

# Analysis von Grundproblemen der theoretischen Wechselstromtechnik

Von

Dr. Carl Breitfeld

o. ö. Professor

an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag



Mit 105 Abbildungen und einer Tafel

---

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.  
Braunschweig 1927

ISBN 978-3-663-00392-2      ISBN 978-3-663-02305-0 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-02305-0

**Alle Rechte vorbehalten**

**Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1927**

*Der Erinnerung an  
H. F. Weber  
gewidmet*

## Vorwort.

Die Erfahrungen, die mir das eigene Leben — und nicht nur dessen Jugend — gegeben hat, sowie die Erfahrungen, die ich an meinen Hörern gemacht habe, haben mir gezeigt, daß die meisten Bücher über theoretische Elektrotechnik — auch Lehrbücher nicht ausgenommen — so hohe Anforderungen an die mathematischen Kenntnisse des Lesers stellen, daß ein halbwegs fließendes „Lesen“ solcher Bücher, zum mindesten dem Anfänger, unmöglich ist. Die geistige Aufnahme solcher Bücher, durch den ehrlich und ernsthaft Strebenden, bedeutet meist ein mühevolltes Studium, ein versuchtes Nachrechnen der Resultate, welches oft — mangels der nötigen mathematischen Kenntnisse — nach wenigen Seiten zu einem resignierten „Aufgeben“ führt.

Diese Tatsachen können natürlich nichts weniger als einen Vorwurf für die vielen ausgezeichneten Autoren unseres Faches bedeuten, die sich eben nicht an den wirklichen Anfänger, sondern an bereits „Wissende“ wenden.

Der intelligente Anfänger ist es nun gerade, der einen starken Skeptizismus gegen mathematische „Resultate“ nicht zu unterdrücken vermag und den Weg deutlich sehen will, der zu ihnen führt.

Das Ideal einer derartigen Wegweisung sind in meiner Erinnerung die Vorlesungen gewesen, die H. F. Weber, der ausgezeichnete mathematische Physiker, der er im Grunde war, über theoretische Elektrotechnik in Zürich gehalten hat, und die zu hören ich das Glück hatte.

Weber verstand es wie Keiner, den Vorlesungen, obwohl sie rein mathematischen Charakter hatten, den Horror des mathematischen Kleides zu nehmen, indem er einfach das zum mathematischen Verständnis Notwendige auch mit vortrug. Auf diese Art genügten, als Unterlage für seine Vorlesungen, tatsächlich die bescheidenen Ele-

lemente der Infinitesimalrechnung, und eine Menge, mathematisch herzlich ungebildeter Hörer, lernte erst bei ihm die notwendige Mathematik.

Wenn ich dem oft geäußerten Wunsche ehemaliger Hörer nachkomme und dieses Buch schreibe, so geschieht dies in Erinnerung und unter dem Vorbild der Weberschen Vorlesungen. Hat sich auch der „heute“ notwendige Inhalt seit der Zeit, zu der ich Weber hörte — es sind 36 Jahre —, ein wenig stark geändert, so war ich doch bemüht, die Form der Weberschen Darstellungsweise beizubehalten.

Entgegen dem Streben vieler ausgezeichneten Autoren, in „einem“ Buche, auf knappem Raume, möglichst die „ganze“ theoretische Wechselstromtechnik zu bringen, will ich mich begnügen, nur einige, der mir am wichtigsten und schwierigsten erscheinenden Probleme, diese aber mit so ausführlicher Breite zu behandeln, daß der Leser möglichst geringe mathematische Schwierigkeiten in der Lektüre finde. Dabei muß ich allerdings dem Leser den Rat geben, das Buch von Anfang an, Seite für Seite zu lesen, da jedes Kapitel die Kenntnis des Vorangehenden voraussetzt.

Ich bin der Meinung, daß man einige Probleme unserer Wissenschaft „ab ovo“ durchgerechnet gesehen haben, und sich der vielen Schwierigkeiten, die sich unterwegs bieten, bewußt sein muß, ehe man an eine fruchtbare, selbständige Forschungstätigkeit geht. Auch das Studium anderer Probleme, die hier nicht behandelt wurden, wird auf einer solchen Basis leichter fallen.

Mir sagte einmal einer meiner Hörer, daß er aus den Vorlesungen insofern ein moralisches Plus mitnähme, als er durch sie den Mut erhalten hätte, sich an das Studium mathematisch schwierig aussehender Bücher, die er früher, als unverdaulich, zugeschlagen habe, heranzuwagen.

Wenn die Lektüre dieses Buches nicht mehr gibt als diesen Mut, so halte ich den Zweck des Buches für erfüllt.

Daß ich das Buch in verehrungsvollster Dankbarkeit der Erinnerung an H. F. Weber widme, wird nach dem oben Gesagten begreiflich sein. Er ist mein Meister gewesen.

Ich glaube, daß Alle, die, mit wirklichem Wissensdrang, Weber gehört haben, seine aufrichtigen Verehrer geworden sind. Wenn sein Name der Öffentlichkeit nicht so geläufig wurde, als er es verdiente, so liegt dies nur an Webers Schweigsamkeit vor der Öffentlichkeit.

Um so gehaltvoller und gedankenreicher waren seine Vorlesungen, deren Wert nach seinem Tode in einem ebenso schönen als treffenden Nekrolog, den sein Schüler, Prof. L. Lombardi schrieb, im rechten Lichte gezeigt wurde.

Literaturangaben zu machen habe ich absichtlich vermieden. Ich glaube mir dadurch keinen Vorwurf zuzuziehen, denn es fällt mir nicht ein, irgend eine geistige Priorität für mich zu beanspruchen, und die Priorität anderer, für diesen — zum Gemeingut gewordenen — Stoff zu wahren, erscheint mir überflüssig. Jedenfalls habe ich die sämtlichen behandelten Probleme, ohne nähere Literaturbenutzung, neuerlich, zum Teil nach meiner Art durchgerechnet.

Meinem Hochschulkollegen, dem Mathematiker Herrn Professor Dr. Paul Funk, der — leider nur — die ersten Abschnitte des Manuskriptes gelesen und mir manchen schätzbaren Rat erteilt hat, sage ich hierfür besten Dank.

Ich weiß wohl, daß meine Darstellungsart nicht immer Gnade vor den Augen des reinen Mathematikers findet, aber meine Lehr- erfahrung sagt mir, daß sie pädagogisch nicht unnützlich ist. Jedenfalls möchte ich betonen, „daß das Buch von einem Nichtmathematiker für andere Nichtmathematiker geschrieben ist“.

Weiter danke ich meinem Assistenten, Herrn Ing. W. Künstner, für die Herstellung der Reinschrift des Manuskriptes und die Ausführung der Abbildungen.

Prag, im März 1927.

**Carl Breitfeld.**

## Inhaltsverzeichnis.

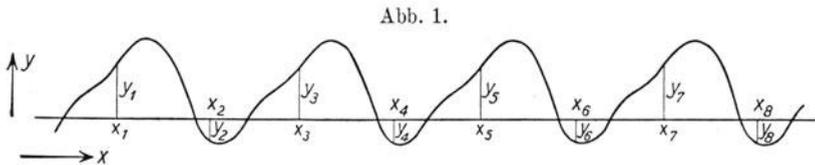
	Seite
Einleitung. Darstellung von Wechselstromgrößen . . . . .	1
I. Abschnitt. Analyse verzerrter Kurvenformen . . . . .	19
II.   "   Effektivwert und arithmetischer Mittelwert . . . . .	36
III.   "   Der Wechselstromkreis mit nur Ohmschem und konstantem induktivem Widerstand . . . . .	41
IV.   "   Der Wechselstromkreis mit Ohmschem und nicht konstantem induktivem Widerstand . . . . .	53
V.   "   Der Stromkreis mit Ohmschem, konstantem induktivem und kapazitivem Widerstand . . . . .	57
VI.   "   Die Leistung eines Wechselstromes . . . . .	97
VII.   "   Resonanz . . . . .	101
VIII.   "   Der Einschaltvorgang auf Leitungen mit gleichmäßig ver- teilter Kapazität und Selbstinduktion . . . . .	125
IX.   "   Elektrische Schwingungen in magnetisch gekoppelten Strom- kreisen . . . . .	182
X.   "   Stromverdrängung . . . . .	210
XI.   "   Flußverdrängung und Wirbelstromverlust . . . . .	265
XII.   "   Das Kreisdiagramm des Induktionsmotors . . . . .	276
Berichtigungen während des Druckes . . . . .	348

# Einleitung.

## Darstellung von Wechselstromgrößen.

Der grundlegende mathematische Begriff, den wir für die Darstellung von Wechselstromgrößen innehaben müssen, ist der Begriff der „einwertigen, periodischen Funktion“.

Eine Größe  $y$  ist dann eine einwertige, periodische Funktion einer unabhängig Veränderlichen  $x$ , wenn Werten von  $x$ , die um einen be-



stimmten, immer gleichen Betrag  $J$  voneinander verschieden sind, stets ein und derselbe Wert  $y$  entspricht. Die mathematische Formulierung einer solchen Funktion lautet

$$f(x + nJ) = f(x),$$

wobei  $n$  die Reihe der ganzen Zahlen von Null bis Unendlich durchläuft.

Stellen wir nach dieser Definition eine solche Funktion graphisch dar, so ergibt sich die Abb. 1. Wir finden dem „bestimmten“ Abszissenintervall

$$x_3 - x_1 = x_5 - x_3 = x_7 - x_5 = J$$

oder

$$x_8 - x_6 = x_6 - x_4 = x_4 - x_2 = J$$

immer die gleichen Ordinaten

$$y_1 = y_3 = y_5 = y_7$$

bzw.

$$y_2 = y_4 = y_6 = y_8$$

zugeordnet. D. h. nach Ablauf des Intervalls  $J$  wiederholt sich der Funktionswert.

$J$  heißt daher die „Länge der Periode“.

Der einfachste Fall der periodischen Funktion ist die goniometrische Funktion

$$y = A \sin(mx), \quad (1)$$

wo  $A$  die Amplitude heißt.

Da  $(mx)$  einen Winkel oder einen Bogen bedeutet und  $x$  eine beliebige, sich stetig ändernde Größe, so muß  $m$  eine konstante Größe sein von der Form

$$m = \frac{2\pi}{J},$$

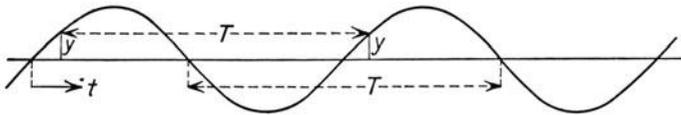
wobei  $J$  eine Größe derselben Art sein muß wie die Variable  $x$ ; denn der Quotient  $\frac{x}{J}$  muß eine unbenannte Zahl geben.

Es wird also

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{x}{J}\right). \quad (1a)$$

Läßt man nun  $x$  stetig wachsen, so durchläuft der Quotient  $\frac{x}{J}$  alle denkbaren Zahlen, und es wird der Winkel  $2\pi \frac{x}{J}$  alle möglichen Werte annehmen.

Abb. 2.



Wächst  $x$  um  $J$  oder ein ganzes Vielfaches von  $J$ , so daß

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{x + kJ}{J}\right),$$

wobei  $k =$  ganze Zahl, so wird  $y$  stets denselben Wert annehmen, da

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{x}{J} + 2\pi k \frac{J}{J}\right) = A \sin 2\pi \frac{x}{J}.$$

Es ist daher  $J$  die Periodenlänge der Sinusfunktion.

Bedeutet die Veränderliche  $x$  die Zeit  $t$ , so ist auch die Periodenlänge eine Zeit  $T$ . Wir werden also eine Sinusfunktion der Zeit in der Form schreiben:

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \quad (1a')$$

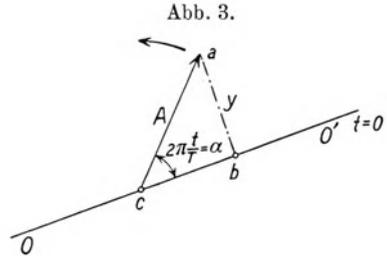
wobei  $t$  die laufende Zeit und  $T$  die Länge der Periode sind.

Graphisch stellen wir die Funktion durch Abb. 2 dar.

Es ist leicht, sich von dieser Funktion eine sinnliche Vorstellung zu machen. Lassen wir eine Strecke von der Länge  $A$  in einer Ebene um ihren Anfangspunkt  $c$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $m = \frac{2\pi}{T}$  gleichförmig rotieren, so ist das Lot von ihrem Endpunkt  $a$ , auf eine beliebige, feste Richtung  $OO'$  durch den Anfangspunkt, der Funktionswert  $y$ , wenn wir die Zeit von dem Augenblick an zählen, in welchem die Strecke die gewählte, feste Richtung durchlaufen hat.

Nach Abb. 3 ist

$$\begin{aligned} ab = y &= A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \\ &= A \sin(mt). \end{aligned}$$



Nach Abb. 3 ist  $\alpha = 2\pi \frac{t}{T}$  der Winkel, der von der rotierenden Strecke in der Zeit  $t$  überstrichen wurde. Es ist also die Winkelgeschwindigkeit

$$m = 2\pi \frac{1}{T}.$$

Ist  $n$  die Umdrehungszahl der Strecke in der Zeiteinheit, der Sekunde, so ist die Winkelgeschwindigkeit andererseits gegeben durch

$$m = 2\pi n.$$

Daraus folgt die Länge oder Dauer der Periode mit

$$T = \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Dieser Fall liegt bei der zweipoligen Wechselstrommaschine mit reiner Sinusform der elektromotorischen Kraft (EMK) vor, wo die Dauer der Periode gleich dem Reziprokwert der sekundlichen Umdrehungszahl ist. Macht eine zweipolige Maschine 1200 Touren in der Minute, also 20 in der Sekunde, so ist die Periodenzahl ihrer EMK 20 und die Zeitdauer einer Periode  $\frac{1}{20}$  Sekunde.

Bei der zweipoligen Maschine ist die Periodenzahl gleich der Umdrehungszahl der Maschine. Nennen wir  $f$  die Periodenzahl oder die Frequenz, so ist

$$f = n.$$

Hat die Maschine  $p$  Polpaare, so wissen wir, daß auf eine Umdrehung  $p$  Maxima und  $p$  Minima, der EMK, somit  $p$  ganze Perioden entfallen.

Ist  $n$  die Umdrehungszahl in der Sekunde, so ist die Periodenzahl

$$f = p \cdot n$$

und die Zeitdauer der Periode

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{p \cdot n}. \quad (2a)$$

Würden wir einer Maschine, die 1200 Umdrehungen in der Minute macht, 6 Pole geben, also  $p = 3$ , so würden wir 60 Perioden erzielen, oder die Zeitdauer der Periode auf  $\frac{1}{60}$  Sekunde herabsetzen.

Wegen  $\frac{1}{T} = f$  können wir Gl. (1 a') die Form

$$y = A \sin(2\pi f \cdot t) = A \sin(\omega t) \quad (3)$$

geben. Es ist aber „jetzt“  $2\pi f$  nicht mehr die geometrische Winkelgeschwindigkeit.

Die Größe  $\omega = 2\pi f$  heißt die Wechselgeschwindigkeit oder die Kreisfrequenz. Nur bei der zweipoligen Maschine ist die Wechselgeschwindigkeit gleich der Winkelgeschwindigkeit.

In Gl. (3) haben wir einen Ausdruck für die EMK einer  $2p$ -poligen Wechselstrommaschine gefunden, wenn diese Maschine „reine“ Sinuswellen der EMK liefert.

Der Momentanwert  $e$  der EMK ist gegeben durch

$$e = \mathfrak{E} \sin(2\pi f t), \quad (3a)$$

wobei  $\mathfrak{E}$  die Amplitude und  $f$  die Frequenz sind.

Verstehen wir in Abb. 3 unter  $\alpha$  den Winkel  $2\pi f t$ , so dient Abb. 3 auch zur Darstellung der Gl. (3 a).

Wenn wir nun einen Naturvorgang beobachten, so zählen wir die Zeit vom Beginn unserer Beobachtung an, d. h. wir setzen den Anfangszeitpunkt der Beobachtung gleich Null und lassen von da an die Zeit wachsen.

Gl. (3 a) sagt, daß für  $t = 0$  auch  $e = 0$  ist.

Es muß nun aber durchaus nicht der Fall sein, daß zu Beginn unserer Beobachtung die EMK gleich 0 ist, sondern sie wird im allgemeinen einen beliebigen, zwischen Maximum und Minimum gelegenen Wert haben.

Daraus folgt, daß Gl. (3 a) noch keinen „allgemein“ brauchbaren Ausdruck für die EMK darstellt.

Wir wollen nun für die EMK folgenden Ansatz machen:

$$e = \mathfrak{E} \sin \{ 2 \pi f (t + t_0) \} = \mathfrak{E} \sin \{ \omega (t + t_0) \}, \quad (4)$$

worin  $t$  die laufende Zeit und  $t_0$  ein vollkommen willkürlich gewählter Zeitpunkt — der des Beginns der Beobachtung — sein sollen.

„Jetzt“ ist

$$\text{für } t = 0, \dots e = \mathfrak{E} \sin \omega t_0,$$

also ein ganz beliebiger Wert, der nur von der Wahl von  $t_0$  abhängt. Da wir  $t_0$  jeden beliebigen positiven oder negativen Wert geben können,

Abb. 4.

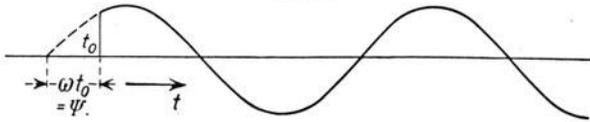


Abb. 5.

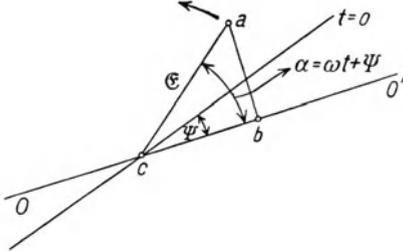
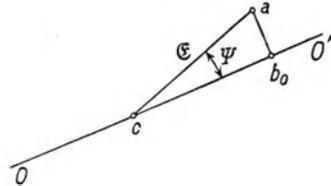


Abb. 6.



ist es klar, daß für  $t = 0$ , also den Beginn unserer Beobachtung, die EMK jeden möglichen Wert annehmen kann.

Da wir den Winkel oder Bogen  $\omega t_0 = \psi$  setzen können, so können wir auch schreiben:

$$e = \mathfrak{E} \sin (\omega t + \psi). \quad (4a)$$

Das ist ein „allgemein brauchbarer“ Ausdruck, der es uns gestattet, die EMK von jedem beliebigen Anfangswert — von jeder beliebigen Phase — an zu verfolgen. Der Winkel  $\psi$  charakterisiert diese Phase.

Wenn wir Gl. (4a) graphisch darstellen, erhalten wir Abb. 4.

Die laufende Zeit wird vom Moment  $t_0$  an gezählt; in diesem Moment hat die EMK den Wert

$$e = \mathfrak{E} \sin \omega t_0 = \mathfrak{E} \sin \psi.$$

Abb. 3 ist ohne weiteres für die Darstellung von (4a) zu verwenden (s. Abb. 5), wenn wir die Zeit von dem Moment an zählen, in welchem die Strecke  $ca$  den Winkel  $\psi$  überstrichen hat; d. h. auch: zur Zeit

$t = 0$  schließt die Strecke  $ca$  mit ihrer Bezugslinie  $OO'$  den Winkel  $\psi$  ein. Somit ist zur Zeit  $t = 0$  unsere Sinusfunktion durch Abb. 6 gegeben.

Nach Abb. 5 ist  $ab = e = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi)$ .

Nach Abb. 6 ist  $ab_0 = e_0 = \mathfrak{E} \sin \psi$ .

Wir wollen nun gleichzeitig „zwei“ gleichperiodige, elektromotorische Kräfte verfolgen, die durch die Gleichungen

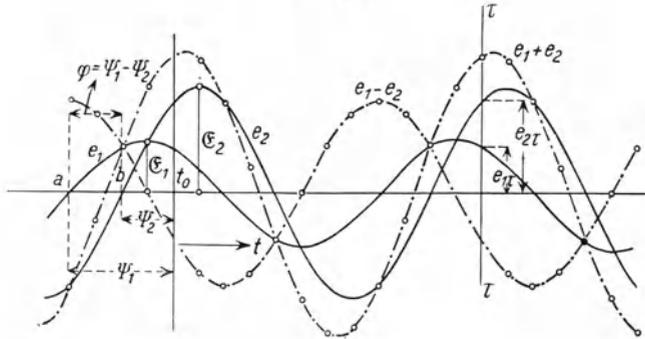
$$e_1 = \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi_1), \quad (\alpha)$$

$$e_2 = \mathfrak{E}_2 \sin(\omega t + \psi_2) \quad (\beta)$$

gegeben sein sollen.

Da wir beide von demselben Zeitmoment  $t_0$  an zu beobachten haben, so ergibt sich die Darstellung in Abb. 7. Im Moment  $t_0$  — dem Beginn

Abb. 7.



der Beobachtung — ist die laufende Zeit  $t = 0$ ; somit nach  $(\alpha)$  und  $(\beta)$

$$e_1 = \mathfrak{E}_1 \sin \psi_1, \quad e_2 = \mathfrak{E}_2 \sin \psi_2.$$

Wir haben, von  $t_0$  an, die Winkel  $\psi_1$  und  $\psi_2$  nach links aufzutragen, um die Punkte  $a$  und  $b$ , die Durchgänge von  $e_1$  und  $e_2$  durch Null, zu erhalten. Der Nulldurchgang  $a$  von  $e_1$  findet, wie ersichtlich, früher statt als  $b$  von  $e_2$ , und zwar um eine Zeit früher, die charakterisiert ist durch die Winkeldifferenz  $\psi_1 - \psi_2$ .

Es sei

$$\psi_1 = \omega t_1, \quad \psi_2 = \omega t_2,$$

so ist

$$\psi_1 - \psi_2 = \omega(t_1 - t_2) = \omega t' = \varphi.$$

Daraus folgt die Zeit  $t'$  der Verzögerung von  $e_2$  gegen  $e_1$  mit

$$t' = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\omega} = \frac{\varphi}{\omega}.$$

$\varphi = \psi_1 - \psi_2$  heißt der Winkel der Phasendifferenz oder auch kürzer die Phasendifferenz oder der Phasenwinkel zwischen  $e_1$  und  $e_2$ .

Wir können also die Gl. ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) graphisch auch so darstellen, daß wir für  $e_1$  die Sinuslinie zeichnen und dieser, um den Winkel  $\varphi = \psi_1 - \psi_2$  verschoben, die Sinuslinie für  $e_2$  folgen lassen. Eine beliebige Ordinate ( $\tau, \tau$ ) ergibt dann gleichzeitige Werte von  $e_1$  und  $e_2$ , so daß in der Abbildung ohne weiteres die richtige Addition oder Subtraktion der beiden Funktionen ausgeführt werden kann (strichpunktierte Linien).

Führen wir nun z. B. die Addition analytisch aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 &= \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \mathfrak{E}_2 \sin(\omega t + \psi_2), \\ &= \mathfrak{E}_1 \sin \omega t \cos \psi_1 + \mathfrak{E}_2 \sin \omega t \cos \psi_2 + \mathfrak{E}_1 \cos \omega t \sin \psi_1 + \\ &\quad + \mathfrak{E}_2 \cos \omega t \sin \psi_2, \\ &= (\mathfrak{E}_1 \cos \psi_1 + \mathfrak{E}_2 \cos \psi_2) \sin \omega t + (\mathfrak{E}_1 \sin \psi_1 + \mathfrak{E}_2 \sin \psi_2) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\mathfrak{E}_1 \cos \psi_1 + \mathfrak{E}_2 \cos \psi_2 = \mathfrak{E} \cos \psi, \quad (\gamma)$$

$$\mathfrak{E}_1 \sin \psi_1 + \mathfrak{E}_2 \sin \psi_2 = \mathfrak{E} \sin \psi, \quad (\delta)$$

so wird

$$e_1 + e_2 = \mathfrak{E} \sin \omega t \cos \psi + \mathfrak{E} \cos \omega t \sin \psi = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi). \quad (5)$$

$\mathfrak{E}$  ergibt sich nun durch Quadrieren und Addieren von ( $\gamma$ ) und ( $\delta$ ) mit

$$\mathfrak{E} = \sqrt{\mathfrak{E}_1^2 + \mathfrak{E}_2^2 + 2\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)}. \quad (6)$$

$\psi$  ergibt sich durch Division von ( $\delta$ ) durch ( $\gamma$ ) mit

$$\psi = \arctg \frac{\mathfrak{E}_1 \sin \psi_1 + \mathfrak{E}_2 \sin \psi_2}{\mathfrak{E}_1 \cos \psi_1 + \mathfrak{E}_2 \cos \psi_2}. \quad (7)$$

Die Summe der beiden gleichperiodigen Sinusfunktionen ist also eine neue Sinusfunktion mit gleicher Wechselgeschwindigkeit ( $\omega$ ), deren Amplitude ( $\mathfrak{E}$ ) und Phase ( $\psi$ ) sich aus (6) und (7) berechnen lassen.

Auf dieselbe Weise ergibt sich die Summe von beliebig vielen Sinusfunktionen, indem man die Summe der zwei ersten mit der dritten zusammensetzt, diese Summe mit der vierten usw.

Und gerade so wird

$$e_1 - e_2 = \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi_1) - \mathfrak{E}_2 \sin(\omega t + \psi_2) = \mathfrak{E}' \sin(\omega t + \psi') \quad (5a)$$

mit

$$\mathfrak{E}' = \sqrt{\mathfrak{E}_1^2 + \mathfrak{E}_2^2 - 2\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)} \quad (6a)$$

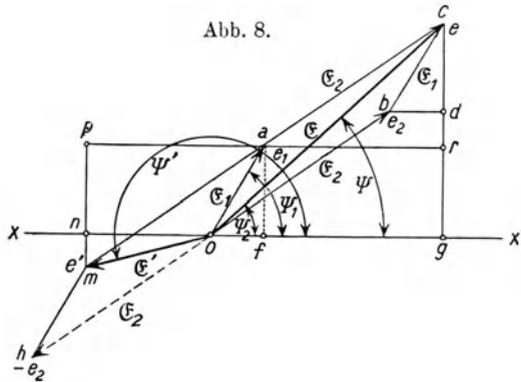
und

$$\psi' = \arctg \frac{\mathfrak{E}_1 \sin \psi_1 - \mathfrak{E}_2 \sin \psi_2}{\mathfrak{E}_1 \cos \psi_1 - \mathfrak{E}_2 \cos \psi_2}. \quad (7a)$$

Die Gl. (6), (7), (6a), (7a) ergeben eine einfache Konstruktion für die Amplitude und Phase der algebraischen Summe zweier gleichperiodiger Sinusfunktionen  $e_1$  und  $e_2$ .

Wählt man in der Zeichenebene eine Richtung  $xx'$  und trägt — gegen diese um die Winkel  $\psi_1$  und  $\psi_2$  geneigt — von einem Punkte  $o$  aus die Strecken  $oa = \mathfrak{E}_1$ ,  $ob = \mathfrak{E}_2$  auf, so ist die geometrische Summe  $oc$  dieser Strecken die gesuchte Amplitude  $\mathfrak{E}$ , die um den Phasenwinkel  $\psi$  gegen die Richtlinie  $xx'$  geneigt ist.

Will man Amplitude und Phase der Differenz der Funktionen  $e_1$  und  $e_2$  haben, so trägt man in der Verlängerung von  $bo$  die Strecke



$oh = \mathfrak{E}_2$  auf, bildet die geometrische Summe  $om$  von  $oa$  und  $oh$  und erkennt in dieser die gesuchte Amplitude  $\mathfrak{E}'$ , die um den Phasenwinkel  $\psi'$  gegen die  $xx'$ -Richtung geneigt ist; denn nach der Abb. 8 ist

$$oc = \sqrt{oa^2 + ob^2 - 2oa \cdot ob \cdot \cos(\sphericalangle oac)} =$$

$$= \mathfrak{E} = \sqrt{\mathfrak{E}_1^2 + \mathfrak{E}_2^2 + 2\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)},$$

$$tg \psi = \frac{gr + rc}{of + fg} = \frac{\mathfrak{E}_1 \sin \psi_1 + \mathfrak{E}_2 \sin \psi_2}{\mathfrak{E}_1 \cos \psi_1 + \mathfrak{E}_2 \cos \psi_2},$$

$$om = \sqrt{oa^2 + oh^2 - 2oa \cdot oh \cos(\sphericalangle oam)} =$$

$$= \mathfrak{E}' = \sqrt{\mathfrak{E}_1^2 + \mathfrak{E}_2^2 - 2\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)},$$

$$tg \psi' = \frac{np - mp}{of - ap} = \frac{\mathfrak{E}_1 \sin \psi_1 - \mathfrak{E}_2 \sin \psi_2}{\mathfrak{E}_1 \cos \psi_1 - \mathfrak{E}_2 \cos \psi_2}.$$

Wir haben also für diese Konstruktion die Größen  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$  als „Vektoren“ angesehen und sie nach den Regeln der Vektorrechnung zusammengesetzt. Der Betrag des Vektors war hierbei die Amplitude der Sinusfunktion, seine Richtung ergab sich, indem man die Amplitude,

unter dem Phasenwinkel gegen eine fest gewählte Richtung geneigt, auftrug.

Aus den Abb. 3 und 5 sehen wir, daß der Momentanwert einer Wechselstromgröße durch die jeweilige Lage eines rotierenden Vektors gegeben ist.

Zum Zwecke der Addition zweier Wechselstromgrößen brauchen wir ihre Momentanwerte zu derselben, im übrigen beliebigen Zeit, also z. B.  $t = 0$ .

Wir zeichnen daher nach Abb. 6 die beiden Wechselstromgrößen zur Zeit  $t = 0$ . Dann schließen zu dieser Zeit die beiden rotierenden Vektoren  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$  mit der Bezugslinie die Winkel  $\psi_1$  und  $\psi_2$  ein (Abb. 9).

Die vektorielle Summe der beiden Amplituden  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$  ergibt die Amplitude  $\mathfrak{E}$  der Summengröße. Die Lage von  $\mathfrak{E}$ , charakterisiert durch  $\psi$ , bestimmt den Momentanwert der Summe:

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Voraussetzung für die Zulässigkeit dieser Darstellung ist natürlich „gleiche“ Winkelgeschwindigkeit der Vektoren oder, mit anderen Worten, gleiche Periodenzahl oder Frequenz der beiden Wechselstromgrößen.

Die vektorielle Addition von Wechselstromgrößen ist also nur möglich, wenn diese gleichperiodig sind.

Die eben besprochene Möglichkeit, Wechselstromgrößen graphisch durch Vektoren darzustellen, führt nun zu ihrer analytischen Darstellung durch komplexe Größen.

Wenn eine komplexe Größe von der Form

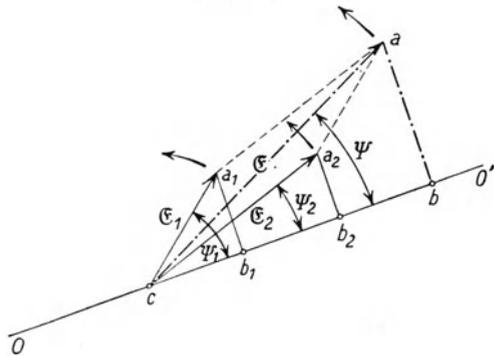
$$a + \iota b \quad \text{mit} \quad \iota = \sqrt{-1},$$

worin  $a$  und  $b$  reelle Größen sind, graphisch dargestellt werden soll, so ist dies nur dadurch möglich, daß man die Wesensungleichheit der beiden Teile  $a$  und  $\iota b$  durch verschiedene Richtungen in der Ebene ausdrückt.

Macht man den Ansatz:

$$\begin{aligned} a &= F \cos \varphi, \\ b &= F \sin \varphi, \end{aligned}$$

Abb. 9.



so ergibt sich durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen

$$F = \sqrt{a^2 + b^2},$$

durch Dividieren

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad \text{oder} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Es ist also

$$a + \iota b = F(\cos \varphi + \iota \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi + \iota \sin \varphi). \quad (8)$$

Beachtet man die bekannten Beziehungen

$$\cos \varphi = \frac{\varepsilon^{\iota \varphi} + \varepsilon^{-\iota \varphi}}{2},$$

$$\iota \sin \varphi = \frac{\varepsilon^{\iota \varphi} - \varepsilon^{-\iota \varphi}}{2},$$

die sich durch Reihenentwicklung der Größen  $\cos \varphi$ ,  $\varepsilon^{\iota \varphi}$ ,  $\varepsilon^{-\iota \varphi}$  und  $\iota \sin \varphi$  beweisen lassen, so folgt aus ihnen durch Addition

$$\cos \varphi + \iota \sin \varphi = \varepsilon^{\iota \varphi} \quad (8a)$$

und damit aus (8)

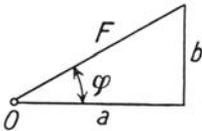
$$a + \iota b = F \cdot \varepsilon^{\iota \varphi} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \varepsilon^{\iota \operatorname{arctg} \frac{b}{a}} \quad (9)$$

als Identität.

$F$  ist hierbei die geometrische Summe der Strecken  $a$  und  $b$ , die wir aufeinander senkrecht gezogen haben.

Wir haben damit der reellen Größe  $a$  eine bestimmte, z. B. die horizontale, der imaginären  $\iota b$  die dazu senkrechte, also vertikale Richtung zugewiesen, und die komplexe Größe ist dargestellt als gerade Linie von der Länge  $F = \sqrt{a^2 + b^2}$  und dem Neigungswinkel  $\varphi$  gegen die reelle Richtung.

Abb. 10.



Dadurch setzen wir fest, daß in unserer Zeichenebene eine horizontale Strecke eine reelle, eine vertikale Strecke eine imaginäre und jede anders gerichtete Strecke eine komplexe Größe bedeutet. D. h. wir

charakterisieren eine Größe nicht nur durch ihren Betrag, sondern auch durch ihre Richtung, geben ihr also Vektorcharakter.

Halten wir in Gl. (9)  $F$  konstant, verändern aber die Größen  $a$  und  $b$  und damit  $\varphi$ , so sehen wir, daß in Abb. 10 die Strecke  $F$  sich um  $O$  dreht.

Die Multiplikation von  $F$  mit dem Faktor  $\varepsilon^{\iota \varphi}$  bedeutet also eine Drehung der Strecke  $F$  um einen fixen Punkt  $O$  der Ebene.

Um die Richtung der Drehung zu kennen, ist es notwendig, bezüglich  $a$  und  $b$  gewisse Festsetzungen zu machen. Es ist üblich, dem

positiven  $a$  die Richtung nach rechts, dem positiven  $b$  die Richtung nach oben zuzuweisen, wodurch sich für das negative  $a$  die Richtung nach links, das negative  $b$  die Richtung nach unten ergibt. Durch diese Festsetzung fällt der Bogen

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

II.	I.	für $b = +$ , $a = +$ in den ersten Quadranten
		„ $b = +$ , $a = -$ „ „ zweiten „
III.	IV.	„ $b = -$ , $a = -$ „ „ dritten „
		„ $b = -$ , $a = +$ „ „ vierten „

Dadurch ist gesagt, daß einer Änderung von  $\varphi$  in den Grenzen  $0 - 2\pi$  eine Drehung von  $F$  um  $360^\circ$  in der Richtung entgegen dem Uhrzeiger entspricht.

Machen wir nun den Ansatz:

$$\begin{aligned} a &= F \cos(\omega t + \varphi), \\ b &= F \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

wo  $\omega$  eine Winkelgeschwindigkeit und  $t$  die von Null an wachsende Zeit sein sollen, so folgt für  $a + \iota b$ :

$$a + \iota b = F \{ \cos(\omega t + \varphi) + \iota \sin(\omega t + \varphi) \} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \varepsilon^{\iota(\omega t + \varphi)}.$$

Das ist nach dem eben Erörterten ein Vektor vom Betrage  $F = \sqrt{a^2 + b^2}$ , der sich aus einer Anfangsneigung  $\varphi$  gegen die Horizontale (für  $t = 0$ ), für wachsende Zeit mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gegen den Uhrzeiger dreht.

Einen solchen Vektor aber haben wir für die Darstellung einer Sinusfunktion der Zeit als genügend erkannt.

Wir können also sagen, daß wir die Funktion

$$e = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \varphi)$$

zum Zwecke der graphischen Darstellung durch den Vektor

$$\mathfrak{E} \cdot \varepsilon^{\iota(\omega t + \varphi)}$$

ersetzen dürfen.

Da nun — wie aus (8a) leicht ersichtlich — die beiden letzten Ausdrücke durchaus keine mathematische Identität bedeuten, so ist es klar, daß der zweite nur als ein Symbol des ersten angesehen werden kann.

Wir wollen in Zukunft schreiben:

$$e = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \varphi) = \mathfrak{E} \varepsilon^{\iota(\omega t + \varphi)}. \tag{10}$$

Diese Symbolik ist für das Rechnen mit Wechselstromgrößen von großer Fruchtbarkeit geworden.

Die mit Wechselstromgrößen vorzunehmenden Operationen führen — bei Benutzung der Symbole — zu den gleichen Resultaten wie bei Benutzung der Originalfunktionen.

So ist der erste Differentialquotient  $\frac{de}{dt}$  der Größe  $e = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \varphi)$  gegeben durch

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt} \mathfrak{E} \sin(\omega t + \varphi) = \omega \mathfrak{E} \cos(\omega t + \varphi) = \omega \mathfrak{E} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

der Differentialquotient des Symbols durch

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{E} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} = i \omega \mathfrak{E} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} = \omega \mathfrak{E} \varepsilon^{i\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

denn es ist wegen  $\varepsilon^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2}$

$$\pm i = \varepsilon^{\pm i \frac{\pi}{2}}.$$

Geht man also vom Symbol auf die Sinusfunktion über, so erhält man denselben Ausdruck.

Im übrigen sagt das Resultat dieser Differentiation, daß der erste Differentialquotient unserer Sinusfunktion ein Vektor ist, der gegen den, die Funktion darstellenden Vektor um  $90^\circ$  nach vorwärts gedreht ist.

Der zweite Differentialquotient der Sinusfunktion ist gegeben durch

$$\frac{d^2 e}{dt^2} = \omega^2 \mathfrak{E} \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \omega^2 \mathfrak{E} \sin(\omega t + \varphi + \pi),$$

der des Symbols durch

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathfrak{E} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} &= \frac{d}{dt} i \omega \mathfrak{E} \varepsilon^{i\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = i \omega^2 \mathfrak{E} \varepsilon^{i\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \omega^2 \mathfrak{E} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi + \pi)}. \end{aligned}$$

Geht man vom Symbol auf die Sinusfunktion über, so erhält man denselben Ausdruck wie oben.

Jede Differentiation verschiebt die Richtung des resultierenden Vektors — bei entsprechender Änderung seines Betrages — um  $90^\circ$  nach vorwärts.

Das  $\int e dt$  ist gegeben durch

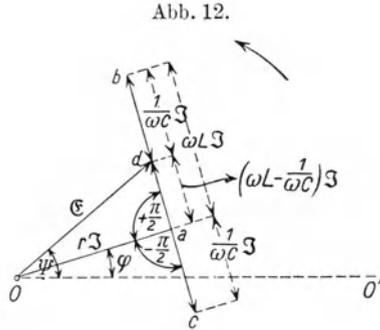
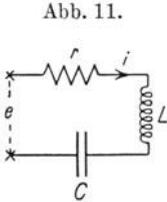
$$\int e dt = \int \mathfrak{E} \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{\mathfrak{E}}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{\mathfrak{E}}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

das Integral des Symbols durch

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{E} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} \cdot dt &= \frac{1}{i\omega} \mathfrak{E} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{i^2 \omega} \mathfrak{E} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} = \\ &= -i \frac{\mathfrak{E}}{\omega} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} = \frac{\mathfrak{E}}{\omega} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}. \end{aligned}$$

Geht man vom Symbol auf die Sinusfunktion über, so erhält man denselben Ausdruck.

Die Integration verschiebt die Richtung des resultierenden Vektors — bei entsprechender Änderung seines Betrages — um  $90^\circ$  nach rückwärts.



Diese Beziehungen ergeben einfache Konstruktionsregeln für die graphische Darstellung der Differentialgleichungen, die zwischen sinusförmigen Wechselstromgrößen bestehen.

Z. B. die bekannte Spannungsgleichung des Wechselstromkreises der Schaltung nach Abb. 11:

$$ir + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e \quad (\text{A})$$

mit

$$e = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi), \quad i = \mathfrak{I} \sin(\omega t + \varphi)$$

ergibt bei Verwendung der reellen oder der symbolischen Darstellung das folgende Vektordiagramm (s. Abb. 12).

In reeller Form lautet die Spannungsgleichung:

$$\begin{aligned} r\mathfrak{I} \sin(\omega t + \varphi) + \omega L \mathfrak{I} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega C} \mathfrak{I} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) &= \\ &= \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

In symbolischer Form lautet sie:

$$r\mathfrak{I} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} + \omega L \mathfrak{I} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{\omega C} \mathfrak{I} \varepsilon^{i(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})} = \mathfrak{E} \varepsilon^{i(\omega t + \psi)}.$$

Wählt man eine Bezugslinie ( $oo'$ ), so schließt zur Zeit  $t = 0$  der Vektor  $r\mathfrak{I}$  mit dieser den Winkel  $\varphi$  ein, der Vektor  $\omega L\mathfrak{I}$  ist gegen den Vektor  $r\mathfrak{I}$  um  $\frac{\pi}{2}$  nach vorwärts, der Vektor  $\frac{1}{\omega C}\mathfrak{I}$  gegen  $r\mathfrak{I}$  um  $\frac{\pi}{2}$  nach rückwärts gedreht; der Vektor  $\mathfrak{E}$ , als die geometrische Summe der drei genannten Vektoren, schließt mit der Nulllinie den Winkel  $\psi$  ein. Diese geometrische Summation der drei Vektoren ist in Abb. 12 durchgeführt, wobei

$$ad = ab - ac = \omega L\mathfrak{I} - \frac{1}{\omega C}\mathfrak{I}$$

gemacht ist.

Aus dem Dreieck  $\triangle oad$  folgt:

$$\overline{od}^2 = \overline{oa}^2 + \overline{ad}^2 = r^2\mathfrak{I}^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\mathfrak{I}^2 = \mathfrak{E}^2$$

und

$$\psi = \varphi + \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$

Ist also  $e$ , die aufgedrückte Spannung, gegeben, und  $i$ , der entstehende Strom, unbekannt, so folgt aus den letzten zwei Gleichungen:

$$i = \mathfrak{I} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}).$$

Zur Konstruktion zu Abb. 12 war — wie aus dem Beispiel ersichtlich — die Benutzung der reellen oder der symbolischen Darstellungsform in gleicher Weise vorteilhaft.

Sieht man von der graphischen Darstellung ab und sucht den Strom  $i$  auf analytischem Wege aus der Grundgleichung (A) zu gewinnen, so zeigt sich die Überlegenheit der symbolischen gegenüber der reellen Darstellung durch die Kürze des Rechnungsweges.

Schreiben wir Gl. (A) in reeller Form, so lautet sie:

$$r\mathfrak{I} \sin(\omega t + \varphi) + L \frac{d}{dt} \mathfrak{I} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} \int \mathfrak{I} \sin(\omega t + \varphi) dt = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi)$$

oder

$$r\mathfrak{I} \sin(\omega t + \varphi) + \omega L\mathfrak{I} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{1}{\omega C} \mathfrak{I} \cos(\omega t + \varphi) = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi).$$

Entwickelt man die goniometrischen Funktionen, so wird

$$r\Im \sin \omega t \cos \varphi + r\Im \cos \omega t \sin \varphi + \Im \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \omega t \cos \varphi - \\ - \Im \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \omega t \sin \varphi = \mathfrak{E} \sin \omega t \cos \psi + \mathfrak{E} \cos \omega t \sin \psi.$$

Da die Gleichung für alle Zeiten gilt, muß sie auch gelten für Werte:

1.  $\omega t = \kappa 2\pi$ ,
2.  $\omega t = (4\kappa + 1) \frac{\pi}{2}$ ,

mit  $\kappa =$  ganze Zahl der Zahlenreihe von Null bis Unendlich.

Für den Fall 1 lautet sie wegen

$$\sin \omega t = 0, \quad \cos \omega t = 1 \\ r\Im \sin \varphi + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \Im \cos \varphi = \mathfrak{E} \sin \psi.$$

Für den Fall 2 wegen

$$\sin \omega t = 1, \quad \cos \omega t = 0 \\ r\Im \cos \varphi - \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \Im \sin \varphi = \mathfrak{E} \cos \psi.$$

Quadrieren und Addieren der beiden letzten Gleichungen ergibt

$$\Im^2 \left\{ r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\} = \mathfrak{E}^2,$$

woraus  $\Im$  bestimmt ist.

Division der beiden Gleichungen ergibt, mit

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = X, \\ \frac{r \sin \varphi + X \cos \varphi}{r \cos \varphi - X \sin \varphi} = \operatorname{tg} \psi.$$

Dividiert man links Zähler und Nenner durch  $r \cos \varphi$ , so folgt

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi + \frac{X}{r}}{1 - \frac{X}{r} \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} \psi,$$

wonach

$$\psi = \varphi + \operatorname{arctg} \frac{X}{r}$$

oder

$$\varphi = \psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r},$$

womit auch  $\varphi$  bestimmt ist.

Schreiben wir die Gl. (A) in symbolischer Form, so lautet sie

$$r \Im \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} + L \frac{d}{dt} \Im \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} + \frac{1}{C} \int \Im \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} = \mathfrak{E} \varepsilon^{i(\omega t + \psi)}$$

oder

$$r \Im \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} + i \omega L \Im \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} + \frac{1}{i \omega C} \Im \varepsilon^{i(\omega t + \varphi)} = \mathfrak{E} \varepsilon^{i(\omega t + \psi)};$$

durch  $\varepsilon^{i\omega t}$  gekürzt und das dritte Glied links mit  $\frac{1}{i}$  multipliziert, gibt

$$\Im \varepsilon^{i\varphi} \left\{ r + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\} = \mathfrak{E} \varepsilon^{i\psi} \quad (\text{A}')$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (9)

$$\Im \varepsilon^{i\varphi} \cdot \sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot \varepsilon^{i \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}} = \mathfrak{E} \varepsilon^{i\psi},$$

somit

$$\Im \sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \mathfrak{E}$$

und

$$\varphi + \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = \psi,$$

woraus  $\Im$  und  $\varphi$  bestimmt sind.

Der Rechnungsweg ist bei Gebrauch der symbolischen Formen kürzer.

Der Vorwurf der physikalischen Undurchsichtigkeit, die der Symbolik anhafte, ist gewiß gerechtfertigt, es lohnt aber ebenso gewiß der Mühe, diese Undurchsichtigkeit durch Übung und Gewöhnung zu klären.

Der Hauptvorteil der Symbolik besteht darin, daß bei ihrer Anwendung — wie Gleichung (A') zeigt — die variable Zeit aus der Grundgleichung entfernt wird.

Dieser Vorteil macht sich besonders dann geltend, wenn zwischen den Wechselstromgrößen partielle Differentialgleichungen mit unabhängig Variablen des Ortes und der Zeit bestehen. Durch Verwendung der Symbolik werden diese partiellen Differentialgleichungen mühelos in totale, mit der einen unabhängig Variablen des Ortes, überführt<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Siehe Abschnitt X.

Es sei aber nochmals daran erinnert, daß die Verwendung der Symbolik nur dann zulässig ist, wenn die darzustellenden Größen reine Sinusfunktionen der Zeit sind.

Die Wellenlänge  $\lambda$  dieser hier betrachteten zeitlichen Schwingungen ergibt sich aus der Beziehung

$$\lambda = vT,$$

wo  $T$  die Zeitdauer einer Periode und  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung sind. Im Vakuum und — sehr angenähert — in Luft ist  $v$  gleich der Lichtgeschwindigkeit, also 300 000 km pro Sekunde.

Da  $T = \frac{1}{f}$  und  $f$  gleich der Periodenzahl, so ist die Wellenlänge einer 50 periodigen elektrischen Schwingung in der Luft

$$\lambda = \frac{300\,000}{50} = 6000 \text{ km.}$$

Bedeutet in Gl. (1):

$$y = A \sin(mx),$$

$x$ , die unabhängig Veränderliche, eine Länge, so wird  $y$  eine räumliche Sinuswelle.

In der auch hier notwendigen Beziehung

$$m = \frac{2\pi}{J}$$

muß jetzt das  $J$ , dem  $x$  entsprechend, eine Länge sein.

Diese Länge  $J$  der Periode ist hier natürlich mit der Wellenlänge  $\lambda$  der räumlichen Welle identisch. Es gilt also hier die Beziehung

$$m = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{2\pi}{m}.$$

Die Wellenlänge der räumlichen Welle hat also mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nichts zu schaffen und kann, je nach der Größe von  $m$ , beliebig große Werte annehmen.

Auch dieser Fall, räumlicher Wellenbildung, kommt in der Wechselstromtechnik vor. So ist z. B. der Verlauf der Amplituden von Strom und Spannung, längs langer Leitungen, durch solche räumliche Wellen beeinflusst.

Im Argument  $mx$  der örtlichen Sinusfunktion ist in diesem Falle  $m$  eine, durch die Leitungsdaten (Widerstand, Kapazität, Induktionskoeffizient und Ableitung pro Kilometer) und die Frequenz bestimmte, konstante Zahl;  $x$  die Länge in Kilometern. Um den Sinus für ein

Argument  $mx$  nachzuschlagen, hat man das Argument im Winkelmaß auszudrücken.

Es ist aber:

$$\begin{aligned}\sphericalangle mx &= \sphericalangle \frac{2\pi}{\lambda} x = \widehat{\frac{2\pi}{\lambda} x} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 360^\circ \frac{x}{\lambda} = 360^\circ \frac{x}{\frac{2\pi}{m}} = \\ &= \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot m \cdot x;\end{aligned}$$

So ist z. B.:  $\sin(mx)$  für  $m = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $x = 600$  km,

$$\begin{aligned}\sin(mx) &= \sin\left(\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 600 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\right) = \sin(57,295\,78^\circ \cdot 0,12) \\ &= \sin(6^\circ 52' 31,78'').\end{aligned}$$

Die Wellenlänge  $\lambda$  dieser räumlichen Welle ist:

$$\lambda = \frac{2\pi}{m} = \frac{6,283\,186}{2 \cdot 10^{-4}} = 31\,415,93 \text{ km.}$$

## I. Analyse verzerrter Kurvenformen.

Es ist nun durchaus nicht immer der Fall, daß die Wechselstromgrößen, die uns beschäftigen, „reine“ Sinusform haben. Die Eigenart der Maschinen sowohl als auch der Betriebsart bringt es mit sich, daß wir auch mit Wechselstromgrößen zu tun haben, die von der Sinusform abweichen, die „verzerrt“ sind.

Auch solche verzerrte Formen können mathematisch erfaßt werden.

Es sei 
$$y = f(\omega t)$$

eine solche verzerrte Funktion der Zeit, z. B. Abb. 1 entsprechend, oder mit Einführung einer neuen unabhängig Veränderlichen  $x = \omega t$

$$y = f(x).$$

Dann läßt sich  $y$ , nach dem bekannten Satze von Fourier durch folgende Reihe ausdrücken:

$$y = \frac{1}{2} B_0 \cos(0 \cdot x) + B_1 \cos(1 \cdot x) + B_2 \cos(2 \cdot x) + \dots + B_n \cos(n \cdot x) + \dots \\ + A_0 \sin(0 \cdot x) + A_1 \sin(1 \cdot x) + A_2 \sin(2 \cdot x) + \dots + A_n \sin(n \cdot x) + \dots \quad (1)$$

Unsere Funktion ist also durch die Summe einer unendlichen Kosinusreihe und einer unendlichen Sinusreihe dargestellt.

Die beiden Reihen haben die Eigenschaft, daß sich die Periodenzahlen der Argumente der trigonometrischen Funktionen wie die aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, von Null bis Unendlich, verhalten.

Setzen wir:

$$A_n = F_n \cos \varphi_n, \\ B_n = F_n \sin \varphi_n,$$

so folgt durch Quadrieren und Addieren

$$F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

und durch Dividieren

$$tg \varphi_n = \frac{B_n}{A_n} \quad \text{oder} \quad \varphi_n = \text{arctg} \frac{B_n}{A_n}. \quad (2)$$

Somit

$$A_n \sin(n x) + B_n \cos(n x) = F_n \sin(n x + \varphi_n).$$

---

Die römische Ziffer am Kopfe jeder Seite bedeutet die Nummer des betreffenden Abschnittes.

Diesen Ansatz auf alle gleichstelligen Glieder beider Reihen angewendet, ergibt:

$$y = \frac{1}{2}B_0 + F_1 \sin(x + \varphi_1) + F_2 \sin(2x + \varphi_2) + F_3 \sin(3x + \varphi_3) + \dots \\ \dots + F_n \sin(nx + \varphi_n) + \dots$$

und setzen wir noch

$$\frac{1}{2}B_0 = F_0,$$

so wird

$$y = F_0 + F_1 \sin(x + \varphi_1) + F_2 \sin(2x + \varphi_2) + \\ + \dots + F_n \sin(nx + \varphi_n) + \dots \quad (3)$$

Wir haben also unsere periodische Funktion durch ein konstantes Glied  $F_0$  und eine unendliche Reihe reiner Sinusfunktionen verschiedener Amplituden und Phasen und stetig wachsender Periodenzahlen dargestellt.

Nun handelt es sich um die Bestimmung der Größen  $F$  und  $\varphi$ , oder nach (Gl. 2) der Größen  $A$  und  $B$ .

Zu diesem Zwecke betrachten wir folgende drei bestimmten Integrale

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cdot \cos nx \cdot dx, \quad J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin nx dx, \\ J_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos nx \cdot dx,$$

wobei  $k$  und  $n$  beliebige, ganze Zahlen von Null bis Unendlich sind.

Wir bilden zunächst

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(k-n)x \cdot dx$$

und

$$J_1 - J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(k+n)x \cdot dx.$$

So haben wir drei Fälle zu unterscheiden.

a)  $k \neq n$ , hierfür ist:

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k-n} \left| \sin(k-n)x \right|_{-\pi}^{+\pi} = 0, \\ J_1 - J_2 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k+n} \left| \sin(k+n)x \right|_{-\pi}^{+\pi} = 0,$$

somit

$$J_1 = J_2 = 0.$$

b)  $k = n \neq 0$ , hierfür ist:

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dx = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \quad J_1 - J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2nx dx = 0,$$

somit  $J_1 = J_2 = 1$ .

c)  $k = n = 0$ , hierfür ist:

$$J_1 + J_2 = 2, \quad J_1 - J_2 = 2,$$

somit  $J_1 = 2, \quad J_2 = 0$ .

Das Integral  $J_3$  formen wir um. Es ist nach elementaren Regeln

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cdot \cos nx \cdot dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(k+n)x dx + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(k-n)x dx, \end{aligned}$$

welche beiden Integrale rechts für die drei möglichen Fälle a), b) und c) Null werden. Es wird also  $J_3$  für alle Werte von  $k$  und  $n$  unter allen Umständen Null.

Nun multiplizieren wir unsere Gl. (1) für  $y$  zunächst mit

$$\frac{1}{\pi} \cos nx \cdot dx$$

und integrieren in den Grenzen  $-\pi$  bis  $+\pi$ . Das  $n$  kann hierbei jeden beliebigen ganzen Zahlenwert von Null bis Unendlich haben. So wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} y \cos nx dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} B_0 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 0x \cdot \cos nx \cdot dx + B_1 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 1x \cdot \cos nx \cdot dx + \\ &+ B_2 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2x \cdot \cos nx \cdot dx + \dots + B_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cdot \cos nx \cdot dx + \\ &+ \dots + A_1 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 1x \cdot \cos nx \cdot dx + A_2 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2x \cdot \cos nx \cdot dx + \\ &+ \dots + A_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cdot \cos nx \cdot dx + \dots \end{aligned} \right\} (4)$$

Zunächst sehen wir, daß sämtliche Glieder mit den Koeffizienten  $A$  Integrale vom Typus  $J_3$  enthalten, also Null sind. Die Glieder mit den Koeffizienten  $B$  enthalten Integrale vom Typus  $J_1$ , also vom Typus

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cdot \cos nx \cdot dx.$$

Wir wissen aber, daß diese Integrale für  $n \neq k$  zu Null werden. Es bleibt also von der rechten Seite unserer Gl. (4) nur jenes Glied übrig, für welches die Zahl  $n$  gleich der Stellzahl des Gliedes ist, also das  $n$ te Glied selbst. Dessen Integral hat aber nach Fall b) den Wert 1. Es übergeht also Gl. (4) in

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \cdot dx = B_n. \quad (5)$$

Wollen wir z. B. den Koeffizienten  $B_3$  berechnen, so haben wir unsere Gl. (1) mit  $\frac{1}{\pi} \cos 3x \cdot dx$  zu multiplizieren und von  $-\pi$  bis  $+\pi$  zu integrieren. Wir erhalten dann

$$B_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos 3x \cdot dx.$$

Eine Ausnahme scheint die Bestimmung von  $B_0$  zu machen. Wollen wir dieses haben, so haben wir mit  $\cos 0x$ , also mit 1 zu multiplizieren. Gl. (4) übergeht dann in

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos 0x \cdot dx = \frac{1}{2} B_0 \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 0x \cos 0x \cdot dx \right\}.$$

Rechts aber steht nun das Integral  $J_1$  nach unserem Falle c). Der Klammerausdruck  $\{ \}$  ist also gleich 2. Das ist der Grund, aus welchem im ersten Gliede der Gl. (1) der Faktor  $\frac{1}{2}$  geführt wird, denn, da nun auch

$$B_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos 0x \cdot dx,$$

so hat Gl. (5) für alle Werte von  $n$ , Null mit inbegriffen, allgemeine Gültigkeit.

In ganz analoger Weise können wir nun die Koeffizienten  $A$  bestimmen, indem wir Gl. (1) mit  $\frac{1}{\pi} \sin (n x) d x$  multiplizieren und von  $-\pi$  bis  $+\pi$  integrieren. Es ergibt sich so

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin n x \cdot d x, \quad (6)$$

womit wir auch die Größen  $A$  zu bestimmen gelernt haben.  $A_0$  ist natürlich Null.

Übergehen wir auf unsere ursprüngliche Variable, die Zeit  $t$ , so wird nach

$$x = \omega t; \quad d x = \omega d t = \frac{2 \pi}{T} d t.$$

Die Integrationsgrenzen  $-\pi$  und  $+\pi$  ändern sich. Es wird für

$$x = \omega t = -\pi; \quad \omega t = \frac{2 \pi}{T} t = -\pi, \quad \text{daher } t = -\frac{T}{2},$$

für  $x = \omega t = +\pi; \quad \omega t = \frac{2 \pi}{T} t = +\pi, \quad t = +\frac{T}{2}.$

Setzen wir dies in (5) und (6) ein, so erhalten wir die Ausdrücke

$$B_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2 \pi}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\omega t) \cos n \omega t \cdot d t = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\omega t) \cos n \omega t \cdot d t. \quad (7)$$

$$A_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\omega t) \sin n \omega t \cdot d t. \quad (8)$$

Wir sind nun in der Lage unsere Reihe nach Gl. (3) zu entwickeln.

Bevor wir aber an die tatsächliche Berechnung der Größen  $A$  und  $B$  gehen, wollen wir noch einige Besonderheiten der Wechselstromgrößen beachten.

Die Eigenart der Wechselstromerzeuger, die wir technisch benutzen, bringt es mit sich, daß die erzeugten Wechselstromgrößen folgende zwei Eigenschaften haben.

1. Stellt man den Verlauf der Wechselstromgröße nach Abb. 1, d. h. im Liniendiagramm, graphisch dar, so sind die Flächen, welche die positiven und negativen Kurvenäste mit der Abszisse einschließen, einander gleich.

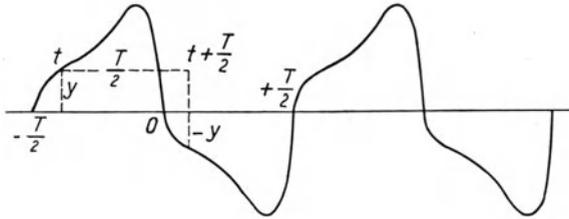
2. Die beiden Kurvenäste sind in bezug auf die Abszisse vollkommen symmetrisch, und zwar so, daß die Ordinate  $y$ , zur Zeit  $t$ , stets gleich, aber entgegengesetzt ist der Ordinate zur Zeit  $t \pm \frac{T}{2}$ .

Die erste Eigenschaft führt uns zu der Erkenntnis, daß die Größe  $B_0$  gleich Null ist; denn es ist

$$B_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\omega t) dt.$$

Das ist ein Flächenintegral über zwei gleichgroße, aber ungleichnamige Flächen, ist also Null. Daher:  $B_0 = 0$ .

Abb. 13.



Die zweite Eigenschaft sagt, daß die Koeffizienten  $A$  und  $B$  der Glieder mit gerader Stellzahl verschwinden. Denn nach Gl. (1) ist für eine beliebige Zeit  $t$ :

$$y = \frac{1}{2} B_0 + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2 \omega t + \dots + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2 \omega t + \dots \quad (\alpha)$$

somit, infolge der zitierten, zweiten Eigenschaft, für eine Zeit  $(t + \frac{T}{2})$ :

$$\begin{aligned} -y &= \frac{1}{2} B_0 + B_1 \cos \omega \left( t + \frac{T}{2} \right) + B_2 \cos 2 \omega \left( t + \frac{T}{2} \right) + \dots \\ &\quad \dots + A_1 \sin \omega \left( t + \frac{T}{2} \right) + A_2 \sin 2 \omega \left( t + \frac{T}{2} \right) + \dots \quad (\beta) \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \cos 2 n \cdot \omega \left( t + \frac{T}{2} \right) &= \cos (2 n \omega t + 2 n \pi) = \cos 2 n \omega t, \\ \sin 2 n \cdot \omega \left( t + \frac{T}{2} \right) &= \sin (2 n \omega t + 2 n \pi) = \sin 2 n \omega t \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos(2n + 1)\omega \left( t + \frac{T}{2} \right) &= \cos \{ (2n + 1)\omega t + (2n + 1)\pi \} = \\ &= -\cos(2n + 1)\omega t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(2n + 1)\omega \left( t + \frac{T}{2} \right) &= \sin \{ (2n + 1)\omega t + (2n + 1)\pi \} = \\ &= -\sin(2n + 1)\omega t, \end{aligned}$$

d. h. in den Gl. ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) sind die geradstelligen Glieder nach Größe und Vorzeichen gleich, die ungeradstelligen nach Größe gleich, nach Vorzeichen entgegengesetzt. Wir können also ( $\beta$ ) auch schreiben:

$$-y = \frac{1}{2}B_0 - B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t - \dots + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t - \dots \quad (\beta')$$

Addieren wir nun ( $\alpha$ ) und ( $\beta'$ ), so folgt

$$0 = 2 \left\{ \frac{1}{2}B_0 + B_2 \cos 2\omega t + B_4 \cos 4\omega t + \dots + A_2 \sin 2\omega t + A_4 \sin 4\omega t \dots \right\}$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten, also jeden Wert von  $t$ , Geltung haben muß, kann sie nur bestehen, wenn die sämtlichen geradstelligen Koeffizienten Null sind.

Mit Rücksicht auf Gl. (2) folgt daher, daß die Wechselstromgrößen, mit denen wir es hauptsächlich zu tun haben werden, gegeben sind durch die Gleichung:

$$y = F_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + F_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + F_5 \sin(5\omega t + \varphi_5) + \dots \quad (9)$$

also durch eine Summe von Sinusfunktionen mit nur ungeraden Vielfachen der Periodenzahl der verzerrten Welle.

Wir nennen das erste Glied der Reihe die Grundwelle, die folgenden die Oberwellen; oder in Anlehnung an die Akustik sprechen wir von der ersten und von höheren Harmonischen, dem Grundton und den Obertönen.

Die verzerrte Welle entspricht dem Klang, also einer Superposition einzelner reiner Töne verschiedener Schwingungszahl.

Während nun aber ein musikalisches Ohr die Analyse des Klanges automatisch durchführt, d. h. die einzelnen Obertöne, die eine reale, physikalische Bedeutung haben, heraushört, sind wir bei unserer Wechselstromgröße auf einen mehr oder weniger mühseligen Weg gewiesen, um die Analyse vorzunehmen.

Es ist hier zu bemerken, daß die Zerlegung der Wechselstromgröße in Oberwellen eine mathematische Abstraktion ist, daher den einzelnen Wellen eine konkrete Bedeutung im akustischen Sinne nicht zukommt. Trotzdem ist die Kenntnis der Größen  $F$  und  $\varphi$  von großer Bedeutung, da sie uns, in bequemer Form, die Gleichung der Kurve liefert.

Wir wollen nun ein Beispiel exakt durchrechnen.

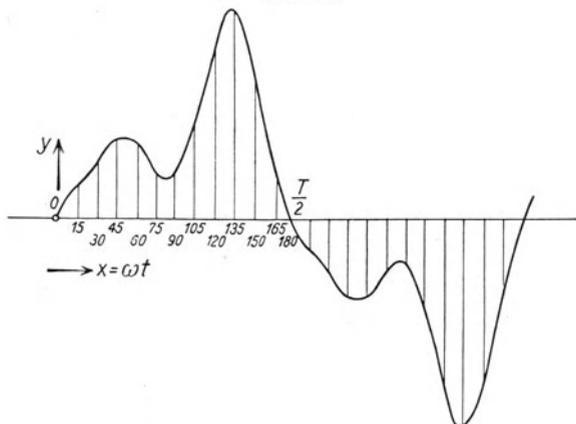
Mit einem Oszillographen oder der Joubertschen Scheibe sei die Kurve (s. Abb. 14) aufgenommen.

Um praktisch und genau zu arbeiten, setzen wir in der Zeichnung (auf Millimeterpapier) die Länge der halben Periode gleich 180 mm.

Zur Erfassung der Kurvenform folgen die Koordinaten:

$x$ mm	=	—	4,	0,	5,	10,	20,	30,	40,	50,	54,	60,	70,	80,	85,	90
$y$ "	=	—	10,	0,	11,	19,3,	31,	43,3,	55,5,	62,	63,	59,	45,	33,	31,	33
$x$ mm			100,	110,	120,	130,	132,	135,	140,	150,	160,	170,	180,	190		
$y$ "			54,	92,	133,	157,	159,	157,	151,	119,	74,	30,5,	0,	—19,3		

Abb. 14.



Nach diesen Angaben kann der Leser die Kurve mit genügender Genauigkeit zeichnen. Die Abb. 14 ist auf  $\frac{1}{6}$  verkleinert.

Nun handelt es sich um die Bestimmung der Größen  $A$  und  $B$ , mit deren Hilfe wir  $F$  und  $\varphi$  berechnen können.

Nach unseren Gl. (7) und (8) hätten wir, um z. B.  $A_3$  zu erhalten, die  $f(\omega t)$ , das ist unsere Ordinate  $y$ , für jeden Zeitmoment, d. h. jede Abszisse, mit dem Sinus des zugehörigen dreifachen Winkels zu multiplizieren. Als Resultat dieser Multiplikation erhielten wir eine neue Größe  $u_3$ . Tragen wir diese Größe über unserer Abszisse als neue Ordinate auf, so erhalten wir eine neue Kurve. Die Ausdrücke für  $A_n$  und  $B_n$  übergehen dann in

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u_n dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u'_n dt,$$

wobei  $u'_n$  durch Multiplikation von  $f(\omega t)$  mit dem Kosinus des  $n$ -fachen Winkels entstanden ist.

In diesen Ausdrücken finden wir einfache Flächenintegrale, die man durch Ausmessung oder mit dem Planimeter ermitteln kann. Dividiert man diese Flächen durch die halbe Länge  $\frac{T}{2}$  der Periode, so erhält man die Größen  $A_n$  und  $B_n$  im Maßstab der Ordinaten und man kann auf diese Art beliebig viele Glieder der Fourierschen Reihe entwickeln.

Hierzu ist also die Konstruktion der  $u$ -Kurven erforderlich, die keine Schwierigkeit bietet. Mit Hilfe des Planimeters erhält man dann wirklich genaue Resultate, da ja das Planimeter das Flächenintegral genau erfaßt.

Nun hat man aber meist kein Planimeter; ferner müßte man für jedes  $A$  und jedes  $B$  eine neue  $u$ - bzw.  $u'$ -Kurve zeichnen, was sehr zeitraubend wäre.

Es sind daher zur Bestimmung von  $A$  und  $B$  andere Methoden erdacht worden, die zwar nur Annäherungsverfahren sind, aber eine vollkommen genügende Genauigkeit ergeben.

Wir wollen eine der ältesten Methoden anführen, die aber das Verständnis für die meisten jüngeren erschließt.

Für unsere Wechselstromgrößen nimmt Gl. 1, nach dem Vorhergehenden, die Form an:

$$y = B_1 \cos(\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + B_5 \cos(5\omega t) + \dots A_1 \sin(\omega t) + \\ + A_3 \sin(3\omega t) + A_5 \sin(5\omega t) + \dots,$$

worin  $B$  und  $A$  Unbekannte sind.

Die Gleichung gilt für jede, dem Kurvenbilde entnommene Ordinate. Entnehmen wir also dem Kurvenbilde  $k$  Ordinaten, so können wir die Gleichung  $k$  mal anschreiben, wodurch wir  $k$  Gleichungen erhalten.

Sollen diese  $k$  Gleichungen zur Bestimmung der  $A$  und  $B$  genügen, so dürfen die Reihen mit  $A$  oder  $B$  nicht mehr als je  $\frac{k}{2}$  Glieder enthalten, denn dann haben wir  $2 \frac{k}{2} = k$  Unbekannte und hierfür  $k$  Gleichungen.

Teilen wir z. B. die halbe Periode  $\frac{T}{2}$  in zwölf gleiche Teile und ziehen zu diesen Abschnitten die zugehörigen Ordinaten  $y$ , so können wir zwölf Gleichungen von folgender Form anschreiben:

$$y = B_1 \cos(\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + B_5 \cos(5\omega t) + B_7 \cos(7\omega t) + \\ + B_9 \cos(9\omega t) + B_{11} \cos(11\omega t) + A_1 \sin(\omega t) + A_3 \sin(3\omega t) + \\ + A_5 \sin(5\omega t) + A_7 \sin(7\omega t) + A_9 \sin(9\omega t) + A_{11} \sin(11\omega t),$$

wo links immer eine der zwölf dem Kurvenbilde entnommenen Ordinaten steht.

Es ist klar, daß wir aus diesen zwölf Gleichungen nur sechs Größen  $B$  und sechs Größen  $A$  entnehmen können, daß wir also, bei Benutzung von zwölf Ordinaten, die Fourierreihe nach Gl. (9) nur aus sechs Gliedern bestehen lassen.

Die Bestimmung von  $B$  und  $A$  aus diesen zwölf Gleichungen nach den Regeln der elementaren Algebra wäre aber eine sehr mühsame und zeitraubende Arbeit.

Hier führt folgender kürzerer Weg zum Ziele. Wir teilen die Länge unserer halben Periode, wie es in der Abbildung geschehen ist, in zwölf gleiche Teile, wählen also für die Ordinaten Winkelabstände von  $15^0$  und ziehen die zugehörigen Ordinaten. Und nun machen wir für jedes Wertepaar von  $A$  und  $B$  eine Tabelle nach folgendem Schema:

Tabelle für  $A_1$  und  $B_1$ .

Abszisse in Graden ( $\omega t$ )	Ordinate $y$	$\sin(1 \omega t)$	$\cos(1 \omega t)$	$y \sin(1 \omega t)$	$y \cos(1 \omega t)$
0	0	0	+ 1,000	0	0
15 <sup>0</sup>	25,5	+ 0,259	+ 0,966	+ 6,6	+ 24,7
30	43,5	+ 0,500	+ 0,866	+ 21,7	+ 37,7
45	59,2	+ 0,707	+ 0,707	+ 41,8	+ 41,8
60	59,2	+ 0,866	+ 0,500	+ 51,3	+ 29,6
75	38,6	+ 0,966	+ 0,259	+ 37,3	+ 10,0
90	33,0	+ 1,000	0,000	+ 33,0	0
105	71,0	+ 0,966	- 0,259	+ 68,6	- 18,4
120	132,0	+ 0,866	- 0,500	+ 114,5	- 66,0
135	158,0	+ 0,707	- 0,707	+ 111,8	- 111,8
150	119,5	+ 0,500	- 0,866	+ 59,7	- 103,6
165	52,0	+ 0,259	- 0,966	+ 13,5	- 50,2
180	0	0	- 1,000	0	0
				+ 559,8	+ 143,8 - 350,0

Nun summieren wir — mit Berücksichtigung der Vorzeichen — die Kolonnen  $y \sin(1 \omega t)$  und  $y \cos(1 \omega t)$ , wie es in der Tabelle geschehen ist, und erhalten dadurch die Größen:

$$\sum_0^{T/2} y \sin(1 \omega t) = + 559,8 \quad \text{und} \quad \sum_0^{T/2} y \cos(1 \omega t) = \\ = + 143,8 - 350,0 = - 206,2.$$

Diese Größen dividieren wir durch die Anzahl  $k$  der Abszissenabschnitte, in unserem Falle zwölf, und multiplizieren die Quotienten mit zwei.

D. h. wir bilden die Größen :

$$2 \frac{1}{k} \sum_0^{T/2} y \sin(1 \cdot \omega t) = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 559,8 = + 93,3 \quad (\gamma)$$

und

$$2 \cdot \frac{1}{k} \sum_0^{T/2} y \cos(1 \cdot \omega t) = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot (-206,2) = - 34,4. \quad (\delta)$$

Nennen wir  $\Delta t$  das gewählte Zeitintervall zwischen zwei Ordinaten, so ist — wie aus der Abbildung ersichtlich —

$$\Delta t = \frac{T}{k} \quad \text{oder} \quad k = \frac{T}{\Delta t}. \quad (\varepsilon)$$

Machen wir  $k$  unendlich groß, so übergeht nach  $(\varepsilon)$   $\Delta t$  in  $dt$ , aus der Summierung in  $(\gamma)$  und  $(\delta)$  wird eine Integration und unsere Ausdrücke  $(\gamma)$  und  $(\delta)$  übergehen, bei Einführung von  $k$  aus  $(\varepsilon)$ , in

$$2 \frac{1}{T} \int_0^{T/2} y \sin(1 \cdot \omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} y \sin(1 \omega t) dt = A_1$$

und

$$2 \frac{1}{T} \int_0^{T/2} y \cos(1 \cdot \omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} y \cos(1 \cdot \omega t) dt = B_1.$$

Dies aber sind die genauen Ausdrücke, die wir für  $A_1$  und  $B_1$  gefunden hatten.

Diese Überlegung zeigt uns, daß die Ausdrücke  $(\gamma)$  und  $(\delta)$  die Größen  $A_1$  und  $B_1$  um so genauer darstellen, je größer wir die Anzahl  $k$  der Abszissenabschnitte wählen.

Auch für stark verzerrte Formen — wie z. B. die in der Abbildung wiedergegebene — genügt es zumeist, wenn man  $k = 12$  macht, d. h. die halbe Periode in zwölf Teile teilt.

Diese für die Größen  $A_1$  und  $B_1$  gewonnene Erkenntnis gilt natürlich ebenso für die höherstelligen Glieder der Reihen, so daß mit genügender Richtigkeit zu schreiben ist:

$$A_n = 2 \frac{1}{k} \sum_0^{T/2} y \sin(n \cdot \omega t), \quad B_n = 2 \cdot \frac{1}{k} \sum_0^{T/2} y \cos(n \omega t). \quad (10)$$

Wir erhalten demnach für unsere zu analysierende Kurve aus ( $\gamma$ ) und ( $\delta$ )

$$A_1 = +93,3, \quad B_1 = -34,4,$$

somit

$$F_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = 99,5$$

und

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{B_1}{A_1} = \operatorname{arctg} \frac{-34,4}{+93,3} = 339^\circ 32'.$$

Das erste Glied der Fourierreihe nach Gl. (9) lautet also:

$$F_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = 99,5 \sin(\omega t + 339^\circ 32'), \quad (11)$$

Tabelle für  $A_3$  und  $B_3$ .

Abszisse in Graden ( $\omega t$ )	$3 \omega t$	Ordinate $y$	$\sin(3 \omega t)$	$\cos(3 \omega t)$	$y \cdot \sin(3 \omega t)$	$y \cdot \cos(3 \omega t)$
0	0	0	0	1,000	0	0
15 <sup>0</sup>	45 <sup>0</sup>	25,5	+ 0,707	+ 0,707	+ 18,0	+ 18,0
30	90	43,5	+ 1,000	0,000	+ 43,5	0
45	135	59,2	+ 0,707	- 0,707	+ 41,8	- 41,8
60	180	59,2	0,000	- 1,000	0	- 59,2
75	225	38,6	- 0,707	- 0,707	- 27,3	- 27,3
90	270	33,0	- 1,000	0,000	- 33,0	0
105	315	71,0	- 0,707	+ 0,707	- 50,2	+ 50,2
120	360	132,0	0,000	+ 1,000	0	+ 132,0
135	405	158,0	+ 0,707	+ 0,707	+ 111,8	+ 111,8
150	450	119,5	+ 1,000	0,000	+ 119,5	0
165	495	52,0	+ 0,707	- 0,707	+ 36,8	- 36,8
180	540	0	0,000	- 1,000	0	0
					+ 371,4 - 110,5	+ 312,0 - 165,1
					= + 260,9	= + 146,9

somit

$$\sum_0^{T/2} y \sin(3 \omega t) = +260,9, \quad \sum_0^{T/2} y \cos(3 \omega t) = +146,9,$$

und daher

$$A_3 = \frac{2}{k} \sum_0^{T/2} y \sin(3 \omega t) = \frac{2}{12} \cdot 260,9 = +43,5,$$

$$B_3 = \frac{2}{k} \sum_0^{T/2} y \cos(3 \omega t) = \frac{2}{12} \cdot 146,9 = +24,5,$$

$$F_3 = \sqrt{A_3^2 + B_3^2} = 49,9, \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{B_3}{A_3} = \operatorname{arctg} \frac{+24,5}{43,5} = 29^\circ 23'.$$

Das zweite Glied unserer Reihe nach Gl. (9) lautet also:

$$F_3 \sin(3 \omega t + \varphi) = 49,9 \sin(3 \omega t + 29^\circ 23'), \quad (12)$$

Tabelle für  $A_5$  und  $B_5$ .

Abszisse in Graden ( $\omega t$ )	$5 \omega t$	Ordinate $y$	$\sin(5 \omega t)$	$\cos(5 \omega t)$	$y \cdot \sin(5 \omega t)$	$y \cdot \cos(5 \omega t)$
0	0	0	0	+ 1,000	0	0
15 <sup>0</sup>	75 <sup>0</sup>	25,5	+ 0,966	+ 0,259	+ 24,7	+ 6,6
30	150	43,5	+ 0,500	- 0,866	+ 21,7	- 37,7
45	225	59,2	- 0,707	- 0,707	- 41,8	- 41,8
60	300	59,2	- 0,866	+ 0,500	- 51,3	+ 29,6
75	375	38,6	+ 0,259	+ 0,966	+ 10,0	+ 37,3
90	450	33,0	+ 1,000	0,000	+ 33,0	0
105	525	71,0	+ 0,259	- 0,966	+ 18,4	- 68,6
120	600	132,0	- 0,866	- 0,500	- 114,5	- 66,0
135	675	158,0	- 0,707	+ 0,707	- 111,8	+ 111,8
150	750	119,5	+ 0,500	+ 0,866	+ 59,7	+ 103,6
165	825	52,0	+ 0,966	- 0,259	+ 50,2	- 13,5
180	900	0	0	- 1,000	0	0
					+ 217,7 - 319,4	+ 288,9 - 277,6
					= - 101,7	= + 61,3

somit

$$A_5 = \frac{2}{k} \sum_0^{T/2} y \sin(5 \omega t) = \frac{2}{12} (-101,7) = -16,95,$$

$$B_5 = \frac{2}{k} \sum_0^{T/2} y \cos(5 \omega t) = \frac{2}{12} \cdot 61,3 = +10,2,$$

$$F_5 = \sqrt{A_5^2 + B_5^2} = 19,8, \quad \varphi_5 = \arctg \frac{B_5}{A_5} = \arctg \frac{+10,2}{-16,95} = 148^\circ 57'.$$

Das dritte Glied der Reihe lautet daher:

$$F_5 \sin(5 \omega t + \varphi_5) = 19,8 \sin(5 \omega t + 148^\circ 57'). \quad (13)$$

Nach dem gleichen Schema, das jetzt wohl leicht verständlich ist, sind die folgenden drei Glieder, bis inbegriffen  $A_{11}$  und  $B_{11}$ , zu rechnen. Die Glieder  $(A, B)_{13}$  und die folgenden dürfen natürlich nicht zur Ergänzung der Reihe herangezogen werden, denn die Reihe ist mit dem Gliede

$$F_{11} \sin(11 \omega t + \varphi_{11})$$

beendet.

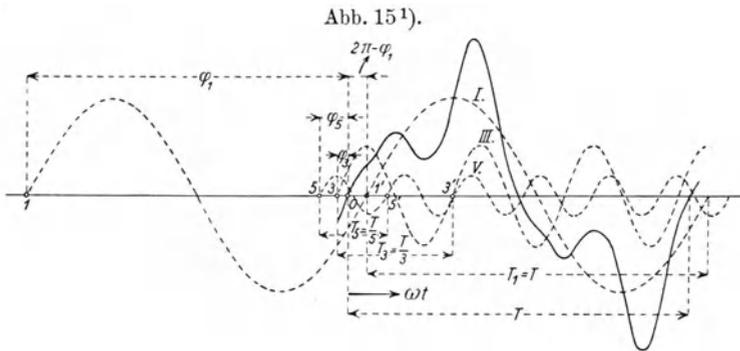
Führt man diese Rechnung für unser Beispiel aus, so ergeben sich die Amplituden  $F$  der Glieder mit höherer Stellzahl als 5, also die Größen  $F_7$ ,  $F_9$  und  $F_{11}$  als Bruchteile der Einheit; sie sind daher für unsere Kurve bedeutungslos und wir schreiben die Gleichung unserer Kurve in der Form:

$$y = 99,5 \sin(\omega t + 339^\circ 32') + 49,9 \sin(3 \omega t + 29^\circ 23') + 19,8 \sin(5 \omega t + 148^\circ 57'). \quad (14)$$

Nun müssen wir uns aber auch davon überzeugen, daß diese Gleichung das Kurvenbild mit genügender Genauigkeit wiedergibt. Zu diesem Zwecke konstruieren wir Gl. (14). Hierbei ist die Berücksichtigung der Phasenwinkel von größter Bedeutung.

Da wir wissen, daß die erste Harmonische, die Grundwelle, dieselbe Periode hat, wie die verzerrte Kurve, nämlich  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , so ist auch in unserer Konstruktion die Länge  $T_1$  der Periode der ersten Welle gleich 360 mm.

Nun eilt die Grundwelle laut Gl. (14) der verzerrten Welle um  $339^\circ 32'$  vor, oder — was dasselbe sagt — sie eilt ihr um  $20^\circ 28'$



nach. Wählen wir auf der Abszisse den Punkt  $O$  des Durchganges der verzerrten Welle durch Null, so finden wir  $339,5$  mm nach links oder  $20,5$  mm nach rechts den Nulldurchgang der Grundwelle, d. h. die Punkte 1 und 1'. Da wir die Amplitude ( $99,5$  mm) kennen, können wir die Grundwelle einzeichnen.

Die Länge der Periode der dritten Harmonischen ergibt sich aus

$$3\omega = \frac{2\pi}{T_3}, \quad \text{mit } T_3 = \frac{1}{3} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{3} T = \frac{1}{3} T_1,$$

also mit  $120$  mm. Laut Gl. (14) eilt die dritte Harmonische um  $29^\circ 23'$  ihrer Eigenperiode der verzerrten Welle vor. Die Eigenperiode, das sind  $360^\circ$ , der dritten Harmonischen entspricht  $120$  mm; somit entsprechen  $29^\circ 23'$  der Länge  $\frac{29,5}{360} 120 = 9,8$  mm. Um den Nulldurchgang (Punkt 3) der dritten Harmonischen zu finden, haben wir also von  $O$  aus  $9,8$  mm nach links aufzutragen. Die Amplitude ist mit  $49,9$  gegeben, somit ist die Welle einzuzeichnen.

<sup>1)</sup> Die Abb. 15 ist auf  $\frac{1}{8}$  verkleinert.

Die Länge der Periode der fünften Harmonischen ergibt sich aus

$$5 \omega = \frac{2 \pi}{T_5}, \quad \text{mit } T_5 = \frac{1}{5} \frac{2 \pi}{\omega} = \frac{1}{5} T = \frac{1}{5} T_1,$$

also mit 72 mm. Da die fünfte Harmonische vor der verzerrten Welle um  $148^\circ 57'$  voreilt, so finden wir ihren Nulldurchgang, wenn wir von  $O$  aus die Länge  $\frac{149}{360} \cdot 72 = 29,8$  mm nach links auftragen und damit den Punkt 5 erhalten. Da die Amplitude mit 19,8 gegeben ist, können wir auch die fünfte Harmonische einzeichnen.

Die algebraische Addition der drei Harmonischen (punktiert), die in der Abb. 15 durchgeführt ist, ergibt nun mit genügender Genauigkeit das Bild der verzerrten Welle (voll ausgezogen). Gl. (14) stellt daher die verzerrte Welle mit ausreichender Genauigkeit dar — die Analyse ist genügend.

Zur weiteren Charakteristik der Genauigkeit dieser Analyse sei ver-raten, daß die verzerrte Welle ursprünglich nach der Gleichung

$$y = 100 \sin(\omega t - 20^\circ) + 50 \sin(3 \omega t + 30^\circ) + 20 \sin(5 \omega t + 150^\circ) \quad (14a)$$

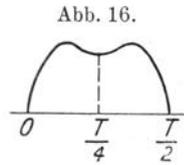
konstruiert war. Die Übereinstimmung der Gl. (14) und (14a) ist also eine sehr befriedigende.

Hätten wir unsere halbe Periode nicht in 12, sondern in 6 Teile geteilt, so kann der Leser aus den gegebenen Tabellen leicht nachrechnen, daß die Größen  $A$  und  $B$  mit folgenden Werten erscheinen:

$$\begin{aligned} A_1 &= +93,4, & A_3 &= +43,3, & A_5 &= -17,1, \\ B_1 &= -34,1, & B_3 &= +24,3, & B_5 &= +9,83, \end{aligned}$$

woraus sich die Kurvengleichung ergibt mit

$$y = 99,4 \sin(\omega t - 20^\circ 3') + 49,6 \sin(3 \omega t + 29^\circ 14') + 19,7 \sin(5 \omega t + 150^\circ 36').$$



Also auch mit nur sechs Ordinaten hätten wir diese Kurve mit genügender Genauigkeit analysiert.

Bei dem Analysieren einer Kurve sei darauf aufmerksam gemacht, daß das Nullwerden irgend einer Harmonischen, z. B. der fünften, siebenten, neunten, noch durchaus nicht besagt, daß die folgenden ebenfalls Null werden. Es empfiehlt sich, bei der Analyse jede erhaltene Harmonische gleich einzuzichnen und die Summe zu prüfen. Erst wenn man sieht daß die Summe der verzerrten Form entspricht, darf man die Analyse abschließen.

Sind Kurven zu analysieren, die auch zur Ordinate durch  $\frac{T}{4}$  symmetrisch sind (s. Abb. 16), so lehrt ein Blick auf die gegebenen Tabellen,

daß unsere Kosinusreihen entfallen, d. h. daß die sämtlichen Konstanten  $B$  und damit auch die Phasenkonstanten  $\varphi$  Null werden.

Es bleibt dann nur die Bestimmung der Konstanten  $A$  übrig, und die Kurve hat die Gleichung:

$$y = A_1 \sin(\omega t) + A_3 \sin(3 \omega t) + A_5 \sin(5 \omega t) + \dots$$

### Analyse einer unsymmetrischen Kurve.

Der Vollständigkeit wegen wollen wir im folgenden noch die Analyse einer Kurve durchführen, die zu der Abszisse unsymmetrisch verläuft.

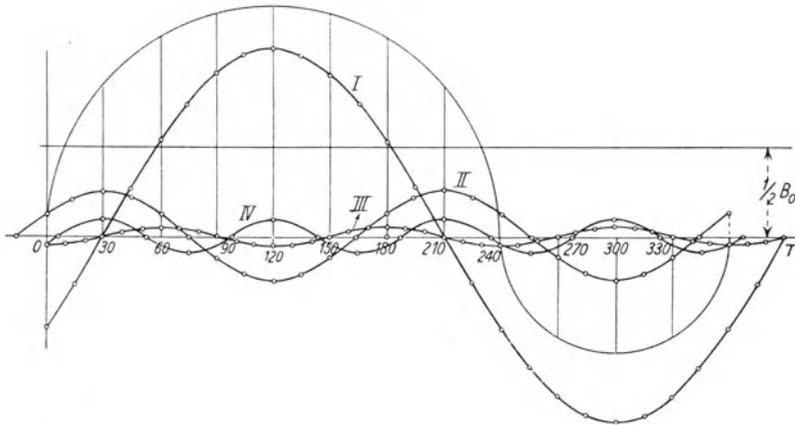
Es wurden zwei Halbkreise gewählt, die in der Abszisse einander berühren.

$$\text{Halbmesser: } r_1 = 60 \text{ mm, } r_2 = 30 \text{ mm.}$$

$$\text{Periodenlänge} = 180 \text{ mm.}$$

Da die Flächen über und unter der Abszisse ungleich sind, entfallen die geraden Glieder der Reihe und das Glied  $B_0$  nicht.

Abb. 17<sup>1)</sup>.



Auf Grund derselben Erwägungen, die wir früher gemacht haben, ergibt sich, daß hier die Konstanten  $A_n$  und  $B_n$  angenähert dargestellt werden können durch die Ausdrücke:

$$A_n = \frac{2}{k} \sum_0^T y \sin(n \cdot \omega t),$$

$$B_n = \frac{2}{k} \sum_0^T y \cos(n \cdot \omega t),$$

<sup>1)</sup> Abb. 17 ist auf die Hälfte verkleinert.

wobei wohl zu beachten ist, daß jetzt  $k$  die Anzahl der Abschnitte der ganzen Periode bedeutet und die Summierung sich über die ganze Periode erstreckt.

Machen wir, wie es in der Abbildung geschehen ist,  $k = 12$ , so ergeben sich für die  $A$  und  $B$  Tabellen nach folgendem Schema:

Tabelle für  $A_n$  und  $B_n$ .

$y$ mm	$(n \cdot \omega \cdot t)^0$	$\sin(n \cdot \omega \cdot t)$	$\cos(n \cdot \omega \cdot t)$	$y \sin(n \cdot \omega \cdot t)$	$y \cos(n \cdot \omega \cdot t)$
0	0	.	.	.	.
$y_1 = 39,1$	$n \cdot 30$	.	.	.	.
$y_2 = 52,0$	$n \cdot 60$	.	.	.	.
$y_3 = 58,0$	$n \cdot 90$	.	.	.	.
$y_4 = 60,0$	$n \cdot 120$	.	.	.	.
$y_5 = 58,0$	$n \cdot 150$	.	.	.	.
$y_6 = 52,0$	$n \cdot 180$	.	.	.	.
$y_7 = 39,1$	$n \cdot 210$	.	.	.	.
$y_8 = 0,0$	$n \cdot 240$	.	.	.	.
$y_9 = -26,0$	$n \cdot 270$	.	.	.	.
$y_{10} = -30,0$	$n \cdot 300$	.	.	.	.
$y_{11} = -26,0$	$n \cdot 330$	.	.	.	.
0	$n \cdot 360$	.	.	.	.
				$\sum_0^T y \sin(n \cdot \omega \cdot t)$	$\sum_0^T y \cos(n \cdot \omega \cdot t)$

Es ergibt sich somit  $B_0$  für  $n = 0$  mit

$$B_0 = \frac{2}{12} \sum y \cos(0 \cdot \omega \cdot t) = \frac{2}{12} \sum y = 46,3:$$

$A_1 = 41,5$	$B_1 = -24,0$	$F_1 = 47,9$	$\varphi_1 = -30^\circ$
$A_2 = 10,1$	$B_2 = 5,8$	$F_2 = 11,7$	$\varphi_2 = +30^\circ$
$A_3 = 0$	$B_3 = -2,3$	$F_3 = 2,3$	$\varphi_3 = -90^\circ$
$A_4 = 3,75$	$B_4 = -2,16$	$F_4 = 4,3$	$\varphi_4 = -30^\circ$
$A_5 = 0,5$	$B_5 = 0,283$	$F_5 = 0,58$	$\varphi_5 = +30^\circ$
$A_6 = 0$	$B_6 = -1,37$	$F_6 = 1,37$	$\varphi_6 = -90^\circ$

Die Gleichung der Kurve, die hier gegeben ist durch

$$y = \frac{1}{2} B_0 + F_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + F_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + F_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots,$$

wird mit genügender Genauigkeit dargestellt durch die Form

$$y = 23,1 + 47,9 \sin(\omega t - 30^\circ) + 11,7 \sin(2\omega t + 30^\circ) + 2,3 \sin(3\omega t - 90^\circ) + 4,3 \sin(4\omega t - 30^\circ) + 0,58 \sin(5\omega t + 30^\circ) + 1,37 \sin(6\omega t - 90^\circ),$$

wovon die Abbildung, in welcher die letzten zwei Glieder nicht eingezeichnet sind, einen überzeugenden Beweis gibt.

## II. Effektivwert und arithmetischer Mittelwert.

Zur ziffernmäßigen Erfassung einer Wechselstromgröße beliebiger, verzerrter Form kann nur ein Mittelwert dienen.

Es wird jener Mittelwert gewählt, den die Meßinstrumente anzeigen. Würde man einen Wechselstrom mit Gleichstrominstrumenten messen, so wären die Zeigerausschläge der Instrumente den ersten Potenzen der jeweiligen Stromstärke proportional. Der Zeiger wäre versucht, sich im Rhythmus der Stromschwankungen zu bewegen, d. h. in der Zeiteinheit so viele positive und negative Maxima anzuzeigen, als die Frequenzziffer des Stromes beträgt. Die Trägheit verhindert den Zeiger, den Impulsen momentan zu folgen, und er stellt sich daher auf den arithmetischen Mittelwert dieser Impulse über eine Periode ein. Dieser arithmetische Mittelwert über eine ganze Periode ist aber Null und der Zeiger gibt somit keinen Ausschlag; er gerät bei geringeren Frequenzen nur in ein leichtes Zittern.

Meßinstrumente, bei denen der Bewegungsimpuls auf den Zeiger der ersten Potenz der zu messenden Größe proportional ist, sind also für Wechselstrom nicht brauchbar.

Ist der Bewegungsimpuls auf den Zeiger der zweiten Potenz der jeweiligen Stromstärke proportional, so ändert dieser Impuls während einer Periode zwar seine Größe, nicht aber seine Richtung. Der Zeiger wird daher nur in einer Richtung abgelenkt. Auch jetzt entspricht seine Ablenkung dem Mittelwert der Impulse über eine Periode. Dieser Mittelwert aber ist proportional dem Mittelwert aus den Quadraten der Momentanwerte des Stromes während einer Periode. Ist  $i$  der Momentanwert des Stromes, so ist der Ausdruck

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$$

die Größe, welche die Zeigerablenkung des Instrumentes bestimmt.

Will man den, von dem Strome  $i$  in einem Widerstand  $r$ , erzeugten Wärmeeffekt angeben, so ist dieser nach dem Jouleschen Gesetz gegeben durch

$$\int_0^1 r i^2 dt = f \int_0^T r i^2 dt = r \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt.$$

Setzt man

$$J^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt,$$

somit

$$J = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}, \quad (1)$$

so bedeutet  $J$  den Wert eines Gleichstromes, der denselben Wärmeeffekt leistet als der Wechselstrom  $i$ .

Diese so definierte Größe  $J$  nennt man den Effektivwert des Wechselstromes  $i$ .

Gl. (1) sagt in Worten: Der Effektivwert einer Wechselstromgröße ist gleich der Quadratwurzel aus dem Mittelwert der Quadrate ihrer Momentanwerte während einer Periode.

Das Quadrat dieses Effektivwertes bestimmt also den Zeigerausschlag der Wechselstrominstrumente. Ist  $C'$  eine Proportionalitätskonstante und  $x$  der Ausschlag eines Wechselstrommessers, so ist

$$x = C' \cdot J^2$$

und somit

$$J = \frac{1}{\sqrt{C'}} \cdot \sqrt{x} = C \sqrt{x}.$$

Meßinstrumente, bei denen der Bewegungsimpuls auf den Zeiger der zweiten Potenz der Momentanwerte der zu messenden Größe proportional ist, sind also zur Messung des Effektivwertes geeignet.

Gl. (1) gestattet uns nun, den Effektivwert einer Wechselstromgröße bei Kenntnis ihrer Kurvenform zu berechnen.

Es sei die Gleichung einer Spannungskurve gegeben durch

$$e = \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \mathfrak{E}_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \mathfrak{E}_5 \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots, \quad (2)$$

so ist der Effektivwert dieser Spannung nach (1)

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}. \quad (3)$$

Setzen wir den Wert von  $e$  ein, so wird:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{ \mathfrak{E}_1^2 \sin^2(\omega t + \psi_1) + \mathfrak{E}_3^2 \sin^2(3\omega t + \psi_3) + \mathfrak{E}_5^2 \sin^2(5\omega t + \psi_5) + \dots \\ \dots + 2 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_3 \sin(\omega t + \psi_1) \sin(3\omega t + \psi_3) + 2 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_5 \sin(\omega t + \psi_1) \cdot \\ \cdot \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots + 2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_5 \sin(3\omega t + \psi_3) \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots \} dt}.$$

Entwickeln wir die einzelnen Integrale, so wird, wegen

$$\sin^2(k\alpha) = \frac{1}{2} \{1 - \cos 2k\alpha\} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{G}_n^2 \sin^2(n\omega t + \psi_n) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{G}_n^2 \frac{1}{2} \{dt - \cos(2n\omega t + 2\psi_n) dt\} = \\ &= \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T} \mathfrak{G}_n^2 t \right|_0^T - \left| \frac{1}{2} \frac{1}{T} \mathfrak{G}_n^2 \cdot \frac{1}{2n\omega} \sin(2n\omega t + 2\psi_n) \right|_0^T = \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{G}_n^2 - \frac{1}{8\pi n} \mathfrak{G}_n^2 \{ \sin(4\pi n + 2\psi_n) - \sin(2\psi_n) \} = \frac{1}{2} \mathfrak{G}_n^2, \end{aligned}$$

und wegen

$$\sin(n\alpha) \sin(k\alpha) = \frac{1}{2} \{ \cos(n-k)\alpha - \cos(n+k)\alpha \},$$

wird:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T} \int_0^T 2 \mathfrak{G}_n \mathfrak{G}_k \sin(n\omega t + \psi_n) \sin(k\omega t + \psi_k) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{G}_n \mathfrak{G}_k \cos\{(n-k)\omega t + (\psi_n - \psi_k)\} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{G}_n \mathfrak{G}_k \cos\{(n+k)\omega t + \\ &\quad + (\psi_n + \psi_k)\} dt = \frac{1}{2\pi(n-k)} \mathfrak{G}_n \mathfrak{G}_k \sin\{2\pi(n-k) + (\psi_n - \psi_k)\} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi(n-k)} \mathfrak{G}_n \mathfrak{G}_k \sin(\psi_n - \psi_k) - \frac{1}{2\pi(n+k)} \mathfrak{G}_n \mathfrak{G}_k \sin\{2\pi(n+k) + \\ &\quad + (\psi_n + \psi_k)\} + \frac{1}{2\pi(n+k)} \mathfrak{G}_n \mathfrak{G}_k \sin(\psi_n + \psi_k) = 0, \end{aligned}$$

somit

$$E = \sqrt{\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{G}_3^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{G}_5^2 + \dots}$$

oder

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mathfrak{G}_1^2 + \mathfrak{G}_3^2 + \mathfrak{G}_5^2 + \dots} = \frac{\mathfrak{G}_1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \dots} \quad (4)$$

Für die reine Sinuslinie, die ja nur aus der Grundharmonischen besteht, ist daher

$$E = \frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{2}}, \quad (4a)$$

wo  $\mathfrak{G}$  die Amplitude der Sinuslinie ist.

Der arithmetische Mittelwert unserer verzerrten Kurve nach Gl. (2) über die halbe Periode ist

$$e_{mi} = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^{T/2} e dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi_1) dt + \\ & + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \mathfrak{E}_3 \sin(3\omega t + \psi_3) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \mathfrak{E}_5 \sin(5\omega t + \psi_5) dt + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

und da

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \mathfrak{E}_{(2k+1)} \sin\{(2k+1)\omega t + \psi_{(2k+1)}\} dt = \\ & = \left| -\frac{1}{T} \frac{1}{(2k+1)\omega} \mathfrak{E}_{(2k+1)} \cos\{(2k+1)\omega t + \psi_{(2k+1)}\} \right|_0^{T/2} = \\ & = -\frac{1}{(2k+1)} \cdot \frac{1}{\pi} \mathfrak{E}_{(2k+1)} \cos\{(2k+1)\pi + \psi_{(2k+1)}\} + \\ & + \frac{1}{(2k+1)} \cdot \frac{1}{\pi} \mathfrak{E}_{(2k+1)} \cos \psi_{(2k+1)} = \frac{1}{(2k+1)} \cdot \frac{2}{\pi} \mathfrak{E}_{(2k+1)} \cos \psi_{(2k+1)} \end{aligned}$$

so folgt für  $k = 0$  bis  $\infty$  nach Gl. (5)

$$e_{mi} = \frac{2}{\pi} \left( \mathfrak{E}_1 \cos \psi_1 + \frac{\mathfrak{E}_3}{3} \cos \psi_3 + \frac{\mathfrak{E}_5}{5} \cos \psi_5 + \dots \right). \quad (6)$$

Beachtet man (s. I. Abschn.), daß

$$\mathfrak{E}_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \psi_n = \frac{B_n}{A_n},$$

somit

$$\cos \psi_n = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}},$$

so folgt auch

$$e_{mi} = \frac{2}{\pi} \left( A_1 + \frac{A_3}{3} + \frac{A_5}{5} + \dots \right). \quad (6a)$$

Daher für die reine Sinuslinie, für die  $A_1$  gleich ihrer Amplitude ist, die höheren Harmonischen aber Null sind, ist

$$e_{mi} = \frac{2}{\pi} \mathfrak{E} = 0,637 \mathfrak{E}. \quad (6b)$$

Das Verhältnis zwischen dem Effektivwert und dem arithmetischen Mittelwert heißt der Formfaktor  $f$ , der im übrigen von untergeordneter Bedeutung ist.

Es ist

$$f = \frac{E}{e_{mi}},$$

oder nach Gl. (5) und (6a)

$$f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\mathfrak{G}_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \dots}}{A_1 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{A_3}{A_1} + \frac{1}{5} \frac{A_5}{A_1} + \dots\right)}. \quad (7)$$

Das Verhältnis zwischen dem Maximalwert und dem Effektivwert heißt der Scheitelfaktor  $\sigma$ , der dort eine wichtige Rolle spielt, wo der Maximalwert von Bedeutung ist,

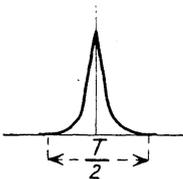
$$\sigma = \frac{e_{\max}}{E} = \frac{e_{\max}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \mathfrak{G}_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \dots}}. \quad (8)$$

Für die reine Sinuslinie, für die  $\mathfrak{G}_1 = A_1 = e_{\max}$  ist und die höheren Harmonischen nicht existieren, folgt

$$f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11, \quad \sigma = \frac{\mathfrak{G}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \mathfrak{G}} = \sqrt{2} = 1,414.$$

Sind die Kurven, welche die Wechselströme darstellen, flacher oder stumpfer als die Sinuslinie, so erhalten  $f$  und  $\sigma$  Werte, die kleiner sind als die für die Sinuslinie berechneten; sind die Kurven spitzer als die Sinuslinie, so werden  $f$  und  $\sigma$  größer als für die Sinuslinie.

Abb. 18.



Der Leser möge sich durch Nachrechnen hiervon überzeugen

Die kleinsten Werte erreichen  $f$  und  $\sigma$  für Rechtecksform, dann ist

$$f = \sigma = 1.$$

Als Extremfall der spitzen Kurven wäre Abb. 18 anzusehen, wo sich zwei Halbparabeln über der Abszisse treffen. Hier ist

$$f = 1,35, \quad \sigma = 2,235.$$

### III. Der Wechselstromkreis mit nur Ohmschem und konstantem induktivem Widerstand.

Zwischen den Klemmen  $a$  und  $b$  (Abb. 19) herrsche eine wechselnde Spannungsdifferenz

$$e = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi).$$

Der Ohmsche Widerstand des Stromkreises sei  $r$ , der hier konstant angenommene Koeffizient der Selbstinduktion sei  $L$ . Wir fragen nach dem Strome  $i$ , der sich unter dem Einfluß der Spannungsdifferenz ausbildet.

Die zweite Maxwell'sche Gleichung besagt: Die Abnahme, in der Zeiteinheit, der senkrechten magnetischen Durchflutung einer Fläche ist gleich dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke über die Randkurve dieser Fläche, wobei der Umlaufsinn der Kurve und die Richtung der Durchflutung ein Rechtssystem bilden.

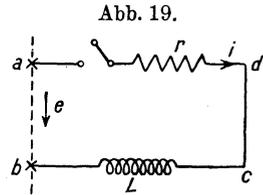


Abb. 19.

Wenden wir dies auf unsere Abbildung an und benennen wir mit  $\Phi$  den magnetischen Fluß, der unser Rechteck  $abcd$  durchsetzt, so folgt

$$-\frac{d\Phi}{dt} = ri - e,$$

und da

$$\Phi = Li, \quad \text{somit} \quad \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt},$$

ergibt sich

$$ri + L \frac{di}{dt} = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi) \quad (1)$$

als die Differentialgleichung, die den Strömungsvorgang in unserem Kreise beschreibt.

