir auch die Stellkraft nicht vergrößern, wir möchten sie sogar etwas verringern, weil durch das Beharrungsgewicht der durch die Eigenreibung des Reglers entstehende Teil des Unempfindlichkeitsgrades ε_r sicher vergrößert wird. Die Größe eines Reglers mit Beharrungsgewicht ist genau so zu bemessen, wie die eines Reglers ohne Beharrungsgewicht. Das Arbeitsvermögen des Fliehkraftreglers muß sein:

$$A = \frac{s \cdot W}{\varepsilon - \varepsilon_r} \quad (252)$$

wenn s der Stellweg, W der Stellzeugwiderstand, ε der ganze und ε_r der durch die Eigenreibung des Reglers erzeugte Unempfindlichkeitsgrad ist. Das Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen lautet:

„Durch Hinzufügen eines Beharrungsgewichtes wird die Empfindlichkeit des Reglers bei konstanter Belastung verringert, d. h. die Regulierung verschlechtert. Bei großen Belastungsänderungen können die Geschwindigkeitsschwankungen um den Betrag $\frac{\delta_0}{\mu_0}$ der durch den Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers entstehenden Schwankungen verringert werden, wenn das Beharrungsgewicht groß genug ist und reibungslos angebracht wird. Die Verbesserung der

Regulierung wird aber durch die Vergrößerung des Unempfindlichkeitsgrades zum Teil wieder aufgehoben, besonders wenn der Fliehkraftregler ein Federregler von kleinem reduzierten Muffenhube ist, welcher bereits einen kleinen Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers gestattet.“ —

Das Anbringen von Beharrungsgewichten an nicht tanzenden Reglern kann demnach kaum eine Verbesserung der Regulierung bedeuten. Sehr viel anders liegen nun die Verhältnisse, wenn der Regler in erzwungene Schwingungen versetzt wird.

b) Der tanzende Beharrungsregler.

Schon der reine Fliehkraftregler erfährt durch das Tanzen eine wesentliche Verbesserung; er wird absolut empfindlich. Sofort nach Eintritt der Belastungsänderung wird die erzwungene Schwingung durch die ebenfalls sofort entstehenden Fliehkraftänderungen gestört. Die Verlegung des Schwingungsmittelpunktes und mithin die Verlegung des Stellzeuges beginnt unverzüglich; zunächst natürlich entsprechend langsam, weil die störende Kraft von null an wachsend erst allmählich größer wird. Ganz anders beim tanzenden Beharrungsregler. Außer durch die von null auf ein gewisses Maximum anwachsende Fliehkraftänderung wird beim Beharrungsregler die erzwungene Schwingung durch die von einem Maximum auf null abnehmende sehr große Beharrungskraft P_B (233) gestört. Die Verlegung des Schwingungsmittelpunktes beginnt also gerade sofort nach der Belastungsänderung am schnellsten. Die geringen Fliehkraftänderungen, welche natürlich auch entstehen und mitwirken, brauchen wir zur Stellzeugverlegung selbst nicht mehr; sie verschwinden gegen die großen Beharrungskräfte. Schon eine verhältnismäßig kleine Beharrungsmasse kann die Verlegung des Stellzeuges gegen ziemlich große Reibungswiderstände in kurzer Zeit bewirken. Es wäre jetzt unsere Aufgabe zu ermitteln, wie groß bei einer vorgelegten erzwungenen Schwingung die Zeit ist, in welcher bei einer gegebenen Größe des Stellzeugwiderstandes die Beharrungskraft die Verlegung des Schwingungsmittelpunktes in die neue Beharrungstellung bewirken kann, wenn eine plötzliche Belastungsänderung eingetreten ist. Die genaue mathematische Behandlung der eben bezeichneten Aufgabe ist in einfacher Weise nicht möglich, zumal der Widerstand gegen die Schwingungsbewegung fast ausschließlich

durch den mehr oder weniger genau konstanten Reibungswiderstand gebildet wird. Wir können aber leicht einsehen, von welchen Größen die Schnelligkeit der Verlegung des Schwingungsmittelpunktes bezw. der entstehende vorübergehende, augenblickliche Ungleichförmigkeitsgrad $\delta = \int_0^t \frac{1}{T} \cdot \frac{x}{s} \cdot dt$ abhängig ist. Wir wollen

uns zunächst einmal darüber zu unterrichten suchen, welche Arbeitsleistungen von der Beharrungskraft während der Schwingungen des Reglers geliefert werden.

In § 3 ist das Zustandekommen, die Erhaltung und Dämpfung der Schwingungen beim reinen Fliehkraftregler bereits eingehend untersucht worden. Wir haben gesehen, in welcher Weise die zur Schwingungserzeugung nötige Arbeit durch die Antriebswelle des Reglers dem Kolben der Dampfmaschine entnommen wurde. Schließlich muß ja jede Arbeit vom Kolben der Dampfmaschine geliefert werden. Im Diagramm war es die Kraftkurve der Fliehkraft, deren Inhalt die bei einer Schwingung in das rotierende System des Reglers gelangende Energiemenge anzeigte. Wenn der nicht tanzende Beharrungsregler bei konstanter Belastung durch einen einmaligen Anstoß von uns in Schwingungen versetzt wird, dann wird die den Massen von uns mitgeteilte Energie schon nach wenigen Schwingungen durch die Reibungswiderstände aufgezehrt worden sein, und der Regler kommt wieder zur Ruhe. Zwar sucht die Fliehkraft die Schwingungen des Reglers aufrecht zu erhalten, aber die von den Widerständen während einer Schwingung aufgenommene Arbeit ist größer als die von der Fliehkraft in derselben Zeit geleistete Arbeit, sodaß die Schwingungen abnehmen und aufhören müssen. Die Fliehkraft ist die einzige Kraft, welche bei konstanter Belastung der Maschine Arbeit in die Schwingungen leistet, mag der Regler ein Beharrungsgewicht besitzen oder nicht. Die Kraftkurve der Beharrungskraft ist ja eine einzige gerade Linie, welche im Diagramm solange festliegt, als sich die Belastung der Maschine nicht ändert. Infolgedessen kann die Beharrungskraft bei konstanter Belastung auch keine Arbeit leisten. Die Energiemenge, welche die Beharrungsmasse durch einen einmaligen Impuls von unserer Seite erlangt hat, verwandelt sich abwechselnd in kinetische und potentielle Energie. Eine Entnahme von Energie aus dem Kolben der Dampfmaschine

kann die Beharrungskraft bei konstanter Belastung der Maschine nicht bewirken.

Anders bei veränderlicher Belastung der Maschine. Angenommen, es tritt, während der Regler im Punkte 1 in Ruhe ist, eine plötzliche Belastungsänderung ein, sodaß die neue Beharrungsstellung in der Entfernung x_0 durch Punkt 2 gebildet wird (Fig. 21), dann verlegt sich die Kraftkurve der Beharrungskraft plötzlich parallel zu sich selbst in den Punkt 2. Die Beharrungsmasse hat plötzlich die potentielle Energie $\frac{1}{2} \cdot P_0 \cdot x_0$ gewonnen, wenn P_0 die der Belastungsänderung entsprechende Beharrungskraft ist. Es beginnen Schwingungen, die solange andauern, bis der Energiebetrag $\frac{1}{2} P_0 \cdot x_0$ nebst der von der Fliehkraft geleisteten Arbeit durch

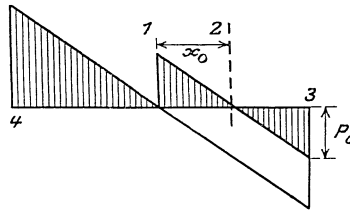


Fig. 21.

Reibungswiderstände vernichtet worden ist. Würde aber die Belastung der Maschine, nachdem der Regler jenseits der neuen Beharrungsstellung 2 im Punkte 3 zur Ruhe gekommen ist, plötzlich wieder ihre alte Größe, entsprechend Punkt 1, annehmen, so würde ebenso plötzlich die in der Schwingung enthaltene Energie auf den Betrag $2 \cdot P_0 \cdot x_0$ steigen. Die Beharrungsmasse führt deshalb eine größere Schwingung aus und kommt erst im Punkte 4 wieder zur Ruhe, wenn wir annehmen, daß die durch Reibung während der Bewegung verlorene Energie gerade durch die von der Fliehkraft geleistete Arbeit gedeckt wird. Geht die Beharrungsstellung durch eine plötzliche Belastungsänderung wieder in Punkt 2 über, nachdem der Regler gerade in Punkt 4 zur Ruhe gekommen ist, so besitzt die Beharrungsmasse jetzt bereits die potentielle Energie $9 \cdot \frac{P_0 x_0}{2}$; wenn die Belastung zum 4. Male wechselt, dann steigt die potentielle Energie auf das 16 fache des Wertes $\frac{P_0 \cdot x_0}{2}$. Je größer die bereits vorhandene Schwingung bei konstanter Belastung

ist, desto größer wird die bei einer Belastungsänderung in die schwingenden Massen verlegte Energiemenge. Einer einmaligen Belastungsänderung entspricht nur ein einmaliger Energiegewinn. War der Regler bei der Belastungsänderung in Ruhe, d. h. die Schwingungsweite L unendlich klein, dann ist die Größe der gewonnenen Energie $\frac{P_0 \cdot x_0}{2}$; war die bereits

bestehende Schwingung endlich, dann ist die für die Schwingung gewonnene Energiemenge $\frac{1}{2} P_0 \cdot x_0 + \frac{1}{2} P_0 \cdot L$. — Besonders bei kleinen Belastungsänderungen (kleines x_0) wird die für die Schwingung einmalig gewonnene Arbeit beim tanzenden Regler sehr viel größer (um $\frac{1}{2} P_0 \cdot L$), als beim nicht tanzenden Regler. Eine andauernde Überführung von Energie aus dem Kolben der Kraftmaschine in die Schwingungen des Reglers ist jedoch nur bei andauernden Belastungsänderungen möglich. Nur wenn sich die Kraftkurve der Beharrungskraft entsprechend im Diagramm hin- und herschiebt, kann sie eine positive Fläche einschließen, kann die Beharrungskraft andauernd Arbeit in die Schwingungen des Reglers leisten. Je größer die Schwingung, desto größer die einmalige oder andauernde Energieentnahme durch die Beharrungskraft. Beim nicht tanzenden Regler benützten wir jede einmalig gewonnene potentielle Energie $\frac{P_0 \cdot x_0}{2}$

zur Beschleunigung der Beharrungsmassen, ohne daß wir sie zur Überwindung eines größeren Stellzeugwiderstandes ausnützen konnten; denn hätten wir den Stellzeugwiderstand vergrößert, dann wäre bei konstanter Belastung auch der Unempfindlichkeitsgrad in demselben Maße größer geworden. Bei großen Belastungsänderungen hingegen wäre, weil wir den großen Massen ihre Anfangsbeschleunigung ganz oder zum Teil entzogen haben, die Stellbewegung zu langsam vor sich gegangen und die Fliehkraftschwankung zu groß geworden.

Ganz anders liegen die Verhältnisse beim tanzenden Regler. Die schwingenden Massen haben ja bei jeder Bewegungsumkehr bereits starke Anfangsbeschleunigungen, wenn die erzwungene Schwingung nur einige Größe besitzt. Was durch eine Belastungsänderung an Anfangsbeschleunigung hinzukommt, wird lediglich zur Verlegung des Schwingungsmittelpunktes benützt. Die Fliehkraft, welche ja zur Verlegung des Schwingungsmittelpunktes und zur Erhaltung der erzwungenen Schwingung mit beiträgt, spielt bei der Stellzeugverlegung selbst eine wesentliche Rolle nicht mehr, während

sie beim nicht tanzenden Regler die Verlegung der Massen in die neue Beharrungsstellung ganz allein besorgen mußte, wenn ein Beharrungsgewicht nicht vorhanden oder dessen Beharrungskraft durch Stellzeugwiderstände ausgeglichen war.

Nehmen wir an, daß beim tanzenden Beharrungsregler der Stellzeugwiderstand sehr klein sei, ebenso wie die störende Kraft, welche das Tanzen unterhält, dann wird die Kraftkurve der Beharrungskraft nach der Belastungsänderung fast genau die Kraftkurve der augenblicklichen Schwingung darstellen. Diese Schwingung wird bald abklingen und nur die erzwungene Schwingung übrig bleiben. Es ist der Schwingungsmittelpunkt ebenso plötzlich in die neue Beharrungsstellung verlegt worden, als die Belastungsänderung eingetreten ist. Haben wir jedoch große Stellzeugwiderstände zu überwinden, dann kann die störende Kraft auch nicht mehr klein sein. Sie muß, wenn ein Tanzen überhaupt eintreten soll, größer sein als der Stellzeugwiderstand. Die erzwungene Schwingung geht dann unter der Einwirkung großer Kräfte vor sich und wird sich nur wenig stören lassen, wenn eine Beharrungskraft von geringer Größe den Schwingungsmittelpunkt verlegen will. Tritt eine plötzliche Belastungsänderung ein, dann ist die von der Beharrungskraft bei einer halben Schwingung geleistete Arbeit $P_0 \cdot L$; diese Arbeit erscheint bei der Bewegungsumkehr als kinetische Energie und muß erst von der bei der Umkehr herrschenden Kraft P' aufgenommen werden, ehe der Regler seine Geschwindigkeit wechseln kann. Die Schwingung wird daher um die Strecke $x = \frac{L \cdot P_0}{P'}$ vergrößert. Die Kraft P' muß größer sein, wie der Stellzeugwiderstand, also können wir etwa schreiben: $P' = \rho \cdot W$. Verlangen wir, daß mit der ersten halben Schwingung eine Vergrößerung derselben von $x = x_0$ eintreten soll, damit bei der Rückschwingung die Verlegung des Schwingungsmittelpunktes schon in der Hauptsache bewirkt ist, so erhalten wir die Bedingung:

$$x_0 \cdot \rho \cdot W = L \cdot P_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (253)$$

oder wenn wir den Wert (222) von P_0 einführen:

$$W = \frac{L}{\varrho \cdot s} \cdot c \cdot \omega_r \cdot \frac{\Theta}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (254)$$

$\frac{L}{s}$ ist das Verhältnis der Schwingungsweite der erzwungenen Schwingung zum ganzen Stellweg. Dieses Verhältnis dürfte für

praktische Ausführungen einen gewissen Durchschnittswert besitzen. Ebenso wird die Größe des zu überwindenden Stellzeugwiderstandes zur Größe der störenden Kraft für bestimmte Arten von Steuerungen in einem bestimmten Verhältnis stehen, sodaß schließlich die Formel (254) mit Hilfe der Erfahrungskonstanten ψ geschrieben werden kann:

$$\Theta = \psi \cdot \frac{T}{c \cdot \omega_r} \cdot W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255)$$