Zur Lösung nach  $i$  dieser Differentialgleichung erster Ordnung mit Störungsfunktion (rechte Seite), bringen wir die Gleichung zunächst auf ihre homogene Form, indem wir die rechte Seite gleich Null setzen.

Dann wird

$$ri + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (1a)$$

oder

$$-\frac{r}{L} dt = \frac{di}{i},$$

somit integriert

$$-\frac{r}{L}t = \lg i + \text{Konstante.}$$

Die Integrationskonstante können wir als den natürlichen Logarithmus einer konstanten Größe  $c$  ansehen und schreiben

$$-\frac{r}{L}t = \lg i + \lg c = \lg ic.$$

Nennen wir  $\varepsilon$  die Basis der natürlichen Logarithmen und gehen wir von den Logarithmen auf die Exponentialgröße über, so folgt

$$ic = \varepsilon^{-\frac{r}{L}t} \quad \text{oder} \quad i = \frac{1}{c} \varepsilon^{-\frac{r}{L}t} = C \varepsilon^{-\frac{r}{L}t}, \quad (2)$$

wenn wir  $\frac{1}{c}$  gleich einer neuen Konstanten  $C$  setzen.

Gl. (2) gibt also das allgemeine Integral der homogenen Gl. (1a).

Man kann nun aber unter (2) auch das allgemeine Integral der inhomogenen Gl. (1) verstehen, doch darf dann  $C$  keine Konstante, sondern muß selbst eine Funktion der unabhängig Veränderlichen  $t$  sein.

Dann wird nach Gl. (2)

$$\frac{di}{dt} = \frac{dC}{dt} \varepsilon^{-\frac{r}{L}t} - \frac{r}{L} C \varepsilon^{-\frac{r}{L}t}. \quad (3)$$

Führt man nun (2) und (3) in (1) ein, so wird

$$r C \varepsilon^{-\frac{r}{L}t} + L \frac{dC}{dt} \varepsilon^{-\frac{r}{L}t} - \frac{r}{L} L C \varepsilon^{-\frac{r}{L}t} = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi),$$

woraus

$$L \frac{dC}{dt} \varepsilon^{-\frac{r}{L}t} = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi)$$

oder

$$C = \frac{\mathfrak{E}}{L} \underbrace{\int \varepsilon^{\frac{r}{L}t} \sin(\omega t + \psi) dt}_J + K, \quad (4)$$

woraus die Größe  $C$  zu bestimmen ist.

Nennen wir  $J$  das Integral in (4), so ergibt sich dieses durch partielle Integration nach dem Muster

$$J = \int u dv = uv - \int v \cdot du.$$

Setzen wir

$$\varepsilon^{\frac{r}{L}t} = u, \quad \text{also} \quad du = \frac{r}{L} \varepsilon^{\frac{r}{L}t} dt$$

$$dv = \sin(\omega t + \psi) dt,$$

also

$$v = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \psi),$$

so wird

$$J = -\frac{1}{\omega} \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \cdot \cos(\omega t + \psi) + \frac{r}{\omega L} \underbrace{\int \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \cdot \cos(\omega t + \psi) dt}_{J_1} \quad (5)$$

Nennen wir dieses letzte Integral  $J_1$ , so ist auch dieses zu setzen:

$$J_1 = \int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1.$$

Mit

$$u_1 = \varepsilon^{\frac{r}{L} t}, \quad du_1 = \frac{r}{L} \varepsilon^{\frac{r}{L} t} dt$$

und

$$dv_1 = \cos(\omega t + \psi) dt, \quad v_1 = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \psi),$$

wird

$$J_1 = \frac{1}{\omega} \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \sin(\omega t + \psi) - \frac{r}{\omega L} \int \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \sin(\omega t + \psi) dt$$

oder

$$J_1 = \frac{1}{\omega} \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \sin(\omega t + \psi) - \frac{r}{\omega L} J.$$

Dies in (5) eingesetzt ergibt:

$$J = -\frac{1}{\omega} \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \cos(\omega t + \psi) + \frac{r}{\omega^2 L} \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \sin(\omega t + \psi) - \frac{r^2}{\omega^2 L^2} J$$

oder

$$J \left( 1 + \frac{r^2}{\omega^2 L^2} \right) = \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \left\{ \frac{r}{\omega^2 L} \sin(\omega t + \psi) - \frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \psi) \right\},$$

$$J \frac{r^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L^2} = \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \frac{1}{\omega^2 L} \{ r \sin(\omega t + \psi) - \omega L \cos(\omega t + \psi) \}. \quad (6)$$

Setzen wir hier

$$r = F \cos \varphi,$$

$$\omega L = F \sin \varphi,$$

somit

$$F = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r}, \quad (7)$$

so geht Gl. (6) über in

$$J (r^2 + \omega^2 L^2) = L \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \psi - \varphi)$$

oder

$$J = \frac{L}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Dies in (4) eingesetzt ergibt:

$$C = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \varepsilon^{\frac{r}{L} t} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + K \quad (8)$$

und demnach mit Rücksicht auf (2)

$$i = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + K \varepsilon^{-\frac{r}{L} t}, \quad (9)$$

wo nur noch die Konstante  $K$  zu bestimmen ist.

Bei der Integration von Differentialgleichungen sind die Integrationskonstanten immer dann bestimmbar, wenn man für bestimmte Werte der unabhängigen Variablen die Werte der abhängigen kennt.

In unserem gegenwärtigen Falle wissen wir, daß im Moment des Schließens unseres Stromkreises, d. h. zu Beginn unserer Beobachtung und damit unserer Zeitzählung, oder im Moment  $t = 0$ , die Stromstärke  $i$  noch Null ist.

Gl. (9) lautet also für  $t = 0$ :

$$0 = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\psi - \varphi) + K.$$

Hieraus folgt

$$K = -\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\psi - \varphi)$$

und daher

$$i = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\psi - \varphi) \cdot \varepsilon^{-\frac{r}{L} t}. \quad (10)$$

Wir finden die entstehende Stromstärke durch zwei Glieder dargestellt. Das erste ist eine reine Sinusfunktion der Zeit, die in der Phase gegenüber der Spannung um den Bogen

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r}$$

zurückbleibt. Das zweite ist eine aperiodische Funktion der Zeit, da der konstante Wert

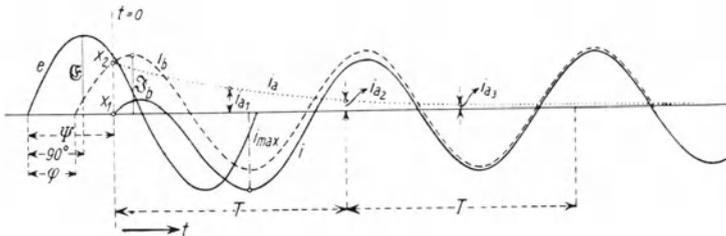
$$\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\psi - \varphi)$$

mit dem Exponentialfaktor  $\varepsilon^{-\frac{r}{L}t}$  versehen ist, der mit wachsender Zeit kleiner wird und nach — theoretisch — unendlich langer Zeit zu Null wird.

Wir können auch sagen: Der Stromkreis, der sich vor dem Schalterschuß in einem Beharrungszustand, charakterisiert durch Stromlosigkeit ( $i = 0$ ), befand, strebt nach Schalterschuß einem neuen Beharrungszustand zu, den das erste Glied der Gl. (10) ausdrückt.

Da die Natur keine Sprünge macht, kann der zweite Beharrungszustand nicht unvermittelt augenblicklich auf den ersten folgen, sondern es kann nur ein allmählicher Übergang aus dem ersten Zustand in den zweiten stattfinden. Diesen allmählichen Übergang vermittelt das zweite Glied in Gl. (10), welches wir den Ausgleichvorgang nennen wollen.

Abb. 20.



Die mathematische Formulierung dieser physikalischen Tatsache ist in Gl. (10) gelungen. Der jeweilige Zustand, zu einer beliebigen Zeit  $t$ , ist gleich der algebraischen Summe des zu erwartenden Beharrungszustandes und des Ausgleichvorganges. Zur Zeit  $t = 0$  ist nach (10)  $i = 0$ , d. h. es herrscht noch der erste Beharrungszustand; zur Zeit  $t = \infty$  ist nach (10)  $i$  gleich dem neuen Beharrungszustand.

Wir wollen nun Gl. (10) graphisch darstellen (s. Abb. 20).

Die Klemmenspannung  $e$  habe 50 Perioden in der Sekunde, es ist also

$$T = \frac{1}{50} \text{ sec.}$$

Um die Ausbildung des Beharrungszustandes auf das Papier zu bringen, ist das Verhältnis  $\frac{r}{L}$  sehr groß gewählt. Es ist

$$\frac{r}{L} = 80$$

angenommen.

Wir zeichnen zunächst die Sinuslinie für die Spannung  $e$ . Hinter dieser, um den Bogen  $\varphi$  verschoben, folgt die Sinuslinie, die den zu erwartenden Beharrungszustand  $i_b$  darstellt. Es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r} = \omega \frac{1}{80} = \frac{314}{80} = 3,925, \quad \text{also} \quad \varphi = 75,7^\circ.$$

Nun wählen wir  $\psi$ , die Phase des Einschaltmomentes, für den  $t = 0$  ist, beliebig; dann ist  $x_1 x_2$  der Anfangswert des zweiten Gliedes nach Gl. (10).

Es sei die effektive Klemmenspannung

$$E = 100 \text{ Volt},$$

dann ist die Spannungsamplitude

$$\mathfrak{E} = 100 \sqrt{2} = 141,4 \text{ Volt}.$$

Ferner sei

$$r = 40 \text{ Ohm}, \quad L = 0,5 \text{ Henry}.$$

Somit die Amplitude  $\mathfrak{I}_b$  des Beharrungsstromes

$$\mathfrak{I}_b = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{141,4}{\sqrt{1600 + 24650}} = 0,872 \text{ Amp.}$$

$\psi$  ist in der Abbildung mit  $138^\circ$  gewählt. Es ist also

$$x_1 x_2 = \mathfrak{I}_b \sin(\psi - \varphi) = 0,872 \sin(62,3^\circ) = 0,772 \text{ Amp.}$$

der Anfangswert des zweiten Gliedes.

Dieses Glied fällt mit wachsender Zeit, in unserem Falle rasch, ab. Sein laufender Wert  $i_a$  ist

$$x_1 x_2 \varepsilon^{-\frac{r}{L} t} = 0,772 \cdot \varepsilon^{-80 t},$$

für  $t = \frac{T}{2} = \frac{1}{100} \text{ sec}$  wird  $i_{a1} = 0,772 \cdot \varepsilon^{-\frac{80}{100}} = 0,772 \cdot 0,45 = 0,35,$

„  $t = 2 \frac{T}{2} = \frac{2}{100} \text{ sec}$  „  $i_{a2} = 0,772 \cdot \varepsilon^{-1,6} = 0,772 \cdot 0,202 = 0,156,$

„  $t = \frac{3T}{2} = \frac{3}{100} \text{ sec}$  „  $i_{a3} = 0,772 \cdot \varepsilon^{-2,4} = 0,061,$

„  $t = \frac{4T}{2} = \frac{4}{100} \text{ sec}$  „  $i_{a4} = 0,772 \cdot \varepsilon^{-3,2} = 0,032.$

Nach Ablauf von drei Perioden ist das Glied  $i_a$  nahezu bedeutungslos geworden.

Nach Gl. (10) erhalten wir nun durch Subtraktion des Gliedes  $i_a$  von  $i_b$  den wahren Stromwert  $i$ .

Wir sehen den Strom, in  $x_1$  mit Null beginnend, zu einem negativen Maximum hinaufschleunigen, welches größer ist als die Amplitude  $\mathfrak{I}_b$  des Dauerstromes, und sich allmählich dem Dauerzustand  $i_b$  nähern.

Die Abbildung zeigt deutlich, welchen Einfluß die Wahl des Einschaltmomentes hat. Trifft man beim Schließen des Schalthebels zufällig den Moment

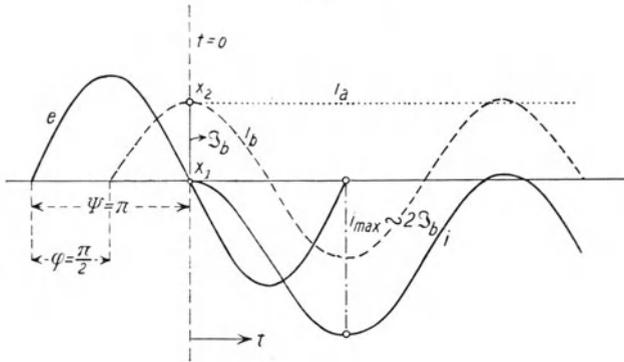
$$\psi = \varphi, \text{ so wird } x_1 x_2 = 0,$$

d. h. das Glied  $i_a$  ist und bleibt Null und der Strom  $i$  setzt sofort mit seinem Dauerzustand  $i_b$  ein. Trifft man aber den Moment

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}, \text{ so wird } x_1 x_2 = \mathfrak{I}_b,$$

d. h. das Glied  $i_a$  hat den denkbar größten Einfluß auf die Stromausbildung. Im ersteren Falle kann kein Überstrom eintreten, im letzteren Falle erreicht der Überstrom seinen höchsten Wert.

Abb. 21.



Wäre — wie es meist der Fall ist — der Ohmsche Widerstand  $r$  gegenüber dem induktiven Widerstand  $\omega L$  zu vernachlässigen, so würde zunächst

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r} = \text{sehr groß, also } \varphi \sim \frac{\pi}{2}.$$

Die Größe  $\varepsilon - \frac{r}{L} t$  würde sich mit wachsender Zeit kaum merklich von der Einheit entfernen; das Glied  $i_a$  würde in der Abbildung nahezu horizontal verlaufen.

Abb. 21 zeigt diesen Fall für den ungünstigsten Einschaltmoment

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \sim \pi.$$

Wir haben daher in diesem Falle kleinen Widerstandes, also geringerer Dämpfung des Gliedes  $i_a$ , einen Maximalstrom zu erwarten, der gleich der doppelten Amplitude des Dauerstromes ist, wenn wir zufällig einen Einschaltmoment wählen, in welchem die Spannung  $e$  gerade durch Null geht.

Von Interesse ist es, in diesem ungünstigsten Falle nach der Zeit zu fragen, die vergeht, ehe „praktisch“ der Dauerzustand erreicht wird. Wir wollen sagen, daß  $i_a$  praktisch bedeutungslos geworden ist, wenn es nur noch  $\frac{1}{100}$  von  $\mathfrak{I}_b$  beträgt.

Nun lautet Gl. (10) in dem Falle  $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$ , den wir als den ungünstigsten erkannt haben,

$$i = \mathfrak{I}_b \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \mathfrak{I}_b \varepsilon^{-\frac{r}{L}t} = \mathfrak{I}_b \left\{ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon^{-\frac{r}{L}t} \right\},$$

wenn also  $\varepsilon^{-\frac{r}{L}t} = \frac{1}{100}$  geworden ist, so hat  $i$  praktisch die Sinusform erreicht — es tritt kein Überstrom mehr auf. Daraus folgt aber

$$-\frac{r}{L}t = \ln \frac{1}{100} = -4,6$$

oder

$$t = \frac{L}{r} \cdot 4,6 \text{ sec.} \quad (11)$$

Das Verhältnis  $\frac{L}{r}$  ist also maßgebend für die Zeit, die bis zum Eintritt des Beharrungszustandes vergeht. Dieses Verhältnis heißt die Zeitkonstante des Stromkreises.

Im Falle, der Abb. 20 entspricht, wäre

$$t = \frac{1}{80} \cdot 4,6 = 0,0575 \text{ sec.}$$

Da die Periode  $T = 0,02$  sec beträgt, so tritt der Beharrungszustand nach Ablauf von 2,9 Perioden ein, wie es ja auch die Abbildung zeigt.

Wäre — Abb. 21 entsprechend —  $\frac{L}{r} = 1$ , so würden 4,6 Sekunden oder 230 Perioden ablaufen, ehe der Beharrungszustand erreicht ist.

Will man den Beharrungszustand des Stromes messen, so empfiehlt es sich nach dem Einschalten einige Sekunden mit der Ablesung zu warten.

Ist das Glied  $i_a$  bedeutungslos geworden, so haben wir für die Stromstärke die bekannte Gleichung

$$i = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = \mathfrak{I} \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad (10a)$$

die den Dauerzustand darstellt. Zu dieser hätten wir auf folgendem Wege viel einfacher kommen können.

Die Erfahrung lehrt uns, daß in einem Stromkreis mit konstanter Selbstinduktion, bei Aufdrücken einer sinusförmigen Spannung ein Dauerstrom von reiner Sinusform entsteht. Wir dürfen daher in Gl. (1) für  $i$  den Ansatz machen

$$i = \mathfrak{I} \sin(\omega t + \psi + \varphi) \text{ } \mathfrak{I} \mathfrak{E}^{\iota(\omega t + \psi + \varphi)}, \quad (12)$$

wo  $\mathfrak{I}$  und  $\varphi$  Unbekannte sind.

Führen wir diesen Ansatz in Gl. (1) ein und drücken dort auch  $e$  symbolisch aus, so folgt

$$r \mathfrak{I} \mathfrak{E}^{\iota(\omega t + \psi + \varphi)} + \iota \omega L \mathfrak{I} \mathfrak{E}^{\iota(\omega t + \psi + \varphi)} = \mathfrak{E} \mathfrak{E}^{\iota(\omega t + \psi)} \quad (13)$$

oder

$$\mathfrak{I}(r + \iota \omega L) \mathfrak{E}^{\iota \varphi} = \mathfrak{E},$$

somit

$$\mathfrak{I} \mathfrak{E}^{\iota \varphi} = \frac{\mathfrak{E}}{r + \iota \omega L} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \mathfrak{E}^{-\iota \arctg \frac{\omega L}{r}},$$

daher

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{\omega L}{r}$$

und dies in (12) eingeführt, ergibt

$$i = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t + \psi - \arctg \frac{\omega L}{r}\right).$$

Das Vektordiagramm, das den Beharrungszustand darstellt, ergibt sich sofort aus (13), wenn wir die Größen

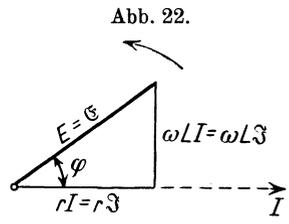
$$\mathfrak{I} \mathfrak{E}^{\iota(\omega t + \psi + \varphi)} = \mathbf{I}, \quad \text{und} \quad \mathfrak{E} \mathfrak{E}^{\iota(\omega t + \psi)} = \mathbf{E}$$

als Vektoren ansehen. Dann erhalten wir die Vektorgleichung

$$r \mathbf{I} + \iota \omega L \mathbf{I} = \mathbf{E},$$

d. h. wir erhalten den Vektor  $\mathbf{E}$  als geometrische Summe der aufeinander senkrechten

Vektoren  $r \mathbf{I}$  und  $\omega L \mathbf{I}$ . Wählen wir die Richtung von  $\mathbf{I}$  horizontal, so fällt der Vektor  $r \mathbf{I}$  in die Horizontale, der Vektor  $\omega L \mathbf{I}$  steht in vorliegendem Sinne darauf senkrecht und der Vektor  $\mathbf{E}$  ist die Schlußlinie des Dreieckes.



Da die Beträge der Vektoren  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{I}$ , also die Strecken, die im Diagramm zu ihrer Darstellung benutzt werden, durch die Amplituden  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{I}$  der Sinusfunktionen gegeben sind, so folgt aus dem Dreieck

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{I} \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}.$$

Ferner folgt aus der Abbildung, daß der Strom der Spannung um den Bogen

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r}$$

nacheilt.

Wir haben bisher der Klemmenspannung  $e$ , die wir an den Stromkreis anlegen, „reine“ Sinusform gegeben. Nun wollen wir für die Spannungskurve eine verzerrte Form annehmen.

Dann lautet unsere Gl. (1)

$$ir + L \frac{di}{dt} = \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \mathfrak{E}_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \mathfrak{E}_5 \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots$$

Nennen wir  $k$  den Index eines Gliedes der Fourierreihe und ist  $n$  die Anzahl ihrer Glieder, so können wir schreiben

$$ir + L \frac{di}{dt} = \sum_1^{2n-1} \mathfrak{E}_k \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung nach  $i$  benutzen wir denselben Gedankengang wie früher. Es wird

$$i = C \cdot \varepsilon^{-\frac{r}{L}t}$$

mit 
$$C = \frac{1}{L} \sum_1^{2n-1} \int \mathfrak{E}_k \varepsilon^{\frac{r}{L}t} \sin(k\omega t + \psi_k) dt + K,$$

woraus 
$$C = \varepsilon^{\frac{r}{L}t} \sum_1^{2n-1} \frac{\mathfrak{E}_k}{\sqrt{r^2 + k^2 \omega^2 L^2}} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) + K$$

mit 
$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{k\omega L}{r}$$

und daher

$$\begin{aligned} i = & \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t + \psi_1 - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r}\right) + \\ & + \frac{\mathfrak{E}_3}{\sqrt{r^2 + 9\omega^2 L^2}} \sin\left(3\omega t + \psi_3 - \operatorname{arctg} \frac{3\omega L}{r}\right) + \\ & + \frac{\mathfrak{E}_5}{\sqrt{r^2 + 25\omega^2 L^2}} \sin\left(5\omega t + \psi_5 - \operatorname{arctg} \frac{5\omega L}{r}\right) + \dots \\ & \dots - \varepsilon^{-\frac{r}{L}t} \cdot k \sum_1^{2n-1} \frac{\mathfrak{E}_k}{\sqrt{r^2 + k^2 \omega^2 L^2}} \sin(\psi_k - \varphi_k). \end{aligned}$$

Wir finden auch hier ein gedämpftes, ein aperiodisches Glied — das letzte, — welches sich mit wachsender Zeit der Null nähert und eine Summe von periodischen Gliedern, welche Summe den Beharrungszustand des Stromes darstellt. Die Kurvenform des Beharrungszustandes ist also auch eine verzerrte.

Bei Annahme sinusförmiger Spannung hatten wir für den Dauerstrom auch eine Sinuslinie, also eine Kurve gleicher Art gefunden; bei verzerrter Spannungskurve finden wir eine verzerrte Stromkurve anderer Art. Dies läßt sich leicht beweisen.

Die Verzerrung einer Kurvenform ist vor allem durch das Verhältnis der Amplituden der höheren Harmonischen zur Amplitude der Grundharmonischen bestimmt, also für die Spannungskurve durch das Verhältnis  $\frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_1}$ , für die Stromkurve durch das Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{I}_k}{\mathfrak{I}_1} = \frac{\mathcal{E}_k \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}{\mathcal{E}_1 \sqrt{r^2 + k^2 \omega^2 L^2}}.$$

Wie diese Gleichung zeigt, ist

$$\frac{\mathfrak{I}_k}{\mathfrak{I}_1} < \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_1},$$

d. h. die Verzerrung der Stromkurve ist geringer als die der Spannungskurve und zwar umso geringer, je mehr der induktive Widerstand  $\omega L$  gegenüber dem Ohmschen  $r$  überwiegt. Wäre  $r^2$  gegen  $\omega^2 L^2$  zu vernachlässigen — was ja meist der Fall ist —, so folgt

$$\frac{\mathfrak{I}_k}{\mathfrak{I}_1} = \frac{1}{k} \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_1}.$$

Wäre umgekehrt  $\omega^2 L^2$  gegenüber  $r^2$  bedeutungslos, so wäre

$$\frac{\mathfrak{I}_k}{\mathfrak{I}_1} = \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_1}.$$

Große Selbstinduktion im Stromkreis nähert also die Kurvenform des Stromes der Sinusform.

Bei Messungen ist es notwendig die Verzerrung zu beachten. Wir wollen die Messung des Induktionskoeffizienten erwähnen.

Haben wir für Strom und Spannung reine Sinusform, so ist der Effektivwert des Stromes

$$J = \frac{E}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Ist — wie meist —  $r^2$  gegenüber  $\omega^2 L^2$  bedeutungslos, so folgt

$$L \approx \frac{E}{\omega J},$$

wobei  $E$  und  $J$  die Effektivwerte sind, welche die Meßinstrumente angeben.

Haben wir eine verzerrte Spannungsform zur Messung verwendet, so ist der effektive Stromwert

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mathfrak{E}_1^2}{r^2 + \omega^2 L^2} + \frac{\mathfrak{E}_3^2}{r^2 + 9 \omega^2 L^2} + \frac{\mathfrak{E}_5^2}{r^2 + 25 \omega^2 L^2} + \dots}$$

Mit Gebrauch derselben Vernachlässigung folgt

$$J \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\omega L} \mathfrak{E}_1 \sqrt{1 + \frac{1}{9} \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \frac{1}{25} \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots}$$

Die effektive Spannung ist gegeben durch

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathfrak{E}_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots}$$

Bestimmen wir daraus  $\mathfrak{E}_1$  und führen den Wert in die Gleichung für  $J$  ein, so wird

$$J \approx \frac{1}{\omega L} E \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \frac{1}{25} \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots}}. \quad (14)$$

Zunächst sehen wir aus dieser Gleichung, daß in einem Stromkreis der Effektivwert der Stromstärke nicht nur von dem Effektivwert der Spannung abhängt, sondern auch von deren Kurvenform. Bei gleichem Effektivwert der Spannung ist der Effektivwert des Stromes für die verzerrte Kurve kleiner als für die Sinusform; denn der Wurzelquotient in (14) ist stets kleiner als 1.

Dann aber sehen wir aus

$$L \approx \frac{1}{\omega J} E \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{9} \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \frac{1}{25} \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots}{1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots}}, \quad (15)$$

daß wir in der Bestimmung von  $L$  recht grobe Fehler machen können, wenn wir die Verzerrung nicht berücksichtigen, d. h. den Wurzelfaktor gleich 1 setzen.

Sehen wir z. B. die Kurve, die wir in Kap. 1 analysiert haben, als Spannungskurve an, so ist für diese

$$1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 = 1 + 0,5^2 + 0,2^2 = 1,29$$

und

$$1 + \frac{1}{9} \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \frac{1}{25} \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{9} \cdot 0,25 + \frac{1}{25} \cdot 0,04 = 1,0294,$$

somit

$$\sqrt{\frac{1,0294}{1,29}} = 0,893.$$

Würden wir uns also für die Bestimmung von  $L$  nur mit den von den Meßinstrumenten angegebenen Werten  $E$  und  $J$  begnügen, so würden wir einen Fehler von etwa 12 Proz. begehen.

Liegt an Stelle der Analyse der Spannungskurve die Analyse der Stromkurve vor, so ist unsere Gl. (14) für  $J$  umzuformen, indem aus der Beziehung

$$\mathfrak{E}_k \approx \mathfrak{Z}_k^2 (k \omega L)^2$$

für  $\mathfrak{E}_k$  die entsprechenden Werte treten. Wir erhalten so

$$J \approx \frac{1}{\omega L} \cdot E \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \cdot 9 \left(\frac{\mathfrak{Z}_3}{\mathfrak{Z}_1}\right)^2 + \frac{1}{25} \cdot 25 \left(\frac{\mathfrak{Z}_5}{\mathfrak{Z}_1}\right)^2 + \dots}}{\sqrt{1 + 9 \left(\frac{\mathfrak{Z}_3}{\mathfrak{Z}_1}\right)^2 + 25 \left(\frac{\mathfrak{Z}_5}{\mathfrak{Z}_1}\right)^2 + \dots}}$$

und daraus

$$L \approx \frac{1}{\omega J} E \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\mathfrak{Z}_3}{\mathfrak{Z}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}_5}{\mathfrak{Z}_1}\right)^2 + \dots}{1 + 9 \left(\frac{\mathfrak{Z}_3}{\mathfrak{Z}_1}\right)^2 + 25 \left(\frac{\mathfrak{Z}_5}{\mathfrak{Z}_1}\right)^2 + \dots}} \quad (15a)$$

Diese letztere Formel ist in erster Linie dort zu verwenden, wo die Spannung reine Sinusform hat, aber die Stromkurve verzerrt ist, ein Fall, der — wie wir im nächsten Kapitel sehen werden — dann eintritt, wenn der Induktionskoeffizient des Stromkreises nicht konstant ist. Natürlich mißt man dann mit der Formel (15a) nur einen Mittelwert von  $L$ .

#### IV. Der Wechselstromkreis mit Ohmschem und nicht konstantem induktivem Widerstand.

Wenn die Kraftlinien des magnetischen Feldes, welches der Wechselstrom erzeugt, nicht in Luft, sondern in Eisen verlaufen, dann ist der Selbstinduktionskoeffizient  $L$  des Stromkreises nicht mehr konstant.  $L$  ist ja stets von  $\mu$ , der Permeabilität des Mediums, in welchem die Kraft-

linien verlaufen, abhängig.  $\mu$  ist für Luft konstant, gleich 1; für Eisen aber ist es eine Funktion des magnetisierenden Stromes  $i$  und damit — bei Wechselstrom — der Zeit. Daher ist jetzt auch  $L$  von der Zeit abhängig.

Die Beziehung

$$\Phi = L \cdot i$$

besteht natürlich auch hier, aber es ist jetzt

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(L \cdot i)$$

und nicht mehr wie früher  $L \frac{di}{dt}$ .

Dadurch wird aber unsere Gl. (1) (Abschnitt III) nach  $i$  unlösbar, da sich bekanntlich  $\mu$ , als Funktion von  $i$ , mathematisch nicht formulieren läßt.

Wir schreiben die Spannungsgleichung jetzt in der Form

$$ir + \frac{d\Phi}{dt} = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi) \quad (1)$$

und können diese Gleichung benutzen, um — mit großer Annäherung — den Verlauf von  $\Phi$  kennenzulernen.

Besonders bei dem eisenumschlingenden Wechselstromkreis, den wir ja jetzt betrachten, ist der Ohmsche Spannungsabfall  $ir$  nahezu bedeutungslos gegenüber der Spannungskomponente  $\frac{d\Phi}{dt}$ , welche die GegenEMK der Selbstinduktion überwindet, so daß wir mit erlaubter Annäherung schreiben können

$$\frac{d\Phi}{dt} \approx \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi) \quad (2)$$

oder

$$\Phi \approx -\frac{\mathfrak{E}}{\omega} \cos(\omega t + \psi) + C = \frac{\mathfrak{E}}{\omega} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

und mit

$$\frac{\mathfrak{E}}{\omega} = \Phi_a = \text{Amplitude des stationären Flusses,}$$

folgt

$$\Phi \approx \Phi_a \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) + C. \quad (3)$$

Die Integrationskonstante  $C$  ergibt sich wieder aus der Erwägung, daß für den Einschaltmoment ( $t = 0$ ) das  $\Phi$  einen bestimmten Wert hat. Der allgemeine Fall ist ohne Zweifel der, daß im Eisen von einer früheren

Magnetisierung ein remanenter Wert  $\pm \Phi_r$  zurückgeblieben war. Es ergibt sich also aus (3) für  $t = 0$  die Gleichung

$$\pm \Phi_r \approx \Phi_a \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + C,$$

woraus  $C$  bestimmt ist, und dies in (3) eingesetzt, gibt

$$\Phi \approx \Phi_a \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) - \Phi_a \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \pm \Phi_r.$$

Erreicht  $t$  — die laufende Zeit — einen solchen Wert, daß

$$\omega t = \pi$$

(s. Abb. 21) wird, so folgt für diesen Moment

$$\Phi \approx \Phi_a \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) - \Phi_a \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \pm \Phi_r,$$

und war nun die Phase  $\psi$  der Spannung im Moment des Einschaltens selbst gleich  $\pi$ , d. h. wurde für das Einschalten ein Moment gewählt, in welchem die Spannung durch Null ging, so folgt

$$\Phi_{\max} \approx \Phi_a \sin \frac{3\pi}{2} - \Phi_a \sin \frac{\pi}{2} \pm \Phi_r = -2\Phi_a \pm \Phi_r. \quad (4)$$

Dies ist der mögliche Maximalwert, den der Fluß  $\Phi$  unter den ungünstigsten Umständen erreicht.

Wäre kein Eisen im Stromkreis, so wissen wir, daß der Fluß  $\Phi$  dem Strome  $i$  proportional ist, und daß es keine Remanenz  $\Phi_r$  gibt.

Dann folgt zunächst

$$\Phi_{\max} \approx -2\Phi_a.$$

Der doppelten Flußamplitude aber entspricht die doppelte Stromamplitude. Der mögliche Maximalwert des Stromes ist das Doppelte der Amplitude des Beharrungszustandes.

Das ist der Fall, den Abb. 21 zeigt.

Ist nun aber Eisen im Stromkreis vorhanden, so sind Strom und Fluß nicht mehr in linearer Abhängigkeit voneinander, sondern ihr Verhältnis ist durch die bekannte Magnetisierungskurve gegeben (s. Abb. 23).

Verlangt ein Fluß  $\Phi_a$  einen Strom  $J$  zu seiner Erzeugung, so verlangt der Fluß  $2\Phi_a$  einen Strom  $nJ$ , wobei  $n$  ein bedeutendes Vielfaches der Einheit sein kann. Die Größe von  $n$  ist, wie aus der Kurve ersichtlich ist, von der Lage von  $\Phi_a$  auf der Kurve, d. h. von der gewählten Induktion abhängig. Tritt nun zu dem Flusse  $2\Phi_a$  nach Gl. (4) noch ein gleichgerichteter remanenter Magnetismus  $\Phi_r$  hinzu, so ist ersichtlich, daß hierdurch das  $n$  noch ganz bedeutend vergrößert wird.

Jedenfalls sehen wir, daß wir im Falle nicht konstanter Selbstinduktion auf maximale Werte des Einschaltstromes zu rechnen haben, die den Wert der Amplitude des Beharrungszustandes um ein hohes Vielfaches übersteigen können.

Es ist aber auch leicht einzusehen, daß durch die Anwesenheit des Eisens die Kurvenform des stationären Stromes verzerrt wird, wenn auch die an dem Stromkreis angelegte Spannung reine Sinusform hat.

Wie Gl. (3) zeigt, ist in diesem Falle der stationäre, sinusförmige Fluß um  $90^\circ$  hinter der Klemmenspannung verzögert (s. Abb. 24). Wir

Abb. 23.

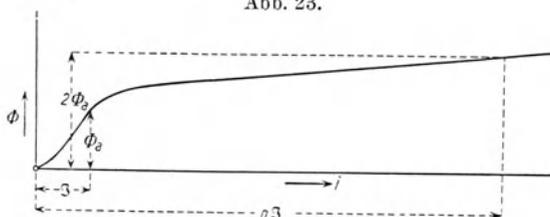
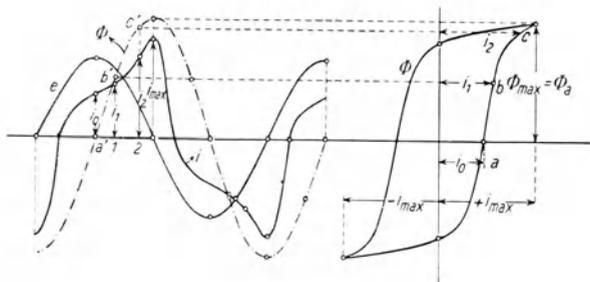


Abb. 24.



zeichnen nun über der gleichen Abszissenachse die bekannte, für die betreffende Eisensorte gültige Hysteresisschleife. Dann ist deren Maximalordinate  $\Phi_{\max}$  gleich  $\Phi_a$ , der Amplitude des stationären Flusses; dieser Maximalordinate  $\Phi_{\max}$  ist der Maximalwert der Stromstärke  $i_{\max}$  zugeordnet. Jedem anderen Ordinatenwerte der Hysteresisschleife entspricht als Abszisse die zugehörige Stromstärke.

Damit können wir die Stromkurve  $i$  konstruieren. Dem Punkte  $a$  der Hysteresisschleife, in welchem der Fluß  $\Phi$  Null ist, ist der Strom  $i_0$  zugeordnet. Dem Punkte  $a$  der Schleife entspricht aber der Punkt  $a'$  der Sinuslinie für  $\Phi$ . Wir haben also  $i_0$  in  $a'$  nach oben aufzutragen. Dem Punkte  $b$  ist der Strom  $i_1$  zugeordnet. Wir ziehen durch  $b$  die Horizontale,

bringen sie in  $b'$  mit der Sinuslinie für  $\Phi$  zum Schnitt, ziehen die Ordinate  $b'1$  und tragen auf dieser von 1 aus den Strom  $i_1$  auf. Nach dem gleichen Verfahren finden wir die der Ordinate  $c'2$  entsprechende Stromstärke und erhalten so Punkt für Punkt die Stromkurve, die verzerrt sein muß.

## V. Der Stromkreis mit Ohmschem, konstantem induktivem und kapazitivem Widerstand.

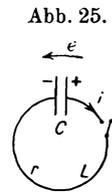
Da der kapazitive Widerstand die Anwesenheit eines Kondensators bedeutet, so können wir zwei Erregungsarten des Stromkreises unterscheiden: Die Selbsterregung durch Entladung des geladenen Kondensators. Die Fremderregung durch Anschluß einer Stromquelle.

### 1. Entladung eines Kondensators.

Wir wollen annehmen, daß ein geladener Kondensator, von der Kapazität  $C$  und Klemmenspannung  $e$ , über einen zum Kreise gebogenen Leiter vom Widerstand  $r$  und dem Selbstinduktionskoeffizienten  $L$  entladen werde (Abb. 25).

Im Augenblick des Schalterschlusses beginnt der Stromfluß, und die Spannungsgleichung des Stromkreises lautet [s. III, (1)]

$$-L \frac{di}{dt} = ir - e. \quad (1)$$



Wir wollen nun den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung  $e$  kennenlernen. Zu diesem Zwecke drücken wir in (1)  $i$  durch  $e$  aus. Ist  $q$  die Ladung des Kondensators, so ist diese

$$q = C \cdot e.$$

Die Entladestromstärke  $i$  ist aber die Abnahme der Ladung in der Zeiteinheit, also

$$i = - \frac{dq}{dt} = - C \frac{de}{dt}. \quad (2)$$

Dies in (1) eingesetzt, gibt

$$e = - rC \frac{de}{dt} - LC \frac{d^2e}{dt^2},$$

oder durch  $LC$  dividiert

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{de}{dt} + \frac{1}{CL} e = 0. \quad (3)$$

Das ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von homogener Form. Ist  $\varepsilon$  die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist ein partikuläres Integral dieser Gleichung

$$e = \varepsilon^{\lambda t}, \quad (4)$$

wo  $\lambda$  eine Konstante ist, die sich ergibt, wenn wir (4) in (3) einsetzen; dann folgt

$$\lambda^2 \varepsilon^{\lambda t} + \frac{r}{L} \lambda \varepsilon^{\lambda t} + \frac{1}{CL} \varepsilon^{\lambda t} = 0.$$

Durch  $\varepsilon^{\lambda t}$  gekürzt folgt hieraus die „charakteristische“ Gleichung für  $\lambda$  — hier eine quadratische —, deren Lösung ergibt

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}, \\ \lambda_2 &= -\frac{r}{2L} - \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Größe  $\lambda$  ist somit zweier Werte fähig, und es gibt daher zwei partikuläre Integrale:  $\varepsilon^{\lambda_1 t}$  und  $\varepsilon^{\lambda_2 t}$ . Jedes dieser beiden Partikulärintegrale bleibt aber ein solches, wenn wir es mit einer beliebigen Konstante  $A$  oder  $B$  multiplizieren; es werden also auch die Größen

$$A \varepsilon^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad B \varepsilon^{\lambda_2 t}$$

Partikulärintegrale sein, und es ergibt die Summe der Partikulärintegrale das gesuchte allgemeine Integral von (3) in der Form

$$e = A \varepsilon^{\lambda_1 t} + B \varepsilon^{\lambda_2 t}, \quad (6)$$

wo  $A$  und  $B$  Integrationskonstanten sind, die wir zu bestimmen haben.

Die Gl. (5) zeigen uns, daß wir für die weitere Diskussion von (6) drei Fälle zu unterscheiden haben.

**Fall 1:**

$$\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{CL} \quad \text{oder} \quad r > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Dann ist der Wurzelwert in Gl. (5) reell und kleiner als  $\frac{r}{2L}$ , so daß  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  reelle, negative Größen werden.

Da  $t$  die Zeit bedeutet, ist es klar, daß dann mit wachsender Zeit die Größen  $\varepsilon^{\lambda_1 t}$  und  $\varepsilon^{\lambda_2 t}$  immer kleiner werden.

Die Kondensatorspannung nimmt also mit wachsender Zeit ab und erreicht für  $t = \infty$  den Wert Null.

Wir nennen dies einen „aperiodischen“ Verlauf.

Die Entladestromstärke  $i$  berechnen wir aus (2) und (6) mit

$$i = -C \frac{de}{dt} = -CA \lambda_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} - CB \lambda_2 \varepsilon^{\lambda_2 t}. \quad (7)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  brauchen wir zwei Grenzbedingungen. Diese finden sich aus (6) und (7) für den Augenblick des Einschaltens, also die Zeit  $t = 0$ , von der an wir den ganzen Vorgang verfolgen.

Nun ist für  $t = 0$ ,  $e = e_0 =$  Spannung des geladenen Kondensators, und  $i = 0$ , denn der Strom beginnt ja eben erst.

Für  $t = 0$  lauten also (6) und (7)

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} e_0 &= A + B \\ 0 &= \lambda_1 C A + \lambda_2 C B, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

woraus

$$A = e_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad B = -e_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (9)$$

Dies in (6) und (7) eingeführt, ergibt

$$\left. \begin{aligned} e &= e_0 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \varepsilon^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \varepsilon^{\lambda_2 t} \right), \\ i &= -C e_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\varepsilon^{\lambda_1 t} - \varepsilon^{\lambda_2 t}). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Bilden wir die ersten Differentialquotienten nach der Zeit, so folgt

$$\frac{de}{dt} = e_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\varepsilon^{\lambda_1 t} - \varepsilon^{\lambda_2 t}).$$

Dieser Wert ist Null für  $t = 0$ , d. h. die Kurve, die den Verlauf von  $e$  darstellt, beginnt mit einer horizontalen Richtung (s. Abb. 26). Für endliche Werte von  $t > 0$  ist  $\frac{de}{dt}$  stets negativ, da „absolut“  $\lambda_2 > \lambda_1$ , beides aber negative Größen sind. Für  $t = \infty$  ist  $\frac{de}{dt}$  wieder Null.

Aus

$$\frac{d^2 e}{dt^2} = e_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} - \lambda_2 \varepsilon^{\lambda_2 t})$$

erkennen wir, daß die  $e$ -Kurve einen Wendepunkt hat für

$$\frac{d^2 e}{dt^2} = 0, \quad \text{d. h. wenn} \quad \lambda_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} = \lambda_2 \varepsilon^{\lambda_2 t}$$

oder für

$$t_1 = \frac{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Ebenso bilden wir

$$\frac{di}{dt} = -C \cdot e_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} - \lambda_2 \varepsilon^{\lambda_2 t})$$

und erkennen daraus, daß  $i$  sein Maximum in dem Augenblick  $t_1$  hat, in welchem  $e$  den Wendepunkt durchläuft.

Abb. 26 zeigt, wie die Spannung  $e$  von ihrem Anfangswert  $e_0$  der Null zustrebt, während der Strom von Null zu einem Maximum hinaufschneilt, um von hier ebenfalls dauernd abzufallen.

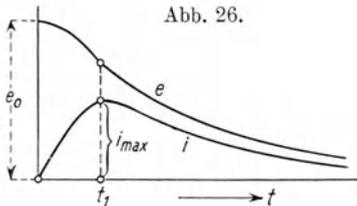


Abb. 26.

**Fall 2:**

$$\frac{r^2}{4L^2} = \frac{1}{CL}.$$

Dann ist nach (5)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{r}{2L}.$$

In diesem Falle ist das allgemeine Integral von (3) nicht mehr durch (6) gegeben, denn dieses würde mit

$$e = (A + B) \varepsilon^{\lambda t} = K \varepsilon^{\lambda t}$$

nur eine Integrationskonstante  $K$  enthalten, was der Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht genügt.

Hier ist das allgemeine Integral

$$e = (At + B) \varepsilon^{\lambda t} \quad (11)$$

und somit

$$i = -C \frac{de}{dt} = -C \{ \lambda \varepsilon^{\lambda t} (At + B) + A \varepsilon^{\lambda t} \}. \quad (12)$$

Für

$$t = 0 \text{ ist } e = e_0, \text{ somit nach (11): } B = e_0.$$

Es ist daher

$$i = -C \varepsilon^{\lambda t} \{ \lambda (At + e_0) + A \},$$

und da für

$$t = 0, \quad i = 0, \quad \text{so folgt } A = -\lambda e_0,$$

somit

$$e = e_0 (1 - \lambda t) \varepsilon^{\lambda t}, \quad i = e_0 \lambda^2 C t \varepsilon^{\lambda t}. \quad (13)$$

Es ergibt sich ein ähnlicher Verlauf von  $e$  und  $i$  wie in Abb. 26. Nur durchläuft hier  $e$  den Wendepunkt zu einer Zeit

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda} = \frac{2L}{r},$$

zu welcher Zeit  $i$  sein Maximum erreicht, im Betrage von

$$i_{\max} = \frac{1}{\varepsilon} e_0 \frac{rC}{2L} = \frac{1}{\varepsilon} e_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Wir sehen, daß auch im Falle 2 der Verlauf von  $e$  und  $i$  aperiodisch ist.

Nun wollen wir die Größenverhältnisse der Daten  $r$ ,  $L$  und  $C$  des Stromkreises für einen bestimmten Fall feststellen.

Es sei in Abb. 25 der Kondensator eine Franklin-Tafel von Quadratform. Seitenlänge  $a = 20$  cm, Dicke  $d$  des Dielektrikums  $= 1/2$  mm, Dielektrizitätskonstante  $\delta = 3$ . Dann ist die Kapazität  $C$  dieses Kondensators in absoluten, elektrostatischen Einheiten:

$$C = \frac{a^2}{4\pi d} \delta = \frac{400}{4\pi \frac{1}{20}} 3 \sim 1900 \text{ cm.}$$

Um sie in absoluten, elektromagnetischen Einheiten zu erhalten, haben wir durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit zu dividieren, also durch  $(3 \times 10^{10})^2 = 9 \times 10^{20}$ . Es wird also

$$C = \frac{1900}{9 \times 10^{20}} \sim 2 \times 10^{-18} \text{ absol. elektromagn. Einh.}$$

Ferner sei der zum Kreise gebogene 1 m lange Schließungsdraht aus Kupfer von 1 mm<sup>2</sup> Querschnitt. Dann ist

$$r = \frac{1}{\kappa} \frac{l(\text{m})}{q(\text{mm}^2)} \text{ Ohm} \sim \frac{1}{60} \frac{1}{1} \cdot 10^9 \text{ absol. elektromagn. Einh.}^1)$$

und

$$L \sim 2l \left\{ \ln \left( \frac{2l}{\rho} \right) - 2,2 \right\}^2 = 2 \times 100 \left\{ \ln \left( \frac{200}{0,056} \right) - 2,2 \right\} = \\ = 200 (8,17 - 2,2) \sim 1200 \text{ cm,}$$

somit ist

$$\frac{r}{2L} \approx 0,7 \cdot 10^4, \quad \frac{r^2}{4L^2} \approx 0,5 \cdot 10^8$$

und

$$LC = 1200 \cdot 2 \cdot 10^{-18} = 24 \cdot 10^{-16},$$

somit

$$\frac{1}{LC} = 0,42 \cdot 10^{15}.$$

Es ist also

$$\frac{1}{\frac{LC}{r^2}} = 8,4 \cdot 10^6.$$

D. h. die Größe  $\frac{1}{LC}$  ist  $8,4 \cdot 10^6$  mal größer als  $\frac{r^2}{4L^2}$ . Wir sind also von einer Gleichheit dieser Größen, wie sie Fall 2 verlangt oder gar von

1)  $\kappa =$  Leitfähigkeit,  $q =$  Querschnitt,  $l =$  Leiterlänge.

2)  $\rho =$  Drahradius.

einer Ungleichheit im Sinne des Falles 1 sehr weit entfernt. Um den Fall 2 zu verwirklichen, müßte der Widerstand  $r$ , bei gleichen  $C$  und  $L$ , nach  $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , auf etwa 50 Ohm, also auf das 3000fache des Betrages  $\frac{1}{60} \Omega$  wachsen.

Ähnliche Verhältnisse werden wir nun, bei metallischen Schließungskreisen, auch für sehr große Kapazitäten des Kondensators stets vorfinden, so daß wir als den Normalfall der Kondensatorentladung ansehen müssen

**Fall 3:**

$$\frac{r^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}.$$

In diesem Falle wird der Wurzelausdruck in den Gl. (5) imaginär. Wir schreiben dann — mit  $\iota = \sqrt{-1}$ :

$$\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \iota \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}},$$

somit

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{r}{2L} + \iota \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} \\ \lambda_2 &= -\frac{r}{2L} - \iota \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Nun setzen wir

$$\frac{r}{2L} = \alpha, \quad \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} = \omega_e, \quad (15)$$

also

$$\lambda_1 = -\alpha + \iota \omega_e, \quad \lambda_2 = -\alpha - \iota \omega_e.$$

Setzen wir diese Werte in Gl. (6) ein, so übergeht sie in

$$e = A\varepsilon^{-\alpha t + \iota \omega_e t} + B\varepsilon^{-\alpha t - \iota \omega_e t}$$

Führen wir die bekannten Beziehungen ein:

$$\varepsilon^{\iota \omega_e t} = \cos \omega_e t + \iota \sin \omega_e t,$$

$$\varepsilon^{-\iota \omega_e t} = \cos \omega_e t - \iota \sin \omega_e t,$$

so erhalten wir

$$e = A\varepsilon^{-\alpha t}(\cos \omega_e t + \iota \sin \omega_e t) + B\varepsilon^{-\alpha t}(\cos \omega_e t - \iota \sin \omega_e t)$$

oder

$$e = (A + B)\varepsilon^{-\alpha t} \cos \omega_e t + \iota(A - B)\varepsilon^{-\alpha t} \sin \omega_e t. \quad (16)$$

Daher

$$i = -C \frac{de}{dt} \quad (17a)$$

oder

$$i = \alpha C A \varepsilon^{-\alpha t} (\cos \omega_e t + \iota \sin \omega_e t) - C A \varepsilon^{-\alpha t} (-\omega_e \sin \omega_e t + \iota \omega_e \cos \omega_e t) + \\ + \alpha C \cdot B \varepsilon^{-\alpha t} (\cos \omega_e t - \iota \sin \omega_e t) - C B \varepsilon^{-\alpha t} (-\omega_e \sin \omega_e t - \iota \omega_e \cos \omega_e t). \quad (17)$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  bestimmen wir wieder aus den Bedingungen für  $t = 0$ , den Augenblick der beginnenden Entladung.

Es ist für

$$t = 0, \quad e = e_0, \quad i = 0.$$

Somit folgt aus (16)

$$e_0 = A + B, \quad (16')$$

aus (17)

$$0 = \alpha C A + \alpha C B - \iota \omega_e C A + \iota \omega_e C B$$

oder

$$A (\alpha - \iota \omega_e) = -B (\alpha + \iota \omega_e). \quad (17')$$

Den Wert für  $B$  aus (17') in (16') eingesetzt, ergibt

$$e_0 = A - A \frac{\alpha - \iota \omega_e}{\alpha + \iota \omega_e} = A \frac{2 \iota \omega_e}{\alpha + \iota \omega_e}$$

und hieraus

$$A = \frac{e_0}{2 \iota \cdot \omega_e} (\alpha + \iota \omega_e),$$

oder Zähler und Nenner mit  $\iota$  multipliziert, mit Beachtung von

$$\iota^2 = -1$$

$$A = \frac{e_0}{2 \omega_e} (\omega_e - \iota \alpha), \quad B = \frac{e_0}{2 \omega_e} (\omega_e + \iota \alpha). \quad (18)$$

Es werden also in unserem Falle, wo die  $\lambda$  komplexe Größen sind, auch die Konstanten  $A$  und  $B$  komplex, und zwar — wie ersichtlich — konjugiert komplex.

Somit folgt aus (18)

$$A + B = e_0, \quad A - B = -\iota \frac{\alpha}{\omega_e} e_0.$$

Führen wir diese Werte in Gl. (16) ein, so folgt

$$e = e_0 \varepsilon^{-\alpha t} \cos \omega_e t + \frac{\alpha}{\omega_e} e_0 \varepsilon^{-\alpha t} \sin \omega_e t$$

oder

$$e = \frac{e_0}{\omega_e} \varepsilon^{-\alpha t} (\omega_e \cos \omega_e t + \alpha \sin \omega_e t). \quad (19)$$

Wir sehen, daß wir, trotz der komplexen Übergangskonstanten, doch ein reelles Resultat erhalten.

Setzen wir in (19)

$$\left. \begin{aligned} \omega_e &= F \sin \varphi \\ \alpha &= F \cos \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

somit

$$F = \sqrt{\alpha^2 + \omega_e^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega_e}{\alpha},$$

so folgt aus (19)

$$e = e_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_e^2}}{\omega_e} \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \sin \left( \omega_e t + \arctg \frac{\omega_e}{\alpha} \right) \quad (21)$$

und daher wegen (17 a)

$$i = \frac{e_0}{\omega_e} \sqrt{\alpha^2 + \omega_e^2} \cdot C \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \left\{ \alpha \sin \left( \omega_e t + \arctg \frac{\omega_e}{\alpha} \right) - \omega_e \cos \left( \omega_e t + \arctg \frac{\omega_e}{\alpha} \right) \right\}.$$

Benutzt man die Ansätze nach (20), entwickelt die Sinus und Kosinus, und beachtet, daß

$$\sin \arctg \frac{\omega_e}{\alpha} = \frac{\omega_e}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_e^2}}, \quad \cos \arctg \frac{\omega_e}{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_e^2}},$$

so folgt

$$i = e_0 C \frac{\alpha^2 + \omega_e^2}{\omega_e} \varepsilon^{-\alpha t} \sin \omega_e t. \quad (22)$$

Die Gl. (21) und (22) zeigen, daß in unserem Falle 3 die Kondensatorspannung und der entstehende Strom Sinusfunktionen der Zeit sind, deren Amplituden mit der Zeit abnehmen, oder, wie man sagt, „gedämpft“ sind. Der Dämpfungsfaktor ist  $\varepsilon^{-\alpha t}$ , eine Größe, die für  $t = 0$  mit Eins beginnt und mit wachsender Zeit gegen Null konvergiert.

Eine derartige Entladung, die, wie oben bemerkt, den Normalfall der Kondensatorentladung darstellt, nennt man eine gedämpfte, „periodische“ oder „oszillierende“.

Kondensatorspannung und Strom nähern sich also, bei gleichzeitiger Ausführung zweier Sinusschwingungen, dem Dauerwerte Null.

Die Kreisfrequenz dieser Schwingung ist, wie aus (21) und (22) ersichtlich, gegeben durch

$$\omega_e = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} \quad [\text{s. Gl. (15)}],$$

sie ist also nur von den elektrischen Daten ( $r$ ,  $L$ ,  $C$ ) des Stromkreises selbst abhängig und heißt daher seine „Eigenkreisfrequenz“.

Die Schwingungsdauer  $T_e$  dieser Schwingung ergibt sich nun aus der Beziehung

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$$

mit

$$T_e = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}} \quad (23\ a)$$

und daher die Schwingungszahl in der Sekunde oder die Frequenz

$$f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}}{2\pi}. \quad (24\ a)$$

An dem Beispiel unserer Franklintafel haben wir gesehen, welche verschwindende Bedeutung das Glied  $\frac{r^2}{4L^2}$  gegenüber  $\frac{1}{LC}$  hat, wir dürfen also für ähnliche Entladungsfälle mit größter Annäherung schreiben:

$$\omega_e = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

und daher

$$T_e = 2\pi\sqrt{CL}, \quad (23)$$

$$f_e = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}. \quad (24)$$

Wenn wir nun die Gl. (21) und (22) graphisch darstellen, so ergeben sich die Abb. 27 und 28.

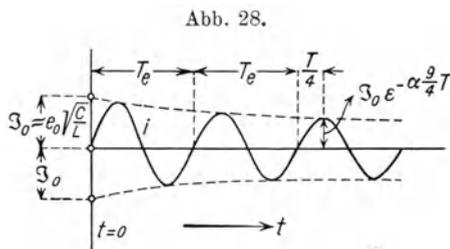
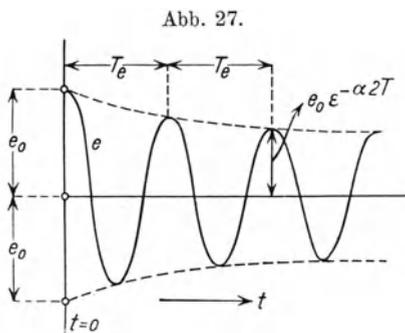


Abb. 27 zeigt den Verlauf der Kondensatorspannung, Abb. 28 den Verlauf des Stromes vom Moment des Einschaltens,  $t = 0$ , an.

Für  $t = 0$  ist nach (21)

$$e = e_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_e^2}}{\omega_e} \sin\left(\arctg \frac{\omega_e}{\alpha}\right) = e_0.$$

Da — wie wir sahen —  $\alpha$  gegenüber  $\omega_e$  eine sehr kleine Größe ist, so ist  $e_0$  auch der ungedämpfte Amplitudenwert der Spannung und

$$\arctg \frac{\omega_e}{\alpha} \approx \frac{\pi}{2}.$$

Dieser Amplitudenwert der Spannung fällt nun nach den gestrichelt gezeichneten Exponentialkurven ab und erreicht z. B. zur Zeit  $t = 2 T_e$  den Wert

$$e_0 \varepsilon^{-\alpha 2 T}.$$

Nennen wir  $\mathfrak{I}_0$  die ungedämpfte Stromamplitude, so ist diese nach (22)

$$\mathfrak{I}_0 = e_0 C \frac{\alpha^2 + \omega_e^2}{\omega_e} \approx e_0 C \omega_e \approx e_0 C \frac{1}{\sqrt{LC}} = e_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Sie fällt von  $t = 0$  an, nach den Exponentialkurven ab und erreicht z. B. für  $t = \frac{9}{4} T_e$  den Wert:  $\mathfrak{I}_0 \varepsilon^{-\alpha \frac{9}{4} T_e}$ . Der Strom ist in der Phase gegen die Spannung um den Bogen

$$\arctg \frac{\omega_e}{\alpha} \approx \frac{\pi}{2}$$

verzögert.

Die Kondensatorentladung ist also im Falle 3 als eine Wechselstromerscheinung anzusehen. Die durch Gl. (22) ausgedrückte wechselnde Stromrichtung bedingt ein Hin- und Herwogen elektrischer Massen — einen Schwingungszustand dieser elektrischen Massen.

Wir wissen aus der Mechanik, daß zur Aufrechterhaltung eines Schwingungszustandes von Massen ein fortgesetzter Energieaustausch notwendig ist. Hebt man ein Pendel aus seiner Gleichgewichtslage, so speichert man in seiner Masse potentielle Energie auf; läßt man das Pendel dann frei, so wird es durch die potentielle Energie zur Bewegung veranlaßt; während dieser Bewegung erwirbt die Masse kinetische Energie auf Kosten der früheren potentiellen. Hat die Masse die Gleichgewichtslage erreicht, so ist ihre kinetische Energie gleich der potentiellen in der abgelenkten Anfangsstellung geworden; ihre potentielle Energie in der Gleichgewichtslage aber ist Null. Beim Weiterschwingen über die Gleichgewichtslage erwirbt die Masse potentielle Energie auf Kosten der kinetischen, welche letztere Null wird, wenn die zur Anfangsablenkung symmetrische Ablenkung erreicht ist, und nun wiederholt sich der Vor-

gang. Dies gilt natürlich exakt nur für das mathematische Pendel, welches ungedämpft, d. h. im Vakuum schwingt.

Auch der Aufrechterhaltung des elektrischen Schwingungszustandes liegt ein fortgesetzter Austausch elektrischer Energie zugrunde. Der geladene Kondensator enthält potentielle, elektrostatische Energie von der Größe  $C \frac{e_0^2}{2}$ . Das Anlegen des Schließungsdrahtes macht diese Energie frei. Der Strom beginnt zu fließen und speichert, auf Kosten der potentiellen Energie, im Stromkreise kinetische, elektromagnetische Energie auf, die ein Maximum vom Betrage  $\frac{L \mathcal{I}_0^2}{2}$  in dem Moment erreicht, in welchem die potentielle Energie  $C \frac{e_0^2}{2}$  Null geworden ist. In diesem Moment aber beginnt bei umgekehrter Polarität die Neuaufladung des Kondensators; seine potentielle, elektrostatische Energie wächst auf Kosten der kinetischen, elektromagnetischen und erreicht ihr Maximum vom Betrage  $C \frac{e_0^2}{2}$  in dem Moment, in welchem die kinetische Energie Null geworden ist; und nun würde sich der Vorgang ohne Ende wiederholen, wenn kein Energieverbrauch, keine Dämpfung vorhanden wäre. Ein solcher Energieverbrauch ist aber durch den Jouleschen Wärmeeffekt gegeben, den der Stromfluß im Widerstande  $r$  leistet, und infolgedessen der Vorgang mit der Zeit abklingt.

Der hier erörterte Schwingungsvorgang in unserem elektrischen System ist, wie ersichtlich, nicht von außen aufgezwungen. Er ist durch die Eigenschaften des Systems selbst bedingt und heißt deshalb seine Eigenschwingung.

Wir nehmen aus dem Vorigen zur Kenntnis: Eigenschwingungsfähig ist ein elektrisches System dann, wenn es endliche Kapazität und Selbstinduktion besitzt und sein Ohmscher Widerstand  $r$  den Wert  $2 \sqrt{\frac{L}{C}}$  nicht erreicht.

Erreicht oder überschreitet der Widerstand diesen Wert (Fälle 1 und 2), dann ist die Energieabdämpfung so groß, daß es zu keiner Schwingung kommt. Die mechanische Analogie ist das Pendel, das, in einer zähen Flüssigkeit abgelenkt und dann freigegeben, sich nun langsam der Ruhelage nähert, ohne sie zu überschreiten.

Die Entdeckung der Eigenschwingungsfähigkeit elektrischer Systeme ist eines der berühmten Beispiele für die Bedeutung der Mathematik in

der Naturwissenschaft. Hier, wie in manchen anderen Fällen, hat die Mathematik der Erkenntnis den Weg gewiesen, den die Sinnlichkeit nicht gefunden hatte. Nach William Thomsons Aufstellung der mathematischen Theorie vergingen Jahre, bis es Feddersen gelang, die Theorie experimentell zu bestätigen und damit unseren Sinnen die Tatsache der elektrischen Schwingung deutlich zu machen.

Dies sind die klassischen Vorarbeiten, die den berühmten Hertz'schen Versuchen vorausgingen und ihnen zugrunde liegen.

Wir wollen nun für unser gewähltes Beispiel — Franklintafel und Schließungskreis — die Dauer und Frequenz der Eigenschwingung berechnen. Es ist nach (23) die Eigenschwingungsdauer

$$T_e = 2\pi\sqrt{LC} = 6,28\sqrt{1200 \cdot 2 \cdot 10^{-18}} = 3,07 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$$

und somit die Eigenfrequenz

$$f_e = \frac{1}{T_e} = 3,26 \cdot 10^6.$$

Wir sehen, mit welcher ungeheuer großen Schwingungszahlen die oszillatorische Entladung dieses Kondensators vor sich geht.

Findet die Entladung über eine Funkenstrecke statt, so wird diese der Ausgangsort von elektromagnetischen Wellen, die sich im Raume nach allen Richtungen mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

Die Wellenlänge  $\lambda_e$  dieser Wellen läßt sich leicht berechnen aus der Beziehung:

$$\lambda_e = v \cdot T_e = 3 \cdot 10^{10} \cdot 2\pi\sqrt{L \cdot C}. \quad (25)$$

Hier sind  $L$  und  $C$  in absoluten elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt. Es ist üblich,  $L$  und  $C$  in Mikrohenry bzw. Mikrofarad auszudrücken. Da

$$1 \text{ Henry} = 10^9 \text{ absol. Einh.},$$

$$1 \text{ Mikrohenry} = 10^3 \text{ absol. Einh.},$$

so sind

$$L_{\text{absol. Einh.}} = L_{\text{in Mikrohenry}} \cdot 10^3,$$

und da

$$1 \text{ Farad} = 10^{-9} \text{ absol. Einh.},$$

$$1 \text{ Mikrofarad} = 10^{-15} \text{ absol. Einh.},$$

so sind

$$C_{\text{absol. Einh.}} = C_{\text{in Mikrofarad}} \cdot 10^{-15}.$$

Wir können also schreiben:

$$\lambda_e = 3 \cdot 10^{10} \cdot 2\pi\sqrt{L_{\text{MH}} \cdot 10^3 \cdot C_{\text{MF}} \cdot 10^{-15}} = 18,84 \cdot 10^4 \sqrt{L_{\text{MH}} \cdot C_{\text{MF}}} \text{ cm}$$

oder

$$\lambda_e = 1884 \sqrt{L_{\text{MH}} \cdot C_{\text{MF}}} \text{ m.}$$

Für unser Beispiel war:

$$L = 1200 \text{ cm} = 1,2 \text{ MH,}$$

$$C = 2 \cdot 10^{-18} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ MF.}$$

Es wird also

$$\lambda_e = 1884 \sqrt{12 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 1884 \cdot 4,9 \cdot 10^{-2} = 92,3 \text{ m.}$$

So wie nun eine Stimmgabel, bei welcher Erregung immer, auch mit ihrer Eigenschwingungszahl, „ihrem Tone“, anspricht, so spricht ein schwingungsfähiges, elektrisches System auf jede Erregung mit der Eigenschwingung an, die sich — wie wir gleich sehen werden — der von außen aufgedrückten, überlagert.

## 2. Fremderregung durch Anschluß einer Stromquelle.

Wir wollen als Stromquelle eine Wechselstrommaschine ansehen, deren Klemmenspannung  $e$  gegeben sei durch

$$e = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi). \quad (26)$$

Ist  $i$  der Strom, der nach Schalterschuß auftritt, und  $e_c$  die Klemmenspannung des Kondensators, so lautet die Spannungsgleichung des Stromkreises

$$-L \frac{di}{dt} = ri + e_c - e. \quad (27)$$

Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke über die Randkurve der magnetisch durchfluteten Fläche hat sich jetzt um den Betrag der Kondensatorspannung  $e_c$  gegenüber dem Falle im Abschnitt III vermehrt.

Der Strom  $i$ , der auch der Ladestrom des Kondensators ist, hängt mit dessen Klemmenspannung  $e_c$  zusammen durch die Beziehung

$$i = C \frac{de_c}{dt}, \quad \text{woraus} \quad e_c = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (28)$$

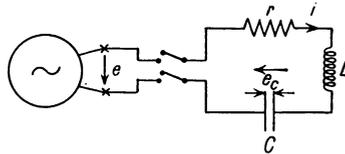
Führen wir (28) in (27) ein, so ergibt sich

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi).$$

Dividieren wir diese Gleichung durch  $L$  und differenzieren sie nach der Zeit, so folgt

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} i = \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \cos(\omega t + \psi). \quad (29)$$

Abb. 29.



Das ist eine totale Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Störungsfunktion (rechte Seite). Zu ihrer Lösung setzen wir die rechte Seite Null und erhalten dadurch die homogene Form der Gleichung in formeller Übereinstimmung mit Gl. (3), deren Lösung wir kennen. Wir schreiben, entsprechend Gl. (6):

$$i = z_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + z_2 \varepsilon^{\lambda_2 t}, \quad (30)$$

wo  $z_1$  und  $z_2$  Konstanten, und wo die Größen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  — dem Normalfälle entsprechend — gegeben sind durch

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{r}{2L} + \iota \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}} = -\alpha + \iota \omega_e \\ \lambda_2 &= -\frac{r}{2L} - \iota \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}} = -\alpha - \iota \omega_e \end{aligned} \right\} \text{ s. Gl. (15).}$$

Gl. (30) ist das allgemeine Integral der homogenen Form. Man kann aber unter (30) auch das allgemeine Integral der inhomogenen Form (29) verstehen, wenn  $z_1$  und  $z_2$  keine Konstanten, sondern selbst Funktionen der veränderlichen Zeit sind, welche Funktionen in bestimmten Beziehungen zueinander stehen. Es ist nicht schwer, diese Funktionen zu bestimmen.

Haben wir eine inhomogene Differentialgleichung von der allgemeinen Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A \frac{dy}{dx} + By = f(x), \quad (a)$$

so lautet ihre homogene Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A \frac{dy}{dx} + By = 0. \quad (a')$$

Sind  $y_1$  und  $y_2$  partikuläre Integrale der homogenen Form, so ist das allgemeine Integral der homogenen Form

$$y = z_1 y_1 + z_2 y_2, \quad (b)$$

wo  $z_1$  und  $z_2$  konstante Größen sind.

Betrachten wir nun  $z_1$  und  $z_2$  nicht mehr als „Konstante“, sondern als willkürliche Funktionen von  $x$ , so kann die rechte Seite von (b) noch jede beliebige Funktion, also auch das allgemeine Integral der inhomogenen Form (a) darstellen.

Dabei können wir noch immer für eine der beiden Größen  $z_1$  oder  $z_2$  willkürliche Funktionswerte wählen, oder zwischen ihnen „eine“ Beziehung willkürlich festsetzen, denn solange wir über die andere Größe nichts sagen bzw. zwischen den Größen keine „zweite“ Beziehung fest-

setzen, haben wir ja nichts getan, als daß wir an Stelle von  $y$  eine unbekannte neue Funktion einführen.

Differenzieren wir nun Gl. (b) unter der Annahme, daß  $z_1$  und  $z_2$  variable Größen sind, so wird

$$\frac{dy}{dx} = z_1 \frac{dy_1}{dx} + z_2 \frac{dy_2}{dx} + \left( y_1 \frac{dz_1}{dx} + y_2 \frac{dz_2}{dx} \right).$$

Da wir nun „eine“ Beziehung zwischen den Größen  $z_1$  und  $z_2$  einführen dürfen, so setzen wir

$$y_1 \frac{dz_1}{dx} + y_2 \frac{dz_2}{dx} = 0, \tag{c}$$

so daß für  $\frac{dy}{dx}$  der Ausdruck folgt:

$$\frac{dy}{dx} = z_1 \frac{dy_1}{dx} + z_2 \frac{dy_2}{dx}. \tag{d}$$

Nun bilden wir die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + z_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dz_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dz_2}{dx}. \tag{e}$$

Wir wissen, daß wir eine „zweite“ Beziehung zwischen den Größen  $z_1$  und  $z_2$  nicht mehr willkürlich festsetzen dürfen. Eine solche zweite Beziehung ergibt sich aber nunmehr zwingend auf folgende Art:

Wir führen die Werte von  $y$ ,  $\frac{dy}{dx}$  und  $\frac{d^2y}{dx^2}$  aus den Gl. (b), (d), (e) in Gl. (a) ein, so wird

$$z_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + z_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dz_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dz_2}{dx} + Az_1 \frac{dy_1}{dx} + Az_2 \frac{dy_2}{dx} + Bz_1y_1 + Bz_2y_2 = f(x)$$

oder

$$z_1 \left( \frac{d^2y_1}{dx^2} + A \frac{dy_1}{dx} + By_1 \right) + z_2 \left( \frac{d^2y_2}{dx^2} + A \frac{dy_2}{dx} + By_2 \right) + \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dz_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dz_2}{dx} = f(x).$$

In den beiden Klammerausdrücken links erkennen wir unsere homogene Gleichungsform (a'), die durch die Werte  $y_1$  und  $y_2$  ihrer Partikulärintegrale erfüllt wird. D. h. die beiden Klammernglieder sind Null und es bleibt als zweite, nicht mehr willkürliche Beziehung zwischen  $z_1$  und  $z_2$  übrig

$$\frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dz_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dz_2}{dx} = f(x). \tag{f}$$

Wenden wir dies auf unsere Gl. (29) an, so waren die beiden Partikulärintegrale ihrer homogenen Form:

$$i_1 = \varepsilon^{\lambda_1 t}, \quad i_2 = \varepsilon^{\lambda_2 t},$$

somit

$$\frac{di_1}{dt} = \lambda_1 \varepsilon^{\lambda_1 t}, \quad \frac{di_2}{dt} = \lambda_2 \varepsilon^{\lambda_2 t}.$$

Es lauten also unsere beiden Bedingungsgleichungen (c) und (f) für die Größen  $z_1$  und  $z_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{\lambda_1 t} \frac{dz_1}{dt} + \varepsilon^{\lambda_2 t} \frac{dz_2}{dt} &= 0 \\ \text{[entsprechend (c)],} \\ \lambda_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} \frac{dz_1}{dt} + \lambda_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} \frac{dz_2}{dt} &= \frac{\omega \mathfrak{G}}{L} \cos(\omega t + \psi) \\ \text{[entsprechend (f)],} \end{aligned} \right\} \quad (\text{g})$$

aus denen  $z_1$  und  $z_2$  bestimmbar sind. Aus der oberen Gleichung folgt

$$\frac{dz_2}{dt} = -\varepsilon^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \cdot \frac{dz_1}{dt},$$

und dies in die untere eingesetzt ergibt

$$\frac{dz_1}{dt} \varepsilon^{\lambda_1 t} (\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\omega \mathfrak{G}}{L} \cos(\omega t + \psi)$$

und daher

$$z_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \frac{\omega \mathfrak{G}}{L} \varepsilon^{-\lambda_1 t} \cdot \cos(\omega t + \psi) + K_1,$$

und ebenso

$$z_2 = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \frac{\omega \mathfrak{G}}{L} \varepsilon^{-\lambda_2 t} \cdot \cos(\omega t + \psi) + K_2.$$

Nach ausgeführter partieller Integration [s. III., Gl. (4)] ergibt sich

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda_1^2} \frac{\mathfrak{G}}{L} \varepsilon^{-\lambda_1 t} \left\{ \sin(\omega t + \psi) - \frac{\lambda_1}{\omega} \cos(\omega t + \psi) \right\} + K_1, \\ z_2 &= -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \frac{\mathfrak{G}}{L} \varepsilon^{-\lambda_2 t} \left\{ \sin(\omega t + \psi) - \frac{\lambda_2}{\omega} \cos(\omega t + \psi) \right\} + K_2, \end{aligned}$$

und diese Werte in Gl. (30) eingeführt, ergibt

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega \mathfrak{G}}{L} \left\{ \frac{1}{\omega^2 + \lambda_1^2} [\omega \sin(\omega t + \psi) - \lambda_1 \cos(\omega t + \psi)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega^2 + \lambda_2^2} [\omega \sin(\omega t + \psi) - \lambda_2 \cos(\omega t + \psi)] \right\} + K_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + K_2 \varepsilon^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Wir haben nun das erste Glied auf der rechten Seite zu entwickeln.  
Wir wollen es  $i_b$  benennen. Dann ist zunächst

$$\omega \sin(\omega t + \psi) - \lambda_1 \cos(\omega t + \psi) = \sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2} \sin(\omega t + \psi - \alpha_1),$$

$$\omega \sin(\omega t + \psi) - \lambda_2 \cos(\omega t + \psi) = \sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2} \sin(\omega t + \psi - \alpha_2)$$

s. III., (6), wobei

$$\alpha_1 = \arctg \frac{\lambda_1}{\omega}, \quad \alpha_2 = \arctg \frac{\lambda_2}{\omega},$$

somit

$$i_b = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}} \sin(\omega t + \psi - \alpha_1) - \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}} \sin(\omega t + \psi - \alpha_2) \right\}$$

oder

$$i_b = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}} \left\{ \sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2} \sin(\omega t + \psi - \alpha_1) - \sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2} \sin(\omega t + \psi - \alpha_2) \right\}.$$

Entwickelt man die Sinus in dem Klammerausdruck und beachtet, daß

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}},$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}},$$

so wird

$$i_b = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}} \left\{ \sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2} \sin(\omega t + \psi) \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}} - \sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2} \cos(\omega t + \psi) \frac{\lambda_1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}} - \sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2} \sin(\omega t + \psi) \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}} + \sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2} \cos(\omega t + \psi) \frac{\lambda_2}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}} \right\},$$

oder

$$\begin{aligned} i_b &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}} \left\{ \sin(\omega t + \psi) \left[ \frac{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}} \omega - \frac{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}} \omega \right] - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\omega t + \psi) \left[ \frac{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}} \lambda_1 - \frac{\sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2}}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2}} \lambda_2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \frac{1}{(\omega^2 + \lambda_1^2)} \frac{1}{(\omega^2 + \lambda_2^2)} \left\{ \sin(\omega t + \psi) [\omega(\omega^2 + \lambda_2^2) - \omega(\omega^2 + \lambda_1^2)] - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\omega t + \psi) [\lambda_1(\omega^2 + \lambda_2^2) - \lambda_2(\omega^2 + \lambda_1^2)] \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \frac{1}{(\omega^2 + \lambda_1^2)} \frac{1}{(\omega^2 + \lambda_2^2)} \left\{ \sin(\omega t + \psi) [\omega(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)] - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\omega t + \psi) [\omega^2(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)] \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \frac{1}{(\omega^2 + \lambda_1^2)} \frac{1}{(\omega^2 + \lambda_2^2)} \left\{ (\lambda_1 - \lambda_2) [-\sin(\omega t + \psi) \omega (\lambda_1 + \lambda_2) - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\omega t + \psi) (\omega^2 - \lambda_1 \lambda_2)] \right\} \end{aligned}$$

Nun ist nach (14)

$$-\omega(\lambda_1 + \lambda_2) = \omega \frac{r}{L} \quad \text{und} \quad \omega^2 - \lambda_1 \lambda_2 = \omega^2 - \frac{1}{CL}$$

und daher

$$i_b = \frac{\omega \mathfrak{C}}{L} \frac{1}{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)} \left\{ \omega \frac{r}{L} \sin(\omega t + \psi) - \left( \omega^2 - \frac{1}{CL} \right) \cos(\omega t + \psi) \right\} \quad (31)$$

Und nach (14) und (15)

$$\omega^2 + \lambda_1^2 = \alpha^2 - 2\iota\alpha\omega_e - \omega_e^2 + \omega^2, \quad \omega^2 + \lambda_2^2 = \alpha^2 + 2\iota\alpha\omega_e - \omega_e^2 + \omega^2,$$

somit

$$\begin{aligned} (\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2) &= (\alpha^2 - \omega_e^2 + \omega^2)^2 - (2\iota\alpha\omega_e)^2 = \alpha^4 + \omega_e^4 + \omega^4 - \\ &\quad - 2\alpha^2\omega_e^2 + 2\alpha^2\omega^2 - 2\omega_e^2\omega^2 + 4\alpha^2\omega_e^2 \\ &= (\alpha^2 + \omega_e^2)^2 + \omega^2(\omega^2 + 2\alpha^2 - 2\omega_e^2). \end{aligned}$$

Nach (15) ist aber

$$\alpha^2 + \omega_e^2 = \frac{1}{CL} \quad \text{und} \quad 2\alpha^2 - 2\omega_e^2 = \frac{r^2}{L^2} - \frac{2}{CL},$$

daher

$$\begin{aligned} (\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2) &= \frac{1}{C^2L^2} + \omega^2 \left( \omega^2 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{2}{CL} \right) = \\ &= \frac{1}{C^2L^2} (1 + \omega^4 C^2 L^2 - 2\omega^2 CL + \omega^2 r^2 C^2) \end{aligned}$$

oder

$$(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2) = \frac{1}{C^2L^2} \{ (1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 r^2 C^2 \}. \quad (32)$$

Setzen wir ferner in (31)

$$\omega \frac{r}{L} = F \cos \varphi, \quad \omega^2 - \frac{1}{CL} = F \sin \varphi, \quad (33)$$

so wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2 - \frac{1}{CL}}{\omega \frac{r}{L}} = \frac{\omega^2 CL - 1}{\omega r C} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}$$

oder

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \quad (34)$$

und

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{\omega^2 \frac{r^2}{L^2} + (1 - \omega^2 CL)^2} \frac{1}{C^2 L^2} = \sqrt{\frac{\omega^2 r^2 C^2 + (1 - \omega^2 CL)^2}{L^2 C^2}}, \\ F &= \frac{1}{LC} \sqrt{(1 - \omega^2 C^2 L^2)^2 + \omega^2 r^2 C^2} \quad (35) \end{aligned}$$

Führen wir nun (33) in (31) ein, so ergibt sich

$$i_b = \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \frac{1}{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)} \cdot F \{ \sin(\omega t + \psi) \cos \varphi - \cos(\omega t + \psi) \sin \varphi \}$$

und mit Bezug auf (32), (34) und (35) folgt

$$i_b = \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} CL \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 r^2 C^2}} \sin \left( \omega t + \psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right).$$

Heben wir unter der Wurzel  $\omega^2 C^2$  zum Faktor heraus, so folgt

$$i_b = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin \left( \omega t + \psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right)$$

und damit

$$i = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin \left( \omega t + \psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right) + \left. \begin{array}{l} \\ + K_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + K_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} \end{array} \right\} \quad (36)$$

in welchem Ausdruck die Integrationskonstanten  $K_1$  und  $K_2$  zu bestimmen sind.

Zur Bestimmung zweier Konstanten brauchen wir zwei Grenzbedingungen. Solche sind vorhanden, denn für den Zeitmoment  $t = 0$  des Einschaltens, den Beginn unserer Beobachtung, ist die Stromstärke gleich Null, aber auch die Ladung des Kondensators ist gleich Null. Die Ladung  $q$  des Kondensators ist aber

$$q = \int i dt$$

oder nach (36)

$$q = -\frac{1}{\omega} \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \left( \omega t + \psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right) + \left. \begin{array}{l} \\ + \frac{1}{\lambda_1} K_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2} K_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} \end{array} \right\} \quad (37)$$

Setzen wir also in (36) und (37)  $t = 0$ , so folgt mit Rücksicht auf (34)

$$0 = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\psi - \varphi) + K_1 + K_2 \quad (36a)$$

und

$$0 = -\frac{1}{\omega} \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\psi - \varphi) + \frac{1}{\lambda_1} K_1 + \frac{1}{\lambda_2} K_2. \quad (37a)$$

Setzen wir

$$\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \mathfrak{I}, \quad (38)$$

so folgt aus (36a) und (37a)

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathfrak{I} \frac{1}{\omega} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \{\lambda_2 \cos(\psi - \varphi) + \omega \sin(\psi - \varphi)\}, \\ K_2 &= -\mathfrak{I} \frac{1}{\omega} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \{\lambda_1 \cos(\psi - \varphi) + \omega \sin(\psi - \varphi)\}. \end{aligned}$$

Setzen wir die Werte für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ein und beachten, daß

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{CL}, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = -2\iota \omega_e,$$

so folgt, wenn wir noch Zähler und Nenner mit  $\iota = \sqrt{-1}$  multiplizieren,

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{1}{2} \mathfrak{I} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega_e} \omega \cdot \omega_e \sin(\psi - \varphi) + \\ &+ \frac{1}{2} \mathfrak{I} \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega_e} \left\{ \frac{1}{LC} \cos(\psi - \varphi) - \alpha \omega \sin(\psi - \varphi) \right\}, \\ K_2 &= -\frac{1}{2} \mathfrak{I} \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega_e} \omega \cdot \omega_e \sin(\psi - \varphi) - \\ &- \frac{1}{2} \mathfrak{I} \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega_e} \left\{ \frac{1}{LC} \cos(\psi - \varphi) - \alpha \omega \sin(\psi - \varphi) \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I} \sin(\psi - \varphi) &= A, \\ \mathfrak{I} \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega_e} \left\{ \frac{1}{LC} \cos(\psi - \varphi) - \alpha \omega \sin(\psi - \varphi) \right\} &= B, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= -\frac{A}{2} + \iota \frac{B}{2}, \\ K_2 &= -\frac{A}{2} - \iota \frac{B}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Die Integrationskonstanten  $K_1$  und  $K_2$  sind also konjugiert komplexe Größen.

Wir bilden nun

$$\begin{aligned} K_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + K_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} &= K_1 \varepsilon^{-\alpha t + \iota \omega_e t} + K_2 \varepsilon^{-\alpha t - \iota \omega_e t} = \varepsilon^{-\alpha t} (K_1 \varepsilon^{\iota \omega_e t} + K_2 \varepsilon^{-\iota \omega_e t}) \\ &= \varepsilon^{-\alpha t} \{(K_1 + K_2) \cos \omega_e t + \iota (K_1 - K_2) \sin \omega_e t\}. \end{aligned}$$

Das ist aber nach (40)

$$\left. \begin{aligned} K_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + K_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} &= \varepsilon^{-\alpha t} (-A \cos \omega_e t - B \sin \omega_e t) \\ &= -\sqrt{A^2 + B^2} \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \sin \left( \omega_e t + \operatorname{arctg} \frac{A}{B} \right) \end{aligned} \right\} (41)$$

Nun ist aber nach (39)

$$A^2 + B^2 = \Im^2 \frac{1}{\omega^2 \omega_e^2 L^2 C^2} \{ \omega^2 C^2 L^2 (\omega_e^2 + \alpha^2) \sin^2 (\psi - \varphi) + \cos^2 (\psi - \varphi) - 2 \alpha \omega L C \sin (\psi - \varphi) \cos (\psi - \varphi) \}$$

und da

$$\omega_e^2 + \alpha^2 = \frac{1}{LC}, \quad \cos^2 (\psi - \varphi) = 1 - \sin^2 (\psi - \varphi), \quad \alpha = \frac{r}{2L},$$

folgt

$$A^2 + B^2 = \Im^2 \frac{1}{\omega^2 \omega_e^2 L^2 C^2} \{ (\omega^2 C L - 1) \sin^2 (\psi - \varphi) - \frac{1}{2} r \omega C \sin 2 (\psi - \varphi) + 1 \} (42)$$

und

$$\frac{A}{B} = \frac{\sin (\psi - \varphi)}{\frac{1}{\omega \omega_e} \left\{ \frac{1}{LC} \cos (\psi - \varphi) - \alpha \omega \sin (\psi - \varphi) \right\}}$$

oder

$$\frac{A}{B} = \frac{2 \omega \omega_e L C}{2 \cotg (\psi - \varphi) - r \omega C}. (43)$$

Somit folgt, wenn wir (42) und (43) in (41) einsetzen,

$$\begin{aligned} K_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + K_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} &= \\ &= -\Im \frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\omega \omega_e L C} \sqrt{(\omega^2 C L - 1) \sin^2 (\psi - \varphi) - \frac{1}{2} r \omega C \sin 2 (\psi - \varphi) + 1} \cdot \\ &\quad \cdot \sin \left( \omega_e t + \operatorname{arctg} \frac{2 \omega \omega_e L C}{2 \cotg (\psi - \varphi) - r \omega C} \right) \end{aligned}$$

und dies in (36) eingeführt und für  $\Im$  den Wert aus (38) gesetzt, ergibt

$$i = \left. \begin{aligned} &\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot \sin \left\{ \omega t + \psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right\} - \\ &\quad - \varepsilon^{-\frac{r}{2L} t} \cdot \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \omega \omega_e C L} \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{(\omega^2 C L - 1) \sin^2 (\psi - \varphi) - \frac{1}{2} r \omega C \sin 2 (\psi - \varphi) + 1} \cdot \\ &\quad \cdot \sin \left( \omega_e t + \operatorname{arctg} \frac{2 \omega \omega_e L C}{2 \cotg (\psi - \varphi) - r \omega C} \right) \end{aligned} \right\} (44)$$

Diese Gleichung besagt: Der entstehende Strom  $i$  ist durch zwei Glieder dargestellt. Das erste ist eine reine Sinusfunktion der Zeit, die in der Phase gegenüber der aufgedrückten Spannung  $e$  um den Bogen

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}$$

zurückbleibt. Die Amplitude dieser Sinusschwingung ist ungedämpft und die Kreisfrequenz  $\omega$  ist die der aufgedrückten Spannung. Das zweite Glied ist ebenfalls eine Sinusfunktion der Zeit, deren Amplitude aber zeitlich gedämpft ist (Faktor  $\varepsilon^{-\frac{r}{2L}t}$ ) und deren Kreisfrequenz  $\omega_e$  die Eigenkreisfrequenz des Stromkreises ist. Die Amplitude dieser Schwingung strebt also mit wachsender Zeit der Null zu.

Wir können wieder sagen: Der Stromkreis, der sich vor dem Schalter-schluß in einem Beharrungszustand, charakterisiert durch Stromlosigkeit ( $i = 0$ ), befand, strebt nach Schalterschluß einem neuen Beharrungszustand zu, den das erste Glied der Gl. (44) ausdrückt. Dieser neue Beharrungszustand kann nicht unvermittelt auf den ersten folgen, sondern es kann nur ein allmählicher Übergang aus dem ersten Zustand in den zweiten stattfinden.

Diesen Übergang vermittelt das zweite Glied in Gl. (44), welches wir die Eigenschwingung oder freie Schwingung des Stromkreises nennen wollen. Gl. (44) zeigt, daß der jeweilige Zustand zu einer beliebigen Zeit  $t$  gleich ist der algebraischen Summe des zu erwartenden Beharrungszustandes und der freien Schwingung. Zur Zeit  $t = 0$  ist nach (44)  $i = 0$ , d. h. es herrscht noch der erste Beharrungszustand; zur Zeit  $t = \infty$  ist, nach (44),  $i$  gleich dem neuen Beharrungszustand.

Die letztere Tatsache geht aus (44) ohne weiteres wegen dem Faktor  $\varepsilon^{-\frac{r}{2L}t}$  hervor, die erstere aber wollen wir — obwohl sie unserer Konstantenbestimmung zugrunde lag — an dem Resultat kontrollieren, wodurch wir einen Beweis für die Richtigkeit der langwierigen Rechnung finden.

Für  $t = 0$  geht der Sinus im zweiten Gliede von (44) über in

$$\begin{aligned} & \sin \operatorname{arctg} \frac{2 \omega \omega_e L C}{2 \cotg (\psi - \varphi) - r C \omega} = \\ & = \frac{2 \omega \omega_e L C}{\sqrt{[2 \cotg (\psi - \varphi) - r C \omega]^2 + (2 \omega \omega_e L C)^2}} \end{aligned}$$

oder wenn wir im Nenner für  $\omega_e$  den Wert aus (15) einführen und

$$\cot g = \frac{\cos}{\sin} \text{ setzen}$$

$$\begin{aligned} & \sin \operatorname{arctg} \frac{2 \omega \omega_e L C}{2 \cot g (\psi - \varphi) - r C \omega} = \\ & = \frac{2 \omega \omega_e L C \sin (\psi - \varphi)}{2 \sqrt{(\omega^2 C L - 1) \sin^2 (\psi - \varphi) - \frac{1}{2} r C \omega \sin (\psi - \varphi) + 1}}, \end{aligned}$$

so daß für  $t = 0$  das zweite Glied lautet

$$- \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin (\psi - \varphi),$$

also mit dem ersten, für  $t = 0$ , gleichlautend, so daß  $i = 0$  wird.

Wir wollen Gl. (44) noch für den Fall untersuchen, daß der kapazitive Widerstand  $\frac{1}{\omega C}$  zu Null wird. D. h., daß die Kapazität  $C$  unendlich wird, oder daß der Kondensator kurz geschlossen ist. Wir erhalten dann den Fall, der im Abschn. III behandelt wurde, und Gl. (44) muß in (10) (Abschn. III) übergehen.

Dies geschieht in der Tat, denn für  $C = \infty$  wird vor allem

$$\omega_e = \sqrt{\frac{1}{L C} - \frac{r^2}{4 L^2}} = \iota \frac{r}{2 L} = \iota \alpha.$$

Setzen wir

$$\sqrt{(\omega^2 C L - 1) \sin^2 (\psi - \varphi) - \frac{1}{2} r C \omega \sin (\psi - \varphi) + 1} = F,$$

so wird

$$\begin{aligned} & \sin \left( \omega_e t + \operatorname{arctg} \frac{2 \omega \omega_e L C}{2 \cot g (\psi - \varphi) - r C \omega} \right) = \\ & = \frac{1}{2 F} \{ \sin \omega_e t [2 \cot g (\psi - \varphi) - r C \omega] + \cos \omega_e t \cdot 2 \omega \omega_e L C \} \cdot \sin (\psi - \varphi) = \\ & = \frac{1}{2 F} \{ 2 \sin \omega_e t \cdot \cos (\psi - \varphi) - r C \omega \sin (\psi - \varphi) \cdot \sin \omega_e t + \\ & \quad + 2 \cos \omega_e t \cdot \sin (\psi - \varphi) \omega \omega_e L C \}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\omega_e t = \iota \alpha t, \text{ somit } \sin \iota \alpha t = \iota \mathfrak{S} \sin \alpha t, \quad \cos \iota \alpha t = \mathfrak{C} \cos \alpha t$$

und

$$\omega \omega_e L C = \omega \iota \alpha L C = \omega \iota \frac{r}{2 L} L C = \frac{\iota \omega r C}{2}.$$

Somit

$$\begin{aligned} & \sin\left(\omega_e t + \operatorname{arctg} \frac{2 \omega \omega_e L C}{2 \cot g(\psi - \varphi) - r C \omega}\right) = \\ &= \frac{1}{2 F'} \{2 \iota \operatorname{Sin} \alpha t \cos(\psi - \varphi) + \iota r \omega C \sin(\psi - \varphi) (\mathfrak{C} \circ f \alpha t - \operatorname{Sin} \alpha t)\} = \\ &= \frac{\iota}{2 F'} \{2 \operatorname{Sin} \alpha t \cos(\psi - \varphi) + r \omega C \sin(\psi - \varphi) \cdot \varepsilon^{-\alpha t}\} \end{aligned}$$

wegen

$$\mathfrak{C} \circ f \alpha t - \operatorname{Sin} \alpha t = \varepsilon^{-\alpha t}.$$

Es geht also das zweite Glied von Gl. (44) über in

$$\begin{aligned} & - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \frac{1}{\omega \iota \frac{r}{2 L} L C} \cdot F' \cdot \frac{\iota}{2 F'} \{2 \operatorname{Sin} \alpha t \cos(\psi - \varphi) + \\ & + r \omega C \sin(\psi - \varphi) \varepsilon^{-\alpha t}\} = - \varepsilon^{-2 \alpha t} \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\psi - \varphi) - \\ & - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \frac{1}{\omega r C} \cdot 2 \operatorname{Sin} \alpha t \cdot \cos(\psi - \varphi) \end{aligned}$$

und da, für

$$C = \infty, \quad \frac{1}{r \omega C} = 0 \quad \text{und ferner} \quad 2 \alpha = 2 \frac{r}{2 L} = \frac{r}{L},$$

so geht Gl. (44) über in

$$\begin{aligned} i &= \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t + \psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r}\right) - \\ & - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r}\right) \cdot \varepsilon^{-\frac{r}{L} t} \end{aligned}$$

in vollkommener Übereinstimmung mit Gl. (10), Abschn. III.

Wir sehen hier deutlich, wie die gedämpfte Eigenschwingung des Stromkreises in den aperiodischen Ausgleichsvorgang übergeht, wenn der kapazitive Widerstand des Stromkreises Null wird. Der Stromkreis ist dann — mangels der Fähigkeit, potentielle elektrostatische Energie aufzunehmen — nicht mehr schwingungsfähig.

Ich habe diese — vielleicht allzu breite — Form der Darstellung dieses ganzen Vorganges gewählt, um unrichtige Formeln, die sich in der Literatur finden lassen, definitiv und begründet zu berichtigen.

Wir wollen nun auch Gl. (44) graphisch darstellen. Das stationäre erste Glied ist leicht zu zeichnen. Es ist eine Sinuslinie, die um den Bogen  $\varphi$  gegen die Spannungswelle verschoben ist. Dieser Bogen kann

nach Gl. (34) positiv oder negativ sein, je nachdem der induktive ( $\omega L$ ) oder der kapazitive ( $\frac{1}{\omega C}$ ) Widerstand überwiegt. Das gedämpfte, zweite Glied ist in Amplitude und Phase von der Phase  $\psi$  des gewählten Einschaltmomentes der Spannung abhängig.

Es sei z. B., bei reiner Sinusform der Spannung, entsprechend Abb. 29:

Effektive Spannung  $E = 1000$  Volt, also Spannungsamplitude  $\mathfrak{E} = 1414$  Volt.

$f = 50$ ,  $\omega = 2\pi f = 314$ ,  $r = 40 \Omega$ ,  $L = 1$  H,  $C = 1,1258$  MF.

Dann ergibt sich zunächst der Wert der Reaktanz:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 314,16 \cdot 10^9 - \frac{1}{353,52 \cdot 10^{-15}} = -2514,54 \cdot 10^9.$$

Somit

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = \frac{-2514,54 \cdot 10^9}{40 \cdot 10^9} = -62,862$$

und daher

$$\varphi = -89^\circ 5' 19''.$$

Der Wert der Impedanz ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} &= \sqrt{(40 \cdot 10^9)^2 + (-2514,54 \cdot 10^9)^2} = \\ &= 2514,85 \cdot 10^9 = 2514,85 \Omega. \end{aligned}$$

Es wird also die Amplitude  $\mathfrak{I}$  des stationären Stromgliedes

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1414}{2514,85} = 0,562 \text{ Amp.}$$

Die Kreisfrequenz  $\omega_e$  der Eigenschwingung ergibt sich aus

$$\omega_e = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} = \sqrt{888670 - 400} = 942,48 = 2\pi f_e,$$

somit die Eigenfrequenz  $f_e = 150 = 3 \cdot 50 = 3f$ , also dreimal so groß als die Frequenz  $f$  der aufgedrückten Schwingung, und daher die Eigenschwingungsdauer  $T_e$  gleich einem Drittel der Dauer der aufgedrückten Schwingung

$$T_e = \frac{1}{3} T.$$

Ferner ist

$$\alpha = \frac{r}{2L} = \frac{40}{2 \cdot 1} = 20 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\omega \omega_e CL} = 3,001.$$

Nun haben wir die Phase  $\psi$  des Einschaltmomentes zu wählen. Wir wollen sie so wählen, daß die Amplitude der Eigenschwingung den größten Wert erreicht. In dieser Amplitude steht als Faktor der Ausdruck

$$\sqrt{(\omega^2 CL - 1) \sin^2(\psi - \varphi) - \frac{1}{2} r C \omega \sin 2(\psi - \varphi) + 1}.$$

Mit Rücksicht auf  $tg \varphi = \frac{\omega^2 CL - 1}{r C \omega}$  läßt sich der Ausdruck unter der

Wurzel auf die Form bringen:

$$r C \omega (\cos^2 \psi tg \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\psi) + 1 = y.$$

Dieser Ausdruck hat — wie leicht nachzurechnen ist — sein Maximum für

$$tg 2\psi = -\frac{1}{tg \varphi}.$$

Ist — wie in unserem Falle —  $tg \varphi$  ein großer negativer Wert, so ergibt sich:

$$\psi \approx \frac{\pi}{2};$$

ist  $tg \varphi$  ein großer positiver Wert, so ergibt sich:

$$\psi \approx \pi;$$

ist  $tg \varphi = 0$ , so wird:

$$\psi = \frac{3\pi}{4}.$$

Für unser Beispiel wählen wir also:

$$\psi = \frac{\pi}{2}.$$

Dann wird  $y = 1$  und daher die Amplitude der Eigenschwingung

$$\frac{\mathcal{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{1}{\omega \omega_e CL} \sqrt{1} = 0,562 \cdot 3,001 = 1,687 \text{ Amp.} \quad (45)$$

Ferner ist

$$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2} + 89^\circ 5' 19'' = 179^\circ 5' 19'',$$

also

$$\cotg(\psi - \varphi) = -62,862$$

und somit

$$\begin{aligned} \arctg \frac{2 \omega \omega_e LC}{2 \cotg(\psi - \varphi) - r C \omega} &= \arctg \frac{2 \cdot \frac{1}{3,001}}{-125,724 - 0,014} = \\ &= \arctg(-0,0053) = 179^\circ 41' 47''. \end{aligned}$$

Mit Beachtung dieser errechneten Werte erhält nun Gl. (44) für dieses Beispiel die Form

$$i = 0,562 \sin(\omega t + 179^\circ 5' 19'') - 1,687 \cdot \epsilon^{-20t} \cdot \sin(\omega_e t + 179^\circ 41' 47''), \quad (44a)$$

während für die aufgedrückte Spannung  $e$  zu setzen ist:

$$e = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi) = 1414 \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Abb. 30 stellt die Gl. (44a) dar. Wir sehen hier die Sinuslinie  $e$  für die Spannung, die im Zeitmoment  $t = 0$  auf den Stromkreis geschaltet

Abb. 30.

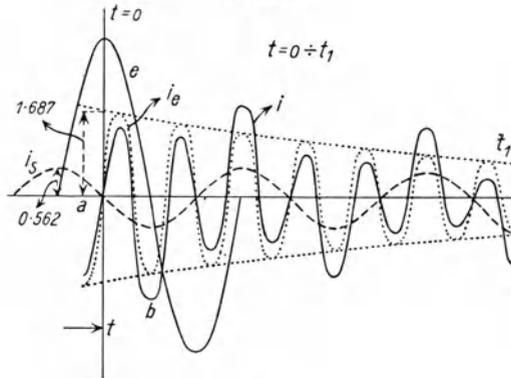


Abb. 30 a.

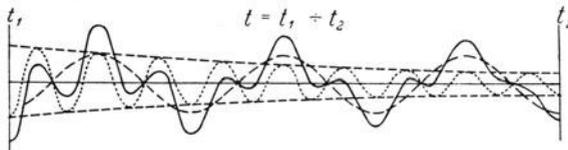
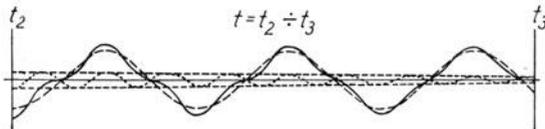


Abb. 30 b.



wird, also im Moment, wo  $e$  ein Maximum hat. Dieser Spannungskurve eilt das stationäre Stromglied  $i_s$  mit der Amplitude 0,562 um rund  $90^\circ$  vor. Die Eigenschwingung  $i_e$  des Stromes setzt im Moment  $t = 0$  mit dem Werte  $-1,687 \sin(179^\circ 41' 47'')$  ein und ergänzt sich in diesem Moment mit dem Werte  $i_s = 0,562 \sin(179^\circ 5' 19'')$  zu Null. Im Bilde gehen beide Kurven fast genau durch  $a$ , während aber  $i_s$  von  $a$  ins Negative verläuft, verläuft  $i_e$  ins Positive. Die Periodenlänge von  $i_e$  ist  $\frac{1}{3}$  der Periodenlänge von  $i_s$ , so daß wir von  $a$  aus leicht die Nulldurchgänge

von  $i_e$  auf der Abszisse markieren können. Die Höhe der Amplituden von  $i_e$  ist durch die beiden, zur Abszisse symmetrischen, Exponentialkurven begrenzt. Diese Exponentialkurven beginnen für  $t = 0$  mit dem Werte 1,687 und klingen nun mit wachsender Zeit gegen Null ab. Wäre die Dämpfung, d. h. der Widerstand, Null, so würden diese beiden Kurven zu Parallelen zur Abszisse. Die ausgezogene Kurve zeigt den Verlauf des wirklich entstehenden Stromes  $i$ . Wir sehen im Bilde, wie  $i$  allmählich in  $i_s$  übergeht. Der denkbare Maximalwert des Stromes wird in Punkt  $b$  erreicht mit einer Höhe, die fast das Vierfache der Amplitude von  $i_s$  beträgt. Wäre die Dämpfung Null, so wäre sie „genau“ das Vierfache.

Dieser maximale Strom richtet sich, wie aus (45) ersichtlich ist, vor allem nach der Größe

$$\frac{1}{\omega \omega_e LC}$$

Aus der Gl. (15) wissen wir, daß mit großer Annäherung

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \text{somit} \quad LC = \frac{1}{\omega_e^2}$$

und daher

$$\frac{1}{\omega \omega_e LC} = \frac{\omega_e}{\omega}$$

Für den ungünstigsten Einschaltmoment ( $\psi = \frac{\pi}{2}$ ) wird also die maximale Amplitude der Eigenschwingung

$$3 \frac{\omega_e}{\omega},$$

und daher wird der maximale Stromstoß ähnlich

$$3 \frac{\omega_e}{\omega} + 3 = 3 \frac{\omega_e + \omega}{\omega}. \quad (44b)$$

Je größer also die Eigenfrequenz des Stromkreises gegenüber der aufgedrückten Frequenz ist, desto größere Stromstöße sind beim Einschalten zu erwarten.

Von ebenso großem Interesse ist der Verlauf der Kondensatorspannung während des Einschaltvorganges, da ja eine auftretende Überspannung zum Durchschlag des Kondensators führen kann.

Die Kondensatorspannung  $e_c$  ist gegeben durch

$$e_c = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Wir haben also Gl. (44) zu integrieren und durch  $C$  zu dividieren. Das Resultat dieser Operationen ist:

$$e_c = -\frac{1}{\omega C} \Im \cos(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{1}{C} \Im \frac{1}{\omega \omega_e CL} \sqrt{(\omega^2 CL - 1) \sin^2(\psi - \varphi) - \frac{1}{2} r C \omega \sin 2(\psi - \varphi) + 1} \cdot \int \varepsilon^{-\frac{r}{2L}t} \cdot \sin\left(\omega_e t + \arctg \frac{2\omega \omega_e CL}{2 \cotg(\psi - \varphi) - r C \omega}\right) dt.$$

Führt man die Integration des letzten Gliedes durch und setzt

$$\arctg \frac{2\omega \omega_e CL}{2 \cotg(\psi - \varphi) - r C \omega} = \gamma, \quad \frac{r}{2L} = \alpha,$$

so folgt

$$e_c = -\frac{1}{\omega C} \Im \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{1}{C} \Im \frac{1}{\omega \omega_e CL} \sqrt{(\omega^2 CL - 1) \sin^2(\psi - \varphi) - \frac{1}{2} r C \omega \sin 2(\psi - \varphi) + 1} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \frac{1}{\sqrt{\omega_e^2 + \alpha^2}} \sin\left(\omega_e t + \gamma + \arctg \frac{\omega_e}{\alpha}\right).$$

Es ist aber

$$\sqrt{\omega_e^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{CL}},$$

und setzen wir die Wurzel im zweiten Gliede rechts gleich  $A$ , so wird

$$e_c = -\frac{1}{\omega C} \Im \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{1}{\omega C} \Im \frac{1}{\omega_e \sqrt{CL}} A \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \left. \begin{array}{l} \\ \cdot \sin\left(\omega_e t + \gamma + \arctg \frac{\omega_e}{\alpha}\right). \end{array} \right\} \quad (46)$$

Betrachten wir auch hier wieder für den Fall

$$1. \quad \omega L < \frac{1}{\omega C}$$

den Einschaltmoment  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , so wird  $A = 1$  und

$$e_c = \frac{1}{\omega C} \Im \sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{\omega C} \Im \frac{1}{\omega_e \sqrt{LC}} \varepsilon^{-\alpha t} \sin\left(\omega_e t + \gamma + \arctg \frac{\omega_e}{\alpha}\right)$$

oder wegen

$$\omega_e \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$e_c = \frac{1}{\omega C} \Im \sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{\omega C} \Im \varepsilon^{-\alpha t} \sin\left(\omega_e t + \gamma + \arctg \frac{\omega_e}{\alpha}\right). \quad (46a)$$

D. h. die Kondensatorspannung kann in diesem Falle höchstens den doppelten Wert der stationären Spannung  $\frac{1}{\omega C} \Im$  erreichen.