Aus bewährten Ausführungen könnte für bestimmte Maschinengattungen leicht die mittlere Größe des Wertes ψ ermittelt werden, sodaß dann Formel (255) einen sehr einfachen Anhalt zur Bemessung der Größe des Beharrungsgewichtes bieten würde. Der Fliehkraftregler kann so klein gehalten werden, wie es die praktischen Verhältnisse, besonders die solide Anbringung des Beharrungsgewichtes, gestatten. Beim Entwurf eines Beharrungsreglers würde man einfach die Größe des Trägheitsmomentes θ aus Formel (255) zu ermitteln haben, nachdem man sich vorher über die Größe des zu wählenden Übersetzungsverhältnisses c klar geworden ist. Die Größe des am Regler einzustellenden Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 kann darauf leicht aus Formel (227) bzw. (230) berechnet werden. Für $\psi = 1$ und $W = 10$ kg ergibt die Formel (255) für unseren Beharrungsregler ($c = 5$) ungefähr $\theta = 1,0$. Nach Formel (227) kann dann der Regler bei fast ausschließlicher Verwendung von konstanter Reibung als Dämpfungsmittel ($\varphi = 1,0$) gerade noch astatisch ($\delta_0 = 0$) gemacht werden, ohne daß die Reglerschwingungen labil werden. Für aperiodische Dämpfung ($\varphi = 2,38$) war bei astatischem Regler ein Trägheitsmoment von $\theta = 4,45$ (239) erforderlich. In der Entfernung 1 von der Reglerspindel hätten wir also 44,0 kg anzubringen. Das Beharrungsgewicht sollte aber nur einen Halbmesser von 0,3 m (Fig. 19) haben. In der Entfernung 0,25 m müssen wir die 4^{te} fache Masse anbringen, das sind $16,44 = 700$ kg. Berechnen wir nach Gl. (235) das Trägheitsmoment θ nicht gerade für aperiodische Dämpfung ($\varphi = 2,38$), sondern wählen wir $\varphi = 1,0$, sodaß gerade noch eine Schwingungsdämpfung durch konstante Reibung eintreten kann, wenn der Regler astatisch bleibt, so ergibt sich: $\theta = 1,2$, d. h. 192 kg in der Entfernung 0,25 m von der Reglerspindel. Wir sehen, daß schon beträchtliche Massen aufgewendet werden müssen, um bei mittleren Abmessungen einen Regler astatisch zu machen. Die Flachregler eignen sich viel besser zur

Unterbringung von Beharrungsgewichten an längeren Hebelarmen, sodaß schon mit kleineren Gewichten ein großes Trägheitsmoment erzielt werden kann. Immerhin kann ein Kegelpendelregler durch Anbringung eines Beharrungsgewichtes beträchtlich verbessert werden (kleineren Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 (227) und größere Stellkraft), jedoch nur unter der unbedingten Voraussetzung, daß der Regler tanzt, sonst erzielen wir eher eine Verschlechterung der Regulierung.

Sehr vorteilhaft dürfte die Anbringung eines Beharrungsgewichtes dort sein, wo infolge starken Rückdruckes der Steuerung eine Ölbremse mit ihren Nachteilen zur Mäßigung des Tanzens angebracht werden muß. Das Tanzen wird in den meisten Fällen schon durch kleine Beharrungsgewichte in engen Grenzen gehalten werden.

§ 15. Zusammenfassung.

Es sollen die wesentlichsten Vorstellungen, welche dieser Arbeit zu Grunde liegen, einmal in aller Kürze zusammengefaßt werden.

1. Die Aufgaben der Regulierung sind zweierlei Art; sie soll sowohl bei konstanter, als auch bei veränderlicher Belastung die Umdrehungszahl der Maschine möglichst konstant erhalten. Diese beiden Aufgaben sind sehr verschiedener Natur. Zur Erfüllung der ersten Aufgabe ist nur erforderlich, daß die Schwingungen des Reglers um den stationären Bewegungszustand stabil sind. Zur hinreichenden Erfüllung der zweiten Aufgabe ist jedoch außerdem erforderlich, daß die Stellbewegung des Reglers mit möglichster Schnelligkeit vor sich geht. Jede unnötige Bewegungsverzögerung ist daher zu vermeiden.

2. Da der reibungslose Regler unbrauchbar ist, muß er durch schwingungsdämpfende Mittel brauchbar gemacht werden. Als solche kommen praktisch in Betracht:

- a) Gewöhnliche Reibung.
- b) Flüssigkeitswiderstände.
- c) Periodisches Festhalten der Reglerhülse.

Das Tanzen des Reglers nimmt eine besondere Stellung ein. Dieses Mittel beseitigt die Geschwindigkeitsschwankungen des Schwungrades um eine mittlere Geschwindigkeit bei konstanter Belastung der Maschine nicht dadurch, daß es die Pendelschwingungen

des Reglers dämpft, sondern es stellt gerade die durch eine periodisch wechselnde Kraft erzwungene Schwingung dar, welche aber geeignet ist, die mit den kleinen Schwingungen des Reglers innerhalb des Grenzbezirks verbundenen Geschwindigkeitsschwankungen der Maschine zu beseitigen. Der Regler wird durch das Tanzen absolut empfindlich. Besitzt der Regler ein Beharrungsgewicht, dann versetzt das Tanzen die Beharrungskraft in die günstige Lage, bei einer Belastungsänderung eine große, zur Stellzeugverlegung verwendbare Energiemenge dem Kolben der Dampfmaschine entnehmen zu können (§ 14).

3. Die gewöhnliche Reibung wirkt nicht an sich dämpfend, sondern immer nur in Verbindung mit dem nötigen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 des Reglers. Auch die Flüssigkeitsreibung von der Form: $m_r \cdot k \cdot \frac{dx}{dt}$ kann nur in Verbindung mit diesem eine brauchbare Schwingungsdämpfung ergeben. Die gewöhnliche Reibung bewirkt immer die geringste Bewegungsverzögerung des Reglers. Auch wenn wir den Regler so empfindlich machen, als es uns praktisch möglich ist, reicht der stets verbleibende Rest von gewöhnlicher Reibung hin, um in Verbindung mit dem erforderlichen Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 die Schwingungsdämpfung zu bewirken. Bei reinen Federreglern (Kegelpendel- und Flachreglern) ist außerdem ein so großer, mit der Geschwindigkeit zunehmender Widerstand: $m_r \cdot k \cdot \frac{dx}{dt}$ in Form der „klemmenden Zusatzreibung der Bewegung“ vorhanden, daß die Anbringung einer Ölbremse nur noch schädlich wirken kann. Durch Anwendung einer Ölbremse läßt sich zwar ein Regler bei niedrigerem Ungleichförmigkeitsgrad δ_0 brauchbar machen, als es bei Anwendung von nur gewöhnlicher Reibung möglich ist, aber die bei plötzlichen Belastungsänderungen eintretenden Geschwindigkeitsschwankungen werden deshalb nicht kleiner, sondern größer. Die Regulierung wird nicht besser, sondern schlechter. Die Anwendung einer Ölbremse kann also nur dann gerechtfertigt erscheinen, wenn der Betrieb derart ist, daß große plötzliche Belastungsschwankungen entweder nicht vorkommen, oder doch nur ganz allmählich verlaufen. Das Dämpfungsmittel der Ölbremse und des periodischen Festhaltens der Reglerhülse haben wir nur als Notbehelf zu betrachten und im allgemeinen von deren Anwendung abzusehen.

4. Es kann als Grundsatz aufgestellt werden, daß die praktisch beste Regulierung stets dann erhalten wird, wenn wir zur Schwingungsdämpfung nur die gewöhnliche Reibung durch die nötige Größe des Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 heranziehen. Wir erhalten auf diese Weise unbedingt die größte Schnelligkeit der Stellbewegung des Reglers. Die kleinen Geschwindigkeitsschwankungen der Maschine innerhalb des Unempfindlichkeitsgrades ε des Reglers sind zu beseitigen, indem der Regler durch eine periodisch wechselnde Kraft in kleine erzwungene Schwingungen versetzt wird. Bei Dampfmaschinen tritt das Tanzen des Reglers als Nebenerscheinung häufig von selbst auf. —

5. An den Regler sind folgende Anforderungen zu stellen:

- a) Große Regulierfähigkeit, d. i. kleiner reduzierter Muffenhub.
- b) Verstellbarkeit des Ungleichförmigkeitsgrades δ_0 .
- c) Geringe Eigenreibung.

Die Regulierfähigkeit der Kraftmaschine ist proportional der Anlaufzeit $T = \frac{J \cdot \omega^2}{L}$ (2). Diese kann nur durch Vergrößerung des Schwungradgewichtes gesteigert werden, wenn der Durchmesser und die Umdrehungszahl des Schwungrades bereits durch andere Erwägungen festgelegt worden sind.

Haben wir einigermaßen große Stellzeugwiderstände zu überwinden, dann ist es schwierig, den Unempfindlichkeitsgrad ε des Reglers ohne Anwendung eines Krafteinschalters klein zu halten, besonders wenn der Regler selbst eine beträchtliche Eigenreibung besitzt. Nach Formel (252) ist die zur Verfügung stehende, mittlere Stellkraft eines Reglers nur: $W = \frac{A}{s} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_r)$, wenn ε_r der durch die Eigenreibung verursachte Unempfindlichkeitsgrad des Reglers ist. Die Federregler, welche für große Stellzeugwiderstände allein in Frage kommen, wenn der Unempfindlichkeitsgrad ε klein gehalten werden soll, werden groß und teuer.

Die tanzenden Beharrungsregler bieten die Möglichkeit, beträchtliche Stellzeugwiderstände zu bewältigen. Außerdem gestatten die Beharrungsregler niedrige Ungleichförmigkeitsgrade δ_0 , welche nach Formel (227) bzw. (230) berechnet werden können.

Anhang.

Der Einfluß des Reglers auf das Pendeln parallel geschalteter Wechselstrommaschinen.

In diesem kurzen Anhang wird die Kenntnis der folgenden, in der „E. T. Z.“ erschienenen Abhandlungen vorausgesetzt:

- 1899. Jahrgang, Seite 134. Kapp.
- 1899. „ Seite 870. Dr. G. Benischke.
- 1900. „ Seite 188. Prof. Görges.
- 1902. „ Seite 59. A. Föppl.

Als Ursache der Pendelerscheinung beim Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen wird gewöhnlich die Ungleichförmigkeit der Drehbewegung innerhalb einer Umdrehung der Maschine infolge der Veränderlichkeit des Drehmomentes angegeben. Daß diese Ursache tatsächlich die wesentlichste, vielleicht einzige ist, findet dadurch eine Bestätigung, daß bei Turbinenantrieb das Pendeln nicht beobachtet wird. Bei Turbinen ist bekanntlich das Drehmoment innerhalb einer Umdrehung als konstant anzusehen. Auch wenn die Wechselstrommaschinen nicht direkt, sondern durch Riemen bzw. Seile von einer Dampfmaschine angetrieben werden, ist ein Pendeln nicht zu befürchten, weil durch die Elastizität der Transmission und durch das Gleiten derselben auf den Riemenscheiben die einzelnen Kolbenstöße der Maschine sehr abgeschwächt werden. Kapp hat diese Tatsache sofort erkannt; er erkannte auch, daß das Pendeln eine Interferenzerscheinung ist (er schreibt allerdings Resonanzerscheinung, meint aber natürlich Interferenzerscheinung im allgemeinen und nicht gerade den Sonderfall der Resonanz) und daß infolgedessen nicht allein die Größe des Ungleichförmigkeitsgrades einer Dampfmaschine, sondern vor allen Dingen die Periode der Ungleichförmigkeit für die Größe der zu erwartenden Pendelschwingung in Betracht kommt. Prof.

Görges hat unter der Annahme, daß die Ungleichförmigkeit der Drehkraft allein die Ursache der Pendelerscheinung sei, eine Berechnung der störenden Pendelbewegung der Magneträder gegeben, welche für praktische Zwecke wohl genügen dürfte. Es fragt sich nur, ob tatsächlich die Ursache des Pendelns einzig und allein in der Ungleichförmigkeit der Drehkraft zu suchen ist, oder ob noch andere Ursachen von wesentlichem Einflusse berücksichtigt werden müssen.

Dr. G. Benischke erblickt eine wesentliche Ursache des Pendelns in den Kräften, welche bei der elastischen Verdrehung langer Antriebswellen auftreten. Er ist ferner der Ansicht, daß eine hinreichend genaue Vorausberechnung der Pendelbewegung wegen mangelhafter Kenntnis des Trägheitsmomentes des Schwungrades (Magnetrades) und der Größe der synchronisierenden Kraft nicht möglich sei. Prof. Görges hat die Berechnung der synchronisierenden Kraft mit einer größeren Genauigkeit gegeben, als sie sonst bei der Berechnung von Dynamomaschinen erreicht werden kann. Was das Schwungrad anbetrifft, so ist es ein Leichtes, auch ohne nach der Gaußschen Methode das Schwungrad an einem Faden pendeln zu lassen, die Größe des Trägheitsmomentes auf dem Zeichenbrett so genau zu ermitteln, als es praktisch überhaupt gebraucht werden kann.

Nun hat A. Föppl in neuester Zeit eine weitere wesentliche Ursache des Pendelns in den Reglerschwingungen bei konstanter Belastung der Maschine erblickt. Sicherlich ist es theoretisch möglich, daß durch die Reglerschwingungen die Magneträder der beiden Wechselstrommaschinen unter den Einfluß einer periodisch wechselnden Kraft gestellt werden, welche dann in bekannter Weise ihre Wirkung auf die freie Schwingung der Magneträder gegen die synchronisierende Kraft ausübt; ob aber die von A. Föppl angestellte interessante Rechnung, welche den konstanten Teil der Reibungswiderstände gegen die Reglerschwingungen in eleganter Weise berücksichtigt, eine Anwendung auf praktisch vorliegende Verhältnisse finden kann, das ist eine Frage, der in diesem Anhang etwas näher getreten werden soll. Wir müssen zu diesem Zwecke unser Augenmerk auf die Eigentümlichkeiten der Regulierungen richten, deren Wirkung zum Teil sehr verschieden ist von der bei der Rechnung gewöhnlich gemachten Annahme, daß der Regler momentan und kontinuierlich die Drehkraft beeinflusst.

Es ist weniger der Zweck dieses Anhangs, einen Beitrag zur Theorie des Pendelns beim Parallelbetrieb bieten zu wollen; vielmehr hat der Verfasser die Absicht, noch einmal auf die Grundlagen und

Voraussetzungen hinzuweisen, auf denen die ganze vorliegende Arbeit aufgebaut worden ist. Die praktische Brauchbarkeit einer mathematischen Untersuchung hängt ja von dem Genauigkeitsgrad ab, mit welchem die gemachten Annahmen den in der Wirklichkeit vorliegenden Verhältnissen entsprechen. Ebenso wie für den gesetzeskundigen Richter die Schwierigkeit meist in der Frage liegt, inwieweit und ob überhaupt ein Gesetzesparagraph auf einen vorliegenden Fall anzuwenden ist, ebenso liegt für den Ingenieur der größte Teil der Schwierigkeit eines mechanischen Problems immer in der Frage, ob die der Rechnung zu Grunde liegenden Annahmen dem Wesen eines Mechanismus annähernd entsprechen. Über rechnerische Schwierigkeiten dürften wohl bei den im Maschinenbau vorkommenden mechanischen Problemen die Lehrbücher der Mechanik und Mathematik immer genügende Auskunft bieten.

Wir haben bisher nur von den Schwingungen des Reglers in der Pendelebene und den damit zusammenhängenden Geschwindigkeitsschwankungen der Maschine gesprochen. Auf die relativen Schwingungen des Schwungrades, welche den Geschwindigkeitsschwankungen entsprechen, sind wir nicht näher eingegangen, da uns eben nur die Schwingungsgeschwindigkeiten der relativen Schwungradschwingungen interessierten, und diese waren im Tolle-schen Diagramm bereits vorhanden; doch hätten wir ebenso gut die Differentialgleichung der Schwungradschwingung eingehender betrachten können. Die Relativschwingung des Schwungrades ist die erzwungene Schwingung der durch die Ausschläge des Reglers aus der Gleichgewichtslage eingestellten Drehkraftschwankungen. Sie besitzt also die Periode der Reglerschwingung. Schwungradschwingung und Reglerschwingung sind immer isochrone Schwingungen. Das die mittlere Geschwindigkeit des Schwungrades störende Moment war: $M_{\max} \cdot \frac{x}{s}$, wenn x der Ausschlag aus der Beharrungsstellung war. Ist J das Trägheitsmoment des Schwungrades und φ der augenblickliche Verdrehungswinkel des Schwungrades gegen ein mit konstanter, mittlerer Geschwindigkeit rotierendes Schwungrad von einer fest zu legenden Anfangslage aus gemessen, so lautet die Diff.-Gl. der relativen Schwungradschwingung einfach:

$$J \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_m \cdot \frac{x}{s};$$

wobei:

$$x = C_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot t} + e^{\rho \cdot t} \cdot (C_2 \cdot \cos q \cdot t + C_3 \sin q \cdot t) \quad . \quad (256)$$