Treffen wir den Einschaltmoment

$$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2},$$

so wird

$$A = \omega \sqrt{CL}$$

und damit

$$e_c = \frac{1}{\omega C} \Im \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega C} \Im \frac{\omega}{\omega_e} \varepsilon^{-\alpha t} \sin(\omega_e t + \gamma + \operatorname{arctg} \frac{\omega_e}{\alpha}). \quad (46 b)$$

D. h. nur wenn die Eigenfrequenz  $\omega_e$  kleiner ist als die aufgedrückte  $\omega$ , kann es zu einer höheren als der doppelten Stationärspannung kommen. Der Strom ergibt sich für diesen Einschaltmoment aus (44) mit

$$i = \Im \cos(\omega t) - \Im \varepsilon^{-\alpha t} \sin(\omega_e t + \gamma),$$

er kann also im ungünstigsten Falle den doppelten Wert der Amplitude des stationären Stromes erreichen.

Ist

$$2. \quad \omega L > \frac{1}{\omega C},$$

d. h.  $\operatorname{tg} \varphi =$  positiv, so können wir den Einschaltmoment

$$\psi = \pi$$

als den ungünstigsten betrachten. Dann wird

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(\omega^2 CL - 1) \sin^2(\psi - \varphi) - \frac{1}{2} r C \omega \sin 2(\psi - \varphi) + 1} = \\ &= \sqrt{r C \omega (\cos^2 \psi \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\psi) + 1} = \\ &= \sqrt{r C \omega \frac{\omega^2 CL - 1}{r C \omega} + 1} = \omega \sqrt{CL} \end{aligned}$$

und daher

$$i = \Im \sin(\omega t - \varphi) - \Im \varepsilon^{-\alpha t} \sin(\omega_e t + \gamma),$$

$$e_c = -\frac{1}{\omega C} \Im \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{\omega C} \Im \varepsilon^{-\alpha t} \frac{\omega}{\omega_e} \sin(\omega_e t + \gamma + \operatorname{arctg} \frac{\omega_e}{\alpha}).$$

Hier ist nur eine Erhöhung des Stromes auf  $2 \Im$  zu befürchten und eine Erhöhung der Spannung am Kondensator auf

$$\frac{1}{\omega C} \Im + \frac{1}{\omega C} \Im \frac{\omega}{\omega_e}. \quad (46 c)$$

Ist endlich

$$3. \quad \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{oder} \quad \omega^2 CL - 1 = 0, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}},$$

so wird

$$A = \sqrt{1 - \frac{1}{2} r C \omega \sin 2(\psi - \varphi)}.$$

Der ungünstigste Schaltmoment ist dann jener, für den

$$\psi - \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

oder, da jetzt

$$\varphi = 0; \quad \psi = \frac{3\pi}{4},$$

denn dann wird

$$A = \sqrt{1 + \frac{1}{2} r C \omega} = \sqrt{1 + \frac{r}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}}.$$

Da nun aber die Bedingung für die Eigenschwingungsfähigkeit gegeben war durch

$$r < 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

so ist ersichtlich, daß der denkbare Höchstwert von  $A$  gegeben ist durch

$$A = \sqrt{2}.$$

Ferner ist jetzt wegen

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$\omega \omega_e LC = \frac{1}{\sqrt{LC}} \omega_e LC = \omega_e \sqrt{LC} = \frac{\omega_e}{\omega}$$

und es wird daher

$$i = \Im \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) - \Im \varepsilon^{-\alpha t} \frac{\omega_e}{\omega} \sqrt{1 + \frac{r}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}} \cdot \sin(\omega_e t + \gamma),$$

$$e_c = -\frac{1}{\omega C} \Im \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\omega C} \Im \varepsilon^{-\alpha t} \frac{\omega}{\omega_e} \sqrt{1 + \frac{r}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}} \cdot \sin\left(\omega_e t + \gamma + \arctg \frac{\omega_e}{\alpha}\right),$$

d. h. der maximale Strom kann in diesem Falle nie größer werden als

$$\Im + \Im \sqrt{2} \frac{\omega_e}{\omega} \approx \Im + \Im \sqrt{2},$$

die maximale Kondensatorspannung nicht größer als

$$\frac{1}{\omega C} \mathfrak{S} + \frac{1}{\omega C} \mathfrak{S} \sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_e} \approx \frac{1}{\omega C} \mathfrak{S} + \frac{1}{\omega C} \mathfrak{S} \sqrt{2}.$$

Wir sehen aus dieser Überlegung, daß die gefährlichsten Verhältnisse bezüglich des Stromstoßes bestehen, wenn

$$\omega L < \frac{1}{\omega C},$$

denn dann ist auch

$$\frac{\omega_e}{\omega} > 1$$

und der Einschaltstrom kann nach (44b) gewaltige Werte erreichen.

Die Kondensatorspannung hingegen kann in diesem Falle nie die doppelte Höhe der stationären Kondensatorspannung überschreiten.

Die gefährlichsten Verhältnisse bezüglich der Kondensatorspannung bestehen, wenn

$$\omega L > \frac{1}{\omega C},$$

denn dann ist

$$\frac{\omega}{\omega_e} > 1$$

und die Kondensatorspannung kann nach (46c) auf ein Vielfaches der stationären Spannung hinaufschneiden; hingegen ist der Stromstoß dann auf die doppelte Höhe des Stationärwertes beschränkt.

Ist

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

so ist die Gefahr bezüglich Spannung und Strom gleich groß, beide Größen können aber das 2,4fache des Stationärwertes nicht erreichen.

In unseren Starkstromanlagen erkennen wir nun stets Leiterkreise, die Kapazität und Selbstinduktion haben. Wir haben also bei ihrem Einschalten immer mit Spannungserhöhungen zu rechnen, die für den Kondensator (Kabelleitungen) gefährlich werden können, und mit Stromstößen, die vernichtende elektrodynamische Wirkungen haben können. Diese Gefahren werden dadurch bekämpft, daß man die Maschinenspannung allmählich durch wachsende Erregung steigert, oder daß man Schutzschalter mit Vorkontakt einbaut.

Wie Gl. (44) zeigt, ist der Einschaltvorgang oder die Eigenschwingung abgeklungen, wenn ihre Amplitude bedeutungslos geworden ist.

Wir wollen sagen, daß sie bedeutungslos geworden ist, wenn sie 1 Proz. der Amplitude des Stationärwertes beträgt; dann können wir die Zeit  $t'$  berechnen, die vergeht, bis der Stationärzustand „praktisch“ erreicht ist. Aus

$$3 \frac{\omega_e}{\omega} \varepsilon^{-\alpha t'} = 0,01 \cdot 3$$

folgt

$$\varepsilon^{\alpha t'} = 100 \frac{\omega_e}{\omega}$$

oder

$$t' = \frac{1}{\alpha} \left( \ln 100 + \ln \frac{\omega_e}{\omega} \right) = \frac{1}{\alpha} \left( 4,6 + \ln \frac{\omega_e}{\omega} \right).$$

Für unser Beispiel, wo

$$\alpha = 20, \quad \frac{\omega_e}{\omega} = 3,$$

ergibt sich

$$t' = \frac{1}{20} (4,6 + 1,1) = 0,285 \text{ sec.}$$

Da in einer Sekunde 50 aufgezwungene Schwingungen stattfinden, so müssen  $50 \cdot 0,285 \sim 14$  Schwingungen ablaufen, ehe „praktisch“ der Stationärzustand erreicht ist. In Abb. 30 ist der Ablauf von sieben Schwingungen dargestellt.

Nach Ablauf der Zeit  $t'$  ist also der Strom gegeben durch

$$i = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin \left( \omega t + \psi - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right). \quad (47)$$

Zu diesem Ausdruck hätten wir nun auch wieder auf viel einfacherem Wege kommen können. Wir konnten sagen: „Die Erfahrung lehrt uns, daß in einem Stromkreis mit konstanter Selbstinduktion und Kapazität, bei Aufdrücken einer sinusförmigen Spannung, ein Dauerstrom von reiner Sinusform entsteht.“ Wir dürfen daher in Gl. (29) für  $i$  den Ansatz machen

$$i = 3 \sin(\omega t + \psi + \varphi) \text{ } \& \text{ } 3 \varepsilon^{t(\omega t + \psi + \varphi)}, \quad (48)$$

wo  $3$  und  $\varphi$  Unbekannte sind.

Führen wir diesen Ansatz in Gl. (29) ein und drücken dort auch die rechte Seite symbolisch aus, nämlich

$$\frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \cos(\omega t + \psi) = \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \sin \left( \omega t + \psi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ } \& \text{ } \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \varepsilon^{t(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})},$$

so folgt aus (29) und (48)

$$\begin{aligned} \iota^2 \omega^2 \mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota(\omega t + \psi + \varphi)} + \iota \omega \frac{r}{L} \mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota(\omega t + \psi + \varphi)} + \frac{1}{LC} \mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota(\omega t + \psi + \varphi)} &= \\ &= \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \varepsilon^{\iota(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

oder

$$-\omega^2 \mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota \varphi} + \iota \omega \frac{r}{L} \mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota \varphi} + \frac{1}{LC} \mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota \varphi} = \frac{\omega \mathfrak{E}}{L} \varepsilon^{\iota \frac{\pi}{2}} = \iota \frac{\omega \mathfrak{E}}{L}.$$

Dividieren wir durch  $\iota \frac{\omega}{L}$ , so folgt

$$\left( -\frac{1}{\iota} \omega L \mathfrak{Z} + r \mathfrak{Z} + \frac{1}{\iota} \frac{1}{\omega C} \mathfrak{Z} \right) \varepsilon^{\iota \varphi} = \mathfrak{E}$$

oder

$$\mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota \varphi} \left\{ r - \frac{1}{\iota} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\} = \mathfrak{E},$$

und das zweite Glied links mit  $\iota$  multipliziert und dividiert, ergibt

$$\mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota \varphi} \left\{ r + \iota \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\} = \mathfrak{E}, \quad (49)$$

somit

$$\mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota \varphi} = \frac{\mathfrak{E}}{r + \iota \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \varepsilon^{-\iota \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}}$$

und daher

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$

Dies in (48) eingesetzt, ergibt aber (47). Gl. (49) können wir auch schreiben

$$\mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota(\omega t + \psi + \varphi)} \left\{ r + \iota \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\} = \mathfrak{E} \varepsilon^{\iota(\omega t + \psi)}. \quad (49a)$$

Sehen wir die Größen

$$\mathfrak{Z} \varepsilon^{\iota(\omega t + \psi + \varphi)} = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E} \varepsilon^{\iota(\omega t + \psi)} = \mathbf{E}$$

als Vektoren an, so erhalten wir aus (49a) die Vektorgleichung

$$r \mathbf{I} + \iota \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \mathbf{I} = \mathbf{E},$$

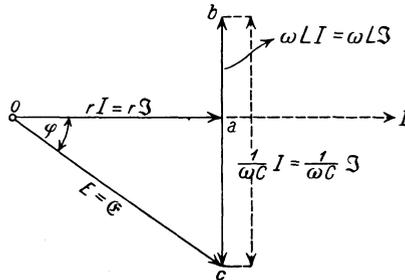
d. h. wir erhalten den Vektor  $\mathbf{E}$  als geometrische Summe der aufeinander senkrechten Vektoren  $r\mathbf{I}$  und  $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\mathbf{I}$ . Wählen wir die Richtung von  $\mathbf{I}$  horizontal, so fällt der Vektor  $r\mathbf{I}$  in die Horizontale, der Vektor  $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\mathbf{I}$  steht in voreilem Sinne darauf senkrecht und der Vektor  $\mathbf{E}$  ist die Schlußlinie des Dreieckes.

Wir haben also in Punkt  $a$  die Strecke  $ab = \omega L \Im$  nach oben und von  $b$  die Strecke  $bc = \frac{1}{\omega C} \Im$  nach unten aufzutragen. Dann ist

$$oc = \mathfrak{E} = \Im \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Aus der Abbildung ergibt sich sofort, daß für  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$  der Strom der Spannung nacheilt, d. h. der Punkt  $c$  über die Horizontale fällt, daß für  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$  der Strom der Spannung voreilt, d. h.  $c$  unter die Horizontale fällt (wie in der Abbildung gezeichnet), und daß für  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , d. h. für Nullwerden der Reaktanz, Strom und Spannung phasengleich sind, oder  $c$  mit  $a$  zusammenfällt.

Abb. 31.



Auch hier haben wir bisher der aufgedrückten Klemmenspannung „reine“ Sinusform gegeben. Wir wollen nun wieder für die Klemmenspannung eine „verzerrte“ Form einführen. Nehmen wir an, die Fourierreihe, welche die Spannung darstellt, habe  $n$  Glieder und nennen wir  $k$  den Index eines Gliedes, so ist jetzt

$$e = \sum_{k=1}^{2n-1} \mathfrak{E}_k \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Dann übergeht unsere Gl. (29) in die Form

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{k\omega \mathfrak{E}_k}{L} \cos(k\omega t + \psi_k).$$

Eine analoge Rechnung wie früher ergibt dann die Stromstärke  $i$  in der Form

$$\begin{aligned}
 i = & \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\mathfrak{E}_k}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \sin\left(k\omega t + \psi_k - \operatorname{arctg} \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{r}\right) - \\
 & - \varepsilon^{-\frac{r}{2L}t} \cdot \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\mathfrak{E}_k}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \frac{1}{k\omega \omega_e L C} \cdot \\
 & \cdot \sqrt{\{(k\omega)^2 C L - 1\} \sin^2(\psi_k - \varphi_k) - \frac{1}{3} r k \omega C \sin 2(\psi_k - \varphi_k) + 1} \cdot \\
 & \cdot \sin\left(\omega_e t + \operatorname{arctg} \frac{2 k \omega \omega_e L C}{2 \cot g(\psi_k - \varphi_k) - r k \omega C}\right), \quad (50)
 \end{aligned}$$

wobei  $\varphi_k$  im zweiten Gliede gegeben ist durch

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{r} \quad (50a)$$

Wir finden hier die Stromstärke als die Summe von  $n$  stationären Schwingungen verschiedener Amplitude und Phase und steigender Frequenz, minus der Summe von  $n$  gedämpften Schwingungen  $\left(\varepsilon^{-\frac{r}{2L}t}\right)$  gleicher, nämlich der Eigenfrequenz  $\omega_e$ , aber verschiedener Amplitude und Phase.

Wir sehen: Jede Spannungsharmonische verursacht eine stationäre Stromharmonische von der gleichen Frequenz ( $k\omega$ ), als sie selbst hat und erregt die Eigenschwingung des Stromkreises mit gedämpfter, bestimmter Amplitude und Phase.

Wir wollen im weiteren nur den stationären Zustand betrachten und können daher für die Stromstärke schreiben

$$\begin{aligned}
 i = & \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + \\
 & + \frac{\mathfrak{E}_3}{\sqrt{r^2 + \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)^2}} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \\
 & + \frac{\mathfrak{E}_5}{\sqrt{r^2 + \left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C}\right)^2}} \sin(5\omega t + \psi_5 - \varphi_5) + \dots
 \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\frac{\mathfrak{E}_k}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} = \mathfrak{I}_k \quad (51)$$

gleich der Amplitude der  $k$ -ten Stromharmonischen, so ist

$$i = \mathfrak{I}_1 \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + \mathfrak{I}_3 \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \dots$$

Es ist somit der Effektivwert  $J$  der stationären Stromstärke gegeben durch

$$J^2 = \frac{1}{2} (\mathfrak{I}_1^2 + \mathfrak{I}_3^2 + \mathfrak{I}_5^2 + \dots) = \frac{1}{2} \mathfrak{I}_1^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\mathfrak{I}_3}{\mathfrak{I}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{I}_5}{\mathfrak{I}_1}\right)^2 + \dots \right\} \quad (52)$$

Der Effektivwert der Spannung ist gegeben durch

$$E^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots \right\}.$$

Es ist somit

$$\mathfrak{E}_1^2 = \frac{2 E^2}{1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots} \quad (53)$$

Aus (52) folgt mit Rücksicht auf (51)

$$J^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1^2}{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\mathfrak{I}_3}{\mathfrak{I}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{I}_5}{\mathfrak{I}_1}\right)^2 + \dots \right\}$$

und für  $\mathfrak{E}_1$  aus (53) den Wert eingesetzt, folgt

$$J = \frac{E}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\mathfrak{I}_3}{\mathfrak{I}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{I}_5}{\mathfrak{I}_1}\right)^2 + \dots}{1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots}} \quad (54)$$

Das ist der Effektivwert der Stromstärke bei „verzerrter“ Form, während bei „reiner“ Sinusform die effektive Stromstärke gegeben ist durch

$$J = \frac{E}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (55)$$

Es sind also in demselben Stromkreise, trotz „gleicher“ aufgedrückter Effektivspannung, die entstehenden Effektivwerte der Stromstärken, für verschiedene Formen der Spannung, voneinander verschieden.

Maßgebend für diese Verschiedenheit ist die Größe des Wurzelfaktors in (54), den wir  $W$  nennen wollen. Mit Rücksicht auf (51) können wir schreiben

$$W^2 = \frac{1 + \left(\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 \frac{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{r^2 + \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)^2} + \left(\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 \frac{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{r^2 + \left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C}\right)^2} + \dots}{1 + \left(\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \dots} \quad (56)$$

und wollen nun diesen Ausdruck für verschiedene Verhältnisse im Stromkreis untersuchen, und zwar für extreme Fälle.

Für

$$1. \quad C = \infty$$

ist der kapazitive Widerstand  $\frac{1}{k\omega C}$  gleich Null. Der Leiterkreis ist in diesem Falle nicht durch einen Kondensator unterbrochen, enthält also in gewöhnlicher Ausdrucksweise nur Widerstand und Selbstinduktion, welche Ausdrucksweise natürlich unrichtig ist, da sie zu dem Glauben verleitet, die Kapazität sei Null, während sie in Wahrheit unendlich ist. Richtig ist es zu sagen, der Kreis enthalte nur Ohmschen und induktiven, aber keinen kapazitiven Widerstand.

Für diesen Fall wird

$$W^2 = \frac{1 + \left(\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 \frac{r^2 + \omega^2 L^2}{r^2 + 9\omega^2 L^2} + \left(\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 \frac{r^2 + \omega^2 L^2}{r^2 + 25\omega^2 L^2} + \dots}{1 + \left(\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \dots}$$

Ist hier — was ja meist zulässig ist —  $r^2$  gegenüber  $\omega^2 L^2$  zu vernachlässigen, so wird

$$W = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{9} \left(\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \frac{1}{25} \left(\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \dots}{1 + \left(\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{G}_1}\right)^2 + \dots}} < 1.$$

Mit Rücksicht auf (54) und (55) heißt das: Bei „rein induktiver“, Belastung ist die effektive Stromstärke für verzerrte Formen der Klemmenspannung kleiner als für die Sinusform. Tritt zu dem induktiven Widerstand noch Ohmscher hinzu, so wird der Unterschied geringer.

Ist

$$2. \quad L = 0,$$

so wird — wenn auch hier zunächst  $r = 0$  angenommen wird — nach (56)

$$W = \sqrt{\frac{1 + 9\left(\frac{\mathcal{E}_3}{\mathcal{E}_1}\right)^2 + 25\left(\frac{\mathcal{E}_5}{\mathcal{E}_1}\right)^2 + \dots}{1 + \left(\frac{\mathcal{E}_3}{\mathcal{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_5}{\mathcal{E}_1}\right)^2 + \dots}}, \text{ also } > 1,$$

d. h. bei „rein kapazitiver“ Belastung ist die Effektivstromstärke für verzernte Form der Klemmenspannung größer als für die Sinusform. Ein Hinzutreten von Ohmschen Widerstand macht auch hier den Unterschied geringer.

Dieser Fall 2 ist von besonderer Bedeutung bei Kapazitätsmessungen mit Wechselstrom nach Abb. 32.

Ist

$$L = r \approx 0,$$

so folgt aus (54)

$$J = \omega C E \cdot W$$

oder

$$C = \frac{J}{\omega E} \frac{1}{W}. \tag{57}$$

Die Kapazität ist also bei Kenntnis von  $J$ ,  $\omega$ ,  $E$  (statisches Voltmeter), welche Größen die Instrumente zeigen, und von  $W$  (charakterisiert durch die Kurvenform) nach (57) bestimmt.

Es ist leicht einzusehen, welch große Meßfehler man ohne Kenntnis von  $W$ , beziehungsweise bei der Voraussetzung  $W = 1$  begehen kann. Es sei z. B. die Kurvenform der Kondensatorspannung gegeben durch

$$\mathcal{E}_1 = 1, \quad \mathcal{E}_3 = 0,35, \quad \mathcal{E}_5 = 0,15, \quad \mathcal{E}_7 = 0,07.$$

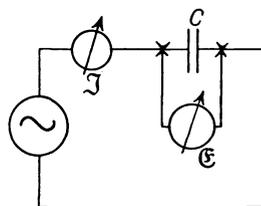
Dann wird

$$W = \sqrt{\frac{1 + 9 \cdot 0,122 + 25 \cdot 0,022 + 49 \cdot 0,005}{1 + 0,122 + 0,022 + 0,005}} = \sqrt{\frac{2,90}{1,15}} \approx 1,6.$$

Hätten wir also die Kapazität ohne Analyse der Kurvenform gemessen und daher  $W = 1$  gesetzt, so würden wir, nur aus der Angabe der Meßinstrumente, um 60 Proz. zu groß gemessen haben.

Es ist hier daran zu erinnern, daß es verfehlt wäre, zu glauben, daß eine Maschine, die reine Sinusform der EMK liefert, auch an den Klemmen

Abb. 32.



des Kondensators eine sinusförmige Spannung ergibt. Dies ist bekanntlich nicht der Fall. Es ist also die Kurvenanalyse stets notwendig.

Wir können nun auch leicht die Frage entscheiden, ob und wie sich die Kurvenform des Stromes von der Spannung unterscheidet.

Wir wissen, daß der Grad der Verzerrung einer Kurve durch das Verhältnis der Amplituden der höheren Harmonischen zur Amplitude der Grundharmonischen charakterisiert ist. Je größer dieses Verhältnis ist, desto stärker ist die Kurve verzerrt.

Um festzustellen, ob die Spannungs- oder Stromkurve stärker verzerrt sind, haben wir demgemäß die Verhältnisse  $\frac{\mathfrak{I}_k}{\mathfrak{I}_1}$  und  $\frac{\mathfrak{E}_k}{\mathfrak{E}_1}$  zu vergleichen. Nun ist nach (51)

$$\frac{\mathfrak{I}_k}{\mathfrak{I}_1} = \frac{\mathfrak{E}_k}{\mathfrak{E}_1} \frac{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}.$$

Vernachlässigen wir zunächst wieder den Ohmschen Widerstand  $r$  und betrachten die beiden Extremfälle, so ist für

$$1. \text{ Kapazitiver Widerstand } \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\frac{\mathfrak{I}_k}{\mathfrak{I}_1} = \frac{1}{k} \frac{\mathfrak{E}_k}{\mathfrak{E}_1} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{I}_k}{\mathfrak{I}_1} < \frac{\mathfrak{E}_k}{\mathfrak{E}_1},$$

d. h. die Stromkurve ist weniger verzerrt als die Spannungskurve. Wir schließen: Selbstinduktion im Stromkreise entzerrt die Stromform.

$$2. \text{ Induktiver Widerstand } \omega L = 0.$$

Dann ist

$$\frac{\mathfrak{I}_k}{\mathfrak{I}_1} = k \frac{\mathfrak{E}_k}{\mathfrak{E}_1} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{I}_k}{\mathfrak{I}_1} > \frac{\mathfrak{E}_k}{\mathfrak{E}_1},$$

d. h. die Stromkurve ist stärker verzerrt als die Spannungskurve, woraus wir schließen: Kapazitiver Widerstand im Stromkreise verzerrt die Stromform.

Je mehr der Ohmsche Widerstand  $r$  gegenüber der Reaktanz überwiegt, desto ähnlicher werden die Kurvenformen von Strom und Spannung.

## VI. Die Leistung eines Wechselstromes.

In Anlehnung an die Schlußbetrachtungen des vorigen Abschnittes scheint es „hier“ zweckmäßig, über die Leistung eines Wechselstromes zu sprechen.

Die Leistung oder der Effekt eines Wechselstromes, d. i. die von ihm in der Zeiteinheit geleistete Arbeit, ist bekanntlich gegeben durch:

$$P = \int_0^1 e i dt = f \int_0^T e i dt = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt. \quad (1)$$

Betrachten wir den allgemeinen Fall verzerrter Kurvenform für Spannung und Strom, so ist

$$\begin{aligned} e &= \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \mathfrak{E}_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots, \\ i &= \mathfrak{I}_1 \sin(\omega t + \psi_1 \pm \varphi_1) + \mathfrak{I}_3 \sin(3\omega t + \psi_3 \pm \varphi_3) + \dots \end{aligned}$$

Dies in (1) eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{I}_1 \int_0^T \sin(\omega t + \psi_1) \sin(\omega t + \psi_1 \pm \varphi_1) dt + \\ &+ \frac{1}{T} \mathfrak{E}_3 \mathfrak{I}_3 \int_0^T \sin(3\omega t + \psi_3) \sin(3\omega t + \psi_3 \pm \varphi_3) dt + \dots \\ &+ \sum \frac{1}{T} \mathfrak{E}_k \mathfrak{I}_n \int_0^T \sin(k\omega t + \psi_k) \sin(n\omega t + \psi_n \pm \varphi_n) dt. \end{aligned}$$

Die Integrationen, die mit Beachtung der Beziehung

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \}.$$

ausgeführt werden, ergeben, daß die Integrale vom Typus des letzten Null werden, während die ersten zu dem Resultat führen:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \frac{1}{T} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{I}_1 \int_0^T \cos(\mp \varphi_1) dt - \frac{1}{2} \frac{1}{T} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{I}_1 \int_0^T \cos(2\omega t + 2\psi_1 \pm \varphi_1) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{T} \mathfrak{E}_3 \mathfrak{I}_3 \int_0^T \cos(\mp \varphi_3) dt - \frac{1}{2} \frac{1}{T} \mathfrak{E}_3 \mathfrak{I}_3 \int_0^T \cos(6\omega t + 2\psi_3 \pm \varphi_3) dt + \dots \end{aligned}$$

Da auch hier die Integrale der Funktionen von  $\omega t$  Null ergeben, so bleibt für  $P$  der Ausdruck

$$P = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{J}_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \mathfrak{E}_3 \mathfrak{J}_3 \cos \varphi_3 + \frac{1}{2} \mathfrak{E}_5 \mathfrak{J}_5 \cos \varphi_5 + \dots \\ & = \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{2}} \frac{\mathfrak{J}_1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 + \frac{\mathfrak{E}_3}{\sqrt{2}} \frac{\mathfrak{J}_3}{\sqrt{2}} \cos \varphi_3 + \frac{\mathfrak{E}_5}{\sqrt{2}} \frac{\mathfrak{J}_5}{\sqrt{2}} \cos \varphi_5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

oder

$$P = E_1 J_1 \cos \varphi_1 + E_3 J_3 \cos \varphi_3 + E_5 J_5 \cos \varphi_5 + \dots \quad (2)$$

Beachten wir, daß nach Abschn. V, Gl. (51) und (50a)

$$\mathfrak{J}_k = \frac{\mathfrak{E}_k}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \quad \text{und} \quad \cos \varphi_k = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}},$$

so geht, wenn wir noch setzen:

$$k\omega L - \frac{1}{k\omega C} = z_k, \quad (3)$$

Gl. (2a) über in

$$P = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1^2 \frac{r}{r^2 + z_1^2} + \frac{1}{2} \mathfrak{E}_3^2 \frac{r}{r^2 + z_3^2} + \dots$$

oder

$$P = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1^2 \frac{r}{r^2 + z_1^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 \frac{r^2 + z_1^2}{r^2 + z_3^2} + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 \frac{r^2 + z_1^2}{r^2 + z_5^2} + \dots \right\}.$$

Setzen wir für  $\mathfrak{E}_1^2$  nach Abschn. V, Gl. (53) den Wert

$$\mathfrak{E}_1^2 = 2 \frac{E^2}{1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots}$$

ein, so wird

$$P = \frac{r}{r^2 + z_1^2} E^2 \left\{ \frac{1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 \frac{r^2 + z_1^2}{r^2 + z_3^2} + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 \frac{r^2 + z_1^2}{r^2 + z_5^2} + \dots}{1 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots} \right\}.$$

In dem eingeklammerten Bruche erkennen wir aber den Faktor  $W^2$  des vorigen Abschnittes, so daß wir schreiben:

$$P = \frac{r}{r^2 + z_1^2} E^2 W^2.$$

Da nun nach Abschn. V, Gl. (54)

$$\frac{E}{\sqrt{r^2 + z_1^2}} W = J \quad \text{und} \quad \frac{r}{\sqrt{r^2 + z_1^2}} = \cos \varphi_1,$$

so übergeht  $P$  in

$$P = E \cdot J \{ \cos \varphi_1 W \}. \quad (4)$$

Im allgemeinsten Fall der „verzerrten“ Form von Spannung und Strom ist der Effekt gegeben durch das Produkt der Effektivwerte mal dem Kosinus des Phasenwinkels der „ersten“ Harmonischen, mal dem Wurzelfaktor  $W$ .

Es ist nun

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 W &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + z_1^2}} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\mathcal{G}_3}{\mathcal{E}_1}\right)^2 \frac{r^2 + z_1^2}{r^2 + z_3^2} + \left(\frac{\mathcal{G}_5}{\mathcal{E}_1}\right)^2 \frac{r^2 + z_1^2}{r^2 + z_5^2} + \dots}{1 + \left(\frac{\mathcal{G}_3}{\mathcal{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{G}_5}{\mathcal{E}_1}\right)^2 + \dots}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{r^2}{r^2 + z_1^2} + \left(\frac{\mathcal{G}_3}{\mathcal{E}_1}\right)^2 \frac{r^2}{r^2 + z_3^2} + \left(\frac{\mathcal{G}_5}{\mathcal{E}_1}\right)^2 \frac{r^2}{r^2 + z_5^2} + \dots}{1 + \left(\frac{\mathcal{G}_3}{\mathcal{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{G}_5}{\mathcal{E}_1}\right)^2 + \dots}} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hat seinen unteren Grenzwert „Null“ für  $r = 0$ .

D. h.: Im Idealfall des widerstandslosen Stromkreises (eisenfreie Selbstinduktion und verlustfreie Kondensatoren vorausgesetzt) ist die Leistung Null.

Der Ausdruck hat seinen oberen Grenzwert „Eins“ für

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 0,$$

denn dann sind alle  $z_k$  gleich Null [nach Gl. (3)].

D. h. ist der Stromkreis „reaktanzfrei“, nur mit Ohmschem Widerstand belastet, so ist die Leistung gleich dem Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom.

Für jeden anderen Fall der Belastung liegt der Wert von  $\cos \varphi_1 \cdot W$  zwischen Null und Eins.

Die Größe

$$\cos \varphi_1 \cdot W = F$$

heißt der „Leistungsfaktor“.

Die Leistung eines Wechselstromes ist also immer gleich dem Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom mal dem Leistungsfaktor

$$P = E \cdot J \cdot F. \tag{5}$$

In dem Spezialfalle, wo Spannung und Strom reine Sinuslinien sind, übergeht Gl. (2) in

$$P = E \cdot J \cdot \cos \varphi, \tag{5a}$$

also nur in diesem Falle wird der Leistungsfaktor zum mathematischen Kosinus des Winkels der Phasendifferenz.

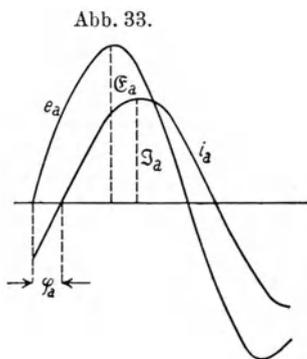
Infolge der eben bewiesenen Tatsache, daß der Leistungsfaktor nur Werte von Null bis Eins annehmen kann, kann man auch ihn als den Kosinus eines Phasenwinkels ansehen, wenn auch die Spannungs- und Stromwellen verzerrt sind. Um aber diesem Phasenwinkel eine reale Bedeutung zu geben, muß man dann die verzerrten Wellen durch reine Sinuslinien ersetzt denken, die einen gleich großen Effektivwert und die gleiche Periodenzahl haben, wie die verzerrten. Diese Ersatzwellen heißen „Äquivalenzwellen“ oder äquivalente Sinuswellen.

Sind die Effektivwerte der verzerrten Wellen von Spannung und Strom durch  $E$  und  $J$  gegeben, so sind die Amplituden  $\mathfrak{E}_a$  und  $\mathfrak{J}_a$  der Äquivalenzwellen bestimmt aus

$$\mathfrak{E}_a = E\sqrt{2}, \quad \mathfrak{J}_a = J\sqrt{2}.$$

Die Effektivwerte  $E_a$  und  $J_a$  der Äquivalenzwellen sind dann natürlich gleich den Effektivwerten  $E$  und  $J$  der verzerrten Wellen.

Zeichnet man nun die beiden Äquivalenzwellen (s. Abb. 33) und läßt sie in der Phase um einen Winkel  $\varphi_a$  — den „äquivalenten“ Phasenwinkel —, dessen Kosinus gleich dem



Leistungsfaktor ist, differieren, so ergibt die Leistung dieser beiden Äquivalenzwellen denselben Betrag wie die Leistung der verzerrten Wellen, denn es ist

$$E_a \cdot J_a \cdot \cos \varphi_a = E \cdot J \cdot F = P.$$

Bei der Einführung der Äquivalenzwellen ist wohl zu beachten, daß sie mit den verzerrten Formen nur den Effektivwert und die Periodenlänge gemein haben, daß aber die Momentan- und somit auch

Maximalwerte beider Formen nicht übereinstimmen. Die Zulässigkeit der Verwendung der Äquivalenzwelle ist hierdurch beschränkt.

Endlich wollen wir noch den Fall betrachten, wo die Spannung Sinusform hat, der Strom aber verzerrt ist (z. B. Leerlauf eines Transformators, dem eine sinusförmige Spannung aufgedrückt wird).

In diesem Falle übergeht Gl. (2) in

$$P = E \cdot J_1 \cos \varphi_1, \quad (5b)$$

also nur die „erste“ Stromharmonische, die Grundwelle, trägt zur Leistung bei.

Wegen

$$J^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{I}_1^2 \left\{ 1 + \left( \frac{\mathfrak{I}_3}{\mathfrak{I}_1} \right)^2 + \left( \frac{\mathfrak{I}_5}{\mathfrak{I}_1} \right)^2 + \dots \right\} = J_1^2 \left\{ 1 + \left( \frac{\mathfrak{I}_3}{\mathfrak{I}_1} \right)^2 + \dots \right\}$$

wird

$$P = E \cdot J \cos \varphi_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\mathfrak{I}_3}{\mathfrak{I}_1} \right)^2 + \left( \frac{\mathfrak{I}_5}{\mathfrak{I}_1} \right)^2 + \dots}}$$

Der Leistungsfaktor  $F$  hat also in diesem Falle den Wert

$$F = \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\mathfrak{I}_3}{\mathfrak{I}_1} \right)^2 + \left( \frac{\mathfrak{I}_5}{\mathfrak{I}_1} \right)^2 + \dots}}$$

### VII. Resonanz.

Wird ein schwingungsfähiges, mechanisches System periodisch erregt, so werden — bei gleicher Größe der erregenden Kraft — die Amplituden der resultierenden Schwingung dann am größten, wenn die Periodenzahl der aufgedrückten Schwingung mit der Periodenzahl der Eigenschwingung übereinstimmt.

Wird in der Nähe einer Stimmgabel, die auf den Ton  $a$  abgestimmt ist, der Ton  $a$  erzeugt, so beginnt die Stimmgabel zu tönen und tönt weiter, wenn auch die ursprüngliche Tonquelle verstummt ist.

Wir sagen dann, die Stimmgabel schwingt mit, oder sie ist in Resonanz.

Im V. Abschnitt haben wir erkannt, daß ein Stromkreis, der induktiven und kapazitiven Widerstand besitzt und dessen Ohmscher Widerstand eine bestimmte Größe nicht überschreitet, ein elektrisch eigenschwingungsfähiges System darstellt. Ganz analog mit dem eben angeführten mechanisch-akustischen Falle wird auch der Stromkreis in „elektrische“ Resonanz geraten, wenn er elektrisch mit einer Schwingungszahl erregt wird, die gleich seiner Eigenschwingungszahl ist.

Nach V, Gl. (47) war der stationäre Strom im Stromkreise der Abb. 29 gegeben durch:

$$i = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin \left( \omega t + \psi - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right) = \left. \begin{aligned} & \\ & = \mathfrak{I} \sin (\omega t + \psi - \varphi) \end{aligned} \right\} (1)$$

In Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  erreicht die Stromamplitude  $\mathfrak{I}$  ein Maximum, wenn

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}; \text{ oder } \omega^2 = \frac{1}{LC} \quad (2)$$

Dann wird

$$\mathfrak{I}_{\max} = \frac{\mathfrak{E}}{r}$$

Die Kreisfrequenz  $\omega_e$  der Eigenschwingung war aber nach V, (15) gegeben durch:

$$\omega_e^2 = \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2} \quad (3)$$

wobei wir wissen, daß das zweite Glied gegenüber dem ersten zu vernachlässigen ist. Es folgt also:

$$\mathfrak{I}_{\max} \text{ für: } \omega = \omega_e$$

D. h. bei einer bestimmten Klemmenspannung  $\mathfrak{E}$  erreicht die Stromstärke ihr Maximum, wenn die Frequenz der aufgedrückten Schwingung gleich der Frequenz der Eigenschwingung ist. Diesen Zustand nennen wir die Resonanz des Stromkreises.

Wie aus (2) und (3) hervorgeht, gilt diese Beziehung „genau“ nur dann, wenn der Stromkreis ungedämpft, d. h. der Ohmsche Widerstand  $r$  gleich Null ist. Hat  $r$  einen großen Wert, dann führt das Aufdrücken der Eigenschwingungszahl nicht zum Strommaximum. Setzen wir nämlich den exakten Wert von  $\omega_e$  aus (3) in die Stromamplitude ein, so ergibt sich:

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega_e L - \frac{1}{\omega_e C}\right)^2}} = \frac{\mathfrak{E}}{r} \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{16} r^2 \frac{C}{L}}{1 - \frac{3}{16} r^2 \frac{C}{L}}}$$

Die Wurzel aus dem Quotienten ist aber natürlich kleiner als Eins.

Die Beziehung:  $\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$  ergibt also immer das Strommaximum.

Die Beziehung:  $\omega = \omega_e$  ergibt es nur angenähert.

Ist  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , so ist nach (1) der Bogen  $\varphi$  gleich Null, d. h. der Strom ist mit der Spannung in gleicher Phase. (1) lautet dann

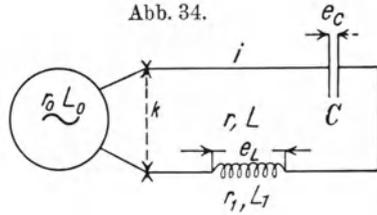
$$i = \frac{\mathfrak{E} \sin(\omega t + \psi)}{r} = \frac{e}{r}$$

d. h. in dem Stromkreise gilt das Ohmsche Gesetz.

Ein schwingungsfähiger Stromkreis kann nun in zweifacher Art an eine Stromquelle angeschlossen werden. Einmal in der eben erwähnten Hintereinander- oder Serienschaltung von Kapazität und Selbstinduktion oder zweitens in ihrer Parallelschaltung.

Serienschaltung.

Die Wechselstrommaschine, mit dem Widerstand  $r_0$  und der wirksamen Selbstinduktion  $L_0$ , arbeitet mit der Klemmenspannung  $k$  auf den Stromkreis, in welchem Kapazität  $C$ , Selbstinduktion  $L_1$  und Ohmscher Widerstand  $r_1$  in Serie stehen. Der Widerstand  $r_1$  sei — wie es meist der Tatsache entspricht — in der Induktionsrolle konzentriert.



Die EMK der Maschine sei

$$e = \mathfrak{E} \sin(\omega t) \tag{4}$$

Nennen wir den Gesamtwiderstand und die Gesamtinduktion des Stromkreises

$$r = r_1 + r_0; \quad L = L_1 + L_0;$$

so ist der stationäre Strom  $i$

$$i = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}\right) \tag{5}$$

Die Teilspannung  $e_c$  am Kondensator ist daher gegeben aus

$$e_c = \frac{1}{C} \int i dt; \text{ mit:}$$

$$e_c = \frac{1}{\omega C} \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{6}$$

Die Teilspannung  $e_L$  an der Induktionsrolle aus:

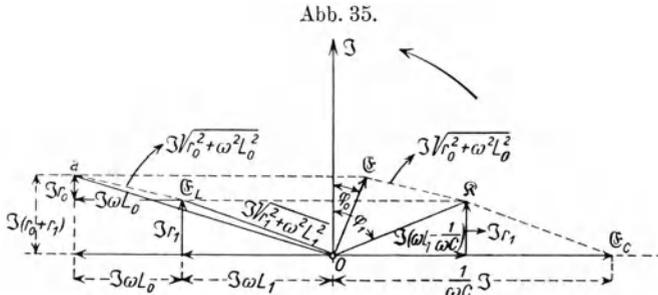
$$e_L = i r_1 + L_1 \frac{di}{dt}; \text{ mit:}$$

$$e_L = \sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2} \cdot \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} + \arctg \frac{\omega L_1}{r_1}\right) \tag{7}$$

Aus den Gl. (6) und (7) sehen wir, daß die beiden Teilspannungen an Kondensator und Induktionsrolle der Stromstärke proportional sind. Ist  $\Im$  die Stromamplitude, so ist

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{\omega C} \Im; \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_L = \sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2} \Im; \quad (8)$$

Abb. 35 zeigt das Diagramm der Schaltung, dem wir das Weitere entnehmen. Wir gehen von der Stromstärke (Vektor  $O\Im$ ) aus. Hinter



dieser um  $90^\circ$  verzögert ist die Kondensatorspannung  $O\mathcal{E}_c$ ; die Spannung  $O\mathcal{E}_L$  an der Induktionsrolle aber eilt dem Strome um  $\arctg \frac{\omega L_1}{r_1}$  voraus [s. Gl. (6) und (7)]. Die geometrische Summe beider Teilspannungen ist die Klemmenspannung  $O\mathcal{R}$ , die gegen den Strom um  $\varphi_1$  in der Phase verschoben ist, wobei nach der Abbildung

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}}{r_1} \quad (9)$$

Wollen wir die EMK  $O\mathcal{E}$  des Generators haben, so haben wir noch die induktive ( $\Im \omega L_0$ ) und die Ohmsche ( $\Im r_0$ ) Spannung der Maschine sinngemäß zu  $O\mathcal{E}_L$  zu addieren, wodurch wir Punkt  $a$  erhalten.

Machen wir

$$\mathcal{R}\mathcal{E} \# \mathcal{E}_L a; \quad \text{oder:} \quad a\mathcal{E} \# O\mathcal{E}_c$$

so ist  $O\mathcal{E}$  der Vektor der EMK, der um  $\varphi_0$  gegen  $\Im$  phasenverschoben ist. Es ist dann nach der Abbildung, und Gl. (5) entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \Im \sqrt{(r_0 + r_1)^2 + \left\{ \omega(L_0 + L_1) - \frac{1}{\omega C} \right\}^2} \\ \varphi_0 &= \arctg \frac{\omega(L_0 + L_1) - \frac{1}{\omega C}}{r_0 + r_1} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Klemmenspannung ergibt sich aus dem Diagramm mit:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{I} \sqrt{r_1^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (10 a)$$

und für  $\mathfrak{I}$  aus (10) den Wert gesetzt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{E} \frac{\sqrt{r_1^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}{\sqrt{(r_0 + r_1)^2 + \left\{\omega(L_0 + L_1) - \frac{1}{\omega C}\right\}^2}} \quad (11)$$

Machen wir nun

$$\omega L_1 = \frac{1}{\omega C}$$

stellen wir also den Zustand her, den wir Resonanz nennen, so wird nach (10) die Stromstärke

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{(r_0 + r_1)^2 + \omega^2 L_0^2}} \quad (12)$$

Die Klemmenspannung nach (11)

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{(r_0 + r_1)^2 + \omega^2 L_0^2}} \cdot r_1 \quad (13)$$

und die Phasendifferenz zwischen beiden nach (9)

$$\varphi_1 = 0$$

Es fallen also Klemmenspannung und Strom in der Phase zusammen.

Die beiden Teilspannungen werden nach (8)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_c &= \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{(r_0 + r_1)^2 + \omega^2 L_0^2}} \cdot \frac{1}{\omega C}; \\ \mathfrak{E}_L &= \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{(r_0 + r_1)^2 + \omega^2 L_0^2}} \sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2} \end{aligned} \right\}$$

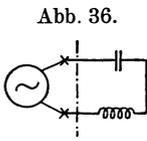
Nehmen wir nun auch  $r_1$  als verschwindend klein an, so wird die Stromstärke

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r_0^2 + \omega^2 L_0^2}}; \quad \text{die Teilspannungen: } \mathfrak{E}_c = \mathfrak{E}_L = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{r_0^2 + \omega^2 L_0^2}} \omega L_1; \quad (14)$$

und die Klemmenspannung nach (13)

$$\mathfrak{R} = 0.$$

Die Maschine arbeitet also in diesem Falle auf einen vollkommen widerstandslosen Stromkreis; sie gibt den maximalen, den Kurzschlußstrom. Da die Klemmenspannung Null ist, würden wir an der Situation nichts



ändern, wenn wir über die Klemmen einen kurzschließenden Bügel legen (strichpunktierte Linie in Abb. 36) und dann die Maschine abschalten würden.

Der maximale Stromfluß, oder sagen wir der Schwingungszustand würde dann, mangels einer Dämpfung ( $r_1 = 0$ ), im Schwingungskreise dauernd bestehen bleiben. Wir sehen, daß dieser Zustand mit Recht als Resonanz bezeichnet wird.

Die Gl. (14) zeigen, daß in diesem Zustand der Strom und, infolgedessen, die beiden Teilspannungen die möglichen Maximalwerte erreichen. Die Teilspannungen aber sind um  $180^\circ$  gegeneinander verschoben und ergeben daher die Klemmenspannung Null. Es ist — meiner Meinung nach — erstaunlicherweise, gebräuchlich geworden, diesen Zustand als „Spannungsresonanz“ zu bezeichnen, obwohl die Klemmenspannung Null und der Strom ein Maximum wird. Richtiger wäre es wohl, „diesen“ Zustand als Stromresonanz zu bezeichnen; mit dieser Bezeichnung kommt man aber in Konflikt mit der gebräuchlichen Bezeichnung der, sogleich zu besprechenden, Resonanz in Parallelschaltung. Es ist daher vielleicht am zweckmäßigsten, den Zustand als „Serienresonanz“ zu bezeichnen.

Jedenfalls nehmen wir zur Kenntnis, daß bei dieser Serienresonanz der maximale Strom und gewaltige Teilspannungen an Kondensator und Induktionsrolle auftreten, die besonders für den Kondensator (Kabel) gefährlich werden können.

#### Parallelschaltung.

Die Maschine arbeite mit einer Klemmenspannung

$$k = \mathfrak{R} \sin(\omega t)$$

auf die beiden parallelgeschalteten Stromzweige.

Dann ist nach V, (47)

$$i_c = \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{r_1^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{-\frac{1}{\omega C}}{r_1}\right) \quad (15)$$

$$i_L = \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{r_2}\right) \quad (16)$$

Die Effektivwerte der Teilströme sind also:

$$J_c = \frac{K}{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad J_L = \frac{K}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L^2}} \quad (17)$$

Ihre Phasendifferenzen mit der Klemmenspannung, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen:

$$\varphi_c = \arctg \frac{1}{\omega C r_1}; \quad \varphi_L = \arctg \frac{\omega L}{r_2} \quad (18)$$

Wir wollen das Weitere wieder aus dem Diagramm (Abb. 38) ableiten.

Wir gehen von der Klemmenspannung  $OK$  aus. Der Strom  $i_c$  eilt dieser um den Winkel  $\varphi_c$  vor [s. (15)]; wir zeichnen also, um  $\varphi_c$  geneigt,

Abb. 37.

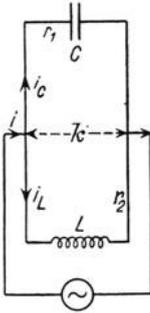
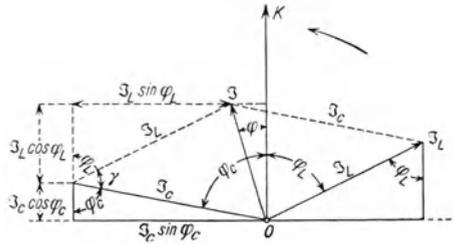


Abb. 38.



den Vektor  $J_c$ . Der Strom  $i_L$  eilt der Klemmenspannung um den Winkel  $\varphi_L$  nach [s. (16)]; wir erhalten also  $J_L$ . Die Teilströme  $i_c$  und  $i_L$  ergeben ihren Summenstrom  $i$ ; somit ergibt die geometrische Addition der Vektoren  $J_c$  und  $J_L$  den Effektivwert  $J$  des Summenstromes. Der Winkel  $\varphi$  ist der Phasenwinkel zwischen Klemmenspannung und Summenstrom.

Aus der Abbildung folgt:

$$\begin{aligned} J^2 &= J_c^2 + J_L^2 - 2 J_c J_L \cos \gamma; \\ \gamma &= 180 - (\varphi_c + \varphi_L) \\ \cos \gamma &= -\cos (\varphi_c + \varphi_L) \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} J^2 &= J_c^2 + J_L^2 + 2 J_c J_L \cos (\varphi_c + \varphi_L) \\ J^2 &= J_c^2 + J_L^2 + 2 J_c J_L \cos \varphi_c \cos \varphi_L - 2 J_c J_L \sin \varphi_c \sin \varphi_L \end{aligned}$$

aus (17) und (18) die Werte eingesetzt, folgt:

$$\begin{aligned}
 J^2 &= \frac{K^2}{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} + \frac{K^2}{r_2^2 + \omega^2 L^2} + \\
 &+ 2 \frac{K}{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{K}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L^2}} \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L^2}} - \\
 &- 2 \frac{K}{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{K}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L^2}} \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{\omega L}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L^2}} \\
 J^2 &= \frac{K^2}{\left\{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\} \left\{r_2^2 + \omega^2 L^2\right\}} \left\{r_2^2 + \omega^2 L^2 + r_1^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 r_1 r_2 - 2 \frac{1}{\omega C} \omega L\right\} \\
 J^2 &= \frac{K^2}{\left\{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\} \left\{r_2^2 + \omega^2 L^2\right\}} \left\{(r_1 + r_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

Ebenso folgt aus der Abbildung:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{J_c \sin \varphi_c - J_L \sin \varphi_L}{J_c \cos \varphi_c + J_L \cos \varphi_L};$$

oder bei Einsatz der Werte aus (17) und (18)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} (r_2^2 + \omega^2 L^2) - \omega L \left(r_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}{r_1 (r_2^2 + \omega^2 L^2) + r_2 \left(r_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)} \quad (19a)$$

Es ist also der Summenstrom gegeben durch:

$$i = i_c + i_L = \Im \sin(\omega t + \varphi);$$

oder

$$\left. \begin{aligned}
 i &= \Re \left\{ \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{\left(r_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) (r_2^2 + \omega^2 L^2)}} \right. \\
 &\cdot \left. \sin \left\{ \omega t + \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\omega C} (r_2^2 + \omega^2 L^2) - \omega L \left(r_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}{r_1 (r_2^2 + \omega^2 L^2) + r_2 \left(r_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)} \right\} \right\} \quad (20)
 \end{aligned} \right\}$$

Ist „nur“ Ohmscher Widerstand im Stromkreise, d. h. sind  $\omega L$  und  $\frac{1}{\omega C}$  gleich Null, so wird:

$$i = \frac{\Re \sin \omega t}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{k}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$$

D. h. für den Summenstrom gilt das Ohmsche Gesetz; denn

$$\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = R$$

ist bekanntlich der Widerstand der parallelgeschalteten Widerstände  $r_1$  und  $r_2$ .

Ist

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} > 0$$

so wird nach (19) der Effektivwert des Summenstromes:

$$J = K \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{(r_1^2 + \omega^2 L^2)(r_2^2 + \omega^2 L^2)}} \quad (20 a)$$

und nach (19 a) der Phasenunterschied

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L (r_2 - r_1)}{r_1 r_2 + \omega^2 L^2} \quad (20 b)$$

Würden nun auch die beiden Widerstände  $r_1$  und  $r_2$  gleich Null, so wird der Summenstrom  $i$  gleich Null. Die Teilströme  $i_c$  und  $i_L$  werden aber in diesem Falle nach (17) einander gleich. Abb. 37 zeigt uns: Der Stromzufluß zu dem System hört auf, im System aber bleibt „ein“ Strom

$$i_c = -i_L$$

bestehen. Würden wir die Stromquelle abschalten, so würde dies an dem Strömungs- bzw. Schwingungszustand des Systems nichts ändern. Das System schwänge, mangels einer Dämpfung ( $r_1 = r_2 = 0$ ), weiter. Es ist in Resonanz.

Wie bereits oben bemerkt, ist es gebräuchlich geworden, diesen Zustand als Stromresonanz zu bezeichnen. Da der Summenstrom Null wird, der Strom im System aber einen normalen, endlichen Wert behält, erscheint diese Bezeichnung als höchst unglücklich und unzutreffend gewählt.

Wir wollen, zum Unterschied von der oben behandelten Serienresonanz, diesen Zustand als „Parallelresonanz“ bezeichnen.

Der scheinbare Widerstand eines solchen Stromkreises, für den  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  ist, ist nach (20 a)

$$R = \frac{\sqrt{(r_1^2 + \omega^2 L^2)(r_2^2 + \omega^2 L^2)}}{r_1 + r_2}$$

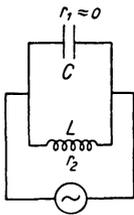
Ist:  $r_1 \approx 0$  und  $r_2^2$  gegen  $\omega^2 L^2$  zu vernachlässigen, so folgt:

$$R \approx \frac{\omega^2 L^2}{r_2}$$

als scheinbarer Widerstand eines Systems nach Abb. 39, wenn  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  ist.

Bei Parallelschaltung von Kapazität und Selbstinduktion ist im Dauerbetrieb eine gefährliche Strom- oder Spannungserhöhung nicht zu befürchten. Wohl aber kann das Abschalten der Stromquelle gefährlich werden, wenn keine Resonanz vorhanden ist.

Abb. 39.



Wir wollen annehmen, daß wir zufällig einen Ausschaltmoment treffen, in welchem die Kondensatorspannung Null ist, also

$$e_c = 0$$

Dann ist nach (15) wegen:

$$e_c = \frac{1}{C} \int i_c dt$$

$$e_c = \frac{1}{\omega C} \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{r_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin\left(\omega t + \arctg \frac{\omega C}{r_1} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

und daher:

$$\omega t = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega C}{r_1}$$

Der gleichzeitige Wert des Stromes  $i_L$  ergibt sich, wenn wir diesen Wert von  $\omega t$  in (16) einsetzen; es wird:

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\arctg \frac{\omega C}{r_1} + \arctg \frac{\omega L}{r_2}\right)\right\} \\ &= \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left\{\arctg \frac{\omega C}{r_1} + \arctg \frac{\omega L}{r_2}\right\} \end{aligned}$$

oder nach Einsatz der goniometrischen Funktionen:

$$i_L = \Re \cdot \frac{1}{r_2^2 + \omega^2 L^2} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \left( r_1 r_2 - \frac{L}{C} \right)$$

Die kinetische Energie der Induktionsrolle ist daher in diesem Moment gegeben durch

$$\frac{L i_L^2}{2},$$

die elektrostatische Energie des Kondensators aber ist im Abschaltmoment, wegen  $e_c = 0$ , Null. Im abgeschalteten System wird nun die Energie  $\frac{L i_L^2}{2}$  an den Kondensator, in die Form  $\frac{C e_c^2}{2}$ , abgegeben, so daß aus:

$$\frac{L i_L^2}{2} = \frac{C e_c^2}{2} \quad \text{sich ergibt:} \quad e_c = i_L \sqrt{\frac{L}{C}}$$

als die Spannung, die unmittelbar nach dem Abschalten am Kondensator zu erwarten ist. Führen wir den Wert für  $i_L$  ein, so folgt:

$$e_c = \Re \frac{\omega C \sqrt{\frac{L}{C}}}{(r_2^2 + \omega^2 L^2) \sqrt{1 + r_1^2 \omega^2 C^2}} \left( r_1 r_2 - \frac{L}{C} \right)$$

Betrachten wir den Grenzfall verschwindend kleiner Widerstände, also

$$r_1 = r_2 \approx 0$$

so wird

$$e_c = -\Re \frac{\omega \sqrt{CL} L}{\omega^2 L^2 C} = -\Re \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{CL}} = -\Re \frac{\omega_e}{\omega}$$

denn es ist ja:  $\frac{1}{\sqrt{CL}} = \omega_e$  der Eigenkreisfrequenz.

Je kleiner also die aufgedrückte Frequenz gegenüber der Eigenfrequenz war, desto höher steigt die Kondensatorspannung beim Abschalten; sie kann daher gefährliche Werte erreichen.

Treffen wir hingegen einen Abschaltmoment, in welchem

$$i_L = 0,$$

dann ist nach (16)

$$\omega t = \text{arctg} \frac{\omega L}{r_2}$$

somit in diesem Moment nach (15) wegen:

$$e_c = \frac{1}{C} \int i_c dt$$

$$e_c = -\frac{1}{\omega C} \frac{\Re}{\sqrt{r_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos \left( \arctg \frac{\omega L}{r_2} + \arctg \frac{1}{\omega C r_1} \right)$$

oder ausgeführt:

$$e_c = \frac{1}{\omega C} \Re \frac{1}{r_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L^2}} \left( \frac{L}{C} - r_1 r_2 \right)$$

„Jetzt“ ist im Abschaltmoment die kinetische Energie (wegen  $i_L = 0$ ) Null, aber die potentielle des Kondensators gegeben durch  $\frac{C e_c^2}{2}$ . Diese Energie wird also an die Induktionsrolle in die Form  $\frac{L i_L^2}{2}$  abgegeben und es folgt aus:

$$\frac{C e_c^2}{2} = \frac{L i_L^2}{2}; \quad i_L = e_c \sqrt{\frac{C}{L}}$$

als Strom, der unmittelbar nach Abschalten in der Induktionsrolle auftritt.

Setzen wir den Wert von  $e_c$  ein und betrachten wir wieder den Grenzfall  $r_1 = r_2 = 0$ , so wird:

$$i_L = \Re \frac{\omega C}{\omega L} \cdot \frac{L}{C} \sqrt{\frac{C}{L}} = \Re \sqrt{\frac{C}{L}}$$

In diesem Falle kann keine Spannungserhöhung auftreten, denn die Spannung an der Induktionsrolle ist ja jetzt gegeben durch:

$$e_L = \omega_e L i_L$$

da das System, nach der Abschaltung, mit der Eigenfrequenz  $\omega_e$  weiter-schwingt. Somit:

$$e_L = \frac{1}{\sqrt{C L}} L \Re \sqrt{\frac{C}{L}} = \Re$$

Die Spannung überschreitet also in diesem Falle, nach dem Abschalten, die ursprüngliche Klemmenspannung nicht.

Das sind die beiden Grenzfälle für die Abschaltung. Im ersten, dem gefährlichen, wurde die kinetische Energie  $\frac{L i_L^2}{2}$  der Induktionsrolle an den Kondensator abgegeben, der in diesem Moment keine Energie besaß; im zweiten gab umgekehrt der Kondensator seine Energie  $\frac{C e_c^2}{2}$  an den energiefreien, induktiven Leiterzweig ab.

**Spannungs- und Strommaxima bei der Serienschaltung.**

Wir wollen nun in einem Stromkreise nach Abb. 34 die Änderungen der Teilspannungen und des Stromes in Abhängigkeit von den Größen  $C$ ,  $L$  und  $\omega$  studieren.

Die Klemmenspannung  $k$  halten wir, mittels der Maschinenerregung, konstant.

Es war nach (10a):

$$\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{r_1^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (21)$$

nach (8)

$$\mathfrak{E}_c = \frac{1}{\omega C} \mathfrak{S} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_L = \mathfrak{S} \sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2} \quad (21 a)$$

somit:

$$\mathfrak{E}_c = \frac{1}{\omega C} \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{r_1^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{r_1^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 C L_1 - 1)^2}} \quad (22)$$

$$\mathfrak{E}_L = \mathfrak{R} \frac{\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}}{\sqrt{r_1^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \mathfrak{R} \frac{\omega C \sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}}{\sqrt{r_1^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 C L_1 - 1)^2}} \quad (23)$$

1. Verlauf von  $\mathfrak{E}_c$ ,  $\mathfrak{E}_L$ ,  $\mathfrak{S}$  und  $\varphi_1$  in Funktion von  $C$  (s. Abb. 40).

Aus (22) folgt:

$$\frac{d\mathfrak{E}_c}{dC} = \mathfrak{R} \frac{-\omega^2 r_1^2 C - \omega^2 L_1 (\omega^2 C L_1 - 1)}{\{r_1^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 C L_1 - 1)^2\}^{3/2}} = 0$$

wenn

$$C = C_1 = \frac{L_1}{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}; \quad (24)$$

also das Maximum von  $\mathfrak{E}_c$  tritt für den Wert  $C_1$  der Kapazität ein. Setzen wir  $C_1$  in (22) ein, so ergibt sich der Maximalwert der Kondensatorspannung mit

$$\mathfrak{E}_{c \max} = \mathfrak{R} \frac{\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}}{r_1} \quad (25)$$

Bestimmen wir noch den zweiten Differentialquotienten  $\frac{d^2 \mathfrak{E}_c}{dC^2}$  und setzen ihn Null, so finden wir, daß die Kurve für  $\mathfrak{E}_c$  zwei Wendepunkte

hat, die symmetrisch zur Maximalordinate liegen. Die Wendepunkte werden erreicht für Kapazitäten:

$$C' = \frac{L_1}{r_1^2 + \omega^2 L_1^2} - \frac{1}{r_1^2 + \omega^2 L_1^2} \frac{r_1}{\omega \sqrt{2}}$$

$$C'' = \frac{L_1}{r_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \frac{1}{r_1^2 + \omega^2 L_1^2} \frac{r_1}{\omega \sqrt{2}}$$

Die Kurve für  $\mathfrak{E}_c$  beginnt in der Abb. 40, dieser Entwicklung entsprechend, für  $C = 0$  mit dem Wert der Klemmenspannung  $\mathfrak{R}$ , erreicht für  $C = C_1$  ihr Maximum, fällt, symmetrisch zum aufsteigenden Aste, bis  $\mathfrak{R}$ , für  $C = 2 C_1$ , und strebt dann für weiter wachsendes  $C$  der Null zu.

Aus (23) folgt das Maximum von  $\mathfrak{E}_L$  für die Kapazität:

$$\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_2}$$

oder

$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_1} \quad (26)$$

also für den Zustand, den wir als Resonanz bezeichnet haben. Aus (24) und (26) ergibt sich:

$$C_2 = C_1 \left\{ 1 + \left( \frac{r_1}{\omega L_1} \right)^2 \right\}$$

Die Maxima der Teilspannungen finden also nicht für denselben Wert der Kapazität statt; die Kondensatorspannung erreicht ihr Maximum für einen kleineren Wert der Kapazität als die Induktionsspannung, denn

$$C_1 < C_2;$$

und zwar um so kleiner, je größer der Ohmsche Widerstand  $r_1$  ist. Der Ohmsche Widerstand verschiebt also die Lage der Maxima der Teilspannungen gegeneinander.

Setzt man  $C_2$  in (23) ein, so folgt:

$$\mathfrak{E}_{L \max} = \mathfrak{R} \frac{\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}}{r_1} = \mathfrak{E}_{c \max}$$

Die Maximalwerte der Teilspannungen sind also gleich. Auch die  $\mathfrak{E}_L$ -Kurve hat zwei Wendepunkte; diese liegen aber nicht mehr symmetrisch zu der Maximalordinate. Die  $\mathfrak{E}_L$ -Kurve beginnt mit Null, erreicht das Maximum und strebt für  $C = \infty$  dem Werte  $\mathfrak{R}$  der Klemmenspannung zu.

Der Strom  $J$  erreicht nach (21) zugleich mit  $\mathfrak{E}_L$  das Maximum und sein Verlauf ist nach (21) und (23) durch die Kurve für  $\mathfrak{E}_L$  gegeben, wenn man deren Ordinaten durch  $\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}$  dividiert.

Der Phasenwinkel  $\varphi_1$  zwischen Klemmenspannung und Strom ist nach (9) gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}}{r_1}$$

Für  $C = 0$  beginnt also  $\varphi_1$  mit dem negativen Maximum:  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ ; mit wachsendem  $C$  nimmt  $\varphi_1$  ab, wird Null für  $\omega L_1 = \frac{1}{\omega C}$ , also für  $C = C_2$ , und strebt für weiter wachsendes  $C$  dem positiven Werte  $\operatorname{arctg} \frac{\omega L_1}{r_1}$  zu. Die  $\varphi_1$ -Kurve hat einen Wendepunkt für  $C = C_1$ .

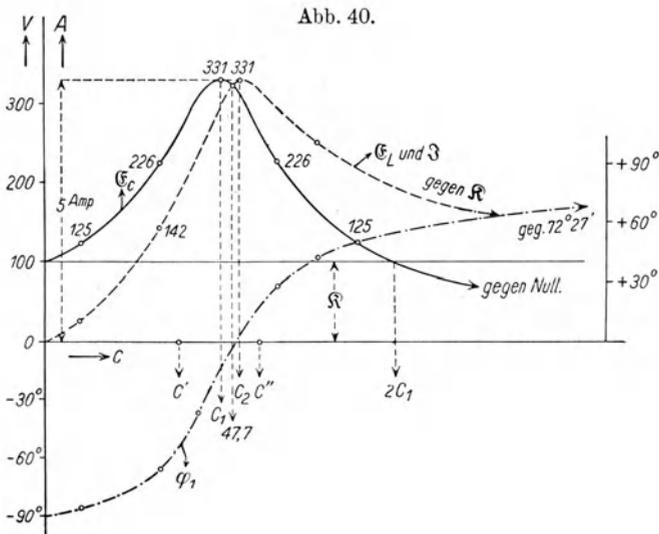


Abb. 40 zeigt den Verlauf der Kurven für das Beispiel:

$\mathcal{R} = 100$  Volt,  $f = 50,35$ , also  $\omega = 316,2$ ,  $L = 0,2$  H,  $r = 20 \Omega$ .

$\mathcal{E}_{c \max}$  für:  $C_1 = 45,45$  MF; mit 331 V

$\mathcal{E}_{L \max}$  für:  $C_2 = 50,0$  MF; mit 331 V

$C' = 35,25$ ,  $C'' = 55,65$ ,  $\mathcal{I}_{\max} = 5$  Amp.

$\varphi_1 = -90^\circ$  bis  $+72^\circ 27'$

$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_L$ , wenn  $C = 47,7$  MF

2. Verlauf von  $\mathcal{E}_c$ ,  $\mathcal{E}_L$ ,  $\mathcal{I}$  und  $\varphi_1$  in Funktion von  $L_1$  (s. Abb. 41).

Aus (22) folgt:

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dL_1} = \frac{\mathcal{R}}{\{\sqrt{r_1^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 CL_1 - 1)^2}\}^3} (\omega^2 CL_1 - 1) \omega^2 C = 0,$$

wenn

$$L_1 = \frac{1}{\omega^2 C} \quad (27)$$

Diesen Wert in (22) eingesetzt, ergibt:

$$\mathfrak{E}_{c \max} = \frac{\mathfrak{R}}{r_1 \omega C} \quad (28)$$

Aus (23) folgt:

$$\frac{d\mathfrak{E}_L}{dL_1} = 0, \quad \text{wenn} \quad \omega^4 C L_1^2 - \omega^2 L_1 = \omega^2 r_1^2 C$$

oder wenn

$$L_1 = \frac{1}{2 \omega^2 C} (1 + \sqrt{1 + 4 r_1^2 \omega^2 C^2}) \quad (29)$$

Dieser Wert in (23) eingesetzt, ergibt:

$$\mathfrak{E}_{L \max} = \mathfrak{R} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4 r_1^2 \omega^2 C^2} + 1}{\sqrt{1 + 4 r_1^2 \omega^2 C^2} - 1}} \quad (30)$$

Der Vergleich von (28) und (30) zeigt, daß die maximale Spannung an der Induktionsrolle ( $\mathfrak{E}_{L \max}$ ) größer ist als die maximale Spannung am Kondensator. Nur wenn der Widerstand  $r_1 = 0$  ist, werden die Spannungsmaxima gleich, und zwar unendlich groß und treten für denselben Wert von  $L_1$  auf, nämlich  $L_1 = \frac{1}{\omega^2 C}$ .

Der Phasenwinkel  $\varphi_1$  zwischen Klemmenspannung  $k$  und Strom  $i$  beginnt für  $L_1 = 0$  mit dem Werte  $\arctg\left(-\frac{1}{r_1 \omega C}\right)$ , erreicht für das Maximum der Kondensatorspannung den Wert Null und wächst dann bis zum Werte  $+\frac{\pi}{2}$ .

Der Verlauf der Stromstärke ist nach (21a) jetzt identisch mit dem Verlauf der Kondensatorspannung, nur sind, um aus der  $\mathfrak{E}_c$ -Kurve die Stromstärken zu entnehmen, die Kurvenordinaten mit  $\omega C$  zu multiplizieren.

Abb. 41 zeigt den Verlauf der Kurven für das Beispiel:

$$\mathfrak{R} = 100 \text{ Volt}, \quad f = 50,35, \quad \omega = 316,2 \quad C = 50 \text{ MF}, \quad r_1 = 20 \Omega$$

und  $L_1 = \text{variabel}$ .

Die Kondensatorspannung  $\mathfrak{E}_c$  erreicht ihr Maximum für

$$L_1 = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{316,2^2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 0,2 \text{ H}, \quad \text{mit} \quad \mathfrak{E}_{c \max} = 316 \text{ Volt}.$$

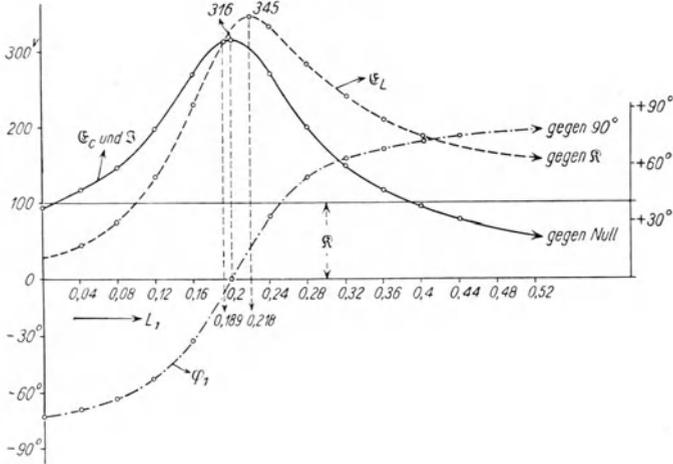
Die Spannung  $\mathfrak{E}_L$  erreicht ihr Maximum für

$$L_1 = \frac{1}{2\omega^2 C} (1 + \sqrt{1 + 4r_1^2 \omega^2 C^2}) = 0,218 \text{ H, mit } \mathfrak{E}_{L \max} = 345 \text{ Volt.}$$

Es wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_c &= \mathfrak{E}_L = 312 \text{ Volt, wenn } L_1 = 0,1896 \text{ H,} \\ \mathfrak{I}_{\max} &= 5 \text{ Amp., } \varphi_1 = -72^\circ 27' \text{ bis } +90^\circ. \end{aligned}$$

Abb. 41.



3. Verlauf von  $\mathfrak{E}_c$ ,  $\mathfrak{E}_L$ ,  $\mathfrak{I}$  und  $\varphi_1$  in Funktion von  $\omega$  (s. Abb. 42).

Aus (22) folgt:

$$\frac{d\mathfrak{E}_c}{d\omega} = 0, \text{ wenn } \omega^2 = \frac{1}{CL_1} \left(1 - \frac{1}{2} r_1^2 \frac{C}{L_1}\right) \quad (31)$$

Setzt man diesen Wert in (22) ein, so folgt:

$$\mathfrak{E}_{c \max} = \mathfrak{R} \frac{L_1}{r_1 C \sqrt{\frac{L_1}{C} - \frac{r_1^2}{4}}} \quad (32)$$

Aus (23) folgt:

$$\frac{d\mathfrak{E}_L}{d\omega} = 0, \text{ wenn } \omega^2 = \frac{1}{2CL_1} \left(1 + \sqrt{1 + 2r_1^2 \frac{C}{L_1}}\right) \quad (33)$$

Dieser Wert in (23) eingesetzt, ergibt:

$$\mathfrak{E}_{L \max} = \mathfrak{R} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 2r_1^2 \frac{C}{L_1}} + r_1^2 \frac{C}{L_1} + 1}{\sqrt{1 + 2r_1^2 \frac{C}{L_1}} + r_1^2 \frac{C}{L_1} - 1}} \quad (34)$$

Auch hier treten die Maxima der Teilspannungen nicht für denselben Wert der Frequenz auf. Der Ohmsche Widerstand verschiebt die Maxima gegeneinander und ist die Ursache für die Ungleichheit der Maxima. Ist der Widerstand Null, so werden beide Teilspannungen unendlich groß und werden für den Wert

$$\omega^2 = \frac{1}{CL_1}$$

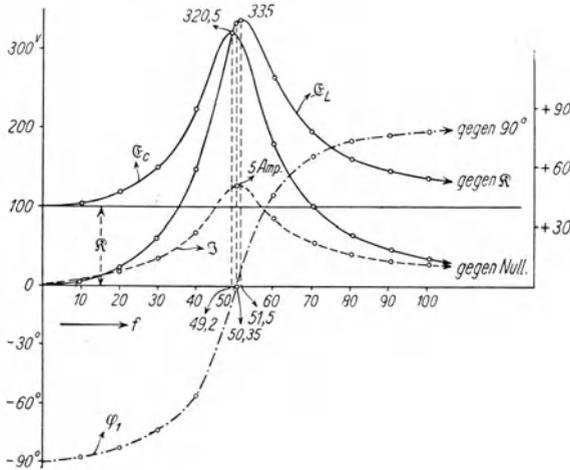
erreicht.

Gleichheit der Teilspannungen tritt ein, für

$$\omega^2 = \frac{1}{CL_1} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{4} r_1^4 \frac{C^2}{L_1}} - \frac{1}{2} r_1^2 \frac{C}{L_1} \right)$$

Die Kurve der Stromstärke hat hier natürlich einen anderen Verlauf als die Kurven der Teilspannungen.

Abb. 42.



Der Phasenwinkel  $\varphi_1$  geht von  $90^\circ$  Voreilung durch Null in  $90^\circ$  Nacheilung über.

Abb. 42 zeigt den Verlauf der Kurven für das Beispiel:

$$\mathfrak{R} = 100 \text{ Volt}, \quad C = 50 \text{ MF}, \quad L_1 = 0,2 \text{ H}, \quad r_1 = 20 \Omega$$

und

$$\omega = \text{variabel.}$$

Die Kondensatorspannung  $\mathfrak{E}_c$  erreicht ihr Maximum nach (31) für:

$$\omega = 308,9 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{E}_{c \max} = 320,5 \text{ Volt.}$$

$$f = 49,2$$

Die Spannung  $\mathcal{E}_L$  erreicht ihr Maximum nach (33) für:

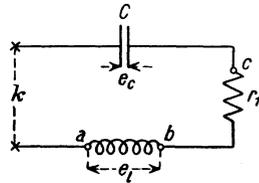
$$\begin{aligned} \omega &= 320,5 \\ f &= 51,5 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}_{L \max} = 335,0 \text{ Volt.}$$

Das Maximum der Stromstärke ergibt sich nach (21) für:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{CL_1}} = 316,2 \\ f &= 50,35 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{I}_{\max} = 5 \text{ Amp.}$$

Man findet diese drei besprochenen Fälle oft so dargestellt, daß unter  $\mathcal{E}_L$  die Spannung an der Induktionsrolle verstanden wird, die aber selbst als widerstandsfrei angesehen ist, während man den Widerstand separat in den Stromkreis gelegt denkt. Es wäre dies die Schaltung nach Abb. 43. Die Spannung  $e_L$  wird dann zwischen den Klemmen  $a$  und  $b$  gerechnet.

Abb. 43.



Da nun die Induktionsspule immer Widerstand, ja meist den ganzen Widerstand des Kreises beinhaltet, habe ich die Darstellung in der Schaltung nach Abb. 34 gewählt. D. h. nichts anderes, als daß in der Schaltung nach Abb. 43 die Spannung  $e_L$  nicht zwischen  $a$  und  $b$ , sondern zwischen  $a$  und  $c$  gerechnet ist.

### Partielle Resonanz.

Wir haben bis jetzt die Resonanzerscheinungen unter Grundlage „reiner“ Sinusschwingungen verfolgt. Gerade hier ist nun das Vorkommen „verzerrter“ Wellen von besonderer Bedeutung, da — wie leicht verständlich ist — die Daten des Stromkreises derartige sein können, daß irgend eine der höheren Harmonischen in Resonanz gerät, wenn dies dann natürlich mit der Grundwelle auch nicht der Fall ist.

Hat unsere EMK die Form

$$e = \mathcal{E}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \mathcal{E}_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

so wissen wir, nach V, Gl. (51), daß die Amplitude der  $k$ -ten Stromharmonischen gegeben ist durch:

$$\mathfrak{I}_k = \frac{\mathcal{E}_k}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}$$

Unsere ganze vorangegangene Entwicklung gilt nun für jede höhere Harmonische genau so, wie früher für die reine Sinuslinie. Wir finden also auch

$$\mathfrak{I}_k = \frac{\mathfrak{R}_k}{\sqrt{r_1^2 + \left(k\omega L_1 - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \quad (35)$$

wenn  $\mathfrak{R}_k$  die Amplitude der  $k$ -ten Harmonischen der Klemmenspannung ist, und finden für die Amplituden der  $k$ -ten Harmonischen der Teilspannungen an Kondensator und Induktionsrolle, nach (22) und (23) die Ausdrücke:

$$\mathfrak{E}_{c_k} = \frac{1}{k\omega C} \frac{\mathfrak{R}_k}{\sqrt{r_1^2 + \left(k\omega L_1 - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}; \quad \mathfrak{E}_{L_k} = \mathfrak{R}_k \frac{\sqrt{r_1^2 + k^2\omega^2 L_1^2}}{\sqrt{r_1^2 + \left(k\omega L_1 - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \quad (36)$$

In allen Ausdrücken ist, gegenüber früher, an Stelle der Kreisfrequenz  $\omega$ , ihr  $k$ -facher Wert getreten.

Es ergeben sich demnach die Resonanzbedingungen für jede höhere Harmonische, wenn wir in den früher abgeleiteten Ausdrücken für  $\omega$  überall  $k\omega$  setzen.

Wir wollen diese partielle Resonanz wieder an einem Beispiel verfolgen.

Auf einen Stromkreis nach Abb. 34 wirke eine Klemmenspannung  $k$ , die konstant gehalten wird und die eine Kurvenform hat, die durch die Gleichung

$$k = 100 \sin \omega t + 30 \sin 3 \omega t - 10 \sin 5 \omega t \quad (37)$$

gegeben ist.  $r_1$  und  $L_1$  sollen in dem Stromkreis konstant bleiben, ebenso die Kreisfrequenz  $\omega$ , hingegen soll die Kapazität  $C$  veränderlich sein.

Aus (37) folgen zunächst die Amplituden der drei Harmonischen der Klemmenspannung:

$$\mathfrak{R}_1 = 100 \text{ Volt}, \quad \mathfrak{R}_3 = 30 \text{ Volt}, \quad \mathfrak{R}_5 = 10 \text{ Volt}.$$

Im Stromkreis sei:

$$r_1 = 10 \Omega, \quad L_1 = 1 \text{ H}, \quad \omega = 316,2.$$

Wir wollen jetzt die Kapazität von Null an wachsen lassen und hierbei das Verhalten der Stromstärke studieren.

Da wir drei Harmonische der Klemmenspannung haben, erhalten wir auch drei Stromharmonische, deren Amplituden durch (35) gegeben sind. Aus (35) folgt sofort, daß für  $C = 0$  alle drei Stromharmonische Null werden, da die Wurzel im Nenner von (35) Unendlich wird.

Lassen wir die Kapazität auf z. B. 0,2 MF anwachsen, so folgt aus (35):

$$I_1 = \frac{100}{\sqrt{10^2 + \left(1 \cdot 316,2 \cdot 1 - \frac{1}{1 \cdot 316,2 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 0,00645 \text{ Amp.}$$

$$I_3 = \frac{30}{\sqrt{10^2 + \left(3 \cdot 316,2 \cdot 1 - \frac{1}{3 \cdot 316,2 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 0,00693 \text{ Amp.}$$

$$I_5 = \frac{10}{\sqrt{10^2 + \left(5 \cdot 316,2 \cdot 1 - \frac{1}{5 \cdot 316,2 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 0,00632 \text{ Amp.}$$

Somit die effektive Stromstärke bei dieser Kapazität nach II, Gl. (4):

$$\begin{aligned} J_{0,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} I_1 \sqrt{1 + \left(\frac{I_3}{I_1}\right)^2 + \left(\frac{I_5}{I_1}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} 0,00645 \sqrt{1 + 1,07^2 + 0,979^2} = 0,00804 \text{ Amp.} \end{aligned}$$

Auf diese Art berechnen wir die Stromstärken für jede beliebige Kapazität.

Aus (35) folgt aber auch sofort, daß es drei ausgezeichnete Werte der Stromstärke geben muß, die jenen Kapazitätswerten entsprechen, welche die Amplituden der drei Stromharmonischen zu Maximalwerten machen. Da die Maximumbedingung für die  $k$ -te Stromharmonische gegeben ist durch:

$$C = \frac{1}{k^2 \omega^2 L_1}$$

so folgt das Maximum und damit die Resonanz der Grundharmonischen für:

$$C_1 = \frac{1}{1 \cdot 316,2^2 \cdot 1} = 10 \cdot 10^{-6} = 10 \text{ MF}$$

die Resonanz der dritten Harmonischen für:

$$C_3 = \frac{1}{3^2 \cdot 316,2^2 \cdot 1} = 1,11 \cdot 10^{-6} = 1,11 \text{ MF}$$

die Resonanz der fünften Harmonischen für:

$$C_5 = \frac{1}{5^2 \cdot 316,2^2 \cdot 1} = 0,4 \cdot 10^{-6} = 0,4 \text{ MF}$$

bei wachsender Kapazität tritt also die höchste Harmonische zuerst in Resonanz.

1. Resonanz der fünften Harmonischen.  $C = 0,4 \cdot 10^{-6}$ ,  
somit:

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{100}{\sqrt{10^2 + \left(316,2 \cdot 1 - \frac{1}{316,2 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 0,0131 \text{ Amp.}$$

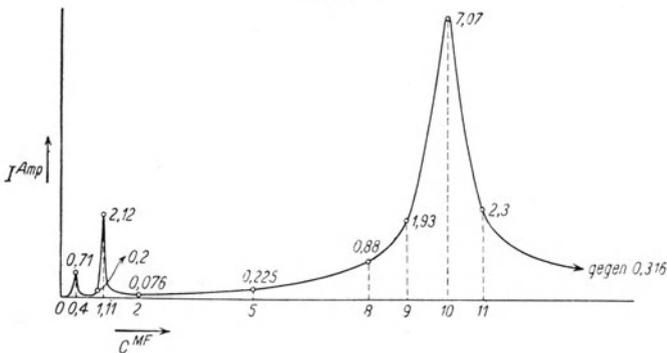
$$\mathfrak{I}_3 = \frac{30}{\sqrt{10^2 + \left(3 \cdot 316,2 \cdot 1 - \frac{1}{3 \cdot 316,2 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 0,0178 \text{ Amp.}$$

$$\mathfrak{I}_5 = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 0}} = 1 \text{ Amp.}$$

und

$$J_{0,4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0,0131 \sqrt{1 + \left(\frac{0,0178}{0,0131}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,0131}\right)^2} = 0,71 \text{ Amp.}$$

Abb. 44.



2. Resonanz der dritten Harmonischen.  $C = 1,11 \cdot 10^{-6}$

$$\mathfrak{I}_1 = 0,0395, \quad \mathfrak{I}_3 = 3, \quad \mathfrak{I}_5 = 0,0099,$$

$$J_{1,11} = 2,12 \text{ Amp.}$$

3. Resonanz der ersten Harmonischen.  $C = 10 \cdot 10^{-6}$

$$\mathfrak{I}_1 = 10, \quad \mathfrak{I}_3 = 0,0356, \quad \mathfrak{I}_5 = 0,0066,$$

$$J_{10} = 7,07 \text{ Amp.}$$

Abb. 44 zeigt die Änderung der Stromstärke mit wachsender Kapazität.

Wir finden drei Strommaxima, die den Resonanzfällen der drei Harmonischen entsprechen. Diese drei Strommaxima haben nach (36) drei Maxima der Teilspannungen am Kondensator und der Induktion zur Folge.

Aus (36) ergeben sich die Amplituden der Spannungsharmonischen am Kondensator mit

$$\mathcal{E}_{c_k} = \frac{\mathfrak{S}_k}{k\omega C}$$

Für unser Beispiel finden wir bei Resonanz der fünften Harmonischen, also  $C = 0,4 \text{ MF}$

$$\mathcal{E}_{c_1} = 104, \quad \mathcal{E}_{c_3} = 47, \quad \mathcal{E}_{c_5} = 1581,$$

somit

$$E_{c_{0,4}} = 1120 \text{ Volt},$$

bei Resonanz der dritten Harmonischen, also  $C = 1,11 \text{ MF}$

$$\mathcal{E}_{c_1} = 113, \quad \mathcal{E}_{c_3} = 2850, \quad \mathcal{E}_{c_5} = 5,6,$$

somit

$$E_{c_{1,11}} = 2020 \text{ Volt},$$

und bei Resonanz der Grundharmonischen, also  $C = 10 \text{ MF}$

$$\mathcal{E}_{c_1} = 3162, \quad \mathcal{E}_{c_3} = 3,75, \quad \mathcal{E}_{c_5} = 0,42,$$

somit

$$E_{c_{10}} = 2240 \text{ Volt}.$$

Der Effektivwert der Klemmenspannung war aber nach (37)

$$K = \frac{100}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{30}{100}\right)^2 + \left(\frac{10}{100}\right)^2} = 74,3 \text{ Volt}.$$

Wir finden also bei Resonanz der fünften Harmonischen eine  $\frac{1120}{74,3} \approx 15$ fache, bei Resonanz der dritten Harmonischen eine 27fache, und bei Resonanz der Grundharmonischen eine 30fache Erhöhung der Teilspannung am Kondensator gegenüber der aufgedrückten Klemmenspannung.

Solche Spannungserhöhungen müßten natürlich zum Durchschlag des Kondensators führen.

So notwendig die Benutzung der Resonanz bekanntlich in der gesamten drahtlosen Nachrichtentechnik als „Mittel zum Zwecke“ ist, so sorgfältig ist sie — als höchst gefährlich — in der Starkstromtechnik zu vermeiden.

Wir haben gesehen, daß Resonanz durch die Variation einer der Größen  $C$ ,  $L$  und  $\omega$  zu erzielen ist. Kapazität und Induktion sind nun in Starkstromnetzen kaum als veränderlich anzusehen; hingegen ändert sich die Frequenz in weiten Grenzen, wenn — fehlerhafterweise — das Netz auf den stillstehenden Generator geschaltet und dieser dann erst auf

Touren gebracht wird. Die Frequenz wächst dann von Null an. Die Resonanzbedingung für die  $k$ -te Harmonische lautet wie früher:

$$k\omega L = \frac{1}{k\omega C}$$

oder daraus

$$\omega = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{CL}}, \quad \text{und} \quad f = \frac{1}{k} \frac{1}{2\pi \sqrt{CL}}$$

je größer also  $k$ , die Stellzahl der Harmonischen, ist, um so kleiner ist die Frequenz, die zur Resonanz dieser Harmonischen führt. D. h. beim Anlauf des Generators kann partielle Resonanz eintreten, wobei die höchsten Harmonischen zuerst in Resonanz geraten.

Man könnte hier wohl einwenden, daß einer geringen Drehzahl des Generators auch eine geringere Klemmenspannung entspricht, was ja richtig ist; aber die Spannungssteigerung durch Resonanz kann eine so vielfache sein, daß der normale Wert der Klemmenspannung reichlich überschritten werden kann.

Jedenfalls besteht, der Resonanzgefahr wegen, die Anlaßregel zu Recht: Zuerst den Generator auf Touren bringen und dann das Netz anschalten!

Noch eine weitere, sehr bemerkenswerte Folge der partiellen Resonanz ist hervorzuheben. Das ist die Änderung der Form der Stromkurve gegenüber der Form der aufgedrückten Klemmenspannung.

In unserem Beispiel verhielten sich die Amplituden der drei Harmonischen der Klemmenspannung wie

$$100 : 30 : 10,$$

welches Verhältnis eine starke Verzerrung der Kurvenform bedeutet.

Betrachten wir dagegen das Verhältnis der Amplituden der Harmonischen der Stromstärke, bei Resonanz der Grundwelle, so ist dieses:

$$10 : 0,0356 : 0,0066.$$

Waren also bei der Klemmenspannung die höheren Harmonischen 30 bzw. 10 Proz. der Grundwelle, so sind sie, für die Stromstärke, bei Resonanz der Grundwelle, nur 0,36 bzw. 0,066 Proz.

Die Stromstärke hat also bei Resonanz ihrer Grundwelle nahezu reine Sinusform, obwohl die aufgedrückte Klemmenspannung stark verzerrt ist.

Betrachten wir die Amplituden der Harmonischen der Teilspannungen, z. B. der Kondensatorspannung, bei Resonanz der Grundwelle, so stehen diese nach unserer vorigen Rechnung im Verhältnis

$$3162 : 3,75 : 0,42,$$

die beiden höheren Harmonischen sind also gar nur 0,12 bzw. 0,013 Proz. der Grundwelle. D. h., daß die Kurvenform der Kondensatorspannung „praktisch“ als reine Sinuslinie anzusehen ist.

Wir finden also in der Resonanz ein Mittel — und es gibt kein besseres — zur Herstellung reiner Sinuslinien der Teilspannungen, die wir dann als Stromquellen dort verwenden können, wo wir aus meßtechnischen Gründen reine Sinuslinien brauchen.

Wir haben durch Resonanz der Grundwelle, diese, aus der verzerrten Form — wie man zu sagen pflegt — herausgeschält.

Was wir hier für die Resonanz der Grundwelle sahen, gilt in ähnlicher, wenn auch nicht so ausgeprägter Art für die Resonanz der höheren Harmonischen. Die Ziffern unseres Beispiels zeigen, daß sich die höheren Harmonischen nicht in derselben Reinheit wie die Grundwelle herauschälen lassen.

Für die, hier „partielle Resonanz“ genannte, Erscheinung findet man zuweilen die Bezeichnung „mehrfache Resonanz“. Ich halte diese Bezeichnung nicht für glücklich gewählt, da sie den Gedanken aufkommen läßt, daß „gleichzeitig“ mehrere Harmonische in Resonanz treten, was unmöglich ist. Das Wesen der Erscheinung besteht ja darin, daß eben nur „eine“ Harmonische in Resonanz gerät.

### **VIII. Der Einschaltvorgang auf Leitungen mit gleichmäßig verteilter Kapazität und Selbstinduktion.**

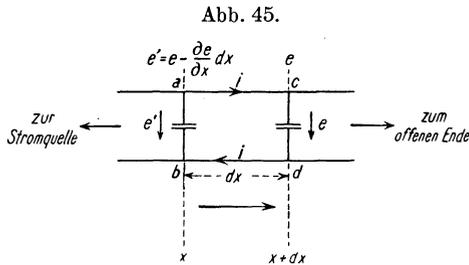
In den vorangehenden Abschnitten haben wir Stromkreise mit örtlich konzentrierter Kapazität und Selbstinduktion behandelt und in Sonderheit den Einschaltvorgang in solchen Stromkreisen studiert.

Lange Hochspannungsfernleitungen und weit verzweigte Überlandnetze stellen nun Stromkreise mit gleichmäßig verteilter Kapazität und Selbstinduktion dar. Die Schaltvorgänge jeder Art sind für solche Anlagen von größter Bedeutung und sind daher seit vielen Jahren Gegenstand intensivster Studien. Wir wollen von diesen Schaltvorgängen nur das „Grundproblem“, dieses aber mit möglichster Berücksichtigung „aller“ einflußnehmenden Faktoren behandeln. Dieses Grundproblem ist „der Anschluß einer offenen Leitung an eine Stromquelle“.

Wir denken uns eine Zweidrahtleitung von der Länge  $l$ , die Ohmschen Widerstand, Selbstinduktion, Kapazität und Ableitung, d. i. der Reziprokwert des Isolationswiderstandes zwischen den Drähten, besitzen soll. Diese vier, unter dem Begriff „elektrische Daten“ geführten, Eigen-

schaften der Leitung, wollen wir, pro Kilometer Leitungslänge, mit bzw.  $r$ ,  $L$ ,  $C$  und  $g$  bezeichnen. Das Vorhandensein von Kapazität und Ableitung bedingt natürlich auch bei der offenen Leitung einen Stromfluß.

Abb. 45 zeigt ein Längenelement dieser Leitung von der Länge  $dx$ . Links sei die Stromquelle, rechts das offene Ende. Die Pfeilrichtung ist also die Richtung fallender Energie; in dieser Richtung zählen wir die



Länge.  $x = 0$  entspricht der Stromquelle,  $x = l$  entspricht dem Ende. Die elektrischen Daten unseres Leitungselementes sind  $r dx$ ,  $L dx$ ,  $C dx$  und  $g dx$ ; und wir denken uns dabei die Kapazität und Ableitung unseres Elementes ersetzt durch

Kapazität und Ableitung eines unendlich kleinen Kondensators am Ende des Elementes.  $i$  sei die Stromstärke in unserem Element,  $e$  sei die Spannungsdifferenz zwischen den Punkten  $c$  und  $d$ . Dann ist die Spannungsdifferenz zwischen  $a$  und  $b$  gegeben durch:

$$e' = e - \frac{\partial e}{\partial x} dx;$$

denn  $\frac{\partial e}{\partial x}$  ist ja bei unserer Zählrichtung von  $x$  negativ. Die zeitliche Abnahme der magnetischen Durchflutung der Fläche  $abcd$  ist  $-L dx \frac{\partial i}{\partial t}$ ; diese Abnahme ist gleich dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke über die Randkurve der Fläche. Also

$$-L dx \frac{\partial i}{\partial t} = i r dx + e - e' = i r dx + e - e + \frac{\partial e}{\partial x} dx$$

oder

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = i r + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

Der Kondensator zwischen  $c$  und  $d$  nimmt infolge seiner Kapazität  $C dx$  einen Ladestrom von der Größe  $C dx \frac{\partial e}{\partial t}$  auf und läßt infolge seiner Ableitung  $g dx$  einen Strom von der Größe  $g dx \cdot e$  durchgehen. Die Summe dieser beiden Ströme ist der Strombetrag, der dem nächstfolgenden Leitungselement entgeht, sie ist die Stromabnahme im betrachteten Ele-

ment oder längs der Länge  $dx$ , also  $-\frac{\partial i}{\partial x} dx$ . Es folgt somit die Gleichung:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx = g dx \cdot e + C dx \frac{\partial e}{\partial t}$$

oder

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = ge + C \frac{\partial e}{\partial t} \quad (2)$$

Die beiden Differentialgleichungen (1) und (2) geben dem Bilde, das sich unsere Erfahrung von dem Strömungsvorgang gemacht hat, die mathematische Fassung. Sie bilden den Ausgang für die weiteren Untersuchungen und gestatten uns, Spannung und Stromstärke auf der Leitung, an beliebigem Orte, zu beliebiger Zeit zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke eliminieren wir aus (1) und (2) durch Differentiation die eine Unbekannte. Aus (1) folgt:

$$-\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = r \frac{\partial i}{\partial x} + L \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \quad (3)$$

aus (2)

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = g \frac{\partial e}{\partial t} + C \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (4)$$

Die Werte von  $\frac{\partial i}{\partial x}$  und  $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$  aus (2) und (4) in (3) eingesetzt, ergeben:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = rg \cdot e + (rC + gL) \frac{\partial e}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (5)$$

Differenziert man — um aus (1) und (2)  $e$  zu eliminieren — zuerst (1) nach  $t$  und dann (2) nach  $x$ , so folgt:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = rgi + (rC + gL) \frac{\partial i}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (6)$$

Wir finden in (5) oder (6) die sogenannte „Telegraphengleichung“ in ihrer vollständigen Form, die also den Verlauf von Spannung oder Strom in Funktion von Ort und Zeit angibt.

Zur Lösung unserer Gleichung für den gegenwärtigen Zweck machen wir folgende Überlegung:

Vor Ausführung einer Schalthandlung befindet sich eine Leitung in irgend einem Beharrungszustand, den wir mit  $z_1$  bezeichnen wollen und der auch — wie in unserem Falle — in vollständiger Spannungs- und Stromlosigkeit bestehen kann. Der Zustand  $z_1$  wird stets durch die Tatsache des Anschlusses oder Nichtanschlusses an die Stromquelle, durch

die Art der Belastung der Leitung und selbstverständlich durch ihre elektrischen Daten bedingt sein. Durch Ausführung der Schalthandlung ändern wir notwendig eine der zwei erstgenannten Bedingungen. Die Leitung strebt hierauf erfahrungsgemäß einem neuen Beharrungszustand zu, den wir mit  $z_2$  bezeichnen wollen. Da  $z_2$  nicht sprungweise — die Natur macht keine Sprünge — momentan auf  $z_1$  folgen kann, so kann  $z_2$  mit  $z_1$  nur durch einen veränderlichen, einen Ausgleichsvorgang verbunden sein, den wir mit  $z_v$  bezeichnen wollen.

Wir beobachten nun den ganzen Vorgang vom Zeitmoment des Schaltens an, welchen wir  $t = 0$  nennen, bis zu einer beliebig langen Zeit  $t = \infty$  nachher. Den Zustand auf der Leitung, in irgend einem Zeitmoment  $t$ , der zwischen Null und Unendlich liegt, wollen wir mit  $z_t$  bezeichnen. Dann können wir den Ansatz machen:

$$z_t = z_2 + z_{v,t}$$

d. h. der veränderliche Zustand, zu einer beliebigen Zeit  $t$ ,  $z_{v,t}$ , muß so beschaffen sein, daß er mit dem zu erwartenden, neuen Beharrungszustand  $z_2$  den tatsächlich auf der Leitung herrschenden Zustand  $z_t$  ergibt.

Zur Zeit  $t = 0$  ist  $z_t$  noch gleich  $z_1$ , dem alten Beharrungszustand; es folgt somit für  $t = 0$

$$z_1 = z_2 + z_{v(t=0)}$$

und daher:

$$z_{v(t=0)} = z_1 - z_2 \tag{7}$$

Zur Zeit  $t = \infty$  ist  $z_t$  in den neuen Beharrungszustand  $z_2$  übergegangen, es folgt somit für  $t = \infty$

$$z_2 = z_2 + z_{v(t=\infty)}$$

und daher:

$$z_{v(t=\infty)} = 0. \tag{8}$$

Wir haben auf diese Art den Ausgleichsvorgang  $z_v$  so dargestellt, daß er von einem beliebigen Anfangswert  $z_1 - z_2$ , mit wachsender Zeit, gegen Null abklingt.

Wenden wir diesen Gedanken auf unsere Gl. (5) und (6) an, so können wir Spannung und Strom auf der Leitung, an beliebigem Ort, zu beliebiger Zeit schreiben:

$$e = e_b + e_v \tag{9}$$

$$i = i_b + i_v \tag{10}$$

Hierin sind  $e_b$  und  $i_b$  die auf der Leitung zu erwartenden Beharrungszustände von Spannung und Strom,  $e_v$  und  $i_v$  die gleichzeitigen Werte des Ausgleichsvorganges. Sowohl die Beharrungs-, als

daher auch die veränderlichen Zustände müssen natürlich unsere Gl. (5) und (6) separat erfüllen.

Um nicht beide Gl. (5) und (6) separat lösen zu müssen, führen wir eine neue Funktion  $W$  des Ortes und der Zeit ein, die wir folgend definieren wollen. Es sei gesetzt

$$e = \frac{\partial W}{\partial x} \quad (11)$$

Führen wir dies in (2) ein, so ergibt sich:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g \frac{\partial W}{\partial x} + C \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial x}$$

und daher

$$i = -gW - C \frac{\partial W}{\partial t} \quad (12)$$

(11) und (12) in (1) eingesetzt, ergibt

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = rgW + (rC + gL) \frac{\partial W}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (13)$$

Aus dieser Differentialgleichung bestimmen wir  $W$  und dann mit Hilfe von (11) und (12) das  $e$  und  $i$ .

Über die Größe  $W$ , durch die wir  $e$  und  $i$  ausgedrückt haben, ist zu bemerken, daß auch sie — so wie  $e$  und  $i$  — einem Beharrungszustand zustrebt.

Dies ergibt sich ohne weiteres, wenn wir schreiben:

$$e = e_b + e_v = \frac{\partial W}{\partial x}$$

und nach  $t$  differenzieren

$$\frac{\partial e_b}{\partial t} + \frac{\partial e_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial x}$$

$\frac{\partial e_b}{\partial t}$  ist nun entweder Null — wenn  $e_b$  ein stationärer Gleichstromzustand — oder wieder ein Beharrungszustand  $B$ , wenn  $e_b$  ein beharrender Wechselstromzustand ist. Es ist also für den allgemeinen letzteren Fall

$$B + \frac{\partial e_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial x}$$

oder

$$B dt + de_v = d\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

Dies integriert ergibt:

$$e_b + e_v = \frac{dW}{dx}$$

und somit

$$W = \int e_v dx + \int e_b dx + const = W_v + W_b$$

denn die Summe der zwei letzten Glieder rechts muß auch wieder eine Beharrungsgröße  $W_b$  ergeben.

Ist in Sonderheit (erster Fall)  $\frac{\partial e_b}{\partial t} = 0$ , dann ist:

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right); \quad de_v = d \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right); \quad \frac{dW}{dx} = e_v + const$$

und

$$W = \int e_v dx + \int const \cdot dx + const = W_v + W_b$$

Es hat also auch  $W$  die Form

$$W = W_b + W_v \quad (14)$$

Nun wollen wir an die Lösung von (13) für den einfachsten Fall gehen, d. i.

### Die Ladung einer offenen Leitung mit Gleichstrom.

Wir legen (s. Abb. 46) den Leitungsanfang  $x = 0$  im Moment  $t = 0$  an die dauernd konstant gehaltene Gleichstromgeneratorspannung  $E$ . Dann gilt für alle Zeiten, also für  $t \geq 0$ :

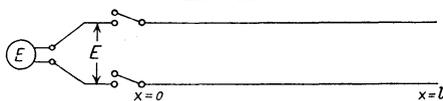
$$e_{x=0} = e_0 = E \quad (I)$$

und

$$i_{x=l} = i_l = 0 \quad (II)$$

Mit der Annahme  $i_l = 0$  machen wir eine bewußte, durch die Umstände begründete Vernachlässigung. Wäre nämlich die Spannung so

Abb. 46.



hoch, daß am Leitungsende infolge von Korona eine Ausstrahlung stattfände, so wäre die Annahme  $i_l = 0$  natürlich nicht mehr korrekt. Diesen Fall schließen wir also aus, oder setzen fest, daß  $i_l$  in seiner Größe bedeutungslos sei.

Wir machen diese Annahme, da — wenn man  $i_l$  berücksichtigt — die Rechnung zu kaum überwindlichen Schwierigkeiten führt, und dabei das Resultat nur quantitativ in geringem Grade beeinflusst wird.

Gl. (14) entsprechend fassen wir von  $W$  zunächst nur den Beharrungszustand  $W_b$  ins Auge. Dieser ist hier (Gleichstrom) von der

Zeit gänzlich unabhängig und nur durch den Ort bedingt. Er muß aber, ebenso wie  $W_v$ , die Gl. (13) separat erfüllen. Da die Ableitungen von  $W_b$  nach der Zeit Null sind, so folgt aus (13)

$$\frac{\partial^2 W_b}{\partial x^2} = r g W_b \quad (15)$$

Diese Gleichung hat eine einfache Lösung. Es ist  $\varepsilon^{\lambda x}$  eine Partikulärlösung, wo  $\lambda$  eine Konstante ist, die sich ergibt, wenn man  $\varepsilon^{\lambda x}$  in (15) für  $W_b$  einsetzt.

Dann folgt:

$$\lambda^2 \varepsilon^{\lambda x} = r g \varepsilon^{\lambda x}$$

oder

$$\lambda = \pm \sqrt{r \cdot g} \quad (16)$$

$\lambda$  ist also zweier Werte fähig und es lautet das allgemeine Integral von (15)

$$W_b = k_1 \varepsilon^{\lambda x} + k_2 \varepsilon^{-\lambda x} \quad (17)$$

wo  $k_1$  und  $k_2$  Integrationskonstanten sind.

Somit folgt aus (11) und (12):

$$e_b = \frac{\partial W_b}{\partial x} = \lambda (k_1 \varepsilon^{\lambda x} - k_2 \varepsilon^{-\lambda x}) \quad (18)$$

$$i_b = -g W_b = -g (k_1 \varepsilon^{\lambda x} + k_2 \varepsilon^{-\lambda x}) \quad (19)$$

und wir können nun mit Hilfe der, durch (I) und (II) gegebenen Grenzbedingungen die Konstanten  $k_1$  und  $k_2$  bestimmen.

Für  $x = 0$  folgt aus (I) und (18):  $E = \lambda (k_1 - k_2)$ ,

für  $x = l$  folgt aus (II) und (19):  $0 = -g (k_1 \varepsilon^{\lambda l} + k_2 \varepsilon^{-\lambda l})$ , somit

$$k_2 = -k_1 \varepsilon^{2\lambda l};$$

daher

$$E = \lambda k_1 (1 + \varepsilon^{2\lambda l}),$$

und daraus

$$k_1 = E \frac{1}{\lambda (1 + \varepsilon^{2\lambda l})}; \quad k_2 = -E \frac{\varepsilon^{2\lambda l}}{\lambda (1 + \varepsilon^{2\lambda l})}$$

Dies in (18) und (19) eingesetzt, ergibt:

$$e_b = E \frac{\varepsilon^{\lambda x} + \varepsilon^{\lambda(2l-x)}}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}}; \quad i_b = -\frac{g}{\lambda} E \frac{\varepsilon^{\lambda x} - \varepsilon^{\lambda(2l-x)}}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}} \quad (20)$$

oder wenn wir in Zähler und Nenner beider Ausdrücke  $\varepsilon^{\lambda l}$  zum Faktor herausheben:

$$e_b = E \frac{\mathfrak{Cof} \lambda (l-x)}{\mathfrak{Cof} \lambda l}; \quad i_b = \frac{g}{\lambda} E \frac{\mathfrak{Sin} \lambda (l-x)}{\mathfrak{Cof} \lambda l} \quad (20a)$$

Das ist der Beharrungszustand von Spannung und Strom, den wir auf der Leitung zu erwarten haben. Die Abbildungen 47 und 48 zeigen den Verlauf von Spannung und Strom längs der Leitung im Beharrungszustand.

Wir wollen hier gleich den Beharrungszustand für den Fall feststellen, daß die Leitung ideal gut isoliert, oder die Ableitung  $g = 0$  ist.

Dann ist nach (16)

$$\lambda = 0$$

und daher nach (20)

$$e_b = E; \quad i_b = 0 \quad (21)$$

Der Beharrungszustand für Spannung und Strom wird dann durch die Abbildungen 49 und 50 dargestellt.

Abb. 47.

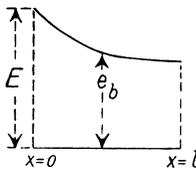


Abb. 49.

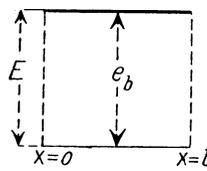


Abb. 48.

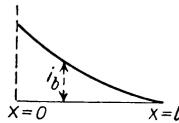
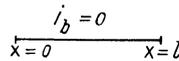


Abb. 50.



Um nun den veränderlichen Zustand  $W_v$  zu erfassen, bedenken wir, daß auch  $W_v$  die Gl. (13) erfüllen muß, daß aber  $W_v$  eine Funktion des Ortes und der Zeit ist. Es gilt also:

$$\frac{\partial^2 W_v}{\partial x^2} = rg W_v + (rC + gL) \frac{\partial W_v}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 W_v}{\partial t^2} \quad (22)$$

oder wenn wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} rg &= a \\ rC + gL &= b \\ LC &= c \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 W_v}{\partial x^2} = a W_v + b \frac{\partial W_v}{\partial t} + c \frac{\partial^2 W_v}{\partial t^2} \quad (22a)$$

Zur Lösung dieser Gleichung machen wir den Ansatz:

$$W_v = \mathfrak{X} \mathfrak{T} \quad (24)$$

d. h. wir setzen unsere Unbekannte  $W$ , gleich dem Produkte zweier neuen Funktionen, von denen — wie wir festsetzen — die eine,  $\mathfrak{X}$ , Funktion nur des Ortes ( $x$ ), die andere,  $\mathfrak{T}$ , Funktion nur der Zeit sein soll.

(24) in (22a) eingesetzt und die Differentiation ausgeführt, ergibt:

$$\mathfrak{T} \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dx^2} = a \mathfrak{X} \mathfrak{T} + b \mathfrak{X} \frac{d\mathfrak{T}}{dt} + c \mathfrak{X} \frac{d^2 \mathfrak{T}}{dt^2}$$

und durch  $\mathfrak{X} \mathfrak{T}$  dividiert:

$$\frac{1}{\mathfrak{X}} \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dx^2} - \frac{1}{\mathfrak{T}} \left( b \frac{d\mathfrak{T}}{dt} + c \frac{d^2 \mathfrak{T}}{dt^2} \right) = a \quad (25)$$

Wir sehen in dieser Gleichung die Differenz zweier voneinander gänzlich unabhängigen Funktionen, welche Differenz gleich einer Konstanten ( $a$ ) ist. Da die Gleichung für alle denkbaren Funktionswerte, d. h. für alle Längen ( $x$ ) und Zeiten ( $t$ ) gelten muß, so kann sie nur bestehen, wenn jede der beiden Funktionen selbst gleich einer Konstanten ist.

Nennen wir diese beiden Konstanten, deren Vorzeichen wir noch nicht kennen,  $\pm m^2$ , bzw.  $\pm \beta^2$ , so müssen also die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{X}} \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dx^2} &= \pm m^2 \\ \frac{1}{\mathfrak{T}} \left( b \frac{d\mathfrak{T}}{dt} + c \frac{d^2 \mathfrak{T}}{dt^2} \right) &= \pm \beta^2 \end{aligned}$$

Eine einfache Überlegung zeigt uns nun, daß die beiden Konstanten negative Vorzeichen haben müssen; denn wäre

$$\frac{1}{\mathfrak{X}} \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dx^2} = + m^2, \text{ so wäre } \mathfrak{X} = K_1 \varepsilon^{mx} + K_2 \varepsilon^{-mx}$$

d. h. die Funktion  $\mathfrak{X}$  würde mit beliebig zunehmendem  $x$  ins Ungemessene wachsen.

Würden wir setzen:

$$\frac{1}{\mathfrak{T}} \left( b \frac{d\mathfrak{T}}{dt} + c \frac{d^2 \mathfrak{T}}{dt^2} \right) = + \beta^2$$

so erhielten wir die Gleichung:

$$\frac{d^2 \mathfrak{T}}{dt^2} + \frac{b}{c} \frac{d\mathfrak{T}}{dt} - \frac{\beta^2}{c} \mathfrak{T} = 0$$

also mit

$$\mathfrak{T} = \varepsilon^{qt}$$

die charakteristische Gleichung

$$q^2 + \frac{b}{c} q - \frac{\beta^2}{c} = 0$$

woraus

$$\varrho_1 = -\frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{\beta^2}{c}}; \quad \varrho_2 = -\frac{b}{2c} - \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{\beta^2}{c}}$$

und daher

$$\mathfrak{X} = K_3 \varepsilon^{\varrho_1 t} + K_4 \varepsilon^{\varrho_2 t}$$

Da nun  $\varrho_1$  stets positiv wäre, würde  $\mathfrak{X}$  mit beliebig wachsender Zeit ins Unermeßliche wachsen.

Das Anwachsen von  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{Z}$  und damit von  $W$ ,  $e$  und  $i$  auf unendlich große Werte widerspricht aber unserem Problem.

Es können also nur die negativen Vorzeichen für die Konstanten  $m^2$  und  $\beta^2$  gelten, und wir erhalten:

$$\frac{1}{\mathfrak{X}} \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dx^2} = -m^2$$

woraus

$$\mathfrak{X} = K_1 \sin(mx) + K_2 \cos(mx) \quad (26)$$

und

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}} \left( b \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} + c \frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dt^2} \right) = -\beta^2$$

Hieraus folgt auch

$$\mathfrak{Z} = K_3 \varepsilon^{\varrho_1 t} + K_4 \varepsilon^{\varrho_2 t} \quad (27)$$

aber mit:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= -\frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{\beta^2}{c}} \\ \varrho_2 &= -\frac{b}{2c} - \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{\beta^2}{c}} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$\varrho_1$  und  $\varrho_2$  sind nun unter allen Umständen reelle negative, oder komplexe Größen; ob reell oder komplex, entscheidet die Wesenheit der Wurzel, die reell oder imaginär sein kann.

Die Konstanten  $m^2$  und  $\beta^2$  stehen nach (25) mit  $a$  in der Beziehung:

$$-m^2 + \beta^2 = a \quad (29)$$

Wir setzen nun:

$$\frac{b}{2c} = \alpha; \quad \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{\beta^2}{c}} = n' \quad (30)$$

dann übergeht (27) in:

$$\mathfrak{Z} = K_3 \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \varepsilon^{n' t} + K_4 \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \varepsilon^{-n' t} \quad (31)$$

(26) und (31) in (24) eingesetzt, ergibt:

$$W_v = \{K_1 \sin(mx) + K_2 \cos(mx)\} \varepsilon^{-\alpha t} (K_3 \varepsilon^{n' t} + K_4 \varepsilon^{-n' t})$$

und somit nach (11)

$$e_v = \frac{\partial W_v}{\partial x} = m \varepsilon^{-\alpha t} \{K_1 \cos(mx) - K_2 \sin(mx)\} (K_3 \varepsilon^{n't} + K_4 \varepsilon^{-n't}) \quad (32)$$

und nach (12)

$$\left. \begin{aligned} i_v &= -g W_v - C \frac{\partial W_v}{\partial t} = \\ &= -g \varepsilon^{-\alpha t} \{K_1 \sin(mx) + K_2 \cos(mx)\} (K_3 \varepsilon^{n't} + K_4 \varepsilon^{-n't}) + \\ &+ \alpha C \varepsilon^{-\alpha t} \{K_1 \sin(mx) + K_2 \cos(mx)\} (K_3 \varepsilon^{n't} + K_4 \varepsilon^{-n't}) - \\ &- n' C \varepsilon^{-\alpha t} \{K_1 \sin(mx) + K_2 \cos(mx)\} (K_3 \varepsilon^{n't} - K_4 \varepsilon^{-n't}) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Da diese Gleichungen den veränderlichen Spannungs- und Stromzustand auf der Leitung ausdrücken, können wir jetzt mit Hilfe der gegebenen Grenzbedingungen [Gl. (I) und (II)] an die Konstantenbestimmung gehen.

Nach (9) war

$$e = e_b + e_v$$

Aus (I) wissen wir aber, daß für  $x = 0$ , also den Ort der Stromquelle, für alle Zeiten  $e = E$  ist; und aus (20) sehen wir, daß für  $x = 0$ ,  $e_b = E$  ist.

Es folgt also für  $x = 0$ ;

$$E = E + e_v, \quad \text{oder} \quad e_v = 0$$

Dies in (32) eingesetzt, gibt:

$$0 = m \varepsilon^{-\alpha t} (K_1 \cdot 1 - K_2 \cdot 0) (K_3 \varepsilon^{n't} + K_4 \varepsilon^{-n't})$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten gilt, muß sein:

$$K_1 = 0$$

und wenn wir die Produkte der restlichen Konstanten in (32) und (33)

$$K_2 K_3 = A; \quad K_2 K_4 = B$$

setzen, lauten die Gleichungen (32) und (33)

$$e_v = -m \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \sin(mx) \{A \cdot \varepsilon^{n't} + B \varepsilon^{-n't}\} \quad (32a)$$

$$i_v = \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \cos(mx) \{A \varepsilon^{n't} (\alpha C - n' C - g) + B \cdot \varepsilon^{-n't} (\alpha C + n' C - g)\} \quad (33a)$$

Nach (10) ist nun wieder:

$$i = i_b + i_v$$

Für  $x = l$  sagt Gl. (II), daß  $i = 0$  für alle Zeiten, und

für  $x = l$  sagt Gl. (20), daß  $i_b = 0$ ,

also folgt für  $x = l$

$$0 = 0 + i_v, \quad \text{oder} \quad i_v = 0$$

Es folgt also aus (33a):

$$0 = \varepsilon^{-\alpha t} \cos(ml) \{A \cdot \varepsilon^{n't} (\alpha C - n' C - g) + B \varepsilon^{-n't} (\alpha C + n' C - g)\}$$

und daher muß sein:

$$\cos(ml) = 0$$

oder  $(ml)$  muß ein ungerades Vielfaches von  $\frac{\pi}{2}$  sein, d. h.

$$ml = (2k' + 1) \frac{\pi}{2} \quad (34)$$

wobei  $k'$  die Werte der Zahlen 0, 1, 2 ... bis  $\infty$  durchläuft; oder mit

$$2k' + 1 = k$$

$$ml = k \frac{\pi}{2} \quad (34a)$$

wobei  $k$  die Reihe der ungeraden Zahlen von 1 bis  $\infty$  durchläuft.

Die Größe  $m$  ist also unendlich vieler Werte fähig:

$$m_k = k \frac{\pi}{2} \frac{1}{l} \quad (35)$$

und demnach sind nach (29) und (30) auch die Größen  $\beta$  und damit  $n'$  unendlich vieler Werte fähig.

Da jedes dieser unendlich vielen, zusammengehörigen Wertepaare  $m_k$ ,  $n'_k$  einer Partikulärlösung unserer Grundgleichungen entspricht, so ist die allgemeine Lösung, als Summe der Partikulärlösungen, gegeben durch:

$$e_v = -\varepsilon^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{k=\infty} m_k \sin(m_k x) \{A_k \varepsilon^{n'_k t} + B_k \varepsilon^{-n'_k t}\} \quad (36)$$

$$i_v = \varepsilon^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \cos(m_k x) \{A_k \varepsilon^{n'_k t} (\alpha C - n'_k C - g) + B_k \varepsilon^{-n'_k t} (\alpha C + n'_k C - g)\} \quad (37)$$

Wir finden also den veränderlichen Zustand von Spannung und Strom ausgedrückt durch je eine unendliche Fouriersche Reihe mit nur ungeraden Vielfachen des Argumentes  $\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right)$  und es handelt sich jetzt um die Bestimmung der Konstanten  $A_k$  und  $B_k$ .

Für die Zeit  $t = 0$  ist nun der Spannungszustand  $e$  auf der ganzen Leitung — ausgenommen den Punkt  $x = 0$ , wo ja die Spannung dauernd auf dem Werte  $E$  erhalten werden soll — gleich Null. Somit folgt aus (9) für  $t = 0$

$$0 = e_b + e_v$$

oder

$$e_v = -e_b$$

Der zu erwartende Beharrungszustand  $e_b$  ist aber durch (20) gegeben. Führen wir ihn links in (36) ein, so folgt wegen  $t = 0$

$$\frac{E}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}} (\varepsilon^{\lambda x} + \varepsilon^{\lambda(2l-x)}) = \sum_1^{\infty} m_k \sin(m_k x) (A_k + B_k) \quad (38)$$

Führen wir eine neue Veränderliche  $u$  ein, die wir definieren durch

$$u = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l}$$

und setzen wir:

$$m_k (A_k + B_k) = F_k \quad (39)$$

so erhält die Gl. (38) die Form:

$$f(u) = F_1 \sin u + F_3 \sin 3u + F_5 \sin 5u + \dots$$

Für diese Reihe ist aber nach Abschnitt I

$$F_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(u) \sin(ku) du \quad (40)$$

Gehen wir auf die alte Veränderliche  $x$  zurück, so ändern sich zunächst die Integrationsgrenzen. Es folgt aus:

$$u = \frac{\pi}{2} \frac{x}{l}$$

daß für

$$u = 0 \quad \text{auch} \quad x = 0$$

und daß für

$$u = \pi; \quad x = 2l$$

und

$$du = \frac{\pi}{2} \frac{1}{l} dx$$

Hiermit übergeht Gl. (40) in

$$F_k = \frac{1}{l} \frac{E}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}} \int_0^{2l} (\varepsilon^{\lambda x} + \varepsilon^{\lambda(2l-x)}) \sin\left(k \frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right) dx$$

woraus durch partielle Integration [s. Abschn. III, Gl. (40)] bei Beachtung von (35)

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{l} \frac{E}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}} \left\{ \left[ -\frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} (m_k \varepsilon^{\lambda x} \cos m_k x - \lambda \varepsilon^{\lambda x} \sin m_k x) \right]_0^{2l} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{2\lambda l} \left[ -\frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} (m_k \varepsilon^{-\lambda x} \cos m_k x + \lambda \varepsilon^{-\lambda x} \sin m_k x) \right]_0^{2l} \right\} = \\ &= \frac{1}{l} \frac{E}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}} \cdot \frac{2 m_k}{m_k^2 + \lambda^2} (1 + \varepsilon^{2\lambda l}) = m_k \cdot \frac{1}{l} \frac{2E}{m_k^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

und daher nach (39)

$$A_k + B_k = \frac{2E}{l} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \quad (41)$$

Weiter ist nach unserer Annahme für  $t = 0$  die Stromstärke  $i$  auf der ganzen Leitung Null, daher nach (10)

$$i = i_b + i_v = 0 \quad \text{und somit} \quad i_v = -i_b;$$

$i_b$ , der zu erwartende Beharrungszustand der Stromstärke, ist aber durch (20) gegeben. Führen wir ihn links in (37) ein, so folgt wegen  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{g}{\lambda} \frac{E}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}} \{ \varepsilon^{\lambda x} - \varepsilon^{\lambda(2l-x)} \} = \\ & = \sum_1^{\infty} \cos(m_k x) \{ A_k(\alpha C - n'_k C - g) + B_k(\alpha C + n'_k C - g) \} \end{aligned}$$

Setzen wir:

$$A_k(\alpha C - n'_k C - g) + B_k(\alpha C + n'_k C - g) = H_k \quad (42)$$

so sehen wir eine Fouriersche Reihe, deren Amplituden  $H_k$  sich ergeben aus:

$$H_k = \frac{g}{\lambda} \frac{E}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}} \cdot \frac{1}{l} \int_0^{2l} \varepsilon^{\lambda x} \cos(m_k x) dx - \frac{g}{\lambda} \frac{E \varepsilon^{2\lambda l}}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}} \cdot \frac{1}{l} \int_0^{2l} \varepsilon^{-\lambda x} \cos(m_k x) dx$$

Nennen wir das erste Integral  $J_1$ , das zweite  $J_2$ , so ist:

$$J_1 = -\frac{\lambda}{m_k^2 + \lambda^2} (1 + \varepsilon^{2\lambda l}) \quad \text{und} \quad J_2 = \frac{\lambda}{m_k^2 + \lambda^2} (1 + \varepsilon^{-2\lambda l})$$

und daher:

$$H_k = -g \frac{2E}{l} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \quad (43)$$

Aus (41) und (42) ergeben sich somit die Werte der Konstanten  $A_k$  und  $B_k$  mit

$$A_k = \frac{E}{l} \frac{1}{n'_k} \frac{n'_k + \alpha}{m_k^2 + \lambda^2}; \quad B_k = \frac{E}{l} \frac{1}{n'_k} \frac{n'_k - \alpha}{m_k^2 + \lambda^2} \quad (44)$$

Setzen wir diese Werte in (36) und (37) ein, so wird:

$$e_v = -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n'_k} \frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x) \{ (n'_k + \alpha) \varepsilon^{n'_k t} + (n'_k - \alpha) \varepsilon^{-n'_k t} \} \quad (45)$$

$$i_v = \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n'_k} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \left\{ \begin{aligned} & (n'_k + \alpha) (\alpha C - n'_k C - g) \varepsilon^{n'_k t} + \\ & + (n'_k - \alpha) (\alpha C + n'_k C - g) \varepsilon^{-n'_k t} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Wir haben bisher auf die Wesenheit der Größe  $n'_k$  keine Rücksicht genommen. Es ist nun nach (30)

$$n'_k = \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{\beta_k^2}{c}}$$

wobei nach (29)

$$\beta_k^2 = a + m_k^2$$

und daher:

$$n'_k = \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c} - \frac{m_k^2}{c}}$$

Diese Größe ist reell, wenn:

$$\frac{b^2}{4c} \geq a + m_k^2$$

Nun war nach (23)

$$a = rg, \quad b = rC + gL, \quad c = CL$$

und nach (35)

$$m_k = k \frac{\pi}{2} \frac{1}{l}$$

Es ist also  $n'_k$  reell, wenn:

$$b^2 \geq 4ac + 4cm_k^2$$

oder:

$$r^2 C^2 + g^2 L^2 + 2rgCL \geq 4rgCL + 4CL \left( k \frac{\pi}{2} \frac{1}{l} \right)^2$$

oder wenn:

$$(rC - gL)^2 \geq 4LC \left( k \frac{\pi}{2} \frac{1}{l} \right)^2. \quad (47)$$

Wird nun:

$$(rC - gL)^2 < 4LC \left( k \frac{\pi}{2} \frac{1}{l} \right)^2 \quad (47a)$$

so wird  $n'_k$  imaginär. Mit  $\iota = \sqrt{-1}$  wird

$$n'_k = \iota \sqrt{\frac{\beta_k^2}{c} - \frac{b^2}{4c^2}}$$

und setzen wir:

$$n_k = \sqrt{\frac{\beta_k^2}{c} - \frac{b^2}{4c^2}} \quad (48)$$

so wird:

$$n'_k = \iota n_k \quad (48a)$$

Führen wir diesen Wert in diese Gl. (45) und (46) ein, so wird:

$$e_v = -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} k \sum_1^{\infty} \frac{1}{\iota n_k m_k^2 + \lambda^2} \frac{m_k}{\sin(m_k x)} \{ \iota n_k (\varepsilon^{\iota n_k t} + \varepsilon^{-\iota n_k t}) + \alpha (\varepsilon^{\iota n_k t} - \varepsilon^{-\iota n_k t}) \}$$

Mit Rücksicht auf

$$\frac{\varepsilon^{in_k t} + \varepsilon^{-in_k t}}{2} = \cos(n_k t)$$

und

$$\frac{\varepsilon^{in_k t} - \varepsilon^{-in_k t}}{2} = i \sin(n_k t)$$

übergeht dieser Ausdruck in:

$$e_v = -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_k \frac{1}{n_k} \frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x) \{n_k \cos(n_k t) + \alpha \sin(n_k t)\} \quad (49)$$

und in gleicher Art wird:

$$i_v = \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_k \frac{1}{n_k} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \left\{ [(n_k^2 + \alpha^2) C - \alpha g] \sin(n_k t) - \right. \\ \left. - n_k g \cos(n_k t) \right\} \quad (50)$$

D. h.: Wenn die  $n'_k$  imaginär sind, so werden  $e_v$  und  $i_v$  „periodische“ Funktionen der Zeit, und zwar Summen von Sinusfunktionen des Arguments  $n_k t$ . Diese Sinusschwingungen sind zeitlich gedämpft (Faktor  $\varepsilon^{-\alpha t}$ ); ihre Amplituden ändern sich von Ort zu Ort nach Sinuslinien des Arguments  $m_k x$ .

Sind die  $n'_k$  reell, so ist wegen Gl. (30) stets

$$n'_k < \alpha$$

Die Gl. (45) und (46) besagen dann, daß in diesem Falle  $e_v$  und  $i_v$  keine periodischen Funktionen der Zeit sind, sondern einfach eine Summe von zeitlich gedämpften Sinusfunktionen des Ortes, vom Argument  $m_k x$ , darstellen.  $e_v$  und  $i_v$  bedeuten dann also „aperiodische“ Zustände.

Mit Rücksicht auf die Beziehungen:

$$\frac{\varepsilon^{n'_k t} + \varepsilon^{-n'_k t}}{2} = \mathfrak{C}of(n'_k t)$$

$$\frac{\varepsilon^{n'_k t} - \varepsilon^{-n'_k t}}{2} = \mathfrak{S}in(n'_k t)$$

können wir (45) und (46) in der Form schreiben:

$$e_v = -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_k \frac{1}{n'_k} \frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x) \{n'_k \mathfrak{C}of(n'_k t) + \alpha \mathfrak{S}in(n'_k t)\} \quad (45a)$$

$$i_v = \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_k \frac{1}{n'_k} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \left\{ [(\alpha^2 - n_k'^2) C - \alpha g] \mathfrak{S}in(n'_k t) - \right. \\ \left. - n'_k g \mathfrak{C}of(n'_k t) \right\} \quad (46a)$$

Sowie also die periodischen Zustände durch Kreisfunktionen des Arguments  $n_k t$  bestimmt sind, sind die aperiodischen durch Hyperbelfunktionen der Area  $n'_k t$  gegeben.

Aus den Beziehungen (47) sehen wir nun, daß, bei fest gegebenen Leitungsdaten  $r$ ,  $L$ ,  $C$  und  $g$ , die Wesenheit von  $n'_k$  nur durch die Länge  $l$  und durch die Stellzahl  $k$  der Harmonischen bedingt ist.

Je kleiner das  $k$  ist, desto eher besteht die Möglichkeit der Erfüllung von (47); für größere  $k$ , also für höhere Harmonische kann und muß endlich (47) in (47a) übergehen.

D. h. nichts anderes, als daß auf derselben Leitung im allgemeinsten Falle  $e_v$  und  $i_v$  durch aperiodische und periodische Zustände gegeben sein können.

Setzen wir:

$$\frac{rC - gL}{2\sqrt{LC}} = \gamma \tag{51}$$

so lauten die Beziehungen (47) und (47a)

$$\left(k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{l}\right)^2 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \gamma^2$$

und wir finden nun aus

$$k_x = \pm \gamma \frac{2l}{\pi} \tag{52}$$

eine Zahl — sie wird im allgemeinen zwischen zwei ungeraden Zahlen liegen —, die uns Aufschluß gibt über die Stellzahlen  $k$  der vorhandenen „zeitlichen“ und nur „gedämpften, räumlichen“ Wellen. Die, der Zahl  $k_x$ , nächstliegende „kleinere“ ungerade Zahl ist  $k_a$ , die höchste Stellzahl der räumlichen Wellen; die, der Zahl  $k_x$ , nächstliegende „größere“ ungerade Zahl ist  $k_p$ , die niedrigste Stellzahl der zeitlichen Wellen. Hat  $k_x$  den genauen Wert einer ungeraden Zahl, dann ist es mit  $k_a$  identisch. In (52) gilt natürlich das positive Vorzeichen für ein positives, das negative Vorzeichen für ein negatives  $\gamma$ .

Ergibt sich

$$k_x < 1$$

so sind  $e_v$  und  $i_v$  rein periodischer Natur. Liegt  $k_x$  z. B. zwischen 3 und 5, dann sind die zwei ersten Ortsharmonischen ( $k = 1$  und  $k = 3$ ) aperiodisch, die folgenden, von  $k = 5$  an, periodisch.

Die allgemeinsten Ausdrücke für  $e_v$  und  $i_v$  sind nach dieser Erwägung:

$$e_v = -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \left. \begin{aligned} &\sum_1^{k_a} \frac{1}{n_k} \frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x) \{n'_k \text{Co}\} (n'_k t) + \alpha \text{Sin}(n'_k t) \} - \\ &-\varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_{k_p}^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x) \{n_k \cos(n_k t) + \alpha \sin(n_k t) \} \end{aligned} \right\} \tag{53}$$

Wobei:

$$k_p = k_a + 2$$

$$i_v = \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_1^{k_a} \frac{1}{n'_k} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \left\{ \begin{array}{l} [(\alpha^2 - n_k'^2) C - \alpha g] \mathfrak{S}in(n'_k t) - \\ - n'_k g \mathfrak{C}os(n'_k t) \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} + \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_{k_p}^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \left\{ \begin{array}{l} [(\alpha^2 + n_k^2) C - \alpha g] \mathfrak{S}in(n_k t) - \\ - n_k g \mathfrak{C}os(n_k t) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (54)$$

Wir wollen eine Zweidrahtkupferleitung von folgenden Dimensionen betrachten:

Drahtradius  $\varrho = 0,4$  cm; Drahtabstand  $D = 100$  cm.

1. Die Drähte seien ideal gut von Erde und voneinander isoliert, dann ist die Ableitung:

$$g = 0.$$

Es ist dann

$$r = 2 \frac{\sigma l}{q} = 2 \frac{0,017 \cdot 1000}{50} = 0,68 \, \Omega \text{ pro km}$$

$$L = 4 \cdot 10^{-4} \left( \lg \operatorname{nat} \frac{D}{\varrho} + 0,25 \right) = 23 \cdot 10^{-4} \text{ H pro km}$$

$$C = \frac{1 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^{10})^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\lg \operatorname{nat} \frac{D}{\varrho}} = 0,005 \cdot 10^{-6} \text{ F pro km}$$

somit nach (51) für diese Leitung:

$$\gamma = \frac{rC}{2\sqrt{LC}} = 5,01 \cdot 10^{-4}$$

Wir fragen: Wie lang darf diese Leitung sein, wenn auf ihr  $e_v$  und  $i_v$  nur durch periodische Funktionen dargestellt sein sollen?

Dann muß  $k_x < 1$  sein, somit nach (52)

$$\frac{2l}{\pi} \gamma < 1$$

oder

$$l < \frac{\pi}{2} \frac{1}{\gamma}; \quad l < \frac{1,57}{5,01 \cdot 10^{-4}}$$

oder

$$l < 3140 \text{ km}$$

D. h.: Eine ideal isolierte Leitung dieser Art darf nicht länger als 3140 km sein, wenn keine aperiodischen Vorgänge auftreten sollen.

2. Wir wollen nun annehmen, daß sich der Isolationswiderstand der Leitung so verschlechtert habe, daß er nur noch 10000 Ohm pro km betrage, d. h. daß

$$g = \frac{1}{10000} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ reziprok } \Omega \text{ pro km}$$

Dann wird:

$$\gamma = \frac{rC - gL}{2\sqrt{LC}} = \frac{0,34 \cdot 10^{-8} - 23 \cdot 10^{-8}}{0,678 \cdot 10^{-5}} = -334 \cdot 10^{-4}$$

Sollen also „jetzt“ aperiodische Funktionen für die Darstellung von  $e_v$  und  $i_v$  ausgeschlossen sein, so muß die Leitungslänge

$$l < \frac{\pi}{2} \frac{1}{\gamma} \quad \text{oder} \quad l < \frac{1,57}{334 \cdot 10^{-4}}$$

$$l < 47 \text{ km}$$

sein.

Hätte die Leitung ihre vorige Länge von 3140 km, so wäre nach (52)

$$k_x = 334 \cdot 10^{-4} \frac{2 \cdot 3140}{3,14} = 66,8, \quad \text{also} \quad k_a = 65, \quad k_p = 67.$$

Es wäre dann die höchste Stellzahl der aperiodischen Ortsharmonischen die Zahl 65, während die periodischen Harmonischen mit der Stellzahl 67 beginnen.  $e_v$  z. B. hätte dann für diese Leitung die Form

$$e_v = \sum_1^{65} \text{ der aperiodischen} + \sum_{67}^{\infty} \text{ der periodischen.}$$

Wäre im Falle 1 ( $g = 0$ ) die Leitung 3300 km lang, so wäre

$$k_x = 5,01 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{2 \cdot 3300}{3,14} = 1,05, \quad \text{also} \quad k_a = 1, \quad k_p = 3.$$

D. h. die Grundharmonische wäre aperiodisch und alle restlichen periodisch.

Wir sehen, daß wir, bei einem bestimmten Leitungstypus, die Aperiodizität der Harmonischen, von der Grundharmonischen angefangen, durch Verlängerung der Leitung, oder durch Vergrößerung der Ableitung  $g$  erreichen können.

Da unter den Begriff der Ableitung die Koronaerscheinungen, die Glimm- und Sprühverluste fallen, so ist ersichtlich, daß diese Erscheinungen von sehr bedeutungsvollem Einfluß auf den Verlauf der Schaltvorgänge sind.

Wir wollen den Übergang von der periodischen zur aperiodischen Form noch etwas näher betrachten. Es war  $n_k$ , die Kreisfrequenz der periodischen Funktionen [nach (48)], gegeben durch

$$n_k = \sqrt{\frac{\beta_k^2}{c} - \frac{b^2}{4c^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{\frac{4c\beta_k^2 - b^2}{4c}}$$

oder nach (29)

$$n_k = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{\frac{4cm_k^2 + 4ac - b^2}{4c}}$$

oder bei Einsatz der Werte für  $a, b, c$  [s. (23)] und mit Einführung von  $\gamma$  nach (51)

$$n_k = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{m_k^2 - \gamma^2} = m_k \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{m_k^2}}$$

und führen wir unter der Wurzel nach (35) den Wert für  $m_k$  ein, so wird

$$n_k = m_k \frac{1}{\sqrt{CL}} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{k^2 \pi^2} \cdot 4l^2} \quad (55)$$

Wir sehen, daß die Kreisfrequenz einer beliebigen Harmonischen durch wachsende Leitungslänge oder wachsendes  $\gamma^2$  verkleinert wird. Die zeitliche Schwingung wird langsamer und hört für  $n_k = 0$  oder  $m_k^2 = \gamma^2$  gänzlich auf; damit setzt der aperiodische Zustand (mit imaginärer Kreisfrequenz) ein.

Für  $n_k = 0$  wird nach (48a) auch  $n'_k = 0$ ; die Gl. (49) und (45a) bzw. (50) und (46a) werden identisch — der periodische Zustand übergeht in den aperiodischen.

Der Wert des Gliedes der Spannungsreihe, für das  $n_k = n'_k = 0$  ist, ist z. B. nach (49):

$$- \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \frac{2E}{l} \frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x) - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x) \left\{ \alpha \frac{\sin(n_k t)}{n_k} \right\}$$

Das zweite Glied enthält den Wert  $\frac{0}{0}$ ; da aber

$$\lim_{(n_k=0)} \frac{\alpha \sin(n_k t)}{n_k} = \alpha t;$$

so folgt das

$$\text{Spannungsglied (für } n_k = 0) = - \frac{2E}{l} \frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x) \varepsilon^{-\alpha t} (1 + \alpha t) \quad (56)$$

Und da

$$\lim_{n_k=0} \left| \frac{\{(n_k^2 + \alpha^2) C - \alpha g\} \sin(n_k t)}{n_k} \right| = (\alpha^2 C - \alpha g) t$$

so folgt das

$$\left. \begin{aligned} \text{Stromglied (für } n_k = 0) &= \frac{2E}{l} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \\ &\cdot \{(\alpha^2 C - \alpha g)t - g\} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Die Funktion  $\varepsilon^{-\alpha t}(1 + \alpha t)$  in (56) hat nun ihr Maximum für  $t = 0$  mit dem Betrage 1.

Die Funktion  $\varepsilon^{-\alpha t}\{(\alpha^2 C - \alpha g)t - g\}$  hat ihr Maximum für

$$t = \frac{C}{\alpha C - g}$$

im Betrage von

$$\varepsilon^{-\frac{\alpha C}{\alpha C - g}} \cdot (\alpha C - g)$$

Unser periodisches Stromglied aus (49) ist also, für  $n_k = 0$ , in das aperiodische Glied, nach (56), übergegangen, und ebenso das periodische Stromglied nach (50) in das aperiodische nach (57).

D. h. physikalisch: Die zeitliche Schwingung der Spannungsharmonischen mit dem Argument  $m_k x$  ist zum Stillstand gekommen und in eine dauernde Abnahme der Harmonischen übergegangen. — Die zeitliche Schwingung der Stromharmonischen mit dem Argument ( $m_k x$ ) ist zum Stillstand gekommen; die Harmonische erfährt noch einen Anstieg auf den Betrag

$$\frac{2E}{l} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \varepsilon^{-\frac{\alpha C}{\alpha C - g}} \cdot (\alpha C - g)$$

um, von hier an, dauernd abzunehmen.

Die sinnliche Vorstellung des Resultats der zeitlichen Schwingung der Ortsharmonischen, in bezug auf den Leitungszustand zu einer bestimmten Zeit, ist nicht gerade deutlich. Man kann auf folgendem Wege ein viel anschaulicheres Bild erhalten.

Wir setzen in (55) den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{k^2 \pi^2} 4l^2} = v_k \quad (58)$$

und schreiben daher für  $n_k$ :

$$n_k = m_k v_k \quad (59)$$

Nun schreiben wir (53) und (54) in der Form:

$$\left. \begin{aligned} e_v &= -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_1^{k_a} \frac{1}{n'_k m_k^2 + \lambda^2} m_k \sin(m_k x) \{n'_k \text{Cos}(n'_k t) + \alpha \text{Sin}(n'_k t)\} - \\ &- \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_{k_p}^{\infty} \frac{1}{n_k m_k^2 + \lambda^2} m_k \sin(m_k x) \sqrt{n_k^2 + \alpha^2} \cdot \cos(n_k t - \delta_k) \end{aligned} \right\} \quad (53a)$$

mit

$$\delta_k = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{n_k} \quad (60)$$

Wir haben damit die Summe der Kosinus- und Sinusschwingung in (53) gebildet als Kosinusschwingung mit der Amplitude  $\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}$  und der Phase  $\delta_k$ .

Es ist nun

$$\begin{aligned} \sin(m_k x) \cos(n_k t - \delta_k) &= \frac{1}{2} \sin(m_k x + n_k t - \delta_k) + \\ &+ \frac{1}{2} \sin(m_k x - n_k t + \delta_k) \end{aligned}$$

und für  $n_k$  den Wert gesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin(m_k x) \cos(n_k t - \delta_k) &= \frac{1}{2} \sin\{m_k(x + v_k t) - \delta_k\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sin\{m_k(x - v_k t) + \delta_k\} \end{aligned}$$

Dies in (53a) ergibt:

$$\left. \begin{aligned} e_v &= -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_1^{k_a} \frac{1}{n_k} \frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x) \{n'_k \mathfrak{C}o\{(n'_k t) + \alpha \mathfrak{S}in\{(n'_k t)\} - \\ &- \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_{k_p}^{\infty} \frac{m_k}{n_k} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{m_k^2 + \lambda^2} \sin\{m_k(x + v_k t) - \delta_k\} - \\ &- \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_{k_p}^{\infty} \frac{m_k}{n_k} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{m_k^2 + \lambda^2} \sin\{m_k(x - v_k t) + \delta_k\} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Setzen wir in (54)

$$\left. \begin{aligned} (\alpha^2 + n_k^2) C - \alpha g &= P_k; & n_k g &= Q_k \\ (\alpha^2 - n_k^2) C - \alpha g &= P'_k; & n'_k g &= Q'_k \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

und stellen wir wieder die Differenz der zeitlichen Sinus- und Kosinusschwingungen als „eine“ phasenverschobene Sinusschwingung dar, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} i_v &= \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_1^{k_a} \frac{1}{n'_k} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \{P'_k \mathfrak{S}in\{(n'_k t) - Q'_k \mathfrak{C}o\{(n'_k t)\} + \\ &+ \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_{k_p}^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \sqrt{P_k^2 + Q_k^2} \cdot \sin(n_k t - \xi_k) \end{aligned} \right\} \quad (54a)$$

mit

$$\xi_k = \operatorname{arctg} \frac{Q_k}{P_k} \quad (63)$$

Da nun:

$$\begin{aligned} \cos(m_k x) \sin(n_k t - \xi_k) &= \frac{1}{2} \sin(m_k x + n_k t - \xi_k) - \\ &- \frac{1}{2} \sin(m_k x - n_k t + \xi_k) \end{aligned}$$

so übergeht, bei Einführung des Wertes für  $n_k$  aus (59), die Gl. (54a) in:

$$i_v = \left. \begin{aligned} & \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_1^{k_a} \frac{1}{n'_k} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \{P'_k \mathfrak{S}in(n'_k t) - Q'_k \mathfrak{C}os(n'_k t)\} + \\ & + \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_{k_p}^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}{m_k^2 + \lambda^2} \sin\{m_k(x + v_k t) - \xi_k\} - \\ & - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_{k_p}^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}{m_k^2 + \lambda^2} \sin\{m_k(x - v_k t) + \xi_k\} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

In den Gl. (61) und (64) finden wir nun Funktionen von der allgemeinen Form

$$F_k \sin\{m_k(x \pm v_k t) \mp \varphi_k\} \quad (65)$$

die folgende einfache Deutung zulassen.

Zunächst sehen wir, daß die Größe  $v_k t$  algebraisch zu einer Länge  $x$  addiert ist. Es muß daher auch  $v_k t$  die Dimension einer Länge, und daher  $v_k$  die Dimension und Bedeutung einer Geschwindigkeit haben.

Der Funktionswert

$$F_k \sin\{m_k(x + v_k t) - \varphi_k\} \quad (65a)$$

bleibt unverändert, wenn sich bei einer Änderung von  $t$  um  $\Delta t$  das  $x$  um den Betrag  $-v_k \Delta t$  ändert. Zur Zeit  $t = 0$  ist der Funktionswert gegeben durch

$$F_k \sin\{m_k x - \varphi_k\}; \quad (65b)$$

denselben Wert hat die Funktion nach der Zeit  $t$ , wenn  $x$  um den Betrag  $v_k t$  abgenommen hat. Wir sehen also, daß, mit wachsender Zeit, der Funktionswert sich mit der Geschwindigkeit  $v_k$  in Richtung der abnehmenden  $x$  über die Leitung bewegt und wir deuten daher die Funktion nach (65a), als die Ortsharmonische nach (65b), die, vom Moment  $t = 0$  an, mit der Geschwindigkeit  $v_k$ , in Richtung der abnehmenden  $x$ , in unveränderter Form, über die Leitung wandert.

Auf Grund einer ganz analogen Erwägung deuten wir den Funktionswert

$$F_k \sin\{m_k(x - v_k t) + \varphi_k\}$$

als die Ortsharmonische

$$F_k \sin(m_k x + \varphi_k)$$

die, vom Moment  $t = 0$  an, mit der Geschwindigkeit  $v_k$ , in Richtung der zunehmenden  $x$ , in unveränderter Form, über die Leitung wandert.

Damit haben wir in den Gl. (61) und (64) eine leicht faßliche Darstellung des veränderlichen Zustandes von Spannung und Strom gefunden.

Wir sehen, diese Zustände bestehen im allgemeinsten Falle aus der Summe einer endlichen Reihe (1 bis  $k_a$ ) von stillstehenden, gedämpften Harmonischen und der Summe zweier unendlichen Reihen ( $k_p$  bis  $\infty$ ) von wandernden, gedämpften Harmonischen, wobei die Harmonischen der einen unendlichen Reihe in Richtung der abnehmenden, die Harmonischen der anderen unendlichen Reihe in Richtung der zunehmenden  $x$  wandern.

Es ist nun nicht schwierig, wenn auch sehr mühsam, die Gl. (61) und (64) graphisch für jeden beliebigen Zeitmoment darzustellen und dann mit Hilfe von den bekannten Beharrungszuständen  $e_b$  und  $i_b$  [s. (20)] den tatsächlichen Spannungs- und Stromzustand nach (9) und (10) zu erhalten.

Wir können ja die Amplituden und Phasen der sämtlichen Ortsharmonischen berechnen und müssen nun die „wandernden“ Harmonischen, um den, dem Zeitmoment  $t$  entsprechenden Betrag  $v_k t$  nach rechts oder links verschoben, einzeichnen. Hierbei ist wohl zu beachten, daß die Wanderungsgeschwindigkeiten  $v_k$  der einzelnen Harmonischen voneinander verschieden sind [s. Gl. (58)]. Die Genauigkeit dieser Darstellung hängt natürlich nur von der Wahl der Anzahl der wandernden Harmonischen ab. Wir werden auf diese Darstellung zurückkommen.

Es gibt nun aber einen — im übrigen, „praktisch“ oft realisierten — Fall, in welchem sich die Darstellung mit großer Annäherung an die Wahrheit ganz außerordentlich einfach gestaltet. Das geschieht dann, wenn die Größe  $\frac{\alpha}{n_k}$  gegenüber 1 zu vernachlässigen ist.

### Angenäherte vereinfachte Darstellung.

Wir setzen eine Leitung von ideal guter Isolation voraus, also mit einer Ableitung

$$g = 0$$

Dann ist zunächst nach (30)

$$\alpha = \frac{b}{2c} = \frac{rC}{2LC} = \frac{r}{2L} \quad (66)$$

Und nun wollen wir annehmen

$$\frac{\alpha}{n_k} \cong 0,01$$

d. h. daß in Gl. (49) die Sinusschwingung gegenüber der Kosinusschwingung belanglos wird, oder daß wir in (60) den Bogen  $\delta_k$

$$\delta_k \sim 0$$

setzen dürfen. Wir können leicht die Leitungslänge berechnen, für die diese Annahme zulässig ist. Aus (55) war

$$n_k = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{m_k^2 - \gamma^2}$$

somit nach (66)

$$\frac{\alpha}{n_k} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{\sqrt{m_k^2 - \gamma^2}} \leq 0,01$$

und hieraus mit Rücksicht auf den Wert von  $\gamma$  nach (51)

$$\gamma = \frac{rC}{2\sqrt{LC}};$$

$$m_k^2 \geq \frac{r^2 C}{4 L} (10^4 + 1) \approx 10^4 \frac{r^2 C}{4 L}$$

und für  $m_k$  den Wert  $k \frac{\pi}{2} \frac{1}{l}$  gesetzt, ergibt

$$l \leq \frac{\pi}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} 10^{-2} \cdot k \tag{67a}$$

Da diese Bedingung für alle  $k$ , also auch für  $k = 1$  gelten soll, folgt

$$l \leq \frac{\pi}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} 10^{-2} \tag{67}$$

Für unsere oben erwähnte Freileitung wäre

$$l \leq \frac{3,14}{0,68} \sqrt{\frac{23,10^{-4}}{0,005 \cdot 10^{-6}}} \cdot 10^{-2} \sim 31 \text{ km}$$

Für ein unterirdisches Kabel, mit viel größerer Kapazität und geringerer Selbstinduktion, wäre diese Länge viel kleiner. Immerhin sind es noch

recht ansehnliche Längen, welche die Annahme  $\frac{\alpha}{n_k} \sim 0$  rechtfertigen.

Ist nun  $\frac{\alpha}{n_k}$  gegenüber 1 zu vernachlässigen, dann ist, mit um so größerer Berechtigung,  $\frac{\gamma^2}{m_k^2}$  gegenüber 1 zu vernachlässigen; denn es ist

$$\frac{\gamma^2}{m_k^2} = \frac{r^2 C}{4 L} \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} \cdot k^2} \gamma^2$$

also, mit Einführung des Wertes aus (67a) für  $l$ ,

$$\frac{\gamma^2}{m_k^2} \leq 10^{-4}$$

Dann aber folgt aus (58), daß die Wanderungsgeschwindigkeiten  $v_k$  der sämtlichen wandernden Harmonischen untereinander gleich werden und die Größe erhalten:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ km} \quad (68)$$

wenn  $L$  und  $C$  pro Kilometer ausgedrückt sind.

Das ist eine Größe, die – bei Freileitungen – der Lichtgeschwindigkeit sehr nahe kommt. Z. B. für die eben erwähnte Leitung wäre

$$v = \frac{1}{\sqrt{23 \cdot 10^{-4} \cdot 0,005 \cdot 10^{-6}}} = 295\,000 \text{ km.}$$

Für unterirdische Kabel ist  $v$  etwa die Hälfte.

Ferner folgt aus (55), daß jetzt  $n_k$  für alle Werte von  $k$  reell ist, daß somit der veränderliche Zustand nur durch periodische Vorgänge dargestellt ist, oder daß sämtliche Ortsharmonische wandern.

Endlich folgt, wegen  $g = 0$ , aus (62) und (63)

$$\zeta_k = 0$$

Es ergeben sich somit für Leitungen, deren Länge durch (67) gegeben ist und die keine Ableitung haben,  $e_v$  und  $i_v$  in der Form [nach (61)]

$$\left. \begin{aligned} e_v &= -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin \{m_k(x + vt)\} - \\ &\quad - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin \{m_k(x - vt)\} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

denn es verschwindet  $\alpha^2$  gegenüber  $n_k^2$  und  $\lambda = \sqrt{rg} = 0$ , und nach (64)

$$\left. \begin{aligned} i_v &= \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{P_k}{m_k^2} \sin \{m_k(x + vt)\} - \\ &\quad - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{P_k}{m_k^2} \sin \{m_k(x - vt)\} \end{aligned} \right\}$$

Nun ist nach (62)

$$P_k \approx n_k^2 C$$

also

$$\frac{1}{n_k} \frac{P_k}{m_k^2} = \frac{n_k C}{m_k^2} = \frac{m_k v \cdot C}{m_k^2} = \frac{1}{m_k} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

und daher:

$$\left. \begin{aligned} i_v &= \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin \{m_k(x + vt)\} - \\ &\quad - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin \{m_k(x - vt)\} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Wir finden den veränderlichen Zustand der Spannung dargestellt durch die Summe von zwei unendlichen Reihen von Ortsharmonischen, den veränderlichen Zustand des Stromes durch die Differenz von zwei unendlichen Reihen von Ortsharmonischen. Die Amplituden der Strom- und Spannungsharmonischen unterscheiden sich nur durch den Faktor  $\sqrt{\frac{C}{L}}$  voneinander. Die Harmonischen der ersten Spannungsreihe wandern vom Zeitmoment  $t = 0$  an mit der Geschwindigkeit  $v$  nach links; sehen wir von der Dämpfung ( $\varepsilon^{-\alpha t}$ ) ab, so kann also die Summe dieser Harmonischen ihre Form, die sie zur Zeit  $t = 0$  hatte, nicht ändern. Dasselbe gilt für die Summe der mit der Geschwindigkeit  $v$  nach rechts wandernden Harmonischen der zweiten Spannungsreihe.

Die Form aber, welche die Summe jeder Spannungsreihe zur Zeit  $t = 0$  hat, ist leicht anzugeben. Wir denken nur an die Beziehung

$$e = e_b + e_v \tag{71}$$

d. h.: Der Spannungszustand  $e$  auf der Leitung ist zu jeder Zeit gleich dem zu erwartenden Beharrungszustand  $e_b$  plus dem zu dieser Zeit herrschenden, veränderlichen Zustand  $e_v$ .

Für unseren Fall ( $g = 0$ ) ist auf der ganzen Leitung

$$e_b = E.$$

Zur Zeit  $t = 0$  ist die Spannung auf der ganzen Leitung Null; ausgenommen den Punkt  $x = 0$ , wo sie ja auf den Wert  $E$  gebracht wird. Es gilt also für die ganze Leitung nach (71)

$$0 = E + e_{v(t=0)}$$

oder

$$e_{v(t=0)} = -E \tag{72}$$

$e_{v(t=0)}$  ist aber aus (69) gegeben durch:

$$e_{v(t=0)} = -\frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin(m_k x) - \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin(m_k x) \tag{73}$$

Wir sehen: Die beiden unendlichen Reihen haben untereinander vollkommen gleiche Form und Größe und stehen zur Zeit  $t = 0$  an derselben Stelle der Leitung; da sich nach (72) die Summen der beiden Reihen zum negativen Beharrungszustand ( $-E$ ) ergänzen, so ergibt sich der Wert jeder der beiden Reihen, auf der ganzen Leitung, mit  $-\frac{E}{2}$ .

Stellen wir den Spannungszustand auf der Leitung, für  $t = 0$ , graphisch dar, so ergibt sich Abb. 51.

Mit dem Beharrungszustand,  $e_b = E$ , ergänzen sich die Werte der beiden Summen, von je  $-\frac{E}{2}$ , zu Null, dem wahren Spannungszustand auf der Leitung.

Abb. 51.

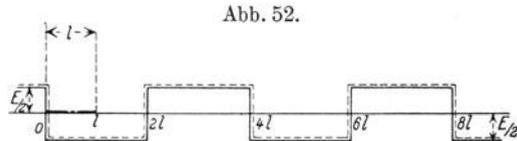
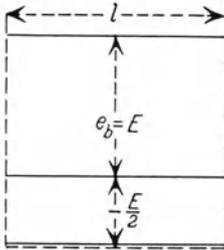


Abb. 52.

Damit haben wir die Größe der veränderlichen Zustände auf der Leitung gewonnen.

Bedenkt man nun, daß die Funktionen

$$\sin(m_k x) = \sin\left(k \frac{\pi}{2} \frac{1}{l} x\right)$$

im Bereiche 0 bis  $2l$  zur Abszisse  $x = l$  symmetrisch sind, denn:

$$\sin\left(k \frac{\pi}{2} \frac{l+a}{l}\right)_{a=0}^{a=l} = \sin\left(k \frac{\pi}{2} \frac{l-a}{l}\right)_{a=0}^{a=l}$$

und daß die Funktionswerte im Bereiche  $2l$  bis  $4l$ , jenen im Bereiche 0 bis  $2l$  gleich, aber entgegengesetzt sind, denn:

$$\sin\left(k \frac{\pi}{2} \frac{2l+a}{l}\right)_{a=0}^{a=2l} = -\sin\left(k \frac{\pi}{2} \frac{2l-a}{l}\right)_{a=0}^{a=2l}$$

so ergeben sich die geometrischen Formen der beiden Reihen nach Abb. 52. Wir sehen also, daß die Summe der, in einer Richtung, wandernden Ortsharmonischen, der sogenannten Wanderwellen, in unserem Falle eine Welle von Rechtecksform ergibt, deren Höhe  $\frac{E}{2}$  ist.

Abb. 52 zeigt die Stellung der beiden resultierenden Wellen (die eine voll ausgezogen, die andere gestrichelt) im Moment  $t = 0$ , wo sie einander decken. Mit  $t = 0$  beginnt die eine nach rechts, die andere nach links mit der Geschwindigkeit  $v$  zu wandern, wobei ihre Höhe durch die Dämpfung ( $\epsilon^{-\alpha t}$ ) abnimmt.

Die Wellenlänge  $\lambda_k$  einer Ortsharmonischen ergibt sich aus

$$\sin(m_k x) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} x\right)$$

mit

$$\lambda_k = \frac{2\pi}{m_k} = \frac{2\pi}{k \frac{\pi}{2} \frac{1}{l}} = \frac{4l}{k} \quad (74)$$

also die Wellenlänge der Grundharmonischen und damit der Rechteckswelle

$$\lambda = 4l \quad (74a)$$

Übergehen wir wieder von der Vorstellung der wandernden Ortsharmonischen zu der Vorstellung der zeitlich schwingenden und nennen wir  $T$  die Schwingungsdauer der Grundharmonischen, so ist nach

$$\lambda = vT = 4l; \quad T = \frac{4l}{v} = 4l\sqrt{LC} \quad (75)$$

Das ist eine Größe, die wir als Eigenschwingungsdauer einer offenen Leitung mit gleichmäßig verteilter Kapazität und Selbstinduktion bezeichnen können. Nennen wir  $C_1$  die gesamte Kapazität, so ist diese  $lC$ , und die gesamte Selbstinduktion  $L_1 = lL$ ; oder

$$T = 4\sqrt{Ll \cdot Cl} = 4\sqrt{L_1 \cdot C_1}$$

Hätten wir dieselbe Kapazität  $C_1$  und Selbstinduktion  $L_1$  in einem Schwingungskreis örtlich konzentriert, so wäre die Eigenschwingungsdauer nach V, (23)

$$T' = 2\pi\sqrt{L_1 C_1}$$

oder

$$T = \frac{2}{\pi} T'$$

Die gleichmäßige Verteilung von  $C$  und  $L$  im Schwingungskreis setzt also die Schwingungsdauer im Verhältnis  $\frac{2}{\pi}$  herab.

Die Kreisfrequenzen  $n_k$  der einzelnen Harmonischen verhalten sich nach (55)

$$\frac{n_{k_k}}{n_{k_1}} = \frac{m_{k_k}}{m_{k_1}} \frac{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{m_{k_k}^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{m_{k_1}^2}}} = \frac{k}{1} \frac{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{m_{k_k}^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{m_{k_1}^2}}}$$

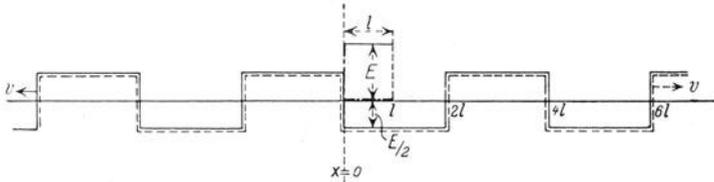
also nur in unserem Spezialfall  $\left(\frac{\gamma^2}{m_k^2} \sim 0\right)$  wie die ungeraden Zahlen.

Die Wellenlängen  $\lambda_k$  stehen nach (74) im umgekehrten Verhältnis der ungeraden Zahlen.

Wir wollen nun den Spannungszustand auf der Leitung vom Moment  $t = 0$  an, bis zum Ablauf einer Schwingungsdauer  $T$ , in Zeitintervallen von  $T/8$  Sekunden darstellen.

1.  $t = 0$ .

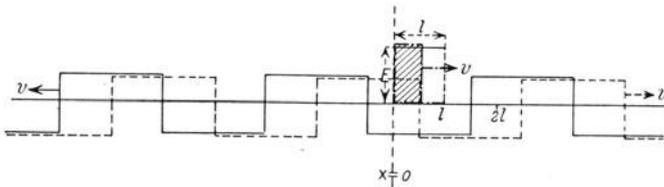
Abb. 53 a.



Der Beharrungszustand  $E$  steht über der Leitung; die beiden, sich deckenden, Rechteckswellen von der Höhe  $-\frac{E}{2}$  ergeben, zu ihm addiert, Null. Die strichpunktierte Linie gibt den resultierenden Spannungszustand auf der Leitung, d. i. Null.

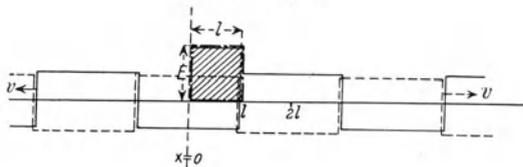
2.  $t = T/8$ .

Abb. 53 b.



Der Beharrungszustand steht wie vorhin über der Leitung. Jede Rechteckswelle durchläuft in  $T$  Sekunden die Wellenlänge  $4l$ , also in  $T/8$  Sekunden die Länge  $l/2$ ; die beiden Rechteckswellen sind daher — die eine nach rechts, die andere nach links — um  $l/2$  verschoben,

Abb. 53 c.



ingezeichnet. Resultat: In der ersten Leitungshälfte heben sich die beiden Wanderwellen auf, und der Beharrungszustand  $E$  ergibt hier die Gesamtspannung; in der zweiten Leitungshälfte summieren sich die

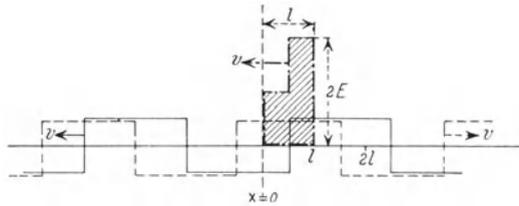
beiden Wanderwellen zu  $-E$  und ergeben mit dem Beharrungszustand  $E$  die Spannung Null. Der Spannungszustand ist mit senkrechter Front oder Stirn vom Anfang bis zur Leitungshälfte geschritten.

3.  $t = \frac{3}{8} T$ . (Abb. 53 c.)

Jede der Rechteckswellen ist um  $l/2$  weitergewandert. Resultat: Auf der ganzen Leitung herrscht die Spannung  $E$ .

4.  $t = \frac{3}{8} T$ .

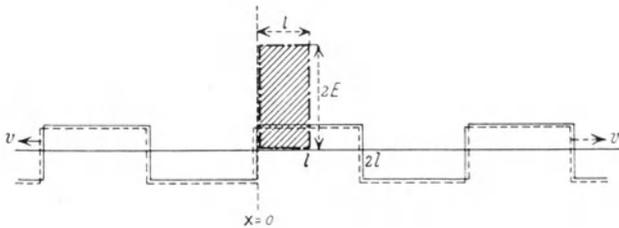
Abb. 53 d.



Die Rechteckswellen sind wieder um  $l/2$  weitergewandert. Auf der rechten Leitungshälfte summieren sie sich jetzt mit dem Beharrungszustand zur Spannung  $2E$ , die gegen den Anfang weiterschreitet.

5.  $t = \frac{4}{8} T$ .

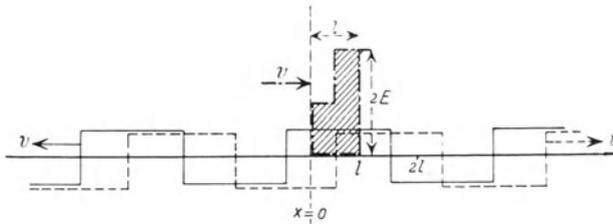
Abb. 53 e.



Die doppelte Spannung steht auf der ganzen Leitung.

6.  $t = \frac{5}{8} T$ .

Abb. 53 f.



Die linke Leitungshälfte ist auf einfache Spannung gekommen.

7.  $t = \frac{6}{8} T$ . (Abb. 53 g.)

Die ganze Leitung steht unter einfacher Spannung.

8.  $t = \frac{7}{8} T$ . (Abb. 53 h.)

Die rechte Leitungshälfte ist entladen.

9.  $t = T$ . (Abb. 53 i.)

Die ganze Leitung ist entladen; der Zustand bei  $t = 0$  ist wieder erreicht.

Abb. 53 g.

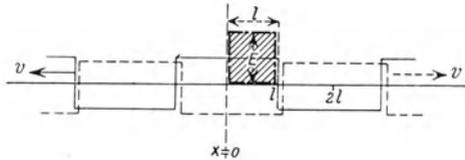


Abb. 53 h.

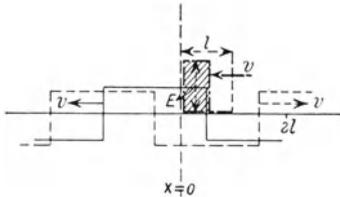
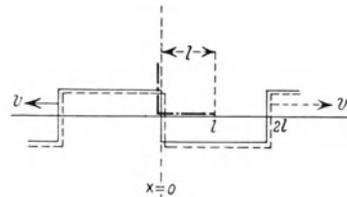


Abb. 53 i.



Die Darstellung ist — wie ersichtlich — ohne Berücksichtigung der Dämpfung geschehen, d. h. die Leitung ist auch als widerstandslos angesehen.

Berücksichtigt man die Dämpfung, so hat, nach  $T$  Sekunden, jede Rechteckswelle eine Höhe von

$$\frac{E}{2} \varepsilon^{-\alpha T}$$

somit die Summe der Rechteckswellen den Wert  $E\varepsilon^{-\alpha T}$ , und es ist daher der tatsächliche Spannungszustand auf der Leitung nach  $T$  Sekunden

$$e_T = E - E\varepsilon^{-\alpha T} = E(1 - \varepsilon^{-\alpha T})$$

somit nach  $n$  Schwingungen

$$e_n T = E(1 - \varepsilon^{-\alpha n T})$$

Wenn wir festsetzen, daß die Wanderwellen „praktisch“ ihre Bedeutung verloren haben, wenn sie nur noch 5 Proz. ihres ursprünglichen Wertes haben, so gestattet uns die Gleichung:

$$\varepsilon^{-\alpha T n} = 0,05$$

die Größe  $n T$  — die zu dieser Dämpfung nötige Zeit — zu berechnen.

Es ist

$$-\alpha n T = \ln 0,05 = -3$$

und daher

$$n T = \frac{1}{\alpha} 3 \text{ sec.}$$

Nach Ablauf dieser Zeit hat die Spannung „praktisch“ ihren Beharrungszustand auf der ganzen Leitung erreicht.

Es ist klar, daß unsere Darstellungsweise „mathematisch“ einwandfrei ist, es ist aber auch einleuchtend, daß sie sich durchaus nicht auf „physikalische Realität“ stützt. Wir verzeichnen sowohl den Beharrungszustand, als auch die Wanderwellen auf der Leitung bereits zu einer Zeit, zu der es überhaupt noch keine elektrische Störung auf der Leitung gibt, und wir lassen die Wanderwellen sich vor und hinter der Leitung ins Unendliche erstrecken. All dies ist keine physikalische Realität, und wir wollen uns dessen bewußt bleiben. Trotzdem führt die Darstellung zu einem physikalisch richtigen Resultat, das durch die Erfahrung bestätigt wird, und ist daher ein Beweis für die Leistungsfähigkeit der Mathematik in der Naturwissenschaft.

Unser Resultat, d. i. die Art des Vordringens der Gesamtspannung auf der Leitung — ausgedrückt durch die schraffierten Flächen in Fig. 53 — ist physikalische Realität, und wir können nun an Hand der Figur das Gesetz für die Spannungsausbreitung aussprechen:

Mit Schalterschluß ( $t = 0$ ) schreitet eine Spannungs-Woge — ich vermeide das übliche Wort „Welle“, da es zu mißverständlicher Auffassung bezüglich der Form führen kann — von der Höhe  $E$  der Stromquelle mit senkrechter Wogenstirn und der Geschwindigkeit  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$  gegen das offene Ende; hier angekommen, wird sie mit Zeichenfolge reflektiert, läuft gegen die Stromquelle zurück und erhöht hierbei die Spannung auf den Wert  $2E$ . Diese rücklaufende Woge von der Höhe  $+E$  wird an der Stromquelle, die ja dauernd auf dem Spannungswert  $E$  gehalten wird, mit Zeichenwechsel reflektiert, läuft daher mit dem Werte  $-E$  wieder nach vorn und entladet hierbei die Leitung auf den Wert  $+E$ ; die negative Woge,  $-E$ , wird am offenen Ende abermals mit Zeichenfolge reflektiert, läuft also als  $-E$  gegen die Stromquelle zurück und entladet hierbei die Leitung auf die Spannung Null, worauf sich das Spiel wiederholt und — ohne Dämpfung — in infinitum weiterginge.

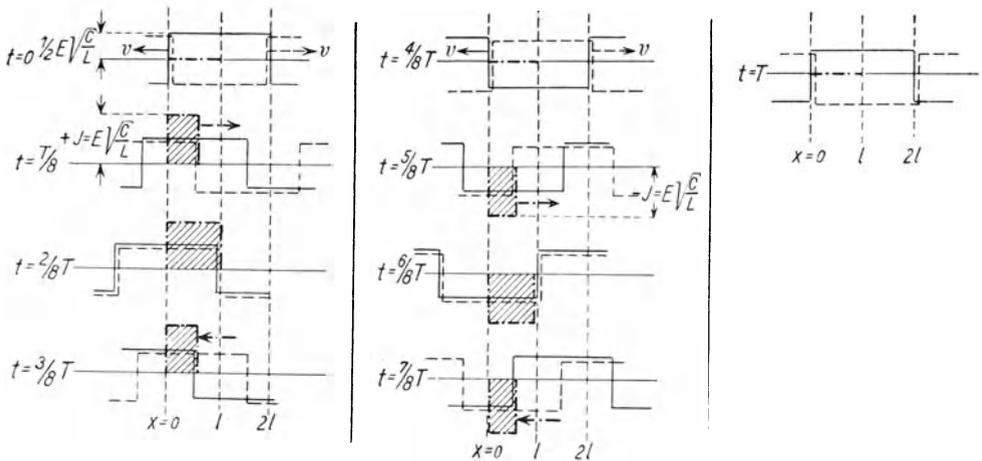
Nun ist es leicht, den Verlauf der Stromstärke anzugeben.

Zur Zeit  $t = 0$  ist die Stromstärke  $i$  auf der Leitung Null. Der Beharrungszustand  $i_b$  ist aber für  $g = 0$  auf der ganzen Leitung Null [s. Gl. (20)]. Es ist somit für  $t = 0$ , nach (10),

$$i_v = 0$$

In  $i_v$  erkennen wir aber jetzt [nach (70) bzw. (73)] zwei Rechteckswellen von der Höhe  $\frac{E}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ , die im Augenblick  $t = 0$  einander vernichten. Die, auf der Leitung, positive dieser Wellen wandert mit der Geschwindigkeit  $v$  gegen die Stromquelle, die negative mit derselben

Abb. 54.



Geschwindigkeit gegen das offene Ende. Die algebraische Summe beider Wellen ergibt an jedem Orte den Wert des Gesamtstromes  $i$ . Abb. 54 zeigt den Verlauf.

Wir sehen, mit Schalterschluss, eine positive, nach vorwärts gerichtete Stromwoge von der Höhe  $E \sqrt{\frac{C}{L}}$  in die Leitung eintreten, die nach einer Viertelperiode ( $\frac{2}{8} T$ ) auf der ganzen Leitung herrscht; sie entspricht der vorwärts laufenden positiven Spannungswoge  $E$ . Am offenen Ende angekommen, wird sie mit Zeichenwechsel reflektiert, läuft daher als negative Woge zum Leitungsanfang zurück und macht die Leitung stromlos. Diese negative Stromwoge entspricht der positiven, aber nach rückwärts laufenden Spannungswoge. Sie kommt an der Stromquelle an, wird hier mit Zeichenfolge reflektiert und läuft wieder als negative Woge nach vorwärts; sie entspricht

in diesem Stadium ( $\frac{4}{8} \div \frac{6}{8} T$ ) der nach vorwärts laufenden negativen Spannungswohle. Am offenen Ende wird sie mit Zeichenwechsel reflektiert, läuft also als positive Wohle zur Stromquelle zurück und macht die Leitung stromlos; sie entspricht in diesem Stadium ( $\frac{6}{8} T \div T$ ) der gleichzeitig nach rückwärts laufenden negativen Spannungswohle. Und nun wiederholt sich das Spiel.

Wir nehmen hieraus zur Kenntnis, daß einer vorwärts schreitenden, positiven oder negativen Spannungswohle stets eine Stromwohle gleichen Vorzeichens entspricht; einer rückwärts schreitenden Spannungswohle stets eine Stromwohle entgegengesetzten Vorzeichens.

In energetischer Hinsicht liefern die Abb. 53 und 54 folgende Schlüsse:

Nach Ablauf der ersten Viertelperiode ist im elektrischen Felde der Leitung ein Energiebetrag

$$A_e = \frac{1}{2} E^2 l C$$

aufgespeichert, und im magnetischen Felde der gleich große Betrag

$$A_m = \frac{1}{2} J^2 l L$$

denn:

$$J = E \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Beide Beträge entstammen der Stromquelle.

In der zweiten Viertelperiode verschwindet der Strom,  $A_m$  wird Null, hingegen verdoppelt sich die Spannung, oder  $A_e$  erreicht den vierfachen Betrag. Ein Drittel dieses Zuwachses von  $3 A_e$  rührt von dem verschwundenen  $A_m$  her, das sich in  $1 A_e$  umgewandelt hat, die restlichen zwei Drittel liefert die Stromquelle. Die Leitung hat also in der ersten Halbperiode Energie von der Stromquelle aufgenommen, und zwar blieb deren Leistung konstant. In der dritten Viertelperiode fällt die Energie im elektrischen Felde von  $4 A_e$  auf  $1 A_e$ , und es wächst die Energie im magnetischen Felde von Null auf  $A_m = A_e$ ; es ist also der Betrag von  $2 A_e$  von der Leitung an die Stromquelle zurückerstattet worden. Während der letzten Viertelperiode verschwindet die Energie des magnetischen und des elektrischen Feldes gänzlich, und es wird daher abermals der Betrag  $2 A_e$  an die Stromquelle abgegeben. Die Energie pendelt also zwischen Stromquelle und Leitung.

Unsere Darstellung — für kürzere Leitungen, mit  $g = 0$  — hat uns gezeigt, daß die Spannung mit steiler, sogar senkrechter Stirn in die

Leitung eintritt. Die Folge hiervon ist, daß zwei sehr nahe aneinanderliegende Punkte der Leitung eine große Spannungsdifferenz haben; z. B. die Punkte *a* und *b* in Abb. 55. Entsprechen nun diese Punkte zwei räumlich nahe aneinanderliegenden Teilen einer Maschinen- oder Transformatorwicklung (s. Abb. 56), so kann die große Spannungsdifferenz zu einem Wicklungsdurchschlag führen.

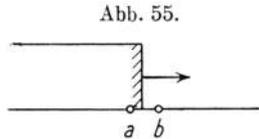
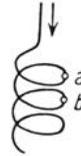


Abb. 56.



Die senkrechte Stirn bedeutet also eine Betriebsgefahr, und die Bestrebungen der technischen Praxis sind daher darauf gerichtet, diese Stirn abzuflachen.

#### Beispiele für die exakte Darstellung.

Wir kehren nun zu unseren Gl. (61) und (64) zurück, die uns die exakte Darstellung des Ladevorgangs auf einer beliebig langen Leitung mit beliebig starker Ableitung gestatten und wollen einige Beispiele anführen, wo die vereinfachte Darstellung nicht mehr zulässig ist.

1. Wir setzen denselben Leitungstypus voraus, den wir soeben benutzt haben, also:

$$r = 0,68^{\Omega}, \quad L = 23 \cdot 10^{-4} H, \quad C = 0,005 \cdot 10^{-6} F$$

und zunächst:

$$\underline{g = 0!}$$

geben aber der Leitung eine Länge von

$$l = 3130 \text{ km}$$

Dann ist wie früher:  $\gamma = \frac{rC}{2\sqrt{LC}} = 5,01 \cdot 10^{-4}$ , somit nach (52)

$$k_x = \gamma \frac{2l}{\pi} = 5,01 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{6260}{3,14} = 0,997$$

Da also

$$k_x < 1$$

ist, sind sämtliche Harmonische noch periodisch, und es sind  $e_v$  und  $i_v$  dargestellt durch die Gleichungen (wegen  $\lambda = \sqrt{rg} = 0$ ):

$$e_v = \left. \begin{aligned} & - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{m_k}{n_k} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{m_k^2} \cdot \sin \{m_k(x + v_k t) - \delta_k\} - \\ & - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{m_k}{n_k} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{m_k^2} \cdot \sin \{m_k(x - v_k t) + \delta_k\} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

$$i_v = \left. \begin{aligned} & \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\alpha^2 + n_k^2}{m_k^2} C \cdot \sin \{m_k(x + v_k t)\} - \\ & - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\alpha^2 + n_k^2}{m_k^2} C \sin \{m_k(x - v_k t)\} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Die Phasen

$$\delta_k = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{n_k}$$

sind aber jetzt durchaus nicht zu vernachlässigen. Es ist nach (55)

$$n_k = \frac{m_k}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{k^2 \pi^2} 4l^2}$$

eine Größe, die für die Grundharmonische ( $k = 1$ ) den Wert hat:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\pi \cdot 1}{2 \cdot l} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\pi^2} 4l^2} = \frac{295000 \cdot 1,57}{3130} \sqrt{1 - \frac{25,1 \cdot 10^{-8}}{9,86} \cdot 4 \cdot 3130^2} = \\ &= 148 \sqrt{1 - 0,9975} = 7,40 \end{aligned}$$

für die nächste Harmonische ( $k = 3$ ) den Wert

$$n_3 = 3 \cdot 148 \sqrt{1 - \frac{0,9975}{3^2}} = 421,5$$

$$n_5 = 5 \cdot 148 \sqrt{1 - \frac{0,9975}{5^2}} = 730,1 \quad \text{usw.}$$

Man sieht hier deutlich, daß hier die Kreisfrequenzen, speziell der niederen Harmonischen, nicht im Verhältnis der ungeraden Zahlen stehen.

Es ist aber:

$$\alpha = \frac{rC}{2LC} = \frac{r}{2L} = 147,8$$

Somit ist:

$$\delta_1 = \operatorname{arctg} \frac{147,8}{7,40} = 87^\circ 7'$$

$$\delta_3 = \operatorname{arctg} \frac{147,8}{421,5} = 19^\circ 21'$$

$$\delta_5 = \operatorname{arctg} \frac{147,8}{730,1} = 11^\circ 26' \quad \text{usw.}$$

Die Phasenwinkel  $\delta_k$  dürfen also — wenigstens für die niederen Harmonischen — nicht vernachlässigt werden.

Aus (58) ergeben sich ferner die Wanderungsgeschwindigkeiten der einzelnen Harmonischen mit:

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \frac{\gamma^2}{\pi^2}} 4l^2 = 295\,000 \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} 0,9975 \text{ km}$$

d. h. für die Grundharmonische:

$$\begin{aligned} k = 1 & \dots \dots \dots v_1 = 14\,750 \text{ km} \\ \text{Für } k = 3 & \dots \dots \dots v_3 = 278\,200 \text{ „} \\ \text{Für } k = 5 & \dots \dots \dots v_5 = 289\,100 \text{ „} \end{aligned}$$

also voneinander stark abweichend.

Die Bedingungen für die vereinfachte Darstellung sind hier nicht erfüllt, und wir müssen die einzelnen Harmonischen zeichnen.

Nach (76) ist die ungedämpfte Amplitude der  $k$ -ten Spannungsharmonischen gegeben durch:

$$A_k = \frac{E}{l} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{n_k m_k}$$

wobei

$$m_k = k \frac{\pi}{2} \frac{1}{l}$$

oder

$$A_k = \frac{2E}{\pi} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{k \cdot n_k}$$

Somit:

$$A_1 = \frac{2E}{\pi} \frac{\sqrt{7,40^2 + 147,8^2}}{7,40} = 12,7 E$$

ihre Phase:

$$\delta_1 = 87^\circ 7'$$

Daher die Gleichung der linksläufigen Grundharmonischen zur Zeit  $t = 0$

$$e_{v_1(l)} = -12,7 E \sin(m_1 x - 87^\circ 7')$$

Die Gleichung der rechtsläufigen Grundharmonischen für  $t = 0$

$$e_{v_1(r)} = -12,7 E \sin(m_1 x + 87^\circ 7')$$

Für  $x = 0$  ist somit:

$$e_{v_1(l)} = 12,7 E \sin 87^\circ 7', \quad e_{v_1(r)} = -12,7 E \sin 87^\circ 7'$$

Die Wellenlänge der Grundharmonischen ist  $4l$ , somit entspricht die einfache Leitungslänge  $l$  dem Bogen  $\frac{\pi}{2}$ .

Ebenso ergibt sich:

$$A_3 = \frac{2E}{\pi} \frac{\sqrt{n_3^2 + \alpha^2}}{3n_3} = \frac{2E}{3,14} \frac{\sqrt{421,5^2 + 147,8^2}}{3 \cdot 421,5} = 0,226 E$$

und somit die Gleichung der linksläufigen dritten Harmonischen für  $t = 0$ :

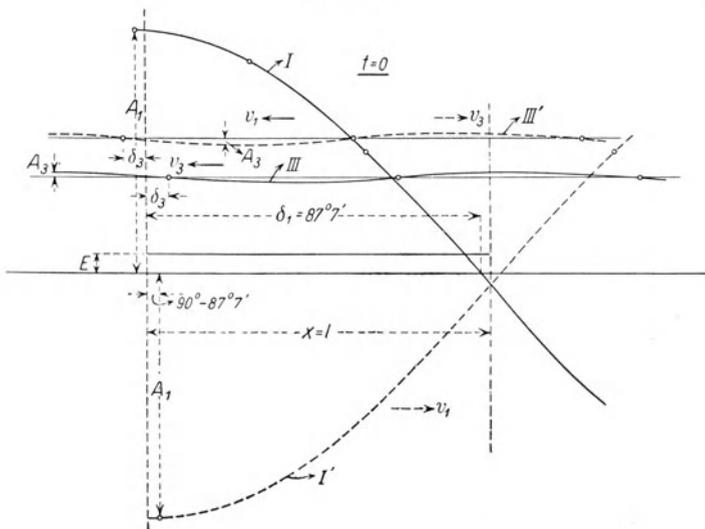
$$e_{v_3(l)} = -0,226 E \sin(m_3 x - 19^\circ 21')$$

die der rechtsläufigen dritten Harmonischen für  $t = 0$ :

$$e_{v_3(r)} = -0,226 E \sin(m_3 x + 19^\circ 21')$$

Bei dieser Harmonischen entspricht  $\frac{l}{3}$  dem Bogen  $\frac{\pi}{2}$ . In Abb. 57 sind der Beharrungszustand und die vier eben berechneten Wanderwellen

Abb. 57.



gezeichnet, wie sie zur Zeit  $t = 0$  auf der Leitung stehen und in diesem Moment mit ihren verschiedenen Geschwindigkeiten  $v_k$  nach rechts und links zu wandern beginnen.

Je größer die Anzahl der gewählten Harmonischen, desto genauer wird die Darstellung des Einschaltvorganges. Ob man genügend viele Harmonische für die Darstellung gewählt hat, erkennt man leicht daran, daß, zur Zeit  $t = 0$ , die algebraische Summe der sämtlichen Harmonischen und des Beharrungszustandes, auf der ganzen Leitung — ausgenommen  $x = 0$  —, den Spannungszustand Null ergeben muß. Dies ist natürlich nicht zu erreichen, da man eben unendlich viele Harmonische verwenden

müßte, aber man erhält durch Verwendung der ersten fünf bis sechs Harmonischen doch wengigstens ein „qualitativ“ aufklärendes Resultat. Dies ist in Abb. 58 geschehen, wo die ersten sechs Harmonischen benutzt wurden.

In dieser Abbildung sind Momente der Ladung dargestellt, die durch Zeitintervalle getrennt sind, in denen die höchsten Harmonischen, also die Harmonischen höchster Wandergeschwindigkeit, die halbe Leitungslänge zurücklegen.

Diese Geschwindigkeit ist:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 295\,000 \text{ km}$$

Diese Strecke (295 000 km) wird in einer Sekunde durchlaufen, somit wird die vierfache Leitungslänge  $4l = 4 \cdot 3130 = 12\,520 \text{ km}$  in der Zeit

$$T = 0,0425 \text{ sec}$$

und die halbe Leitungslänge in der Zeit

$$\frac{T}{8} = 0,00531 \text{ sec}$$

durchlaufen.

In den Abb. 58 sind die einzelnen Harmonischen und der Beharrungszustand nicht mehr eingezeichnet, sondern nur der resultierende Spannungszustand.

Abb. 58a zeigt die Situation zur Zeit  $t = 0$ . Wäre die Darstellung ideal, d. h. hätten wir unendlich viele Harmonische benutzt, so müßte sich der Spannungszustand Null auf der Leitung ergeben. Da wir nur sechs Harmonische benutzt haben, ergibt sich Abb. 58a.

Abb. 58b zeigt die resultierende Spannung zur Zeit  $t = \frac{T}{8}$ . Die Grundharmonische hat in dieser Zeit den Weg

$$\pm v_1 \frac{T}{8} = \pm 14\,750 \cdot 0,00531 = \pm 78 \text{ km}$$

zurückgelegt. Ihre Amplitude  $A_1$  ist hierbei abgedämpft worden auf den Wert:

$$A_1 e^{-\alpha \frac{T}{8}} = 12,7 E e^{-147,8 \cdot 0,00531} = 12,7 E e^{-0,784} = 5,8 E.$$

Die nächste Harmonische hat den Weg

$$\pm v_3 \frac{T}{8} = \pm 278\,200 \cdot 0,00531 = \pm 1480 \text{ km}$$

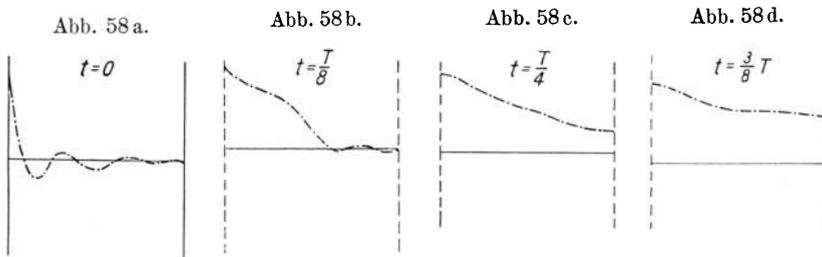
zurückgelegt, und ihre Amplitude  $A_3$  ist hierbei auf den Wert

$$A_3 \varepsilon^{-\alpha \frac{T}{8}} = 0,266 E \varepsilon^{-147,8 \cdot 0,00531} = 0,103 E$$

abgedämpft worden.

Ebenso berechnen wir die übrigen Harmonischen und verzeichnen sie wieder ihrer Größe und Stellung nach. Die algebraische Summe mit dem Beharrungszustand ergibt den Spannungszustand zur Zeit  $t = \frac{T}{8}$ .

Die Abb. 58 zeigt Unmöglichkeiten. Wir finden für  $t = 0$  (Abb. 58a) auf der ganzen Leitung, und für  $t = \frac{T}{8}$  (Abb. 58b) auf der rechten



Leitungshälfte, Spannungen, die nicht vorhanden sein können; denn die elektrische Störung der Leitung beginnt ja erst mit  $t = 0$  und ist mit  $t = \frac{T}{8}$  erst bis zur Leitungsmitte vorgedrungen. Diese Spannungen,

welche die Abbildungen zeigen, sind natürlich nur eine Folge der unvollkommenen Darstellung durch die geringe Zahl der Harmonischen.

Immerhin zeigen die Abbildungen das Wichtigste an dem Ladungsvorgang auf einer „so langen“ Leitung. Wir sehen, daß die Stirn der Spannungswoge, die natürlich, im Moment des Eintritts in die Leitung, senkrecht ist wie früher, beim Vorschreiten auf der Leitung „abgeflacht“ wird. Der Anprall an das offene Ende geschieht nicht mehr mit der vollen Höhe der Spannungswoge, sondern erfolgt allmählich von Null ansteigend; die Reflexion am Leitungsende ergibt keine Überspannung mehr, und die Spannung nähert sich allmählich dem Beharrungszustand.

**2.** Als nächstes Beispiel betrachten wir denselben Leitungstypus wie vorhin, aber mit einer Länge

$$l = 3150 \text{ km}$$

Dann ist

$$k_x = \gamma \frac{2l}{\pi} = 5,01 \cdot 10^{-4} \frac{6300}{3,14} = 1,005$$

Da  $k_x$  zwischen 1 und 3 liegt, ist die Grundharmonische aperiodisch und  $e_v$  und  $i_v$  sind darzustellen durch die Gleichungen:

$$e_v = \left. \begin{aligned} & -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \frac{1}{n_1} \frac{1}{m_1} \sin(m_1 x) \{n_1' \mathfrak{Cof}(n_1' t) + \alpha \mathfrak{Sin}(n_1' t)\} - \\ & -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{n_k m_k} \sin\{m_k(x + v_k t) - \delta_k\} - \\ & -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{n_k m_k} \sin\{m_k(x - v_k t) + \delta_k\} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

$$i_v = \left. \begin{aligned} & \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \frac{1}{n_1'} \frac{(\alpha^2 - n_1'^2) C}{m_1^2} \cos(m_1 x) \mathfrak{Sin}(n_1' t) + \\ & + \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{(\alpha^2 + n_k^2) C}{m_k^2} \sin\{m_k(x + v_k t)\} - \\ & - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{(\alpha^2 + n_k^2) C}{m_k^2} \sin\{m_k(x - v_k t)\} \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Wir können nun den Ladevorgang in ganz ähnlicher Weise darstellen, wie es in Beispiel 1 geschehen ist. Der einzige Unterschied gegen dort ist der „Stillstand“ der Grundharmonischen. Diese wandert nicht mehr. Sie steht im Moment  $t = 0$  [nach (78)] mit der Größe

$$\frac{4E}{\pi} \sin(m_1 x)$$

auf der Leitung und wird nun mit wachsender Zeit [nach (78)] abgedämpft, wobei für die Dämpfung nicht allein  $\alpha$ , sondern auch die Hyperbelfunktionen in Betracht kommen.  $\alpha$  hat den früheren Wert beibehalten,  $n_1'$  ergibt sich nach (30) mit

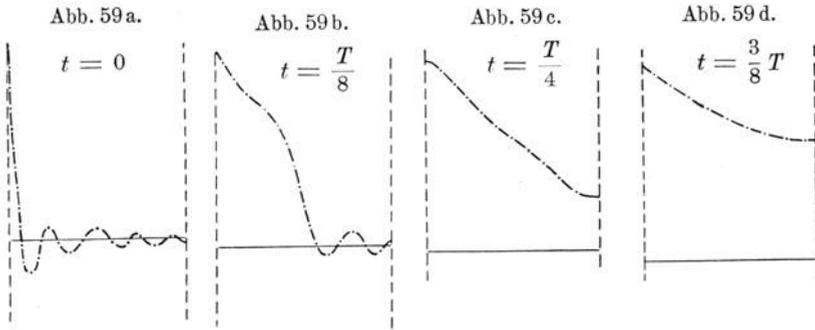
$$n_1' = \frac{m_1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\gamma^2}{m_1^2} - 1} = \frac{\frac{\pi}{2} \frac{1}{l}}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\gamma^2}{\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{l}\right)^2} - 1}$$

$$n_1' = \frac{295000 \cdot 1,57}{3150} \sqrt{\frac{(5,01)^2 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 3150^2}{9,86} - 1} = 15,0$$

Die Amplituden der wandernden Harmonischen sind, so wie früher, durch die Größe  $\alpha$  allein gedämpft.

Abb. 59 zeigt das Resultat bezüglich der Spannung. Wir sehen nur einen quantitativen Unterschied gegenüber Abb. 58. Die Aperiodizität

oder der Stillstand der Grundharmonischen bedeutet eben nichts anderes als eine verstärkte Dämpfung.



Ist nun aber die Grundharmonische aperiodisch geworden, d. h. zum Stillstand gekommen, so können wir für die Darstellung, mit einiger Annäherung, folgendes Verfahren verwenden.

Auch hier gilt, wie früher:

$$\begin{aligned} e &= e_b + e_v \\ i &= i_b + i_v \end{aligned}$$

Also, für  $t = 0$ , nach (78) und (79):

$$0 = e_b - \frac{4E}{\pi} \sin(m_1 x) - \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{n_k m_k} \sin(m_k x - \delta_k) - \left. \begin{aligned} & - \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{n_k m_k} \sin(m_k x + \delta_k) \end{aligned} \right\} \quad (78a)$$

$$0 = i_b + \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\alpha^2 + n_k^2}{m_k^2} C \sin(m_k x) - \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\alpha^2 + n_k^2}{m_k^2} C \sin(m_k x) \quad (79a)$$

In diesen Gleichungen ist mit einiger Berechtigung  $\alpha^2$  gegenüber  $n_k^2$  zu vernachlässigen. Für unseren Fall ist

$$\alpha = 147,8; \quad \text{und nach (55)} \quad n_3 = 415,4; \quad \frac{\alpha^2}{n_3^2} = 0,126$$

welches Verhältnis für die höheren Harmonischen rasch kleiner wird.

Vernachlässigen wir auch die Phasenwinkel:

$$\delta_k = \arctg \frac{\alpha}{n_k};$$

also:

$$\delta_3 = \arctg \frac{147,8}{415,4} = 19^\circ 36'$$

die auch für die höheren Harmonischen kleiner werden, so wird mit Rücksicht auf:

$$e_b = E; \quad i_b = 0; \quad n_k = m_k v_k = m_k \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$0 = E - \frac{4E}{\pi} \sin(m_1 x) - \frac{2E}{\pi} \sum_3^{\infty} \frac{1}{k} \sin(m_k x) - \frac{2E}{\pi} \sum_3^{\infty} \frac{1}{k} \sin(m_k x) \quad (78b)$$

$$0 = 0 + \frac{2E}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_3^{\infty} \frac{1}{k} \sin(m_k x) - \frac{2E}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_3^{\infty} \frac{1}{k} \sin(m_k x) \quad (79b)$$

Wir sehen: Die Summe der beiden unendlichen Reihen in (78b) ist nicht mehr gleich dem Beharrungszustand allein, sondern gleich dem Beharrungszustand minus dem Werte der Grundharmonischen, zur Zeit  $t = 0$ .

Abb. 60.

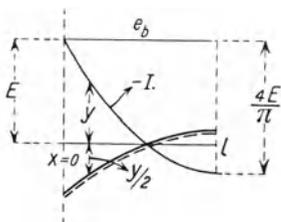


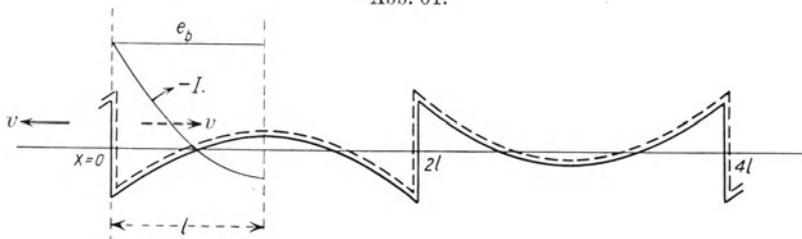
Abb. 60 zeigt den Spannungszustand zur Zeit  $t = 0$ , dargestellt durch die vier Glieder von (78b).  $y$  ist der Wert der Differenz zwischen Beharrungszustand und der Grundharmonischen, somit  $\frac{y}{2}$  jeorts der Wert der

Wanderwelle auf der Leitung im Moment  $t = 0$ .

Endlich nehmen wir — auch wieder angenähert — an, daß die sämtlichen wandernden Harmonischen mit der gleichen Geschwindigkeit  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  wandern. Diese Annahme ist insofern berechtigt, als bereits die langsamste, also die dritte, Harmonische eine Geschwindigkeit hat:

$$v_3 = 295000 \sqrt{1 - \frac{1}{9} \frac{25,1 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 3150^2}{9,86}} = 278000 \text{ km}$$

Abb. 61.



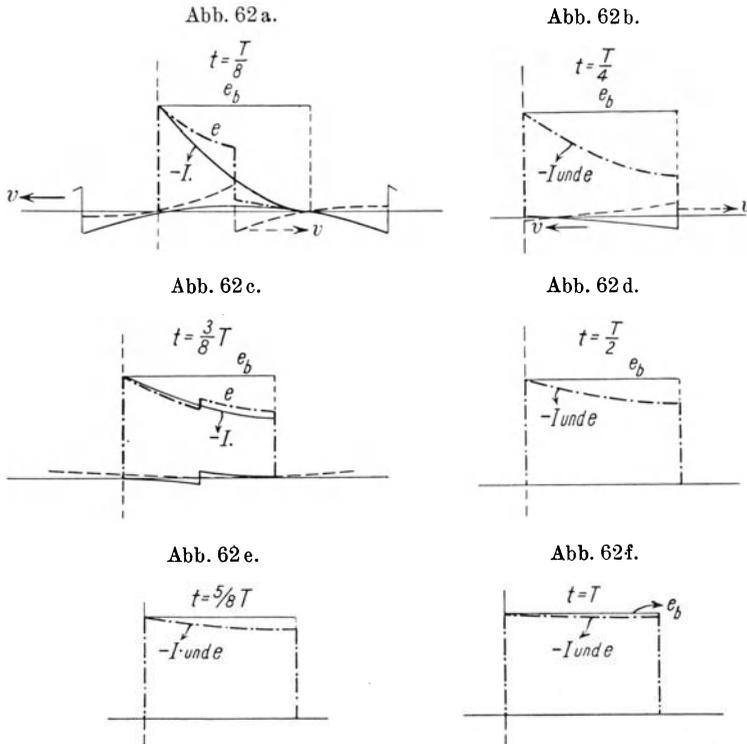
Mit diesen Annahmen ergibt Abb. 61, für  $t = 0$ , das Bild der Wanderwellen, die nun, mit der Geschwindigkeit  $v$ , nach rechts und links zu wandern beginnen und hierbei gedämpft ( $\varepsilon^{-\alpha t}$ ) werden.

Abb. 62 zeigt den Verlauf der Spannung während der Zeit  $T$ , in Intervallen von  $\frac{T}{8}$ , wobei  $T$  die Zeit ist, in der die vierfache Leitungslänge, mit der Geschwindigkeit  $v = 295\,000$  km, durchlaufen wird. Diese Zeit ist:

$$T = \frac{4l}{v} = \frac{4 \cdot 3150}{295\,000} = 0,0427 \text{ sec,}$$

also:

$$\frac{T}{8} = 0,00534 \text{ sec}$$



In der Abb. 62a ist die Amplitude der Grundharmonischen abgedämpft auf den Wert:

$$\begin{aligned} & \frac{4E}{\pi} \varepsilon^{-\alpha \frac{T}{8}} \left\{ \mathfrak{Cof} \left( n'_1 \frac{T}{8} \right) + \frac{\alpha}{n'_1} \mathfrak{Sin} \left( n'_1 \frac{T}{8} \right) \right\} = \\ & = \frac{4E}{\pi} \cdot 0,454 \left\{ 1,003 + \frac{147,8}{15} \cdot 0,080 \right\} = \frac{4E}{\pi} \cdot 0,813 \end{aligned}$$

Die Wanderwellen sind auf ihren 0,454fachen Anfangswert abgedämpft und sind um  $\frac{l}{2}$  nach beiden Seiten weitergeschritten.

In Abb. 62b sind die Grundharmonische auf ihren 0,535fachen, die Wanderwellen auf ihren 0,206fachen Anfangswert abgedämpft. Die folgenden Abbildungen zeigen, daß der Einfluß der Wanderwellen, durch ihre starke Dämpfung rasch schwindet; schon für  $t = \frac{T}{2}$  sind sie als bedeutungslos weggelassen. Der Spannungszustand auf der Leitung ist dann nur durch die Grundharmonische bedingt. Man sieht deutlich, daß bei der Ladung dieser langen Leitung eine Überspannung nicht vorkommen kann; die Spannung nähert sich allmählich dem Beharrungszustand, ohne ihn je zu überschreiten.

Diese Darstellung ist — zum mindesten in den Anfangsphasen — recht unvollkommen. Die, wenn auch stark erniedrigte, so doch immer noch senkrechte Wogenstirn in Abb. 62a, sowie die Zacke in 62c, sind natürlich unmöglich, denn es findet in Wahrheit ein stetiger Verlauf von  $e$  statt. Die Abbildungen sind aber verhältnismäßig einfach gewonnen und zeigen recht deutlich den Unterschied gegenüber der Aufladung einer kurzen Leitung.

**3.** Als letztes Beispiel betrachten wir unsere Leitung mit

$$g > 0 \quad \text{und} \quad l = 30 \text{ km}$$

Wir wollen dem  $g$  einen sehr großen Wert geben, nämlich

$$g = 1,564 \cdot 10^{-4}$$

Dies würde einem Isolationswiderstand von  $\frac{1}{g} = 6400^2$  pro Kilometer entsprechen, also einem Wert, der für den Dauerbetrieb viel zu klein wäre. Da wir aber hier den Einfluß der Ableitung studieren wollen, so wählen wir extreme Verhältnisse.

Es ist jetzt:

$$\gamma = \frac{rC - gL}{2\sqrt{LC}} = -5,257 \cdot 10^{-2}$$

und daher:

$$k_x = -\gamma \frac{2l}{\pi} = 5,257 \frac{60}{3,14} \cdot 10^{-2} = 1,005$$

Da

$$1 < k_x < 3$$

ist die Grundharmonische aperiodisch geworden, wie im letzten Beispiel, und es sind  $e_v$  und  $i_v$  gegeben durch:

$$e_v = -\varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \frac{1}{n_1' m_1^2 + \lambda^2} \frac{m_1}{\sin(m_1 x)} \{n_1' \mathfrak{Cof}(n_1' t) + \alpha \mathfrak{Sin}(n_1' t)\} - \left. \begin{aligned} & - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{m_k \sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{n_k m_k^2 + \lambda^2} \sin\{m_k(x + v_k t) - \delta_k\} - \\ & - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{m_k \sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{n_k m_k^2 + \lambda^2} \sin\{m_k(x - v_k t) + \delta_k\} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

$$i_v = \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \frac{1}{n_1' m_1^2 + \lambda^2} \frac{1}{\cos(m_1 x)} \{P_1' \mathfrak{Sin}(n_1' t) - Q_1' \mathfrak{Cof}(n_1' t)\} + \left. \begin{aligned} & + \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}{m_k^2 + \lambda^2} \sin\{m_k(x + v_k t) - \xi_k\} - \\ & - \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}{m_k^2 + \lambda^2} \sin\{m_k(x - v_k t) + \xi_k\} \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Wir haben also durch Vergrößerung der Ableitung  $g$ , auch auf der kurzen Leitung, die Aperiodizität der Grundharmonischen erzielt. Wir wollen auch hier die Darstellungsart nach Abb. 62 benutzen. Es ist jetzt:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{rC - gL}{2\sqrt{LC}} = -5,257 \cdot 10^{-2}; & \alpha &= \frac{rC + gL}{2LC} = 1,57 \cdot 10^4, \\ m_1 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{l} = 5,233 \cdot 10^{-2}; & n_1' &= \frac{m_1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\gamma^2}{m_1^2} - 1} = 1480; \\ n_3 &= \frac{m_3}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{3^2} \frac{\gamma^2}{m_3^2}} = 3,77 \cdot 10^4; \\ T &= \frac{4l}{v} = \frac{4 \cdot 30}{2,95 \cdot 10^5} = 0,0004 \text{ sec} \\ v_3 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{3^2} \frac{\gamma^2}{m_3^2}} = 240000 \text{ km}; & \delta_3 &= \text{arctg} \frac{\alpha}{n_3} = 22,5^\circ \end{aligned}$$

Wenn wir also die Winkel  $\delta_k$  vernachlässigen und die Geschwindigkeiten  $v_k$  der Wanderwellen gleich 295000 km annehmen, so ist die Genauigkeit der Darstellung noch etwas unvollkommener als früher.

Das Bild des Spannungsverlaufes ist für dieses Beispiel ganz analog mit dem des vorigen Beispiels. Ich verweise daher für die Darstellung von  $e$  auf Abb. 62. Die Dämpfungsverhältnisse sind annähernd die gleichen.

Im vorigen Beispiel war

$$\alpha \frac{T}{8} = 147,8 \cdot 0,00534 = 0,789$$

jetzt ist

$$\alpha \frac{T}{8} = 1,57 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 0,785$$

Wir wollen aber noch den Verlauf der Stromstärke für dieses Beispiel darstellen. Es ist:

$$i = i_b + i_v$$

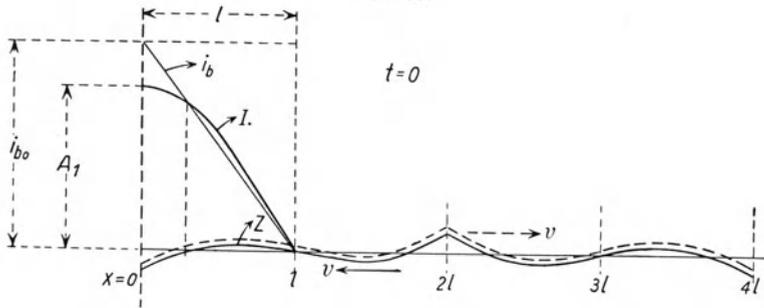
Daher nach (81) für  $t = 0$

$$0 = i_b - \frac{2E Q'_1}{l} \frac{1}{n'_1 m_1^2 + \lambda^2} \cos(m_1 x) + \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}{m_k^2 + \lambda^2} \sin\{m_k x - \xi_k\} - \left. \begin{aligned} & - \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x + \xi_k) \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Es ist:

$$\xi_k = \arctg \frac{Q_k}{P_k}; \text{ somit: } \sin \xi_k = \frac{Q_k}{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}$$

Abb. 63.



Entwickeln wir  $\sin(m_k x \mp \xi_k)$  nach Sinus und Kosinus und setzen für  $\sin \xi_k$  den Wert ein, so folgt:

$$0 = i_b - \frac{2E Q'_1}{l} \frac{1}{n'_1 m_1^2 + \lambda^2} \cos(m_1 x) - \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{Q_k}{n_k} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) - \left. \begin{aligned} & - \frac{E}{l} \sum_3^{\infty} \frac{Q_k}{n_k} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x) \end{aligned} \right\} \quad (82a)$$

Die beiden letzten Glieder, d. h. die negative Summe der beiden Wanderwellen des Stromes, ergeben also, für  $t = 0$ , mit der Differenz des Beharrungszustandes und der ersten Harmonischen den Wert Null. Daraus ergeben sich ohne weiteres Form und Größe der Wanderwellen zur Zeit  $t = 0$  (s. Abb. 63). Der Beharrungszustand  $i_b$  folgt aus (20); die Amplitude der Grundharmonischen ist nach (82)

$$A_1 = \frac{2E}{l} \frac{1}{n'_1} \frac{Q'_1}{m_1^2 + \lambda^2} = \frac{2E}{l} \frac{g}{m_1^2 + \lambda^2}$$

Für unser Beispiel ist somit [nach (20)] der Strom  $i_b$  für  $x = 0$

$$i_{b_0} = -\frac{g}{\lambda} E \frac{1 - \varepsilon^{2\lambda l}}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}}; \quad \text{wegen } \lambda = \sqrt{rg} = 1,03 \cdot 10^{-2}$$

$$i_{b_0} = 4,67 \cdot 10^{-3} E$$

und

$$A_1 = 3,66 \cdot 10^{-3} E$$

In Abb. 63 sehen wir über der Leitung den Wert der Wanderwelle

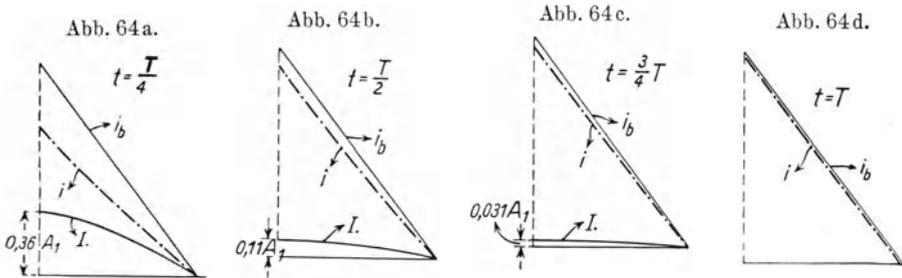
$$Z = \frac{1}{2}(i_b - I)$$

Beachtet man, daß die Funktion

$$\cos(m_k x) = \cos\left(k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l}\right)$$

zu der Länge  $x = (k - 1)l$  symmetrisch verläuft, denn

$$\cos\left\{k \frac{\pi}{2} \frac{(k-1)l + x}{l}\right\} = \cos\left\{k \frac{\pi}{2} \frac{(k-1)l - x}{l}\right\}$$



und daß dieselbe Funktion in  $x = kl$  ihr Vorzeichen ändert, denn

$$\cos\left(k \frac{\pi}{2} \frac{kl + x}{l}\right) = -\cos\left(k \frac{\pi}{2} \frac{kl - x}{l}\right)$$

so ergibt sich die Form der Wanderwellen, für  $t = 0$ , wie in Abb. 63.