Die Gl. (256) hatte zur besonderen Voraussetzung, daß auf das Schwungrad der Maschine nur der während der Schwingung konstante Belastungswiderstand und die durch den Regler eingestellten Drehkräfte wirken. Von der Einwirkung anderer Kräfte auf das Schwungrad, sowohl passiver (Reibungen) als aktiver Kräfte, haben wir bisher abgesehen, um mit unserer einen Diff.-Gl. 3. Grades auskommen zu können. Aber auch wenn andere Kräfte auf die Masse des Schwungrades nicht einwirken, gilt die Diff.-Gl. (256) nicht schlechthin. Das ist nur der Fall, wenn ausschließlich Widerstände von der Form $m_r \cdot k \cdot \frac{dx}{dt}$ gegen die Reglerschwingung vorhanden sind. Derartige Widerstände haben in der Rechnung die Wirkung, daß die Exponenten negativ bzw. kleiner werden, während sich die Periode der Schwingung vergrößert. Außer der Ölbremse haben wir noch die „klemmende Zusatzreibung der Bewegung“ als mit der Geschwindigkeit zunehmenden Widerstand kennen gelernt. Auch das periodische Festhalten der Reglerhülse ist nach Isaachsen als solcher Widerstand aufzufassen. Praktisch sind nun die konstanten Widerstände so groß, daß der Regler, falls er nicht tanzt, bei jeder Bewegungsumkehr eine verhältnismäßig sehr lange Pause macht. Der Wert von x bleibt eine Zeitlang konstant: $x = x_0$, und zwar im Vergleich zu der zur Bewegung erforderlichen Zeit so lange, daß bei fehlendem Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades und bei konstanter Belastung der Maschine die Bewegung des Schwungrades sehr angenähert durch die Diff.-Gl. dargestellt wird:

$$J \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} = \pm M_{\max} \cdot \frac{x_0}{s} \quad . \quad . \quad . \quad (257)$$

wobei x_0 ein konstanter Wert ist, der von der Größe der zusätzlichen Reibung der Ruhe abhängt. (Vergl. § 9.) Bei veränderlicher Belastung muß der Wert von x_0 für jede Bewegungsumkehr besonders bestimmt werden, wie wir es bei Zeichnung der Kraftkurven in Teil I getan haben. Bei Dampfmaschinen wirkt noch die Ungleichförmigkeit der Drehkraft auf die Bewegung des Schwungrades ein. Wollen wir eine genauere Untersuchung über die Schwungradschwingungen anstellen, dann müssen wir unbedingt das Drehkraftdiagramm der Maschine zu Rate ziehen. Dieses kann uns einzig und allein genügenden Aufschluß verschaffen, denn es enthält ja alle auf das Schwungrad wirkenden Tangentialkräfte. Wir müssen das Drehkraftdiagramm zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen

machen und haben uns demgemäß die Frage vorzulegen: „In welcher Weise wird das Drehkraftdiagramm durch die Reglerschwingungen bei konstanter Belastung der Maschine verändert?“ — Nimmt man zunächst an, daß der Regler nicht tanzt, wohl aber so empfindlich ist, daß er seine Beharrungsstellung fast genau innehält und praktisch fühlbare Schwankungen der mittleren Geschwindigkeit der Maschine nicht veranlaßt, dann ist das Drehkraftdiagramm für eine bestimmte Belastung der Maschine als unveränderlich gegeben anzusehen und es stellt direkt die Kraftkurve der Schwungradschwingung dar. Das Aussehen dieser Kraftkurve ist dem Ingenieur wohl bekannt; er weiß, daß je nach der Art der Maschine das Drehkraftdiagramm sehr verschieden ausfallen kann. Bei mehrcyindrigen Maschinen übt die Stellung der Kurbeln gegeneinander einen sehr großen Einfluß auf den Charakter des Diagramms aus.

Falls der Regler tanzt, ist ebenfalls bei konstanter Belastung der Maschine das Drehkraftdiagramm als unveränderlich zu betrachten. Bekanntlich stellt sich trotz des Tanzens, falls es in mäßigen Grenzen bleibt, ein Beharrungszustand der Maschine ein; es bleibt sogar die mittlere Geschwindigkeit der Maschine genauer konstant als beim nicht tanzenden Regler. Das Drehkraftdiagramm kann kaum einen Unterschied aufweisen, gleichgültig, ob der Regler tanzt oder nicht. Der Charakter der Kraftkurve der Schwungradschwingung muß derselbe bleiben, nur zeigt beim nicht tanzenden Regler das Diagramm infolge der Unempfindlichkeit des Reglers und infolge der zusätzlichen Reibung der Ruhe abwechselnd bald etwas zu viel, bald etwas zu wenig positive Arbeitsfläche, sodaß die mittlere Geschwindigkeit der Maschine zwischen engen Grenzen schwankt, während sie beim tanzenden Regler praktisch konstant bleibt. Da die Geschwindigkeitsschwankungen der Maschine innerhalb des Unempfindlichkeitsgrades ε des Reglers sehr langsam verlaufen, können wir sagen, daß die relativen Schwungradschwingungen sowohl für den tanzenden als auch für den nicht tanzenden Regler dieselben sind und durch die Kraftkurve des Drehkraftdiagramms dargestellt werden. Die Periode der erzwungenen Schwingung des tanzenden Reglers kommt für die Schwungradschwingung überhaupt nicht in Frage, während doch theoretisch der Reglerschwingung eine isochrone Schwungradschwingung entsprechen müßte. Eine kleine Abänderung des Drehkraftdiagramms der Maschine mit tanzendem Regler gegen

das Diagramm der Maschine mit nicht tanzendem Regler kann höchstens dadurch zustande kommen, daß die Eintritts- und Austrittszeiten des Dampfes durch das Tanzen des Reglers etwas verlegt werden. Es könnte z. B. die Steuerung durch den tanzenden Regler veranlaßt werden, andauernd etwas zu starken Voraustritt oder Voreintritt oder zu starke Kompression zu geben. Gleichzeitig muß dann auch die Steuerung, wenn der Beharrungszustand eingetreten ist, eine etwas größere Füllung geben, damit ein Beharrungszustand denkbar ist. Sicherlich sind derartige kleine Variationen des Diagramms denkbar. Es ist möglich, daß das vom Konstrukteur gezeichnete Drehkraftdiagramm durch das Tanzen des Reglers eine kleine Verschiebung erleidet, welche aber nur unwesentlich sein kann. Wir wollen das über das Drehkraftdiagramm Gesagte jetzt mit mathematischen Begriffen ausdrücken.

Bei konstanter Belastung der Maschine ist die Schwingung des Schwungrades durch das Indikator- bzw. Drehkraftdiagramm als Funktion der Koordinaten gegeben. Um einen analytischen Ausdruck für die Kraftkurve zu gewinnen, können wir uns die Kraftkurve durch Addition einer Reihe nach dem Sinusgesetz verlaufender Kraftkurven von kommensurabler Periode entstanden denken. In erster Annäherung ist dann die Schwungradschwingung als eine einzige Sinusschwingung aufzufassen, was bei der Eincylinder- oder Tandemmaschine schon recht gut zutrifft. Um die Integration ausführen zu können, versucht man die Kräfte als Funktion der Zeit darzustellen, und bei dem geringen Ungleichförmigkeitsgrad der Dampfmaschinen genügt es schon, wenn in erster Annäherung die Wege im Drehkraftdiagramm proportional der Zeit gesetzt werden. Das Reglertanzen kann die Kraftkurve nur durch einige sehr kleine störende Kräfte von ebenfalls kommensurabler Periode verändern. Solange die Belastung der Maschine sich nicht ändert und außer dem konstanten Belastungswiderstand und den Drehkräften weitere Kräfte am Schwungrad nicht angreifen, besteht also die Schwungradschwingung aus einer Reihe kommensurabler Schwingungen, die sowohl für den tanzenden als auch für den nicht tanzenden Regler praktisch dieselben sind.