Läßt man nun die beiden Wanderwellen mit der Geschwindigkeit  $v$  nach rechts und links laufen und vernachlässigt die Phasenwinkel  $\xi_k$  — was allerdings nur eine sehr rohe Annäherung ist —, so erhält man ein Bild über die Ausbildung des Stromes.

Für unser Beispiel gibt Abb. 64 deswegen ein ziemlich richtiges Bild, weil die Wanderwellen — an und für sich niedrig gegenüber der Grundharmonischen — durch die Dämpfung sehr bald bedeutungslos werden. Für die Ausbildung des Stromes ist also die Abdämpfung der Grundharmonischen von ausschlaggebender Bedeutung. In Abb. 64 ist daher außer dem Beharrungszustand nur die gedämpfte Grundharmonische ein-

gezeichnet. Die Differenz beider Kurven ergibt genähert den Verlauf von  $i$ , der tatsächlichen Stromstärke.

Wir sehen, wie sich die Stromstärke allmählich zum Beharrungszustand erhebt.

Dieses Beispiel macht uns den Einfluß der Ableitung auf den Schaltvorgang klar. Wir sehen, daß die Ableitung auf den Vorgang dämpfend wirkt und — wenn sie groß genug ist — jede Überspannung verhindert.

Unter den Begriff Ableitung fallen nun, wie schon erwähnt, nicht nur die Isolationsfehler, sondern auch die Korona-Glimm- oder Sprüherscheinungen. Es ist klar, daß eine Leitung, für ihre normale Betriebsspannung, keine oder nur sehr geringe Ableitungsverluste haben darf. D. h. daß jeder Leiter „für die Normalspannung“ gegen Erde und gegen den oder die anderen Leiter bestmöglich isoliert sein muß. Er muß dies aber nicht mehr für eine „Überspannung“ sein. Die Koronaerscheinungen setzen nun aber bekanntlich auf jeder Leitung erst mit einer bestimmten, der „kritischen“ Spannung ein. Wenn man daher eine Leitung so baut, daß ihre normale Betriebsspannung mit der kritischen Spannung zusammenfällt, so hat man die Gewähr, daß die Leitung, auf jede Spannungserhöhung über den Normalwert, mit Koronaerscheinungen, d. h. mit „Ableitung“ reagiert. Bei Höchstspannungsleitungen ist dies möglich, da hier immer noch genügend große Leiterentfernungen resultieren; auch kann man zur Verstärkung der Koronaerscheinungen das Blitzschutzseil heranziehen. Die ganze Leitung hat dann eine gewisse elektrische „Elastizität“, die in wirksamer Art die Überspannung bekämpft. Bei Mittel- und Niederspannungsleitungen ist es aus mechanischen Gründen meist unmöglich, die Leiter so nahe zu verlegen, daß die Betriebsspannung mit der kritischen zusammenfällt. Hier werden Glimmschutzapparate eingebaut, die auf Überspannung ansprechen. Natürlich ist hier zu beachten, daß die Ableitung, wenn sie wirksam sein soll, als Leitungsdate, d. h. auf der ganzen Leitung auftreten muß, daß also die Schutzapparate, längs der ganzen Leitung, gleichmäßig verteilt, anzubringen sind.

Wir haben in diesem Abschnitt die Ladung einer offenen Leitung durch eine Gleichstromquelle studiert. Derselbe Gedankengang führt auch zur Erkenntnis des Ladungsvorganges bei Anschluß einer Wechselstromquelle. Die Ausgangsgleichungen sind natürlich dieselben, und es gelten auch hier die Beziehungen

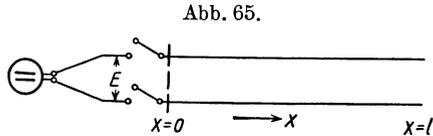
$$e = e_b + e_v; \quad i = i_b + i_v$$

Die Beharrungszustände  $e_b$  und  $i_b$  aber, die bei dem Gleichstromproblem stationäre Zustände waren, sind hier periodische Funktionen der Zeit.

Dies macht die Durchrechnung des Problems bedeutend schwieriger. Die technische Praxis verzichtet auch darauf, und zwar insofern mit Recht, als der Schaltvorgang in so kurzer Zeit abgedämpft ist, daß sich in dieser Zeit der Wert des Beharrungszustandes nur wenig geändert hat. Diese Erwägung führt aber das Wechselstrom- auf das Gleichstromproblem zurück.

Entladung der geladenen Leitung durch Kurzschluß.

Die Leitung, die durch die Gleichstromquelle geladen worden ist, wird durch den Schalter von der Stromquelle getrennt; hierauf wird, bei  $x = 0$ , zur Zeit  $t = 0$ , ein Kurzschlußbügel über die Leitung gelegt, der die Spannung  $e$ , im Punkte  $x = 0$ , dauernd auf Null bringt. Mit dem Moment  $t = 0$  beginnt also die Entladung.



Die Richtung des wachsenden  $x$  ist jetzt die Richtung steigender Energie, daher erhalten unsere Grundgleichungen (1) und (2) links das positive Vorzeichen; ebenso erhält (12) rechts das positive Vorzeichen.

Die Lösung bleibt natürlich dieselbe wie früher. Wir finden

$$W_b = k_1 \varepsilon^{\lambda x} + k_2 \varepsilon^{-\lambda x} \quad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt{r \cdot g}$$

somit

$$e_b = \frac{\partial W_b}{\partial x} = \lambda k_1 \varepsilon^{\lambda x} - \lambda k_2 \varepsilon^{-\lambda x} \tag{83}$$

und

$$i_b = g W_b = g k_1 \varepsilon^{\lambda x} + g k_2 \varepsilon^{-\lambda x} \tag{84}$$

Jetzt ist aber: für  $x = 0$ ;  $e = 0$ ; zu allen Zeiten und wie früher, für  $x = l$ ;  $i = 0$ ; zu allen Zeiten also folgt aus (83) und (84)

$$0 = k_1 - k_2; \quad 0 = k_1 \varepsilon^{2\lambda l} + k_2 \varepsilon^{-2\lambda l}$$

somit:

$$0 = k_1 (1 + \varepsilon^{-2\lambda l})$$

oder

$$k_1 = k_2 = 0$$

Daher folgt für die ganze Leitung

$$e_b = 0; \quad i_b = 0$$

als die Beharrungszustände, die auf der Leitung zu erwarten sind.

Weiter gilt wie früher:

$W_v = \varepsilon^{-\alpha t} \{K_1 \sin(mx) + K_2 \cos(mx)\} (K_3 \varepsilon^{n't} + K_4 \varepsilon^{-n't})$   
somit:

$$e_v = \frac{\partial W_v}{\partial x} = m \varepsilon^{-\alpha t} \{K_1 \cos(mx) - K_2 \sin(mx)\} (K_3 \varepsilon^{n't} + K_4 \varepsilon^{-n't})$$

Da wieder:

$$e = e_b + e_v$$

und, für  $x = 0$ ,  $e$  und  $e_b$  für alle Zeiten Null sind, so folgt:

$$K_1 = 0$$

und mit:

$$K_2 K_3 = A; \quad K_2 K_4 = B$$

Wegen „jetzt“

$$e_v = -m \varepsilon^{-\alpha t} \sin(mx) (A \varepsilon^{n't} + B \varepsilon^{-n't}) \quad (85)$$

$$i_v = +g W_v + C \frac{\partial W_v}{\partial t}$$

folgt:

$$\begin{aligned} i_v = & g \varepsilon^{-\alpha t} \cos(mx) (A \varepsilon^{n't} + B \varepsilon^{-n't}) - \\ & - \alpha C \varepsilon^{-\alpha t} \cos(mx) (A \varepsilon^{n't} + B \varepsilon^{-n't}) + \\ & + n' C \varepsilon^{-\alpha t} \cos(mx) (A \varepsilon^{n't} - B \varepsilon^{-n't}) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} i_v = & -\varepsilon^{-\alpha t} \cos(mx) \{A \varepsilon^{n't} (\alpha C - n' C - g) + \\ & + B \varepsilon^{-n't} (\alpha C + n' C - g)\}. \end{aligned} \quad (86)$$

Da

$$i = i_b + i_v$$

und für  $x = l$ ,  $i = i_b = 0$ , für alle Zeiten, so muß

$$\cos ml = 0 \quad \text{und} \quad ml = k \frac{\pi}{2},$$

wobei  $k$  die ungeraden Zahlen von 1 bis  $\infty$  bedeutet.

Es folgt genau so wie früher:

$$e_v = -\varepsilon^{-\alpha t} \sum_1^{\infty} m_k \sin(m_k x) \{A_k \varepsilon^{n'_k t} + B_k \varepsilon^{-n'_k t}\} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} i_v = & -\varepsilon^{-\alpha t} \sum_1^{\infty} \cos(m_k x) \{A_k \varepsilon^{n'_k t} (\alpha C - n'_k C - g) + \\ & + B_k \varepsilon^{-n'_k t} (\alpha C + n'_k C - g)\}. \end{aligned} \quad (88)$$

Zur Bestimmung von  $A_k$  und  $B_k$  beachten wir, daß, für  $t = 0$ , die Leitung aufgeladen war. Setzen wir ideal gute Isolation voraus, also

$$g = 0,$$

so war nach (21) die Spannung  $e$  auf der ganzen Leitung

$$e = E,$$

und der Strom:

$$i = 0.$$

Wegen  $e = e_b + e_v$  folgt also für  $t = 0$

$$E = 0 + e_{v(0)},$$

oder

$$-E = \sum_1^{\infty} m_k \sin(m_k x) (A_k + B_k),$$

woraus wie früher:

$$m_k (A_k + B_k) = -\frac{E}{l} \int_0^{2l} \sin\left(k \frac{\pi x}{2l}\right) dx = -\frac{2E}{l} \frac{1}{m_k},$$

also:

$$A_k + B_k = -\frac{2E}{l} \frac{1}{m_k^2} \quad (89)$$

und wegen

$$i = i_b + i_v$$

folgt für  $t = 0$

$$0 = 0 + i_{v(0)},$$

oder

$$0 = -\sum_1^{\infty} C \cos(m_k x) \{A_k(\alpha - n'_k) + B_k(\alpha + n'_k)\},$$

woraus

$$A_k(\alpha - n'_k) + B_k(\alpha + n'_k) = 0. \quad (90)$$

Aus (89) und (90) folgt:

$$A_k = -\frac{E}{l} \frac{n'_k + \alpha}{n'_k m_k^2}; \quad B_k = -\frac{E}{l} \frac{n'_k - \alpha}{n'_k m_k^2}, \quad (91)$$

und daher:

$$e_v = \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n'_k} \frac{1}{m_k} \sin(m_k x) \{(n'_k + \alpha) \varepsilon^{n'_k t} + (n'_k - \alpha) \varepsilon^{-n'_k t}\},$$

$$i_v = \varepsilon^{-\alpha t} C \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n'_k} \frac{1}{m_k^2} \cos(m_k x) \{(\alpha^2 - n_k'^2) \varepsilon^{n'_k t} + (n_k'^2 - \alpha^2) \varepsilon^{-n'_k t}\}.$$

Ist die ideal gut isolierte Leitung nicht sehr lang, so haben wir gesehen, daß  $n'_k$  nur imaginärer Werte fähig ist, also

$$n'_k = \iota n_k.$$

Dies eingeführt, und die Exponentialfunktionen in goniometrische umgewandelt, ergibt:

$$e_v = \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{1}{m_k} \sin(m_k x) \{n_k \cos(n_k t) + \alpha \sin(n_k t)\} \quad (92)$$

oder:

$$e_v = \varepsilon^{-\alpha t} \frac{2E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{m_k} \sin(m_k x) \cos(n_k t - \delta_k),$$

mit

$$\delta_k = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{n_k}.$$

Und

$$i_v = \varepsilon^{-\alpha t} C \frac{2E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{n_k^2 + \alpha^2}{n_k m_k^2} \cos(m_k x) \sin(n_k t). \quad (93)$$

Setzen wir wieder

$$n_k = m_k v_k$$

und vernachlässigen wir — wie wir es früher taten — den Bogen  $\delta_k$  als bedeutungslos, welche Vernachlässigung auch das Verschwinden von  $\alpha^2$  gegenüber  $n_k^2$  zur Folge hat, so wird

$$e_v = \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin m_k(x + v_k t) + \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin m_k(x - v_k t),$$

$$i_v = \varepsilon^{-\alpha t} C \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{n_k}{m_k^2} \sin m_k(x + v_k t) - \varepsilon^{-\alpha t} C \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{n_k}{m_k^2} \sin m_k(x - v_k t).$$

Wir sehen wieder unsere beiden unendlichen Reihen von, in entgegengesetzten Richtungen, wandernden Ortsharmonischen. Ist — wie wir es voraussetzen —  $\alpha$  gegenüber  $n_k$  bedeutungslos, dann sind, nach Früherem, die sämtlichen Wanderungsgeschwindigkeiten  $v_k$  einander gleich, und zwar:

$$v_k = v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

und damit wird:

$$e_v = \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin m_k(x + vt) + \varepsilon^{-\alpha t} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin m_k(x - vt) \quad (94)$$

$$\left. \begin{aligned} i_v = \varepsilon^{-\alpha t} \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin m_k(x + vt) - \\ - \varepsilon^{-\alpha t} \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin m_k(x - vt) \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Es hat nun, zur Zeit  $t = 0$ , die Spannung auf der ganzen Leitung den Wert  $E$ , ausgenommen den Punkt  $x = 0$ , wo wir ja in diesem Momente, durch den Kurzschluß, die Spannung auf Null bringen. Es gilt also für die Leitung die Beziehung:

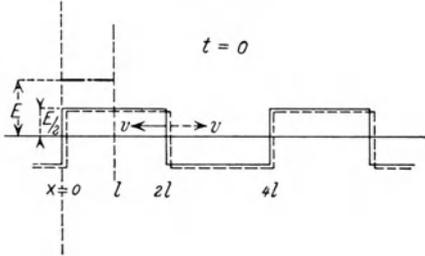
$$E = e_b + e_{v(t=0)} = 0 + e_{v(t=0)}$$

oder nach (94)

$$E = \underbrace{\frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin(m_k x)}_v + \underbrace{\frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin(m_k x)}_v$$

Wir sehen also  $E$ , den Spannungszustand der vollendeten Ladung, das ist der Ausgangszustand für die Entladung, dargestellt durch zwei Wellenzüge, die sich im Moment  $t = 0$  decken und in diesem Moment mit der Geschwindigkeit  $v$  nach rechts und links zu wandern beginnen. Die Höhe dieser Wellenzüge ist je  $1/2 E$ . Siehe Abb. 66.

Abb. 66.



Nach:

$$e = e_b + e_v = 0 + e_v$$

ist die wirkliche Spannung  $e$  auf der Leitung, mit  $e_v$ , der veränderlichen Spannung identisch;  $e_v$  ist aber nach (94) in jedem Moment durch die algebraische Summe der beiden Wellenzüge gegeben.

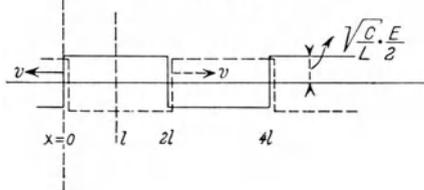
Ebenso ist, zur Zeit  $t = 0$ , der Strom  $i$  auf der ganzen Leitung Null. Daher

$$0 = i_b + i_{v(t=0)} = 0 + i_{v(t=0)}$$

oder nach (95)

$$0 = \underbrace{\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin(m_k x)}_v - \underbrace{\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{E}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m_k} \sin(m_k x)}_v$$

Abb. 67.



Wir sehen also, zur Zeit  $t = 0$ , zwei Wanderwellen des Stromes, von der  $\sqrt{\frac{C}{L}}$  fachen Höhe der Spannungswellen, so auf der Leitung stehen, daß sie sich gegenseitig vernichten. Auch sie beginnen mit der Geschwindigkeit  $v$  nach rechts und links zu wandern. (Abb. 67.)

Wegen:

$$i = i_b + i_v = 0 + i_v$$

ist auch  $i$ , der wirklich auftretende Strom, mit  $i_v$ , dem veränderlichen Stromwerte, identisch;  $i_v$  aber ist in jedem Moment [nach (95)] durch die algebraische Summe der beiden Wellenzüge gegeben.

Abb. 68.

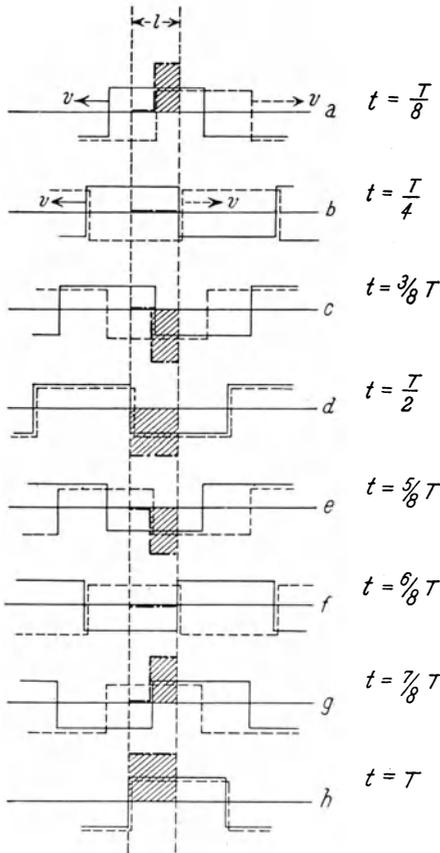
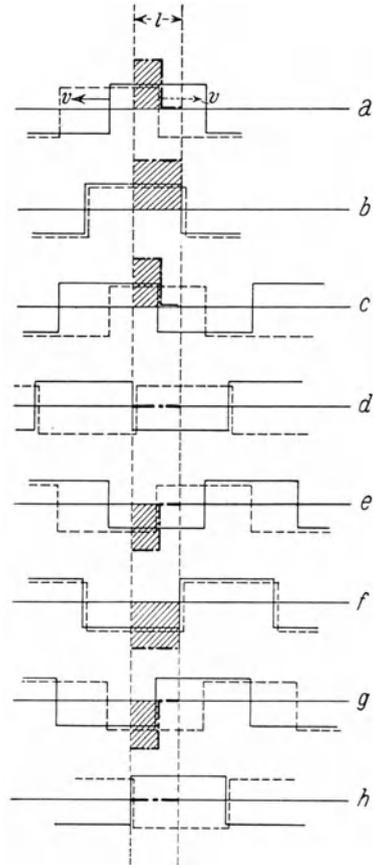


Abb. 69.



In Abb. 68 und 69 ist der Verlauf von Spannung und Strom nach Kurzschluß, unter Benutzung der Wanderwellen, dargestellt, und zwar wieder für Zeitintervalle, die ein Achtel jener Zeit  $T$  sind, in der die Wanderwellen die vierfache Leitungslänge durchlaufen.

Die physikalische Deutung der Abb. 68 und 69 ist folgende:

In Abb. 68 a sehen wir eine negative Spannungswoge, eine Entladungswoge, von der Höhe  $(-E)$  in die Leitung eintreten, welche Woge

die Leitung, die auf  $+E$  geladen war, bis zur Leitungsmitte spannungslos macht. In Abb. 68 b schreitet die Entspannung bis zum Leitungsende vor. Damit ist die Woge ( $-E$ ) am offenen Leitungsende angelangt, sie wird hier, nach dem uns schon bekannten Reflexionsgesetz, mit Zeichenfolge, also als negative Woge zurückgeworfen und ladet in 68 c und 68 d die Leitung auf die Spannung  $-E$ . Am Anfang angekommen, kommt diese negative Woge an die Kurzschlußstelle, wo die Spannung auf Null gehalten wird; sie wird daher hier mit Zeichenwechsel reflektiert, wird als positive Woge wieder nach vorwärts geworfen und entspannt die negativ geladene Leitung auf Null. (Abb. e und f.) Am Ende angekommen, wird die positive Woge mit Zeichenfolge reflektiert und ladet die entspannte Leitung wieder auf  $+E$ . So würde sich der Vorgang — wenn keine Dämpfung da wäre — in infinitum wiederholen. Durch die Dämpfung verlieren — wie wir früher sahen — die Wanderwellen ihre Höhe, und der Vorgang klingt rasch ab.

Wir haben hier auch das Reflexionsgesetz für eine Spannungs- woge an einem Kurzschluß kennengelernt. Die Woge wird an dem Kurzschluß, so wie an der Stromquelle, d. h. mit Zeichenwechsel reflektiert.

In Abb. 69 a und b sehen wir, der vorwärtsschreitenden Entlade- woge der Spannung entsprechend, eine Stromwoge des Entladestromes vorschreiten. Diese Woge wird am offenen Ende mit Zeichenwechsel reflektiert, wandert als Ladestrom zurück und macht die Leitung stromlos (Abb. 69 c und d). Am Kurzschluß angekommen, wird sie mit Zeichenfolge reflektiert (Abb. e und f), schreitet wieder gegen das offene Ende, wird hier mit Zeichenwechsel reflektiert und macht beim Rückschreiten die Leitung wieder stromlos (g und h).

Da der Entladestrom selbstverständlich als negativ, der Ladestrom als positiv anzusehen ist, so gilt auch hier wieder: Der vorwärts- schreitenden Spannungswoge entspricht eine Stromwoge gleichen Vor- zeichens, der rückwärtsschreitenden eine Stromwoge entgegen- gesetzten Vorzeichens.

In energetischer Hinsicht ergeben die Abb. 66 bis 69 folgende Schlüsse:

Zur Zeit  $t = 0$  ist  $A_e$ , die Energie des elektrostatischen Feldes,

$$A_e = \frac{1}{2} E^2 l C$$

und  $A_m$ , die Energie des elektromagnetischen Feldes, mangels eines Stromes,

$$A_m = 0.$$

In der Zeit 0 bis  $T/4$  verschwindet  $A_e$ , und es wächst  $A_m$  auf die Höhe

$$A_m = \frac{1}{2} J^2 \iota L = A_e.$$

In der Zeit  $T/4$  bis  $T/2$  wächst wieder  $A_e$  auf Kosten von  $A_m$ ; die Leitung wird auf die Spannung ( $-E$ ) aufgeladen und es wird zur Zeit  $T/2$ :

$$A_e = \frac{1}{2} E^2 \iota C$$

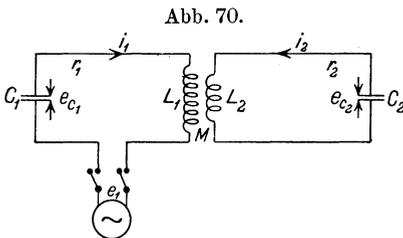
und so geht die Umwandlung der Energie von Viertel- zu Viertelperiode weiter. Es pendelt also hier die Energie zwischen dem elektrostatischen und elektromagnetischem Felde hin und her. Es wird somit durch den Kurzschluß auf der Leitung ein Schwingungszustand geschaffen, von einer Schwingungsdauer  $T$ , gleich jener Zeit, welche die elektrische Störung braucht, um die vierfache Leitungslänge zu durchlaufen.

Wir haben gesehen, daß die Darstellung der beiden Schaltvorgänge, die wir hier studiert haben (Ladung und Entladung einer Leitung), durch ungedämpfte Wanderwellen von Rechtecksform, die Darstellung des ungünstigsten, gefährlichsten Falles bedeutet. Bei der Ladung hatten wir auf eine Spannungsverdoppelung zu rechnen. In Wahrheit gibt es stets eine Dämpfung und nie eine absolut senkrechte Stirn.

Wenn also — wie es in der Literatur üblich ist — bei der Verfolgung von Schaltvorgängen senkrechte Wellenstirnen angenommen werden, so bedeutet dies ebensowohl eine außerordentliche Vereinfachung der Darstellung, als auch die Erzielung eines Resultats, welches die ungünstigsten Folgen des Schaltvorganges zeigt. Die Schutzmaßregeln gegen diese Folgen bringen also die größtmögliche Sicherheit.

## IX. Elektrische Schwingungen in magnetisch gekoppelten Stromkreisen.

Das typische Beispiel zweier magnetisch gekoppelter Stromkreise ist der „Allgemeine Transformator“. Jeder der beiden Stromkreise I und II



enthält, im allgemeinsten Falle, Ohmschen, induktiven und kapazitiven Widerstand. Bedingt durch die gegenseitige Lage, wirken die Stromkreise magnetisch aufeinander ein. Abb. 70 zeigt das Schema der Anordnung.

Sind:  $r_1, r_2$  die Ohmschen Widerstände,  $L_1, L_2$  die Koeffizienten der Selbstinduktion,  $M$  der Koeffizient der gegenseitigen Induktion,  $C_1, C_2$  die elektrostatischen Kapazitäten,

$e_1$  die, dem Primärkreis aufgedrückte Klemmenspannung,  $e_{c_1}$ ,  $e_{c_2}$  die Kondensatorspannungen und  $i_1$ ,  $i_2$  die Ströme, die sich in den beiden Kreisen ausbilden, so gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= -e_1 + e_{c_1} + i_1 r_1 \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= 0 + e_{c_2} + i_2 r_2 \end{aligned}$$

Nun ist

$$e_{c_1} = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt; \quad e_{c_2} = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt;$$

und es sei:

$$e_1 = \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi)$$

dann wird:

$$i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt} = \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi) \quad (1)$$

$$i_1 r_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = -M \frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

Aus diesen Gleichungen können wir die Ströme  $i_1$  und  $i_2$  berechnen.

Aus (2) folgt durch Differentiation und Division durch  $L_2$

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{r_2}{L_2} \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2 L_2} i_2 = -\frac{M}{L_2} \frac{d^2 i_1}{dt^2} \quad (2a)$$

In dieser Gleichung sehen wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Störungsfunktion. Ihre Lösung ist nach Abschnitt V.

$$i_2 = z_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + z_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} \quad (3)$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{r_2}{2L_2} + \iota \sqrt{\frac{1}{C_2 L_2} - \frac{r_2^2}{4L_2^2}}; \\ \lambda_2 &= -\frac{r_2}{2L_2} - \iota \sqrt{\frac{1}{C_2 L_2} - \frac{r_2^2}{4L_2^2}}; \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

und  $z_1$  und  $z_2$  bestimmt sind aus:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\lambda_1 t} \frac{dz_1}{dt} + \varepsilon^{\lambda_2 t} \frac{dz_2}{dt} &= 0 \\ \lambda_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} \frac{dz_1}{dt} + \lambda_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} \frac{dz_2}{dt} &= -\frac{M}{L_2} \frac{d^2 i_1}{dt^2} \end{aligned}$$

woraus:

$$z_1 = -\frac{M}{L_2} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \varepsilon^{-\lambda_1 t} \frac{d^2 i_1}{dt^2} dt$$

$$z_2 = \frac{M}{L_2} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \varepsilon^{-\lambda_2 t} \frac{d^2 i_1}{dt^2} dt$$

Dies in (3) eingesetzt, ergibt:

$$i_2 = -\frac{M}{L_2} \frac{\varepsilon^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \varepsilon^{-\lambda_1 t} \frac{d^2 i_1}{dt^2} dt + \frac{M}{L_2} \frac{\varepsilon^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \varepsilon^{-\lambda_2 t} \frac{d^2 i_1}{dt^2} dt \quad (4)$$

und daher:

$$\frac{d i_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \varepsilon^{\lambda_1 t} \int \varepsilon^{-\lambda_1 t} \frac{d^2 i_1}{dt^2} dt + \frac{M}{L_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \varepsilon^{\lambda_2 t} \int \varepsilon^{-\lambda_2 t} \frac{d^2 i_1}{dt^2} dt \quad (5)$$

Setzen wir (5) in (1) ein, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} i_1 r_1 + L_1 \frac{d i_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - \frac{M^2}{L_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \varepsilon^{\lambda_1 t} \int \varepsilon^{-\lambda_1 t} \left( \frac{d^2 i_1}{dt^2} \right) dt + \\ + \frac{M^2}{L_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \varepsilon^{\lambda_2 t} \int \varepsilon^{-\lambda_2 t} \frac{d^2 i_1}{dt^2} dt = \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi); \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

aus welcher Gleichung wir  $i_1$  bestimmen wollen.

Wir differenzieren und dividieren nachher durch  $\varepsilon^{\lambda_2 t}$ ; dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-\lambda_2 t} \left( r_1 \frac{d i_1}{dt} + \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{i_1}{C_1} \right) - \\ - \frac{M^2}{L_2} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 - \lambda_2} \varepsilon^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \int \varepsilon^{-\lambda_1 t} \frac{d^2 i_1}{dt^2} dt + \\ + \frac{M^2}{L_2} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \varepsilon^{-\lambda_1 t} \frac{d^2 i_1}{dt^2} dt = \varepsilon^{-\lambda_2 t} \omega \mathfrak{E}_1 \cos(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

Noch einmal differenziert und durch  $\varepsilon^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$  dividiert, ergibt:

$$\begin{aligned} -\lambda_2 \varepsilon^{-\lambda_1 t} \left( r_1 \frac{d i_1}{dt} + \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{i_1}{C_1} \right) + \\ + \varepsilon^{-\lambda_1 t} \left( r_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{d^3 i_1}{dt^3} + \frac{1}{C_1} \frac{d i_1}{dt} \right) - \\ - \frac{d^2 i_1}{dt^2} \frac{M^2}{L_2} (\lambda_1 + \lambda_2) \varepsilon^{-\lambda_1 t} - \frac{M^2}{L_2} \lambda_1^2 \int \varepsilon^{-\lambda_1 t} \frac{d^2 i_1}{dt^2} dt = \\ = -\lambda_2 \omega \varepsilon^{-\lambda_1 t} \mathfrak{E}_1 \cos(\omega t + \psi) - \omega^2 \varepsilon^{-\lambda_1 t} \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi) = \\ = -\varepsilon^{-\lambda_1 t} \omega \mathfrak{E}_1 \sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2} \sin\left(\omega t + \psi + \arctg \frac{\lambda_2}{\omega}\right). \end{aligned}$$

Differenzieren wir noch einmal und kürzen durch  $\varepsilon^{-\lambda_1 t}$ , so wird:

$$\left. \begin{aligned}
 & i_1 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{C_1} + \frac{d i_1}{d t} \left( r_1 \lambda_1 \lambda_2 - \frac{\lambda_2}{C_1} - \frac{\lambda_1}{C_1} \right) + \\
 & + \frac{d^2 i_2}{d t^2} \left\{ \lambda_1 \lambda_2 \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} - \left( r_1 - \lambda_1 \frac{M^2}{L_2} \right) (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{C_1} - \right. \\
 & \left. - \lambda_1^3 \frac{M^2}{L_2} \right\} + \frac{d^3 i_1}{d t^3} \{ r_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) L_1 \} + \frac{d^4 i_1}{d t^4} \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} = \\
 & = \lambda_1 \omega \mathfrak{E}_1 \sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2} \sin \left( \omega t + \psi + \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2}{\omega} \right) - \\
 & - \omega \cdot \omega \mathfrak{E}_1 \sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2} \cos \left( \omega t + \psi + \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2}{\omega} \right) = \\
 & = \omega \mathfrak{E}_1 \sqrt{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)} \cdot \sin \left( \omega t + \psi + \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2}{\omega} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\lambda_1} \right).
 \end{aligned} \right\} (7a)$$

Wir führen nun nach (3a) die Werte von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ein, wobei, wie leicht ersichtlich,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{r_2}{L_2}; \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{C_2 L_2};$$

und führen den Streukoeffizienten  $\tau$ <sup>1)</sup> des Transformators ein, den wir definieren durch:

$$\tau = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - \kappa^2 \quad (8)$$

mit

$$\kappa^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad (8a)$$

wobei  $\kappa$  der Koppelungsfaktor heißt.

Mit diesen Einführungen wird:

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{C_1} &= \frac{1}{C_1 C_2 L_2}; \quad r_1 \lambda_1 \lambda_2 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{C_1} = \frac{r_1 C_1 + r_2 C_2}{C_1 C_2 L_2} \\
 \lambda_1 \lambda_2 \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} - \left( r_1 - \lambda_1 \frac{M^2}{L_2} \right) (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{C_1} - \lambda_1^3 \frac{M^2}{L_2} &= \\
 &= \frac{C_1 L_1 + C_2 L_2 + r_1 r_2 C_1 C_2}{C_1 C_2 L_2} \\
 r_1 - L_1 (\lambda_1 + \lambda_2) &= \frac{r_1 L_2 + r_2 L_1}{L_2}; \quad \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} = \tau L_1
 \end{aligned}$$

1) Siehe hierüber im Beginn von Abschnitt XII.

$$(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2) = \frac{1}{C_2^2 L_2^2} \{(\omega^2 C_2 L_2 - 1)^2 + \omega^2 r_2^2 C_2^2\}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\lambda_2}{\omega} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\lambda_1} = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2 - \frac{\omega}{\lambda_1}}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \omega^2}{\omega(\lambda_1 + \lambda_2)} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1 - \omega^2 C_2 L_2}{-\omega r_2 C_2}$$

und daher endlich, wenn wir (7a) durch  $\tau L_1$  dividieren

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d^4 i_1}{dt^4} + \frac{d^3 i_1}{dt^3} \frac{r_1 L_2 + r_2 L_1}{\tau L_1 L_2} + \frac{d^2 i_1}{dt^2} \frac{C_1 L_1 + C_2 L_2 + r_1 r_2 C_1 C_2}{\tau C_1 C_2 L_1 L_2} + \\ & + \frac{d i_1}{dt} \frac{r_1 C_1 + r_2 C_2}{\tau C_1 C_2 L_1 L_2} + i_1 \frac{1}{\tau C_1 C_2 L_1 L_2} = \\ & = \frac{1}{\tau L_1} \omega \mathfrak{E}_1 \frac{1}{C_2 L_2} \sqrt{(\omega^2 C_2 L_2 - 1)^2 + \omega^2 r_2^2 C_2^2} \sin \left( \omega t + \psi + \operatorname{arctg} \frac{1 - \omega^2 C_2 L_2}{-\omega r_2 C_2} \right) \end{aligned} \right\} (9)$$

Dies ist die Ausgangsgleichung für das Transformatorproblem in allgemeiner Form.

Aus ihr lassen sich stets die beiden Stromstärken ableiten, da wir aus (2), bei Kenntnis von  $i_1$ , auch  $i_2$  berechnen können.

Gl. (9) ist eine Differentialgleichung vierter Ordnung mit Störungsfunktion. Fällt diese Störungsfunktion weg, d. h. ist die rechte Seite

der Gleichung Null, dann haben wir den Fall der Selbsterregung, der zur Eigenschwingung führt. Dies wäre eine Schaltung nach Abb. 71, wo der geladene Kondensator  $C_1$

durch Schluß des Schalthebels zur Entladung gebracht wird; dem Stromkreise wird also jetzt keine fremde Spannung ( $e_1$ ) aufgedrückt.

Sind die kapazitiven Widerstände in beiden Stromkreisen bedeutungslos, so haben wir den Normalfall des „technischen Starkstromtransformators“.

Das Nullwerden der kapazitiven Widerstände bedeutet:

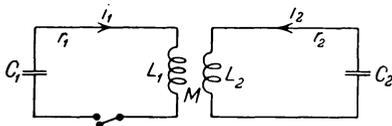
$$C_1 = C_2 = \infty$$

Damit aber übergeht (9) in:

$$\frac{d^4 i_1}{dt^4} + \frac{d^3 i_1}{dt^3} \frac{r_1 L_2 + r_2 L_1}{\tau L_1 L_2} + \frac{d^2 i_1}{dt^2} \frac{r_1 r_2}{\tau L_1 L_2} =$$

$$= \frac{1}{\tau L_1 L_2} \omega^2 \mathfrak{E}_1 \sqrt{r_2^2 + \omega^2 L_2^2} \sin \left( \omega t + \psi + \operatorname{arctg} \frac{-\omega L_2}{-r_2} \right)$$

Abb. 71.



Diese Gleichung übergeht durch zweimalige Integration in :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{di_1}{dt} \frac{r_1 L_2 + r_2 L_1}{\tau L_1 L_2} + i_1 \frac{r_1 r_2}{\tau L_1 L_2} = \\ = \frac{1}{\tau L_1 L_2} \mathfrak{G}_1 \sqrt{r_2^2 + \omega^2 L_2^2} \sin(\omega t + \psi + \operatorname{arctg} \frac{\omega L_2}{r_2}) \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Das ist die Ausgangsgleichung für den Einschaltvorgang des Starkstromtransformators.

### 1. Fremderregung.

Wir wollen nun an die Lösung der Gl. (9) unter der vereinfachenden Annahme gehen, daß die Ohmschen Widerstände der beiden Stromkreise Null sind, also

$$r_1 = r_2 = 0 \quad (10)$$

Setzen wir ideale, d. h. verlustfreie Kondensatoren voraus und nehmen wir konstante Selbstinduktion, d. h. eisenlose Induktionsspulen an, so wird in den beiden Stromkreisen keine Arbeit geleistet, es finden also sämtliche Vorgänge ungedämpft statt.

Wegen (10) folgt jetzt aus (9):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{d^2 i_1}{dt^2} \frac{C_1 L_1 + C_2 L_2}{\tau C_1 C_2 L_1 L_2} + i_1 \frac{1}{\tau C_1 C_2 L_1 L_2} = \\ = - \mathfrak{G}_1 \frac{\omega (\omega^2 C_2 L_2 - 1)}{\tau C_2 L_1 L_2} \cos(\omega t + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Wir setzen:

$$A = \frac{C_1 L_1 + C_2 L_2}{\tau C_1 C_2 L_1 L_2}; \quad B = \frac{1}{\tau C_1 C_2 L_1 L_2}; \quad F = \frac{\omega (\omega^2 C_2 L_2 - 1)}{\tau C_2 L_1 L_2} \quad (12)$$

Dann lautet die homogene Form von (11)

$$\frac{d^4 i_1}{dt^4} + A \frac{d^2 i_1}{dt^2} + B i_1 = 0 \quad (13)$$

Eine Partikulärlösung dieser Gleichung, in der Form  $i_1 = \varepsilon^{vt}$ , eingeführt, ergibt die charakteristische Gleichung:

$$v^4 + A v^2 + B = 0$$

woraus:

$$v^2 = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2 - 4B}{4}}$$

und

$$v = \pm \sqrt{-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2 - 4B}{4}}} \quad (14)$$

Die homogene Form (13) hat also vier Partikulärlösungen. Die allgemeine Lösung von (13) lautet daher:

$$i_1 = u_1 \varepsilon^{v_1 t} + u_2 \varepsilon^{v_2 t} + u_3 \varepsilon^{v_3 t} + u_4 \varepsilon^{v_4 t} \quad (15)$$

wo  $u_1, u_2, u_3, u_4$  Konstanten sind und

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= +\iota \sqrt{\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2 - 4B}{4}}} \\ v_2 &= -\iota \sqrt{\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2 - 4B}{4}}} \\ v_3 &= +\iota \sqrt{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2 - 4B}{4}}} \\ v_4 &= -\iota \sqrt{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2 - 4B}{4}}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Soll (15) auch die Lösung der inhomogenen Form (11) sein, dann sind die  $u$  keine Konstanten mehr, sondern Funktionen der Zeit, die durch folgende Beziehungen gegeben sind:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{v_1 t} \frac{du_1}{dt} + \varepsilon^{v_2 t} \frac{du_2}{dt} + \varepsilon^{v_3 t} \frac{du_3}{dt} + \varepsilon^{v_4 t} \frac{du_4}{dt} &= 0 \\ v_1 \varepsilon^{v_1 t} \frac{du_1}{dt} + v_2 \varepsilon^{v_2 t} \frac{du_2}{dt} + v_3 \varepsilon^{v_3 t} \frac{du_3}{dt} + v_4 \varepsilon^{v_4 t} \frac{du_4}{dt} &= 0 \\ v_1^2 \varepsilon^{v_1 t} \frac{du_1}{dt} + v_2^2 \varepsilon^{v_2 t} \frac{du_2}{dt} + v_3^2 \varepsilon^{v_3 t} \frac{du_3}{dt} + v_4^2 \varepsilon^{v_4 t} \frac{du_4}{dt} &= 0 \\ v_1^3 \varepsilon^{v_1 t} \frac{du_1}{dt} + v_2^3 \varepsilon^{v_2 t} \frac{du_2}{dt} + v_3^3 \varepsilon^{v_3 t} \frac{du_3}{dt} + v_4^3 \varepsilon^{v_4 t} \frac{du_4}{dt} &= \\ &= -\mathfrak{G}_1 F \cos(\omega t + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Nach (16) ist nun:

$$v_2 = -v_1; \quad v_4 = -v_3; \quad v_1^2 = v_2^2; \quad v_3^2 = v_4^2; \quad v_2^3 = -v_1^3; \quad v_4^3 = -v_3^3$$

damit wird das System (17) überführt in:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{v_1 t} \frac{du_1}{dt} + \varepsilon^{-v_1 t} \frac{du_2}{dt} + \varepsilon^{v_3 t} \frac{du_3}{dt} + \varepsilon^{-v_3 t} \frac{du_4}{dt} &= 0 \\ v_1 \varepsilon^{v_1 t} \frac{du_1}{dt} - v_1 \varepsilon^{-v_1 t} \frac{du_2}{dt} + v_3 \varepsilon^{v_3 t} \frac{du_3}{dt} - v_3 \varepsilon^{-v_3 t} \frac{du_4}{dt} &= 0 \\ v_1^2 \varepsilon^{v_1 t} \frac{du_1}{dt} + v_1^2 \varepsilon^{-v_1 t} \frac{du_2}{dt} + v_3^2 \varepsilon^{v_3 t} \frac{du_3}{dt} + v_3^2 \varepsilon^{-v_3 t} \frac{du_4}{dt} &= 0 \\ v_1^3 \varepsilon^{v_1 t} \frac{du_1}{dt} - v_1^3 \varepsilon^{-v_1 t} \frac{du_2}{dt} + v_3^3 \varepsilon^{v_3 t} \frac{du_3}{dt} - v_3^3 \varepsilon^{-v_3 t} \frac{du_4}{dt} &= \\ &= -\mathfrak{G}_1 F \cdot \cos(\omega t + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

Eliminieren wir aus (17 a) die vier unbekanntem Differentialquotienten, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= -\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{\varepsilon^{-v_1 t}}{v_1(v_1^2 - v_3^2)} \cos(\omega t + \psi) \\ \frac{du_2}{dt} &= +\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{\varepsilon^{v_1 t}}{v_1(v_1^2 - v_3^2)} \cdot \cos(\omega t + \psi) \\ \frac{du_3}{dt} &= +\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{\varepsilon^{-v_3 t}}{v_3(v_1^2 - v_3^2)} \cdot \cos(\omega t + \psi) \\ \frac{du_4}{dt} &= -\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{\varepsilon^{v_3 t}}{v_3(v_1^2 - v_3^2)} \cdot \cos(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

Integrieren wir, so folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{1}{v_1(v_1^2 - v_3^2)} \int \varepsilon^{-v_1 t} \cos(\omega t + \psi) dt + k_1 \\ u_2 &= +\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{1}{v_1(v_1^2 - v_3^2)} \int \varepsilon^{v_1 t} \cos(\omega t + \psi) dt + k_2 \\ u_3 &= +\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{1}{v_3(v_1^2 - v_3^2)} \int \varepsilon^{-v_3 t} \cos(\omega t + \psi) dt + k_3 \\ u_4 &= -\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{1}{v_3(v_1^2 - v_3^2)} \int \varepsilon^{v_3 t} \cos(\omega t + \psi) dt + k_4 \end{aligned}$$

worin die „k“ Integrationskonstanten sind. Da nun

$$\left. \begin{aligned} \int \varepsilon^{-vt} \cdot \cos(\omega t + \psi) dt &= -\varepsilon^{-vt} \frac{1}{\omega^2 + v^2} \{v \cos(\omega t + \psi) - \\ &\quad - \omega \sin(\omega t + \psi)\} \\ \text{und} \\ \int \varepsilon^{vt} \cos(\omega t + \psi) dt &= +\varepsilon^{vt} \cdot \frac{1}{\omega^2 + v^2} \{v \cos(\omega t + \psi) + \\ &\quad + \omega \sin(\omega t + \psi)\} \end{aligned} \right\} (17 b)$$

so wird:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{1}{v_1(v_1^2 - v_3^2)} \frac{1}{\omega^2 + v_1^2} \varepsilon^{-v_1 t} \{v_1 \cos(\omega t + \psi) - \\ &\quad - \omega \sin(\omega t + \psi)\} + k_1 \\ u_2 &= \frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{1}{v_1(v_1^2 - v_3^2)} \frac{1}{\omega^2 + v_1^2} \varepsilon^{v_1 t} \{v_1 \cos(\omega t + \psi) + \\ &\quad + \omega \sin(\omega t + \psi)\} + k_2 \\ u_3 &= -\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{1}{v_3(v_1^2 - v_3^2)} \frac{1}{\omega^2 + v_3^2} \varepsilon^{-v_3 t} \{v_3 \cos(\omega t + \psi) - \\ &\quad - \omega \sin(\omega t + \psi)\} + k_3 \\ u_4 &= -\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 F \frac{1}{v_3(v_1^2 - v_3^2)} \frac{1}{\omega^2 + v_3^2} \varepsilon^{v_3 t} \{v_3 \cos(\omega t + \psi) + \\ &\quad + \omega \sin(\omega t + \psi)\} + k_4 \end{aligned}$$

und daher nach (15)

$$i_1 = \mathfrak{E}_1 F \frac{1}{v_1^2 - v_3^2} \frac{1}{\omega^2 + v_1^2} \cos(\omega t + \psi) - \\ - \mathfrak{E}_1 F \frac{1}{v_1^2 - v_3^2} \frac{1}{\omega^2 + v_3^2} \cos(\omega t + \psi) + k_1 \varepsilon^{v_1 t} + k_2 \varepsilon^{-v_1 t} + k_3 \varepsilon^{v_3 t} + k_4 \varepsilon^{-v_3 t}$$

Die Differenz der ersten beiden Glieder ergibt:

$$\mathfrak{E}_1 F \cos(\omega t + \psi) \cdot \frac{1}{(v_1^2 - v_3^2)} \left( \frac{1}{\omega^2 + v_1^2} - \frac{1}{\omega^2 + v_3^2} \right) = \\ = - \mathfrak{E}_1 F \frac{1}{(\omega^2 + v_1^2)(\omega^2 + v_3^2)} \cos(\omega t + \psi)$$

Nach (16) ist

$$(\omega^2 + v_1^2)(\omega^2 + v_3^2) = \omega^4 + \omega^2(v_1^2 + v_3^2) + v_1^2 v_3^2 = \omega^4 - \omega^2 A + B = \\ = \omega^4 - \omega^2 \frac{C_1 L_1 + C_2 L_2}{\tau C_1 C_2 L_1 L_2} + \frac{1}{\tau C_1 C_2 L_1 L_2}$$

somit nach (12)

$$\frac{F}{(\omega^2 + v_1^2)(\omega^2 + v_3^2)} = \frac{\frac{\omega(\omega^2 C_2 L_2 - 1)}{\tau C_2 L_1 L_2}}{\frac{\omega^4 \tau C_1 C_2 L_1 L_2 - \omega^2(C_1 L_1 + C_2 L_2) + 1}{\tau C_1 C_2 L_1 L_2}} = \\ = \frac{\omega C_1 (\omega^2 C_2 L_2 - 1)}{\omega^4 \tau C_1 C_2 L_1 L_2 - \omega^2(C_1 L_1 + C_2 L_2) + 1}$$

und daher

$$i_1 = \mathfrak{E}_1 \omega C_1 \left. \begin{aligned} & \frac{1 - \omega^2 C_2 L_2}{1 - \omega^2(C_1 L_1 + C_2 L_2) + \omega^4 \tau C_1 C_2 L_1 L_2} \cos(\omega t + \psi) + \\ & + k_1 \varepsilon^{v_1 t} + k_2 \varepsilon^{-v_1 t} + k_3 \varepsilon^{v_3 t} + k_4 \varepsilon^{-v_3 t} \end{aligned} \right\} (18)$$

Die vier letzten Exponentialglieder zeigen die Lösung der homogenen Form unserer Gl. (11) [s. Gl. (15)], denn die  $k$  sind ja Konstanten; sie drücken also die Eigenschwingung des Stromkreises aus. Das erste Glied zeigt die aufgezwungene Schwingung des Primärkreises. Bezeichnen wir die Amplitude dieses Gliedes mit  $\mathfrak{I}_1$ , so lautet (18):

$$i_1 = \mathfrak{I}_1 \cos(\omega t + \psi) + k_1 \varepsilon^{v_1 t} + k_2 \varepsilon^{-v_1 t} + k_3 \varepsilon^{v_3 t} + k_4 \varepsilon^{-v_3 t}$$

somit:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} = -\omega^2 \mathfrak{I}_1 \cos(\omega t + \psi) + v_1^2 k_1 \varepsilon^{v_1 t} + v_1^2 k_2 \varepsilon^{-v_1 t} + v_3^2 k_3 \varepsilon^{v_3 t} + v_3^2 k_4 \varepsilon^{-v_3 t}$$

also nach Gl. (4), da jetzt, wegen:  $r_1 = r_2 = 0$ ; nach (3 a):

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda = \iota \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

$$i_2 = -\frac{M}{L_2} \frac{1}{2\lambda} \varepsilon^{\lambda t} \int \{ -\varepsilon^{-\lambda t} \omega^2 \Im_1 \cos(\omega t + \psi) + v_1^2 k_1 \varepsilon^{(v_1 - \lambda)t} + v_1^2 k_2 \varepsilon^{-(v_1 + \lambda)t} + v_3^2 k_3 \varepsilon^{(v_3 - \lambda)t} + v_3^2 k_4 \varepsilon^{-(v_3 + \lambda)t} \} dt +$$

$$+\frac{M}{L_2} \frac{1}{2\lambda} \varepsilon^{-\lambda t} \int \{ -\varepsilon^{\lambda t} \omega^2 \Im_1 \cos(\omega t + \psi) + v_1^2 k_1 \varepsilon^{(v_1 + \lambda)t} + v_1^2 k_2 \varepsilon^{-(v_1 - \lambda)t} + v_3^2 k_3 \varepsilon^{(v_3 + \lambda)t} + v_3^2 k_4 \varepsilon^{-(v_3 - \lambda)t} \} dt$$

Die Integration dieses Ausdrucks ergibt [s. (17 b)]

$$i_2 = -\Im_1 \frac{M}{L_2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2} \cos(\omega t + \psi) + \frac{M}{L_2} \frac{1}{2\lambda} \left( -\frac{v_1^2}{v_1 - \lambda} k_1 \varepsilon^{v_1 t} + \frac{v_1^2}{v_1 + \lambda} k_2 \varepsilon^{-v_1 t} - \frac{v_3^2}{v_3 - \lambda} k_3 \varepsilon^{v_3 t} + \frac{v_3^2}{v_3 + \lambda} k_4 \varepsilon^{-v_3 t} + \frac{v_1^2}{v_1 + \lambda} k_1 \varepsilon^{v_1 t} - \frac{v_1^2}{v_1 - \lambda} k_2 \varepsilon^{-v_1 t} + \frac{v_3^2}{v_3 + \lambda} k_3 \varepsilon^{v_3 t} - \frac{v_3^2}{v_3 - \lambda} k_4 \varepsilon^{-v_3 t} \right)$$

Da nun

$$\frac{v^2}{v + \lambda} - \frac{v^2}{v - \lambda} = -\frac{2v^2\lambda}{v^2 - \lambda^2}$$

so wird

$$i_2 = -\Im_1 \frac{M}{L_2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2} \cos(\omega t + \psi) - \frac{M}{L_2} \left\{ \frac{v_1^2}{v_1^2 - \lambda^2} (k_1 \varepsilon^{v_1 t} + k_2 \varepsilon^{-v_1 t}) + \frac{v_3^2}{v_3^2 - \lambda^2} (k_3 \varepsilon^{v_3 t} + k_4 \varepsilon^{-v_3 t}) \right\} \quad (19)$$

Auch hier geben das erste Glied die aufgezwingene, die letzten Glieder die Eigenschwingung.

Zu den ersten Gliedern in (18) und (19) konnten wir auch auf anderem Wege kommen, und wir wollen zur Kontrolle diesen Weg gehen.

Die Erfahrung sagt uns, daß eine aufgezwingene, sinusförmige Klemmenspannung auch zu sinusförmigen Dauerströmen in beiden Stromkreisen führt, wenn die von uns angenommenen Bedingungen, bezüglich Kapazität und Selbstinduktion, erfüllt sind.

Wir haben es also im Dauerzustande nur mit sinusförmigen Wechselstromgrößen zu tun, die wir daher symbolisch darstellen dürfen. Setzen wir:

$$e_1 = \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \psi) \approx \mathfrak{E}_1 \varepsilon^{i(\omega t + \psi)} = \mathbf{E}_1$$

und

$$i_1 = \mathfrak{I}_1 \sin(\omega t + \psi + \varphi_1) \approx \mathfrak{I}_1 \varepsilon^{i(\omega t + \psi + \varphi_1)} = \mathbf{I}_1$$

$$i_2 = \mathfrak{I}_2 \sin(\omega t + \psi + \varphi_2) \approx \mathfrak{I}_2 \varepsilon^{i(\omega t + \psi + \varphi_2)} = \mathbf{I}_2$$

so übergehen, wegen  $r_1 = r_2 = 0$ , unsere Ausgangsgleichungen (1) und (2) in

$$\iota \omega L_1 \mathbf{I}_1 - \frac{\iota}{\omega C_1} \mathbf{I}_1 + \iota \omega M \mathbf{I}_2 = \mathbf{E}_1 \quad (1a)$$

$$\iota \omega L_2 \mathbf{I}_2 - \frac{\iota}{\omega C_2} \mathbf{I}_2 = -\iota \omega M \mathbf{I}_1 \quad (2a)$$

Aus (2a) folgt:

$$\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_1 \frac{\omega^2 M C_2}{\omega^2 C_2 L_2 - 1} \quad (3a)$$

Dies in (1a) gesetzt, ergibt:

$$\mathbf{I}_1 \iota \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega^3 M^2 C_2}{1 - \omega^2 C_2 L_2} \right) = \mathbf{E}_1$$

woraus, wenn wir auch hier die Größe  $\tau$  einführen mit:

$$\tau = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2};$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}_1}{\iota} \frac{\omega C_1 (1 - \omega^2 C_2 L_2)}{\omega^2 (C_1 L_1 + C_2 L_2) - 1 - \omega^4 \tau C_1 C_2 L_1 L_2}$$

Multiplizieren wir rechts Zähler und Nenner mit  $\iota$  und bedenken, daß

$$\iota = \varepsilon^{i \frac{\pi}{2}};$$

so folgt:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{E}_1 \varepsilon^{i \frac{\pi}{2}} \frac{\omega C_1 (1 - \omega^2 C_2 L_2)}{1 - \omega^2 (C_1 L_1 + C_2 L_2) + \omega^4 \tau C_1 C_2 L_1 L_2}$$

und daher:

$$i_1 = \mathfrak{E}_1 \frac{\omega C_1 (1 - \omega^2 C_2 L_2)}{1 - \omega^2 (C_1 L_1 + C_2 L_2) + \omega^4 \tau C_1 C_2 L_1 L_2} \sin \left( \omega t + \psi + \frac{\pi}{2} \right)$$

wie das erste Glied von (18).

Und aus (3a) folgt jetzt, wegen  $\lambda^2 = -\frac{1}{C_2 L_2}$ :

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 \frac{\omega^2 M C_2}{1 - \omega^2 C_2 L_2} = \mathbf{I}_1 \frac{\omega^2 M C_2}{1 + \frac{\omega^2}{\lambda^2}} = \mathbf{I}_1 \frac{\omega^2 \lambda^2 M C_2}{\omega^2 + \lambda^2} = -\mathbf{I}_1 \frac{M}{L_2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2}$$

und daher

$$i_2 = -\mathfrak{I}_1 \frac{M}{L_2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2} \sin \left( \omega t + \psi + \frac{\pi}{2} \right)$$

wie das erste Glied von (19).

Mit Hilfe von (18) und (19) können wir nun an die Bestimmung der vier Integrationskonstanten  $k$  gehen. Hierzu brauchen wir vier Gleichungen. Diese sind durch die Überlegung gegeben, daß zur Zeit  $t = 0$ , d. h. im Einschaltmoment, die vier Größen: „Primäre und sekundäre Stromstärke und primäre und sekundäre Kondensatorladung“ noch Null sind.

Die primäre Kondensatorentladung ergibt sich aus:

$$q_1 = \int i_1 dt;$$

nach (18) mit:

$$q_1 = \frac{1}{\omega} \mathfrak{I}_1 \sin(\omega t + \psi) + \frac{1}{v_1} k_1 \varepsilon^{v_1 t} - \frac{1}{v_1} k_2 \varepsilon^{-v_1 t} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{v_3} k_3 \varepsilon^{v_3 t} - \frac{1}{v_3} k_4 \varepsilon^{-v_3 t} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Die Ladung des sekundären Kondensators aus:

$$q_2 = \int i_2 dt;$$

nach (19) mit:

$$q_2 = -\mathfrak{I}_1 \frac{M}{L_2} \frac{\omega}{\omega^2 + \lambda^2} \sin(\omega t + \psi) - \left. \begin{aligned} &-\frac{M}{L_2} \left\{ \frac{v_1}{v_1^2 - \lambda^2} (k_1 \varepsilon^{v_1 t} - k_2 \varepsilon^{-v_1 t}) + \frac{v_3}{v_3^2 - \lambda^2} (k_3 \varepsilon^{v_3 t} - k_4 \varepsilon^{-v_3 t}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Für die Zeit  $t = 0$  lauten also die Gl. (18) bis (21):

$$0 = \mathfrak{I}_1 \cos \psi + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \quad (18 \text{ a})$$

$$0 = -\mathfrak{I}_1 \cos \psi \frac{M}{L_2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2} - \frac{M}{L_2} \left\{ \frac{v_1^2}{v_1^2 - \lambda^2} (k_1 + k_2) + \frac{v_3^2}{v_3^2 - \lambda^2} (k_3 + k_4) \right\} \quad (19 \text{ a})$$

$$0 = \frac{1}{\omega} \mathfrak{I}_1 \sin \psi + \frac{1}{v_1} (k_1 - k_2) + \frac{1}{v_3} (k_3 - k_4) \quad (20 \text{ a})$$

$$0 = -\mathfrak{I}_1 \frac{M}{L_2} \frac{\omega}{\omega^2 + \lambda^2} \sin \psi - \frac{M}{L_2} \left\{ \frac{v_1}{v_1^2 - \lambda^2} (k_1 - k_2) + \frac{v_3}{v_3^2 - \lambda^2} (k_3 - k_4) \right\} \quad (21 \text{ a})$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich, auf durchaus elementarem, aber bekannt mühsamem Wege, die vier Konstanten mit den Werten :

$$k_1 = -\frac{1}{2} \Im_1 \left( \cos \psi + \frac{v_1}{\omega} \sin \psi \right) \frac{(\omega^2 + v_3^2)(v_1^2 - \lambda^2)}{(\omega^2 + \lambda^2)(v_1^2 - v_3^2)} \quad (22)$$

$$k_2 = -\frac{1}{2} \Im_1 \left( \cos \psi - \frac{v_1}{\omega} \sin \psi \right) \frac{(\omega^2 + v_3^2)(v_1^2 - \lambda^2)}{(\omega^2 + \lambda^2)(v_1^2 - v_3^2)} \quad (23)$$

$$k_3 = -\frac{1}{2} \Im_1 \left( \cos \psi + \frac{v_3}{\omega} \sin \psi \right) \frac{(\omega^2 + v_1^2)(v_3^2 - \lambda^2)}{(\omega^2 + \lambda^2)(v_3^2 - v_1^2)} \quad (24)$$

$$k_4 = -\frac{1}{2} \Im_1 \left( \cos \psi - \frac{v_3}{\omega} \sin \psi \right) \frac{(\omega^2 + v_1^2)(v_3^2 - \lambda^2)}{(\omega^2 + \lambda^2)(v_3^2 - v_1^2)} \quad (25)$$

so daß die Ströme  $i_1$  und  $i_2$  aus (18) und (19) bestimmt sind.

Setzen wir der Kürze halber:

$$\left. \begin{aligned} \Im_1 \cos \psi \frac{(\omega^2 + v_3^2)(v_1^2 - \lambda^2)}{(\omega^2 + \lambda^2)(v_1^2 - v_3^2)} &= G_1 \\ \Im_1 \sin \psi \frac{(\omega^2 + v_3^2)(v_1^2 - \lambda^2)}{(\omega^2 + \lambda^2)(v_1^2 - v_3^2)} &= H_1 \\ \Im_1 \cos \psi \frac{(\omega^2 + v_1^2)(v_3^2 - \lambda^2)}{(\omega^2 + \lambda^2)(v_3^2 - v_1^2)} &= G_3 \\ \Im_1 \sin \psi \frac{(\omega^2 + v_1^2)(v_3^2 - \lambda^2)}{(\omega^2 + \lambda^2)(v_3^2 - v_1^2)} &= H_3 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

so wird:

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{2} G_1 - \frac{1}{2} H_1 \frac{v_1}{\omega}; & k_2 &= -\frac{1}{2} G_1 + \frac{1}{2} H_1 \frac{v_1}{\omega} \\ k_3 &= -\frac{1}{2} G_3 - \frac{1}{2} H_3 \frac{v_3}{\omega}; & k_4 &= -\frac{1}{2} G_3 + \frac{1}{2} H_3 \frac{v_3}{\omega} \end{aligned}$$

und daher (18) und (19)

$$i_1 = \left. \begin{aligned} \Im_1 \cos(\omega t + \psi) - G_1 \left( \frac{\varepsilon^{v_1 t} + \varepsilon^{-v_1 t}}{2} \right) - H_1 \frac{v_1}{\omega} \left( \frac{\varepsilon^{v_1 t} - \varepsilon^{-v_1 t}}{2} \right) - \\ - G_3 \left( \frac{\varepsilon^{v_3 t} + \varepsilon^{-v_3 t}}{2} \right) - H_3 \frac{v_3}{\omega} \left( \frac{\varepsilon^{v_3 t} - \varepsilon^{-v_3 t}}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= -\Im_1 \frac{M}{L_2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2} \cos(\omega t + \psi) + \\ + \frac{M}{L_2} \frac{v_1^2}{v_1^2 - \lambda^2} G_1 \left( \frac{\varepsilon^{v_1 t} + \varepsilon^{-v_1 t}}{2} \right) + \frac{M}{L_2} \frac{v_1^2}{v_1^2 - \lambda^2} H_1 \frac{v_1}{\omega} \left( \frac{\varepsilon^{v_1 t} - \varepsilon^{-v_1 t}}{2} \right) + \\ + \frac{M}{L_2} \frac{v_3^2}{v_3^2 - \lambda^2} G_3 \left( \frac{\varepsilon^{v_3 t} + \varepsilon^{-v_3 t}}{2} \right) + \frac{M}{L_2} \frac{v_3^2}{v_3^2 - \lambda^2} H_3 \frac{v_3}{\omega} \left( \frac{\varepsilon^{v_3 t} - \varepsilon^{-v_3 t}}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

Setzen wir nun in Gl. (16)

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2 - 4B}{4}} &= \omega_1^2 \\ \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2 - 4B}{4}} &= \omega_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

so wird:

$$v_1 = \iota \omega_1; \quad v_2 = \iota \omega_2 \quad (28)$$

und es übergehen die Gl. (18b) und (19b) wegen:

$$\frac{\varepsilon^{\iota \omega_1 t} + \varepsilon^{-\iota \omega_1 t}}{2} = \cos \omega_1 t; \quad \iota \frac{\varepsilon^{\iota \omega_1 t} - \varepsilon^{-\iota \omega_1 t}}{2} = -\sin \omega_1 t$$

in:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \Im_1 \cos(\omega t + \psi) - G_1 \cos \omega_1 t + \\ &+ \frac{\omega_1}{\omega} H_1 \sin \omega_1 t - G_2 \cos \omega_2 t + \frac{\omega_2}{\omega} H_2 \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad (29a)$$

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= -\Im_1 \frac{M}{L_2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2} \cos(\omega t + \psi) + \\ &+ \frac{M}{L_2} \frac{v_1^2}{v_1^2 - \lambda^2} G_1 \cos \omega_1 t - \frac{M}{L_2} \frac{v_1^2}{v_1^2 - \lambda^2} H_1 \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega_1 t + \\ &+ \frac{M}{L_2} \frac{v_2^2}{v_2^2 - \lambda^2} G_2 \cos \omega_2 t - \frac{M}{L_2} \frac{v_2^2}{v_2^2 - \lambda^2} H_2 \frac{\omega_2}{\omega} \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad (30a)$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \Im_1 \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ \sqrt{H_1^2 \frac{\omega_1^2}{\omega^2} + G_1^2} \sin\left(\omega_1 t - \arctg \frac{\omega}{\omega_1} \frac{G_1}{H_1}\right) + \\ &+ \sqrt{H_2^2 \frac{\omega_2^2}{\omega^2} + G_2^2} \sin\left(\omega_2 t - \arctg \frac{\omega}{\omega_2} \frac{G_2}{H_2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= -\Im_1 \frac{M}{L_2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2} \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) - \\ &- \frac{M}{L_2} \frac{v_1^2}{v_1^2 - \lambda^2} \sqrt{H_1^2 \frac{\omega_1^2}{\omega^2} + G_1^2} \sin\left(\omega_1 t - \arctg \frac{\omega}{\omega_1} \frac{G_1}{H_1}\right) - \\ &- \frac{M}{L_2} \frac{v_2^2}{v_2^2 - \lambda^2} \sqrt{H_2^2 \frac{\omega_2^2}{\omega^2} + G_2^2} \sin\left(\omega_2 t - \arctg \frac{\omega}{\omega_2} \frac{G_2}{H_2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Wir sehen aus diesen Gleichungen, daß sich, in jedem der beiden Ströme, drei Schwingungszustände überlagern. Einer — das erste Glied rechts in jeder Gleichung — entspricht der aufgezungenen Schwingung, charakterisiert durch die Kreisfrequenz  $\omega$ ; die beiden anderen — die

folgenden zwei Glieder rechts — entsprechen den beiden Eigenschwingungen, deren das System fähig ist. Sie sind durch die Kreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  charakterisiert.

Wir wollen diese Eigenkreisfrequenzen näher betrachten. Nach (27), (12) und (8) ist:

$$\omega_1^2 = \frac{C_1 L_1 + C_2 L_2}{2(1-\kappa^2) C_1 L_1 C_2 L_2} - \sqrt{\frac{(C_1 L_1 - C_2 L_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_1 L_2 \kappa^2}{4(1-\kappa^2)^2 C_1^2 L_1^2 C_2^2 L_2^2}} \quad (31)$$

$$\omega_2^2 = \frac{C_1 L_1 + C_2 L_2}{2(1-\kappa^2) C_1 L_1 C_2 L_2} + \sqrt{\frac{(C_1 L_1 - C_2 L_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_1 L_2 \kappa^2}{4(1-\kappa^2)^2 C_1^2 L_1^2 C_2^2 L_2^2}} \quad (32)$$

Bei gegebenen Größen  $C_1 L_1$  und  $C_2 L_2$  sind also die Eigenfrequenzen nur von dem Koppelungsgrade  $\kappa$  abhängig. Wir wollen die Ausdrücke für den einfachsten Fall:

$$C_1 L_1 = C_2 L_2$$

untersuchen. Für diesen Fall ist:

$$\omega_1^2 = \left. \begin{aligned} & \frac{2 C_1 L_1}{2(1-\kappa^2)(C_1 L_1)^2} - \frac{2 C_1 L_1 \kappa}{2(1-\kappa^2)(C_1 L_1)^2} = \\ & = \frac{1}{C_1 L_1} \frac{1-\kappa}{1-\kappa^2} = \frac{1}{C_1 L_1} \frac{1}{1+\kappa} \end{aligned} \right\} \quad (31a)$$

$$\omega_2^2 = \left. \begin{aligned} & \frac{2 C_1 L_1}{2(1-\kappa^2)(C_1 L_1)^2} + \frac{2 C_1 L_1 \kappa}{2(1-\kappa^2)(C_1 L_1)^2} = \\ & = \frac{1}{C_1 L_1} \frac{1+\kappa}{1-\kappa^2} = \frac{1}{C_1 L_1} \frac{1}{1-\kappa} \end{aligned} \right\} \quad (32a)$$

Es ist weiter:

$$\lambda^2 = -\frac{1}{C_2 L_2} = -\frac{1}{C_1 L_1}; \quad v_1^2 = -\omega_1^2; \quad v_3^2 = -\omega_2^2;$$

$$v_1^2 - v_3^2 = \frac{2\kappa}{1-\kappa^2} \frac{1}{C_1 L_1}; \quad \omega^2 + v_3^2 = \frac{\omega^2 C_1 L_1 (1-\kappa) - 1}{C_1 L_1 (1-\kappa)};$$

$$v_1^2 - \lambda^2 = \frac{1}{C_1 L_1} \frac{\kappa}{1+\kappa};$$

somit:

$$G_1 = \Im_1 \cos \psi \frac{1}{2} \frac{\omega^2 C_1 L_1 (1-\kappa) - 1}{\omega^2 C_1 L_1 - 1};$$

$$H_1 = \Im_1 \sin \psi \frac{1}{2} \frac{\omega^2 C_1 L_1 (1-\kappa) - 1}{\omega^2 C_1 L_1 - 1};$$

$$G_3 = \Im_1 \cos \psi \frac{1}{2} \frac{\omega^2 C_1 L_1 (1+\kappa) - 1}{\omega^2 C_1 L_1 - 1};$$

$$H_3 = \Im_1 \sin \psi \frac{1}{2} \frac{\omega^2 C_1 L_1 (1+\kappa) - 1}{\omega^2 C_1 L_1 - 1};$$

setzt man diese Werte in (29) und (30) ein, so folgt, wenn man auch den Wert für  $\mathfrak{Z}_1$  einführt:

$$i_1 = \left. \begin{aligned} & \mathfrak{E}_1 \frac{\omega C_1 (1 - \omega^2 C_1 L_1)}{1 - 2\omega^2 C_1 L_1 + (1 - \kappa^2) \omega^4 (C_1 L_1)^2} \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + \mathfrak{E}_1 \frac{\omega C_1 \{1 - \omega^2 C_1 L_1 (1 - \kappa)\}}{1 - 2\omega^2 C_1 L_1 + (1 - \kappa^2) \omega^4 (C_1 L_1)^2} \frac{1}{\omega \sqrt{C_1 L_1 (1 + \kappa)}} \cdot \\ & \quad \cdot \sqrt{\cos^2 \psi \cdot \omega^2 C_1 L_1 (1 + \kappa) + \sin^2 \psi} \cdot \\ & \quad \cdot \sin \left\{ \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} t - \arctg \omega \sqrt{C_1 L_1 (1 + \kappa)} \cotg \psi \right\} + \\ & + \mathfrak{E}_1 \frac{\omega C_1 \{1 - \omega^2 C_1 L_1 (1 + \kappa)\}}{1 - 2\omega^2 C_1 L_1 + (1 - \kappa^2) \omega^4 (C_1 L_1)^2} \frac{1}{\omega \sqrt{C_1 L_1 (1 - \kappa)}} \cdot \\ & \quad \cdot \sqrt{\cos^2 \psi \cdot \omega^2 C_1 L_1 (1 - \kappa) + \sin^2 \psi} \cdot \\ & \quad \cdot \sin \left\{ \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} t - \arctg \omega \sqrt{C_1 L_1 (1 - \kappa)} \cotg \psi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$i_2 = \left. \begin{aligned} & \mathfrak{E}_1 \frac{M}{L_2} \frac{\omega C_1 \omega^2 C_1 L_1}{1 - 2\omega^2 C_1 L_1 + (1 - \kappa^2) \omega^4 (C_1 L_1)^2} \cdot \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + \mathfrak{E}_1 \frac{M}{L_2} \frac{1}{2\kappa} \frac{\omega C_1 \{1 - \omega^2 C_1 L_1 (1 - \kappa)\}}{1 - 2\omega^2 C_1 L_1 + (1 - \kappa^2) \omega^4 (C_1 L_1)^2} \frac{1}{\omega \sqrt{C_1 L_1 (1 + \kappa)}} \cdot \\ & \quad \cdot \sqrt{\cos^2 \psi \cdot \omega^2 C_1 L_1 (1 + \kappa) + \sin^2 \psi} \cdot \\ & \quad \cdot \sin \left\{ \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} t - \arctg \omega \sqrt{C_1 L_1 (1 + \kappa)} \cdot \cotg \psi \right\} - \\ & - \mathfrak{E}_1 \frac{M}{L_2} \frac{1}{2\kappa} \frac{\omega C_1 \{1 - \omega^2 C_1 L_1 (1 + \kappa)\}}{1 - 2\omega^2 C_1 L_1 + (1 - \kappa^2) \omega^4 (C_1 L_1)^2} \frac{1}{\omega \sqrt{C_1 L_1 (1 - \kappa)}} \cdot \\ & \quad \cdot \sqrt{\cos^2 \psi \cdot \omega^2 C_1 L_1 (1 - \kappa) + \sin^2 \psi} \cdot \\ & \quad \cdot \sin \left\{ \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} t - \arctg \omega \sqrt{C_1 L_1 (1 - \kappa)} \cdot \cotg \psi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (34)^1$$

Dies sind die endgültigen Ausdrücke für die beiden Ströme. Wir sehen, daß sich, in jedem Stromkreise, die beiden Eigenschwingungen in

<sup>1)</sup> Die Zwischenrechnung, die zu (33) und (34) führt, ist so elementarer Natur, daß sie hier nicht wiedergegeben wurde. Eine Beruhigung wegen der Richtigkeit gibt die Untersuchung, ob, für  $t = 0$ ,  $i_1$  und  $i_2$  gleich Null werden.

Amplitude, Kreisfrequenz und Phase voneinander unterscheiden. Der Unterschied ist durch den Koppelungsfaktor  $\kappa$  bedingt. Es ist daher angemessen, die möglichen Grenzwerte von  $\kappa$  einzusetzen. Diese sind Null und Eins.

Für  $\kappa = 0$  übergeht (33) in:

$$i_1 = -\frac{\mathfrak{E}_1}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}} \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\mathfrak{E}_1}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}} \cdot \frac{1}{\omega \sqrt{C_1 L_1}} \sqrt{\cos^2 \psi \cdot \omega^2 C_1 L_1 + \sin^2 \psi} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} t - \operatorname{arctg} \omega \sqrt{C_1 L_1} \operatorname{cotg} \psi\right)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gl. (44), Abschnitt V und setzt in dieser Gleichung  $r = 0$ , so findet man vollkommene Übereinstimmung; denn es wird dort:

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = \frac{\pi}{2}; \quad \sin^2(\psi - \varphi) = \cos^2 \psi$$

und

$$\operatorname{arctg} \frac{2 \omega \omega_e L C}{2 \operatorname{cotg}(\psi - \varphi) - r \omega C} = \operatorname{arctg} \frac{\omega \sqrt{LC}}{\operatorname{cotg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)} = -\operatorname{arctg} \omega \sqrt{LC} \operatorname{cotg} \psi$$

Es ist also für  $\kappa = 0$  — wie ja selbstverständlich — nur mehr eine Eigenschwingung vorhanden, da der Stromkreis durch keinen zweiten beeinflusst wird.

Für  $\kappa = 1$  haben wir den Fall fester Koppelung. Dann ist nach (31) und (32)

$$\omega_1^2 = \frac{C_1 L_1 + C_2 L_2 - \sqrt{(C_1 L_1 - C_2 L_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_1 L_2 \kappa^2}}{2(1 - \kappa^2) C_1 C_2 L_1 L_2} = \frac{0}{0} =$$

$$= \frac{1}{C_1 L_1 + C_2 L_2}$$

$$\omega_2^2 = \infty;$$

oder wenn:

$$C_1 L_1 = C_2 L_2$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2 C_1 L_1}; \quad \omega_2^2 = \infty$$

Wir sehen auch hier wieder nur „eine“ Eigenschwingung, nämlich die mit der Kreisfrequenz  $\omega_1$ . Die Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega_2 = \infty$  kann physikalisch nicht als existent angesehen werden, da eine

Schwingung mit unendlich hoher Frequenz eine gleichzeitige, gleich große Abweichung von der Gleichgewichtslage nach entgegengesetzten Richtungen, also die Ruhe, bedeutet.

Der Fall  $\kappa = 1$  ist natürlich nicht zu realisieren, da es eine absolut feste Koppelung nicht gibt.

## 2. Selbsterregung.

Erregt sich der Schwingungskreis selbst, durch z. B. Entladung des geladenen, primären Kondensators (s. Abb. 71), so erfaßt, wie schon oben erwähnt, die „homogene“ Form der Gl. (11), also Gl. (13) das Problem. Dann ist (15) die Lösung für  $i_1$ , wo die  $u$  Konstanten sind. Diese Konstanten ergeben sich jetzt auf Grund der Erwägung, daß für  $t = 0$   $i_1$  und  $i_2$  Null sind und ebenso die Ladung des sekundären Kondensators Null ist, während die Ladung des primären Kondensators gegeben ist durch:

$$q_1 = C_1 e_0$$

wenn  $e_0$  die Spannung des geladenen Kondensators ist.

Die Gleichungen für die Konstantenbestimmung lauten daher jetzt:

$$0 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \quad (18c)$$

$$0 = -\frac{M}{L_2} \frac{v_1^2}{v_1^2 - \lambda^2} (k_1 + k_2) - \frac{M}{L_2} \frac{v_3^2}{v_3^2 - \lambda^2} (k_3 + k_4) \quad (19c)$$

$$C_1 e_0 = -\frac{1}{v_1} (k_1 - k_2) - \frac{1}{v_3} (k_3 - k_4) \quad (20c)$$

$$0 = -\frac{M}{L_2} \frac{v_1}{v_1^2 - \lambda^2} (k_1 - k_2) - \frac{M}{L_2} \frac{v_3}{v_3^2 - \lambda^2} (k_3 - k_4) \quad (21c)$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort:

$$\left. \begin{aligned} k_2 &= -k_1; & k_4 &= -k_3 \\ k_1 &= \frac{1}{2} e_0 C_1 \frac{v_1^2 - \lambda^2}{v_3^2 - v_1^2} \frac{v_1 v_3^2}{\lambda^2} \\ k_3 &= \frac{1}{2} e_0 C_1 \frac{v_3^2 - \lambda^2}{v_1^2 - v_3^2} \frac{v_1 v_3}{\lambda^2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

und somit:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{2} e_0 C_1 \frac{v_1 v_3^2}{\lambda^2} \frac{v_1^2 - \lambda^2}{v_3^2 - v_1^2} (\varepsilon^{v_1 t} - \varepsilon^{-v_1 t}) + \\ &+ \frac{1}{2} e_0 C_1 \frac{v_3 v_1^2}{\lambda^2} \frac{v_3^2 - \lambda^2}{v_1^2 - v_3^2} (\varepsilon^{v_3 t} - \varepsilon^{-v_3 t}) \\ i_2 &= -\frac{1}{2} e_0 C_1 \frac{M}{L_2} \frac{v_1^3 v_3^3}{\lambda^2} \frac{1}{v_3^2 - v_1^2} (\varepsilon^{v_1 t} - \varepsilon^{-v_1 t}) - \\ &- \frac{1}{2} e_0 C_1 \frac{M}{L_2} \frac{v_3^3 v_1^2}{v_1^2 - v_3^2} (\varepsilon^{v_3 t} - \varepsilon^{-v_3 t}) \end{aligned}$$

also wegen (28)

$$i_1 = -e_0 C_1 \omega_1 \frac{v_3^2 v_1^2 - \lambda^2}{\lambda^2 v_3^2 - v_1^2} \sin \omega_1 t - e_0 C_1 \omega_2 \frac{v_1^2 v_3^2 - \lambda^2}{\lambda^2 v_1^2 - v_3^2} \sin \omega_2 t$$

$$i_2 = -e_0 C_1 \frac{M}{L_2} \omega_1^3 \frac{v_3^2}{\lambda^2} \frac{1}{v_3^2 - v_1^2} \sin \omega_1 t - e_0 C_1 \frac{M}{L_2} \omega_2^3 \frac{v_1^2}{\lambda^2} \frac{1}{v_1^2 - v_3^2} \sin \omega_2 t$$

oder wenn man beachtet, daß:

$$v_1^2 = -\omega_1^2; \quad v_3^2 = -\omega_2^2; \quad \lambda^2 = -\frac{1}{C_2 L_2}$$

folgt:

$$i_1 = e_0 C_1 \omega_1 \frac{\omega_2^2 (1 - C_2 L_2 \omega_1^2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t + e_0 C_1 \omega_2 \frac{\omega_1^2 (1 - C_2 L_2 \omega_2^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \sin \omega_2 t$$

$$i_2 = e_0 C_1 \frac{M}{L_2} \omega_1 \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 C_2 L_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t + e_0 C_1 \frac{M}{L_2} \omega_2 \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 C_2 L_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \sin \omega_2 t$$

Da:

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{\sqrt{(C_1 L_1 - C_2 L_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_1 L_2 \kappa^2}}{(1 - \kappa^2) C_1 C_2 L_1 L_2};$$

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \frac{1}{(1 - \kappa^2) C_1 C_2 L_1 L_2}$$

wird:

$$i_1 = e_0 C_1 \omega_1 \left. \begin{aligned} & \frac{C_1 L_1 - C_2 L_2 + \sqrt{(C_1 L_1 - C_2 L_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_1 L_2 \kappa^2}}{2 \sqrt{(C_1 L_1 - C_2 L_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_1 L_2 \kappa^2}} \sin \omega_1 t - \\ & - e_0 C_1 \omega_2 \frac{C_1 L_1 - C_2 L_2 - \sqrt{(C_1 L_1 - C_2 L_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_1 L_2 \kappa^2}}{2 \sqrt{(C_1 L_1 - C_2 L_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_1 L_2 \kappa^2}} \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} (36)$$

$$i_2 = e_0 C_1 \omega_1 \left. \begin{aligned} & \frac{M}{L_2} \frac{C_2 L_2}{\sqrt{(C_1 L_1 - C_2 L_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_1 L_2 \kappa^2}} \sin \omega_1 t - \\ & - e_0 C_1 \frac{M}{L_2} \omega_2 \frac{C_2 L_2}{\sqrt{(C_1 L_1 - C_2 L_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_1 L_2 \kappa^2}} \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} (37)$$

Für  $\kappa = 0$ , d. h. für den einfachen, nichtgekoppelten Schwingungskreis, übergeht (36) in (22), Abschnitt V, wenn man dort  $r$ , d. h.  $\alpha$  gleich Null setzt; und wegen  $M = 0$  wird natürlich  $i_2 = 0$ .

In diesem Falle der Selbsterregung treten natürlich nur die beiden Eigenschwingungen, charakterisiert durch  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , auf. Nach (31) und (32) sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  durch den Koppelungsgrad  $\kappa$  bestimmt.

### 3. Der Einschaltvorgang des Starkstromtransformators.

Diesem Problem liegt — wie oben erwähnt — die Gl. (9 a) zugrunde.

Setzen wir in (9 a):

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_1 L_2 + r_2 L_1}{\tau L_1 L_2} = a; \quad \frac{r_1 r_2}{\tau L_1 L_2} = b; \quad \frac{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L_2^2}}{\tau L_1 L_2} = c; \\ \operatorname{arctg} \frac{\omega L_2}{r_2} = \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

so lautet (9 a):

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + a \frac{di_1}{dt} + b i_1 = \mathfrak{C}_1 c \sin(\omega t + \psi + \varphi_2)^1 \quad (39)$$

woraus:

$$i_1 = z_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + z_2 \varepsilon^{\lambda_2 t}$$

mit:

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}; \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (40)$$

und:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \mathfrak{C}_1 c \varepsilon^{-\lambda_1 t} \sin(\omega t + \psi + \varphi_2) dt + K_1 \\ z_2 &= -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int \mathfrak{C}_1 c \varepsilon^{-\lambda_2 t} \sin(\omega t + \psi + \varphi_2) dt + K_2 \end{aligned}$$

Da, wegen:  $\tau < 1$ , die Größe  $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$  stets reell ist, so sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  reelle, negative Größen.

Es folgt somit:

$$\begin{aligned} i_1 = \mathfrak{C}_1 \frac{c}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ -\frac{1}{\omega^2 + \lambda_1^2} \{ \lambda_1 \sin(\omega t + \psi + \varphi_2) + \omega \cos(\omega t + \psi + \varphi_2) \} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega^2 + \lambda_2^2} \{ \lambda_2 \sin(\omega t + \psi + \varphi_2) + \omega \cos(\omega t + \psi + \varphi_2) \} \right] + \\ + K_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + K_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

oder mit:

$$\operatorname{arctg} \frac{\omega(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 - \omega^2} = \beta \quad (41)$$

$$i_1 = \mathfrak{C}_1 c \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}} \sin(\omega t + \psi + \varphi_2 + \beta) + K_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + K_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} \quad (42)$$

1) Siehe die Lösung, Abschnitt V, Gl. (29).

Nach (2) ist für:  $C_2 = \infty$

$$i_2 r_2 + L_2 \frac{d i_2}{d t} = -M \frac{d i_1}{d t}$$

also nach Abschnitt III

$$i_2 = -\frac{M}{L_2} \varepsilon^{-\frac{r_2}{L_2} t} \int \varepsilon^{\frac{r_2}{L_2} t} \left( \frac{d i_1}{d t} \right) dt$$

Es ist aber nach (42)

$$\frac{d i_1}{d t} = \mathfrak{E}_1 \frac{c \omega}{\sqrt{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}} \cos(\omega t + \psi + \varphi_2 + \beta) + \lambda_1 K_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} + \lambda_2 K_2 \varepsilon^{\lambda_2 t}$$

und daher:

$$i_2 = -\frac{M}{L_2} \varepsilon^{-\frac{r_2}{L_2} t} \left\{ \int \mathfrak{E}_1 \frac{c \cdot \omega \cdot \varepsilon^{\frac{r_2}{L_2} t}}{\sqrt{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}} \cos(\omega t + \psi + \varphi_2 + \beta) dt + \right. \\ \left. + \int \lambda_1 K_1 \varepsilon^{\left(\lambda_1 + \frac{r_2}{L_2} t\right)} dt + \int \lambda_2 K_2 \varepsilon^{\left(\lambda_2 + \frac{r_2}{L_2} t\right)} dt \right\}$$

Das erste Integral ergibt:

$$\mathfrak{E}_1 \frac{c \cdot \omega}{\sqrt{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}} \frac{\varepsilon^{\frac{r_2}{L_2} t}}{\left(\frac{r_2}{L_2}\right)^2 + \omega^2} \left\{ \omega \sin(\omega t + \psi + \varphi_2 + \beta) + \frac{r_2}{L_2} \cos(\omega t + \right. \\ \left. + \psi + \varphi_2 + \beta) \right\} = \\ = \mathfrak{E}_1 \frac{c \omega}{\sqrt{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}} \frac{L_2 \varepsilon^{\frac{r_2}{L_2} t}}{r_2^2 + \omega^2 L_2^2} \sqrt{r_2^2 + \omega^2 L_2^2} \cos\left(\omega t + \psi + \varphi_2 + \beta - \right. \\ \left. - \arctg \frac{\omega L_2}{r_2} \right) =$$

wegen (38)

$$= -\mathfrak{E}_1 \frac{c \omega}{\sqrt{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}} \frac{L_2 \varepsilon^{\frac{r_2}{L_2} t}}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \sin\left(\omega t + \psi + \beta - \frac{\pi}{2}\right)$$

und daher:

$$i_2 = \mathfrak{E}_1 \frac{1}{\tau L_1 L_2} \frac{\omega M}{\sqrt{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}} \sin\left(\omega t + \psi + \beta - \frac{\pi}{2}\right) - \left. \begin{aligned} & - \frac{M}{L_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \frac{r_2}{L_2}} K_1 \varepsilon^{\lambda_1 t} - \frac{M}{L_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \frac{r_2}{L_2}} K_2 \varepsilon^{\lambda_2 t} \end{aligned} \right\} (43)$$

Die Grenzbedingungen für die Konstantenbestimmung sind:

Für  $t = 0$ ; ist:  $i_1 = i_2 = 0$

Setzen wir noch

$$\sqrt{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)} = A \quad (44)$$

so folgt aus (42) und (43) für  $t = 0$ :

$$0 = \mathfrak{E}_1 \frac{c}{A} \sin(\psi + \varphi_2 + \beta) + K_1 + K_2$$

$$0 = \frac{1}{\tau L_1 L_2} \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{A} \sin\left(\psi + \beta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\lambda_1 M}{\lambda_1 L_2 + r_2} K_1 - \frac{\lambda_2 M}{\lambda_2 L_2 + r_2} K_2$$

woraus:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{\tau L_1 L_2} \mathfrak{E}_1 \frac{1}{A} \frac{\lambda_1 L_2 + r_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2} \sin\left(\psi + \beta - \arctg \frac{\omega}{\lambda_2}\right) \\ K_2 &= -\frac{1}{\tau L_1 L_2} \mathfrak{E}_1 \frac{1}{A} \frac{\lambda_2 L_2 + r_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2} \sin\left(\psi + \beta - \arctg \frac{\omega}{\lambda_1}\right) \end{aligned} \right\} (45)$$

und endlich (44) in (42) und (43) eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \mathfrak{E}_1 \frac{c}{A} \sin(\omega t + \psi + \varphi_2 + \beta) + \frac{\mathfrak{E}_1}{A} \frac{1}{\tau L_1 L_2} \frac{\lambda_1 L_2 + r_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2} \cdot \\ &\quad \cdot \sin\left(\psi + \beta - \arctg \frac{\omega}{\lambda_2}\right) \varepsilon^{\lambda_1 t} - \\ &\quad - \frac{\mathfrak{E}_1}{A} \frac{1}{\tau L_1 L_2} \frac{\lambda_2 L_2 + r_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2} \sin\left(\psi + \beta - \arctg \frac{\omega}{\lambda_1}\right) \varepsilon^{\lambda_2 t} \end{aligned} \right\} (46)$$

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{\tau L_1 L_2 A} \sin\left(\omega t + \psi + \beta - \frac{\pi}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{\mathfrak{E}_1}{A} \frac{M}{\tau L_1 L_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\omega^2 + \lambda_2^2} \sin\left(\psi + \beta - \arctg \frac{\omega}{\lambda_2}\right) \varepsilon^{\lambda_1 t} + \\ &\quad + \frac{\mathfrak{E}_1}{A} \frac{M}{\tau L_1 L_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\omega^2 + \lambda_1^2} \sin\left(\psi + \beta - \arctg \frac{\omega}{\lambda_1}\right) \varepsilon^{\lambda_2 t} \end{aligned} \right\} (47)$$

Zur Kontrolle der Richtigkeit setzen wir in (46) und (47)  $t = 0$  und erhalten für  $i_1$  und  $i_2$  Null.

Da wir erkannt haben [Gl. (40)], daß  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  reelle, negative Größen sind, sehen wir die beiden Ströme je aus dem Beharrungszustande (erstes Glied) und zwei ungleich gedämpften, aperiodischen Zuständen bestehen.

Setzt man in (46) und (47) nach (40) und (38) die Werte ein, so ergibt die mühsame, aber elementare Rechnung:

$$i_1 = \mathfrak{E}_1 \frac{c}{A} \sin(\omega t + \psi + \beta + \varphi_2) + \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{1}{B} (U - V) \varepsilon^{\lambda_1 t} - \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{1}{B} (U + V) \varepsilon^{\lambda_2 t} \end{aligned} \right\} (48)$$

$$i_2 = \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{\tau L_1 L_2 A} \frac{1}{A} \sin\left(\omega t + \psi + \beta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{M}{B} (R - S) \varepsilon^{\lambda_1 t} + \left. \begin{aligned} & + \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{M}{B} (R + S) \varepsilon^{\lambda_2 t} \end{aligned} \right\} (49)$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L_2^2}}{\tau L_1 L_2} \\ A &= \frac{1}{\tau L_1 L_2} \sqrt{r_1^2 r_2^2 + \omega^4 \tau^2 L_1^2 L_2^2 + \omega^2 \{r_1^2 L_2^2 + r_2^2 L_1^2 + 2 r_1 r_2 L_1 L_2 (1 - \tau)\}} \\ B &= \tau L_1 L_2 A \sqrt{r_1^2 L_2^2 + r_2^2 L_1^2 + 2 r_1 r_2 L_1 L_2 (1 - 2\tau)} \\ U &= r_2 (r_1 L_2 - r_2 L_1) \sin(\psi + \beta) + \omega L_2 \{r_1 L_2 + r_2 L_1 (1 - 2\tau)\} \cos(\psi + \beta) \\ V &= \{r_2 \sin(\psi + \beta) + \omega L_2 \cos(\psi + \beta)\} \sqrt{r_1^2 L_2^2 + r_2^2 L_1^2 + 2 r_1 r_2 L_1 L_2 (1 - 2\tau)} \\ R &= 2 r_1 r_2 \sin(\psi + \beta) + \omega (r_1 L_2 + r_2 L_1) \cos(\psi + \beta) \\ S &= \omega \cos(\psi + \beta) \sqrt{r_1^2 L_2^2 + r_2^2 L_1^2 + 2 r_1 r_2 L_1 L_2 (1 - 2\tau)} \end{aligned} \right\} (50)$$

Wir wollen nun die Gl. (48) und (49) für die möglichen Grenzfälle der Belastung diskutieren.

$$1. \quad r_2 = \infty$$

d. h. der Sekundärkreis ist offen.

Dann wird:

$$\begin{aligned} c &= \frac{r_2}{\tau L_1 L_2}; & A &= \frac{r_2}{\tau L_1 L_2} \sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}; \\ B &= r_2^2 L_1 \sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}; & U &= -r_2^2 L_1 \sin(\psi + \beta); \\ V &= r_2^2 L_1 \sin(\psi + \beta); & R &= 2 r_1 r_2 \sin(\psi + \beta) + \omega r_2 L_1 \cos(\psi + \beta); \\ S &= \omega r_2 L_1 \cos(\psi + \beta); & \varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

Es wird somit:

$$i_1 = \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}} \sin(\omega t + \psi + \beta) - \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}} \sin(\psi + \beta) \varepsilon^{\lambda_1 t} \quad (51)$$

$$i_2 = 0;$$

Weiter ist nach (40) und (38)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2\tau L_1 L_2} \left\{ r_1 L_2 + r_2 L_1 - (r_1 L_2 + r_2 L_1) \sqrt{1 - \frac{4r_1 r_2 L_1 L_2 \tau}{(r_1 L_2 + r_2 L_1)^2}} \right\} \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2\tau L_1 L_2} \left\{ r_1 L_2 + r_2 L_1 + (r_1 L_2 + r_2 L_1) \sqrt{1 - \frac{4r_1 r_2 L_1 L_2 \tau}{(r_1 L_2 + r_2 L_1)^2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Da bei Starkstromtransformatoren — seien es ruhende Transformatoren oder Induktionsmotoren — das  $\tau$  nicht größer als 0,1 wird, können wir die Wurzel in (52) binomisch entwickeln und uns mit zwei Gliedern begnügen; also wir setzen:

$$\sqrt{1 - \frac{4r_1 r_2 L_1 L_2 \tau}{(r_1 L_2 + r_2 L_1)^2}} = 1 - \frac{2r_1 r_2 L_1 L_2 \tau}{(r_1 L_2 + r_2 L_1)^2}$$

und somit:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{r_1 L_2 + r_2 L_1}{2\tau L_1 L_2} \frac{2r_1 r_2 L_1 L_2 \tau}{(r_1 L_2 + r_2 L_1)^2} = -\frac{r_1 r_2}{r_1 L_2 + r_2 L_1} \\ \lambda_2 &= -\frac{r_1 L_2 + r_2 L_1}{\tau L_1 L_2} + \frac{r_1 r_2}{r_1 L_2 + r_2 L_1} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Für  $r_2 = \infty$  wird daher:

$$\lambda_1 = -\frac{r_1}{L_1}; \quad \lambda_2 = -\infty$$

Der Bogen  $\beta$  ist aber nach (41)

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\omega(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 - \omega^2} = \operatorname{arctg} \frac{-\omega a}{b - \omega^2} = -\operatorname{arctg} \frac{\omega \frac{r_1 L_2 + r_2 L_1}{\tau L_1 L_2}}{\frac{r_1 r_2}{\tau L_1 L_2} - \omega^2}$$

also für  $r_2 = \infty$  ist

$$\beta = -\operatorname{arctg} \frac{\omega L_1}{r_1}$$

Es lautet somit (51)

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}} \sin\left(\omega t + \psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L_1}{r_1}\right) - \\ &\quad - \frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}} \sin\left(\psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L_1}{r_1}\right) \varepsilon^{-\frac{r_1}{L_1} t} \end{aligned}$$

in selbstverständlicher Übereinstimmung mit Gl. (10), Abschnitt III, da ja jetzt nur noch ein geschlossener Stromkreis da ist.

Wir wissen aus Abschnitt III und IV, daß in diesem Falle, bei dem Einschaltvorgang, das doppelte Maximalfeld und daher der diesem doppelten Felde entsprechende Stromstoß eintreten kann.

Der andere — allerdings nicht realisierbare — Grenzfall der Belastung wäre:

$$r_2 = 0$$

Dann wird:

$$c = \frac{\omega L_2}{\tau L_1 L_2}; \quad A = \frac{\omega L_2}{\tau L_1 L_2} \sqrt{r_1^2 + \tau^2 \omega^2 L_1^2}; \quad B = r_1 \omega L_2 \sqrt{r_1^2 + \tau^2 \omega^2 L_1^2}$$

$$U = V = r_1 \omega L_2 \cos(\psi + \beta)$$

$$R = S = r_1 \omega L_2 \cos(\psi + \beta)$$

somit:

$$i_1 = \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{r_1^2 + \tau^2 \omega^2 L_1^2}} \sin(\omega t + \psi + \beta + \varphi_2) - \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{r_1^2 + \tau^2 \omega^2 L_1^2}} \cos(\psi + \beta) \varepsilon^{\lambda_2 t}$$

$$i_2 = \mathfrak{E}_1 \frac{M}{L_2} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + \tau^2 \omega^2 L_1^2}} \sin\left(\omega t + \psi + \beta - \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \mathfrak{E}_1 \frac{M}{L_2} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + \tau^2 \omega^2 L_1^2}} \cos(\psi + \beta) \varepsilon^{\lambda_2 t}$$

Da nach (38), (41) und (53) jetzt:

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}; \quad \beta = \arctg \frac{r_1}{\tau \omega L_1}; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\tau} \frac{r_1}{L_1}$$

so folgt:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{r_1^2 + \tau^2 \omega^2 L_1^2}} \cos\left(\omega t + \psi + \arctg \frac{r_1}{\tau \omega L_1}\right) - \\ &\quad - \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{r_1^2 + \tau^2 \omega^2 L_1^2}} \cos\left(\psi + \arctg \frac{r_1}{\tau \omega L_1}\right) \varepsilon^{-\frac{1}{\tau} \frac{r_1}{L_1} t} \\ i_2 &= -\mathfrak{E}_1 \frac{M}{L_2} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + \tau^2 \omega^2 L_1^2}} \cos\left(\omega t + \psi + \arctg \frac{r_1}{\tau \omega L_1}\right) + \\ &\quad + \mathfrak{E}_1 \frac{M}{L_2} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + \tau^2 \omega^2 L_1^2}} \cos\left(\psi + \arctg \frac{r_1}{\tau \omega L_1}\right) \varepsilon^{-\frac{1}{\tau} \frac{r_1}{L_1} t} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Wir finden hier die zweiten Glieder bedeutend stärker gedämpft. Der Dämpfungsfaktor ist  $\frac{1}{\tau}$  mal größer.

Als Höchstbelastung des Transformators ist natürlich nur der sekundäre Kurzschluß möglich. D. h. dann, daß der sekundäre Widerstand  $r_2$  gleich ist dem Widerstand der Sekundärwicklung  $r_{2i}$ . Wir haben also als zweiten, realisierbaren Grenzfall:

$$2. \quad r_2 = r_{2i}$$

Wir wollen nun zur Vereinfachung die Annahme machen:

$$\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_{2i}}$$

eine Annahme, die angenähert tatsächlich erfüllt ist. Setzen wir:

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{L_1}{r_1}; \quad \mathfrak{X}_2 = \frac{L_2}{r_2} \quad (55)$$

so heißt unsere Annahme auch:

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}$$

Dann wird nach (53)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{\frac{L_2}{r_2} + \frac{L_1}{r_1}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{X}} \\ \lambda_2 &= -\frac{\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2}{\tau \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2} + \frac{1}{\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau \mathfrak{X}} (1 + 1 + 2 - \tau) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{X}} \frac{4 - \tau}{\tau} \end{aligned} \right\} (56)$$

Wir multiplizieren und dividieren nun in (50) sämtliche Ausdrücke mit  $r_1 r_2$  und erhalten:

$$\begin{aligned} A &= \frac{r_1 r_2}{\tau L_1 L_2} \sqrt{1 + \omega^4 \tau^2 \mathfrak{X}^4 + \omega^2 \{2 \mathfrak{X}^2 + 2 \mathfrak{X}^2 (1 - \tau)\}} = \\ &= \frac{1}{\tau \mathfrak{X}^2} \sqrt{(1 - \tau \omega^2 \mathfrak{X}^2)^2 + 4 \omega^2 \mathfrak{X}^2} \\ B &= \tau \mathfrak{X}^2 r_1^2 r_2^2 A \sqrt{4 \mathfrak{X}^2 (1 - \tau)} = 2 \tau \mathfrak{X}^3 r_1^2 r_2^2 A \sqrt{1 - \tau} \\ U &= 2 \omega \mathfrak{X}^2 r_1 r_2^2 \cos(\psi + \beta) (1 - \tau) \\ V &= 2 r_1 r_2^2 \mathfrak{X} \sqrt{1 - \tau} \{ \sin(\psi + \beta) + \omega \mathfrak{X} \cos(\psi + \beta) \} \\ R &= 2 r_1 r_2 \{ \sin(\psi + \beta) + \omega \mathfrak{X} \cos(\psi + \beta) \} \\ S &= 2 r_1 r_2 \omega \mathfrak{X} \cos(\psi + \beta) \sqrt{1 - \tau} \end{aligned}$$

Führen wir dies in (48) und (49) ein, so ergibt sich, wenn wir auch noch in (48)  $\sin \varphi_2$  und  $\cos \varphi_2$  einführen, und setzen

$$\sqrt{(1 - \tau \omega^2 \mathfrak{X}^2)^2 + 4 \omega^2 \mathfrak{X}^2} = N \quad (57)$$

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{1}{N} \sin(\omega t + \psi + \beta) + \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{\omega \mathfrak{X}}{N} \cos(\omega t + \psi + \beta) + \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{\omega \mathfrak{X} \sqrt{1 - \tau}}{N} \cos(\psi + \beta) - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{\omega \mathfrak{X}}{N} \cos(\psi + \beta) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{1}{N} \sin(\psi + \beta) \right\} \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{X}} t} - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{\omega \mathfrak{X} \sqrt{1 - \tau}}{N} \cos(\psi + \beta) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{\omega \mathfrak{X}}{N} \cos(\psi + \beta) + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{1}{N} \sin(\psi + \beta) \right\} \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{X}} \frac{4 - \tau}{\tau} t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_2 = & - \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \cos(\omega t + \psi + \beta) - \left\{ \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{1}{\mathfrak{I}} \frac{M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1-\tau}} \sin(\psi + \beta) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1-\tau}} \cos(\psi + \beta) - \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \cos(\psi + \beta) \left. \right\} \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{I}} t} + \\
 & + \left\{ \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{1}{\mathfrak{I}} \frac{M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1-\tau}} \sin(\psi + \beta) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1-\tau}} \cos(\psi + \beta) + \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \cos(\psi + \beta) \left. \right\} \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{I}} \frac{4-\tau}{\tau} t}
 \end{aligned}$$

Wegen  $\tau < 0,1$  ist:

$$\sqrt{1-\tau} \approx 1 - \frac{\tau}{2}; \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1-\tau}} \approx 1 + \frac{\tau}{2};$$

Es wird daher:

$$\left. \begin{aligned}
 i_1 = & \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{1}{N} \left\{ \sin(\omega t + \psi + \beta) + \cos(\omega t + \psi + \beta) \omega \mathfrak{I} \right\} - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{1}{N} \left\{ \sin(\psi + \beta) + \cos(\psi + \beta) \omega \mathfrak{I} \frac{\tau}{2} \right\} \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{I}} t} - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{1}{N} \left\{ \sin(\psi + \beta) - \cos(\psi + \beta) \omega \mathfrak{I} \frac{\tau}{2} + \right. \\
 & \left. + \cos(\psi + \beta) 2 \omega \mathfrak{I} \right\} \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{I}} \frac{4-\tau}{\tau} t}
 \end{aligned} \right\} (58)$$

$$\left. \begin{aligned}
 i_2 = & - \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \cos(\omega t + \psi + \beta) - \\
 & - \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{M}{\mathfrak{I} r_1 r_2} \frac{1}{N} \left\{ \sin(\psi + \beta) \left( 1 + \frac{\tau}{2} \right) + \cos(\psi + \beta) \omega \mathfrak{I} \frac{\tau}{2} \right\} \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{I}} t} + \\
 & + \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{M}{\mathfrak{I} r_1 r_2} \frac{1}{N} \left\{ \sin(\psi + \beta) \left( 1 + \frac{\tau}{2} \right) + \right. \\
 & \left. + \cos(\psi + \beta) \omega \mathfrak{I} \frac{\tau}{2} + \cos(\psi + \beta) 2 \omega \mathfrak{I} \right\} \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{I}} \frac{4-\tau}{\tau} t}
 \end{aligned} \right\} (59)$$

Diese Gleichungen können nun diskutiert werden. Für unsere normalen Verhältnisse ist zu setzen:

$$\omega > 300; \quad \mathfrak{I} \approx 1;$$

dann wird nach (41)

$$\begin{aligned}
 \beta & = \operatorname{arctg} \frac{\omega(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 - \omega^2} = \operatorname{arctg} \frac{-\omega a}{b - \omega^2} = \\
 & = \operatorname{arctg} \frac{-\omega(r_1 L_2 + r_2 L_1)}{r_1 r_2 - \omega^2 \tau L_1 L_2} = \operatorname{arctg} \frac{-2 \omega \mathfrak{I}}{1 - \tau \omega^2 \mathfrak{I}^2} \\
 \beta & \approx \operatorname{arctg} \frac{-2 \omega \mathfrak{I}}{-\tau \omega^2 \mathfrak{I}^2} = \operatorname{arctg} \frac{-2}{-\tau \omega \mathfrak{I}} \sim \pi
 \end{aligned}$$

Ferner:

$$\arctg \omega \mathfrak{X} \frac{\tau}{2} \sim \frac{\pi}{2}$$

Dann wird:

$$\begin{aligned} i_1 &\sim \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{\sqrt{1 + \omega^2 \mathfrak{X}^2}}{N} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{\sqrt{1 + \left(\omega \mathfrak{X} \frac{\tau}{2}\right)^2}}{N} \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{X}} t} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{\sqrt{1 + \left(2\omega \mathfrak{X} - \omega \mathfrak{X} \frac{\tau}{2}\right)^2}}{N} \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{X}} \frac{4-\tau}{\tau} t} \\ i_2 &\sim \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \cos(\omega t + \psi) - \\ &- \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{M}{\mathfrak{X} r_1 r_2} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\tau}{2}\right)^2 + \left(\omega \mathfrak{X} \frac{\tau}{2}\right)^2}}{N} \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{X}} t} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathfrak{E}_1 \frac{M}{\mathfrak{X} r_1 r_2} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\tau}{2}\right)^2 + \left(2\omega \mathfrak{X} + \omega \mathfrak{X} \frac{\tau}{2}\right)^2}}{N} \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{X}} \frac{4-\tau}{\tau} t} \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sind die zweiten Glieder rechts gegenüber den anderen bedeutungslos und da man 1 gegenüber  $\omega^2 \mathfrak{X}^2$  und  $\tau$  gegenüber 4 vernachlässigen kann, folgt:

$$\begin{aligned} i_1 &\sim \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{\omega \mathfrak{X}}{N} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\mathfrak{E}_1}{r_1} \frac{\omega \mathfrak{X}}{N} \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \varepsilon^{-\frac{2}{\tau} \frac{1}{\mathfrak{X}} t} \\ i_2 &\sim \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \cos(\omega t + \psi) - \mathfrak{E}_1 \frac{\omega M}{r_1 r_2} \frac{1}{N} \cos \psi \cdot \varepsilon^{-\frac{2}{\tau} \frac{1}{\mathfrak{X}} t} \end{aligned}$$

Da nun nach (57)  $N \sim \tau \omega^2 \mathfrak{X}^2$

so folgt:

$$\begin{aligned} i_1 &\sim \frac{\mathfrak{E}_1}{\tau \omega L_1} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\mathfrak{E}_1}{\tau \omega L_1} \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \varepsilon^{-\frac{2}{\tau} \frac{1}{\mathfrak{X}} t} \\ i_2 &\sim \mathfrak{E}_1 \frac{M}{\tau \omega L_1 L_2} \cos(\omega t + \psi) - \mathfrak{E}_1 \frac{M}{\tau \omega L_1 L_2} \cos \psi \cdot \varepsilon^{-\frac{2}{\tau} \frac{1}{\mathfrak{X}} t} \end{aligned}$$

Wir finden auch hier den gefährlichsten Einschaltmoment für

$$\psi = \pi$$

also für den Durchgang der Primärspannung durch Null. Von einer Verdoppelung der Kurzschlußströme kann aber keine Rede mehr sein, da die Dämpfung  $\frac{2}{\tau}$  mal größer ist als beim Leerlauf.

## X. Stromverdrängung.

Widerstand und Koeffizient der Selbstinduktion eines Leiters sind nicht nur von seiner materiellen Beschaffenheit, seiner Temperatur (nur für den Widerstand gültig) und seinen geometrischen Dimensionen, sondern auch von der Frequenz des Stromes, der ihn durchsetzt, abhängig. Die Ursache dieser Abhängigkeit von der Frequenz ist die Erscheinung der Stromverdrängung, welche darin besteht, daß die Stromfäden von der Leitermitte nach dem Rande gedrängt werden. Dadurch ändert sich die Stromdichte im Querschnitt des Leiters; sie wird nach dem Rande, der Haut des Leiters größer. Man nennt deshalb die Erscheinung auch den Haut oder (englisch) Skineffekt. Das heißt nichts anderes, als daß die gesamte Strommenge nur von einem Teile des Querschnittes geführt wird, wodurch der Widerstand des Leiters scheinbar wächst. Andererseits wird durch diese Verdrängung das innere Feld des Leiters kleiner, während das äußere ungeändert bleibt. Der Koeffizient der Selbstinduktion wird also kleiner. Diese letzte Änderung ist bei nicht ferromagnetischem Leitermaterial nur unbedeutend, da eben nur das, an und für sich, schwache innere Feld geändert wird. Bei Eisenleitern mit, infolge der hohen Permeabilität, starkem innerem Felde, ist die Änderung natürlich bedeutend größer. Die Widerstandsänderung aber kann bei jedem Leitermaterial eine ganz gewaltige sein.

Die Erscheinung der Stromverdrängung ist durch die Gesetze der elektromagnetischen Induktion leicht zu erklären. Denken wir uns (s. Abb. 72) einen vollen, kreiszylindrischen Leiter von unten nach oben vom Strome durchflossen, so sind die Stromfäden achsenparallele Linien, die bei Gleichstrom den Querschnitt in gleicher Dichte erfüllen. Das, vom Strome erzeugte, äußere und innere magnetische Feld hat, aus Symmetriegründen, die Richtung von, zum Leiterumfang, konzentrischen Kreisen, die das Rechteck  $abcd$  von vorn nach rückwärts durchsetzen. Wir wollen nun den Strom z. B. wachsen lassen, dann wächst auch das Feld, welches das Rechteck durchsetzt und der Umfang des Rechtecks wird daher, nach dem Induktionsgesetz, Sitz einer EMK, die der Richtung des Uhrzeigers entgegenwirkt, sich daher im äußeren Rande ( $db$ ) zu der vorhandenen Potentialdifferenz addiert, im inneren Rande ( $ca$ ) sich von der Potentialdifferenz subtrahiert. Dadurch wird die Potentialdifferenz der Punkte  $d$  und  $b$  größer als die der Punkte  $c$  und  $a$  und daher die Stromdichte, in der Zeit der Stromänderung, am Rande größer als in der

Mitte. Nimmt die Stromstärke — bei unveränderter Richtung — ab, so erhält die, im Umfange des Rechteckes, induzierte EMK die Richtung des Uhrzeigers und es wird die Stromdichte in der Zeit der Änderung, in der Mitte größer und am Rande kleiner.

Man könnte nun glauben, daß bei Wechselstrom, wo abwechselnd Stromänderungen im Sinne der Zu- oder Abnahme vorkommen, die

Abb. 72.

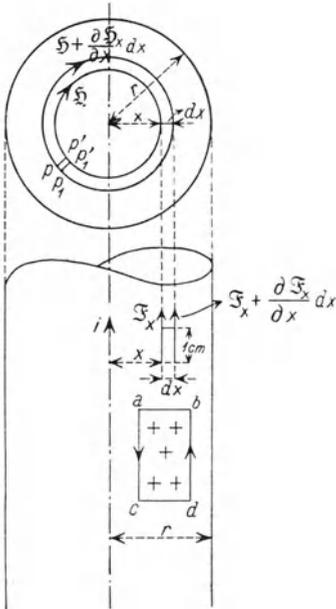


Abb. 73 a.

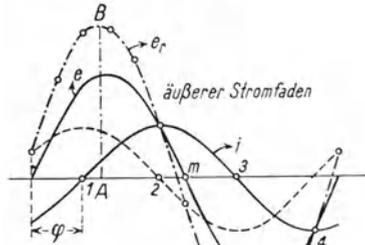
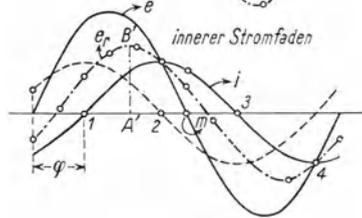


Abb. 73 b.



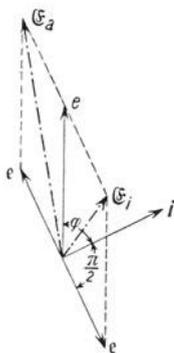
Stromfäden in einer Halbperiode nach außen, in der anderen nach innen gedrängt werden und auf diese Art kein Unterschied zwischen außen und innen vorhanden sei.

Dies wäre in der Tat der Fall, wenn Spannungsdifferenz ( $cd - ab$ ) und Stromstärke phasengleich wären.

Diese Phasengleichheit besteht aber, wie wir wissen, der Selbstinduktion wegen, nicht. In Abb. 73 sind die Verhältnisse in Schaulinien dargestellt. Abb. 73 a zeigt Spannungs- und Strombild zwischen  $b$  und  $d$ , Abb. 73 b zwischen  $a$  und  $c$ .  $e$  und  $i$  bedeuten in beiden Abbildungen Spannung und Strom bei vorläufiger Annahme gleicher Stromdichte. Die, im Rechteckumfang, induzierten EMKK sind durch die gestrichelten Kurven dargestellt, die die Differentialkurven von  $i$  sind. Im Bereich 1, 2 wächst die Stromstärke nach einer Sinuslinie; also nimmt ihre Änderung nach

der gestrichelten Kosinuslinie ab. Eine, dieser Änderung proportionale, Größe, die induzierte EMK, summiert sich im äußeren Faden zu der vorhandenen Spannungsdifferenz und subtrahiert sich im inneren Stromfaden von ihr. Im Bereich 2, 3 nimmt die Stromstärke — bei gleichgebliebener Stromrichtung — ab; ihre Änderung subtrahiert sich, im Bereich 2,  $m$  im

Abb. 74.



äußeren Faden und addiert sich im inneren Faden zu der vorhandenen Spannungsdifferenz. In  $m$  wechselt aber die Spannung ihr Vorzeichen, so daß im Bereich  $m$ , 3 aus der Subtraktion eine Addition wird und umgekehrt. Als Schlußresultat erhalten wir im äußeren Faden eine Spannung  $e_r$  mit der großen Amplitude  $AB$ , im inneren eine Spannung  $e_r$  mit der kleinen Amplitude  $A'B'$ .

Einfacher, wenn auch nicht so durchsichtig, stellt das Vektordiagramm diese Verhältnisse dar (s. Abb. 74).  $e$  ist der Vektor der Spannungsdifferenz zwischen den Linien  $ab$  und  $cd$ ,  $i$  der Strom. Senkrecht auf dem Strome steht die induzierte EMK  $e$ , die sich im äußeren Faden zu  $e$  addiert, im inneren Faden von  $e$  subtrahiert, so daß die Spannungsamplituden  $\mathcal{E}_a$  und  $\mathcal{E}_i$  resultieren. Wäre der Phasenwinkel  $\varphi$  zwischen  $e$  und  $i$  Null, so würde:  $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_i$ . Je größer  $\varphi$  wird, desto größer wird der Unterschied von  $\mathcal{E}_a$  und  $\mathcal{E}_i$ ;  $\varphi$  aber wächst mit der Frequenz.

Soviel über das Physikalische der Erscheinung.

Zum Zwecke der exakten Berechnung der Änderung von Widerstand und Selbstinduktion ist die genaue Kenntnis des Verlaufes der Strom- und Feldlinien notwendig. Diese letzteren verlaufen aber — in einfacher Weise — nur in idealisierten Fällen, auf deren Behandlung wir uns beschränken.

Für die Leitungsführung kommen drei Fälle in Betracht:

1. Der Leiter von kreisförmigem Querschnitt.
2. Der Leiter von rechteckigem Querschnitt, beide in Luft verlegt.
3. Der Leiter in der Nut.

## 1. Der Leiter mit Kreisquerschnitt.

### a) Der Widerstand.

Der idealisierte Fall, der uns hier eine exakte Berechnung gestattet, ist: der gerade Leiter, dessen Rückleitung im Unendlichen liegt. Da wegen des unendlich großen Abstandes von Hin- und Rückleitung eine gegenseitige Beeinflussung ausgeschlossen ist, haben wir die Gewähr,

daß — aus Symmetriegründen — die Stromdichten in gleichen Achsenabständen gleich sind und die Feldlinien konzentrierte Kreise um die Achse bilden.

Ist im „praktischen“ Falle der Leiterabstand groß gegenüber dem Leiterradius, so sind die Ergebnisse des idealisierten Falles mit größter Annäherung gültig.

Zur mathematischen Erfassung des Problems dienen die beiden Maxwell'schen Gleichungen. Die erste besagt:

Das  $4\pi$ -fache der zu einer Fläche senkrechten elektrischen Durchflutung ist gleich dem Linienintegral der magnetischen Feldstärke über die Randkurve dieser Fläche.

Wenden wir diesen Satz auf ein Kreisringelement der Querschnittsfläche vom Radius  $x$  und der Breite  $dx$  an (s. Abb. 72) und nennen wir  $j$  und  $\mathfrak{H}$  die Stromdichte und magnetische Feldstärke in der Achsenentfernung  $x$ ,  $\epsilon$  die Dielektrizitätskonstante des Leitermaterials und  $\mathfrak{E}$  die elektrische Feldstärke, so gilt die Gleichung:

$$4\pi\left(j + \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right)(2\pi x dx) = \left(\mathfrak{H} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} dx\right)2\pi(x + dx) - \mathfrak{H} 2\pi x \quad (1)$$

Bei der Bildung des Linienintegrals muß die Randkurve in einem Zuge durchlaufen werden. Das ist nur möglich, wenn wir den Kreisring in irgend einem Punkte, z. B.  $p$ , in welchem wir beginnen, aufschneiden. Wir durchlaufen jetzt den äußeren Kreis und gelangen nach  $p_1$ , gehen von hier nach  $p'_1$  auf den inneren Kreis über und müssen nun den inneren Kreis in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, um nach  $p'$  und  $p$  zurückzugelangen. Daher das Minuszeichen vor  $\mathfrak{H} \cdot 2\pi x$ . Die Stücke  $p_1 p'_1$  und  $p' p$  des Integrationsweges entfallen aus der Rechnung, da ja hier die Kraft auf dem Wege senkrecht steht. Die Spaltbreite  $p p_1$  ist natürlich unendlich schmal gedacht, so daß tatsächlich die ganze Länge der beiden Kreise berücksichtigt ist.

Auf der linken Seite der Gleichung steht die „vollständige“ elektrische Durchflutung, also Leitungs- und Verschiebungsstrom. Bei der ersten, von Lord Kelvin gegebenen, Theorie blieb der Verschiebungsstrom, also das Glied  $\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$  unberücksichtigt. Wir wollen zunächst bei dieser Theorie bleiben. Dann lautet (1)

$$4\pi j 2\pi x dx = \mathfrak{H} 2\pi dx + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} 2\pi x dx + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} 2\pi dx^2$$

oder wegen Fortfall des unendlich Kleinen zweiter Ordnung, bei Division der ganzen Gleichung durch  $2\pi x dx$

$$4\pi j = \frac{\mathfrak{H}}{x} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} \quad (1a)$$

Die zweite Maxwellsche Gleichung besagt, daß die zeitliche Abnahme des, eine Fläche senkrecht durchsetzenden, magnetischen Flusses gleich ist dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke über die Randkurve der Fläche, wobei Fluß und elektrisches Feld ein Rechtssystem bilden.

Wenden wir das auf ein Flächenelement von der Breite  $dx$  und der Länge 1 cm an (s. Abb. 72), so gilt die Gleichung:

$$-\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} (dx \cdot 1 \text{ cm}) = \mathfrak{I} (1 \text{ cm}) - \left( \mathfrak{I} + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x} dx \right) (1 \text{ cm}) \quad (\alpha)$$

Hier ist  $\mu$  die — über den Querschnitt als konstant angenommene — Permeabilität. Für das Linienintegral kommen natürlich nur die Wege in Richtung der elektrischen Feldstärke in Betracht. Das Minuszeichen rechts ist durch den Umlaufsinn des Rechtecks begründet.

Ist  $\varrho$  der spezifische Widerstand des Leiters, so ist

$$\mathfrak{I} = \varrho j$$

und es übergeht ( $\alpha$ ) in:

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \varrho \frac{\partial j}{\partial x} \quad (2)$$

In (1a) und (2) sehen wir nun unsere Ausgangsgleichungen, aus denen wir  $j$  und  $\mathfrak{H}$  bestimmen können.

Differenzieren wir zunächst (1a) nach  $t$ , so folgt:

$$4\pi \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{1}{x} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x \partial t} \quad (\beta)$$

aus (2) aber ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial j}{\partial x}; \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x \partial t} = \frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial^2 j}{\partial x^2}$$

Dies in ( $\beta$ ) ergibt:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial j}{\partial x} = 4\pi \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial j}{\partial t} \quad (3)$$

Differenzieren wir (1a) nach  $x$ , so folgt:

$$4\pi \frac{\partial j}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} - \frac{1}{x^2} \mathfrak{H} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2}$$

und dies in (2) ergibt:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} - \frac{\mathfrak{H}}{x^2} = 4 \pi \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad (4)$$

Da wir ein Wechselstromproblem behandeln, an dem uns hier nur der stationäre Zustand interessiert, wissen wir, daß, in diesem, die Stromstärke und auch die Feldstärke periodische Funktionen der Zeit sind, für die wir also reine Sinusfunktionen einsetzen können. Die Sinusfunktionen aber dürfen wir durch die Symbole ersetzen und schreiben<sup>1)</sup>:

$$j = j_x e^{i\omega t}; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_x e^{i\omega t} \quad (5)$$

wo  $\omega$  die Kreisfrequenz des Wechselstromes,  $j_x$  und  $\mathfrak{H}_x$  die Amplituden von Stromdichte und Feldstärke im Abstände  $x$  von der Achse sind. Die Verwendung dieser Symbolik überführt nun — und das ist ihr Zweck — die partiellen Differentialgleichungen (3) und (4) in totale, mit einer unabhängig Veränderlichen  $x$ ; denn (3) und (4) lauten nach Einführung der Symbole aus (5), wenn man beiderseits mit  $e^{i\omega t}$  kürzt:

$$\frac{d^2 j_x}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dj_x}{dx} = i\omega \frac{4\pi\mu}{\rho} j_x$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}_x}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathfrak{H}_x}{dx} - \frac{1}{x^2} \mathfrak{H}_x = i\omega \frac{4\pi\mu}{\rho} \mathfrak{H}_x$$

Wir wollen nun setzen:

$$w^2 = -i \frac{4\pi\omega\mu}{\rho} = -i \frac{4\pi 2\pi f \mu}{\rho}$$

und setzen wir

$$k = 2\pi \sqrt{\frac{\mu f}{\rho}} \quad (6)$$

so wird:

$$w^2 = -i 2k^2 = 2k^2 e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (7)$$

und

$$w = k\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (7a)$$

Mit diesem Einsatz übergehen unsere Gleichungen in:

$$\frac{d^2 j_x}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dj_x}{dx} + w^2 j_x = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}_x}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathfrak{H}_x}{dx} + \left(w^2 - \frac{1}{x^2}\right) \mathfrak{H}_x = 0 \quad (9)$$

---

<sup>1)</sup> Ich führe hier für die Basis der natürlichen Logarithmen wieder den Buchstaben  $e$  ein, da  $\varepsilon$  für die Dielektrizitätskonstante benutzt ist.

Die erste Differentialgleichung (8), als eine solche zweiter Ordnung, hat zwei Partikulärlösungen, deren Summe die allgemeine Lösung ist. Nennen wir die Partikulärlösungen  $J_0$  und  $K_0$ , so ist

$$j_x = a J_0 + a' K_0 \quad (10)$$

wo  $a$  und  $a'$  Konstanten sind.

Wir gewinnen eine Partikulärlösung durch Entwicklung von  $j_x$  in eine Reihe steigender Potenzen von  $x$ , indem wir setzen:

$$j_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \dots \quad (11)$$

dann ist:

$$\frac{d j_x}{d x} = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + 5 a_5 x^4 + 6 a_6 x^5 + \dots \quad (12)$$

$$\frac{d^2 j_x}{d x^2} = 2 a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + 3 \cdot 4 \cdot a_4 x^2 + 4 \cdot 5 \cdot a_5 x^3 + 5 \cdot 6 \cdot a_6 x^4 + \dots \quad (13)$$

wo die  $a$  willkürliche Konstanten sein sollen.

Nun multiplizieren wir (11) mit  $w^2$ ; (12) mit  $1/x$  und addieren (13) hinzu; dann ergibt die Summe dieser neuen Gleichungen, nach (8), Null.

Ordnen wir das Resultat nach Potenzen von  $x$ , so wird:

$$0 = a_1 x^{-1} + (w^2 a_0 + 4 a_2) x^0 + (w^2 a_1 + 9 a_3) x^1 + (w^2 a_2 + 16 a_4) x^2 + \\ + (w^2 a_3 + 25 a_5) x^3 + (w^2 a_4 + 36 a_6) x^4 + (w^2 a_5 + 49 a_7) x^5 + \dots$$

Da diese Gleichung für alle Werte von  $x$  gelten soll, müssen alle Koeffizienten Null sein. Das heißt, es folgt:

$$a_1 = 0; w^2 a_0 + 4 a_2 = 0; w^2 a_1 + 9 a_3 = 0; w^2 a_2 + 16 a_4 = 0 \text{ usw.}$$

Daraus folgt sofort, daß wegen:  $a_1 = 0$ ; auch  $a_3, a_5, a_7$ , kurz alle Konstanten mit ungerader Stellzahl Null sein müssen; und es bleiben nur übrig:

$$a_2 = -\frac{w^2 a_0}{2^2}; a_4 = +\frac{w^4 a_0}{2^2 \cdot 4^2}; a_6 = -\frac{w^6 a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}; \text{ usw.}$$

woraus sich das Bildungsgesetz der  $a$  ergibt.

Demnach wird ein partikuläres Integral von (8)

$$j_x = a_0 \left( 1 - \frac{w^2 x^2}{2^2} + \frac{w^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{w^6 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{w^8 x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) \quad (11a)$$

Das Klammerglied heißt die Besselsche, oder Zylinderfunktion erster Art nullter Ordnung des Argumentes  $w x$ . Wir schreiben sie

$$J_{0(w x)}$$

Setzen wir in (7)

$$2 k^2 = m^2 \quad (14)$$

so wird:

$$w^2 = -\iota m^2; \quad \text{und} \quad w^2 x^2 = -\iota m^2 x^2 \quad (15)$$

Setzen wir endlich:

$$m^2 x^2 = z^2; \quad (16)$$

so wird:

$$w^2 x^2 = -\iota z^2; \quad w^4 x^4 = -z^4; \quad w^6 x^6 = +\iota z^6; \\ w^8 x^8 = +z^8; \quad w^{10} x^{10} = -\iota z^{10}; \quad w^{12} x^{12} = -z^{12}; \quad \text{usw.}$$

Wir erhalten also aus (11 a)

$$j_x = a_0 \left( 1 + \iota \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \iota \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{z^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \right. \\ \left. + \iota \frac{z^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right)$$

oder:

$$j_x = a_0 \left\{ \left( 1 - \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{z^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{z^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \right) + \right. \\ \left. + \iota \left( \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{z^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) \right\} \quad (17a)$$

Lord Kelvin benutzte hierfür die Schreibweise, bei der wir bleiben wollen:

$$j_x = a_0 \{ \text{ber } z + \iota \text{ bei } z \} \quad (17)$$

was bedeuten soll:

ber  $z$  = reeller Teil

bei  $z$  = imaginärer Teil

der Besselschen Funktion erster Art, nullter Ordnung, vom Argumente  $w x$ ;

oder da:  $w^2 x^2 = -\iota z^2 = -\iota \cdot \iota \frac{z^2}{\iota} = \frac{z^2}{\iota}$ ; auch vom Argumente  $\frac{z}{\sqrt{\iota}}$ .

In der Besselschen Funktion  $J_0(w x)$  haben wir also eine partikuläre Lösung gefunden.

Die zweite soll die Form haben:

$$K_0 = J_0(w x) \cdot Z \quad (18)$$

welcher Ansatz ohne weiteres zulässig ist, wenn  $Z$  eine zu bestimmende Größe bedeutet.

Ist aber  $K_0$  ein partikuläres Integral von (8), so muß es Gl. (8) erfüllen. Das heißt, es muß sein:

$$\frac{d^2 K_0}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d K_0}{d x} + w^2 K_0 = 0 \quad (19)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} w^2 K_0 &= w^2 J_0 Z \\ \frac{1}{x} \frac{dK_0}{dx} &= \frac{1}{x} \frac{dJ_0}{dx} Z + \frac{1}{x} \frac{dZ}{dx} J_0 \\ \frac{d^2 K_0}{dx^2} &= \frac{d^2 J_0}{dx^2} Z + 2 \frac{dZ}{dx} \cdot \frac{dJ_0}{dx} + \frac{d^2 Z}{dx^2} J_0 \end{aligned}$$

Summieren wir diese drei Gleichungen, so gibt die linke Seite, laut (19) Null; also:

$$0 = Z \left( \frac{d^2 J_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_0}{dx} + w^2 J_0 \right) + \frac{d^2 Z}{dx^2} J_0 + 2 \frac{dZ}{dx} \frac{dJ_0}{dx} + \frac{1}{x} \frac{dZ}{dx} J_0$$

Das Klammerglied muß Null sein, da es durch den Wert des ersten partikulären Integrales  $J_0$  zu Null gemacht wird, daher muß auch der Rest Null sein, d. h.:

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} J_0 + 2 \frac{dZ}{dx} \frac{dJ_0}{dx} + \frac{1}{x} \frac{dZ}{dx} J_0 = 0$$

Dividieren wir durch  $J_0 \frac{dZ}{dx}$ , so erhalten wir:

$$\frac{\frac{d^2 Z}{dx^2}}{\frac{dZ}{dx}} + 2 \frac{\frac{dJ_0}{dx}}{J_0} + \frac{1}{x} = 0$$

oder

$$\frac{\frac{d}{dx} \left( \frac{dZ}{dx} \right)}{\frac{dZ}{dx}} + 2 \frac{\frac{d}{dx} (J_0)}{J_0} + \frac{1}{x} = 0$$

mit  $dx$  multipliziert und integriert, ergibt:

$$\lg \frac{dZ}{dx} + \lg J_0^2 + \lg x = \text{Konstante} = C$$

oder:

$$C = \lg \left( x J_0^2 \frac{dZ}{dx} \right)$$

somit

$$e^C = x J_0^2 \frac{dZ}{dx} = \text{Konst.} = C_1$$

oder:

$$Z = C_1 \int \frac{1}{x} \frac{1}{J_0^2} dx \quad (20)$$

Gehen wir für  $J_0$  auf (11 a) zurück, so sehen wir, daß  $\frac{1}{J_0^2}$  auch durch eine Reihe von der allgemeinen Form

$$\frac{1}{J_0^2} = 1 + k_1 x^2 + k_2 x^4 + \dots$$

dargestellt werden kann, wo  $k$  Konstanten sind.

Die Integration von (19) ergibt also:

$$Z = C_1 (lg x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \dots)$$

und es wird nach (18)

$$K_0 = J_0 C_1 (lg x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \dots) \quad (21)$$

Auch dieser Ausdruck muß für jeden Wert von  $x$  gelten, also auch für  $x = 0$ , d. h. die Leiterachse. Für  $x = 0$  aber wird  $K_0$ , wegen des Logarithmus, unendlich und somit auch, nach (10), die Stromdichte  $j_0$  in der Leiterachse. Dies widerspricht aber unserem Problem und es folgt daraus der notwendige Schluß, daß in (10) die Konstante  $a'$  Null sein muß.

Es muß hier ausdrücklich bemerkt werden, daß dieser Schluß nur für den vollen runden Leiter gezogen werden darf und nicht für den hohlen. Nur beim vollen Leiter entspricht  $x = 0$  einer physikalischen Realität; beim hohlen Leiter ist ja für  $x = 0$  überhaupt kein Strom vorhanden.

Wegen  $a' = 0$ ; folgt nun aus (10)

$$j_x = a J_0 = a_0 J_0$$

Es ist also für den vollen Leiter die Besselsche Funktion erster Art nullter Ordnung die vollständige Lösung von (8).

Für den hohlen Leiter hingegen bleibt (10) bestehen.

Für den vollen Leiter gilt also:

$$j_x = a_0 J_0(w x) = a_0 (\text{ber } z + i \text{ bei } z) \quad (22)$$

Wir sehen aus diesem Ausdruck, daß in (5) die Größe  $j_x$  nicht die wahre Amplitude, d. h. den Maximalwert von  $j$  bedeutet, sondern nach (22)

$$j_x = a_0 \sqrt{\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z} \varepsilon^{i \arctg \frac{n}{m}}$$

auch noch die Phase, die durch den Ort  $x$  bedingt ist, enthält. Der Maximalwert, die wahre Amplitude ist

$$a_0 \sqrt{\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z}$$

In ganz analoger Weise gehen wir an die Lösung von Gl. (9). Wir entwickeln zunächst  $\mathfrak{F}_x$  in eine Reihe steigender Potenzen von  $x$ , in die Form:

$$\mathfrak{F}_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

bilden die Glieder:

$$w^2 \mathfrak{F}_x, \quad - \frac{\mathfrak{F}_x}{x^2}; \quad \frac{1}{x} \frac{d \mathfrak{F}_x}{d x} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \mathfrak{F}_x}{d x^2},$$

summieren diese und erhalten laut (9)

$$0 = -x^{-2} b_0 - x^{-1} (b_1 - b_1) + x^0 (w^2 b_0 + 3 b_2) + x^1 (w^2 b_1 + 8 b_3) + \\ + x^2 (w^2 b_2 + 15 b_4) + x^3 (w^2 b_3 + 24 b_5) + x^4 (w^2 b_4 + 35 b_6) + \\ + x^5 (w^2 b_5 + 48 b_7) + \dots$$

Diese Reihe, die auch wieder für alle Werte von  $x$  gelten muß, ergibt daher:

$$b_0 = 0$$

womit sämtliche geradstellige  $b$  Null werden; also

$$b_0 = b_2 = b_4 = b_6 = b_{2n} = 0$$

Es bleiben nur die Konstanten übrig:

$$b_1; \quad b_3 = - \frac{w^2}{2 \cdot 2^2} b_1; \quad b_5 = + \frac{w^4}{3 \cdot 2^2 \cdot 4^2} b_1; \quad b_7 = - \frac{w^6}{4 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} b_1$$

$$b_9 = + \frac{w^8}{5 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} b_1; \quad \text{usw.}$$

so daß wir erhalten:

$$\mathfrak{F}_x = x b_1 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{w^2 x^2}{2^2} + \frac{1}{3} \frac{w^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1}{4} \frac{w^6 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{1}{5} \frac{w^8 x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right\} \quad (23)$$

Schreiben wir wieder nach (15) und (16)

$$w^2 x^2 = -\iota z^2;$$

so wird

$$\mathfrak{F}_x = x b_1 \left\{ 1 + \iota \frac{1}{2} \frac{z^2}{2^2} - \frac{1}{3} \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \iota \frac{1}{4} \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{1}{5} \frac{z^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \right. \\ \left. + \iota \frac{1}{6} \frac{z^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right\}$$

oder:

$$\mathfrak{F}_x = x b_1 \left\{ \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{5} \frac{z^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{7} \frac{z^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \right) \right. \\ \left. + \iota \left( \frac{1}{2} \frac{z^2}{2^2} - \frac{1}{4} \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{1}{6} \frac{z^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) \right\} \quad (23a)$$

Der Klammerausdruck in (23) ist die Besselsche Funktion erster Art, erster Ordnung vom Argument  $w x$ ; sie wird mit  $J_1(w x)$  bezeichnet. Wir schreiben nun nach (23 a):

$$\mathfrak{S}_x = x b_1 (\text{ber}_1 z + \iota \text{bei}_1 z) \tag{24}$$

Auch hier ist:

$$\mathfrak{S}_x = x b_1 \sqrt{\text{ber}_1^2 z + \text{bei}_1^2 z} e^{\iota \arctg \frac{\text{bei}_1 z}{\text{ber}_1 z}}$$

und somit der Maximalwert, die wahre Amplitude von  $\mathfrak{S}$  gegeben durch

$$x b_1 \sqrt{\text{ber}_1^2 z + \text{bei}_1^2 z},$$

wobei:

$$\text{ber}_1 z = \text{reeller Teil}$$

$$\text{bei}_1 z = \text{imaginärer Teil}$$

der Besselschen Funktion erster Art, erster Ordnung vom Argument  $w x$ .

Wir haben also in (24) eine Partikulärlösung von (9) gefunden, von der Form:

$$\mathfrak{S}_x = x b_1 J_1(w x) \tag{24a}$$

Ganz ebenso wie früher läßt sich nun einsehen, daß die Integrationskonstante der zweiten Partikulärlösung für den vollen Leiter Null sein muß und daß somit (24) die allgemeine Lösung von (9) vorstellt.

Es handelt sich nun um die Bestimmung der Integrationskonstanten  $a_0$  und  $b_1$  in (22) und (24).

Mit Rücksicht auf (16), (17 a) und (23 a) ist zunächst

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}(m x) &= 1 - \frac{m^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{m^8 x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{m^{12} x^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \\ \text{bei}(m x) &= \frac{m^2 x^2}{2^2} - \frac{m^6 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{m^{10} x^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \\ \text{ber}_1(m x) &= 1 - \frac{1}{3} \frac{m^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{5} \frac{m^8 x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{1}{7} \frac{m^{12} x^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \\ \text{bei}_1(m x) &= \frac{1}{2} \frac{m^2 x^2}{2^2} - \frac{1}{4} \frac{m^6 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{1}{6} \frac{m^{10} x^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} \dots \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

Es ist somit für  $x = 0$ ;  $\text{ber}(m x) = 1$ ;  $\text{bei}(m x) = 0$  und daher:

$$j_0 = a_0 \tag{26}$$

Die Konstante  $a_0$  ist also die Stromdichte in der Leiterachse. Für  $x = r$ ; ist:  $j_x = j_r$ ; und  $\text{ber}(m x) = \text{ber}(m r)$ ;  $\text{bei}(m x) = \text{bei}(m r)$ .

Es ist also das Verhältnis der Stromdichten am Rande und in der Entfernung  $x$ :

$$\frac{j_r}{j_x} = \frac{j_0 \{ \text{ber}(m r) + \iota \text{bei}(m r) \}}{j_0 \{ \text{ber}(m x) + \iota \text{bei}(m x) \}}$$

und das Verhältnis der Stromdichte im Abstand  $x$  zur Dichte in der Mitte

$$\frac{j_x}{j_0} = \text{ber}(mx) + \iota \text{bei}(mx) = \sqrt{\text{ber}^2(mx) + \text{bei}^2(mx)} e^{\iota \arctg \frac{\text{bei}(mx)}{\text{ber}(mx)}}$$

In diesem Ausdruck bedeutet die  $e$  Potenz natürlich die Phasendifferenz der Stromdichten im Abstand  $x$  und in der Leiterachse.

Nun ist für  $x = 0$ ;  $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_0 = 0$ .

Nennen wir die Amplitude des Gesamtstromes, der den ganzen Leiterquerschnitt durchfließt,  $\mathfrak{J}$ , so ist bekanntlich:

$$\text{Für } x = r; \quad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_r = \frac{2\mathfrak{J}}{r}$$

Es wird also nach (24a)

$$\mathfrak{H}_r = \frac{2\mathfrak{J}}{r} = r \cdot b_1 \cdot J_{1(wr)}$$

und somit:

$$b_1 = \frac{2\mathfrak{J}}{r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{J_{1(wr)}} \quad (27)$$

womit die Konstante  $b_1$  bestimmt ist. Es ist also nach (24a)

$$\mathfrak{H}_x = \frac{x}{r} \frac{2\mathfrak{J}}{r} \frac{J_{1(wx)}}{J_{1(wr)}} \quad (28)$$

Aus (1a) folgt nun:

$$j_x = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\mathfrak{H}_x}{dx} + \frac{\mathfrak{H}_x}{x} \right) \quad (29)$$

Es ist nach (24a):

$$\frac{d\mathfrak{H}_x}{dx} = b_1 \frac{d}{dx} \{x J_{1(wx)}\} = b_1 \{J_{1(wx)} + x J'_{1(wx)}\}$$

und

$$\frac{\mathfrak{H}_x}{x} = b_1 J_{1(wx)}$$

Somit:

$$\frac{d\mathfrak{H}_x}{dx} + \frac{\mathfrak{H}_x}{x} = 2b_1 \left\{ J_{1(wx)} + \frac{1}{2} x J'_{1(wx)} \right\}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} J'_{1(wx)} &= \frac{d}{dx} J_{1(wx)} = \frac{d}{dx} \text{ber}_1(mx) + \iota \frac{d}{dx} \text{bei}_1(mx) = \\ &= \text{ber}'_1(mx) + \iota \text{bei}'_1(mx) \end{aligned}$$

und nach (25)

$$\begin{aligned} \text{ber}'_1(mx) &= 0 - \frac{4}{3} \frac{m^4 x^3}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{8}{5} \frac{m^8 x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \\ \iota \text{bei}'_1(mx) &= \iota \left\{ \frac{2}{2} \frac{m^2 x}{2^2} - \frac{6}{4} \frac{m^6 x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right\} \end{aligned}$$

und daher:

$$\frac{1}{2} x J'_{1(w x)} = -\frac{2}{3} \frac{m^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{4}{5} \frac{m^8 x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots + \iota \left( \frac{1}{2} \frac{m^2 x^2}{2^2} - \frac{3}{4} \frac{m^6 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right)$$

und da

$$J_{1(w x)} = 1 - \frac{1}{3} \frac{m^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{5} \frac{m^8 x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots + \iota \left( \frac{1}{2} \frac{m^2 x^2}{2^2} - \frac{1}{4} \frac{m^6 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right)$$

so ist:

$$J_{1(w x)} + \frac{1}{2} x J'_{1(w x)} = \text{ber}(m x) + \iota \text{bei}(m x) = J_{0(w x)}$$

daher:

$$\frac{d\mathfrak{G}_x}{dx} + \frac{\mathfrak{G}_x}{x} = 2 b_1 J_{0(w x)}$$

und somit nach (29)

$$j_x = \frac{1}{4\pi} 2 b_1 J_{0(w x)} = \frac{1}{4\pi} 2 \frac{2\mathfrak{J}}{r} \frac{1}{r} \frac{1}{J_{1(w r)}} \cdot J_{0(w x)} \quad (30)$$

Für  $x = 0$ , ist nun nach (25):  $\text{ber}(m x) = 1$ ;  $\text{bei}(m x) = 0$ ; also  $J_{0(w x)} = 1$ ; und es ergibt sich die Stromdichte  $j_0$  in der Leiterachse mit:

$$j_0 = a_0 = \frac{\mathfrak{J}}{\pi r^2} \frac{1}{J_{1(w r)}} \quad (31)$$

Es ist daher nach (22)

$$j_x = a_0 J_{0(w x)} = \frac{\mathfrak{J}}{\pi r^2} \frac{J_{0(w x)}}{J_{1(w r)}} = \frac{\mathfrak{J}}{\pi r^2} \frac{\text{ber}(m x) + \iota \text{bei}(m x)}{\text{ber}_1(m r) + \iota \text{bei}_1(m r)}$$

oder

$$j_x = \left[ \frac{\mathfrak{J}}{\pi r^2} \frac{\sqrt{\text{ber}^2(m x) + \text{bei}^2(m x)}}{\sqrt{\text{ber}_1^2(m r) + \text{bei}_1^2(m r)}} \right] e^{\iota \left\{ \text{arctg} \frac{\text{bei}(m x)}{\text{ber}(m x)} - \text{arctg} \frac{\text{bei}_1(m r)}{\text{ber}_1(m r)} \right\}} \quad (32)$$

wobei die wahre Amplitude, der Maximalwert der Stromdichte, den wir mit  $j_{x_m}$  bezeichnen wollen, durch den Klammerausdruck [ ], die Phase durch die Potenz gegeben sind.

Um nun zu dem gesuchten Widerstand zu kommen, bestimmen wir den Stromwärmeverlust in einem Leiterstück von der Länge 1 cm, also in einem Volumen  $(\pi r^2 \cdot 1) \text{ cm}^3$ .

Der Stromwärmeverlust in einem Hohlzylinder von der Dicke  $dx$ , der Länge 1 cm, und dem inneren Radius  $x$ , (s. Abb. 72) ist das Produkt aus dem Quadrate der effektiven Strommenge, die den Querschnitt durchsetzt und dem Widerstand des Hohlzylinders. Da  $j_{x_m}$  die Amplitude der Stromdichte ist, so ist die Amplitude der Strommenge, die den Querschnitt durchsetzt

$$j_{x_m} (2 \pi x dx)$$

und daher das Quadrat des Effektivwertes:

$$\frac{(j_{x_m} \cdot 2 \pi x dx)^2}{2}$$

Ist  $\varrho$  der spezifische Widerstand des Leitermaterials, absolut gemessen, so ist der Widerstand des Hohlzylinders

$$\varrho \cdot \frac{1}{2\pi x dx}$$

und daher der Stromwärmeverlust in unserem Leiterstück von der Länge 1 cm:

$$P_k = \int_0^r \frac{j_{xm}^2}{2} 2\pi x \cdot \varrho \cdot dx$$

oder nach (32)

$$P_k = \left(\frac{\mathfrak{S}}{\pi r^2}\right)^2 \frac{1}{\text{ber}_1^2(mr) + \text{bei}_1^2(mr)} \cdot \pi \cdot \varrho \int_0^r x \{ \text{ber}^2(mx) + \text{bei}^2(mx) \} dx \quad (33)$$

Zum Zwecke der Integration setzen wir wieder:

$$mx = z; \quad \text{also: } x = \frac{z}{m}; \quad dx = \frac{dz}{m}$$

und es wird:

$$\int x \{ \text{ber}^2(mx) + \text{bei}^2(mx) \} dx = \frac{1}{m^2} \int z \{ \text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z \} dz \quad (34)$$

Gehen wir auf Gl. (8) zurück und setzen dort:

$$x = \frac{z}{m}; \quad dx = \frac{dz}{m}; \quad dx^2 = \frac{dz^2}{m^2},$$

so wird:

$$m^2 \frac{d^2 j_x}{dz^2} + \frac{m^2}{z} \frac{dj_x}{dz} = -w^2 j_x$$

oder:

$$z \frac{d^2 j_x}{dz^2} + \frac{dj_x}{dz} = -\frac{w^2}{m^2} z \cdot j_x \quad (35a)$$

oder:

$$\frac{d}{dz} \left( z \frac{dj_x}{dz} \right) = -\frac{w^2}{m^2} z j_x$$

Führen wir aus (22) den Wert für  $j_x$  ein, und beachten, daß nach (15):  $\frac{w^2}{m^2} = -\iota$ , so wird:

$$\frac{d}{dz} \{ z \cdot a_0 (\text{ber}' z + \iota \text{bei}' z) \} = \iota z \cdot a_0 (\text{ber} z + \iota \text{bei} z)$$

und wegen notwendiger Gleichheit der beiderseitigen reellen und imaginären Teile folgen die wichtigen Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} (z \operatorname{ber}' z) &= -z \operatorname{bei} z \\ \frac{d}{dz} (z \operatorname{bei}' z) &= z \operatorname{ber} z \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

oder daraus:

$$\left. \begin{aligned} \int z \operatorname{bei} z dz &= -z \operatorname{ber}' z \\ \int z \operatorname{ber} z dz &= z \operatorname{bei}' z \end{aligned} \right\}$$

Nun ist das Integral in (34) durch partielle Integration zu lösen, denn es ist:

$$\begin{aligned} \int z \operatorname{ber}^2 z dz &= \int \underbrace{z \operatorname{ber} z dz}_{dv} \cdot \underbrace{\operatorname{ber} z}_{u} = \underbrace{\operatorname{ber} z}_{u} \underbrace{\int z \operatorname{ber} z dz}_{v} - \\ &- \int \underbrace{\{z \operatorname{ber} z dz\}}_v \underbrace{\operatorname{ber}' z}_{du} \cdot dz = z \operatorname{bei}' z \cdot \operatorname{ber} z - \int z \operatorname{bei}' z \operatorname{ber}' z dz \end{aligned}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} \int z \operatorname{bei}^2 z dz &= \int \underbrace{z \operatorname{bei} z dz}_{dv} \cdot \underbrace{\operatorname{bei} z}_{u} = \underbrace{\operatorname{bei} z}_{u} \underbrace{\int z \operatorname{bei} z dz}_{v} - \\ &- \int \underbrace{\{z \operatorname{bei} z dz\}}_v \underbrace{\operatorname{bei}' z}_{du} dz = -z \operatorname{ber}' z \cdot \operatorname{bei} z + \int z \operatorname{ber}' z \cdot \operatorname{bei}' z dz \end{aligned}$$

somit:

$$\frac{1}{m^2} \int \{z \operatorname{ber}^2 z + z \operatorname{bei}^2 z\} dz = \frac{z}{m^2} (\operatorname{bei}' z \cdot \operatorname{ber} z - \operatorname{ber}' z \operatorname{bei} z)$$

oder wenn wir von  $z$  auf  $mx$  zurückgehen und die Integrationsgrenzen beachten, wird:

$$\int_0^r x \{ \operatorname{ber}^2(mx) + \operatorname{bei}^2(mx) \} dx = \frac{r}{m} \{ \operatorname{bei}'(mr) \cdot \operatorname{ber}(mr) - \operatorname{ber}'(mr) \cdot \operatorname{bei}(mr) \}$$

Es wird also nach (33)

$$P_k = \frac{\mathfrak{Z}^2}{\pi^2 r^4} \pi \varrho \frac{r}{m} \frac{\operatorname{bei}'(mr) \operatorname{ber}(mr) - \operatorname{ber}'(mr) \operatorname{bei}(mr)}{\operatorname{ber}_1^2(mr) + \operatorname{bei}_1^2(mr)} \quad (36a)$$

Da wir unter  $\mathfrak{Z}$  die Amplitude der gesamten Stromstärke verstanden haben, ist die effektive Stromstärke  $I$

$$I = \frac{\mathfrak{Z}}{\sqrt{2}}; \quad \text{oder: } \mathfrak{Z}^2 = 2I^2$$

Mit diesem Einsatz übergeht (36 a) in:

$$P_k = I^2 \left\{ \frac{\varrho}{\pi r^2} \frac{2}{r m} \left( \frac{\operatorname{bei}' \operatorname{ber} - \operatorname{ber}' \operatorname{bei}}{\operatorname{ber}_1^2 + \operatorname{bei}_1^2} \right)_{(mr)} \right\} \quad (36)$$

Wir finden also den Stromwärmeverlust ausgedrückt durch das Quadrat der effektiven Stromstärke und einen Faktor (das Klammerglied), der nichts anderes sein kann als der gesuchte Wechselstromwiderstand  $R_w$  pro Zentimeter Länge unseres Leiters; also

$$R_w = \frac{\rho}{\pi r^2} \frac{2}{r m} \left( \frac{\text{bei}' \text{ber} - \text{ber}' \text{bei}}{\text{ber}_1^2 + \text{bei}_1^2} \right)_{(mr)} \quad (37a)$$

Nun hängen aber die Besselschen Funktionen erster und nullter Ordnung folgend zusammen. Nach (25) ist:

$$\left. \begin{aligned} \text{bei}' z &= \frac{z}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{5} \frac{z^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right\} = \frac{z}{2} \text{ber}_1 z \\ \text{ber}' z &= -\frac{z}{2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{z^2}{2^2} - \frac{1}{4} \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right\} = -\frac{z}{2} \text{bei}_1 z \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Somit:

$$\text{ber}_1^2(mr) + \text{bei}_1^2(mr) = \frac{4}{m^2 r^2} \{ \text{bei}'^2(mr) + \text{ber}'^2(mr) \}$$

und dies in (37a) eingesetzt, ergibt:

$$R_w = \frac{\rho}{\pi r^2} \frac{m r}{2} \left( \frac{\text{bei}' \text{ber} - \text{ber}' \text{bei}}{\text{bei}'^2 + \text{ber}'^2} \right)_{(mr)} \quad (37)$$

Ist nun  $R_g$  der mit Gleichstrom gemessene Widerstand pro Zentimeter Länge unseres Leiters, so ist

$$R_g = \frac{\rho}{\pi r^2}$$

Und es ergibt sich das Verhältnis zwischen Wechselstrom- und Gleichstromwiderstand mit:

$$\xi = \frac{R_w}{R_g} = \frac{m r}{2} \left( \frac{\text{bei}' \text{ber} - \text{ber}' \text{bei}}{\text{bei}'^2 + \text{ber}'^2} \right)_{(mr)} \quad (39)$$

Zum Zwecke der rechnermäßigen Verwertung dieser Formel können wir drei Bereiche des Argumentes ( $mr$ ) der Funktionen  $\text{ber}$  und  $\text{bei}$  unterscheiden:

1.  $mr \ll 2$

Für so kleine Argumente ( $mr$ ) zeigt der Bau der Ausdrücke  $\text{ber}$  und  $\text{bei}$ , sowie  $\text{ber}'$  und  $\text{bei}'$  nach (25) und (38) so rasche Konvergenz, daß es genügt, die ersten zwei Glieder zu berücksichtigen. Es ist dann:

$$\begin{aligned} \text{ber}(mr) &\approx 1 - \frac{m^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2}; & \text{bei}(mr) &\approx \frac{m^2 r^2}{2^2} - \frac{m^6 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \\ \text{ber}'(mr) &\approx -\frac{m r}{2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{m^2 r^2}{2^2} - \frac{1}{4} \frac{m^6 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \right\}; \\ \text{bei}'(mr) &\approx \frac{m r}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{m^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} \right\} \end{aligned}$$

Dies in (39) eingeführt und statt  $(mr)$  die Größe  $a$  gesetzt, ergibt

$$\xi = \frac{\left(1 - \frac{a^4}{2^3 \cdot 4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2}\right) + \left(\frac{a^2}{2^2} - \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{a^2}{2^2} - \frac{1}{4} \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3} \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{a^2}{2^2} - \frac{1}{4} \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\right)}$$

Der Zähler dieses Bruches lautet ausgeführt:

$$1 + \frac{2}{3} \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} + a^8 \cdot 0 + \frac{1}{4} \frac{a^{12}}{2^4 \cdot 4^4 \cdot 6^4}$$

Der Nenner:

$$1 + \frac{1}{3} \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} + a^8 \cdot 0 + \frac{1}{16} \frac{a^{12}}{2^4 \cdot 4^4 \cdot 6^4}$$

Die Glieder mit  $a^{12}$  sind aber, für den Höchstwert  $a = 2$ , im Zähler  $\frac{1}{5184}$ , im Nenner  $\frac{1}{20736}$ ; also beide gegenüber den zwei ersten Gliedern bedeutungslos, so daß

$$\xi = \frac{1 + \frac{2}{3} \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2}}{1 + \frac{1}{3} \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2}}$$

Führt man die Division aus und führt statt  $a$  wieder  $(mr)$  ein, so wird:

$$\xi = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{mr}{2}\right)^4 - \frac{1}{144} \left(\frac{mr}{2}\right)^8 \quad (39a)$$

Beispiel:

Ein zylindrischer Kupferleiter mit  $r = 1$  cm werde mit Wechselstrom von  $f = 50$  gespeist.

Es ist nach (14) und (6)

$$m = \sqrt{2} k = \sqrt{2} \cdot 2 \pi \sqrt{\frac{\mu f}{\varrho}}$$

Für Kupfer ist  $\mu = 1$ ;  $\varrho$  absolut ist der Widerstand eines Würfels von 1 cm Kante; also mit einer Leitfähigkeit von 59:

$$\varrho = \frac{1}{59} \frac{10^{-2}}{10^2} \cdot 10^9 = 1700$$

Daher:

$$m = 1,41 \cdot 6,28 \sqrt{\frac{1 \cdot 50}{1700}} = 1,51; \text{ und } mr = 1,51$$

Also:

$$\xi = 1 + \frac{1}{12} (0,755)^4 - \frac{1}{144} (0,755)^8 = 1,026$$

Das heißt, der Widerstand dieses Leiters ist für einen 50 periodigen Wechselstrom, gegenüber dem mit Gleichstrom gemessenen, um 2,6 Proz. gewachsen.

2.  $2 < mr \leq 4$

Für diesen Bereich des Argumentes muß nach (39) gerechnet, d. h. es müssen die Funktionen des Argumentes ( $mr$ ) benützt werden. Diese finden sich in gerechneten Tabellen; z. B. in Orlich, Kapazität und Induktivität.

3.  $mr > 4$

Für diesen Bereich führt folgender Weg zum Ziele.

Wir gehen auf (35a) zurück, die wegen:  $\frac{w^2}{m^2} = -\iota$ , lautet:

$$\frac{d^2 j_x}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dj_x}{dz} - \iota j_x = 0, \quad \text{wobei } z = mx$$

Nun wissen wir, daß  $J_{0(z)}$  diese Gleichung erfüllt, wobei

$$J_{0(z)} = \text{ber } z + \iota \text{ bei } (z);$$

daß also die Gleichung besteht:

$$\frac{d^2 J_{0(z)}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dJ_{0(z)}}{dz} - \iota J_{0(z)} = 0$$

Wir führen nun für  $J_{0(z)}$  eine neue Funktion  $K_z$  von  $z$  ein, die wir definieren durch:

$$J_{0(z)} = \frac{K_z}{\sqrt{z}} \tag{40}$$

Wir bilden:

$$\begin{aligned} -\iota J_{0(z)} &= -\iota \frac{K_z}{\sqrt{z}} \\ \frac{1}{z} \frac{dJ_{0(z)}}{dz} &= \frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dK_z}{dz} - \frac{1}{z} \frac{1}{2} \frac{1}{z^{3/2}} K_z \\ \frac{d^2 J_{0(z)}}{dz^2} &= \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d^2 K_z}{dz^2} - \frac{1}{z^{3/2}} \frac{dK_z}{dz} + \frac{3}{4} \frac{1}{z^{5/2}} K_z \end{aligned}$$

Summieren wir diese drei Gleichungen, so erhalten wir:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d^2 K_z}{dz^2} + \frac{1}{4z^2} \frac{1}{\sqrt{z}} K_z - \frac{\iota}{\sqrt{z}} K_z$$

oder:

$$\frac{d^2 K_z}{dz^2} + \left( \frac{1}{4z^2} - \iota \right) K_z = 0$$

somit:

$$\frac{d^2 K_z}{dz^2} + \sqrt{\frac{1}{16z^4} + 1} \cdot e^{-i \operatorname{arctg} 4z^2} \cdot K_z = 0 \quad (41)$$

Für Werte:

$$z \geq 4$$

wird:  $\frac{1}{16z^4} \ll \frac{1}{4096}$ ; ist also gegen 1 zu vernachlässigen, und:

$$\operatorname{arctg} 4z^2 \approx \operatorname{arctg} 64 = 89^\circ 7' \approx \frac{\pi}{2};$$

so daß wir (41) mit erlaubter Annäherung in der Form schreiben dürfen:

$$\frac{d^2 K_z}{dz^2} = -e^{-i \frac{\pi}{2}} \cdot K_z = -v^2 K_z; \quad (42)$$

wenn:

$$v^2 = e^{-i \frac{\pi}{2}}$$

Die Lösung von (42) ist aber bekanntlich:

$$K_z = A \sin(vz) + B \cos(vz)$$

wo  $A$  und  $B$  Konstanten sind.

Oder:

$$K_z = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin\left(vz + \operatorname{arctg} \frac{B}{A}\right);$$

somit nach (40)

$$J_{0(z)} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin\left(vz + \operatorname{arctg} \frac{B}{A}\right)$$

Wir wollen setzen:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = F; \quad \operatorname{arctg} \frac{B}{A} = \xi; \quad (43)$$

also:

$$J_{0(z)} = \frac{F}{\sqrt{z}} \sin(vz + \xi) \quad (44)$$

Wegen:  $v^2 = e^{-i \frac{\pi}{2}}$ ; ist  $v = e^{-i \frac{\pi}{4}}$ ; und daher:

$$vz = z \cos \frac{\pi}{4} - i z \sin \frac{\pi}{4} = \frac{z}{\sqrt{2}} - i \frac{z}{\sqrt{2}};$$

also:

$$\sin vz = \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \cos\left(i \frac{z}{\sqrt{2}}\right) - \cos \frac{z}{\sqrt{2}} \sin\left(i \frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

und da:

$$\cos\left(i \frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \mathfrak{C}o\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\right]; \quad \text{und:} \quad \sin\left(i \frac{z}{\sqrt{2}}\right) = i \mathfrak{S}i\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\right]$$

wird:

$$\sin vz = \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof} \frac{z}{\sqrt{2}} - \iota \cos \frac{z}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin} \frac{z}{\sqrt{2}}$$

und

$$\cos vz = \cos \frac{z}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof} \frac{z}{\sqrt{2}} + \iota \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin} \frac{z}{\sqrt{2}}$$

und es wird daher:

$$\begin{aligned} \sin(vz + \xi) &= \mathfrak{Cof} \frac{z}{\sqrt{2}} \left( \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \cos \xi + \cos \frac{z}{\sqrt{2}} \sin \xi \right) - \\ &- \iota \mathfrak{Sin} \frac{z}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{z}{\sqrt{2}} \cos \xi - \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \sin \xi \right) \end{aligned}$$

Führen wir dies in (44) ein, so ist wegen:  $J_{0(z)} = \text{ber } z + \iota \text{ bei } z$ , und hieraus folgender Gleichheit der reellen und imaginären Teile der beiden letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{ber } z &= \frac{F}{\sqrt{z}} \mathfrak{Cof} \frac{z}{\sqrt{2}} \sin \left( \frac{z}{\sqrt{2}} + \xi \right) \\ \text{bei } z &= - \frac{F}{\sqrt{z}} \mathfrak{Sin} \frac{z}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{z}{\sqrt{2}} + \xi \right) \end{aligned} \quad (45)$$

wo  $F$  und  $\xi$  unbekannte Konstanten sind. Diese entfallen aber — wie sich gleich zeigt — in unserem Quotienten:

$$\frac{\text{bei}' \text{ber} - \text{ber}' \text{bei}}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2}$$

Wir setzen:

$$\frac{z}{\sqrt{2}} + \xi = \varphi$$

Dann wird:

$$\begin{aligned} \text{ber}' z &= - \frac{1}{2} \frac{F}{z^{3/2}} \sin \varphi \mathfrak{Cof} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{F}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \mathfrak{Cof} \frac{z}{\sqrt{2}} + \\ &+ \frac{F}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \mathfrak{Sin} \frac{z}{\sqrt{2}} \\ \text{bei}' z &= \frac{1}{2} \frac{F}{z^{3/2}} \cos \varphi \mathfrak{Sin} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{F}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \mathfrak{Sin} \frac{z}{\sqrt{2}} - \\ &- \frac{F}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \mathfrak{Cof} \frac{z}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (46)$$

Es ist nun für:  $z \gtrsim 4$ ; mit praktisch genügender Genauigkeit

$$\mathfrak{Sin} \frac{z}{\sqrt{2}} = \mathfrak{Cof} \frac{z}{\sqrt{2}} \quad (47)$$

Bilden wir unter dieser Voraussetzung:  $\text{bei}' z \text{ber} z - \text{bei} z \text{ber}' z$ ; so wird

$$\text{bei}' z \text{ber} z - \text{bei} z \text{ber}' z = \frac{F^2}{z} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathfrak{S} \sin^2 \frac{z}{\sqrt{2}} \quad (48)$$

Weiter ist, mit Rücksicht auf (47)

$$\begin{aligned} \text{ber}'^2 z &= \left( \frac{1}{4} \frac{F^2}{z^3} \sin^2 \varphi + \frac{F^2}{2z} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F^2}{z^2} \sin \varphi \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F^2}{z^2} \sin^2 \varphi + \frac{F^2}{z} \sin \varphi \cos \varphi \right) \cdot \mathfrak{S} \sin^3 \frac{z}{\sqrt{2}} \\ \text{bei}'^2 z &= \left( \frac{1}{4} \frac{F^2}{z^3} \cos^2 \varphi + \frac{F^2}{2z} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F^2}{z^2} \sin \varphi \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F^2}{z^2} \cos^2 \varphi - \frac{F^2}{z} \sin \varphi \cos \varphi \right) \cdot \mathfrak{S} \sin^2 \frac{z}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

und daher:

$$\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z = \left( \frac{F^2}{4z^3} + \frac{F^2}{z} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F^2}{z^2} \right) \mathfrak{S} \sin^2 \frac{z}{\sqrt{2}} \quad (49)$$

somit:

$$\frac{\text{bei}' z \text{ber} z - \text{bei} z \text{ber}' z}{\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{4z^2} + 1 - \frac{1}{z\sqrt{2}}}$$

Führen wir nun für  $z$  den Wert  $mr$  ein, so ergibt sich endlich:

$$\xi = \frac{mr}{2} \left( \frac{\text{bei}' \text{ber} - \text{ber}' \text{bei}}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \right)_{(mr)} = \frac{mr}{2} \frac{4m^2 r^2}{\sqrt{2}(1 + 4m^2 r^2) - 4mr} \quad (50)$$

Wir wollen die Richtigkeit dieser Formel an der „Dimension“ prüfen.  $\xi$  muß als Quotient zweier Widerstände eine Zahl, also dimensionslos sein. Nach (50) muß also auch  $mr$  dimensionslos sein.

Dies ist in der Tat der Fall, denn:

$$\text{Dim } m = \text{Dim } k \sqrt{2} = \text{Dim } \sqrt{\frac{\mu f}{\varrho}} = \frac{T^{-\frac{1}{2}}}{L T^{-\frac{1}{2}}} = L^{-1}$$

und daher:

$$\text{Dim } (mr) = L^{-1} \cdot L = \text{Dim } (\text{Zahl})$$

Beispiel:

$$2r = 1,97 \text{ cm}; \quad f = 800; \quad \varrho = 1700; \quad \mu = 1$$

also:

$$m = k \sqrt{2} = 2\pi \sqrt{\frac{800}{1700}} \sqrt{2} = 6,09$$

und:

$$mr = 6$$

Daher

$$\xi = 3 \frac{4 \cdot 36}{\sqrt{2}(1 + 4 \cdot 36) - 4 \cdot 6} = 2,39$$

Die Formel (50) zeigt deutlich, daß für große Werte des Argumentes  $mr$  der Ausdruck für  $\xi$  übergeht in:

$$\xi = \frac{mr}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{rk}{2} \quad (51)$$

Wir können leicht feststellen, von welchem Argumentswert an diese vereinfachte Formel mit einprozentiger Genauigkeit zulässig ist.

Dies wird nach (50) und (51) dann der Fall sein, wenn:

$$\frac{4m^2r^2}{\sqrt{2}(1 + 4m^2r^2) - 4mr} \cong \frac{1,01}{\sqrt{2}}$$

Hieraus folgt:

$$mr \cong 70$$

D. h. für:  $mr \cong 70$  können wir die Formel verwenden:

$$\xi = \frac{mr}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,354 mr \quad (52)$$

wodurch Zennecks empirische Formel für  $mr \cong 4$ :

$$\xi = 0,3525 mr + 0,277$$

eine theoretische Bestätigung findet.

Es ist für:

$$\begin{array}{ll} mr = 70; & \text{nach Zenneck: } \xi = 24,95 \\ & \text{nach (52) } \quad \xi = 24,78 \end{array}$$

Da in (52) wegen  $m = \sqrt{2} k = \sqrt{2} 2\pi \sqrt{\frac{\mu f}{\rho}}$  die Frequenz  $f$  enthalten ist, so würde dies besagen, daß der Wechselstromwiderstand bei beliebig gesteigerter Frequenz, beliebig hohe Werte erreichen könnte. Dies ist aus der, am Eingang des Abschnittes gemachten, physikalischen Erwägung unverständlich. In Abb. 74 kann der Winkel  $\varphi$  bei noch so hohen endlichen Frequenzzahlen den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  nie erreichen. Das Innere des Leiters wird daher niemals gänzlich vom Strome befreit werden, der Widerstand des Leiters wird „endlich“ bleiben. Der Widerspruch mit der gegebenen Theorie rührt daher, daß in dieser Theorie der Verschiebungsstrom vernachlässigt wurde. Wir wollen daher die Theorie durch Berücksichtigung des Verschiebungsstromes ergänzen.

Dann haben wir die vollständige Form von (1) zu verwenden und erhalten:

$$4\pi \left\{ j + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{F} \right) \right\} = \text{rot } \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} + \frac{\mathfrak{H}}{x} \quad (53)$$

Die Gl. (2) behält natürlich ihre Form:

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \varrho \frac{\partial j}{\partial x} \quad (54)$$

Die elektrische Verschiebung  $D$  ist:

$$D = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \varrho j$$

Setzen wir wieder für  $j$  reine Sinusform voraus, so ist

$$j = j_x \sin(\omega t) \approx j_x e^{i\omega t}$$

Berücksichtigen wir die dielektrische Hysteresis, so heißt das, daß  $D$  mit  $j$  nicht in Phase, sondern gegen  $j$  um einen Winkel  $\delta$  verzögert ist. Es wird also:

$$D = \frac{\varepsilon}{4\pi} \varrho j_x \sin(\omega t - \delta) \approx \frac{\varepsilon}{4\pi} \varrho j_x e^{i(\omega t - \delta)}$$

Sehen wir  $\varepsilon$  als konstant an, so wird

$$\frac{\partial D}{\partial t} = i \frac{\omega \varepsilon \varrho}{4\pi} j_x e^{i(\omega t - \delta)}$$

und damit wird, wenn wir auch  $\mathfrak{H}$  wieder symbolisch durch  $\mathfrak{H}_x e^{i\omega t}$  ausdrücken, Gl. (53)

$$4\pi j_x + i \omega \varepsilon \varrho j_x e^{-i\delta} = \frac{d\mathfrak{H}_x}{dx} + \frac{\mathfrak{H}_x}{x} \quad (53a)$$

und Gl. (54)

$$\frac{dj_x}{dx} = i \omega \frac{\mu}{\varrho} \mathfrak{H}_x \quad (54a)$$

Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen wieder  $j_x$  und  $\mathfrak{H}_x$ , so wird:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 j_x}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dj_x}{dx} + \left( \omega^2 \varepsilon \mu e^{-i\delta} - i 4\pi \omega \frac{\mu}{\varrho} \right) j_x &= 0 \\ \frac{d^2 \mathfrak{H}_x}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathfrak{H}_x}{dx} + \left\{ \left( \omega^2 \varepsilon \mu e^{-i\delta} - i 4\pi \omega \frac{\mu}{\varrho} \right) - \frac{1}{x^2} \right\} \mathfrak{H}_x &= 0 \end{aligned}$$

Entwickeln wir  $e^{-i\delta}$  und setzen:

$$w_k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \cos \delta - i \left( 4\pi \omega \frac{\mu}{\varrho} + \omega^2 \varepsilon \mu \sin \delta \right) \quad (55)$$

so ergeben sich:

$$\frac{d^2 j_x}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dj_x}{dx} + w_k^2 j_x = 0 \quad (56)$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}_x}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathfrak{H}_x}{dx} + \left( w_k^2 - \frac{1}{x^2} \right) \mathfrak{H}_x = 0 \quad (57)$$

als Ausgangsgleichungen des jetzigen Problems. Wir finden die Gleichungen von ganz demselben Bau wie (8) und (9), nur war dort  $w^2$  eine imaginäre Größe, während jetzt  $w_k^2$  eine komplexe Größe ist. Der Lösungsgedanke bleibt natürlich derselbe, nur ist der Weg in mathematischer Hinsicht etwas schwieriger.

Wir machen die Ansätze:

$$\omega^2 \varepsilon \mu \cos \delta = a; \quad 4\pi \omega \frac{\mu}{\rho} + \omega^2 \varepsilon \mu \sin \delta = b; \quad (58)$$

somit:

$$w_k^2 = a - \iota b = \sqrt{a^2 + b^2} e^{-\iota \arctg \frac{b}{a}}; \quad \text{mit } \arctg \frac{b}{a} = \beta \quad (59)$$

wird

$$w_k^2 = \sqrt{a^2 + b^2} e^{-\iota \beta}; \quad w_k = \sqrt[4]{a^2 + b^2} e^{-\iota \frac{\beta}{2}} \quad (60)$$

Nennen wir noch:

$$c = \sqrt[4]{a^2 + b^2}; \quad \gamma = \frac{\beta}{2}; \quad (61)$$

so wird:

$$w_k = c \cdot e^{-\iota \gamma} \quad (62)$$

Die Lösung der Gl. (56) ist nun wieder

$$j_x = a_0 \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2} w_k^2 + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} w_k^4 - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} w_k^6 + \dots \right\}$$

nach (62) ist aber:

$$w_k^n = c^n e^{-\iota n \gamma} = c^n \cos n \gamma - \iota c^n \sin n \gamma$$

oder:

$$j_x = a_0 \left\{ 1 - \frac{c^2 x^2}{2^2} \cos 2 \gamma + \frac{c^4 x^4}{(2 \cdot 4)^2} \cos 4 \gamma - \frac{c^6 x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \cos 6 \gamma + \dots \right. \\ \left. + \iota \left( \frac{c^2 x^2}{2^2} \sin 2 \gamma - \frac{c^4 x^4}{(2 \cdot 4)^2} \sin 4 \gamma + \frac{c^6 x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \sin 6 \gamma - \dots \right) \right\}$$

Wir finden also wieder als Lösung für die Stromdichte die Besselsche Funktion  $J_0$  des Arguments  $(w_k x)$  oder des Arguments  $(c \cdot e^{-\iota \gamma} \cdot x)$

$$j_x = a_0 J_0(w_k x) = a J_0(c e^{-\iota \gamma} \cdot x)$$

und setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}(cx)_k &= 1 - \frac{c^2 x^2}{2^2} \cos 2\gamma + \frac{c^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} \cos 4\gamma - \frac{c^6 x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \cos 6\gamma + \dots \\ \text{bei}(cx)_k &= \frac{c^2 x^2}{2^2} \sin 2\gamma - \frac{c^4 x^4}{(2 \cdot 4)^2} \sin 4\gamma + \frac{c^6 x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \sin 6\gamma - \dots \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

so wird:

$$j_x = a_0 \{ \text{ber}(cx)_k + \iota \text{bei}(cx)_k \} \quad (64)$$

wobei der Index  $k$  die komplexe Wesenheit des Argumentes andeuten soll. Ebenso ergibt sich:

$$\mathfrak{G}_x = x b_1 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2^2} w_k^2 + \frac{1}{3} \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} w_k^4 - \frac{1}{4} \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} w_k^6 + \dots \right\}$$

oder

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_x &= x b_1 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{c^2 x^2}{2^2} \cos 2\gamma + \frac{1}{3} \frac{c^4 x^4}{(2 \cdot 4)^2} \cos 4\gamma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{c^6 x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \cos 6\gamma + \dots + \iota \left( \frac{1}{2} \frac{c^2 x^2}{2^2} \sin 2\gamma - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{3} \frac{c^4 x^4}{(2 \cdot 4)^2} \sin 4\gamma + \frac{1}{4} \frac{c^6 x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \sin 6\gamma - \dots \right) \right\} \end{aligned}$$

somit

$$\mathfrak{G}_x = x b_1 J_1(w_k x) = x b_1 J_1(c \cdot e^{-\iota \gamma} \cdot x)$$

und setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}_1(cx)_k &= 1 - \frac{1}{2} \frac{c^2 x^2}{2^2} \cos 2\gamma + \frac{1}{3} \frac{c^4 x^4}{(2 \cdot 4)^2} \cos 4\gamma - \dots \\ \text{bei}_1(cx)_k &= \frac{1}{2} \frac{c^2 x^2}{2^2} \sin 2\gamma - \frac{1}{3} \frac{c^4 x^4}{(2 \cdot 4)^2} \sin 4\gamma + \dots \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

so wird:

$$\mathfrak{G}_x = x b_1 \{ \text{ber}_1(cx)_k + \iota \text{bei}_1(cx)_k \} \quad (66)$$

$j_x$  und  $\mathfrak{G}_x$  sind also jetzt durch Funktionen des komplexen Argumentes ( $c \cdot e^{-\iota \gamma} \cdot x$ ) ausgedrückt.

Die Bestimmung der Konstanten  $a_0$  und  $b_1$  geschieht genau so wie früher.

Für  $x = 0$ ; ist:  $j_x = j_0$ ;  $\text{ber}(cx)_k = 1$ ;  $\text{bei}(cx)_k = 0$ , somit

$$a_0 = j_0$$

Also das Verhältnis der Stromdichte im Abstände  $x$  zu jener in der Achse:

$$\frac{j_x}{j_0} = \text{ber}(cx)_k + \iota \text{bei}(cx)_k = \sqrt{\text{ber}^2(cx)_k + \text{bei}^2(cx)_k} \cdot e^{\iota \arctg \frac{\text{bei}(cx)_k}{\text{ber}(cx)_k}}$$

Ferner aus (66).

Für  $x = r$ ;  $\mathfrak{G}_x = \mathfrak{G}_r = \frac{2\mathfrak{Z}}{r}$ ; wenn  $\mathfrak{Z}$  die Amplitude der gesamten Stromstärke, also:

$$\frac{2\mathfrak{Z}}{r} = r b_1 \{ \text{ber}_1(cr)_k + \iota \text{bei}_1(cr)_k \} = r b_1 J_{1(cr)_k}$$

und daher:

$$b_1 = \frac{2\mathfrak{Z}}{r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{J_{1(cr)_k}} \quad (67)$$

und:

$$\mathfrak{G}_x = \frac{2\mathfrak{Z}}{r^2} x \frac{J_{1(cx)_k}}{J_{1(cr)_k}} \quad (68)$$

Nun schreiben wir (53 a) in der Form:

$$j_x \{ 4\pi + \omega \varepsilon \rho \sin \delta \} + \iota \{ \omega \varepsilon \mu \cos \delta \} = \frac{d\mathfrak{G}_x}{dx} + \frac{\mathfrak{G}_x}{x}$$

oder mit Rücksicht auf (58)

$$j_x \frac{\rho}{\omega \mu} (b + \iota a) = \frac{d\mathfrak{G}_x}{dx} + \frac{\mathfrak{G}_x}{x}$$

oder

$$j_x \frac{\rho}{\omega \mu} \sqrt{a^2 + b^2} e^{\iota \arctg \frac{a}{b}} = j_x \frac{\rho}{\omega \mu} \sqrt{a^2 + b^2} e^{-\iota \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{d\mathfrak{G}_x}{dx} + \frac{\mathfrak{G}_x}{x}$$

also:

$$j_x = \frac{\omega \mu}{\rho} e^{\iota \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right)} \left( \frac{d\mathfrak{G}_x}{dx} + \frac{\mathfrak{G}_x}{x} \right)$$

Nun läßt sich durch Entwicklung der Ausdrücke  $\frac{d\mathfrak{G}_x}{dx}$  und  $\frac{\mathfrak{G}_x}{x}$  ebenso wie früher zeigen, daß:

$$\frac{d\mathfrak{G}_x}{dx} + \frac{\mathfrak{G}_x}{x} = 2 b_1 \left\{ J_{1(cx)_k} + \frac{1}{2} x J'_{1(cx)_k} \right\} = 2 b_1 \cdot J_{0(cx)_k}$$

und es wird daher:

$$j_x = \frac{\omega \mu}{\rho} e^{\iota \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right)} \frac{4\mathfrak{Z}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{1}{J_{1(cr)_k}} \cdot J_{0(cx)_k} \quad (69)$$

Die Stromdichte  $j_0$  in der Leiterachse ergibt sich hieraus, für  $x = 0$ , mit:

$$j_0 = \frac{\omega \mu}{\rho} e^{\iota \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right)} \frac{4\mathfrak{Z}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{1}{r^2} \frac{1}{J_{1(cr)_k}} = a_0$$

und wir erhalten endlich nach (64)

$$j_x = \frac{\omega \mu}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{4\beta}{r^2} \cdot \left. \frac{\sqrt{\text{ber}^2(cx)_k + \text{bei}^2(cx)_k}}{\sqrt{\text{ber}_1^2(cr)_k + \text{bei}_1^2(cr)_k}} e^{i \left\{ \text{arctg} \frac{\text{bei}(cx)_k}{\text{ber}(cx)_k} - \text{arctg} \frac{\text{bei}_1(cr)_k}{\text{ber}_1(cr)_k} + \beta - \frac{\pi}{2} \right\}} \right\} \quad (70)$$

Setzen wir:

$$\frac{\omega \mu}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{4\beta}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\text{ber}_1^2(cr)_k + \text{bei}_1^2(cr)_k}} = A \quad (71)$$

so wird die wahre Amplitude der Stromdichte, ihr Maximalwert  $j_{x_m}$  im Abstände  $x$  von der Leiterachse:

$$j_{x_m} = A \cdot \sqrt{\text{ber}^2(cx)_k + \text{bei}^2(cx)_k} \quad (72)$$

Der gesamte Stromwärmeverlust im Volumen  $(\pi r^2 \cdot 1) \text{ cm}^3$  ist wieder

$$P_k = \int_0^r \frac{j_{x_m}^2}{2} \cdot 2 \pi x \cdot \varrho \cdot dx$$

also nach (72)

$$P_k = A^2 \pi \varrho \int_0^r x \{ \text{ber}^2(cx)_k + \text{bei}^2(cx)_k \} dx \quad (73)$$

Die Integration erfolgt auf demselben Wege wie früher [s. (33)].

Wir setzen:

$$cx = z; \quad x = \frac{z}{c}; \quad dx = \frac{dz}{c}$$

und erhalten:

$$\int_0^r x \{ \text{ber}^2(cx)_k + \text{bei}^2(cx)_k \} dx = \frac{1}{c^2} \int_0^{cr} z \{ \text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z \} dz \quad (74)$$

Führen wir  $z$  in Gl. (56) ein, so wird

$$c^2 \frac{dj_x}{dz^2} + \frac{c^2}{z} \frac{dj_x}{dz} = -w_k^2 j_x$$

oder mit Rücksicht auf (62)  $w_k^2 = c^2 e^{-\iota^2 \gamma}$

$$z \frac{d^2 j_x}{dz^2} + \frac{dj_x}{dz} = -j_x z e^{-\iota^2 \gamma}$$

oder:

$$\frac{d}{dz} \left( z \frac{dj_x}{dz} \right) = -j_x z e^{-\iota^2 \gamma} \quad (75)$$

Führen wir den Wert für  $j_x$  aus (64) ein, mit:

$$j_x = a_0 (\text{ber } z + \iota \text{ bei } z)$$

also

$$\frac{dj_x}{dz} = a_0 (\text{ber}' z + i \text{bei}' z)$$

und entwickeln in (75) rechts die Potenz, so folgt:

$$a_0 \frac{d}{dz} (z \text{ber}' z + i z \text{bei}' z) = -a_0 z (\cos 2\gamma \text{ber} z + \sin 2\gamma \text{bei} z) + \\ + i a_0 z (\sin 2\gamma \text{ber} z - \cos 2\gamma \text{bei} z)$$

und es folgen wegen Gleichheit der reellen und imaginären Teile die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} (z \text{ber}' z) &= -z (\cos 2\gamma \text{ber} z + \sin 2\gamma \text{bei} z) \\ \frac{d}{dz} (z \text{bei}' z) &= z (\sin 2\gamma \text{ber} z - \cos 2\gamma \text{bei} z) \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

oder:

$$z \text{ber}' z = -\cos 2\gamma \int z \text{ber} z dz - \sin 2\gamma \int z \text{bei} z dz \\ z \text{bei}' z = \sin 2\gamma \int z \text{ber} z dz - \cos 2\gamma \int z \text{bei} z dz$$

Aus diesen zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten — den beiden Integralen — ergeben sich mit Rücksicht auf [s. (59) und (61)]:

$$\cos 2\gamma = \frac{a}{c^2}; \quad \sin 2\gamma = \frac{b}{c^2}; \quad c^4 = a^2 + b^2; \\ \left. \begin{aligned} \int z \text{ber} z dz &= \frac{z}{c^2} (b \text{bei}' z - a \text{ber}' z) \\ \int z \text{bei} z dz &= -\frac{z}{c^2} (b \text{ber}' z + a \text{bei}' z) \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Nun können wir (74) partiell integrieren. Es ist:

$$\int z \text{ber}^2 z dz = \int \underbrace{(z \text{ber} z dz)}_{dv} \underbrace{\text{ber} z}_u = \underbrace{\text{ber} z}_u \underbrace{\frac{z}{c^2} (b \text{bei}' z - a \text{ber}' z)}_v - \\ - \frac{1}{c^2} \int \underbrace{z (b \text{bei}' z - a \text{ber}' z)}_v \cdot \underbrace{\text{ber}' z dz}_{du} \\ \int z \text{bei}^2 z dz = -\text{bei} z \cdot \frac{z}{c^2} (b \text{ber}' z + a \text{bei}' z) + \\ + \frac{1}{c^2} \int z (b \text{ber}' z + a \text{bei}' z) \cdot \text{bei}' z dz$$

Also:

$$\int z(\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z) dz = \frac{z}{c^2} \{ \text{ber } z (b \text{bei}' z - a \text{ber}' z) - \text{bei } z (b \text{ber}' z + a \text{bei}' z) \} + \frac{a}{c^2} \int z(\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z) dz \quad (78)$$

Nun ist das  $\int z(\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z) dz$  zu ermitteln. Es ist aber:

$$\begin{aligned} \int z \text{ber}'^2 z dz &= \int \underbrace{z \text{ber}' z}_u \cdot \underbrace{\text{ber}' z dz}_{dv} = \underbrace{z \text{ber}' z}_u \cdot \underbrace{\text{ber } z}_v - \int \text{ber } z \frac{d}{dz} (z \text{ber}' z) dz \\ \int z \text{bei}'^2 z dz &= z \text{bei}' z \cdot \text{bei } z - \int \text{bei } z \frac{d}{dz} (z \text{bei}' z) dz \end{aligned}$$

Führen wir hier rechts die Werte aus (76) ein, so wird, wenn wir summieren:

$$\begin{aligned} \int z(\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z) dz &= z(\text{ber } z \cdot \text{ber}' z + \text{bei } z \cdot \text{bei}' z) + \\ &+ \int \text{ber } z \cdot z(\cos 2\gamma \text{ber } z + \sin 2\gamma \text{bei } z) dz - \\ &- \int \text{bei } z \cdot z(\sin 2\gamma \text{ber } z - \cos 2\gamma \text{bei } z) dz \end{aligned}$$

oder

$$\int z(\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z) dz = z(\text{ber } z \cdot \text{ber}' z + \text{bei } z \cdot \text{bei}' z) + \cos 2\gamma \int z(\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z) dz \quad (78 a)$$

Dies in (78) eingesetzt, ergibt mit Rücksicht auf:

$$\cos 2\gamma = \frac{a}{c^2}$$

$$\begin{aligned} \int z(\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z) dz &= \frac{z}{c^2} \{ \text{ber } z (b \text{bei}' z - a \text{ber}' z) - \text{bei } z (b \text{ber}' z + \\ &+ a \text{bei}' z) \} + \frac{a}{c^2} (z \text{ber } z \cdot \text{ber}' z + z \text{bei } z \cdot \text{bei}' z) + \frac{a^2}{c^4} \int z(\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z) dz \end{aligned}$$

und wegen:

$$c^4 = a^2 + b^2; \quad 1 - \frac{a^2}{c^4} = \frac{c^4 - a^2}{c^4} = \frac{b^2}{c^4}$$

wird:

$$\int z(\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z) dz = z \frac{c^2}{b} (\text{ber } z \cdot \text{bei}' z - \text{bei } z \cdot \text{ber}' z) \quad (78 b)$$

also nach (74)

$$\frac{1}{c^2} \int_0^{cr} z(\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z) dz = \frac{rc}{b} \{ \text{ber}(rc)_k \text{bei}'(rc)_k - \text{bei}(rc)_k \text{ber}'(rc)_k \}$$

somit nach (73) und (71)

$$P_k = \frac{\omega^2 \mu^2}{\varrho^2} \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{16 \mathfrak{J}^2}{r^4} \pi \varrho \cdot \frac{rc}{b} \left\{ \frac{\text{ber } \text{bei}' - \text{bei } \text{ber}'}{\text{ber}_1^2 + \text{bei}_1^2} \right\}_{(rc)_k}$$

Da wir unter  $\mathfrak{J}$  die Amplitude der gesamten Stromstärke verstanden haben, so ist:

$$\mathfrak{J}^2 = 2 I^2$$

wo:  $I$  = Effektivwert; und daher:

$$P_k = I^2 \left[ \frac{\omega^2 \mu^2}{\varrho^2} \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{2 \cdot 16}{r^4} \pi \varrho \frac{rc}{b} \left\{ \frac{\text{ber } \text{bei}' - \text{bei } \text{ber}'}{\text{ber}_1^2 + \text{bei}_1^2} \right\}_{(rc)_k} \right] = I^2 R_w \quad (79)$$

Auch hier ist es klar, daß der Klammerausdruck  $[\ ]$  den Wechselstromwiderstand  $R_w$  pro Zentimeter Länge repräsentiert.

Da der Gleichstromwiderstand:  $R_g = \frac{\varrho}{\pi r^2}$ ; so ist

$$\xi = \frac{R_w}{R_g} = \frac{\omega^2 \mu^2}{\varrho^2} \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{2 \cdot 16}{r^4} \pi^2 \frac{r^3 c}{b} \left\{ \frac{\text{ber} \cdot \text{bei}' - \text{bei} \cdot \text{ber}'}{\text{ber}_1^2 + \text{bei}_1^2} \right\}_{(rc)_k} \quad (80)$$

Durch Entwicklung der Funktionen [s. (63) und (65)] läßt sich leicht zeigen, daß die Beziehungen bestehen:

$$\left. \begin{aligned} b \text{ber}' z + a \text{bei}' z &= -c^2 \frac{z}{2} \text{bei}_1 z \\ b \text{bei}' z - a \cdot \text{ber}' z &= c^2 \frac{z}{2} \text{ber}_1 z \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\text{ber}_1^2 z + \text{bei}_1^2 z = \frac{a^2 + b^2}{c^4} \cdot \frac{4}{z^2} (\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z) = \frac{4}{z^2} (\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z) \quad (81 a)$$

und dies in (80) mit:  $z^2 = r^2 \cdot c^2$ ; eingesetzt, ergibt:

$$\xi = \frac{\omega^2 \mu^2}{\varrho^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{c} \pi^2 \frac{r}{b} \left\{ \frac{\text{ber } \text{bei}' - \text{bei } \text{ber}'}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \right\}_{(rc)_k} \quad (82)$$

Führt man aus (58) und (61) die Werte für  $b$  und  $c$  ein, so wird

$$\xi = \frac{\omega^2 \mu^2}{\varrho^2} \frac{2 \cdot 4 \cdot \pi^2}{\sqrt[4]{\omega^4 \varepsilon^2 \mu^2 + 16 \pi^2 \omega^2 \frac{\mu^2}{\varrho^2} + 8 \pi \omega^3 \varepsilon \frac{\mu^2}{\varrho} \sin \delta}} \cdot \frac{r}{4 \pi \omega \frac{\mu}{\varrho} + \omega^2 \varepsilon \mu \sin \delta} \cdot \left\{ \frac{\text{ber } \text{bei}' - \text{bei } \text{ber}'}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \right\}_{(rc)_k}$$

Führen wir endlich nach (6):  $k = 2\pi \sqrt{\frac{f\mu}{\rho}}$ ; ein, dann ist:

$$\frac{\omega^3 \mu^2}{\rho^2} = k^2 \frac{f\mu}{\rho}; \quad \frac{4\pi\omega\mu}{\rho} = 2k^2; \quad \omega^2 \varepsilon \mu \sin \delta = k^2 \varepsilon f \rho \sin \delta$$

$$\omega^2 \varepsilon^2 \mu^2 = k^4 \varepsilon^2 f^2 \rho^2; \quad 16\pi^2 \omega^2 \frac{\mu^2}{\rho^2} = 4k^4; \quad 8\pi\omega^3 \varepsilon \frac{\mu^2}{\rho} \sin \delta = 4k^4 \varepsilon f \rho \sin \delta$$

Alle diese Werte in die Gleichung für  $\xi$  eingesetzt, ergibt:

$$\xi = \frac{2kr}{(2 + \varepsilon \rho f \sin \delta) \sqrt[4]{\varepsilon^2 \rho^2 f^2 + 4 + 4\varepsilon \rho f \sin \delta}} \left\{ \frac{\text{ber } bei' - \text{bei } ber'}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \right\}_{(r)_k} \quad (83)$$

Das ist also der Ausdruck für die Widerstandserhöhung bei Berücksichtigung des Verschiebungsstromes. Setzt man hierin  $\varepsilon = 0$ , so muß sich das Resultat der erstgegebenen Theorie ergeben. Das ist der Fall, denn es wird dann nach (58)

$$a = 0; \quad b = 2k^2 = m^2; \quad c = m;$$

und es übergeht (83) in (39).

Zum Zwecke der Diskussion von (83) gehen wir denselben Weg wie früher für hohe Argumentenwerte.

Es war nach (64)

$$j_x = a_0 J_{0(cx)_k}; \quad \text{mit } J_{0(cx)_k} = \text{ber}(cx)_k + \iota \text{bei}(cx)_k$$

Wir führen ein:  $z = cx$ ; mit  $c = \sqrt[4]{a^2 + b^2}$ .

Nach (56) ist somit, wegen (62):

$$[w_k^2 = c^2 \cdot e^{-\iota^2 \gamma}],$$

die Gleichung erfüllt:

$$\frac{d^3 J_{0z}}{dz^3} + \frac{1}{z} \frac{dJ_{0z}}{dz} + e^{-\iota^2 \gamma} \cdot J_{0z} = 0.$$

Machen wir auch hier den Ansatz:

$$J_{0z} = \frac{K_z}{\sqrt{z}} \quad (84)$$

So ergibt sich wie früher die Gleichung:

$$\frac{d^2 K_z}{dz^2} + \left( \frac{1}{4z^2} + e^{-\iota^2 \gamma} \right) K_z = 0 \quad (84a)$$

Wir wollen das Verhältnis der Glieder in der Klammer abwägen. Es ist:

$$\frac{1}{4z^2} + e^{-\iota^2 \gamma} = \frac{1}{4z^2} + \cos 2\gamma - \iota \sin 2\gamma.$$

Wir fragen nun: Wann kann  $\frac{1}{4z^2}$  gegen  $\cos 2\gamma$  vernachlässigt werden?

Es ist:

$$\frac{1}{4z^2} = \frac{1}{4c^2x^2} = \frac{1}{4x^2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

und nach (61) und (59)

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{b}{a}; \quad \cos 2\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

also

$$\frac{1}{4z^2} \frac{1}{\cos 2\gamma} = \frac{1}{4ax^2} = \frac{1}{4x^2 \omega^2 \varepsilon \mu \cos \delta}.$$

Wir sehen vor allem, daß mit steigender Frequenz ( $\omega$ ) dieser Quotient kleiner wird.  $\delta$  ist jedenfalls ein kleiner Winkel; wir können also für diese Überschlagsrechnung

$$\cos \delta \sim 1$$

setzen.

$\varepsilon$  liegt für dielektrische Medien etwa zwischen 1 und 10 elektrostatischen Einheiten. Für Metalle ist das  $\varepsilon$  nicht zuverlässig bekannt. Broca schloß in einer, von Poincaré (Comptes rendus 1904) veröffentlichten, Arbeit auf die Größenordnung  $1 \cdot 10^{12}$  ESE. Messungen, die in Jena von Lehrs ausgeführt wurden, wiesen auf bedeutend kleinere Werte hin. Aschkinass findet das  $\varepsilon$  für Metalle von der Größenordnung 3000 bis 5000.

Dem sei wie ihm wolle. Jedenfalls können wir sagen, daß für:

$$\frac{1}{4x^2 \omega^2 \varepsilon \mu} \cong 0,01$$

$\frac{1}{4z^2}$  gegen  $\cos 2\gamma$  bedeutungslos ist; oder für:

$$f \cong 5 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \cdot \frac{1}{x} \quad (85)$$

Wäre  $\varepsilon = 3000$  ESE; also:  $\frac{3000}{9 \cdot 10^{20}} = 3,3 \cdot 10^{-18}$  El. Magn. Einheiten und der Drahradius 1 cm; und  $\mu = 1$ , so ergäbe sich

$$f \cong 1800 \text{ Millionen.}$$

Jedenfalls legen wir unserer weiteren Untersuchung Frequenzen zugrunde, die durch (85) bestimmt sind.

Dann aber übergeht (84) in

$$\frac{d^2 K_z}{dz^2} + e^{-i2\gamma} K_z = 0$$

oder mit:

$$v^2 = e^{-\iota^2 \gamma} \tag{86}$$

$$K_z = A \sin(vz) + B \cos(vz) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(vz + \arctg \frac{B}{A}\right).$$

Setzen wir:

$$F = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \xi = \arctg \frac{B}{A} \tag{87}$$

so wird:

$$K_z = F \sin(vz + \xi)$$

Daher nach (84) wegen:  $v = e^{-\iota \gamma} = \cos \gamma - \iota \sin \gamma$ :

$$J_{0_z} = \text{ber } z + \iota \text{ bei } z = \frac{F}{\sqrt{z}} \sin \{ (z \cos \gamma + \xi) - \iota z \sin \gamma \} \tag{88}$$

Setzen wir noch:

$$z \cos \gamma + \xi = \varphi$$

so wird:

$$\text{ber } z = \frac{F}{\sqrt{z}} \sin \varphi \mathfrak{Cof} (z \sin \gamma)$$

$$\text{bei } z = -\frac{F}{\sqrt{z}} \cos \varphi \mathfrak{Ein} (z \sin \gamma)$$

Somit:

$$\begin{aligned} \text{ber}' z = & -\frac{1}{2} \frac{F}{z^{3/2}} \sin \varphi \mathfrak{Cof} (z \sin \gamma) + \frac{F \cos \gamma}{\sqrt{z}} \cos \varphi \mathfrak{Cof} (z \sin \gamma) + \\ & + \frac{F \sin \gamma}{\sqrt{z}} \sin \varphi \cdot \mathfrak{Ein} (z \sin \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bei}' z = & \frac{1}{2} \frac{F}{z^{3/2}} \cos \varphi \mathfrak{Ein} (z \sin \gamma) + \frac{F \cos \varphi}{\sqrt{z}} \sin \varphi \mathfrak{Ein} (z \sin \gamma) - \\ & - \frac{F \sin \gamma}{\sqrt{z}} \cos \varphi \cdot \mathfrak{Cof} (z \sin \gamma) \end{aligned}$$

und daher:

$$\left. \begin{aligned} (\text{ber bei}' - \text{bei ber}')_z = & \frac{F^2}{z} \cos \gamma \mathfrak{Ein} (z \sin \gamma) \mathfrak{Cof} (z \sin \gamma) - \\ & - \frac{F^2}{z} \sin \gamma \sin \varphi \cos \varphi \cdot \underbrace{\{ \mathfrak{Cof}^2 (z \sin \gamma) - \mathfrak{Ein}^2 (z \sin \gamma) \}}_{= 1} \end{aligned} \right\} \tag{89}$$

und

$$\left. \begin{aligned} (\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2)_z = & \frac{1}{4} \frac{F^2}{z^3} \{ \sin^2 \varphi \mathfrak{Cof}^2 (z \sin \gamma) + \cos^2 \varphi \mathfrak{Ein}^2 (z \sin \gamma) \} + \\ & + \frac{F^2}{z} \{ \sin^2 \varphi \mathfrak{Ein}^2 (z \sin \gamma) + \cos^2 \varphi \mathfrak{Cof}^2 (z \sin \gamma) \} - \\ & - \frac{F^2}{z^2} \{ \cos \gamma \sin \varphi \cos \varphi + \sin \gamma \mathfrak{Ein} (z \sin \gamma) \mathfrak{Cof} (z \sin \gamma) \} \end{aligned} \right\} \tag{90}$$

Wir fragen nun nach der Größenordnung von  $(z \sin \gamma)$ , dem Argument der Hyperbelfunktionen.

Es ist nach (58) bis (61)

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{b}{a}; \quad \sin 2\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos 2\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad c^2 = \sqrt{a^2 + b^2};$$

also:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma} = \frac{b}{a + c^2};$$

daher:

$$\left. \begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{b}{c \sqrt{2} \sqrt{a + c^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{\sqrt{a + c^2}}{c \sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Wegen:  $z = cx$ ; ist also:

$$z \sin \gamma = x \frac{b}{\sqrt{2} \sqrt{a + c^2}} \quad (92)$$

Setzen wir die Werte für  $a$  und  $b$  aus (58) ein, so wird:

$$z \sin \gamma = x \frac{4\pi\omega \frac{\mu}{\rho} + \omega^2 \varepsilon \mu \sin \delta}{\sqrt{2} \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu \cos \delta + \mu \omega \sqrt{\omega^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{4\pi}{\rho}\right)^2 + 8\pi \frac{\omega \varepsilon}{\rho} \sin \delta}}} \quad (93)$$

Da wir über  $\delta$ , den Winkel der dielektrischen Hysterisis, auch nichts Bestimmtes wissen, wollen wir die beiden Möglichkeiten:  $\delta = 0$ ; und:  $\delta > 0$ ; betrachten.

Ist: 1.  $\delta = 0$ , dann wird für sehr hohe Frequenzen nach (93)

$$z \sin \gamma = x \frac{4\pi\omega \frac{\mu}{\rho}}{\sqrt{2} \sqrt{2} \omega^2 \varepsilon \mu} = x \frac{2\pi}{\rho} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Das wäre für Kupfer, mit:  $\rho = 1700$ ; und z. B.

$$\varepsilon = \frac{3000}{9 \cdot 10^{20}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-17}$$

$$z \sin \gamma = x \frac{6,28}{1,7} 10^{-3} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 10^{-17}}} = x \cdot 20 \cdot 10^5$$

also selbst für einen Draht von:  $x = 0,1$  cm Halbmesser eine Zahl von der Größenordnung: 200000.

Ist: 2.  $\delta > 0$ , dann wird für sehr hohe Frequenzen nach (93)

$$z \sin \gamma = x \frac{\omega^2 \varepsilon \mu \sin \delta}{\sqrt{2} \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu (1 + \cos \delta)}} = x \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon \mu} \frac{\sin \delta}{\sqrt{1 + \cos \delta}}$$

also mit  $\omega$  eine beliebig hohe Zahl.

Es wird somit für jeden Wert von  $\delta$  — bei genügend hoher Frequenz — das Argument  $z \sin \gamma$  einen hohen Wert haben, und es gilt daher:

$$\mathfrak{S}in(z \sin \gamma) = \mathfrak{C}of(z \sin \gamma)$$

Dadurch übergehen aber unsere Gl. (89) und (90) in:

$$(\text{ber bei}' - \text{bei ber}')_z = \frac{F^2}{z} \{ \cos \gamma \mathfrak{S}in^2(z \sin \gamma) - \sin \gamma \sin \varphi \cos \varphi \} \quad (89 \text{ a})$$

$$\left. \begin{aligned} &(\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2)_z = \\ &= \frac{F^2}{z} \left\{ \frac{1}{4z^2} + 1 - \left( \frac{\cos \gamma \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{z \mathfrak{S}in^2(z \sin \gamma)} + \frac{1}{z} \sin \gamma \right) \right\} \mathfrak{S}in^2(z \sin \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (90 \text{ a})$$

Es war aber nach (91)

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{a+c^2}}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{a}{c^2}}; \quad \text{und} \quad \frac{a}{c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}.$$

Schwankt  $\frac{b}{a}$  zwischen Null und Unendlich, so schwankt  $\frac{a}{c^2}$  zwischen Eins und Null und daher  $\cos \gamma$  zwischen 1 und 0,71.

Mit Rücksicht auf den großen Wert von  $\mathfrak{S}in^2(z \sin \gamma)$  ist daher in (89 a) das Glied  $\sin \gamma \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2}$  gegenüber  $\cos \gamma \mathfrak{S}in^2(z \sin \gamma)$  zu vernachlässigen und ebenso in (90a) das Glied

$$\frac{\cos \gamma \frac{\sin 2\varphi}{2}}{\mathfrak{S}in^2(z \sin \gamma)} \quad \text{gegenüber} \quad \sin \gamma;$$

so daß wir erhalten:

$$\left( \frac{\text{ber bei}' - \text{bei ber}'}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \right)_z = \frac{\cos \gamma}{\frac{1}{4z^2} + 1 - \frac{1}{z} \sin \gamma}$$

und da laut Annahme  $\frac{1}{4z^2}$  gegen 1 zu vernachlässigen ist, folgt aus (82)

$$\xi = \frac{\omega^2 \mu^2}{\rho^2} \frac{8\pi^2 r}{b \cdot c} \frac{\cos \gamma}{1 - \frac{\sin \gamma}{rc}}$$

Endlich verschwindet für genügend hohe Frequenzen auch  $\frac{\sin \gamma}{rc}$  gegenüber 1, und wir erhalten:

$$\xi = \frac{\omega^2 \mu^2}{\rho^2} 8 \pi^2 r \frac{\cos \gamma}{b \cdot c} \quad (94)$$

Jetzt sind wir vor die prinzipielle Entscheidung über den Wert des Winkels  $\delta$  gestellt. Die hier vorgeführte Theorie erzwingt die Entscheidung. Da wir  $\varepsilon$  als konstant, also als unabhängig von der Frequenz eingeführt haben, ist es zunächst naheliegend, auch  $\delta$  (die zweite Charakteristische für das Medium) als konstant anzusehen.

Geben wir nun  $\delta$  einen Wert:  $\delta > 0$ , so wird für höchste Frequenzen nach (91), (58) bis (61):

$$\frac{\cos \gamma}{b \cdot c} = \frac{1}{b \cdot c} \frac{\sqrt{a + c^2}}{c \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu \cos \delta + \omega^2 \varepsilon \mu}}{\omega^2 \varepsilon \mu \sin \delta \cdot \omega^2 \varepsilon \mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{1 + \cos \delta}}{\omega^4 \varepsilon^2 \mu^2 \sin \delta},$$

oder:

$$\frac{\cos \gamma}{b \cdot c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 + \cos \delta}}{\omega^3 \varepsilon^{3/2} \mu^{3/2} \sin \delta}$$

und daher nach (94)

$$\xi = \frac{\omega^2 \mu^2}{\rho^2} \cdot 8 \pi^2 r \frac{\cos \gamma}{b \cdot c} = \frac{\text{Konstante}}{\omega}$$

Dieser Ausdruck würde aber für steigendes  $\omega$  kleiner werden, was den Tatsachen widerspricht.

Es bleibt also, unserer Theorie folgend, nur die Annahme übrig:

$$\delta = 0.$$

Dann aber wird:

$$a = \omega^2 \varepsilon \mu; \quad b = 4 \pi \omega \frac{\mu}{\rho}; \quad c^2 = \omega \mu \sqrt{\omega^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{4 \pi}{\rho}\right)^2}$$

also für sehr hohe Frequenzen:

$$c^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = a$$

Daher:

$$\frac{\cos \gamma}{b \cdot c} = \frac{\sqrt{a + c^2}}{b \cdot c^2 \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2a}}{b c^2 \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a}}{b \cdot c^2} = \frac{\sqrt{a}}{b \cdot a} = \frac{1}{b \sqrt{a}}$$

und da jetzt:

$$b = 4 \pi \omega \frac{\mu}{\rho}; \quad \sqrt{a} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$$

so wird:

$$\xi = \frac{\omega^2 \mu^2}{\rho^2} 8 \pi^2 r \frac{1}{\frac{4 \pi}{\rho} \mu \omega^2 \sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{2 \pi r}{\rho} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (95)$$

Kontrollieren wir die Dimension. Es ist:

$$\text{Dim } r = L; \quad \text{Dim } \rho = L^2 T^{-1}; \quad \text{Dim } \varepsilon = L^{-2} T^2$$

Also:

$$\text{Dim } \xi = \text{Zahl } \frac{L}{L^2 T^{-1}} \sqrt{L^2 T^{-2}} = \text{Zahl!}$$

Aus:

$$\xi = \frac{R_w}{R_g}; \quad \text{ergibt sich nun: } R_w = \xi R_g = \xi \frac{\rho}{\pi r^2}$$

Daher:

$$R_w = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (96)$$

D. h.: Für die höchsten Frequenzen wird der Widerstand von der Frequenz ( $f$ ) und von der materiellen Beschaffenheit der Leiters ( $\rho$ ) unabhängig und konvergiert gegen den konstanten Wert  $\frac{2}{r} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ .

Dieses „theoretisch“ interessante Resultat ist technisch insofern bedeutungslos, als es — den Meßergebnissen nach — erst ganz ungeheuer hohe Frequenzen sind, die zu einer Konstanz des Widerstandes führen, Frequenzen, die vielleicht erst im Bereiche der Röntgenstrahlen liegen.

Für technisch — die drahtlose Übertragung mit inbegriffen — übliche Frequenzen ist jedenfalls die Vernachlässigung des Verschiebungsstromes und damit die Berechnung der Widerstandserhöhung nach (39 a) (39), (50) und (52) einwandfrei zulässig.

#### b) Der Induktionskoeffizient.

Zur Erfassung der Änderung des Induktionskoeffizienten gehen wir von der magnetischen Energie  $W_m$ , die der Stromfluß repräsentiert, aus.