Man sieht, wie sehr die Annahme, welche der Differentialgleichung der Reglerschwingung zu Grunde liegt, nämlich daß der Regler momentan und kontinuierlich die Drehkraft beeinflusst, unter Umständen verändert werden muß. Wird der Regler durch eine

Kraft von irgendwelcher Periode in erzwungene Schwingungen versetzt, dann bleibt nach Abklingen der Reglerschwingung die erzwungene Schwingung von der Periode der störenden Kraft allein übrig und es müßte auch das Schwungrad eine erzwungene Schwingung von derselben Periode ausführen, wenn der Regler momentan und kontinuierlich die Drehkraft verändern könnte. Das kann er aber bei Dampfmaschinen nicht. Wirkt die Regulierung auf die Füllung oder auf die Kompression des Niederdruckzylinders bei Verbundmaschinen, so kann eben der Regler immer nur einen Einfluß auf die Drehkraft während der Zeitdauer der Füllung bzw. Kompression ausüben; während des größten Teils seiner Bewegung bleibt der Regler vollständig ohne Einfluß auf die Regulierung. Der Regler kann daher das Schwungrad nicht in eine erzwungene Schwingung von beliebiger Periode versetzen, sondern es ist ihm die Periode seiner Einwirkung durch die Umdrehungszahl der Maschine bzw. durch die Zahl der Füllungen oder Kompressionen vorgeschrieben. Finden während einer Umdrehung der Maschine 2 Füllungen statt, dann kann der Regler auch nur 2 mal während einer Umdrehung von seinem Einflusse Gebrauch machen, ganz gleichgültig, wie groß die Anzahl seiner Schwingungen während einer Umdrehung der Maschine ist. Nur wenn die Reglerschwingungen sehr langsam verlaufen, was aber nicht der Fall ist, wird die Annahme momentaner und kontinuierlicher Wirkung des Reglers brauchbar. Wenn der Einfluß des tanzenden Reglers auf das Indikator- bzw. Drehkraftdiagramm überhaupt nachweisbar sein sollte, dann kann er nur in einigen kleinen störenden Kräften von der Grundschiwingung kommensurabler Periode bestehen.

Bei Turbinen gibt es einen Ungleichförmigkeitsgrad der Drehkraft nicht, auch ist ein Rückdruck der Steuerung nicht vorhanden, sodaß der Regler nicht tanzt, sondern nur die kleinen Schwingungen ausführt, welche im § 11 ausführlich besprochen worden sind. Da die Periode dieser Schwingung sehr groß ist, können wir, obgleich der Krafteinschalter nicht momentan und kontinuierlich wirkt, doch annehmen, daß die Maschine solange beschleunigt bzw. verzögert wird, als der Regler sich auf der einen bzw. anderen Seite seiner Beharrungsstellung befindet. Die erzwungene Schwingung der Turbine ist durch Gleichung (257) darzustellen; sie besitzt natürlich

die Periode der kleinen Reglerschwingungen bei konstanter Belastung. Da diese Periode sehr groß, die Größe der störenden Kraft hingegen sehr klein ist, kann die Schwingung der Turbine bei konstanter Belastung für das Pendeln der Magneträder unmöglich von Bedeutung sein, während bei Dampfmaschinen die durch die Ungleichförmigkeit der Drehkraft erzwungene Schwingung infolge ihrer Periode auch bei sehr großer Gleichförmigkeit der Drehbewegung störend wirken kann. Das Drehkraftdiagramm ist direkt als die Kraftkurve der Schwungradschwingung und als unabhängig von der Reglerschwingung bei konstanter Belastung zu betrachten.

Solange das Schwungrad die erzwungene Schwingung allein ausführt, hat es kein praktisches Interesse, die Relativbewegung des Schwungrades zu verfolgen, weil die Schwingungsgeschwindigkeiten innerhalb des Ungleichförmigkeitsgrades bleiben müssen. Sobald aber zu der erzwungenen Schwingung eine freie Schwingung hinzutritt, ist immer eine starke Vergrößerung der Schwungradschwingung zu befürchten, wenn die Perioden der beiden Schwingungen nicht genügend von einander verschieden sind. Die Periode der erzwungenen Schwingung ist aus den meisten Drehkraftdiagrammen auf den ersten Blick zu erkennen, und wenn die Periode der freien Schwingung ermittelt werden kann, dann zeigt der Vergleich der Perioden, was zu erwarten ist, ohne daß wir erst die Differentialgleichung der Bewegung für Regler und Schwungrad aufstellen.

Schon bei einer einzelnen Maschine ist es denkbar, daß bei sehr dünner, elastischer Antriebswelle die freie Schwingung der Schwungradmassen gegen die auf den Kurbelkreis reduzierten Kolben, Kurbel und Pleuelstangenmassen so stark durch die einzelnen Kolbenstöße anwächst, daß die Festigkeit des Materials überschritten wird und die Welle bricht. Praktisch muß aber die Welle schon wegen des Gewichtes des Schwungrades so stark gemacht werden, daß die Welle als starr anzusehen ist. Die Periode der freien Schwingung wird sehr klein, zumal die Schwungradmasse gegen die auf den Kurbelkreis reduzierte Kolben- etc. Masse sehr groß ist. Bekanntlich

ist die Periode der freien Schwingung von langen Wellen: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta_0}{c}}$,

wobei $\Theta_0 = \frac{\Theta_1 \cdot \Theta_2}{\Theta_1 + \Theta_2}$ ist. Θ_1 und Θ_2 sind die Trägheitsmomente der beiden gegeneinander schwingenden Massen. Praktisch ist die Schwingungszeit T bei Dampfmaschinenwellen, auch wenn sie lang

sind, immer sehr klein. Beim Pendeln der Magneträder haben wir auf die Verdrehung der Welle keine Rücksicht zu nehmen; andererseits würden wir auf das schwierigere Problem des Doppelpendels geführt. Ähnlich wie den Einfluß einer elastischen Riemenkupplung könnte man eine elastische Wellenkupplung höchstens als günstig bezeichnen, weil sie die Kraft der einzelnen Kolbenstöße etwas abschwächt.

Da die elektrischen Vorgänge beim Parallelbetrieb in das Gebiet der Elektrotechnik gehören, so soll für den Nichtelektrotechniker eine kurze Erklärung gegeben werden, wie die Entstehung einer freien Schwingung zwischen den Magneträdern zweier parallel geschalteter Wechselstrommaschinen möglich ist.