Ist  $I$  die effektive Stromstärke, die den Leiter durchsetzt,  $L$  sein Induktionskoeffizient,  $\mu$  seine Permeabilität,  $H$  der Effektivwert der magnetischen Feldstärke und  $dv$  ein Volumenelement des unbegrenzten Raumes, so ist:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{8 \pi} \int \mu H^2 dv \quad (97)$$

Wir haben nun zu bedenken, daß das Gesamtfeld des Leiters aus zwei Teilen besteht, einem Felde außerhalb und einem Felde innerhalb des Leiters. Das äußere Feld des Leiters ( $H_a$ ) bleibt ungeändert, wie auch die Stromdichte im Innern verteilt sein mag. Nicht aber das innere Feld ( $H_i$ ). Wir wollen dieses innere Feld bei gleichmäßiger

Stromverteilung  $H_{i_g}$ , bei ungleichmäßiger  $H_{i_u}$  nennen. Dann ist also nach (97)

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{8 \pi} \int \mu (H_a^2 + H_{i_u}^2) dv$$

Nennen wir  $L_g$  den Induktionskoeffizienten bei gleichmäßiger Verteilung der Stromdichte, so ist:

$$\frac{1}{2} L_g I^2 = \frac{1}{8 \pi} \int \mu (H_a^2 + H_{i_g}^2) dv.$$

Subtrahieren wir diese beiden Gleichungen, so folgt:

$$L - L_g = \frac{1}{4 \pi I^2} \int \mu (H_{i_u}^2 - H_{i_g}^2) dv$$

Bei dieser Subtraktion ist — wie ersichtlich — das äußere Feld entfallen; die Integration bezieht sich nur noch auf das Leitervolumen. Das Element des Leitervolumens  $dv$  ist aber nach Abb. 72 gegeben durch:  $(2 \pi x dx \cdot 1) \text{ cm}^3$ , so daß wir erhalten:

$$L - L_g = \frac{1}{2 I^2} \int_0^r \mu (H_{i_u}^2 - H_{i_g}^2) x dx \quad (98)$$

Wir wollen auch hier den Verschiebungsstrom mitberücksichtigen. Dann ist nach (68)

$$\mathfrak{H}_{i_u} = \mathfrak{H}_x = \frac{2 \Im}{r^2} x \frac{J_{1(cx)_k}}{J_{1(cr)_k}} = \frac{2 \Im}{r^2} x \frac{\text{ber}_1(cx)_k + i \text{bei}_1(cx)_k}{\text{ber}_1(cr)_k + i \text{bei}_1(cr)_k}$$

Daher das Quadrat der wahren Amplitude, des Maximalwertes von  $\mathfrak{H}_{i_u}$

$$(\mathfrak{H}_{i_u}^2)_{\max} = \frac{4 \Im^2}{r^4} x^2 \frac{\text{ber}_1^2(cx)_k + \text{bei}_1^2(cx)_k}{\text{ber}_1^2(cr)_k + \text{bei}_1^2(cr)_k} \quad (99)$$

Nun ist nach (81 a)

$$\text{ber}_1^2(cx)_k + \text{bei}_1^2(cx)_k = \frac{4}{c^2 x^2} \{ \text{ber}'^2(cx)_k + \text{bei}'^2(cx)_k \}$$

und

$$\text{ber}_1^2(cr)_k + \text{bei}_1^2(cr)_k = \frac{4}{c^2 r^2} \{ \text{ber}'^2(cr)_k + \text{bei}'^2(cr)_k \}$$

und daher

$$(\mathfrak{H}_{i_u}^2)_{\max} = \frac{4 \Im^2}{r^2} \frac{\text{ber}'^2(cx)_k + \text{bei}'^2(cx)_k}{\text{ber}'^2(cr)_k + \text{bei}'^2(cr)_k}$$

und gehen wir von den Amplituden zu den Effektivwerten über, und sehen  $\mu$  im Leiter als konstant an, was allerdings nur bei nichtferromagnetischen Leitern streng zulässig ist, so wird:

$$\mu \int x H_u^2 dx = \frac{4\mu I^2}{r^2} \frac{1}{\text{ber}'^2(cr)_k + \text{bei}'^2(cr)_k} \int_0^r x \left\{ \text{ber}'^2(cx)_k + \text{bei}'^2(cx)_k \right\} dx \quad (100)$$

Nennen wir  $Y$  das Integral, so lautet dieses mit:  $z = cx$ :

$$Y = \frac{1}{c^2} \int_0^{rc} z (\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z) dz$$

Nach (78a) ist aber:

$$\int z (\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z) dz = z (\text{ber } z \text{ ber}' z + \text{bei } z \text{ bei}' z) + \cos 2\gamma \int z (\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z) dz$$

und nach (78b)

$$\int z (\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z) dz = z \frac{c^2}{b} (\text{ber } z \text{ bei}' z - \text{bei } z \text{ ber}' z)$$

und da:

$$\cos 2\gamma = \frac{a}{c^2};$$

so folgt

$$\begin{aligned} \int z (\text{ber}'^2 z + \text{bei}'^2 z) dz &= z (\text{ber } z \text{ ber}' z + \text{bei } z \text{ bei}' z) + \\ &+ z \frac{a}{b} (\text{ber } z \text{ bei}' z - \text{bei } z \text{ ber}' z) = \frac{z}{b} \{ b (\text{ber } z \text{ ber}' z + \text{bei } z \text{ bei}' z) + \\ &+ a (\text{ber } z \text{ bei}' z - \text{bei } z \text{ ber}' z) \} \end{aligned}$$

und daher

$$Y = \frac{r}{bc} \{ b (\text{ber} \cdot \text{ber}' + \text{bei} \cdot \text{bei}')_{(cr)_k} + a (\text{ber} \cdot \text{bei}' - \text{bei} \cdot \text{ber}')_{(cr)_k} \}$$

Es lautet also (100)

$$\mu \int x H_u^2 dx = \frac{4\mu I^2}{r^2} \frac{r}{bc} \left\{ \frac{b (\text{ber } \text{ber}' + \text{bei } \text{bei}') + a (\text{ber } \text{bei}' - \text{bei } \text{ber}')}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \right\}_{(cr)_k} \quad (101)$$

Nun fehlt noch das  $\int \mu H_g^2 x dx$  in (98).

Ist  $i$ , bei gleichmäßiger Stromverteilung, die Amplitude der Stromstärke im Leiterquerschnitt vom Radius  $x$  und  $j$  die Amplitude der — dann überall gleichen — Stromdichte, so ist

$$i = j\pi x^2; \quad \text{und} \quad \Im = j\pi r^2$$

wobei  $\mathfrak{I}$  die Amplitude der Gesamtstromstärke. Dann folgt durch Division

$$i = \mathfrak{I} \frac{x^2}{r^2}$$

Da nun:

$$\mathfrak{H}_{ig} = \frac{2i}{x} = 2 \mathfrak{I} \frac{x}{r^2}$$

so folgt das Quadrat des Effektivwertes der Feldstärke mit

$$H_{ig}^2 = 4 I^2 \frac{x^2}{r^4}$$

also:

$$\mu \int_0^r H_{ig}^2 x dx = \mu \int_0^r 4 I^2 \frac{x^3}{r^4} dx = \mu I^2 \quad (102)$$

Es wird somit nach (101) und (102)

$$L - L_g = \frac{1}{2 I^2} \left\{ \frac{4 \mu I^2}{r} \frac{1}{bc} \left[ \frac{b(\text{ber ber}' + \text{bei bei}') + a(\text{ber bei}' - \text{bei ber}')}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \right] \right\}_{(cr)_k} - \mu I^2 \quad (103)$$

oder:

$$L = L_g + \frac{2 \mu}{bc} \frac{1}{r} \left\{ \frac{b(\text{ber ber}' + \text{bei bei}') + a(\text{ber bei}' - \text{bei ber}')}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \right\}_{(cr)_k} - \frac{\mu}{2} \quad (103)$$

Vernachlässigt man auch hier den Verschiebungsstrom, d. h. setzt  $\varepsilon = 0$ ; so wird nach (58)

$$a = 0; \quad b = 4 \pi \omega \frac{\mu}{\rho} = 2 k^2; \quad c = \sqrt[4]{a^2 + b^2} = \sqrt{b} = k \sqrt{2} = m;$$

und es übergeht (103) in:

$$L = L_g + \mu \left\{ \frac{2}{mr} \frac{\text{ber}(mr) \text{ber}'(mr) + \text{bei}(mr) \text{bei}'(mr)}{\text{ber}'^2(mr) + \text{bei}'^2(mr)} - \frac{1}{2} \right\} \quad (104)$$

die bekannte Formel, nach der gerechnet wird.

Für:  $mr \leq 2$  gilt:

$$L = L_g - \frac{1}{48} \left( \frac{mr}{2} \right)^4 + \frac{13}{8640} \left( \frac{mr}{2} \right)^8 \quad (104a)$$

Für größere Werte gilt nach Zenneck die Näherungsformel:

$$L = L_g + \mu \left\{ \frac{1,424}{mr} - \frac{0,160}{(mr)^2} - 0,5 \right\} \quad (104b)$$

Für Höchstwerte der Frequenz, für die der Verschiebungsstrom berücksichtigt wird, können wir Gl. (103) in ähnlicher Weise diskutieren, wie früher (83).

Wir finden, bei Gebrauch der gleichen Zeichen, für höchste Frequenzen und  $\delta = 0$ :

$$\left\{ \frac{b(\text{ber ber}' + \text{bei bei}') + a(\text{ber bei}' - \text{bei ber}')}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \right\}_{(z)} =$$

$$= \frac{-\frac{b}{2} \frac{F^2}{z^2} + b \frac{F^2}{z} \sin \gamma + a \frac{F^2}{z} \cos \gamma}{\frac{F^2}{z} \left( \frac{1}{4z^2} + 1 - \frac{1}{z} \sin \gamma \right)}$$

welcher Quotient für höchste Frequenzen in den Wert  $a$  übergeht. Es wird somit nach (103)

$$L = L_g + \frac{2\mu}{b \cdot c} \cdot \frac{a}{r} - \frac{\mu}{2}$$

Da jetzt:

$$a = \omega^2 \varepsilon \mu; \quad b = 4\pi\omega \frac{\mu}{\rho}; \quad c^2 = a; \quad c = \sqrt{a}$$

so wird:

$$L = L_g + \frac{\rho}{2\pi r} \sqrt{\varepsilon \mu} - \frac{\mu}{2} \tag{105}$$

Wenn wir die Dimension kontrollieren, so finden wir:

$$\frac{\rho}{2\pi r} \sqrt{\varepsilon \mu} = \frac{L^2 T^{-1}}{L} \sqrt{L^{-2} T^2} = \text{Zahl}$$

$L$  aber ist der Induktionskoeffizient pro Längeneinheit, also seine Dimension  $\frac{L}{L} = \text{Zahl}$ .

Gl. (105) sagt uns, daß auch der Induktionskoeffizient von der Frequenz unabhängig wird und einem konstanten Werte zustrebt.

Für Kupfer und  $\varepsilon = 3000$  ESE wäre dieser Grenzwert:

$$L = L_g + \frac{1}{r} \cdot \frac{1700}{6,28} \sqrt{\frac{3000}{9 \cdot 10^{20}}} - \frac{1}{2} = L_g + \frac{1}{r} \cdot 5 \cdot 10^{-7} - \frac{1}{2} \approx L_g - \frac{1}{2}$$

Man sieht, daß für den Induktionskoeffizienten die Berücksichtigung des Verschiebungsstromes bedeutungslos ist, denn das gleiche Resultat ergibt für höchste Frequenzen auch Zennecks Formel (104b).

Wäre es nun möglich, für solche Höchsfrequenzen die Impedanz zu messen, so ergäbe sich eine einfache Methode zur Bestimmung des viel umstrittenen  $\varepsilon$  für Metalle.

Ist  $\mathfrak{X}$  die gemessene Impedanz, so ist

$$\mathfrak{X}^2 = R_w^2 + \omega^2 L^2$$

Tragen wir also  $\mathfrak{X}^2$  (Ordinate) in Funktion von  $\omega^2$  (Abszisse) auf, so ist es klar, daß die Kurve für  $\mathfrak{X}^2$ , mit konstant werdenden Werten von  $R_w$  und  $L$ , in eine Gerade übergehen muß.

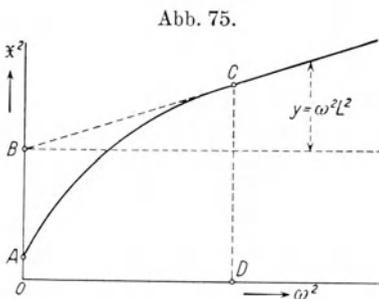
Der Abschnitt dieser Geraden auf der Ordinatenachse ergibt den Wert  $\overline{OB} = R_w^2 = \text{Konst}$ , aus welchem wir nun mit Hilfe von Gl. (96) erhalten:

$$\varepsilon = \frac{4}{r^2} \frac{1}{R_w^2} \mu (L^{-2} T^2)$$

$\overline{OA}$  ist natürlich gleich  $R_g^2$ , dem Quadrat des Gleichstromwiderstandes. Es ergibt sich also die Widerstandssteigerung mit

$$\xi = \sqrt{\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}}$$

Der Koeffizient der konstant gewordenen Selbstinduktion ergibt sich aus einer beliebigen Ordinate  $y$ , rechts von  $\overline{CD}$ .



Obwohl wir die Permeabilität  $\mu$  in unseren Entwicklungen mitgeführt haben, ist es doch klar, daß die Entwicklungen für „Eisen“ in „dieser“ Form keine Geltung haben. Vor allem ist die Annahme der Konstanz des  $\mu$  über den Querschnitt nicht zutreffend, da sich ja die Feldstärke mit dem Achsenabstand ändert. Begnügt man sich mit

einem Mittelwert von  $\mu$  für den Querschnitt, so bleibt immer noch die Hysterese zu berücksichtigen. Dies geschieht bekanntlich durch Einführung des Winkels  $\nu$  der magnetischen Verzögerung. Der Ansatz für die Induktion:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} e^{-\nu}$$

trägt der Hysterese Rechnung.

Unsere Ausgangsgleichung (53a) bleibt dann ungeändert, (54a) aber übergeht in:

$$\frac{dj_x}{dx} = \iota \omega \frac{\mu}{\rho} \mathfrak{H}_x \cdot e^{-\nu}.$$

Die ganze Entwicklung bleibt dann dieselbe, nur haben die Größen **a** und **b** andere Werte bekommen. Es wird:

$$a = \omega^2 \varepsilon \mu \cos(\nu + \delta) - 4 \pi \omega \frac{\mu}{\rho} \sin \nu$$

$$b = \omega^2 \varepsilon \mu \sin(\nu + \delta) + 4 \pi \omega \frac{\mu}{\rho} \cos \nu$$

und daher:

$$e = \sqrt[4]{\omega^4 \varepsilon^2 \mu^2 + \left(\frac{4\pi}{\rho}\right)^2 \omega^2 \mu^2 + 8\pi \omega^3 \frac{\varepsilon}{\rho} \mu^2 \sin \delta}$$

wie früher. Wir erhalten die Gl. (82) und (103) in derselben Form wie früher. Diskutiert man diese Gleichungen in derselben Art wie es geschehen, so ergibt sich die Folgerung, daß, so wie bekanntlich das  $\mu$  mit erhöhten Frequenzen der Einheit zustrebt, auch das  $\nu$  mit den höchsten Frequenzen gegen Null konvergiert.

## 2. Der Leiter mit Rechtecksquerschnitt.

Auch für diese Querschnittsform läßt sich eine idealisierte Leiteranordnung angeben, für die eine „exakte“ Behandlung des Stromverdrängungsproblems in einfacher Weise möglich ist.

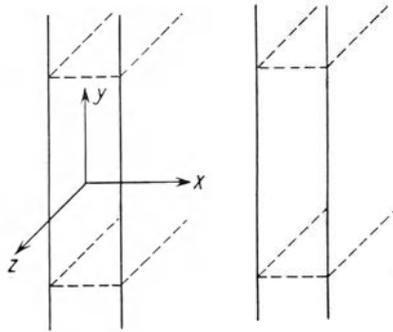
Wir wollen uns zwei parallele, unbegrenzt lange Schienen denken, die im Verhältnis zu ihrer Dicke sehr hoch sind (im Idealfall unendlich hoch) und die in geringem Abstand voneinander verlaufen.

Wir wählen ein Koordinatensystem so, daß die  $z$ -Richtung in die Längsrichtung der Schienen, die  $y$ -Richtung in die Höhenrichtung fällt.

Dann steht also die  $x$ -Richtung auf der Schienenfläche senkrecht.

Bei dieser Anordnung ist es ohne weiteres klar, daß Strom und Feld von der  $y$ -Koordinate unabhängig sind. Wir machen nun weiter die Annahme, daß diese Größen auch von der  $z$ -Koordinate unabhängig sind. Diese Annahme ist für eine, in der  $z$ -Richtung unendlich lange, Schiene exakt; sie ist es nicht mehr für eine endlich lange Schiene, wo dies an den Enden nicht mehr zutrifft.

Abb. 76.



Es sollen also die  $\frac{\partial}{\partial y}$  und  $\frac{\partial}{\partial z}$  gleich Null sein. Wenden wir nun, mit Vernachlässigung des Verschiebungsstromes, in Leiter und Dielektrikum die Maxwell'schen Grundgleichungen an, so folgt für den Leiter

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi j \quad (106)$$

und

$$\operatorname{rot} \mathfrak{F} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathfrak{H}) \quad (107)$$

Für das Dielektrikum folgt:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0 \quad (108)$$

und allgemein für den ganzen Raum, wenn wir ihn als magnetisch homogen voraussetzen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \quad (109)$$

Da wir nur eine Strömung in der  $z$ -Richtung haben, sind die  $x$  und  $y$ -Komponenten der Stromdichte Null und

$$j_z = j; \quad j_x = j_y = 0 \quad (110)$$

Ebenso hat die elektrische Feldstärke die Strömungsrichtung und es ist somit:

$$\mathfrak{F}_z = \mathfrak{F}; \quad \mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_y = 0 \quad (111)$$

Es folgt also aus (106)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} = 4\pi j_z; \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial x} = 0$$

und somit wegen:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

wird im Leiter:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} = 4\pi j_z; \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial x} = 0; \quad (112)$$

Es folgt aus (108)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial x} = 0;$$

und es wird daher im Dielektrikum:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial x} = 0;$$

Aus (109) folgt für den ganzen Raum:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} = 0$$

Diese Bedingungen ergeben für den Leiter:

$$\mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}; \quad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_z = 0;$$

Für das Dielektrikum:

$$\mathfrak{H}_y = \mathfrak{H} = \text{konstant}; \quad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_z = 0;$$

Die magnetische Feldstärke verläuft also nur in der  $y$ -Richtung; sie ist im Dielektrikum konstant und im Leiter mit  $x$  veränderlich.

Aus (107) folgt aber jetzt.

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathfrak{H}_y) = \frac{\partial\mathfrak{F}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{F}_z}{\partial x} = -\frac{\partial\mathfrak{F}_z}{\partial x}$$

und wegen:  $\mathfrak{F} = \varrho \cdot j$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathfrak{H}_y) = \varrho \frac{\partial j_z}{\partial x} \tag{113}$$

und nach (112)

$$\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x} = 4\pi j_z \tag{114}$$

Dies sind jetzt unsere beiden Ausgangsgleichungen, die den Verlauf von Stromdichte und Feldstärke im Leiter darstellen.

Da es Ströme nur in der  $z$ -Richtung, Felder nur in der  $y$ -Richtung gibt, können wir uns im weiteren die Indizes bei  $j$  und  $\mathfrak{H}$  ersparen.

Eliminiert man  $j$  und  $\mathfrak{H}$ , durch nochmalige Differentiation, aus den beiden letzten Gleichungen, so folgt

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = 4\pi \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial j}{\partial t} \tag{115}$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} = 4\pi \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \tag{116}$$

Da wir wieder nur den Stationärzustand eines Wechselstromvorganges betrachten, so können wir, bei Annahme rein sinusförmigen Verlaufes von  $j$  und  $\mathfrak{H}$ , durch Anwendung der Symbolik, die partiellen Differentialgleichungen in totale überführen.

Es wird mit:

$$j = j_x e^{i\omega t}; \quad \text{und} \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_x e^{i\omega t};$$

wobei jetzt der Index  $x$  die Stromdichte und Feldstärke an der Stelle  $x$  ausdrücken soll.

$$\frac{d^2 j_x}{dx^2} = i 4\pi \frac{\omega\mu}{\varrho} \cdot j_x \tag{117}$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}_x}{dx^2} = i 4\pi \frac{\omega\mu}{\varrho} \mathfrak{H}_x \tag{118}$$

Setzen wir nach der, bei Behandlung des runden Leiters, eingeführten Bezeichnungsweise:

$$4\pi\omega \frac{\mu}{\varrho} = 4\pi \cdot 2\pi f \frac{\mu}{\varrho} = 2 \cdot \left(2\pi \sqrt{\frac{\mu f}{\varrho}}\right)^2 = 2k^2 = m^2 \quad \left. \vphantom{4\pi\omega \frac{\mu}{\varrho}} \right\} (119)$$

und

$$\iota m^2 = w^2$$

so wird:

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}_x}{dx^2} = w^2 \mathfrak{H}_x; \quad \text{also:} \quad \mathfrak{H}_x = c_1 e^{wx} + c_2 e^{-wx} \quad (120)$$

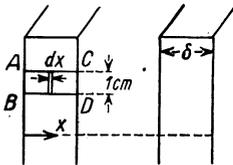
Die Integrationskonstanten  $c_1$  und  $c_2$  ergeben sich aus der Grenzbedingung:

Für  $x = 0$  ist:

$$\mathfrak{H}_0 = c_1 + c_2 = 0 \quad (121)$$

Denn  $x = 0$  ist der Grenzpunkt außerhalb der Leiter. Dieser Punkt befindet sich außerhalb des von den beiden Schienen, also den beiden entgegengesetzt fließenden Strömen, begrenzten Raumes, hat also die Feldstärke Null.

Abb. 77.



Aus (121) folgt jetzt:

$$c_2 = -c_1$$

und somit:

$$\mathfrak{H}_x = c_1 (e^{wx} - e^{-wx})$$

Nennen wir  $\mathfrak{I}$  die Amplitude des Gesamtstromes pro cm Schienenhöhe und wenden wir den ersten Maxwell'schen Satz auf das Rechteck ABCD an, so wird, wenn  $\delta$  die Schiendicke ist:

$$4\pi \mathfrak{I} = (0) \cdot 1 \text{ cm} + \mathfrak{H}_\delta \cdot 1 \text{ cm} = c_1 (e^{w\delta} - e^{-w\delta})$$

somit:

$$c_1 = \frac{4\pi \mathfrak{I}}{e^{w\delta} - e^{-w\delta}}$$

und daher:

$$\mathfrak{H}_x = 4\pi \mathfrak{I} \frac{e^{wx} - e^{-wx}}{e^{w\delta} - e^{-w\delta}} \quad (122)$$

Nach (114) ist aber:

$$j_x = \frac{1}{4\pi} \frac{d\mathfrak{H}}{dx}$$

und daher

$$j_x = \mathfrak{I} w \frac{e^{wx} + e^{-wx}}{e^{w\delta} - e^{-w\delta}} \quad (123)$$

Nun war nach (119):

$$w^2 = \iota m^2 = \iota 2k^2 = 2k^2 e^{\iota \frac{\pi}{2}};$$

somit:

$$w = k\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = k\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = k\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = k + ik \quad (124)$$

mit:

$$k = 2\pi\sqrt{\frac{uf}{\varrho}} \quad (125)$$

Führen wir den Wert von  $w$  in (123) ein, so wird:

$$j_x = \Im(k + ik) \frac{e^{kx} \cdot e^{ikx} + e^{-kx} \cdot e^{-ikx}}{e^{k\delta} \cdot e^{ik\delta} - e^{-k\delta} \cdot e^{-ik\delta}}$$

oder nach Auflösung der Exponentialformen:

$$j_x = \Im(k + ik) \frac{\cos kx \mathfrak{Cof} kx + i \sin kx \mathfrak{Sin} kx}{\cos k\delta \mathfrak{Sin} k\delta + i \sin k\delta \mathfrak{Cof} k\delta} \quad (126)$$

Setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} \cos kx \mathfrak{Cof} kx &= u; & \sin kx \mathfrak{Sin} kx &= v \\ \cos k\delta \mathfrak{Sin} k\delta &= c; & \sin k\delta \mathfrak{Cof} k\delta &= d \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

so wird:

$$j_x = \Im(k + ik) \frac{u + iv}{c + id} = \Im k\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{c^2 + d^2}} e^{i\left(\arctg\frac{v}{u} - \arctg\frac{d}{c}\right)}$$

Es ist aber:

$$\left. \begin{aligned} u^2 + v^2 &= \cos^2 kx \mathfrak{Cof}^2 kx + \sin^2 kx \mathfrak{Sin}^2 kx = \frac{1}{2} (\mathfrak{Cof} 2kx + \cos 2kx) \\ c^2 + d^2 &= \cos^2 k\delta \mathfrak{Sin}^2 k\delta + \sin^2 k\delta \mathfrak{Cof}^2 k\delta = \frac{1}{2} (\mathfrak{Cof} 2k\delta - \cos 2k\delta) \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

und daher:

$$j_x = \Im k\sqrt{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} 2kx + \cos 2kx}{\mathfrak{Cof} 2k\delta - \cos 2k\delta}} e^{i\left(\arctg\frac{v}{u} - \arctg\frac{d}{c} + \frac{\pi}{4}\right)} \quad (129)$$

Es wird also die „wahre“ Amplitude — der Maximalwert — der Stromdichte an der Stelle  $x$

$$j_{x_m} = \Im k\sqrt{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} 2kx + \cos 2kx}{\mathfrak{Cof} 2k\delta - \cos 2k\delta}} \quad (130)$$

Um zu der gesuchten Größe des Wechselstromwiderstandes zu kommen, berechnen wir wieder den Stromwärmeverlust  $P_k$  in einem Volumenteil der Schiene von der Größe: ( $\delta \cdot 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}$ )  $\text{cm}^3$ .

Die Amplitude der Strommenge, die ein Element dieses Volumens von der Breite  $dx$  durchsetzt, ist:  $j_{x_m} \cdot dx \cdot 1 \cdot 1$ ; somit das Quadrat ihres

Effektivwertes:  $\frac{(j_{x_m} \cdot dx)^2}{2}$ . Der Widerstand dieses Elementes ist  $\frac{\varrho}{dx \cdot 1}$ .

Daher ist der Stromwärmeverlust  $P_k$  gegeben durch:

$$P_k = \int_0^{\delta} \frac{(j_{x_m} \cdot dx)^2}{2} \frac{\varrho}{dx} = \frac{\varrho}{2} \int_0^{\delta} j_{x_m}^2 dx;$$

oder nach (130)

$$P_k = \Im^2 k^2 \varrho \frac{1}{\mathfrak{Cof} 2k\delta - \cos 2k\delta} \int_0^{\delta} (\mathfrak{Cof} 2kx + \cos 2kx) dx;$$

somit nach ausgeführter Integration:

$$P_k = \Im^2 k^2 \varrho \frac{1}{2k} \frac{\mathfrak{Sin} 2k\delta + \sin 2k\delta}{\mathfrak{Cof} 2k\delta - \cos 2k\delta};$$

oder wenn wir die Amplitude  $\Im$  durch den Effektivwert ersetzen:

$$P_k = I^2 \left[ k \varrho \frac{\mathfrak{Sin} 2k\delta + \sin 2k\delta}{\mathfrak{Cof} 2k\delta - \cos 2k\delta} \right] = I^2 R_w;$$

denn der Klammerausdruck [ ] kann ja nichts anderes als der Wechselstromwiderstand  $R_w$  sein.

$$R_w = k \varrho \frac{\mathfrak{Sin} 2k\delta + \sin 2k\delta}{\mathfrak{Cof} 2k\delta - \cos 2k\delta} \quad (131)$$

Der Gleichstromwiderstand  $R_g$  des Volumenteiles ( $\delta \cdot 1 \cdot 1$ ) ist aber:

$$R_g = \frac{\varrho}{\delta \cdot 1}$$

Es ist somit  $\xi$  der Koeffizient der Widerstandserhöhung:

$$\xi = \frac{R_w}{R_g} = \delta k \frac{\mathfrak{Sin} 2k\delta + \sin 2k\delta}{\mathfrak{Cof} 2k\delta - \cos 2k\delta} \quad (132)$$

Dieser Ausdruck übergeht für sehr hohe Werte des Argumentes  $2k\delta$  in

$$\xi = \delta k = \delta 2\pi \sqrt{\frac{\mu f}{\varrho}} \quad (132a)$$

da ja dann die goniometrischen Funktionen gegenüber den Hyperbelfunktionen bedeutungslos und diese letzteren einander gleich werden.

Berücksichtigt man — in ähnlicher Weise wie es für den runden Leiter geschehen ist — den Verschiebungsstrom im Leiter, so ergibt die einfache Rechnung, die ich hier nicht wiedergebe, für höchste Frequenzen:

$$R_w = \sqrt{2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Also auch hier strebt der Widerstand einem Grenzwerte zu.

Der Verlauf der Stromdichte, in Funktion von  $x$ , ist nach Gl. (130) in Abb. 78 dargestellt. Das Feld verläuft nach Abb. 79.

In ähnlicher Weise hat W. O. Schumann (E. u. M. 1913, Heft 30 und 31) das Problem für andere Schienenanordnungen verfolgt. So ergibt

Abb. 78.

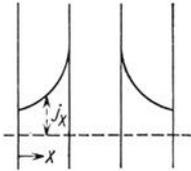


Abb. 79.

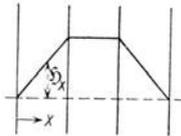
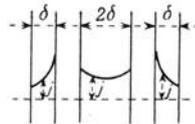


Abb. 80.



sich für die Dreischienenanordnung, mit Stromrückleitung in der Mittelschiene und doppelter Dicke der Mittelschiene, der Verlauf der Stromdichte nach Abb. 80.

Der Wert von  $\xi$  ergibt sich für die beiden Außenschienen nach (132). Für die Mittelschiene wird:

$$\xi = \frac{\delta k \cdot \sin k\delta + \sin k\delta}{2 \cos k\delta - \cos k\delta}$$

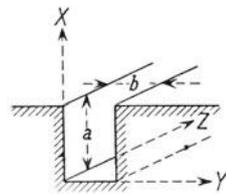
### 3. Der Leiter in der Nut.

Auf ganz ähnliche Art können wir die Stromverdrängung im Leiter in der Nut verfolgen. Wir wählen ein Koordinatensystem so, daß die  $XY$ -Ebene den Ankerblechen parallel ist und die  $Z$ -Achse in die Richtung des Leiters, oder der Ankerachse, fällt. Die Nutentiefe sei  $a$ , die Breite  $b$ . Die Komponenten der Stromdichte seien wieder  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$ ; die der Feldstärke:  $\mathfrak{H}_x$ ,  $\mathfrak{H}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$ .

Nehmen wir den Anker als sehr lang (ideell unendlich lang) an, dann sind die Werte von  $j$  und  $\mathfrak{H}$  von  $z$  unabhängig, und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Abb. 81.



Diese Annahme trifft natürlich in Wahrheit nicht zu; das Nutenfeld ist an den Enden ein anderes als in der Mitte. Unsere Rechnung gilt also exakt nur für die Mitte des Leiters.

Ferner nehmen wir an, der Strom fließe überall „nur“ in der  $Z$ -Richtung, also

$$j_x = j_y = 0$$

Damit ist aber auch gesagt, daß das magnetische Feld nur in der  $XY$ -Ebene verläuft, daß also:

$$\mathfrak{H}_z = 0$$

Wegen der hohen Permeabilität des Eisens treten die magnetischen Feldlinien senkrecht auf die Nutenwände aus; wir nehmen ferner an, daß sie geradlinig von einer Nutenwand zur anderen verlaufen. Dies aber heißt, daß auch:

$$\mathfrak{H}_x = 0$$

Das trifft dann zu, wenn die Nut in voller Breite von Leitungskupfer ausgefüllt ist.

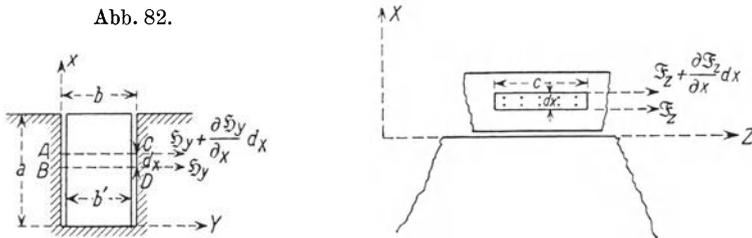
Diese Annahmen bringen es mit sich, daß die Größen  $\mathfrak{H}$  und  $j$  nicht nur von  $z$ , sondern auch von  $y$  unabhängig sind, so daß auch:

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

Die Stromdichte wird also überall durch  $j_z$ , die Feldstärke durch  $\mathfrak{H}_y$  dargestellt, und diese beiden Größen sind nur Funktionen von  $x$  und  $z$ .

Wir betrachten jetzt wieder ein Rechteck von der Höhe  $dx$  in einer  $XY$ -Ebene. Wir wollen annehmen — wie es der Wahrheit entspricht —,

Abb. 83.



daß das Kupfer die Nut nicht in der ganzen Breite  $b$ , sondern nur in einer Breite  $b'$  erfülle. Dann ergibt die Anwendung des Satzes vom Linienintegral auf das Rechteck  $ABCD$ :

$$b \left( \mathfrak{H}_y + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} dx - \mathfrak{H}_y \right) = 4 \pi j_z b' dx$$

oder:

$$b \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} = 4 \pi b' j_z \quad (133)$$

Ferner betrachten wir in einer  $ZX$ -Ebene ein Rechteck, dessen Seiten den Achsen parallel laufen, und die Längen  $c$  und  $dx$  haben. Dann ist die magnetische Durchflutung dieses Rechtecks gegeben durch:

$$\mu \mathfrak{H}_y c \cdot dx$$

Die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  hat — so wie die Strömung — „nur“ die  $Z$ -Richtung, ist also gegeben durch:  $\mathfrak{E}_z$ . Sie hat an der unteren Seite die Stärke  $\mathfrak{E}_z$ , an der oberen die Stärke  $\mathfrak{E}_z + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} dx$ . Wenden wir auf unser Rechteck den zweiten Maxwellschen Satz an, so ergibt sich:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathfrak{H}_y c \cdot dx) = \mathfrak{E}_z \cdot c - \left( \mathfrak{E}_z + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} dx \right) c$$

oder:

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}$$

Wegen:

$$\mathfrak{E}_z = \varrho j_z; \quad \text{mit } \varrho = \text{spezifischem Widerstand};$$

folgt:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial j_z}{\partial x} \quad (134)$$

Da wir wissen, daß  $\mathfrak{H}$  nur in der  $Y$ -Richtung,  $j$  nur in der  $Z$ -Richtung wirkt, können wir die Indizes ersparen und schreiben:

$$b \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} = 4 \pi b' j \quad (133 a)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial j}{\partial x} \quad (134 a)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch nochmalige Differentiation nach  $t$  und  $x$ :

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \frac{b'}{b} \cdot 4 \pi \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial j}{\partial t} \quad (135)$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} = \frac{b'}{b} \cdot 4 \pi \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad (136)$$

Diese zwei Gleichungen sind, bis auf den Faktor  $\frac{b'}{b}$ , identisch mit (115) und (116). Setzen wir:

$$\frac{b'}{b} = p \quad (137)$$

und führen für  $j$  und  $\mathfrak{H}$  die Symbole ein:

$$j = j_x e^{i\omega t}; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_x e^{i\omega t};$$

wobei auch wieder der Index  $x$  die Stromdichte und Feldstärke im Abstände  $x$  vom Nutzenboden bezeichnen soll, so überführen wir die partiellen Differentialgleichungen (135) und (136) in die Formen:

$$\frac{d^2 j_x}{dx^2} = i p 4 \pi \frac{\mu \omega}{\rho} j_x \quad (138)$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}_x}{dx^2} = i p 4 \pi \frac{\mu \omega}{\rho} \mathfrak{H}_x \quad (139)$$

Mit:

$$4 \pi \frac{\mu \omega}{\rho} p = v \quad (140)$$

folgt somit:

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}_x}{dx^2} = i v \mathfrak{H}_x; \quad \text{und mit: } i v = w^2 \quad (141)$$

$$\mathfrak{H}_x = c_1 e^{w x} + c_2 e^{-w x} \quad (142)$$

Zur Bestimmung der Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  fragen wir nach dem Werte von  $\mathfrak{H}_x$  für  $x = 0$ . Diesen Wert aber können wir mit berechtigter Annäherung Null setzen, da die magnetische Feldstärke im Eisen, gegenüber jener, die nicht im Eisen verläuft, zu vernachlässigen ist. Es folgt aus (142)

$$\text{Für } x = 0; \quad 0 = c_1 + c_2; \quad c_2 = -c_1$$

und daher:

$$\mathfrak{H}_x = c_1 (e^{w x} - e^{-w x})$$

Nennen wir wieder  $\mathfrak{I}$  die Amplitude des Gesamtstromes, den der Leiter führt, und wenden wir den Satz vom Linienintegral auf den Nutzenquerschnitt an (s. Abb. 82), so folgt:

$$4 \pi \mathfrak{I} = b \mathfrak{H}_a - b \cdot 0 = b \cdot c_1 (e^{w a} - e^{-w a})$$

oder:

$$c_1 = \frac{4 \pi \mathfrak{I}}{e^{w a} - e^{-w a}} \cdot \frac{1}{b}$$

und daher:

$$\mathfrak{H}_x = 4 \pi \mathfrak{I} \frac{e^{w x} - e^{-w x}}{e^{w a} - e^{-w a}} \cdot \frac{1}{b} \quad (143)$$

nach (133) ist aber:

$$j_x = \frac{1}{4 \pi p} \frac{d \mathfrak{H}_x}{dx} = \frac{1}{4 \pi p} \frac{4 \pi \mathfrak{I}}{b} w \frac{e^{w x} + e^{-w x}}{e^{w a} - e^{-w a}}$$

oder:

$$j_x = \frac{\mathfrak{I}}{b \cdot p} w \frac{e^{w x} + e^{-w x}}{e^{w a} - e^{-w a}} \quad (144)$$

Nach (140) und (119) ist

$v = p \cdot 2 k^2 = p m^2$ ; und daher nach (141):  $w^2 = \iota p m^2 = p m^2 e^{\iota \frac{\pi}{2}}$   
und:

$$w = \sqrt{p} \cdot m e^{\iota \frac{\pi}{4}} = \sqrt{p} \sqrt{2} k e^{\iota \frac{\pi}{4}}$$

Da:

$$e^{\iota \frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + \iota \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \iota)$$

folgt:

$$w = \sqrt{p} (k + \iota k) \tag{145}$$

mit — wie früher —:

$$k = 2 \pi \sqrt{\frac{\mu f}{\varrho}} \tag{146}$$

Führen wir den Wert von  $w$  in (144) ein, so ist:

$$j_x = \frac{\Im}{b \sqrt{p}} (k + \iota k) \frac{e^{\sqrt{p}(k + \iota k)x} + e^{-\sqrt{p}(k + \iota k)x}}{e^{\sqrt{p}(k + \iota k)a} - e^{-\sqrt{p}(k + \iota k)a}}$$

oder:

$$j_x = \frac{\Im}{b \sqrt{p}} (k + \iota k) \cdot \frac{(e^{\sqrt{p}kx} + e^{-\sqrt{p}kx}) \cos(\sqrt{p}kx) + \iota (e^{\sqrt{p}kx} - e^{-\sqrt{p}kx}) \sin(\sqrt{p}kx)}{(e^{\sqrt{p}ka} - e^{-\sqrt{p}ka}) \cos(\sqrt{p}ka) + \iota (e^{\sqrt{p}ka} + e^{-\sqrt{p}ka}) \sin(\sqrt{p}ka)}$$

oder mit:

$$k \sqrt{p} = n \tag{147}$$

wird:

$$j_x = \frac{\Im}{b \sqrt{p}} (k + \iota k) \frac{\cos nx \mathfrak{C}o\mathfrak{f} nx + \iota \sin nx \mathfrak{S}in nx}{\cos na \mathfrak{S}in na + \iota \sin na \mathfrak{C}o\mathfrak{f} na}$$

Das ergibt in Analogie mit (126):

$$j_x = \frac{\Im}{b \sqrt{p}} k \sqrt{2} e^{\iota \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} 2nx + \cos 2nx}{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} 2na - \cos 2na}} \cdot e^{\iota \varphi} \tag{148}$$

wobei:

$$\varphi = \arctg \frac{\sin nx \mathfrak{S}in nx}{\cos nx \mathfrak{C}o\mathfrak{f} nx} - \arctg \frac{\sin na \mathfrak{C}o\mathfrak{f} na}{\cos na \mathfrak{S}in na}$$

Somit die wahre Amplitude der Stromdichte — ihr Maximalwert — an der Stelle  $x$ :

$$j_{x_m} = \frac{\Im}{b \sqrt{p}} k \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} 2nx + \cos 2nx}{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} 2na - \cos 2na}} \tag{149}$$

Berechnen wir nun wieder den Stromwärmeverlust in einem 1 cm langen Leiterstück, also im Volumen ( $a \cdot b' \cdot 1$  cm)  $\text{cm}^3$ , so ist er gegeben durch:

$$P_k = \int_0^a \frac{1}{2} (j_{x_m} \cdot b' \cdot dx)^2 \frac{\rho}{b' dx} = \frac{1}{2} b' \rho \int_0^a j_{x_m}^2 dx$$

oder mit Rücksicht auf (149)

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{1}{2} b' \rho \frac{2 \Im^2 k^2}{b^2 p (\cos 2na - \cos 2na)} \int_0^a (\cos 2nx + \cos 2nx) dx = \\ &= \frac{b' \rho}{b^2 p} \frac{k^2}{n} \frac{\Im^2}{2} \frac{\sin 2na + \sin 2na}{\cos 2na - \cos 2na} \end{aligned}$$

oder da das Quadrat der effektiven Stromstärke

$$I^2 = \frac{\Im^2}{2};$$

folgt:

$$P_k = I^2 \left[ \frac{b' \rho}{b^2 p} \frac{k^2}{n} \frac{\sin 2na + \sin 2na}{\cos 2na - \cos 2na} \right] = I^2 R_w;$$

da der Klammerausdruck [ ] nur der Wechselstromwiderstand sein kann.

Der Gleichstromwiderstand unseres Leiterstückes ist aber:

$$R_g = \frac{\rho}{ab'};$$

also  $\xi$ , der Koeffizient der Widerstandserhöhung, wenn wir für  $p$  aus (137) den Wert setzen:

$$\xi = \frac{R_w}{R_g} = \frac{\frac{\rho}{b} \cdot \frac{k^2}{n} \frac{\sin 2na + \sin 2na}{\cos 2na - \cos 2na}}{\frac{\rho}{ab'}} = a \frac{b'}{b} \frac{k^2}{n} \frac{\sin 2na + \sin 2na}{\cos 2na - \cos 2na}$$

oder wegen (147)

$$\xi = a \sqrt{\frac{b'}{b}} k \frac{\sin 2na + \sin 2na}{\cos 2na - \cos 2na} \quad (150)$$

Für:  $b' = b$ ; wird:  $p = 1$ ; und daher nach (147):  $n = k$ .

Dann wird:

$$\xi = ak \frac{\sin 2ka + \sin 2ka}{\cos 2ka - \cos 2ka};$$

das ist aber derselbe Ausdruck, den wir in (132) gefunden haben.

Gl. (149) zeigt uns, daß der Strom in der Nut nach außen gedrängt wird, denn die Stromdichte nimmt nach (149) mit wachsendem  $x$  zu.

Außerhalb der Nut ist der Strom viel gleichmäßiger über den Leiterquerschnitt verteilt, da dort der „allseitige“ Hauteffekt auftritt, und nicht ein „einseitiger“ wie in der Nut. Man kann daher genähert außerhalb der Nut, d. h. für die Stirnverbindungen,  $\xi = 1$  setzen. Ist  $l$  die Leiterlänge in der Nut,  $l'$  die Länge außerhalb der Nut, so kann man nach Emde (E. u. M. 1908) mit einem Koeffizienten  $\xi'$  der Widerstandserhöhung rechnen, der gegeben ist durch:

$$\xi' = \frac{l\xi + l'}{l + l'} \tag{151}$$

## XI. Flußverdrängung und Wirbelstromverlust.

### a) Flußverdrängung.

Bei der Magnetisierung des Eisens mit Wechselstrom werden im Eisen bekanntlich Wirbelströme induziert, die im Verein mit dem Wechsel-  
felde zu ähnlichen Verdrängungserscheinungen des Feldes führen, wie wir sie im vorigen Abschnitt bezüglich des Stromes studiert haben.

Auch hier machen wir die idealisierte Annahme, daß das Eisenblech unendlich lang und unendlich hoch sei. Seine Dicke sei  $\Delta$ . In einem beliebigen Punkte  $O$  der Blechmitte legen wir ein Koordinatensystem so, daß die  $YZ$ -Ebene der Blechebene parallel ist. Nun nehmen wir an, daß die magnetisierende Kraft  $\mathfrak{H}$  „nur“ die Richtung der  $Z$ -Koordinate habe und nehmen ferner an, die Kraft  $\mathfrak{H}$  habe in sämtlichen Punkten einer Ebene, senkrecht zu  $OX$ , gleichzeitig denselben Wert.

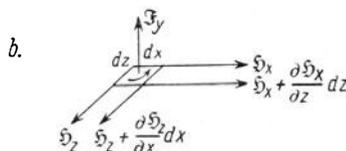
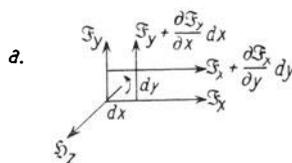
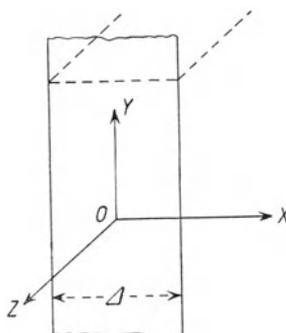
Diese Annahmen finden ihre genäherte Begründung in der Natur der technischen Anordnungen. Sie führen zu den Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_z; \quad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_y = 0; \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} &= 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

und:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z = f(x, t)$$

Abb. 84 a. u. b.



Nennen wir  $\mathfrak{F}$  die elektrische Feldstärke, welche die Wirbelströme erzeugt, so sind ihre Komponenten  $\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z$ . Ist  $\mu$  die Permeabilität des Bleches und  $\varrho$  sein spezifischer Leitungswiderstand, so ist:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathfrak{H}) = \text{rot } \mathfrak{F} \tag{1}$$

und wenn wir den Verschiebungsstrom vernachlässigen:

$$4\pi \frac{\mathfrak{F}}{\varrho} = \text{rot } \mathfrak{H} \tag{2}$$

Nach (1) ist das Linienintegral von  $\mathfrak{F}$ , über den Rand des, von  $\mathfrak{H}_z$  durchsetzten, Rechtecks  $dx dy$  (s. Abb. 84 a)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathfrak{H}_z) dx dy &= \mathfrak{F}_x dx + \left(\mathfrak{F}_y + \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} dx\right) dy - \\ &\quad - \left(\mathfrak{F}_x + \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} dy\right) dx - \mathfrak{F}_y dy \end{aligned}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathfrak{H}_z) &= \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} \\ \text{und ebenso wegen: } \mathfrak{H}_x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathfrak{H}_x) &= \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial y} = 0 \\ \text{und ebenso wegen: } \mathfrak{H}_y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathfrak{H}_y) &= \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Nach (2) und Abb. 84 b ist das Linienintegral von  $\mathfrak{H}$  über den Umfang des von  $\mathfrak{F}_y$  durchsetzten Rechtecks  $dx dz$ :

$$4\pi \frac{\mathfrak{F}_y}{\varrho} dx dz = \left(\mathfrak{H}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} dz\right) dx - \left(\mathfrak{H}_z + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} dx\right) dz - \mathfrak{H}_x dx + \mathfrak{H}_z dz$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi \frac{\mathfrak{F}_y}{\varrho} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \\ \text{und ebenso} \\ 4\pi \frac{\mathfrak{F}_z}{\varrho} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = 0; \text{ also } \mathfrak{F}_z = 0 \\ \text{und wegen } \frac{\partial}{\partial y} &= 0: \\ 4\pi \frac{\mathfrak{F}_x}{\varrho} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = 0; \text{ also } \mathfrak{F}_x = 0 \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Nach diesen drei Gleichungen hat also die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  „nur“ die  $Y$ -Richtung und ist, wegen  $\mathfrak{H}_x = 0$ ; gegeben durch:

$$4\pi \frac{\mathfrak{E}_y}{\rho} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \quad (5)$$

Aus (3) folgt aber wegen  $\mathfrak{E}_x = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathfrak{H}_z) = -\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} \quad (6)$$

Differenzieren wir (5) nach  $x$ , so folgt:

$$\frac{4\pi}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2};$$

oder nach (6)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2} = \frac{4\pi}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathfrak{H}_z) \quad (7)$$

Differenzieren wir (5) nach  $t$  und (6) nach  $x$  und nehmen  $\mu$  als konstant an, so folgt:

$$\frac{4\pi}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x \partial t}; \quad \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2}$$

oder hieraus:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} = 4\pi \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} \quad (8)$$

Da wir wissen, daß das  $\mathfrak{H}$  nur in der  $Z$ -Richtung, das  $\mathfrak{E}$  nur in der  $Y$ -Richtung liegt, wollen wir die Indizes sparen und schreiben, mit Rücksicht auf:

$$\mathfrak{E} = \rho j$$

wo  $j$  die Stromdichte der Wirbelströme ist:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} = 4\pi \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = 4\pi \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial j}{\partial t} \quad (10)$$

Dies sind nun wieder unsere beiden Ausgangsgleichungen, die den Verlauf von  $\mathfrak{H}$  und  $j$  darstellen.

Aus Symmetriegründen können wir annehmen, daß der Verlauf von  $\mathfrak{H}$  und  $j$ , in gleichen Abständen rechts und links von der Mittelebene  $YZ$ , der gleiche ist; daß also:

$$\mathfrak{H}_{+x} = \mathfrak{H}_{-x}; \quad j_{+x} = j_{-x}$$

Deshalb verlegten wir den Mittelpunkt des Koordinatensystems in die Blechmitte.

Die partiellen Differentialgleichungen (9) und (10) überführen wir wieder durch Gebrauch der Symbolik in gewöhnliche. Wir setzen:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_x e^{i\omega t}; \quad j = j_x e^{i\omega t}$$

wobei der Index  $x$  den Abstand von der Mittelebene charakterisiert.

Da wir es nun mit Eisen zu tun haben, wissen wir, daß die Induktion  $\mathfrak{B}$ , infolge der Hysteresis, in der Phase gegenüber  $\mathfrak{H}$  zurückbleibt, und zwar um den Verzögerungswinkel  $\nu$ . Es wird also:

$$\mathfrak{B}_x = \mu \mathfrak{H}_x e^{i(\omega t - \nu)}$$

Dadurch lautet die Gleichung (9):

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} = \frac{4\pi}{\varrho} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathfrak{H}) = \frac{4\pi}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

jetzt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathfrak{H}_x e^{i\omega t} = 4\pi \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{H}_x e^{i(\omega t - \nu)}$$

oder:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial x^2} = i 4\pi \frac{\omega \mu}{\varrho} \mathfrak{H}_x e^{-i\nu} \tag{11}$$

somit nach Entwicklung der  $e$ -Potenz:

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}_x}{dx^2} = \mathfrak{H}_x \left( i 4\pi \frac{\omega \mu}{\varrho} \cos \nu + 4\pi \frac{\omega \mu}{\varrho} \sin \nu \right)$$

oder mit:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi \frac{\omega \mu}{\varrho} \sin \nu &= a; & 4\pi \frac{\omega \mu}{\varrho} \cos \nu &= b \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

und:

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}_x}{dx^2} = w^2 \mathfrak{H}_x$$

daher:

$$\mathfrak{H}_x = c_1 e^{wx} + c_2 e^{-wx} \tag{13}$$

Zur Bestimmung der Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  dient folgende Überlegung. Nennen wir die Amplitude der Feldstärke am Rande des Bleches  $\mathfrak{H}_r$ , so ist sie – aus Symmetriegründen – an beiden Rändern gleich. Es ist also:

$$\mathfrak{H}_r \left( +\frac{d}{2} \right) = \mathfrak{H}_r \left( -\frac{d}{2} \right)$$

Daher:

$$c_1 e^{w \frac{d}{2}} + c_2 e^{-w \frac{d}{2}} = c_1 e^{-w \frac{d}{2}} + c_2 e^{w \frac{d}{2}}$$

Hieraus folgt:

$$c_1 = c_2 = c$$

Somit:

$$\mathfrak{H}_r = c \left( e^{w \frac{d}{2}} + e^{-w \frac{d}{2}} \right);$$

und hieraus

$$c = \frac{\mathfrak{H}_r}{e^{\frac{w \Delta}{2}} + e^{-\frac{w \Delta}{2}}}$$

oder:

$$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_r \frac{e^{wx} + e^{-wx}}{e^{\frac{w \Delta}{2}} + e^{-\frac{w \Delta}{2}}} \quad (14)$$

Nach (12) ist  $w^2$  komplex; es ist also auch  $w$  komplex. Setzen wir

$$w = m + \iota n \quad (15)$$

so folgt:

$$w^2 = a + \iota b = m^2 - n^2 + \iota 2mn$$

also:

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= a \\ 2m \cdot n &= b \end{aligned}$$

woraus:

$$m^2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}; \quad n^2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$$

und aus (12) die Werte für  $a$  und  $b$  gesetzt, ergibt:

$$m^2 = 2\pi \frac{\mu \omega}{\varrho} (1 + \sin \nu); \quad n^2 = 2\pi \frac{\mu \omega}{\varrho} (1 - \sin \nu)$$

Mit Rücksicht auf:  $\omega = 2\pi f$ ; wird

$$2\pi \frac{\mu \omega}{\varrho} = 4\pi^2 \frac{\mu f}{\varrho} = k^2$$

wo  $k$  — unserer früher gewählten Bezeichnung entsprechend —:

$$k = 2\pi \sqrt{\frac{\mu f}{\varrho}} \quad (16)$$

und daher:

$$\left. \begin{aligned} m^2 &= k^2 (1 + \sin \nu) \\ n^2 &= k^2 (1 - \sin \nu) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Nach (14) ist also:

$$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_r \frac{e^{mx} \cdot e^{\iota nx} + e^{-mx} \cdot e^{-\iota nx}}{e^{\frac{m \Delta}{2}} \cdot e^{\frac{\iota n \Delta}{2}} + e^{-\frac{m \Delta}{2}} \cdot e^{-\frac{\iota n \Delta}{2}}} \quad (14a)$$

Formen wir um, so wird:

$$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_r \frac{\cos nx \operatorname{Coj} mx + \iota \sin nx \operatorname{Sin} mx}{\cos n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj} m \frac{\Delta}{2} + \iota \sin n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Sin} m \frac{\Delta}{2}} \quad (18)$$

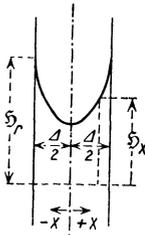
oder mit Beachtung von (128) Abschnitt X:

$$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_r \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} 2mx + \cos 2nx}{\mathfrak{Cof} m\Delta + \cos n\Delta}} e^{\left( \operatorname{arctg} \frac{\sin nx \mathfrak{S}in mx}{\cos nx \mathfrak{Cof} mx} - \operatorname{arctg} \frac{\sin n\frac{\Delta}{2} \mathfrak{S}in m\frac{\Delta}{2}}{\cos n\frac{\Delta}{2} \mathfrak{Cof} m\frac{\Delta}{2}} \right)} \quad (19)$$

also die wahre Amplitude — der Maximalwert — von  $\mathfrak{H}_x$  ist gegeben durch:

$$\mathfrak{H}_{x_m} = \mathfrak{H}_r \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} 2mx + \cos 2nx}{\mathfrak{Cof} m\Delta + \cos n\Delta}} \quad (20)$$

Abb. 85.



Das ergibt den Verlauf von  $\mathfrak{H}_x$  nach Abb. 85. Nennen wir  $\mathfrak{H}_a$  die mittlere, durchschnittliche Feldstärke in der ganzen Blechdicke  $\Delta$ , so ist:

$$\mathfrak{H}_a = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \mathfrak{H}_x dx$$

Setzen wir für  $\mathfrak{H}_x$  den Wert aus (18) ein, so wird:

$$\mathfrak{H}_a = \frac{1}{\Delta} \frac{\mathfrak{H}_r}{\cos n\frac{\Delta}{2} \mathfrak{Cof} m\frac{\Delta}{2} + \iota \sin n\frac{\Delta}{2} \mathfrak{S}in m\frac{\Delta}{2}} \left\{ \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \cos nx \mathfrak{Cof} mx dx + \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \sin nx \mathfrak{S}in mx dx \right\} \quad (21)$$

Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \cos nx \mathfrak{Cof} mx dx = \frac{1}{m^2 + n^2} \left| (n \sin nx \mathfrak{Cof} mx + m \cos nx \mathfrak{S}in mx) \right|_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}}$$

oder bei Einführung der Grenzen:

$$\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \cos nx \mathfrak{Cof} mx dx = \frac{2}{m^2 + n^2} \left( m \cos n\frac{\Delta}{2} \mathfrak{S}in m\frac{\Delta}{2} + n \sin n\frac{\Delta}{2} \mathfrak{Cof} m\frac{\Delta}{2} \right) = \Delta$$

und ebenso:

$$\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \sin nx \operatorname{Ein} mx \, dx = \frac{2}{m^2 + n^2} \left( m \sin n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj} m \frac{\Delta}{2} - n \cos n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein} m \frac{\Delta}{2} \right) = B$$

Die Summe der beiden Integrale in (21) ergibt also eine komplexe Größe von der Form:

$$A + \iota B = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{\iota \operatorname{arctg} \frac{B}{A}}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} \sqrt{A^2 + B^2} &= \frac{2}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\cos^2 n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein}^2 m \frac{\Delta}{2} + \sin^2 n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj}^2 m \frac{\Delta}{2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{Coj} m \Delta - \cos n \Delta)} \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{arctg} \frac{B}{A} = \operatorname{arctg} \frac{m \sin n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj} m \frac{\Delta}{2} - n \cos n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein} m \frac{\Delta}{2}}{m \cos n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein} m \frac{\Delta}{2} + n \sin n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj} m \frac{\Delta}{2}}$$

Weiter ist der Nenner von (21) gegeben durch:

$$\begin{aligned} &\cos n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj} m \frac{\Delta}{2} + \iota \sin n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein} m \frac{\Delta}{2} = \\ &= \sqrt{\cos^2 n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj}^2 m \frac{\Delta}{2} + \sin^2 n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein}^2 m \frac{\Delta}{2}} \cdot e^{\iota \operatorname{arctg} \frac{\sin n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein} m \frac{\Delta}{2}}{\cos n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj} m \frac{\Delta}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{Coj} m \Delta + \cos n \Delta)} e^{\iota \operatorname{arctg} \frac{\sin n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein} m \frac{\Delta}{2}}{\cos n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj} m \frac{\Delta}{2}}} \end{aligned}$$

und daher:

$$\mathfrak{H}_d = \frac{2}{\Delta} \frac{\mathfrak{H}_r}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\frac{\operatorname{Coj} m \Delta - \cos n \Delta}{\operatorname{Coj} m \Delta + \cos n \Delta}} e^{\iota \delta} \quad (22)$$

wobei:

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{m \sin n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj} m \frac{\Delta}{2} - n \cos n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein} m \frac{\Delta}{2}}{m \cos n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein} m \frac{\Delta}{2} + n \sin n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj} m \frac{\Delta}{2}} - \operatorname{arctg} \frac{\sin n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Ein} m \frac{\Delta}{2}}{\cos n \frac{\Delta}{2} \operatorname{Coj} m \frac{\Delta}{2}}$$

oder:

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{m \sin n \Delta - n \operatorname{Ein} m \Delta}{n \sin n \Delta + m \operatorname{Ein} m \Delta} \quad (23)$$

Es ist also der Maximalwert der mittleren Feldstärke:

$$\mathfrak{H}_{d_m} = \frac{2}{\Delta} \frac{\mathfrak{H}_r}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} m \Delta - \cos n \Delta}{\mathfrak{Cof} m \Delta + \cos n \Delta}} \quad (24)$$

und  $\delta$  ist die Phasendifferenz zwischen dieser mittleren Feldstärke und der Feldstärke am Rande.

Jedenfalls zeigt uns Abb. 85, daß der Fluß nach den Rändern gedrängt wird. Diese Tatsache der Flußverdrängung und damit der ungleichen Verteilung der Feldstärke über die Blechbreite läßt nun — bei ferromagnetischem Blechmaterial — unsere Annahme, der Konstanz des  $\mu$ , als sehr bedenklich erscheinen. Diese Annahme für Eisen ist in der Tat die Schwäche dieser Theorie. Das unvermeidliche Eisen bleibt eben ein Hindernis für die exakte Behandlung so mancher Probleme.

Für nicht ferromagnetisches Material wird  $\mu = 1$  und  $\nu = 0$ ; nach (17) wird dann:

$$m = n = k$$

und die Ausdrücke (18) bis (24) verändern sich dementsprechend in:

$$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_r \frac{\cos kx \mathfrak{Cof} kx + \iota \sin kx \mathfrak{Sin} kx}{\cos k \frac{\Delta}{2} \mathfrak{Cof} k \frac{\Delta}{2} + \iota \sin k \frac{\Delta}{2} \mathfrak{Sin} k \frac{\Delta}{2}} \quad (18a)$$

$$\mathfrak{H}_{x_m} = \mathfrak{H}_r \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} 2 kx + \cos 2 kx}{\mathfrak{Cof} k \Delta + \cos k \Delta}} \quad (20a)$$

$$\mathfrak{H}_{d_m} = \sqrt{2} \frac{\mathfrak{H}_r}{\Delta k} \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} k \Delta - \cos k \Delta}{\mathfrak{Cof} k \Delta + \cos k \Delta}} \quad (24a)$$

$$\delta = \arctg \frac{\sin k \Delta - \mathfrak{Sin} k \Delta}{\sin k \Delta + \mathfrak{Sin} k \Delta} \quad (23a)$$

### b) Der Wirbelstromverlust.

Aus Gleichung (5) folgt wegen:  $\mathfrak{F}_y = \mathfrak{F} = \rho j$ ; und:  $\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}$ :

$$4 \pi j_x = - \frac{d \mathfrak{H}_x}{dx}$$

wobei der Index  $x$  die Entfernung von der Blechmitte bedeutet. Also nach (14)

$$4 \pi j_x = - \mathfrak{H}_r w \frac{e^{wx} - e^{-wx}}{e^{\frac{w}{2}} + e^{-\frac{w}{2}}}$$

oder mit Rücksicht auf (15)

$$j_x = -\mathfrak{H}_r \left( \frac{m + \iota n}{4\pi} \right) \frac{e^{mx} \cdot e^{\iota nx} - e^{-mx} \cdot e^{-\iota nx}}{e^{\frac{m\Delta}{2}} \cdot e^{\frac{\iota n\Delta}{2}} + e^{-\frac{m\Delta}{2}} \cdot e^{-\frac{\iota n\Delta}{2}}} =$$

$$= -\mathfrak{H}_r \left( \frac{m + \iota n}{4\pi} \right) \frac{\cos nx \mathfrak{S}in mx + \iota \sin nx \mathfrak{C}of mx}{\cos n \frac{\Delta}{2} \mathfrak{C}of m \frac{\Delta}{2} + \iota \sin n \frac{\Delta}{2} \mathfrak{S}in m \frac{\Delta}{2}}$$

und wegen (128) Abschnitt X

$$= -\mathfrak{H}_r \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{4\pi} e^{\iota \arctg \frac{n}{m} x} \frac{\sqrt{\mathfrak{C}of 2mx - \cos 2nx} \cdot e^{\iota \arctg \frac{\sin nx \cdot \mathfrak{C}of mx}{\cos nx \cdot \mathfrak{S}in mx}}}{\sqrt{\mathfrak{C}of m\Delta + \cos n\Delta} \cdot e^{\iota \arctg \frac{\sin n \frac{\Delta}{2} \mathfrak{S}in m \frac{\Delta}{2}}{\cos n \frac{\Delta}{2} \mathfrak{C}of m \frac{\Delta}{2}}}}$$

Es ist somit die wahre Amplitude, der Maximalwert, der Wirbelstromdichte an der Stelle  $x$  gegeben durch:

$$j_{x_m} = \frac{\mathfrak{H}_r}{4\pi} \sqrt{m^2 + n^2} \frac{\sqrt{\mathfrak{C}of 2mx - \cos 2nx}}{\sqrt{\mathfrak{C}of m\Delta + \cos n\Delta}} \quad (25)$$

Berechnen wir den Stromwärmeverlust  $P$  im Blechvolumen ( $\Delta$  . 1 cm . 1 cm) cm<sup>3</sup>, so ist er gegeben durch:

$$P = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{2} (j_{x_m} \cdot 1 \cdot dx)^2 \frac{\rho}{1 \cdot dx} = \frac{1}{2} \rho \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} j_{x_m}^2 dx$$

oder mit (25)

$$P = \frac{1}{2} \rho \frac{\mathfrak{H}_r^2}{16\pi^2} \frac{m^2 + n^2}{\mathfrak{C}of m\Delta + \cos n\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} (\mathfrak{C}of 2mx - \cos 2nx) dx$$

somit nach ausgeführter Integration:

$$P = \frac{\rho}{32\pi^2} \mathfrak{H}_r^2 (m^2 + n^2) \frac{\frac{1}{m} \mathfrak{S}in m\Delta - \frac{1}{n} \sin n\Delta}{\mathfrak{C}of m\Delta + \cos n\Delta} \quad (26)$$

Drücken wir nach (24)  $\mathfrak{H}_r$  durch  $\mathfrak{H}_{d_m}$  aus, so folgt:

$$\mathfrak{H}_r^2 = \mathfrak{H}_{d_m}^2 \frac{\Delta^2}{4} (m^2 + n^2) \frac{\mathfrak{C}of m\Delta + \cos n\Delta}{\mathfrak{C}of m\Delta - \cos n\Delta}$$

und dies in (26) eingesetzt, ergibt:

$$P = \frac{\mathcal{A}^2 \varrho}{4 \cdot 32 \cdot \pi^2} \cdot \mathfrak{H}_{d_m}^3 (m^2 + n^2)^2 \frac{\frac{1}{m} \mathfrak{S}in m \mathcal{A} - \frac{1}{n} \sin n \mathcal{A}}{\mathfrak{C}os m \mathcal{A} - \cos n \mathcal{A}} \quad (27)$$

Nun ist nach (17) und (16)

$$m^2 + n^2 = 2k^2 = 2 \cdot 4 \pi^2 \frac{\mu f}{\varrho}$$

also:

$$(m^2 + n^2)^2 = 4 \cdot 16 \pi^4 \frac{\mu^2 f^2}{\varrho^2}$$

Daher:

$$P = \frac{\mathcal{A}^2}{\varrho} \frac{1}{2} \pi^2 f^2 \mu^2 \mathfrak{H}_{d_m}^3 \frac{\frac{1}{m} \mathfrak{S}in m \mathcal{A} - \frac{1}{n} \sin n \mathcal{A}}{\mathfrak{C}os m \mathcal{A} - \cos n \mathcal{A}}$$

oder da:

$$\mu \mathfrak{H}_{d_m} = \mathfrak{B}_{d_m},$$

gleich der Amplitude der mittleren Induktion, so folgt:

$$P = \mathfrak{B}_{d_m}^3 \mathcal{A}^2 \cdot f^2 \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\pi^2}{2} \frac{\frac{1}{m} \mathfrak{S}in m \mathcal{A} - \frac{1}{n} \sin n \mathcal{A}}{\mathfrak{C}os m \mathcal{A} - \cos n \mathcal{A}} \quad (28)$$

Nun führen wir eine Größe ein, die wir den Wirbelstromkoeffizienten nennen, und mit  $\xi$  bezeichnen wollen:

$$\xi = \frac{\pi^2}{2} \frac{\frac{1}{m} \mathfrak{S}in m \mathcal{A} - \frac{1}{n} \sin n \mathcal{A}}{\mathfrak{C}os m \mathcal{A} - \cos n \mathcal{A}} \cdot \frac{1}{\mathcal{A}} \quad (29)$$

Es ist leicht einzusehen, daß dieses  $\xi$  ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist, da  $\frac{1}{m}$  und  $\frac{1}{n}$  die Dimension der Länge, so wie  $\mathcal{A}$ , haben. Mit (29) folgt daher:

$$P = \mathfrak{B}_{d_m}^3 \mathcal{A}^2 f^2 \frac{1}{\varrho} \xi \cdot \mathcal{A}$$

als Wirbelstromverlust in  $\mathcal{A} \text{ cm}^3$ ; somit der Wirbelstromverlust in  $1 \text{ cm}^3$

$$P_1 = \mathfrak{B}_{d_m}^3 \mathcal{A}^2 f^2 \frac{1}{\varrho} \xi$$

und daher im ganzen Volumen  $V$ .

$$P_w = \mathfrak{B}_{d_m}^3 \cdot \mathcal{A}^2 \cdot f^2 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \xi \cdot V \cdot 10^{-7} \text{ Watt} \quad (30)$$

Hierin sind natürlich alle Größen in absolutem Maße einzusetzen, also  $\mathcal{A}$  in cm,  $V$  in  $\text{cm}^3$ .  $\rho$  ist für gewöhnliches Dynamoblech in absolutem Maße etwa 11000 bis 12000; für, mit Silicium, legiertes Blech 40000 bis 50000.

Gl. (30) zeigt das bekannte Gesetz für den Wirbelstromverlust. Er ist proportional dem Quadrate der Blechstärke und dem Quadrat der Frequenz; umgekehrt proportional dem Leitungswiderstande des Bleches und endlich abhängig von einem Faktor  $\xi$ , der abermals (wegen  $m$  und  $n$ ) die vorgenannten Größen enthält.

Für Eisen gilt die gleiche Überlegung, die wir am Ende der Betrachtung der Feldverdrängung gemacht haben. Die Annahme eines — über dem Querschnitt — konstanten  $\mu$  ist inkorrekt und führt demgemäß zu Unstimmigkeiten zwischen Rechnung und Messung.

Wir wollen noch die Gl. (30) für hohe Werte des Argumentes  $m\mathcal{A}$  diskutieren.

Da der Winkel  $\nu$  der Verzögerung ein kleiner Winkel ist, so sind  $m$  und  $n$ , nach (17), von gleicher Größenordnung. Für hohe Argumente der Hyperbelfunktionen sind dann die Glieder mit den Kreisfunktionen, in Zähler und Nenner von (29) zu vernachlässigen und wegen:

$$\text{Sin } m\mathcal{A} \approx \text{Cof } m\mathcal{A}, \text{ wird nach (29) und (17)}$$

$$\xi \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{m\mathcal{A}} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{k\mathcal{A}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \nu}}$$

und da nach (16)

$$k = 2\pi \sqrt{\frac{\mu f}{\rho}}$$

wird:

$$\xi \approx \frac{\pi}{4} \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu f}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \nu}}$$

Dies in (30) gesetzt, ergibt:

$$P_w = \mathfrak{B}_{d_m}^2 \cdot \mathcal{A} \cdot f^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{\mu(1 + \sin \nu)}} \cdot V \cdot 10^{-7}$$

Jetzt können wir einen neuen Wirbelstromkoeffizienten einführen, von der Form:

$$\xi' = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{\mu(1 + \sin \nu)}}$$

der, durch  $\mu$  und  $\nu$ , nur von der Induktion abhängt und für nichtferromagnetisches Material, also  $\mu = 1$ ;  $\nu = 0$  übergeht in:

$$\xi' = \frac{\pi}{4}$$

In diesem letzteren Falle wird:

$$P_w = \frac{\pi}{4} \mathfrak{B}_{d_m}^2 \cdot \mathcal{A} \cdot f^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot V \cdot 10^{-7}$$

D. h. für hohe Argumente  $m\mathcal{A}$  ist der Wirbelstromverlust nur noch der ersten Potenz der Blechstärke und der Potenz  $3/2$  der Frequenz gerade, und der Wurzel aus dem Widerstande verkehrt proportional.

## XII. Das Kreisdiagramm des Induktionsmotors.

Es ist ein tief empfundener, und gewiß gerechtfertigter Wunsch der allgemeinen technischen Praxis, bei einer beliebigen technischen Anordnung — sie sei maschineller, oder anderer Natur — die sämtlichen, interessierenden Betriebsgrößen, für alle denkbaren Belastungszustände, aus „einem“ Diagramm zu entnehmen.

Dieser Wunsch würde durch die Anordnung, die wir als „Allgemeinen Transformator“ bezeichnen — auch in dessen Ausführungsform als „Induktionsmotor“ — nahezu exakt erfüllt, wenn die Anordnung kein Eisen enthielte.

Unter dem allgemeinen Transformator verstehen wir zwei elektrische Stromkreise, die einander magnetisch beeinflussen, oder die — wie man zu sagen pflegt — magnetisch gekoppelt sind. Unter diesen Begriff fällt daher auch der Induktionsmotor. Der allgemeine Transformator „ohne Eisen“ ist eine jener elektrotechnischen Anordnungen, die sich mathematisch mit größter Vollkommenheit behandeln lassen, da die Abwesenheit des Eisens die Konstanz der Induktionskoeffizienten, und damit der Streuung gewährleistet. Anders liegen die Verhältnisse im Transformator „mit Eisen“, wo die Veränderlichkeit der Permeabilität mit der Stärke der Magnetisierung eine Veränderlichkeit der Streuung, im möglichen Bereiche der Belastung, bedingt. Hier ist eine exakte, mathematische Fassung nicht möglich, und es kann nur unsere Aufgabe sein, eine möglichst gute Annäherung an die Wahrheit zu finden.

Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst die Eisenmagnetisierung mit Wechselstrom etwas näher betrachten.

### 1. Eisen im Wechselstromkreise.

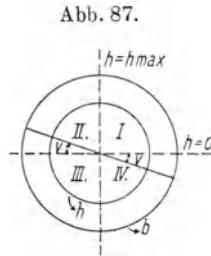
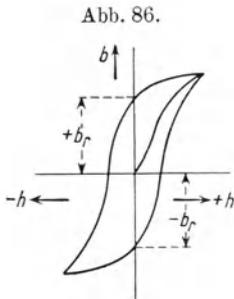
Von der Gleichstrommagnetisierung her ist uns die Beziehung

$$b = \mu \cdot h, \quad (I)$$

die ihren graphischen Ausdruck in der Magnetisierungskurve findet, wohl bekannt.

Der Begriff der Permeabilität  $\mu$  als Funktion von  $h$ , der magnetisierenden Kraft, ist bei der Gleichstrommagnetisierung in „einer“ Richtung, physikalisch leicht verständlich, wenn uns auch die Unmöglichkeit der exakten, mathematischen Formulierung der Funktion nicht befriedigt.

Übergeht man aber zu einem zyklischen Magnetisierungsprozeß, gleichgültig ob mit Gleich- oder Wechselstrom, so wird die frühere Vorstellung von der Permeabilität unhaltbar. Die Werte von  $b$ , der Induktion, durchlaufen dann die bekannte Hysteresisschleife, aus welcher folgt, daß, für  $h = 0$ , die Induktion endliche Werte hat, nämlich die Werte der Remanenz  $\pm b_r$  (s. Abb. 86). Die Aufrechterhaltung der Beziehung:  $b_r = \mu h$  würde



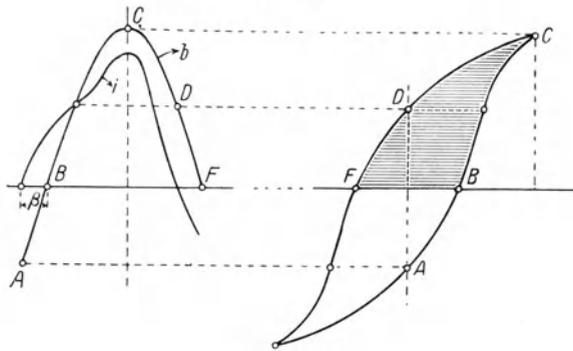
also für  $h = 0$ ;  $\mu = \infty$ , fordern; und nicht nur dies, sondern für  $h = -dh$ , auch noch einen Sprung des  $\mu$  von plus nach minus Unendlich, was natürlich physikalisch undenkbar ist.

Das Studium der zyklischen Magnetisierung hat daher — um die Beziehung:  $b = \mu h$ ; festhalten zu können — zu der Vorstellung des zeitlichen Zurückbleibens der Induktion hinter der magnetisierenden Kraft geführt, wobei dann  $b$  und  $h$  Werte sind, die nicht gleichzeitig vorhanden sind. Doch ist der Zusammenhang äußerst kompliziert, da die Zeiten der Verzögerung für verschiedene Werte von  $h$  verschieden sind. Für  $h = h_{\max}$  ist die Zeit der Verzögerung Null. Stellt man diese Verhältnisse für Wechselstrom im Polardiagramm dar, so lassen sie sich so deuten, daß die Induktion in jedem Quadranten des Diagrammes mit einer anderen Winkelgeschwindigkeit als die magnetisierende Kraft rotiert. So holt, im I. Quadranten, der Vektor der Induktion, der dort, für  $h = 0$ , um den Winkel  $\nu$  hinter  $h$  verzögert ist, den Vektor  $h$  für  $h = h_{\max}$  ein; im II. Quadranten bleibt  $b$  um den Winkel  $\nu$  zurück; im III. Quadranten holt  $b$  das  $h$  wieder ein, um im IV. Quadranten wieder um  $\nu$  zurückzubleiben (s. Fig. 87).

Geben wir dem Vektor der Induktion konstante Winkelgeschwindigkeit, wie es bei reiner Sinusform der Induktion der Fall ist, so müssen wir für  $h$  im I. und III. Quadranten eine mittlere kleinere, im II. und IV. eine mittlere größere Winkelgeschwindigkeit annehmen. Diese Erkenntnis erklärt sofort die Verzerrung der Stromkurve trotz sinusförmiger Induktion.

Nun kann man aber mit einer ungleichförmigen Winkelgeschwindigkeit weder rechnen, noch ein Vektordiagramm zeichnen, und es haben daher G. Ferraris und H. F. Weber, wohl zuerst, den Gedanken benutzt, der magnetisierenden Kraft eine mittlere, gleichförmige Winkelgeschwindigkeit,

Abb. 88.



gleich jener der Induktion, zu geben. Damit erhält die Induktion eine „konstante“ Verzögerung hinter der magnetisierenden Kraft, und wir schreiben die Beziehung zwischen  $b$  und  $h$  in der Form:

$$b_t = \mu h_{t-t'}; \quad (\text{II})$$

wobei  $b_t$  die Induktion zur Zeit  $t$ ,  $\mu$  für den ganzen Zyklus eine Konstante,  $h_{t-t'}$  die magnetisierende Kraft zu einer Zeit  $(t - t')$ , und  $t'$  eine Konstante für den Zyklus sind.

Dieser Ansatz stellt die Wechselstrommagnetisierung in leicht verständlicher Form dar. Natürlich ist er nicht exakt, da er eben  $\mu$  und  $t'$  als konstant ansieht, aber wir werden sehen, daß, wenn es sich um Erfassung von Leistungsgrößen handelt, und das ist bei unserem Problem vor allem der Fall, der Ansatz brauchbar ist.

Für die Konstruktion der Hysteresisschleife sind  $h$  und  $b$  die Koordinaten. Wir bleiben uns dabei bewußt, daß das  $b$ , sowohl unter dem Einfluß der beobachteten magnetisierenden Kraft  $h$ , als auch unter dem Einfluß der nicht beobachtbaren Wirbelströme zustande kommt. Der Inhalt der Schleife stellt somit das  $4\pi$ -fache des Effektverbrauches für

Hysteresis und Wirbelströme, pro Volumeneinheit und Periode, vor und ist:  $\int h db$ .

Ist  $b$  eine reine Sinuslinie, so ist  $h$  verzerrt. Zählen wir die Zeit vom Durchgang der wahren Stromkurve durch Null, so ist:

$$h = \mathfrak{H}_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + \mathfrak{H}_3 \sin(3\omega t - \alpha_3) + \dots$$

und:

$$b = \mathfrak{B} \sin(\omega t - \beta)$$

Bei dem Durchlaufen der Hysteresisschleife entspricht Punkt  $A$  der Zeit  $t = 0$ ; Punkt  $B$  der Zeit  $t_\beta$ ;  $C$  der Zeit  $t_\beta + \frac{T}{4}$ ;  $F$  der Zeit  $t_\beta + \frac{T}{2}$ . Es ist also die Fläche der schraffierten halben Schleife gegeben durch:

$$\frac{F}{2} = \int_{\frac{T}{4} + t_\beta}^{\frac{T}{2} + t_\beta} h db - \int_{t_\beta + \frac{T}{4}}^{t_\beta} h db$$

Nun ist:

$$h db = \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \omega \cos(\omega t - \beta) \sin(\omega t - \alpha_1) dt + \mathfrak{H}_3 \mathfrak{B} \omega \cos(\omega t - \beta) \sin(3\omega t - \alpha_3) dt + \dots$$

oder wegen:

$$\text{ist: } \cos x \sin y = \frac{1}{2} \sin(x + y) - \frac{1}{2} \sin(x - y)$$

$$h db = \frac{1}{2} \omega \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin\{2\omega t - (\beta + \alpha_1)\} dt - \frac{1}{2} \omega \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin(\alpha_1 - \beta) dt + \frac{1}{2} \omega \mathfrak{H}_3 \mathfrak{B} \sin\{4\omega t - (\beta + \alpha_3)\} dt + \frac{1}{2} \omega \mathfrak{H}_3 \mathfrak{B} \sin(2\omega t + \beta - \alpha_3) dt + \dots$$

und daher:

$$\int h db = -\frac{1}{4} \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \cos(2\omega t - \beta - \alpha_1) - \frac{1}{2} \omega \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin(\alpha_1 - \beta)t - \frac{1}{8} \mathfrak{H}_3 \mathfrak{B} \cos(4\omega t - \beta - \alpha_3) - \frac{1}{4} \mathfrak{H}_3 \mathfrak{B} \cos(2\omega t + \beta - \alpha_3) - \dots$$

Setzen wir dies in die Gleichung für  $\frac{F}{2}$  ein, und berücksichtigen die Integrationsgrenzen, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{F}{2} &= -\frac{1}{2} \omega \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin(\alpha_1 - \beta) \left( \frac{T}{2} + t_\beta \right) + \frac{1}{2} \omega \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin(\alpha_1 - \beta) t_\beta \\ &= -\frac{1}{2} \omega \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin(\alpha_1 - \beta) \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin(\beta - \alpha_1) = \\ &= \frac{\pi}{2} \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin(\beta - \alpha_1) \end{aligned}$$

und somit die Fläche der ganzen Schleife:

$$F = \pi \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin(\beta - \alpha_1) \tag{1}$$

Dieses aber ist die Fläche einer Ellipse, die durch die Interferenz zweier, zueinander senkrechten Sinusschwingungen gleicher Frequenz, mit den Amplituden  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{B}$  und dem Gangunterschied  $(\beta - \alpha_1)$ , entstanden ist.

Dies ist leicht einzusehen. Es sei:

$$x = \mathfrak{H}_1 \sin(\omega t - \alpha_1); \quad y = \mathfrak{B} \sin(\omega t - \beta);$$

also der Phasenunterschied dieser beiden Schwingungen:

$$\nu = \beta - \alpha_1$$

Rechnen wir die Zeit vom Nulldurchgang der ersten Schwingung, so können wir schreiben:

$$x = \mathfrak{H}_1 \sin \omega t; \quad y = \mathfrak{B} \sin(\omega t - \nu)$$

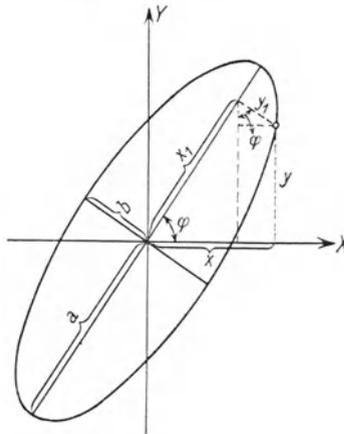
somit:

$$\sin \omega t = \frac{x}{\mathfrak{H}_1}; \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\mathfrak{H}_1^2}} = \frac{1}{\mathfrak{H}_1} \sqrt{\mathfrak{H}_1^2 - x^2}$$

und daher:

$$y = \mathfrak{B} \sin \omega t \cos \nu - \mathfrak{B} \cos \omega t \sin \nu = \mathfrak{B} \frac{x}{\mathfrak{H}_1} \cos \nu - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}_1} \sqrt{\mathfrak{H}_1^2 - x^2} \sin \nu$$

Abb. 89.



Das Wurzelglied, allein, nach links gebracht und quadriert, ergibt:

$$\frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{H}_1^2} (\mathfrak{H}_1^2 - x^2) \sin^2 \nu = \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{H}_1^2} x^2 \cos^2 \nu + y^2 - 2xy \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}_1} \cos \nu$$

oder:

$$\mathfrak{H}_1^2 \mathfrak{B}^2 \sin^2 \nu = \mathfrak{B}^2 x^2 + \mathfrak{H}_1^2 y^2 - 2xy \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \quad (2)$$

Das ist die Ellipsengleichung, bezogen auf die  $x$ - und  $y$ -Achse. Wir wollen ihre Gleichung, bezogen auf ihre eigenen Achsen, aufstellen. Dann

ist (s. Abb. 89), wenn  $x_1$  und  $y_1$  die Koordinaten, bezogen auf das Achsenkreuz  $a$  und  $b$ , sind, und  $\varphi$  der Neigungswinkel der großen Achse gegen die  $x$ -Achse ist:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi \\ y &= x_1 \sin \varphi - y_1 \cos \varphi \end{aligned}$$

Dies in (2) eingeführt, ergibt die Mittelpunktsgleichung der Ellipse, bezogen auf ihr Achsenkreuz, in der Form:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_1^2 \mathfrak{B}^2 \sin^2 \nu &= x_1^2 (\mathfrak{H}_1^2 \sin^2 \varphi + \mathfrak{B}^2 \cos^2 \varphi - \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \sin 2 \varphi) + \\ &+ y_1^2 (\mathfrak{H}_1^2 \cos^2 \varphi + \mathfrak{B}^2 \sin^2 \varphi + \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \sin 2 \varphi) - \\ &- x_1 y_1 (\mathfrak{H}_1^2 \sin 2 \varphi - \mathfrak{B}^2 \sin 2 \varphi - 2 \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \cos 2 \varphi) \end{aligned} \quad (3a)$$

Für  $y_1 = 0$  ergibt sich hieraus die große Achse  $a$  der Ellipse mit:

$$a = \frac{\mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin \nu}{\sqrt{\mathfrak{H}_1^2 \sin^2 \varphi + \mathfrak{B}^2 \cos^2 \varphi - \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \sin 2 \varphi}} \quad (4)$$

Für  $x_1 = 0$  folgt die kleine Achse  $b$  mit:

$$b = \frac{\mathfrak{H}_1 \mathfrak{B} \sin \nu}{\sqrt{\mathfrak{H}_1^2 \cos^2 \varphi + \mathfrak{B}^2 \sin^2 \varphi + \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \sin 2 \varphi}} \quad (5)$$

somit nach:

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2$$

folgt die Gleichung der Ellipse auch mit:

$$\begin{aligned} &x_1^2 \frac{\mathfrak{H}_1^2 \cdot \mathfrak{B}^2 \sin^2 \nu}{\mathfrak{H}_1^2 \cos^2 \varphi + \mathfrak{B}^2 \sin^2 \varphi + \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \sin 2 \varphi} + \\ &+ y_1^2 \frac{\mathfrak{H}_1^2 \mathfrak{B}^2 \sin^2 \nu}{\mathfrak{H}_1^2 \sin^2 \varphi + \mathfrak{B}^2 \cos^2 \varphi - \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \sin 2 \varphi} = \\ &= \frac{\mathfrak{H}_1^4 \mathfrak{B}^4 \sin^4 \nu}{(\mathfrak{H}_1^2 \cos^2 \varphi + \mathfrak{B}^2 \sin^2 \varphi + \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \sin 2 \varphi)(\mathfrak{H}_1^2 \sin^2 \varphi + \mathfrak{B}^2 \cos^2 \varphi - \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \sin 2 \varphi)} \end{aligned}$$

oder durch  $\mathfrak{H}_1^2 \mathfrak{B}^2 \sin^2 \nu$  dividiert und mit dem Nenner der rechten Seite multipliziert folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_1^2 \mathfrak{B}^2 \sin^2 \nu &= x_1^2 (\mathfrak{H}_1^2 \sin^2 \varphi + \mathfrak{B}^2 \cos^2 \varphi - \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \sin 2 \varphi) + \\ &+ y_1^2 (\mathfrak{H}_1^2 \cos^2 \varphi + \mathfrak{B}^2 \sin^2 \varphi + \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1 \cos \nu \sin 2 \varphi) \end{aligned} \quad (3)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit Gl. (3a), so zeigt sich, daß in (3a) das dritte Glied Null sein muß; d. h. daß:

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{2 \mathfrak{B} \mathfrak{H}_1}{\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2} \cos \nu \quad (6)$$

Es ist somit  $\varphi$  bestimmt. Aus (6) folgt:

$$\cos 2\varphi = \frac{\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2}{\sqrt{(\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 4\mathfrak{B}^2\mathfrak{H}_1^2 \cos^2 \nu}}; \quad \sin 2\varphi = \frac{2\mathfrak{B}\mathfrak{H}_1 \cos \nu}{\sqrt{(\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 4\mathfrak{B}^2\mathfrak{H}_1^2 \cos^2 \nu}} \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi}} = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 4\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \cos^2 \nu} - (\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)}{\sqrt{(\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 4\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \cos^2 \nu} + (\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)}} \quad (8)$$

also:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 4\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \cos^2 \nu} + (\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)}{\sqrt{(\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 4\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \cos^2 \nu}} \\ \sin^2 \varphi &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 4\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \cos^2 \nu} - (\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)}{\sqrt{(\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 4\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \cos^2 \nu}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Setzen wir noch:

$$\sqrt{(\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 4\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \cos^2 \nu} = U \quad (10)$$

und setzen nun diese sämtlichen Werte in (4) und (5) ein, so wird

$$a = \frac{\sqrt{2}\mathfrak{H}_1\mathfrak{B} \sin \nu}{\sqrt{\mathfrak{H}_1^2 + \mathfrak{B}^2 - U}}; \quad b = \frac{\sqrt{2}\mathfrak{H}_1\mathfrak{B} \sin \nu}{\sqrt{\mathfrak{H}_1^2 + \mathfrak{B}^2 + U}} \quad (11)$$

Die Fläche der Ellipse ist somit:

$$F = \pi \cdot a \cdot b = \pi \frac{2\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \sin^2 \nu}{\sqrt{(\mathfrak{H}_1^2 + \mathfrak{B}^2)^2 - U^2}}$$

und da, nach (10)

$$U^2 = (\mathfrak{H}_1^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 4\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \cos^2 \nu = (\mathfrak{H}_1^2 + \mathfrak{B}^2)^2 - 4\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \sin^2 \nu$$

wird:

$$F = \pi \frac{2\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \sin^2 \nu}{\sqrt{4\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{B}^2 \sin^2 \nu}} = \pi \mathfrak{H}_1\mathfrak{B} \sin \nu \quad (12)$$

Wir sehen also, daß wir unsere Verlustschleife — soweit uns nur deren Inhalt, aber nicht die Form interessiert — durch eine Ellipse ersetzen können, deren Achsenlängen und Achsenlagen gegen die Abszisse durch die Gl. (8) und (11) gegeben sind. Der Winkel  $\nu$  ist dabei der Phasenwinkel zwischen der ersten Harmonischen der Stromwelle und der Induktionswelle, der durch die Kurvenaufnahme und Analyse bestimmbar ist.

In dieser Darstellung ist die Induktion durch die erste Harmonische der Stromwelle oder magnetisierenden Kraft hervorgerufen, die bei konstantem  $\mu$  das Eisen magnetisiert. Die Induktion bleibt hierbei um den konstanten, zeitlichen Betrag  $t'$  — entsprechend dem Winkel  $\nu$  — hinter der magnetisierenden Kraft zurück. Also nur die erste Harmonische

leistet Arbeit. Wir werden auf diese Art ganz folgerichtig auf den Ansatz II, S. 278, in der Form

$$b = \mu h_1(t-v);$$

oder in der Weberschen Schreibart:

$$b = \mu |h_1|;$$

geführt. Das eingeklammerte  $|h|$  soll also besagen, daß zur Erzeugung der Induktion  $b$  jene magnetisierende Kraft wirkt, die nicht gleichzeitig mit  $b$  auftritt, sondern um die Zeit  $t'$  früher.

Der Ausdruck für  $F$ , Gl. (1) oder (12), als Repräsentant des Effektverlustes, zeigt nun deutlich, daß der Effektverbrauch eben nur durch das zeitliche Zurückbleiben, den Winkel  $\nu$ , bedingt ist. Haben wir Luft, statt Eisen, vor uns, so wird:

$$\nu = 0; \quad \text{und} \quad \mu = 1;$$

somit entfällt die Deformation der Stromkurve, und es wird:  $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ ; daher nach (6)

$$\text{tg } 2\varphi = \infty; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Die kleine Achse  $b$  der Ellipse wird nach (11) oder nach (5) gleich Null; die große Achse  $a$  erhält nach (11) oder (4) den Wert  $\frac{0}{0}$ , der sich aus der Zeichnung ergibt mit:  $\frac{\mathfrak{H}}{\sin \varphi} = \sqrt{2} \mathfrak{H}$ ; die ganze Verlustellipse übergeht in eine unter  $45^\circ$  gegen die Abszisse geneigte, Gerade von der Länge  $2\sqrt{2} \mathfrak{H}$ .

Wir haben bis jetzt von einer rein sinusförmigen Kurve der Induktion gesprochen, die sich kaum realisieren läßt. Wir wollen jetzt den möglichen Fall betrachten, daß wir den Primärklemmen eines leerlaufenden Ringtransformators eine rein sinusförmige Klemmenspannung:  $k = \mathfrak{R} \sin(\omega t)$  aufdrücken. Dann finden wir die Form des Stromes oder der magnetisierenden Kraft beliebig deformiert und ebenso — natürlich in weit geringerem Grade — die Form der sekundären Klemmenspannung. Bei dem offenen Transformator ist aber die sekundäre Klemmenspannung gleich der sekundären EMK  $e_2$ .

Die Kurvenanalysen ergeben:

$$i = \mathfrak{I}_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + \mathfrak{I}_3 \sin(3\omega t - \alpha_3) + \dots = \text{Primärstrom} \quad (13)$$

$$e_2 = \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t - \beta_1) + \mathfrak{E}_3 \sin(3\omega t - \beta_3) + \dots = \text{Sekundäre EMK} \quad (14)$$

Sind  $z_1$  und  $z_2$  die primären und sekundären Windungszahlen, so ist die primäre EMK  $e_1$  gegeben durch:

$$e_1 = \frac{z_1}{z_2} \mathfrak{G}_1 \sin(\omega t - \beta_1) + \frac{z_1}{z_2} \mathfrak{G}_3 \sin(3\omega t - \beta_3) + \dots = \text{Primäre EMK} \quad (15)$$

Die Leistung des Stromes besteht nun bei dieser Anordnung bekanntlich aus zwei Teilen; der Wärmeleistung im Kupfer und im Eisen. Die erstere ist durch  $J^2 r$  gegeben, wenn  $r$  der Widerstand der Primärwindungen ist, die letztere ist durch die Verlustschleife charakterisiert.

Und zwar ist das  $\frac{1}{4\pi}$ -fache des Flächeninhalts der Verlustschleife gleich dem gesamten Eisenverluste pro Volumeneinheit und Periode.

Ist  $\Phi$  der gesamte, magnetische Fluß, so ist die primäre EMK

$$e_1 = -z_1 \frac{d\Phi}{dt} = -z_1 q \frac{db}{dt}$$

wenn  $b$  die Induktion und  $q$  der Querschnitt des Kraftlinienweges ist und hieraus:

$$b = - \int \frac{e_1}{z_1 q} dt$$

also mit Rücksicht auf (15)

$$b = - \int \frac{z_1}{z_2} \frac{\mathfrak{G}_1}{z_1 q} \sin(\omega t - \beta_1) dt - \int \frac{z_1}{z_2} \frac{\mathfrak{G}_3}{z_1 q} \sin(3\omega t - \beta_3) dt - \dots$$

somit:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\mathfrak{G}_1}{\omega z_2 q} \cos(\omega t - \beta_1) + \frac{\mathfrak{G}_3}{3\omega z_2 q} \cos(3\omega t - \beta_3) + \dots \\ &= \frac{\mathfrak{G}_1}{\omega z_2 q} \sin\left(\omega t - \beta_1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\mathfrak{G}_3}{3\omega z_2 q} \sin\left(3\omega t - \beta_3 + \frac{\pi}{2}\right) + \dots \end{aligned}$$

und setzen wir:

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mathfrak{G}_1}{\omega z_2 q}; \quad \mathfrak{B}_3 = \frac{\mathfrak{G}_3}{3\omega z_2 q}; \quad \text{usw.}$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \beta_1; \quad \gamma_3 = \frac{\pi}{2} - \beta_3; \quad \text{usw.}$$

so folgt:

$$b = \mathfrak{B}_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + \mathfrak{B}_3 \sin(3\omega t + \gamma_3) + \dots \quad (16)$$

Die magnetisierende Kraft  $h$  ist aber gegeben durch

$$h = \mathfrak{H}_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + \mathfrak{H}_3 \sin(3\omega t - \alpha_3) + \dots \quad (17)$$

wo:

$$\mathfrak{H}_n = \frac{4\pi z_1}{l} \mathfrak{I}_n$$

wenn:  $l$  = Länge des Kraftlinienweges.

Der Inhalt der halben Verlustschleife ist somit gegeben durch :

$$\frac{F}{2} = \int_{t_e}^{t_\gamma + \frac{T}{2}} h db - \int_{t_e}^{t_\gamma} h \cdot db ;$$

Die ausgeführte Integration ergibt :

$$\frac{F}{2} = \frac{1}{2} \pi \mathfrak{B}_1 \mathfrak{H}_1 \sin \left( \beta_1 - \alpha_1 - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \pi \cdot 3 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{H}_3 \sin \left( \beta_3 - \alpha_3 - \frac{\pi}{2} \right) + \dots$$

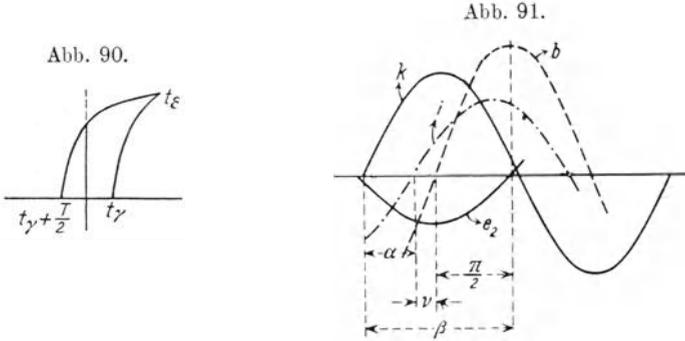
Wie aus Abb. 91 hervorgeht, ist aber

$$\beta_n - \alpha_n - \frac{\pi}{2} = \nu_n ;$$

und es wird somit die Fläche der ganzen Verlustschleife :

$$F = \pi \mathfrak{B}_1 \mathfrak{H}_1 \sin \nu_1 + \pi \cdot 3 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{H}_3 \sin \nu_3 + \pi 5 \mathfrak{B}_5 \mathfrak{H}_5 \sin \nu_5 + \dots \quad (18)$$

Wir sehen die Verlustschleife dargestellt als Summe von Ellipsenflächen, deren Umfänge entstanden zu denken sind durch Interferenz zweier



Sinus-Schwingungen gleicher Frequenz, den Amplituden  $\sqrt{n} \mathfrak{B}_n$  und  $\sqrt{n} \mathfrak{H}_n$ , wobei  $n$  die ungeraden Zahlen sind, und den Gangunterschied  $\nu_n$ , wobei  $\nu_n$  den Verzögerungswinkel einer Harmonischen der Induktion hinter der gleichstelligen Harmonischen der magnetisierenden Kraft bedeutet. Es ist also das Zustandekommen jeder unserer Verlustellipsen dadurch bedingt, daß eine rein sinusförmige Induktionswelle, von der Amplitude  $\sqrt{n} \mathfrak{B}_n$ , hinter einer reinen Sinuswelle der magnetisierenden Kraft, von der Amplitude  $\sqrt{n} \mathfrak{H}_n$ , um eine konstante Zeit  $t_n$  zurückbleibt. Die Magnetisierung findet so statt, daß die Induktion in jeder Harmonischen gegeben ist durch :

$$b_n(t) = \mu_n h_n(t - t_n)$$

Die Permeabilität ist gegeben durch:

$$\mu_n = \frac{\mathfrak{B}_n}{\mathfrak{H}_n} = \frac{\mathfrak{G}_n}{n \cdot \omega \cdot z_2 q} \frac{1}{\mathfrak{H}_n};$$

sie ändert sich von Welle zu Welle und ebenso die Zeit  $t_n$  der Verzögerung.

Würde nur die erste Harmonische der magnetisierenden Kraft in Betracht kommen, so wäre sie:

$$h_1 = \frac{4\pi z_1}{l} i_1$$

somit:

$$b_1 = \mu_1 |h_1| = \mu_1 \frac{4\pi z_1}{l} |i_1|$$

Der gesamte Induktionsfluß ist:

$$\Phi = b_1 q$$

Daher die primäre EMK

$$e_1 = -z_1 q \frac{db_1}{dt} = -z_1 q \frac{4\pi z_1}{l} \mu_1 \frac{d}{dt} |i_1|$$

oder mit:

$$L_1 = \mu_1 \frac{q}{l} 4\pi z_1^2 \quad (19)$$

$$e_1 = -L_1 \frac{d}{dt} |i_1| \quad (20)$$

Für jede weitere Harmonische gilt dasselbe. Es würde also die Spannungsgleichung des Stromkreises lauten:

$$(i_1 + i_3 + \dots) r + \left\{ L_1 \frac{d}{dt} |i_1| + L_3 \frac{d}{dt} |i_3| + \dots \right\} = k \quad (21)$$

Dies wäre der richtige Ansatz der Spannungsgleichung des eisenumschlingenden Wechselstromkreises, in welchem im übrigen immer noch zwei Ungenauigkeiten enthalten sind. Erstens ordnen wir den sämtlichen Stromharmonischen einen und denselben Widerstand  $r$  zu, was, wie wir in Abschnitt X sahen, der ungleichen Frequenz wegen, unrichtig ist, und zweitens haben wir in (21) nur die vom Eisen herrührende Induktion berücksichtigt, also die sogenannte Streuinduktion vernachlässigt. Beide Ungenauigkeiten sind aber beim leerlaufenden Transformator recht unbedeutend.

Multiplizieren wir nun Gl. (21) mit  $idt$  und integrieren dann die Gleichung über die Zeiteinheit, um zum Effekt zu kommen, so erhalten

wir aus dem ersten Gliede links den Kupferverlust und aus dem zweiten die Summe der Integrale:

$$n \sum_1^{\infty} \int_0^1 L_n \frac{d}{dt} |i_n| i dt;$$

so daß wir erhalten:

$$\text{Kupferverlust} + n \sum_1^{\infty} \int_0^1 L_n \frac{d}{dt} |i_n| i dt = \int_0^1 k i dt = P = \text{Gesamtleistung} \quad (22)$$

Da:

$$i = \Im_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + \Im_3 \sin(3\omega t - \alpha_3) + \dots;$$

und:

$$|i_n| = \Im_n \sin(n\omega t - \alpha_n - \nu_n)$$

so ergibt die Integration des zweiten Gliedes links in (22):

$$n \sum_1^{\infty} \int_0^1 L_n \frac{d}{dt} |i_n| i dt = n \sum_1^{\infty} \frac{1}{2} n L_n \Im_n^2 \omega \sin \nu_n \quad (22a)$$

Setzt man für  $L_n$  aus (19) den Wert ein, so wird:

$$\frac{1}{2} n L_n \Im_n^2 \omega \sin \nu_n = \frac{1}{2} n \cdot 2\pi f \cdot \mu_n \frac{q}{l} \cdot 4\pi z_1^2 \Im_n^2 \sin \nu_n;$$

multiplizieren und dividieren wir mit  $4\pi \cdot l$ , so wird:

$$\frac{1}{2} n L_n \Im_n^2 \omega \sin \nu_n = \frac{1}{2} n \cdot 2\pi f \cdot \mu_n (ql) 4\pi \frac{1}{l \cdot 4\pi} \cdot \frac{4\pi}{l} z_1^2 \Im_n^2 \sin \nu_n$$

oder, da:

$$ql = \text{Eisenvolumen} = V; \quad \frac{4\pi z_1}{l} \Im_n = \Im_n; \quad \frac{4\pi z_1}{l} \Im_n \mu_n = \mathfrak{B}_n$$

wird:

$$n \sum_1^{\infty} \frac{1}{2} n L_n \Im_n^2 \omega \sin \nu_n = \frac{1}{4\pi} n \sum_1^{\infty} (\pi \cdot n \cdot \mathfrak{B}_n \Im_n \sin \nu_n) V \cdot f \quad (23)$$

Der Ausdruck links ist nun — wie aus (22a) und (22) klar hervorgeht — nichts anderes als der gesamte Zusatzverlust, der außer dem Kupferverlust vorhanden ist; der Ausdruck rechts aber ist die Summe der Flächen unserer Einzelellipsen, dividiert durch  $4\pi$  — also der Repräsentant der Verlustschleife — multipliziert mit  $V \cdot f$ , also bezogen auf das Gesamtvolumen und  $f$  Perioden, d. h. die Zeiteinheit.

Die Gl. (21) ist nun trotz, oder besser gesagt „wegen“ dem in ihr enthaltenen Versuche, der physikalischen Richtigkeit näherzukommen,

zur Lösung nach  $i$ , daher zur weiteren Rechnung oder Benützung des Vektordiagramms ungeeignet.

Hier führt nun ein einfacher Gedanke zu einem Resultat, das bezüglich des Effektes vollkommen befriedigt.