Das Parallelschalten bringt große Vorteile für den ökonomischen Betrieb mit sich und wird daher bei allen größeren Anlagen ausgeführt. Die Parallelschaltung erfordert, daß die parallel zu schaltenden Maschinen gleiche Spannungskurven besitzen, und kann ausgeführt werden, sobald Spannung und Periodenzahl für beide Maschinen gleich sind und die Spannungen zeitlich zusammen fallen. Um zu erkennen, daß die Maschinen synchron laufen, braucht man einen Phasenvergleich. Dieser Apparat besteht in seiner einfachsten Form aus einer Glühlampe. Die Glühlampe wird so an die Maschine angelegt, daß bei Übereinstimmung der Phasen die Ströme in der Lampe sich in jedem Augenblicke gegenseitig aufheben, sodaß die Lampe erlischt. Der Spannungsmesser, welcher in der Regel parallel zu den Glühlampen noch angeordnet wird, muß natürlich bei Phasenübereinstimmung auf null zeigen. Ist die Parallelschaltung ausgeführt worden und wir wollen den Synchronismus der Maschine stören, indem wir vielleicht das eine Magnetrad ein wenig bremsen, so setzt sich der Relativbewegung der beiden Magneträder eine Kraft, die synchronisierende Kraft, entgegen, welche immer das Bestreben hat, den Synchronismus aufrecht zu erhalten. Diese Kraft entsteht dadurch, daß mit den Relativschwingungen der beiden Magneträder entsprechende Phasenverschiebungen, und mit den verschiedenen großen absoluten Winkelgeschwindigkeiten der beiden Magneträder entsprechend verschiedene E.M.K. verbunden sind, sodaß sogenannte Ausgleichströme entstehen müssen, welche beide Maschinen durchfließen. Diese Ströme wirken derart, daß sie immer die in der Winkelgeschwindigkeit zurückbleibende Maschine als Motor treiben, während die voraneilende Maschine als Generator

aufzufassen ist. Die Kräftewirkung ist tatsächlich dieselbe wie bei einem synchronen Wechselstrommotor. Es kann schon eine beträchtliche Überlastung des Motors bzw. der einen Maschine eintreten, ehe der Synchronismus aufgehoben wird, ehe die Maschinen außer Tritt fallen, wie man sagt. Schon bevor die Maschinen außer Tritt fallen, d. h. schon bevor die synchronisierende Kraft plötzlich zu wirken aufhört, zeigen sich störende Erscheinungen. Die Ausgleichströme werden so stark, daß starkes Erhitzen der Leitungen und eventl. Durchschmelzen von Sicherungen stattfindet. Die Strommesser zeigen die immer stärker werdenden Schwingungen der Magneträder durch entsprechende Ausschläge ihrer Nadel an. Auch die Regler der Dampfdynamos müssen schließlich in Schwingungen geraten, wenn ihr Unempfindlichkeitsgrad nicht allzu groß ist. Genau wie die Magneträder müssen auch die Regler gegeneinander schwingen, d. h. wenn der eine Regler aufwärts schwingt, schwingt der andere abwärts.

Es ist Sache der Elektrotechnik, die synchronisierende Kraft S als Funktion der relativen Verdrehung φ der Magneträder zu ermitteln. In erster Annäherung kann jedenfalls Proportionalität angenommen werden, also: $S = k \cdot \varphi$, wenn φ die Ausweichung der beiden Magneträder aus der Gleichgewichtslage ist. Ist die konstante Größe k , das Trägheitsmoment θ des Magnetrades, sowie die Periode der erzwungenen Grundschiwingung des Magnetrades aus dem Drehkraftdiagramm ermittelt worden, dann haben wir alles, was wir brauchen. Wird die Welle als starr angenommen, dann bleibt eine einzige freie Schwingung, die Schwingung gegen die synchronisierende Kraft, übrig, deren Periode den Wert besitzt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\theta}{k}}.$$

Über die eventl. gefährlich werdenden erzwungenen Schwingungen gibt uns das Drehkraftdiagramm den nötigen Aufschluß. Die Regeln der Schwingungslehre können ohne weiteres Anwendung finden. In der „Mechanik starrer Körper“ von Dr. Routh ist in ausführlicher Weise alles zu finden, was aus der Schwingungslehre praktische Anwendung erfahren kann.

Zur Erläuterung der in dieser Arbeit gebrauchten mathematischen Ausdrücke sollen nach Dr. Routh die wichtigsten Regeln der Schwingungslehre hier angegeben und an dem einfachen Beispiel

der durch eine permanente Kraft gestörten Sinusschwingung erklärt werden. Es ist:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x = P \cdot \sin \alpha \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad (258)$$

wenn das Glied auf der rechten Seite die permanente, störende Kraft darstellt und k wieder der Dämpfungskoeffizient ist. Das vollständige Integral von Gl. (258) lautet bekanntlich:

$$x = e^{-\frac{k}{2m} \cdot t} \cdot \left\{ C_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{c}{m}} + C_2 \cdot \cos \sqrt{\frac{c}{m}} \right\} + C \cdot \sin(\alpha \cdot t + \varphi) \quad (259)$$

C_1 und C_2 sind die beiden Integrationskonstanten. Die Werte C und φ sind jedoch von den Anfangsbedingungen unabhängig. Es ist:

$$C = -\frac{P}{\sqrt{m^2(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha^2 \cdot k^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k \cdot \alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \frac{1}{m}; \quad \beta^2 = \frac{c}{m}; \quad (260)$$

In der Schwingungslehre sind folgende Bezeichnungen üblich:

1. Ein Glied von der Form: $P \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sin(\lambda \cdot t + \alpha)$ heißt eine störende Kraft. Fehlt die reelle Exponentialgröße, dann wird die Kraft permanent genannt; ist sie negativ, dann heißt die Kraft periodisch gedämpft. —

Die durch die Reglerschwingung erzeugte störende Kraft, welche das Schwungrad in erzwungene Schwingungen versetzt, würde also, wenn der Regler brauchbar ist und die Steuerung momentan und kontinuierlich wirkt, im allgemeinen eine periodisch gedämpfte sein, während die die Sinusschwingung störende Kraft $P \cdot \sin \alpha \cdot t$ eine permanente ist.

2. Der Teil des Integrals, welcher durch die störende Kraft hinzugekommen ist, heißt die durch die Kraft erzwungene Schwingung. Sie ist das partikuläre Integral der Diff. Gleichung. Dieses stellt aber die ganze Wirkung auf ein System, dessen Anfangsbedingungen gegeben sind, nicht dar. Es ändern sich die Integrationskonstanten. Um die ganze Wirkung zu finden, nehme man das allgemeine Integral und bestimme die Konstanten mit Hilfe der Anfangsbedingungen.

3. Das Verschwinden der freien Schwingung. Wenn ein System durch eine permanente störende Kraft in Schwingungen versetzt wird, so werden 2 Arten von Schwingungen erzeugt, freie und erzwungene. Sind keine Widerstandskräfte vorhanden, so bleiben beide während der Bewegung neben einander bestehen.

Treten aber solche Kräfte auf, so wird durch sie in die freie Schwingung eine Exponentialgröße eingeführt, infolge deren ihre Amplitude allmählich abnimmt und die freie Schwingung schließlich unbemerkt wird. Die erzwungene Schwingung hat aber den Exponentialfaktor $\nu = 0$, ist also auch permanent. Auf diese Art wird die Schwingung des Systems schließlich von den Anfangsbedingungen unabhängig und nur von der erzwungenen Schwingung abhängig. Die von einer permanenten störenden Kraft hervorgerufene Schwingung heißt daher zuweilen die permanente Schwingung.

Gl. (259) zeigt, daß die freie Sinusschwingung allmählich verschwindet und daß nur noch die erzwungene Schwingung besteht, wenn nur genügend Zeit verstrichen ist.

4. Wenn irgend eine periodische Störungsursache an einem System schwingender Massenpunkte angreift, so richtet sich die Periode der erzwungenen Schwingung nach der Periode der störenden Kraft.

Gl. (259) bestätigt diesen Satz.

5. Vergrößerung und Wirkung der störenden Kräfte. Die Wirkung einer permanenten störenden Kraft ist nicht nur einfach ihrer Größe proportional, sondern hängt hauptsächlich von ihrer Periode ab. (Vergl. (260).)

6. Große erzwungene Schwingung wird hervorgerufen, wenn die Perioden der freien und erzwungenen Schwingung nahezu dieselben sind. (Vergl. (260).)

7. Die Wirkung eines dämpfenden Widerstandes besteht darin, eine sonst sich vergrößernde erzwungene Schwingung zu modifizieren und in Grenzen zu halten. (Regler.)

8. Umgekehrt kann durch eine störende Kraft nur dann eine große erzwungene Schwingung hervorgerufen werden, wenn in derselben Richtung eine freie Schwingung von nahezu derselben Periode stattfindet.

9. Wenn die Periode der störenden Kraft viel kleiner ist, als die der freien Schwingung, so wird die erzeugte erzwungene Schwingung im allgemeinen unbedeutend.

Um gefühlsmäßig die vorstehenden Sätze zu erklären, betrachtet Dr. Routh als einfaches dynamisches Prinzip den Fall einer schweren Schaukel, welche durch eine Reihe leichter Stöße und Züge, wenn sie rechtzeitig angebracht werden, sehr leicht in heftige Schwingungen versetzt werden kann. Er schreibt:

Stoßen wir, wenn die Schaukel sich von uns entfernt, und ziehen wir, wenn sie sich nähert, so wird ihr Gang beständig beschleunigt und der Schwingungsbogen bei jedem folgenden Lauf vergrößert. Eine solche Reihe von abwechselnden Stößen und Zügen ist praktisch das, was wir eine permanente störende Kraft genannt haben, deren Periode dieselbe ist, wie die der freien Schwingung der Schaukel. Wenn dagegen die Periode derjenigen der freien Schwingung sehr unähnlich ist, so können zwar einige Stöße und Züge den Schwingungsbogen noch vergrößern, jedenfalls kommt aber eine Zeit, zu der sich die Wirkung umkehrt. Die Kraft wirkt der Bewegung entgegen und die Schwingungen nehmen ab, gerade so wie sie vorher zugenommen haben. —

Wenn wir die Welle als starr betrachten, so sind im Falle der parallel geschalteten Wechselstrommaschinen nur 3 Schwingungen denkbar, welche das Magnetrad ausführt. Es ist nicht erfindlich, wo noch andere Schwingungen herkommen sollten. Es gibt eine freie Schwingung des Magnetrades gegen die synchronisierende Kraft, zu welcher zwei erzwungene Schwingungen hinzutreten können. Die eine wird durch die Ungleichförmigkeit des Drehmomentes bei Dampfmaschinen erzeugt, eine zweite kann durch sehr langsame Schwingungen des Reglers bei konstanter Belastung hinzukommen. Bei Turbinen fällt die erzwungene Schwingung durch die Ungleichförmigkeit der Drehkraft innerhalb einer Umdrehung der Maschine fort. Bei Dampfmaschinen können jedoch tatsächlich zwei permanente, störende Kräfte vorhanden sein. Die durch die Ungleichförmigkeit der Drehkraft erzwungene Schwingung ist direkt im Drehkraftdiagramm dargestellt. Die Schwingungen des nicht tanzenden Reglers bei konstanter Belastung können nur ein ganz allmähliches Schwanken der mittleren Geschwindigkeit der Maschine zwischen engen Grenzen herbeiführen. Falls der Regler tanzt oder sehr empfindlich ist, bleibt jedoch die mittlere Geschwindigkeit der Maschine bei konstanter Belastung praktisch konstant. Das mäßige Tanzen ist für die Schwungradschwingung bedeutungslos. Für die erzwungene Schwingung des Schwungrades kommt nur das Drehkraftdiagramm in Frage. Dieses Diagramm ist zwar für eine bestimmte Belastung immer dasselbe, aber es nimmt für verschiedene Belastungen ziemlich verschiedene Gestalten an. Es ist möglich, besonders bei Verbundmaschinen mit verschränkten Kurbeln, daß wir bei sehr kleiner Belastung nicht nur eine andere Größe, sondern auch eine andere

Periode der erzwungenen Grundschiwingung des Magnetrades erhalten. Wenn daher ein Pendeln der Maschinen bei mäßiger Belastung im äußeren Stromkreis z. B. während des ganzen Tages nicht beobachtet wurde, so kann in den Abendstunden bei eintretender Vollbelastung (es ist an Lichtbetrieb gedacht) unter Umständen eine starke Neigung zum Pendeln eintreten. Wenn dann die beiden Regler der Dampfdynamos anfangen, lebhaft gegen einander zuschwingen und den Eintritt des Pendelns dem Maschinisten schon von weitem anzeigen, so sind diese charakteristischen Reglerschwingungen nicht als Ursache, sondern als Wirkung des Pendelns der parallel geschalteten Wechselstrommaschinen aufzufassen.

Tanzte der Regler bereits infolge der Ungleichförmigkeit der Drehkraft, dann ist diese Ungleichförmigkeit die Ursache sowohl für die erzwungene Schwungradschwiwingung, als auch für die erzwungene Reglerschwiwingung. Das mäßige Reglertanzen übt aber rückwärts einen Einfluß auf die Schwungradschwiwingung nicht aus, während umgekehrt bei zunehmender erzwungener Schwiwingung des Magnetrades auch die Reglerschwiwingungen sich vergrößern. Das Tanzen wird schließlich übermäßig stark und fängt an, das Drehkraftdiagramm, mithin den Beharrungszustand der Maschine beträchtlich zu stören, indem z. B. einmal gar keine Füllung oder sehr viel Voreintritt oder Austritt gegeben wird. — Je empfindlicher nun der Regler und je stärker sein Tanzen bei normalem Laufe der Dynamos bereits gewesen ist, desto leichter kann natürlich das Tanzen durch das Pendeln der Magneträder übermäßig vergrößert und das Drehkraftdiagramm gestört werden. Insofern kann man sagen, daß ein zu empfindlicher Regler einen schädlichen Einfluß auf den Parallelbetrieb auszuüben und das Außertrittfallen der Maschinen zu begünstigen vermag. —

Wenn wirklich durch die Reglerschwiwingungen bei konstanter Belastung das Pendeln der Maschinen eingeleitet werden könnte, dann ließe sich praktisch der Übelstand einfach dadurch beseitigen, daß man auf beide Steuerungen der Maschinen einen gemeinsamen Regler wirken läßt, der von einer Maschine aus angetrieben wird. Vorausgesetzt, daß die Maschinen von gleicher Bauart sind, müssen dann beide Maschinen zu jeder Zeit und bei jeder Belastung gleich große Drehkräfte vom Regler eingestellt erhalten.

A. Föppl gelangt infolge seiner Betrachtungen naturgemäß zu

der Ansicht, daß auch bei Turbinenantrieb unter Umständen ein Pendeln auftreten müsse. Die Regulierung der Turbinen ist derart, daß durch die kleinen, sehr langsam verlaufenden Schwingungen des Reglers bei konstanter Belastung der Maschine eine erzwungene Schwingung des Magnetrades von der Periode der kleinen Reglerschwingungen erzeugt werden kann. Da aber diese Periode T_k (148), wie in § 9 gezeigt worden ist, immer mehrere Sekunden beträgt, während die Periode der freien Schwingung gegen die synchronisierende Kraft bekanntlich nur Bruchteile einer Sekunde gewöhnlich ausmacht, so kann bei der Kleinheit der störenden Kraft eine wesentliche Schwingung der Magneträder niemals erzwungen werden. Dem Praktiker ist diese erfreuliche Tatsache bekannt.

Nach den Ausführungen dieses Anhangs würde die von Prof. Görges angestellte Rechnung über das Pendeln parallel geschalteter Wechselstrommaschinen bereits alle in Frage kommenden Einflüsse von praktischer Bedeutung umfassen. Die Reglerschwingungen bei konstanter Belastung des äußeren Stromkreises haben auf das Pendeln einen zu berücksichtigenden Einfluß deshalb nicht, weil die Art der Regulierung bei Dampfmaschinen einen solchen nicht gestattet. Bei Turbinen sind die durch den Regler veranlaßten Schwingungen jedes Magnetrades so klein und verlaufen so langsam, daß sie ein merkliches Pendeln der Maschinen nicht bewirken können. Weitere einmalige Ursachen, einmalige Impulse zur Relativbewegung der Magneträder sind zwar möglich, z. B. ungleiche Erregung, plötzliche Belastungsänderung im äußeren Stromkreis, aber anderweitige permanente, störende Kräfte, als die im Drehkraftdiagramm vorhandenen, wirken auf die Bewegung des Schwungrades offenbar nicht ein.

Additional material from *Fliehkraft und Beharrungsregler*.
Versuch einer einfachen Darstellung der Regulierungsfrage,
ISBN 978-3-662-32998-6, is available at <http://extras.springer.com>