Man setze für die Summe aller dieser Ellipsenflächen eine einzige Ellipsenfläche von dem Inhalt:

$$F = \pi \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sin \nu; \quad (24)$$

wobei unter  $\mathfrak{H}$  die Amplitude der äquivalenten Magnetisierungswelle, die in der Phase um  $\varphi$  gegen die Primärspannung verschoben ist, verstanden sein soll, und unter  $\mathfrak{B}$  die Amplitude der Äquivalenzwelle der Induktion. Es soll also sein:

$$n \sum_1^{\infty} \pi \cdot n \cdot \mathfrak{B}_n \mathfrak{H}_n \sin \nu_n = \pi \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sin \nu$$

woraus folgt:

$$\sin \nu = \frac{n \sum_1^{\infty} \pi \cdot \mathfrak{B}_n \cdot \mathfrak{H}_n \sin \nu_n}{\pi \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}}$$

Multiplizieren wir hier Zähler und Nenner mit  $\frac{V \cdot f}{4 \pi}$ , so erhalten wir im Zähler, nach (23) den gesamten Zusatzverlust  $GZ$ , also:

$$\sin \nu = \frac{GZ}{\pi \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H} \cdot \frac{Vf}{4\pi}} \quad (25)$$

Da:

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_3^2 + \dots}; \quad \mathfrak{H} = \frac{4 \pi z_1}{l} \mathfrak{I};$$

wo  $\mathfrak{I}$  gleich der Amplitude der äquivalenten Stromwelle ist, so folgt:

$$\sin \nu = \frac{GZ}{\pi \sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_3^2 + \dots} \frac{4 \pi z_1}{l} \mathfrak{I} \frac{Vf}{4\pi}} \quad (25 a)$$

Es war aber:

$$\mathfrak{B}_n = \frac{\mathfrak{E}_n}{n \cdot \omega \cdot z_2 q} = \frac{\mathfrak{E}_n}{n \cdot 2 \pi f \cdot z_2 q}$$

somit:

$$\sin \nu = \frac{GZ}{\frac{\pi}{2 \pi f z_2 q} \sqrt{\mathfrak{E}_1^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_5}{5}\right)^2 + \dots} \frac{4 \pi z_1}{l} \mathfrak{I} \frac{Vf}{4\pi}}$$

und daher wegen:

$$V = ql; \quad 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}; \quad \text{und: } J = \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \nu = \frac{GZ}{\frac{z_1}{z_2} \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} \frac{\mathfrak{E}_5}{\mathfrak{E}_1}\right)^2 + \dots J}} \quad (26)$$

Aus dieser Gleichung ist der Verspätungswinkel  $\nu$  durch Wattmessung und Kurvenaufnahme der sekundären Leerlaufspannung zu bestimmen. Die Stromkurve braucht natürlich nicht aufgenommen zu werden, da in Gl. (26) ja nur der, mit dem Instrument gemessene, Effektivwert erscheint.

Wir haben nach Gl. (25) den Gesamtzusatzverlust festgesetzt mit:

$$GZ = \pi \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sin \nu \frac{Vf}{4\pi}$$

Machen wir jetzt für  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  die Ansätze:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}; \quad \mathfrak{H} = \frac{4\pi z_1}{l} \mathfrak{J}$$

so wird:

$$GZ = \pi \mu \left(\frac{4\pi z_1}{l}\right)^2 \mathfrak{J}^2 \frac{V \cdot f}{4\pi} \sin \nu = \frac{4\pi}{l} q \mu z_1^2 \omega \frac{\mathfrak{J}^2}{2} \sin \nu$$

und mit:

$$L = \frac{4\pi}{l} z_1^2 q \mu$$

ergibt sich:

$$GZ = \omega L J^2 \sin \nu \quad (27)$$

Nach diesen Erwägungen ergibt sich nun ohne weiteres die Zulässigkeit des Ferraris-Weberschen Ansatzes der Spannungsgleichung, wenn es sich um Verfolgung der Leistungsgrößen handelt. Der Ansatz lautet:

$$ir + L \frac{d}{dt} |i| = e_k \quad (28)$$

Mit  $e_k =$  primäre Klemmenspannung.

Multiplizieren wir mit  $idt$  und integrieren über die Zeiteinheit, so folgt wegen:

$$e_k = \mathfrak{E}_k \sin(\omega t); \quad i = \mathfrak{J} \sin(\omega t - \varphi); \quad |i| = \mathfrak{J} \sin(\omega t - \varphi - \nu);$$

$$\int_0^1 \mathfrak{J}^2 r \sin^2(\omega t - \varphi) dt + \int_0^1 \omega L \mathfrak{J}^2 \sin(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \varphi - \nu) dt =$$

$$= \int_0^1 \mathfrak{E}_k \mathfrak{J} \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt$$

oder:

$$J^2 r + \omega L J^2 \sin \nu = \mathfrak{E}_k J \cos \varphi \quad (29)$$

D. h.: Der gesamte zügeführte Effekt ist gleich dem Jouleschen Effekt in der magnetisierenden Wicklung plus allen übrigen Stromleistungen. Hätten wir, bei diesen letzteren, nur mit Hysteresis und Wirbelstromverlusten zu rechnen, wie es beim leerlaufenden, ruhenden Transformator der Fall ist, so würde das zweite Glied links [in (29)] der Fläche der Verlustschleife, die in dieser Darstellung zur Ellipse geworden ist, proportional sein. Kommen noch mechanische Reibungsverluste hinzu, wie dies beim leerlaufenden Induktionsmotor der Fall ist, so müssen wir diese als mit in dem zweiten Gliede enthalten, ansehen.

Wir setzen auf diese Art die gesamten Zusatzverluste dem Quadrat der magnetisierenden Stromstärke proportional.

Natürlich ist durch diese Darstellung der physikalisch klare Begriff des Verzögerungswinkels getrübt und das bleibt die Schwäche dieser Darstellung.

Die Gl. (28) gestattet nun auch leicht die Auflösung nach  $i$ . Führen wir die Symbole ein:

$$i \approx \mathfrak{I} \varepsilon^{i(\omega t - \varphi)}; \quad |i| \approx \mathfrak{I} \varepsilon^{i(\omega t - \varphi - \nu)}; \quad e_k \approx \mathfrak{E}_k \varepsilon^{i(\omega t)}$$

so folgt aus (28)

$$\mathfrak{I} r \varepsilon^{-i\varphi} + i \omega L \mathfrak{I} \varepsilon^{-i\varphi} \cdot \varepsilon^{-i\nu} = \mathfrak{E}_k$$

oder:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \varepsilon^{-i\varphi} &= \frac{\mathfrak{E}_k}{r + i \omega L \varepsilon^{-i\nu}} = \frac{\mathfrak{E}_k}{r + \omega L \sin \nu + i \omega L \cos \nu} = \\ &= \frac{\mathfrak{E}_k}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2 + 2 r \omega L \sin \nu}} \cdot \varepsilon^{-i \arctg \frac{\omega L \cos \nu}{r + \omega L \sin \nu}} \end{aligned}$$

und daher:

$$i = \frac{\mathfrak{E}_k}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2 + 2 r \omega L \sin \nu}} \sin \left( \omega t - \arctg \frac{\omega L \cos \nu}{r + \omega L \sin \nu} \right) \quad (30)$$

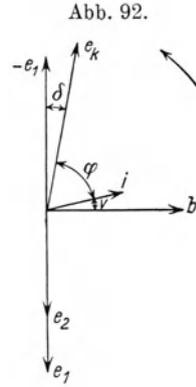
Hierin ist  $\sin \nu$  bestimmt durch Gl. (26) und  $L$  durch Gl. (27). Für  $\nu = 0$  übergeht (30) in die wohlbekannte Stromgleichung der eisenfreien Drosselspule.

Aus (30) ist:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L \cos \nu}{r + \omega L \sin \nu} \quad (31)$$

Nun können wir das Vektordiagramm für den Leerlauf des Transformators zeichnen (Abb. 92). Wir gehen von der Induktion  $b$  aus; dieser eilt der magnetisierende Strom  $i$  um den Winkel  $\nu$  vor; und die Klemmenspannung  $e_k$  eilt dem Strome um den Winkel  $\varphi$  vor.

Wir messen den Strom effektiv; ebenso die primäre und sekundäre Spannung  $e_k$  und  $e_2$  und nehmen die Kurvenform von  $e_2$  auf. Dann messen wir wattmetrisch den Effektverbrauch und endlich den primären Widerstand. Durch Messung haben wir auf diese Art die effektiven Werte von Primärspannung und Strom und damit die Amplituden ihrer Äquivalenzwellen. Mit Hilfe dieser Werte und der Wattmessung ergibt sich  $\varphi$ . Zur Konstruktion der Induktionswelle brauchen wir die Analyse der Welle  $e_2$ , da:



$$\mathfrak{B} = \sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_3^2 + \dots}; \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_n = \frac{\mathfrak{C}_n}{n \omega z_2 q}$$

also:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{\omega z_2 q} \sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \left(\frac{\mathfrak{C}_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{C}_5}{5}\right)^2 + \dots}$$

Der Winkel  $\nu$  ergibt sich aus (25 a) mit

$$\sin \nu = \frac{GZ}{\frac{1}{2} \omega z_1 q \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{J}} = \frac{\mathfrak{C}_k J \cos \varphi - J^2 r}{\frac{1}{2} \omega z_1 q \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{J}} \quad (32)$$

Jetzt sind alle Daten für die Konstruktion von Abb. 92 gegeben. Nun ergibt sich der Induktionskoeffizient  $L$  aus (27) mit:

$$L = \frac{\mathfrak{C}_k J \cos \varphi - J^2 r}{\omega J^2 \sin \nu} \quad (33)$$

Aus der Figur ist:

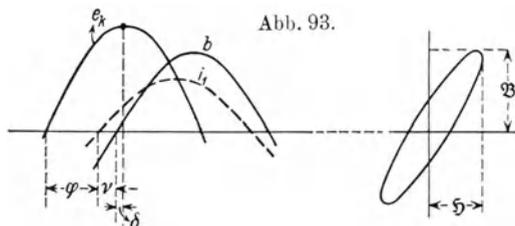
$$\delta = \frac{\pi}{2} - (\varphi + \nu); \quad \text{oder nach (31)}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{r \cos \nu}{\omega L + r \sin \nu}; \quad \text{woraus sich ergibt:}$$

$$r = \frac{\omega L \operatorname{tg} \delta}{\cos \nu - \sin \nu \operatorname{tg} \delta};$$

als Kontrolle für die ganze Darstellung.

Stellt man nun den Verlauf der einzelnen Größen in Schaulinien dar, so ergibt sich Abb. 93, welche die Berücksichtigung, oder den Einfluß der Zusatzverluste, durch — vor allem — Wechselstrommagnetisierung, in einfacher, wenn auch in physikalischer Hinsicht durchaus nicht exakter, Weise illustriert.



Wir müssen uns eben bewußt bleiben, daß das Eisen im Wechselstromkreise, so unentbehrlich es ist, für die exakte Rechnung ein unüberwindliches Hindernis bedeutet.

## 2. Entwicklung des Diagramms.

Getreu dem Gedankengange H. F. Webers, der die Entwicklung, auch aller elektrotechnischen Vorgänge, an Hand einer Ausgangsdifferentialgleichung zu verfolgen trachtete, wollen wir jetzt an die Aufstellung dieser Differentialgleichungen gehen.

Abb. 94.

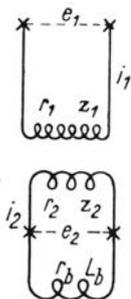


Abb. 94 zeigt uns das Schema des allgemeinen Transformators.  $e_1$  ist die aufgedrückte Primärspannung,  $r_1$  und  $z_1$  sind Widerstand und Windungszahl der Primärwicklung;  $e_2$  ist die sekundäre Klemmenspannung,  $r_2$  und  $z_2$  sind Widerstand und Windungszahl der Sekundärwicklung.  $r_b$  und  $L_b$  sind Widerstand und Induktivität des äußeren Belastungsstromkreises.

Wir nennen  $\Phi_1$  den gesamten magnetischen Fluß, der mit der Primärwicklung verkettet ist, und  $\Phi_2$  den Gesamtfluß, der mit der Sekundärwicklung verkettet ist. Ferner nennen wir:

$$r_x = r_2 + r_b \quad (34)$$

den, mit  $r_b$  veränderlichen, Gesamtwiderstand des Sekundärkreises.

Dann gelten die Gleichungen:

$$i_1 r_1 + z_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = e_1 \quad (35)$$

$$i_2 r_x + z_2 \frac{d\Phi_2}{dt} + \frac{d}{dt} (L_b i_2) = 0 \quad (36)$$

Jedes der beiden Felder  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  setzt sich zusammen aus dem, beiden Feldern angehörenden, Gesamtfluß  $\Phi$  im Eisen und dem Streufluß der betreffenden Wicklung, der eben nur mit dieser Wicklung verkettet ist. Nennen wir  $\Phi_{s_1}$  und  $\Phi_{s_2}$  den primären und sekundären Streufluß, so ist demnach:

$$\Phi_1 = \Phi + \Phi_{s_1}; \quad \Phi_2 = \Phi + \Phi_{s_2}. \quad (37)$$

Der gemeinsame Fluß  $\Phi$  im Eisen ist die Summe der beiden Anteile  $\Phi'_1$  und  $\Phi'_2$ , die von der primären und sekundären Erregung herühren, so daß

$$\Phi = \Phi'_1 + \Phi'_2 \quad (38)$$

und demnach:

$$\Phi_1 = \Phi'_1 + \Phi'_2 + \Phi_{s_1}; \quad \Phi_2 = \Phi'_1 + \Phi'_2 + \Phi_{s_2} \quad (39)$$

Nennen wir  $w$  den magnetischen Widerstand des Kraftlinienweges im Eisen und  $l$  und  $q$  Länge und Querschnitt dieses Weges, so ist:

$$w = \frac{l}{\mu q}$$

und daher:

$$\Phi'_1 w = \Phi'_1 \frac{l}{\mu q} = 4\pi z_1 |i_1|; \quad \text{also: } z_1 \Phi'_1 = \left(4\pi \frac{q}{l} \mu\right) z_1^2 |i_1| \quad (40)$$

wobei wir mit dem Zeichen  $|i_1|$ , nach Absatz 1 dieses Abschnittes, die „Verzögerung“ des Feldes hinter der magnetisierenden Kraft berücksichtigt haben. Und ebenso folgt:

$$z_2 \Phi'_1 = \left(4\pi \frac{q}{l} \mu\right) z_1 z_2 |i_1| \quad (40 a)$$

Ist  $w_{s_1}$  der magnetische Widerstand des primären Streulinienweges, so ist:

$$\Phi_{s_1} w_{s_1} = 4\pi z_1 |i_1|; \quad \text{also: } z_1 \Phi_{s_1} = \left(\frac{4\pi}{w_{s_1}}\right) z_1^2 |i_1| \quad (41)$$

Es ist hier zu bemerken, daß dieser Ansatz nicht exakt ist, da er dem Streufluß dieselbe magnetische Verzögerung zuweist, die der gemeinsame Fluß hat. Da der Streufluß zum Großteil in Luft verläuft, ist das nur eine rohe Annäherung, ohne welche aber die mathematische Komplikation der folgenden Entwicklung allzu groß würde um übersichtlich zu bleiben.

Geradeso ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_2 w = \Phi'_2 \frac{l}{\mu q} = 4\pi z_2 |i_2|; \quad \text{also: } z_1 \Phi'_2 = \left(4\pi \frac{q}{l} \mu\right) z_1 z_2 |i_2| \\ z_2 \Phi'_2 = \left(4\pi \frac{q}{l} \mu\right) z_2^2 |i_2| \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

und:

$$\Phi_{s_2} w_{s_2} = 4\pi z_2 |i_2|; \quad \text{also:} \quad z_2 \Phi_{s_2} = \left(\frac{4\pi}{w_{s_2}}\right) z_2^2 |i_2| \quad (43)$$

wenn  $w_{s_2}$  der magnetische Widerstand des sekundären Streuweges ist.

Wir setzen nun:

$$L'_1 = \left(4\pi \frac{q}{l} \mu\right) z_1^2; \quad L'_2 = \left(4\pi \frac{q}{l} \mu\right) z_2^2; \quad M = \left(4\pi \frac{q}{l} \mu\right) z_1 z_2 \quad (44)$$

somit:

$$M^2 = L'_1 L'_2 \quad (45)$$

Ferner:

$$L_{s_1} = \left(\frac{4\pi}{w_{s_1}}\right) z_1^2; \quad L_{s_2} = \left(\frac{4\pi}{w_{s_2}}\right) z_2^2 \quad (46)$$

Es wird daher:

$$\begin{aligned} z_1 \Phi'_1 &= L'_1 |i_1|; & z_1 \Phi'_2 &= M |i_2|; & z_1 \Phi_{s_1} &= L_{s_1} |i_1| \\ z_2 \Phi'_2 &= L'_2 |i_2|; & z_2 \Phi'_1 &= M |i_1|; & z_2 \Phi_{s_2} &= L_{s_2} |i_2| \end{aligned}$$

Und die Gleichungen (35) und (36) übergangen, mit Rücksicht auf (39) in:

$$i_1 r_1 + \frac{d}{dt} (L'_1 |i_1|) + \frac{d}{dt} (M |i_2|) + \frac{d}{dt} (L_{s_1} |i_1|) = e_1 \quad (35a)$$

$$i_2 r_2 + \frac{d}{dt} (L'_2 |i_2|) + \frac{d}{dt} (M |i_1|) + \frac{d}{dt} (L_{s_2} |i_2|) + \frac{d}{dt} (L_b |i_2|) = 0 \quad (36a)$$

Setzen wir weiter:

$$L_1 = L'_1 + L_{s_1}; \quad L_2 = L'_2 + L_{s_2} \quad (47)$$

Dann ist  $L_1$  der wirksame primäre Induktionskoeffizient und  $L_2$  der wirksame sekundäre Induktionskoeffizient.  $M$  ist der Koeffizient der gegenseitigen Induktion der beiden Stromkreise aufeinander.

Endlich setzen wir:

$$\frac{L_{s_1}}{L'_1} = \tau_1; \quad \frac{L_{s_2}}{L'_2} = \tau_2 \quad (48)$$

und nennen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  die primären und sekundären Streukoeffizienten.

Dann wird:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L'_1 \left(1 + \frac{L_{s_1}}{L'_1}\right) = L'_1 (1 + \tau_1) \\ L_2 &= L'_2 \left(1 + \frac{L_{s_2}}{L'_2}\right) = L'_2 (1 + \tau_2) \end{aligned} \right\} \quad (48a)$$

Nach (45) und (47) ist:

$$M^2 = L_1' L_2' = (L_1 - L_{s_1})(L_2 - L_{s_2}) \quad (48b)$$

also ein Wert, der zuverlässig kleiner als  $L_1 L_2$  ist. Wir können also sagen:

$$M^2 = \kappa^2 L_1 L_2 \quad (49)$$

mit

$$\kappa < 1$$

$\kappa$  heißt der Kopplungsfaktor; er beziffert den Anteil, der von den beiden Selbstinduktionen auf die gegenseitige Induktion entfällt.

Wir können aber auch schreiben:

$$M^2 = L_1 L_2 - \tau L_1 L_2 = L_1 L_2 (1 - \tau) \quad (50)$$

mit

$$\tau < 1.$$

Dann beziffert  $\tau$  den Teil des Produktes  $L_1 L_2$ , welcher der gegenseitigen Induktion durch Streuung verloren geht. Es ist also auch  $\tau$  ein Streukoeffizient; man nennt ihn den totalen Streukoeffizienten.

Aus (49) und (50) folgt nun:

$$\kappa^2 = 1 - \tau; \text{ oder } \tau = 1 - \kappa^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{M^2}{L_1' L_2' (1 + \tau_1)(1 + \tau_2)} \quad (51)$$

Daher wegen (45):

$$\tau = 1 - \frac{1}{(1 + \tau_1)(1 + \tau_2)} = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2}{1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2} \quad (52)$$

Führen wir endlich die Beziehungen (47) in (35a) und (36a) ein, setzen in (36a):

$$\lambda = L_2 + L_b \quad (53)$$

und weisen auch der Induktion im äußeren Stromkreise dieselbe Verzögerungszeit zu, so wird:

$$i_1 r_1 + \frac{d}{dt}(L_1 |i_1|) + \frac{d}{dt}(M |i_2|) = e_1 \quad (54)$$

$$i_2 r_2 + \frac{d}{dt}(\lambda |i_2|) + \frac{d}{dt}(M |i_1|) = 0 \quad (55)$$

Dies sind nun die Ausgangsgleichungen für unser Problem, die uns zunächst die beiden Stromstärken  $i_1$  und  $i_2$  ergeben sollen, wobei wir uns jetzt nur auf den Beharrungszustand des Vorganges beschränken wollen. Demgemäß dürfen wir Symbole einführen und schreiben:

$$e_1 \text{ \textcircled{=} } E_1 \varepsilon^{t \omega t} = E_1; \quad i_1 \text{ \textcircled{=} } J_1 \varepsilon^{t(\omega t - \varphi_1)} = I_1; \quad i_2 \text{ \textcircled{=} } J_2 \varepsilon^{t(\omega t - \varphi_2)} = I_2$$

wenn  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Phasendifferenzen von  $i_1$  und  $i_2$  gegen  $e_1$  sind.

Somit:

$$|i_1| \text{ \textcircled{=} } J_1 \varepsilon^{t(\omega t - \varphi_1 - \nu)} = I_1 \varepsilon^{-\nu}; \quad |i_2| \text{ \textcircled{=} } J_2 \varepsilon^{t(\omega t - \varphi_2 - \nu)} = I_2 \varepsilon^{-\nu}$$

wenn  $\nu$  der Verzögerungswinkel ist.

Somit lauten unsere Gleichungen in symbolischer oder vektorieller Form:

$$I_1 r_1 + \frac{d}{dt}(L_1 I_1 \varepsilon^{-\nu}) + \frac{d}{dt}(M I_2 \varepsilon^{-\nu}) = E_1 \quad (54a)$$

$$I_2 r_x + \frac{d}{dt}(\lambda I_2 \varepsilon^{-\nu}) + \frac{d}{dt}(M I_1 \varepsilon^{-\nu}) = 0 \quad (55a)$$

Es ist nun leicht ersichtlich, daß diese Gleichungen nur dann exakt nach  $I_1$  und  $I_2$  löslich sind, wenn  $L_1$ ,  $L_2$  und  $M$  Konstanten sind. Dies ist nur beim eisenfreien — dem „Luft“ — Transformator, bei dem überdies  $\nu = 0$  ist, der Fall. Hier ist, wie schon früher bemerkt, eine nahezu vollkommen exakte Behandlung des Transformatorproblems möglich.

Bei dem allgemeinen Transformator „mit Eisen“ sind wir uns im 1. Absatz dieses Abschnittes über einen Weg klar geworden, der uns angenähert gestattet, mit konstanten Induktionskoeffizienten und konstantem Verzögerungswinkel, während einer Periode, zu rechnen.

Sollen nun aber die, für verschiedene Belastungsfälle, errechneten Werte von  $i_1$  und  $i_2$  miteinander verglichen, d. h. „einem“ einfachen Bilde entnommen werden, so fordert dies weiterhin die Annahme der Konstanz von  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$  und  $\nu$  über den ganzen, möglichen Belastungsbereich.

Das aber ist eine Annahme, die nur mit roher Annäherung zutrifft, denn mit der Belastungsgröße ändert sich der Grad der Magnetisierung und mit diesem das  $\mu$ , das in den  $L$  und  $M$  enthalten ist und mit dem auch  $\nu$  zusammenhängt. Jeder Belastungspunkt hat in Wahrheit sein bestimmtes mittleres  $\mu$  und damit sein bestimmtes  $\tau$  und  $\nu$ , wenn auch die Abweichung der äußersten Grenzwerte nicht allzu groß ist.

Jedenfalls bleiben wir uns der Unkorrektheit bewußt, die diese Annahme der Konstanz mit sich bringt. Wir werden aus der weiteren Entwicklung erkennen, daß die, hierdurch in den Hauptresultaten, entstandenen Fehler für die Anforderungen der Praxis erträglich sind.

Mit Annahme dieser Konstanz von  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$  und  $\nu$  über den gesamten möglichen Belastungsbereich übergehen unsere Gl. (54a) und (55a) in:

$$I_1 r_1 + \iota \omega L_1 I_1 \varepsilon^{-\nu} + \iota \omega M I_2 \varepsilon^{-\nu} = E_1; \quad (56)$$

$$I_2 r_x + \iota \omega \lambda I_2 \varepsilon^{-\nu} + \iota \omega M I_1 \varepsilon^{-\nu} = 0; \quad (57)$$

die wir als die Ausgangsgleichungen unseres Problems anzusehen haben.

Aus (57) folgt nun:

$$I_2 = -I_1 \frac{\iota \omega M \varepsilon^{-\nu}}{r_x + \iota \omega \lambda \varepsilon^{-\nu}}$$

oder:

$$J_2 \varepsilon^{-i\varphi_2} = -J_1 \varepsilon^{-i\varphi_1} \frac{i\omega M \varepsilon^{-i\nu}}{r_x + i\omega\lambda \varepsilon^{-i\nu}} \quad (58)$$

dies in (56) gesetzt ergibt:

$$E_1 = J_1 \varepsilon^{-i\varphi_1} \frac{(r_1 + i\omega L_1 \varepsilon^{-i\nu})(r_x + i\omega\lambda \varepsilon^{-i\nu}) + \omega^2 M^2 \varepsilon^{-i2\nu}}{r_x + i\omega\lambda \varepsilon^{-i\nu}}$$

Führt man hier im Zähler die Multiplikation aus, beachtet, daß  $\lambda = L_a + L_b$ , ferner die aus (51) gegebene Beziehung:

$$\tau = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2},$$

übergeht von den Exponentialgrößen  $\varepsilon^{-i\nu}$  und  $\varepsilon^{-i2\nu}$  auf die entsprechenden goniometrischen Größen und setzt dann:

$$\left. \begin{aligned} A &= r_1 r_x + \omega(r_x L_1 + r_1 \lambda) \sin \nu - \omega^2 L_1 L_2 \left( \tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \cdot \cos 2\nu \\ B &= \omega(r_x L_1 + r_1 \lambda) \cos \nu + \omega^2 L_1 L_2 \left( \tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \sin 2\nu \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

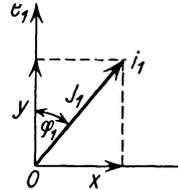
so wird:

$$E_1 = J_1 \varepsilon^{-i\varphi_1} \frac{A + iB}{r_x + i\omega\lambda \varepsilon^{-i\nu}} \quad (60)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die primäre Stromstärke  $i_1$ .

$i_1$  ist ein Vektor, also, in unserer Darstellungsart, im allgemeinen eine schräge Linie in der komplexen Ebene. Der Anfangspunkt des Stromvektors ist der Nullpunkt unseres Koordinatensystems, der Endpunkt soll jetzt durch seine Koordinaten festgelegt werden.

Abb. 95.



Es ist:

$$i_1 \approx J_1 \varepsilon^{-i\varphi_1} = J_1 \cos \varphi_1 - i J_1 \sin \varphi_1$$

Benennen wir  $y$  den reellen Teil  $J_1 \cos \varphi_1$  des Vektors und  $x$  seinen imaginären Teil  $J_1 \sin \varphi_1$ , so erkennen wir nach Abb. 95 in  $y$  und  $x$  die Koordinaten des Endpunktes des primären Stromvektors.

Nach: 
$$i_1 \approx J_1 \varepsilon^{-i\varphi_1} = y - ix$$

folgt aus (60)

$$E_1 (r_x + i\omega\lambda \varepsilon^{-i\nu}) = (y - ix) (A + iB)$$

Setzen wir die reellen und imaginären Teile beiderseits gleich, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} yA + xB &= E_1 (r_x + \omega\lambda \sin \nu) \\ yB - xA &= E_1 \omega\lambda \cos \nu \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Das sind die zwei Gleichungen, aus denen wir die Koordinaten  $y$  und  $x$  berechnen können.

Wir heben zunächst in (59)  $\omega^2 L_1 L_2$  als Faktor heraus, dann wird:

$$\left. \begin{aligned} A &= \omega^2 L_1 L_2 \left\{ \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{r_x}{\omega L_2} + \sin \nu \left( \frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{\lambda}{L_2} \right) - \left( \tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \cos 2\nu \right\} \\ B &= \omega^2 L_1 L_2 \left\{ \left( \frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{\lambda}{L_2} \right) \cos \nu + \left( \tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \sin 2\nu \right\} \end{aligned} \right\} \quad (59a)$$

Dabei ist:

$$\frac{r_1}{\omega L_1} \frac{\lambda}{L_2} = \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{L_2 + L_b}{L_2} = \frac{r_1}{\omega L_1} \left( 1 + \frac{L_b}{L_2} \right)$$

Es wird daher aus (61)

$$\left. \begin{aligned} y \left\{ \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{r_x}{\omega L_2} + \left[ \frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \left( 1 + \frac{L_b}{L_2} \right) \right] \sin \nu - \left( \tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \cos 2\nu \right\} + \\ + x \left\{ \left[ \frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \left( 1 + \frac{L_b}{L_2} \right) \right] \cos \nu + \left( \tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \sin 2\nu \right\} = \\ = \frac{E_1}{\omega^2 L_1 L_2} (r_x + \omega \lambda \sin \nu) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} y \left\{ \left[ \frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \left( 1 + \frac{L_b}{L_2} \right) \right] \cos \nu + \left( \tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \sin 2\nu \right\} - \\ - x \left\{ \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{r_x}{\omega L_2} + \left[ \frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \left( 1 + \frac{L_b}{L_2} \right) \right] \sin \nu - \left( \tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \cos 2\nu \right\} = \\ = \frac{E_1}{\omega^2 L_1 L_2} \omega \lambda \cos \nu \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Nun führen wir die Verhältniszahlen ein:

$$\frac{r_1}{\omega L_1} = \xi_1; \quad \frac{r_x}{\omega L_2} = \xi_x; \quad \frac{r_2}{\omega L_2} = \xi_2 \quad (64)$$

Dann ist nach (34)

$$\xi_x = \frac{r_2 + r_b}{\omega L_2} = \xi_2 + \frac{r_b}{\omega L_2} \frac{\omega L_b}{\omega L_b} = \xi_2 + \frac{r_b}{\omega L_b} \frac{L_b}{L_2} \quad (65)$$

Die Belastung des Transformators wird durch den Phasenwinkel  $\varphi$  im äußeren Stromkreis charakterisiert. Es ist:

$$tg \varphi = \frac{\omega L_b}{r_b}; \quad \text{oder:} \quad \frac{r_b}{\omega L_b} = cotg \varphi;$$

und setzen wir endlich das Verhältnis der Selbstinduktion im Belastungskreis zu der sekundären Selbstinduktion:

$$\frac{L_b}{L_2} = \sigma \quad (66)$$

so übergehen die Gl. (62) und (63) in:

$$\left. \begin{aligned} & y \{ \xi_1 (\xi_2 + \sigma \cotg \varphi) + [\xi_2 + \sigma \cotg \varphi + \xi_1 (1 + \sigma)] \sin \nu - (\tau + \sigma) \cos 2\nu \} + \\ & + x \{ [\xi_2 + \sigma \cotg \varphi + \xi_1 (1 + \sigma)] \cos \nu + (\tau + \sigma) \sin 2\nu \} = \\ & = \frac{E_1}{\omega L_1} \{ \xi_2 + \sigma \cotg \varphi + (1 + \sigma) \sin \nu \} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

$$\left. \begin{aligned} & y \{ [\xi_2 + \sigma \cotg \varphi + \xi_1 (1 + \sigma)] \cos \nu + (\tau + \sigma) \sin 2\nu \} - \\ & - x \{ \xi_1 (\xi_2 + \sigma \cotg \varphi) + [\xi_2 + \sigma \cotg \varphi + \xi_1 (1 + \sigma)] \sin \nu - (\tau + \sigma) \cos 2\nu \} = \\ & = \frac{E_1}{\omega L_1} (1 + \sigma) \cos \nu \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Setzt man nun einen bestimmten, unveränderlichen Phasenwinkel  $\varphi$  voraus, so sind — bei konstant gehaltener Primärspannung  $E_1$  — die Koordinaten  $y$  und  $x$  nur für eine Variation von  $\sigma = \frac{L_b}{L_2}$  (variabel wegen  $L_b$ ) veränderlich. Eliminieren wir also  $\sigma$  aus den beiden letzten Gleichungen, so erhalten wir für einen bestimmten Winkel  $\varphi$  eine Beziehung zwischen den Koordinaten  $y$  und  $x$ . Dieses Eliminieren, das eine recht mühsame und langwierige, aber durchaus elementare Rechnung bedeutet, die ich dem Leser überlassen muß, führt zu der Beziehung:

$$(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2 = \varrho^2 \quad (69)$$

wobei die Größen  $\eta$ ,  $\xi$  und  $\varrho$  gegeben sind durch:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{\cos \nu \{ 2 \xi_1 - tg \varphi (1 + 2 \xi_1 \xi_2 - \tau) - 2 \sin \nu (\xi_2 tg \varphi - \tau) \}}{\cos \nu \{ \xi_1^2 + \tau - tg \varphi (\xi_1 - \xi_1 \tau + \xi_2 + \xi_1^2 \xi_2) - 2 \xi_1 \sin \nu (\xi_2 tg \varphi - \tau) \}} \\ \xi &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{\cos^2 \nu (1 + \tau - 2 \xi_2 tg \varphi) + \sin \nu (1 - \tau) (\sin \nu + tg \varphi)}{\cos \nu \{ \xi_1^2 + \tau - tg \varphi (\xi_1 - \xi_1 \tau + \xi_2 + \xi_1^2 \xi_2) - 2 \xi_1 \sin \nu (\xi_2 tg \varphi - \tau) \}} \\ \varrho &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{(1 - \tau) \sqrt{1 + tg^2 \varphi + 2 \sin \nu tg \varphi}}{\cos \nu \{ \xi_1^2 + \tau - tg \varphi (\xi_1 - \xi_1 \tau + \xi_2 + \xi_1^2 \xi_2) - 2 \xi_1 \sin \nu (\xi_2 tg \varphi - \tau) \}} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Da, nach (70) — für ein festgewähltes  $\varphi$  — die Größen  $\eta$ ,  $\xi$  und  $\varrho$  Konstanten sind, so ist (69) die Gleichung eines Kreises, dessen Radius  $\varrho$  und dessen Mittelpunktskoordinaten  $\eta$  und  $\xi$  sind; oder mit anderen Worten: Der Endpunkt des primären Stromvektors bewegt sich auf einem Kreise, dessen Radius und Mittelpunktskoordinaten nicht nur von den inneren Daten des Transformators ( $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\tau$ ,  $\nu$ ), sondern auch von dem Phasenwinkel  $\varphi$  im äußeren sekundären Stromkreis abhängig sind.

Wir nehmen also zur Kenntnis, daß jedem Werte von  $\varphi$  ein besonderer Kreis entspricht.

Da wir nun im folgenden den Allgemeinen Transformator nur in seiner Form als „Induktionsmotor“ behandeln wollen, der Induktionsmotor aber bekanntlich als induktionsfrei belasteter Transformator anzusehen ist, so gilt für unser Problem:

$$\varphi = 0.$$

Dann übergehen aber die Gl. (70) in die Formen:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{2 \xi_1 \cos \nu + \tau \sin 2 \nu}{\cos \nu \{ \xi_1^2 + \tau (1 + 2 \xi_1 \sin \nu) \}}; \\ \xi &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1 + \tau \cos 2 \nu}{\cos \nu \{ \xi_1^2 + \tau (1 + 2 \xi_1 \sin \nu) \}}; \\ \rho &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1 - \tau}{\cos \nu \{ \xi_1^2 + \tau (1 + 2 \xi_1 \sin \nu) \}}; \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

aus denen Kreisradius und Mittelpunktskoordinaten bestimmt sind. Der Kreismittelpunkt liegt also auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung, welche Gerade um einen Winkel  $\gamma$  gegen die Horizontale geneigt ist.  $\gamma$  ist bestimmt aus:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\eta}{\xi} = \frac{2 \xi_1 \cos \nu + \tau \sin 2 \nu}{1 + \tau \cos 2 \nu} \quad (72)$$

Da für  $\varphi = 0$ , auch:  $L_b = 0$ ; und:  $\lambda = L_2$ ; so übergehen die Gl. (59 a) in:

$$\left. \begin{aligned} A &= \omega^2 L_1 L_2 \{ \xi_1 \xi_x + (\xi_x + \xi_1) \sin \nu - \tau \cos 2 \nu \} \\ B &= \omega^2 L_1 L_2 \{ (\xi_x + \xi_1) \cos \nu + \tau \sin 2 \nu \} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

und (60) in:

$$E_1 = J_1 \varepsilon^{-i \varphi_1} \frac{A + i B}{r_x + i \omega L_2 \varepsilon^{-i \nu}}$$

somit:

$$J_1 \varepsilon^{-i \varphi_1} = E_1 \frac{r_x + \omega L_2 \sin \nu + i \omega L_2 \cos \nu}{A + i B} = E_1 \frac{\omega L_2 (\xi_x + \sin \nu + i \cos \nu)}{A + i B}$$

oder:

$$J_1 \varepsilon^{-i \varphi_1} = E_1 \frac{\omega L_2 \sqrt{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \varepsilon^{i \left( \operatorname{arctg} \frac{\cos \nu}{\xi_x + \sin \nu} - \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \right)} \quad (74a)$$

Und führt man den Nenner nach (73) aus, so wird:

$$J_1 = \frac{E_1}{\omega L_1} \sqrt{\frac{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu}{\xi_1^2 \xi_x^2 + (\xi_1 + \xi_x)^2 + \tau^2 - 2 \xi_1 \xi_x \tau \cos 2 \nu + 2 (\xi_1 + \xi_x) (\xi_1 \xi_x + \tau) \sin \nu}} \quad (74)$$

Nach (74a) ist:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{B}{A} - \arctg \frac{\cos \nu}{\xi_x + \sin \nu}; \quad \text{also:} \quad tg \varphi_1 = \frac{\frac{B}{A} - \frac{\cos \nu}{\xi_x + \sin \nu}}{1 + \frac{B}{A} \frac{\cos \nu}{\xi_x + \sin \nu}}$$

oder:

$$tg \varphi_1 = \frac{B(\xi_x + \sin \nu) - A \cos \nu}{A(\xi_x + \sin \nu) + B \cos \nu}; \quad (75a)$$

Setzt man die Werte für  $A$  und  $B$  aus (73) ein, so wird:

$$tg \varphi_1 = \frac{\cos \nu (\tau + \xi_x^2 + 2 \tau \xi_x \sin \nu)}{\xi_1 + \xi_x - \xi_x (\tau \cos 2 \nu - \xi_1 \xi_x) + \sin \nu (\tau + \xi_x^2 + 2 \xi_1 \xi_x)} \quad (75)$$

Aus (74) und (75) ist der Primärstrom nach Effektivwert und Phase gegeben. In diesen beiden Gleichungen sehen wir als einzige Veränderliche die Größe  $\xi_x$ . Diese ist nach (65):

$$\xi_x = \xi_2 + \frac{r_b}{\omega L_2};$$

also mit  $r_b$  veränderlich.

Der gesamte, jeweilige Widerstand  $r_x$  des Sekundärkreises war gegeben durch

$$r_x = r_2 + r_b$$

Bei dem asynchronen Wechselstrommotor, den wir ja hier behandeln, ist aber bekanntlich

$$r_x = r_2 \frac{f}{f_s}$$

wenn  $f$  die Frequenz der aufgedrückten Spannung und  $f_s$  die Schlüpfungsfrequenz ist. Es ist somit:

$$r_b = r_2 \left( \frac{f}{f_s} - 1 \right) = r_2 \frac{f - f_s}{f_s} \quad (76)$$

Bei ideellem Leerlauf ist die Schlüpfung und daher  $f_s = 0$ ;

somit:  $r_b = \infty$ ; und daher:  $r_x = \infty$ ;  $\xi_x = \infty$ .

Ist der Rotor festgekeilt, dann ist:

$$f_s = f; \quad \text{somit:} \quad r_b = 0; \quad r_x = r_2; \quad \xi_x = \xi_2$$

Dieser Fall entspricht also dem sekundären Kurzschluß.

Treibt man endlich den Rotor von außen übersynchron an, so wird  $f_s$  negativ, und würde man ihm unendlich große Drehzahl geben, so würde nach (76)

$$r_b = -r_2; \quad \text{somit:} \quad r_x = 0; \quad \xi_x = 0.$$

Dasselbe gilt, wenn man den Rotor entgegen der synchronen Drehrichtung mit unendlich hoher Drehzahl antreibt; dann wird:  $f_s = +\infty$ , und ebenfalls:

$$r_b = -r_2; \quad r_x = 0; \quad \xi_x = 0.$$

Für diese drei besonderen Werte von  $\xi_x$  ergibt sich nun aus (74) und (75) der Primärstrom nach Amplitude und Phase mit:

Für Leerlauf, also:  $\xi_x = \infty$

$$\left. \begin{aligned} J_0 &= \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}} \\ \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{\cos \nu}{\xi_1 + \sin \nu} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Für Kurzschluß, also:  $\xi_x = \xi_2$

$$\left. \begin{aligned} J_k &= \frac{E_1}{\omega L_1} \sqrt{\frac{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu}{\xi_1^2 \xi_2^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2 + \tau^2 - 2 \xi_1 \xi_2 \tau \cos 2\nu + 2(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 \xi_2 + \tau) \sin \nu}} \\ \operatorname{tg} \varphi_k &= \frac{\cos \nu (\tau + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \tau \sin \nu)}{\xi_1 + \xi_2 - \xi_2 (\tau \cos 2\nu - \xi_1 \xi_2) + \sin \nu (\tau + \xi_2^2 + 2 \xi_1 \xi_2)} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Für unendlich hohe Drehzahl, also:  $\xi_x = 0$ ;

$$\left. \begin{aligned} J_\infty &= \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu}} \\ \operatorname{tg} \varphi_\infty &= \frac{\tau \cos \nu}{\xi_1 + \tau \sin \nu} \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Setzt man in (77) und (78)  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ; d. h.:  $r_1 = r_2 = 0$ , so ergeben sich die Werte des Primärstromes für den ideellen, d. h. widerstandsfreien Leerlauf und Kurzschluß mit:

$$\left. \begin{aligned} J_{0i} &= \frac{E_1}{\omega L_1}; & \operatorname{tg} \varphi_{0i} &= \operatorname{cotg} \nu; & \varphi_{0i} &= \frac{\pi}{2} - \nu \\ J_{ki} &= \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{\tau}; & \operatorname{tg} \varphi_{ki} &= \operatorname{cotg} \nu; & \varphi_{ki} &= \frac{\pi}{2} - \nu \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Die ideellen Leerlauf- und Kurzschlußströme fallen also in „eine“ Richtung und ihr Größenverhältnis ist durch den totalen Streukoeffizienten  $\tau$  gegeben.

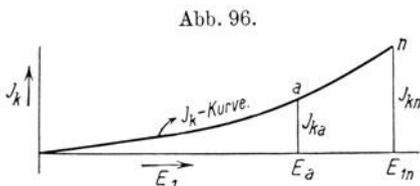
Wir wollen hier gleich betonen, daß die ideellen Betriebspunkte theoretisch natürlich nicht auf dem Kreise liegen, da ja, für  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , nach (71) der Kreisradius  $\rho$  sich entsprechend geändert hat.

Nach diesen Erwägungen wollen wir an die Konstruktion des Kreises nach Gl. (71) gehen. Zur Benutzung dieser Gleichungen ist die Kenntnis von  $\xi_1$ ,  $L_1$ ,  $\nu$  und  $\tau$  notwendig.

Diese vier Größen sind nun leicht durch Messungen zu erhalten.

Wir messen den primären Widerstand  $r_1$  und dann, bei konstant gehaltener Primärspannung, Leerlauf- und Kurzschlußstrom und -leistung, wodurch wir  $J_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $J_k$ ,  $\varphi_k$  erhalten. Hier ist zu bemerken, daß sich die Leerlaufmessung natürlich ohne weiteres mit der Betriebsspannung ausführen läßt, nicht aber — im allgemeinen — die Kurzschlußmessung. Nur bei ganz kleinen Motoren ist es zulässig, bei festgekeiltem, kurzgeschlossenem Rotor, dem Stator die Betriebsspannung aufzudrücken. Bei größeren Motoren würde dieses Verfahren ein vernichtendes Anwachsen der Stromstärke zur Folge haben. Man hilft sich bekanntlich so, daß man, mit einer sehr kleinen Spannung beginnend, die Messung macht, dann die Spannung allmählich steigert, bis die Stromstärke den zulässigen Höchstwert erreicht hat, und nun aus dem Verlauf der Strom- und Leistungskurven jene Werte der Stromstärke und Stromphase extrapoliert, welche der normalen Betriebsspannung entsprechen. In dieser Extrapolation liegt natürlich wieder

eine bemerkenswerte Ungenauigkeit. Die  $J_k$ -Kurve verläuft, nach Abb. 96, nur im Anfang als lineare Funktion der Spannung, wird aber später konvex gegen die Abszisse. Wenn man also bei der Strommessung z. B. nur bis zu einer Spannung  $E_a$  und einem Strome  $J_{ka}$  gelangen konnte, so muß man das Kurvenstück  $an$ , bis zur erreichten Normalspannung  $E_{1n}$  extrapolieren. Es ist daher zu empfehlen, mit der Spannung und dem Kurzschlußstrom so hoch als möglich zu gehen, um die Extrapolation auf ein möglichst kurzes Stück zu beschränken.



Mit diesen gemessenen Werten von  $J_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $J_k$ ,  $\varphi_k$  ist es nun leicht, die Größen  $\xi_1$ ,  $L_1$ ,  $\nu$  und  $\tau$  abzuleiten:

Aus (77) folgt:

$$\sin \varphi_0 = \frac{\cos \nu}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}};$$

also:

$$\frac{J_0}{\sin \varphi_0} = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{\cos \nu};$$

und daher:

$$\cos \nu = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{\sin \varphi_0}{J_0}; \quad \sin \nu = \frac{1}{\omega L_1 J_0} \sqrt{\omega^2 L_1^2 J_0^2 - E_1^2 \sin^2 \varphi_0} \quad (81)$$

Führen wir im Ausdruck für  $tg \varphi_0$  {(77)} den Wert:  $\xi_1 = \frac{r_1}{\omega L_1}$  ein, so folgt:

$$tg \varphi_0 = \frac{\cos \nu \cdot \omega L_1}{r_1 + \omega L_1 \sin \nu}$$

und aus (81) die Werte für  $\cos \nu$  und  $\sin \nu$  eingesetzt, ergibt

$$tg \varphi_0 = \frac{E_1 \sin \varphi_0}{r_1 J_0 + \sqrt{\omega^2 L_1^2 J_0^2 - E_1^2 \sin^2 \varphi_0}} = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}$$

oder:

$$E_1 \cos \varphi_0 = r_1 J_0 + \sqrt{\omega^2 L_1^2 J_0^2 - E_1^2 \sin^2 \varphi_0}$$

somit:

$$\omega L_1 = \frac{\sqrt{E_1^2 + r_1^2 J_0^2 - 2 E_1 r_1 J_0 \cos \varphi_0}}{J_0} \quad (82)$$

woraus  $L_1$  bestimmt ist und damit:  $\xi_1 = \frac{r_1}{\omega L_1}$

Aus (81) folgt nun sofort:

$$\left. \begin{aligned} \cos \nu &= \frac{E_1 \sin \varphi_0}{\sqrt{E_1^2 + r_1^2 J_0^2 - 2 E_1 r_1 J_0 \cos \varphi_0}}; \\ \sin \nu &= \sqrt{\frac{E_1^2 \cos^2 \varphi_0 + r_1^2 J_0^2 - 2 E_1 r_1 J_0 \cos \varphi_0}{E_1^2 + r_1^2 J_0^2 - 2 E_1 r_1 J_0 \cos \varphi_0}} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

woraus  $\nu$  bestimmt ist.

Aus (77) ergibt sich nun auch mit  $\xi_1 = 0$ ; d. h.  $r_1 = 0$  der ideale Leerlaufstrom:

$$J_{0i} = \frac{E_1}{\omega L_1}$$

Nun fragen wir nach  $\tau$ , den Streukoeffizienten.

Nach Abb. 95 war:

$$y = J_1 \cos \varphi_1; \quad x = J_1 \sin \varphi_1$$

Schreiben wir also die Kreisgleichung (69) für den Kurzschlußpunkt an, so lautet sie:

$$(J_k \cos \varphi_k - \eta)^2 + (J_k \sin \varphi_k - \xi)^2 = \varrho^2$$

Für den Leerlaufpunkt lautet sie:

$$(J_0 \cos \varphi_0 - \eta)^2 + (J_0 \sin \varphi_0 - \xi)^2 = \varrho^2$$



Koordinatenachsen, auf denen wir  $\eta$  und  $\xi$  auftragen, um zum Kreismittelpunkt  $M$  zu gelangen, aus dem wir mit  $\rho$  den Kreis beschreiben.

Da der Leerlauf und der Kurzschlußpunkt, das sind die Punkte  $A_0$  und  $A_k$ , auf dem Kreise liegen müssen, haben wir eine sichere Kontrolle für die Richtigkeit unserer Rechnung und Zeichnung. Wir ziehen aus  $O$  zwei Strahlen, unter den Phasenwinkeln  $\varphi_0$  und  $\varphi_k$  gegen die Vertikale geneigt, und bringen sie in den Punkten  $A_0$  und  $A_k$  zum Schnitt mit dem Kreise. Dann muß  $OA_0 = J_0$ ; und  $OA_k = J_k$ ; sein. Wir konnten auch den Kreis so zeichnen, daß wir  $J_0$  und  $J_k$ , unter den Winkeln  $\varphi_0$  und  $\varphi_k$  geneigt, auftragen, so die Kreispunkte  $A_0$  und  $A_k$  erhielten, dann unter dem Winkel  $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}$  gegen die Horizontale den Strahl  $OZ$  zogen und diesen, mit der Halbierenden  $ss$  der Sehne  $A_0A_k$ , in  $M$  zum Schnitte brachten.

#### Der Sekundärstrom.

Nach Gl. (58) ist:

$$J_2 \varepsilon^{-i\varphi_2} = -i J_1 \varepsilon^{-i\varphi_1} \frac{\omega M \varepsilon^{-i\nu}}{r_x + i\omega \lambda \varepsilon^{-i\nu}}$$

Da jetzt:  $\lambda = L_2$ ; so ergibt sich, wenn wir:

$$-i = \varepsilon^{-i\frac{\pi}{2}}$$

eingeführen:

$$J_2 \varepsilon^{-i\varphi_2} = J_1 \varepsilon^{-i\varphi_1} \frac{\omega M \cdot \varepsilon^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \nu\right)}}{\sqrt{r_x^2 + \omega^2 L_2^2 + 2 r_x \omega L_2 \sin \nu}} \cdot \varepsilon^{-i \operatorname{arctg} \frac{\omega L_2 \cos \nu}{r_x + \omega L_2 \sin \nu}}$$

oder im Nenner  $\omega^2 L_2^2$  zum Faktor herausgehoben:

$$J_2 \varepsilon^{-i\varphi_2} = J_1 \frac{M}{L_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu}} \cdot \varepsilon^{-i\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2} + \nu + \operatorname{arctg} \frac{\omega L_2 \cos \nu}{r_x + \omega L_2 \sin \nu}\right)} \quad (85)$$

Es ist also:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} + \nu + \operatorname{arctg} \frac{\cos \nu}{\xi_x + \sin \nu} \quad (86)$$

Für den Punkt unendlicher Drehzahl wird  $\xi_x = 0$ ; daher

$$\operatorname{arctg} \frac{\cos \nu}{\xi_x + \sin \nu} = \operatorname{arctg} (\cot \nu) = \frac{\pi}{2} - \nu$$

und somit:

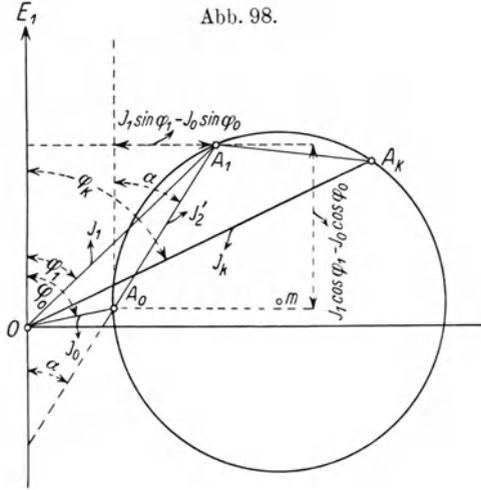
$$\varphi_{2\infty} = \varphi_{1\infty} + \pi$$

D. h.: Für den vollkommen widerstandsfreien Sekundärkreis fällt die Richtung des Sekundärstromes in die dem Primärstrom entgegengesetzte.

Wir wählen nun einen beliebigen Betriebspunkt  $A_1$  und wollen uns die Bedeutung der Strecke  $\overline{A_1 A_0}$  klar machen.

Aus  $\triangle O A_0 A_1$  (s. Abb. 98) folgt:

$$\overline{A_0 A_1}^2 = J_1^2 + J_0^2 - 2 J_1 J_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_1)$$



Setzt man hier für  $J_1$ ,  $J_0$ ,  $\varphi_1$  und  $\varphi_0$  die berechneten Werte ein, so ergibt die zwar ganz elementare, aber mühsame Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} \overline{A_0 A_1}^2 &= E_1^2 \frac{\omega^4 L_1^3 L_2^3 (1 - \tau)^2}{\omega^2 L_1^3 (A^2 + B^2) (1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu)} = \\ &= E_1^2 \frac{\omega^2 L_2^3 (1 - \tau)^2}{(A^2 + B^2) (1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu)} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Wobei die Größen  $A$  und  $B$  durch Gl. (73) gegeben sind.

Nach Gl. (74 a) ist aber:

$$J_1^2 = \frac{E_1^2}{A^2 + B^2} \omega^2 L_2^3 (1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu)$$

und hieraus:

$$\frac{E_1^2}{A^2 + B^2} \omega^2 L_2^3 = \frac{J_1^2}{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu}$$

Setzen wir diesen Wert in (87) ein, so folgt:

$$\overline{A_0 A_1}^2 = J_1^2 \frac{1}{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu} \cdot \frac{(1 - \tau)^2}{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}$$

Aus (85) aber folgt:

$$J_1^2 = J_2^2 \frac{L_2^3}{M^2} (1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu) \quad (88a)$$

Somit:

$$\overline{A_0 A_1^3} = J_2^2 \frac{L_2^2}{M^2} \frac{(1 - \tau)^2}{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}$$

und wegen:

$$1 - \tau = \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

folgt:

$$\overline{A_0 A_1^3} = J_2^2 \frac{M^2}{L_1^2} \frac{1}{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}$$

oder:

$$J_2 = \overline{A_0 A_1} \frac{L_1}{M} \sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu} \quad (88)$$

Da der Faktor:

$$\frac{L_1}{M} \sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}$$

konstant ist, so besagt (88), daß die Strecke  $\overline{A_0 A_1}$  dem Sekundärstrom proportional ist und daher als sein Maß gelten kann. Sie mißt den Sekundärstrom im Maßstab des Primärstromes, ist also der, auf den Primärkreis reduzierte Sekundärstrom, den wir  $J_2'$  benennen wollen.

Um aus der Strecke  $\overline{A_0 A_1}$  — dem Diagramm in Ampère entnommen — den Sekundärstrom  $J_2'$  zu erhalten, hat man also  $\overline{A_0 A_1}$  (Ampère) mit dem Proportionalitätsfaktor

$$\frac{L_1}{M} \sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}$$

zu multiplizieren. Wir kommen später auf die Bestimmung des  $M$  zurück.

Wir haben uns dadurch überzeugt, daß  $\overline{A_0 A_1}$  ein „exaktes“ Maß für den Effektivwert des, auf den Primärkreis reduzierten, Sekundärstromes ist.

Nun müssen wir fragen, ob auch die Lage von  $\overline{A_1 A_0}$  die richtige, sekundäre Stromphase ergibt.

Die Gerade  $A_1 A_0$  ist im Diagramm unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Richtung  $O\mathfrak{E}_1$  der Primärspannung geneigt. Nach Abb. 98 ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_1 \sin \varphi_1 - J_0 \sin \varphi_0}{J_1 \cos \varphi_1 - J_0 \cos \varphi_0}$$

Setzt man die Werte ein, so ergibt die mühsame Rechnung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(1 - \tau) \cos \nu \{ \tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_x (1 + \xi_1 \sin \nu) \}}{(1 - \tau) \{ \xi_1 (1 + \tau) + \sin \nu (\tau + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \xi_x) + \xi_x (1 - \xi_1^2 \cos 2\nu) \}} \quad (89)$$

Nennen wir in (86)

$$\varphi_1 + \frac{\pi}{2} + \nu = \delta \quad (90)$$

so wird nach (86)

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \left( \delta + \operatorname{arctg} \frac{\cos \nu}{\xi_x + \sin \nu} \right) = \frac{(\xi_x + \sin \nu) \operatorname{tg} \delta + \cos \nu}{\xi_x + \sin \nu - \cos \nu \operatorname{tg} \delta} \quad (91)$$

Nun ist nach (90)

$$\operatorname{tg} \delta = -\operatorname{cotg} (\varphi_1 + \nu) = -\frac{\operatorname{cotg} \varphi_1 \operatorname{cotg} \nu - 1}{\operatorname{cotg} \varphi_1 + \operatorname{cotg} \nu}$$

Setzt man aus (75a) den Wert für  $\operatorname{cotg} \varphi_1$  ein, so wird:

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{\operatorname{cotg} \nu \{A (\xi_x + \sin \nu) + B \cos \nu\} - \{B (\xi_x + \sin \nu) - A \cos \nu\}}{\operatorname{cotg} \nu \{B (\xi_x + \sin \nu) - A \cos \nu\} + \{A (\xi_x + \sin \nu) + B \cos \nu\}}$$

Führt man hier für  $A$  und  $B$  die Werte aus (73) ein und setzt dann  $\operatorname{tg} \delta$  in (91), so ergibt diese abermals sehr mühsame Rechnung:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\cos \nu (\tau - \xi_1 \xi_x)}{\xi_1 + \xi_x + \sin \nu (\tau + \xi_1 \xi_x)} \quad (92)$$

während nach (89)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \nu \{ \tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_x (1 + \xi_1 \sin \nu) \}}{\xi_1 (1 + \tau) + \sin \nu (\tau + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \xi_x) + \xi_x (1 - \xi_1^2 \cos 2\nu)} \quad (93)$$

Diese beiden letzten Gleichungen beweisen klar, daß die „Lage“ von  $\overline{A_1 A_0}$  der sekundären Stromphase nicht entspricht.

Untersuchen wir die Abweichung der beiden Richtungen, indem wir  $\operatorname{tg} (\varphi_2 - \alpha)$  berechnen, so ergibt die langwierige Rechnung:

$$\operatorname{tg} (\varphi_2 - \alpha) = \frac{\xi_1 \cos \nu \{ \xi_1^2 + \tau^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu + \xi_x^2 (1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu) + (1 + \xi_1 \sin \nu) \{ \xi_1^2 + \tau^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu + \xi_x^2 (1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu) + 2 \xi_x (\xi_1 + \xi_1^2 \sin \nu + \tau \sin \nu - \xi_1 \tau \cos 2\nu) \}}{+ 2 \xi_x (\xi_1 + \xi_1^2 \sin \nu + \tau \sin \nu - \xi_1 \tau \cos 2\nu)}$$

und da sich die Klammerglieder  $\{ \}$  in Zähler und Nenner heben, folgt

$$\operatorname{tg} (\varphi_2 - \alpha) = \frac{\xi_1 \cos \nu}{1 + \xi_1 \sin \nu} \quad (94)$$

Nennen wir:

$$\varphi_2 - \alpha = \beta \quad (95)$$

so ist dieser Winkel  $\beta$  der Phasenfehler des Sekundärstromes im Diagramm.

Gl. (94) zeigt uns das sehr bemerkenswerte Resultat, daß dieser Phasenfehler für alle Belastungen konstant ist. Ferner, daß der Fehler an und für sich „klein“ und für den Transformator mit Eisen kleiner ist, als für den ruhenden Luft-Transformator, für den ja  $\nu = 0$  ist.

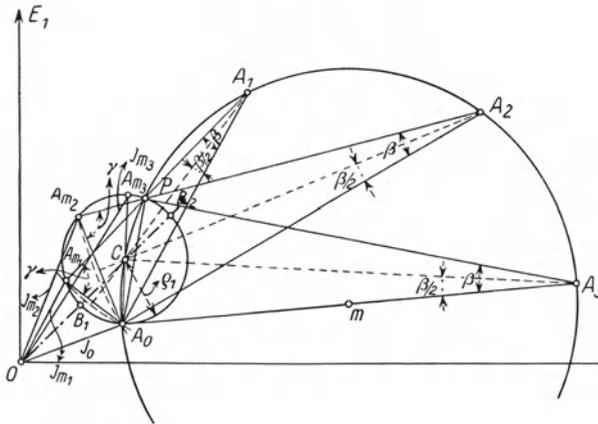
Der Magnetisierungs-Strom.

Wir fragen nun für einen beliebigen Belastungszustand nach dem jeweiligen Magnetisierungsstrom. —

Da  $\overline{A_1 A_0}$  den auf den Primärkreis reduzierten Sekundärstrom  $J'_2$ , der „Größe“ nach, bedeutet, so ist es klar, daß die geometrische Summe der Strecken  $J_1$  und  $\overline{A_1 A_0}$  jenen magnetisierenden Strom  $J_m$  bedeutet, der die resultierenden Ampèrewindungen schafft.

$J_1$ , der Primärstrom, ist im Diagramm einwandfrei nach Größe und Richtung durch  $\overline{O A_1}$  gegeben;  $J'_2$  ist durch  $\overline{A_1 A_0}$  nur der Größe, nicht

Abb. 99.



aber der Richtung nach gegeben. Um die wahre Richtung zu erhalten, haben wir die Strecke  $\overline{A_1 A_0}$  mit dem Drehpunkt  $A_1$  um den Winkel  $\varphi_2 - \alpha = \beta$  nach links zu drehen. Der Punkt  $A_0$  gelangt bei dieser Drehung nach  $A_{m1}$  und wir erhalten in dem Vektor  $\overline{O A_{m1}} = J_{m1}$  den jeweiligen Summen- oder Magnetisierungsstrom.

Die Lage des Endpunktes  $A_m$  dieses Magnetisierungsstromes  $J_m$  ist nun leicht anzugeben. Er liegt auf einem kleinen Kreise, dessen Mittelpunkt und Radius bestimmbar sind (s. Abb. 99).

Beweis: Zur Konstruktion der Punkte  $A_m$  bewegt sich die Spitze  $A$  eines Winkels  $\beta$  auf dem großen Kreise so, daß der eine Schenkel des Winkels durch den festen Punkt  $A_0$  geht; es muß daher der zweite Schenkel ebenfalls durch einen und denselben festen Kreis- punkt  $P$  gehen, da ja gleiche Peripheriewinkel auf derselben Sehne stehen. Ziehen wir die Schlußlinien  $A_0 A_m$  der Dreiecke  $AA_0 A_m$ , so finden wir wegen der Ähnlichkeit dieser gleichschenkligen Dreiecke (gleicher

Spitzenwinkel  $\beta$  bei  $A$ ) bei  $A_m$  stets denselben Winkel  $\gamma$ . Die Punkte  $A_m$  sind also so entstanden, daß über der festen Linie  $A_0P$  ein konstanter Winkel  $\gamma$  sich so bewegt, daß seine Schenkel stets durch die beiden Endpunkte  $A_0$  und  $P$  gehen. Die Spitze dieses Winkels (Punkt  $A_m$ ) muß daher nach dem Satze von den Peripheriewinkeln auf einem Kreise liegen.

Der Mittelpunkt  $C$  dieses Kreises muß auf der jeweiligen Winkelhalbierenden liegen (die gestrichelten Linien). Er muß aber auch auf dem großen Kreise selbst liegen, da die sämtlichen Winkelhalbierenden durch denselben Punkt des großen Kreises gehen müssen; denn jetzt bewegt sich der konstante Peripheriewinkel  $\beta/2$  mit der Spitze  $A$  auf dem großen Kreise. Um also  $C$  zu finden und den Radius  $\varrho_1$  des kleinen Kreises zu berechnen, ziehen wir einfach den Durchmesser  $A_0MA_3$ , tragen bei  $A_3$  den Winkel  $\beta/2$  an und bringen den gestrichelten Schenkel in  $C$  mit dem großen Kreise zum Schnitt. Es ist dann:

$$\overline{CA_0} = \varrho_1 = 2\varrho \sin \frac{\beta}{2}$$

Da nach Gl. (94)

$$\cos \beta = \frac{1 + \xi_1 \sin \nu}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + 2\xi_1 \sin \nu}}$$

und bekanntlich:

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos \beta};$$

so folgt:

$$\varrho_1 = \varrho \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \xi_1^2 + 2\xi_1 \sin \nu} - (1 + \xi_1 \sin \nu)}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + 2\xi_1 \sin \nu}}} \quad (96)$$

Abb. 99 zeigt — der Deutlichkeit wegen — den kleinen Kreis in sehr übertriebener Größe.

Wegen der geringen Größe von  $\xi_1$  und  $\nu$  können wir die Wurzel binomisch entwickeln und erhalten mit genügender Genauigkeit

$$\varrho_1 = \varrho \sqrt{2} \sqrt{\frac{\frac{\xi_1^2}{2}}{1 + \frac{\xi_1^2}{2} + \xi_1 \sin \nu}} = \varrho \frac{\xi_1}{1 + \frac{\xi_1^2}{4} + \frac{\xi_1}{2} \sin \nu} \quad (96 a)$$

Für den ruhenden Luft-Transformator folgt dann wegen:  $\nu = 0$ ;

$$\varrho_1 = \varrho \frac{\xi_1}{1 + \frac{\xi_1^2}{4}} \quad (96 b)$$

Wir sehen jedenfalls, daß der Radius des kleinen Kreises vor allem von  $\xi_1$  und damit von  $r_1$  dem primären Widerstand abhängig ist.

Die Existenz dieses kleinen Kreises beantwortet nun leicht die alte Frage aus der Werdezeit der Transformatoren, die Frage nach der Variation des Magnetisierungsstromes bei veränderlicher Belastung.

Das bekannte Stromdreieck  $OA_0A$  mit der „konstanten“ Seite  $OA_0$  existiert also „theoretisch“ nicht. Es existiert für jeden Belastungszustand ein Stromdreieck  $OA_mA$ , dessen „drei“

Seiten sich von einem Belastungszustand zum anderen ändern, wobei die Punkte  $A$  und  $A_m$  auf Kreisen wandern.

D. h. mit anderen Worten: Der Magnetisierungsstrom ist — auch beim Lufttransformator — nicht konstant.

Der Strahl  $OC$  (strichpunktiert in Abb. 99) gibt auf dem kleinen Kreise die Punkte des minimalen ( $B_1$ ) und des maximalen ( $B_2$ ) Magnetisierungsstromes an. Diese beiden Ströme unterscheiden

sich in der Größe um den Durchmesser des kleinen Kreises, der ja im Ampèremaßstab des Diagramms seine bestimmte Wertigkeit hat.

Für einen beliebigen Belastungspunkt ergibt sich jetzt der Magnetisierungsstrom nach Abb. 100 mit:

$$J_m^2 = J_1^2 + J_2'^2 - 2J_1J_2' \cos(\varphi_2' - \varphi_1)$$

Der Winkel  $\varphi_2'$  im Diagramm ist:

$$\varphi_2' = \varphi_2 - \pi$$

denn  $\varphi_2$  ist die „wahre“ Phasendifferenz zwischen  $e_1$  und  $i_2$ ; und da nach (86):

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} + \nu + \operatorname{arctg} \frac{\cos \nu}{\xi_x + \sin \nu}$$

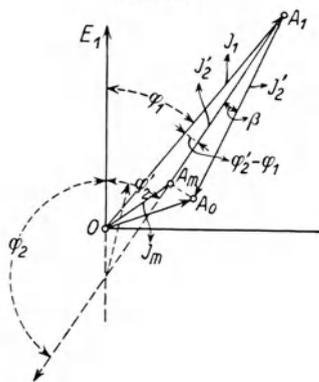
so folgt:

$$\varphi_2' - \varphi_1 = \nu + \operatorname{arctg} \frac{\cos \nu}{\xi_x + \sin \nu} - \frac{\pi}{2}$$

und daher:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_2' - \varphi_1) &= \sin \left( \nu + \operatorname{arctg} \frac{\cos \nu}{\xi_x + \sin \nu} \right) = \\ &= \sin \nu \frac{\xi_x + \sin \nu}{\sqrt{1 + \xi_x^2 + 2\xi_x \sin \nu}} + \cos \nu \frac{\cos \nu}{\sqrt{1 + \xi_x^2 + 2\xi_x \sin \nu}} \end{aligned}$$

Abb. 100.



oder

$$\cos(\varphi'_2 - \varphi_1) = \frac{1 + \xi_x \sin \nu}{\sqrt{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu}}$$

Somit:

$$J_m^2 = J_1^2 \left\{ 1 + \left( \frac{J'_2}{J_1} \right)^2 - 2 \frac{J'_2}{J_1} \frac{1 + \xi_x \sin \nu}{\sqrt{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu}} \right\}$$

Da nach (88)

$$J'_2 = \overline{A_0 A_1} = J_2 \frac{M}{L_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}}$$

und nach (88a)

$$J_2 = \frac{M}{L_1} J_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu}}$$

so folgt

$$J_m^2 = J_1^2 \left\{ 1 + \frac{M^4}{L_1^2 L_2^2} \left( \frac{1}{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu} \right) \left( \frac{1}{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu} \right) - 2 \frac{M^2}{L_1 L_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}} \frac{1 + \xi_x \sin \nu}{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu} \right\}$$

Führen wir ein, nach (51),

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - \tau$$

und setzen in Zukunft

$$\sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu} = n_1; \quad \sqrt{1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu} = n_x \quad (97)$$

so wird:

$$J_m^2 = \frac{J_1^2}{n_1^2 n_x^2} \{ n_1^2 n_x^2 + (1 - \tau)^2 - 2(1 - \tau)(1 + \xi_x \sin \nu) n_1 \}$$

Führt man aus Gl. (74) den Wert für  $J_1^2$  ein, und setzt dort:

$$\xi_1^2 \xi_x^2 + (\xi_1 + \xi_x)^2 + \tau^2 - 2 \xi_1 \xi_x \tau \cos 2\nu + 2(\xi_1 + \xi_x)(\xi_1 \xi_x + \tau) \sin \nu = N_x^2 \quad (98)$$

so wird zunächst in (74):

$$J_1^2 = \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{n_x^2}{N_x^2}$$

und daher:

$$J_m^2 = \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{1}{n_1^2} \frac{n_1^2 n_x^2 + (1 - \tau)^2 - 2(1 - \tau)(1 + \xi_x \sin \nu) n_1}{N_x^2}$$

also nach (77) wegen:

$$\frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{1}{n_1^2} = J_0^2;$$

wird:

$$J_m^2 = J_0^2 \frac{n_1^2 n_x^2 + (1 - \tau)^2 - 2(1 - \tau)(1 + \xi_x \sin \nu) n_1}{N_x^2} \quad (99)$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Magnetisierungsstrom  $J_m$  von dem Leerlaufstrom  $J_0$  abweicht, wenn sich die Belastung (charakterisiert durch  $n_x, N_x$ ) ändert. Für Leerlauf, d. h.  $\xi_x = \infty$  ergibt (99)

$$J_m = J_0$$

Für jeden anderen endlichen Wert von  $\xi_x$  wird

$$J_m \geq J_0$$

ausgenommen jenen Wert von  $\xi_x$ , der Zähler und Nenner des Bruches in (99) gleichmacht. Setzt man also:

$$N_x^2 = n_1^2 n_x^2 + (1 - \tau)^2 - 2(1 - \tau)(1 + \xi_x \sin \nu) n_1$$

und führt für  $N_x^2, n_1^2$  und  $n_x^2$  aus (98) und (97) die Werte ein, so ergibt sich

$$\xi_x = \frac{1 - \tau + \xi_1 \sin \nu - n_1(1 - \tau) - \xi_1 \tau \sin \nu}{\xi_1 - \xi_1 \tau \cos 2\nu + \tau \sin \nu - \sin \nu - 2\xi_1 \sin^2 \nu + n_1(1 - \tau) \sin \nu}$$

Mit Rücksicht auf den kleinen Wert von  $\xi_1$  können wir nun  $n_1$  binomisch entwickeln, indem wir setzen:

$$n_1 = 1 + \frac{\xi_1^2}{2} + \xi_1 \sin \nu$$

und erhalten hiermit:

$$\xi_x = - \frac{\xi_1}{2 \cos^2 \nu + \xi_1 \sin \nu}$$

als jene Belastung, für die der Magnetisierungsstrom gleich dem Leerlaufstrom ist. Da  $\xi_x$  negativ ist, so ist dies ein Punkt außerhalb der Motorzone.

### Die Sekundärspannung.

Nach Abb. 97 ist:

$$\overline{A_1 A_k^2} = J_1^2 + J_k^2 - 2J_1 J_k \cos(\varphi_k - \varphi_1)$$

Führt man für  $J_1, J_k, \varphi_1$  und  $\varphi_k$  die Werte aus (74), (78) und (75) ein, so ergibt die abermals sehr mühsame Zwischenrechnung:

$$\overline{A^1 A_k^2} = \frac{J_1^2 \omega^4 L_1^2 L_2^2}{A_2^2 + B_2^2} \cdot \frac{(1 - \tau)^2 (\xi_x - \xi_2)^2}{1 + \xi_x^2 + 2\xi_x \sin \nu} \quad (100)$$

worin  $A_2$  und  $B_2$  aus (73) gegeben sind, wenn man dort  $\xi_x = \xi_2$  setzt.

Führen wir aus (88a) für  $J_1^2$  den Wert ein, so wird:

$$\overline{A_1 A_k^2} = J_2^2 \frac{L_2^2}{M^2} \omega^4 L_1^2 L_2^2 \frac{1}{A_2^2 + B_2^2} (1 - \tau)^2 (\xi_x - \xi_2)^2$$

Nun ist:

$$\xi_x - \xi_2 = \frac{r_2 + r_b}{\omega L_2} - \frac{r_2}{\omega L_2} = \frac{r_b}{\omega L_2}$$

Führt man für  $A_2$  und  $B_2$  die Werte ein, so ergibt sich :

$$\overline{A_1 A_k}^2 = J_2^2 \frac{L_2^2}{M^2} \frac{\omega^4 L_1^2 L_3^2}{\omega^4 L_1^2 L_3^2} \frac{r_b^2}{\omega^2 L_2^2} \cdot \frac{(1 - \tau)^2}{\xi_1 \xi_2^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2 + \tau^2 - 2 \xi_1 \xi_2 \tau \cos 2\nu + 2(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 \xi_2 + \tau) \sin \nu}$$

Setzen wir endlich nach (51)

$$\frac{1 - \tau}{\omega M} = \frac{x^2}{\omega M} = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{1}{\omega L_1} \frac{M}{L_2}$$

und :

$$\xi_1^2 \xi_2^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2 + \tau^2 - 2 \xi_1 \xi_2 \tau \cos 2\nu + 2(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 \xi_2 + \tau) \sin \nu = N_2^2 \quad (101)$$

so wird :

$$\overline{A_1 A_k}^2 = J_2^2 r_b^2 \frac{(1 - \tau)^2}{\omega^2 M^2} \frac{1}{N_2^2} = J_2^2 r_b^2 \frac{1}{\omega^2 L_1^2} \frac{M^2}{L_2^2} \frac{1}{N_2^2}$$

und da ja :

$$J_2 r_b = E_2 = \text{sekundäre Klemmenspannung,}$$

so folgt :

$$\overline{A_1 A_k} = E_2 \frac{M}{\omega L_1 L_2} \frac{1}{N_2} \quad (102)$$

D. h. : Die Strecke  $\overline{A_1 A_k}$  im Diagramm gibt ein Maß für die Sekundärspannung, da sie ihr proportional ist.

Nach Gl. (78) war :

$$J_k = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{N_2} \sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu} \quad (103)$$

Diese Gleichung sagt uns zunächst, daß wir:  $J_k = \overline{O A_k}$  (im Diagramm) als das natürliche Maß der Primärspannung  $E_1$  ansehen können, da wir in dieser Gleichung  $E_1$  nur mit Konstanten multipliziert finden.

Es folgt aus (103)

$$\omega L_1 N_2 = \frac{E_1}{J_k} \sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu}$$

und dies in (102) gesetzt, ergibt :

$$\overline{A_1 A_k} = E_2 \frac{J_k}{E_1} \frac{M}{L_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu}}$$

Da wir  $J_k$  als das Maß von  $E_1$  ansehen, so folgt :

$$\overline{A_1 A_k} = E_2 \frac{M}{L_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu}} \quad (104)$$

als Maß von  $E_2$  im Maßstab der Primärspannung; oder es ist  $\overline{A_1 A_k}$ , im Diagramm, die, auf den Primärkreis reduzierte, Sekundärspannung  $E'_2$ .

Wir erhalten also die wahre Sekundärspannung  $E_2$ , wenn wir die Strecke  $\overline{A_1 A_k}$  mit dem Proportionalitätsfaktor:

$$\frac{L_2}{M} \sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu}$$

multiplizieren. Die Strecke  $\overline{A_1 A_k}$  ist dabei natürlich in Volt auszudrücken und der Voltmaßstab ergibt sich aus:

$$\overline{O A_k} = E_1^{\text{Volt}}.$$

Die sekundäre Leerlaufspannung, reduziert auf den Primärkreis, ist somit durch die Strecke:

$$\overline{A_0 A_k} = E'_{2,0}$$

gegeben.

Der sekundäre Spannungsabfall für irgend eine Belastung ergibt sich mit:

$$\frac{\overline{A_k A_0} - \overline{A_k A_1}}{\overline{A_k A_0}} 100$$

in Prozenten der sekundären Leerlaufspannung.

Bestimmung der beiden Teil-Streukoeffizienten.

Aus Gl. (100) folgt für  $\xi_x = \infty$ ; d. h. für Leerlauf, oder Stillstand bei offenem Rotor:

$$\overline{A_0 A_k} = \frac{J_0}{N_2} (1 - \tau) = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}} \cdot \frac{1 - \tau}{N_2}$$

Aus (102) folgt für Leerlauf, wenn  $E_{2,0}$  die sekundäre Leerlaufspannung ist:

$$\overline{A_0 A_k} = E_{2,0} \frac{1}{\omega L_1} \frac{M}{L_2} \frac{1}{N_2}$$

Es ist also:

$$\frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{n_1} \frac{1 - \tau}{N_2} = \frac{E_{2,0}}{\omega L_1} \frac{1}{N_2} \cdot \frac{M}{L_2}$$

und somit:

$$\frac{E_1}{E_{2,0}} = \frac{n_1}{1 - \tau} \frac{M}{L_2} = \frac{n_1}{M^2} \cdot \frac{M}{L_2} = n_1 \frac{L_1}{M} \quad (105)$$

oder nach (48 a)

$$\frac{E_1}{E_{2,0}} = n_1 \frac{L'_1(1 + \tau_1)}{M}$$

und da nach (44)

$$\frac{L'_1}{M} = \frac{z_1}{z_2}$$

so folgt:

$$\frac{E_1}{E_{2,0}} = \frac{z_1}{z_2} \sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu} (1 + \tau_1) \quad (106)$$

Das „wahre“ Übersetzungsverhältnis ist also nicht  $\frac{z_1}{z_2}$ , sondern der ganze Ausdruck rechts.

Aus (106) ergibt sich nun die Bestimmung des primären Streukoeffizienten aus den gemessenen Werten  $E_1$ ,  $E_{2,0}$ ,  $r_1$ , den berechneten  $\xi_1$  und  $\sin \nu$  und den gegebenen  $z_1$  und  $z_2$ ; und nun folgt aus:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2}{1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2} \\ \tau_2 &= \frac{\tau - \tau_1(1 - \tau)}{(1 + \tau_1)(1 - \tau)} \end{aligned} \quad (107)$$

$\tau$  aber ist bestimmt aus (84).

Aus dem Diagramm und (104) ist ferner:

$$\frac{E_1}{E_{2,0}} = \frac{\overline{O A_k}}{A_0 A_k} \frac{L_2}{M} \sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu}$$

oder mit:

$$\sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu} = n_2 \quad (108)$$

und mit Rücksicht auf (105) ist:

$$\frac{\overline{O A_k}}{A_0 A_k} \frac{1}{\frac{L_2}{M} n_2} = n_1 \frac{L_1}{M}$$

also:

$$\frac{\overline{O A_k}}{A_0 A_k} = \frac{L_1 L_2}{M^2} n_1 n_2 = \frac{1}{1 - \tau} n_1 n_2$$

und daher:

$$\tau = 1 - n_1 n_2 \frac{\overline{A_0 A_k}}{O A_k}; \quad (109)$$

eine Beziehung, die, durch einen Blick auf das Diagramm, sofort eine Vorstellung von der Größe des totalen Streukoeffizienten gibt; denn es ist meist:

$$n_1 \sim n_2 \sim 1.$$

Die Leistung.

Für einen beliebigen Belastungszustand ist die gesamte zugeführte Leistung gegeben durch:

$$P = E_1 J_1 \cos \varphi_1$$

Setzen wir aus (74) und (75 a) die Werte für  $J_1$  und  $\cos \varphi_1$  ein, so folgt:

$$P = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{n_x}{N_x} \frac{A(\xi_x + \sin \nu) + B \cos \nu}{\sqrt{\{A(\xi_x + \sin \nu) + B \cos \nu\}^2 + \{B(\xi_x + \sin \nu) - A \cos \nu\}^2}}$$

Führt man die Summe der beiden Quadrate unter der Wurzel aus, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Werte von  $A$  und  $B$  [s. (73)]

$$P = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{n_x}{N_x} \frac{A(\xi_x + \sin \nu) + B \cos \nu}{\omega^2 L_1 L_2 n_x N_x}$$

und führt man auch im Zähler die Werte von  $A$  und  $B$  nach (73) ein, so wird:

$$P = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \{ [\xi_1 \xi_x + (\xi_1 + \xi_x) \sin \nu - \tau \cos 2\nu] (\xi_x + \sin \nu) + [(\xi_1 + \xi_x) \cos \nu + \tau \sin 2\nu] \cos \nu \}$$

oder umgeformt:

$$P = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \{ \xi_1 (1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu) + \xi_x (1 - \tau) + \sin \nu (\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau) \}$$

oder mit Rücksicht auf (97)

$$P = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{n_x^2}{N_x^2} \xi_1 + \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \xi_x (1 - \tau) + \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \sin \nu \cdot (\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau)$$

Setzen wir in den zwei ersten Gliedern rechts:

$$\xi_1 = \frac{r_1}{\omega L_1}; \quad \xi_x = \frac{r_2 + r_b}{\omega L_2}$$

so wird:

$$P = \underbrace{\frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{n_x^2}{N_x^2} r_1}_1 + \underbrace{\frac{E_1^2}{\omega^2 L_1 L_2} \frac{1}{N_x^2} (r_a + r_b) (1 - \tau)}_2 + \underbrace{\frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \sin \nu (\zeta_x^2 + 2 \zeta_x \tau \sin \nu + \tau)}_3 \quad (110)$$

Von den drei Gliedern rechts ist nun nach (74)

$$\text{Glied 1} = J_1^2 r_1 \quad (111)$$

d. i. der primäre Kupferverlust.

Die Gesamtleistung im Sekundärkreis ist  $r_x J_2^2$ ; also nach (88 a):

$$r_x J_2^2 = r_x J_1^2 \frac{M^2}{L_2^2} \frac{1}{n_x^2} = r_x \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{n_x^2}{N_x^2} \frac{M^2}{L_2^2} \frac{1}{n_x^2}$$

und da:

$$M^2 = (1 - \tau) L_1 L_2$$

folgt:

$$r_x J_2^2 = r_x \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{1}{N_x^2} \frac{(1 - \tau) L_1 L_2}{L_2^2} = r_x \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1 L_2} \frac{1}{N_x^2} (1 - \tau)$$

oder:

$$r_x J_2^2 = \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1 L_2} \frac{1}{N_x^2} (r_a + r_b) (1 - \tau) = \text{Glied 2} \quad (112)$$

Es ist also Glied 2 gleich der Summe der sekundären Kupferverluste ( $J_2^2 r_a$ ) und der Nutzleistung ( $J_2^2 r_b$ ).

Somit kann Glied 3 nichts anderes sein, als die sämtlichen Zusatzverluste  $Z$ .

#### Der Zusatzverlust.

Multiplizieren und dividieren wir Glied 3 mit  $n_1^2 \omega L_1$ , so folgt

$$\text{Glied 3} = Z = \left[ \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{1}{n_1^2} \right] \omega L_1 \sin \nu \cdot \frac{n_1^2 (\zeta_x^2 + 2 \zeta_x \tau \sin \nu + \tau)}{N_x^2} \quad (113 a)$$

und da nach (77) das Klammerglied  $[\ ]$  gleich  $J_0^2$ , wird:

$$Z = J_0^2 \omega L_1 \sin \nu \frac{n_1^2 (\zeta_x^2 + 2 \zeta_x \tau \sin \nu + \tau)}{N_x^2} \quad (113)$$

Nach Gl. (29) ist nun, dieser Theorie folgend,  $J_0^2 \omega L_1 \sin \nu$  der gesamte Zusatzverlust bei Leerlauf. Wir sehen somit aus (113), daß sich dieser Zusatzverlust mit variabler Belastung ( $\zeta_x$ ) ändert.

Differenzieren wir (113) nach  $\xi_x$ , so finden wir, daß die Grenzwerte dieses Zusatzverlustes auftreten für:

$$\xi_x = \frac{1}{2} \frac{\tau - \xi_1^2}{\xi_1 + \xi_1^2 \sin \nu} \pm \sqrt{\frac{(\tau + \xi_1^2)^2 + 4\xi_1 \tau \sin \nu (\tau + \xi_1 \tau \sin \nu + \xi_1^2)}{4(\xi_1 + \xi_1^2 \sin \nu)^2}} \quad (114)$$

Hierbei entspricht das Pluszeichen dem minimalen, das Minuszeichen dem maximalen Zusatzverlust.

Mit Rücksicht auf die Größenordnung der Werte in (114) ist mit guter Annäherung zu sagen:

$$\xi_x \approx \frac{1}{2} \frac{\tau}{\xi_1} \pm \frac{1}{2} \frac{\tau}{\xi_1} \quad (114 a)$$

D. h.: Das Minimum des Zusatzverlustes tritt auf in nächster Nähe des Belastungszustandes, charakterisiert durch

$$\xi_x \approx \frac{\tau}{\xi_1} \quad (114 b)$$

das ist ein Punkt, der in der Motorbetriebszone in nächster Nähe des Leerlaufs liegt.

Das Maximum des Zusatzverlustes entspricht einem Belastungszustand, charakterisiert durch:

$$\xi_x \approx 0; \quad (114 c)$$

das ist ein Punkt, der in der Nähe des Punktes unendlich großer Drehzahl liegt.

Berechnen wir aus (113), bei Berücksichtigung von  $N_x^2$  nach (98), mit Einsatz von (114 b) und (114 c), den Minimal- und Maximalwert von

$Z$ , so ergibt sich für  $\xi_x = \frac{\tau}{\xi_1}$

$$Z_{\min} = J_0^2 \omega L_1 \sin \nu \cdot n_1^2.$$

$$\frac{\left(\frac{\tau}{\xi_1}\right)^2 + 2\frac{\tau^2}{\xi_1} \sin \nu + \tau}{\tau^2 + \left(\xi_1 + \frac{\tau}{\xi_1}\right)^2 + \tau^2 - 2\tau^2 \cos 2\nu + 2\left(\xi_1 + \frac{\tau}{\xi_1}\right) 2\tau \sin \nu}$$

oder:

$$Z_{\min} = J_0^2 \omega L_1 \sin \nu \cdot n_1^2 \cdot \left. \frac{\tau^2 + 2\tau^2 \xi_1 \sin \nu + \tau \xi_1^2}{4\xi_1^3 \tau^2 \sin^2 \nu + \xi_1^4 + \tau^2 + 2\xi_1^2 \tau + 4\tau \xi_1^3 \sin \nu + 4\tau^2 \xi_1 \sin \nu} \right\} \quad (115)$$

Dieser Ausdruck übergeht mit Rücksicht auf die Größenordnung von  $\tau$ ,  $\xi_1$  und  $\sin \nu$  mit erlaubter Annäherung in:

$$Z_{\min} \approx J_0^2 \omega L_1 \sin \nu \cdot n_1^2 \quad (115 a)$$

denn in Zähler und Nenner des Bruches sind die Glieder neben  $\tau^2$  von sehr geringer Bedeutung.

Und für  $\xi_x = 0$  ergibt sich aus (113)

$$Z_{\max} \approx J_0^2 \omega L_1 \sin \nu \cdot n_1^2 \frac{\tau}{\tau^2 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu} \quad (116)$$

Es ist somit das Verhältnis:

$$\frac{Z_{\max}}{Z_{\min}} \approx \frac{\tau}{\tau^2 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu}$$

und da im Nenner die Glieder neben  $\tau^2$  von geringer Bedeutung sind, ist

$$\frac{Z_{\max}}{Z_{\min}} \sim \frac{1}{\tau}$$

also wegen:  $\tau \ll 1$  ist  $Z_{\max}$  ein Vielfaches von  $Z_{\min}$ .

Der Zusatzverlust wächst also vom Leerlauf bis zum Punkte unendlich großer Drehzahl, und zwar um so mehr, je kleiner  $\xi_1$  oder der primäre Widerstand  $r_1$  ist.

Wir machen nun den Ansatz:

$$J_0^2 \frac{n_1^2 (\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau)}{N_x^2} = J_v^2 \quad (117)$$

wodurch (113) übergeht in:

$$Z = J_v^2 \omega L_1 \sin \nu \cdot \quad (118)$$

Es bedeutet dann  $J_v$  eine Stromstärke, deren Quadrat der Zusatzverlust proportional ist; wir wollen sie den Verluststrom nennen.

Nun wollen wir den Magnetisierungsstrom  $J_m$  [s. Gl. (99)] mit  $J_v$  vergleichen.

Es ist:

$$\frac{J_v^2}{J_m^2} = \frac{n_1^2 (\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau)}{n_1^2 n_x^2 + (1 - \tau)^2 - 2 (1 - \tau) (1 + \xi_x \sin \nu) n_1} \quad (119)$$

Um dieses Verhältnis zu beurteilen, setzen wir angenähert:

$$n_1 = \sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu} = 1$$

und setzen nun für  $n_x^2$  den Wert nach (97) ein:

$$n_x^2 = 1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu$$

dann wird:

$$\frac{J_v^2}{J_m^2} \approx \frac{\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau}{\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau^2} \quad (120)$$

Da:  $\tau < 1$ , so folgt:

$$J_v > J_m$$

und setzen wir den Quotienten rechts in (120)

$$\frac{\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau}{\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau^2} = Q \tag{121}$$

so wird:

$$J_v^2 \approx J_m^2 Q \tag{122}$$

Es ist also der Verluststrom  $J_v$  immer durch den Magnetisierungsstrom  $J_m$  multipliziert mit dem Quotienten  $Q$  auszudrücken. Den Verlauf dieses Quotienten können wir leicht studieren. Die Größen  $\tau$  und  $\sin \nu$

Abb. 101.

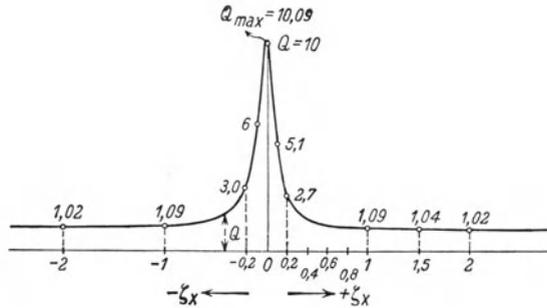
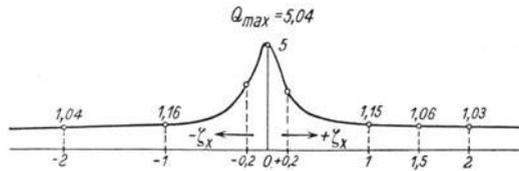


Abb. 102.



sind uns bekannt; es sind echte Brüche von ähnlicher Größenordnung ( $\sim 0,1$ ).

Durch Differentiation von (121) ergibt sich, daß  $Q$  sein Maximum hat, für

$$\xi_x = -\tau \sin \nu$$

In den Abb. 101 und 102 ist der Verlauf von  $Q$  für zwei bestimmte Fälle wiedergegeben. In Abb. 101 ist  $\tau = 0,1$ ;  $\sin \nu = 0,1$ .

In Abb. 102 ist  $\tau = 0,2$ ;  $\sin \nu = 0,1$ .

Die Figuren zeigen, daß für größere Werte von  $\xi_x$ , d. h. etwa von

$$\xi_x = \pm 2$$

angefangen, der Quotient  $Q$  nahezu gleich Eins wird, und daher nach (122):

$$J_v \approx J_m$$

Für  $\xi_x = 0$  aber, d. h. für den Punkt unendlich hoher Drehzahl, wird

$$J_v^2 \approx J_m^2 \frac{1}{\tau} \quad (123)$$

Wenn nun diese Beziehung auch eine recht rohe Annäherung bedeutet — denn die Vernachlässigung des Primärwiderstandes in (119) ist bedeutungsvoller, als man glaubt —, so gibt sie doch in qualitativer Hinsicht eine wichtige Erkenntnis.

Durch (118) haben wir den Gesamtzusatzverlust  $Z$  dem Quadrat des Verluststromes proportional gesetzt. Der maximale Verluststrom im Quadrat ist aber nach (123) gleich dem Magnetisierungsstrom im Quadrat (für  $\xi_x = 0$ ) dividiert durch  $\tau$ . Die Größe:

$$\tau = 1 - \kappa^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

kann nur zwischen Null und Eins liegen, und ist vom Kopplungsgrade  $\kappa$  abhängig. Je loser die Kopplung, desto größer wird  $\tau$ , desto kleiner  $J_v^2$  und daher der maximale Zusatzverlust.

Die Steigerung des Zusatzverlustes, vom Leerlauf an, ist also vor allem durch die Existenz des magnetisch gekoppelten Sekundärkreises bedingt und es ist daher ein naheliegender Schluß, diese Steigerung der Zusatzverluste einzig und allein dem Rotor zuzuweisen, was ja auch durch die erhöhte Stromfrequenz im Rotor eine physikalische Erklärung findet.

Das ist ein wichtiger Schluß, den wir im weiteren insofern verwenden werden, als wir den, über den Leerlaufverlust hinaus, gesteigerten Zusatzverlust als eine, „auf den Rotor übertragene“, Leistung ansehen werden.

#### Die Teilleistungen.

Zum Zwecke der graphischen Bestimmung der Teilleistungen 1, 2 und 3, nach Gl. (110), kehren wir nun zu unserem Diagramm zurück (s. Abb. 103).

Da wir durch den großen Kreis und somit durch die Strecken  $\overline{OA}$  im Diagramm die Werte des Primärstromes  $J_1$  bei konstant gehaltener Primärspannung  $E_1$  ausgedrückt haben, so ist es klar, daß wir die Strecken  $\overline{OA}$  auch als Maß für die geleisteten Volt-Ampère ansehen können, also für das Produkt  $E_1 J_1$ , und daher die Projektion von  $\overline{OA}$  auf die Richtung von  $E_1$  als ein Maß für die Leistung:  $E_1 J_1 \cos \varphi_1$  Watt.

Ziehen wir im Diagramm:

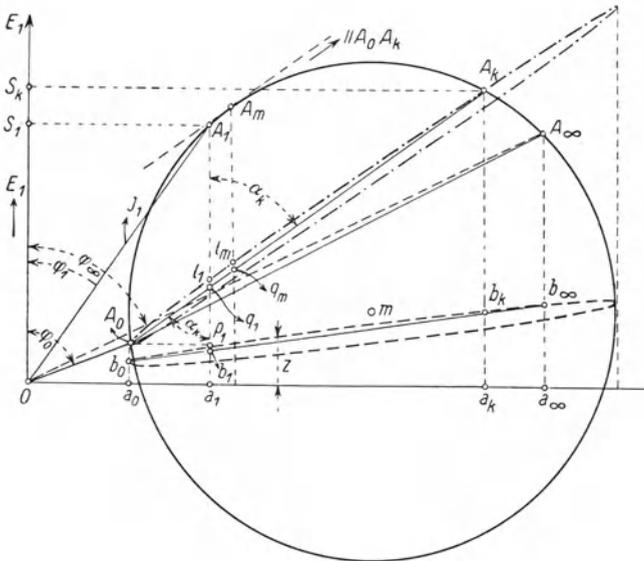
$$A_k S_k \perp E_1$$

so ist  $\overline{OS_k}$  ein Maß für die Kurzschlußleistung  $P_k$  und es ergibt sich der Wattmaßstab des Diagramms aus:

$$\overline{OS_{kmm}} = P_k^{\text{Watt}}$$

Wir hatten bisher das Diagramm als Stromdiagramm aufgefaßt und es hatte jede Strecke eine bestimmte Wertigkeit in Ampere. Jetzt sehen wir, daß wir jeder Strecke, parallel zu  $E_1$ , eine Wertigkeit in Watt zusprechen können.

Abb. 103.



Ziehen wir von einem beliebigen Betriebspunkte  $A_1$  die Senkrechte  $A_1 S_1$  auf  $E_1$ , so ist  $OS_1$  ein Maß für die primär zugeführten Watt und daher auch

$$\overline{A_1 a_1} = \overline{OS_1} = \text{Leistungsmaß.}$$

Wir wollen nun versuchen, auf der Linie  $A_1 a_1$  die drei Teilleistungen nach (110) abzugrenzen.

Wir wissen, daß der Zusatzverlust  $Z_0$  bei Leerlauf:

$$Z_0 = P_0 - J_0^2 r_1$$

worin:

$$P_0 = \overline{A_0 a_0}$$

die gemessene Leerlaufleistung ist. Ziehen wir also von  $\overline{A_0 a_0}$  die Größe

$$J_0^2 r_1 = \overline{A_0 b_0}$$

ab, so erhalten wir in:

$$\overline{a_0 b_0} = Z_0$$

den Zusatzverlust bei Leerlauf.

Im Punkte  $A_\infty$ , unendlich großer Drehzahl, den wir erhielten, indem wir unter den Winkel  $\varphi_\infty$  [s. Gl. (79)] den Strahl zogen und mit dem Kreise zum Schnitt brachten, ist der Zusatzverlust gegeben durch Gl. (116) mit  $Z_{\max}$ .

Wir berechnen  $Z_{\max}$  und machen:

$$\overline{a_\infty b_\infty} = Z_{\max}$$

Berechnet man nun nach (113) den Zusatzverlust für mehrere Zwischenpunkte, so ergibt sich für  $Z$  eine sehr flache Kurve, deren Stück  $b_0 b_\infty$  „praktisch“ nur sehr wenig von der Geraden abweicht, so daß wir sagen können: Die Ordinaten der Geraden  $b_0 b_\infty$  bedeuten die jeweiligen Zusatzverluste im Bereiche  $A_0 A_k A_\infty$ .

Es ist  $\overline{a_1 b_1}$  der Zusatzverlust im Betriebspunkte  $A_1$ . Damit ist Glied 3 [s. (110)] auf der Linie  $A_1 a_1$  abgegrenzt.

Die Strecke  $\overline{A_1 b_1}$  entspricht also der Summe der Glieder 1 und 2. D. i. nach Gl. (110):

$$\overline{A_1 b_1} = \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{n_x^2}{N_x^2} r_1 + \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1 L_2} \frac{1 - \tau}{N_x^2} r_2 + \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1 L_3} \frac{1 - \tau}{N_x^2} r_b$$

Hier stellen die beiden ersten Glieder rechts die Kupferverluste, das letzte Glied die Nutzleistung dar.

Wir ziehen nun im Diagramm durch  $A_0$  die Horizontale und bringen sie in  $p_1$  mit der Strecke  $A_1 a_1$  zum Schnitt. Ferner nennen wir  $q_1$  den Schnittpunkt von  $A_1 a_1$  mit der Linie  $A_0 A_k$ . Dann ist:

$$\overline{a_1 q_1} = \overline{a_1 p_1} + \overline{p_1 q_1} = J_0 \cos \varphi_0 + \overline{A_0 p_1} \cotg \alpha_k$$

Es ist aber:

$$\overline{A_0 p_1} = J_1 \sin \varphi_1 - J_0 \sin \varphi_0$$

und  $\cotg \alpha_k$  entnehmen wir der Gl. (93), indem wir dort  $\xi_x = \xi_2$  setzen.

Dann wird:

$$\begin{aligned} & \overline{A_0 p_1} \cotg \alpha_k = \\ = & (J_1 \sin \varphi_1 - J_0 \sin \varphi_0) \frac{\xi_1(1 + \tau) + \sin \nu (\tau + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \xi_2) + \xi_2(1 - \xi_1^2 \cos 2\nu)}{\cos \nu \{ \tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 (1 + \xi_1 \sin \nu) \}} \end{aligned}$$

Es ist aber nach (77)

$$J_0 \cos \varphi_0 = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{n_1^2} (\xi_1 + \sin \nu)$$

Nach (74) und (75) ist:

$$J_1 \sin \varphi_1 = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{n_x}{N_x} \frac{\cos \nu (\tau + \xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu)}{N_x}$$

$$J_0 \sin \varphi_0 = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{n_1^2} \cos \nu$$

und daher nach entsprechender Umformung:

$$J_1 \sin \varphi_1 - J_0 \sin \varphi_0 = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \frac{1-\tau}{n_1^2} (\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_x - 2 \xi_1^2 \xi_x \sin \nu) \cos \nu \quad (124a)$$

Somit:

$$\overline{a_1 q_1} = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{n_1^2} (\xi_1 + \sin \nu) + \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \frac{1-\tau}{n_1^2} (\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_x - 2 \xi_1^2 \xi_x \sin \nu) \cos \nu \cdot$$

$$\frac{\xi_1 (1 + \tau) + \sin \nu (\tau + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \xi_2) + \xi_2 (1 - \xi_1^2 \cos 2 \nu)}{\cos \nu (\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 (1 + \xi_1 \sin \nu))}$$

Die Ausrechnung dieses Ausdruckes ist ein sehr harter Bissen, an dem der Autor viele Tage gekaut hat. Ich muß hier an das Vertrauen des Lesers appellieren, denn die Wiedergabe der Zwischenrechnung, die zu 160 Gliedern führt, würde allein ein Buch füllen. Bei entsprechend geschickter Zusammenfassung und Umformung ergibt sich:

$$\overline{a_1 q_1} = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \{ n_x^2 \xi_1 + \xi_2 (1 - \tau) \} -$$

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \frac{2 \xi_1 (1 - \tau) (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu} (\xi_x - \xi_2) + \\ & + \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \sin \nu (\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau) \end{aligned} \right\} \quad (124b)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $E_1$ , um vom Ampere- auf den Wattmaßstab überzugehen, so wird:

$$E_1 \cdot \overline{a_1 q_1} = \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{n_x^2}{N_x^2} r_1 + \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1 L_2} \frac{1-\tau}{N_x^2} r_2 - \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{\xi_x - \xi_2}{N_x^2} \cdot$$

$$\left. \begin{aligned} & \cdot \frac{2 \xi_1 (1 - \tau) (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu} + \frac{E_1^2}{\omega L_1} \sin \nu \frac{\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau}{N_x^2} \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Nach der Diskussion von Gl. (110) sind die beiden ersten Glieder rechts der gesamte Kupferverlust  $P_{Cu}$ , das letzte Glied rechts der gesamte Zusatzverlust G. Z. gegeben durch  $E_1 a_1 b_1$ . Es wird also:

$$E_1 (\overline{a_1 q_1} - \overline{a_1 b_1}) = P_{Cu} - \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{\xi_x - \xi_2}{N_x^2} \frac{2 \xi_1 (1 - \tau) (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu}$$

oder nach der Abb. 103

$$E_1 \cdot \overline{b_1 q_1} = P_{Cu} \left\{ 1 - \frac{\frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{\xi_x - \xi_2}{N_x^2} \frac{2 \xi_1 (1 - \tau) (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu}}{P_{Cu}} \right\}$$

Setzt man im Nenner für  $P_{Cu}$ :

$$P_{Cu} = \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{n_x^2}{N_x^2} r_1 + \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1 I_2} \frac{1-\tau}{N_x^2} r_2 = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \{n_x^2 \xi_1 + (1-\tau) \xi_2\}$$

und für  $n_x^2$  nach (97) den Wert, so wird:

$$E_1 \cdot \overline{b_1 q_1} = P_{Cu} \left\{ 1 - (\xi_x - \xi_2) \frac{2 \xi_1 (1-\tau) (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{[(1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu) \xi_1 + (1-\tau) \xi_2] (\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu)} \right\}$$

und nennt man:

$$K = (\xi_x - \xi_2) \frac{2 \xi_1 (1-\tau) (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{[(1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu) \xi_1 + (1-\tau) \xi_2] (\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu)} \quad (125)$$

so wird:

$$P_{Cu} = \frac{E_1 \cdot \overline{b_1 q_1}}{1 - K} \quad (126)$$

Die Strecke  $\overline{b_1 q_1}$  im Diagramm mißt also nur dann den Kupferverlust exakt, wenn das Korrektionsglied  $K = 0$  ist.

Dies ist nach (125) nur der Fall:

1. für:  $\xi_x = \xi_2$  (Kurzschlußpunkt  $A_k$ )
2. für:  $\xi_x = \infty$  (Leerlaufpunkt  $A_0$ )

Also nur die Strecken  $\overline{b_k A_k}$ ,  $\overline{b_0 A_0}$  messen die Kupferverluste exakt. In jedem anderen Belastungsfalle — im Bereiche  $A_0 A_k$  — ist der Kupferverlust größer als die Strecke  $\overline{b q}$ .

Nach (125) erreicht  $K$  sein Maximum für:

$$\xi'_x = \xi_2 \pm \sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu + \frac{\xi_2}{\xi_1} (1-\tau)}$$

oder da  $\xi_2^2$  und  $2 \xi_2 \sin \nu$  gegenüber 1 bedeutungslos sind, für

$$\xi'_x \approx \xi_2 \pm \sqrt{1 + \frac{\xi_2}{\xi_1} (1-\tau)}. \quad (127)$$

Setzen wir diesen Wert in (125) für  $\xi_x$  ein, so ergibt sich, wenn wir  $\xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu$  gegenüber 2 vernachlässigen:

$$K_{\max} = \frac{2 \xi_1 (1-\tau) (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_1 \left( \sin \nu + \xi_2 + \sqrt{1 + \frac{\xi_2}{\xi_1} (1-\tau)} \right)}$$

und vernachlässigen wir — was angenähert zulässig ist — die Größe:

$$\xi_1^2 + 2 \xi_1 \xi_2 + 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu$$

gegenüber  $\tau$ , so wird:

$$K_{\max} \approx \frac{1-\tau}{\tau} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu}{\sin \nu + \xi_2 + \sqrt{1 + \frac{\xi_2}{\xi_1} (1-\tau)}} \quad (128)$$

Das ist ein Wert, der recht bedeutend werden kann. Z. B. für einen Motor mit:

$$\tau = 0,06; \quad \xi_1 = \xi_2 = 0,02; \quad \sin \nu = 0,16$$

wird:

$$K_{\max} = 0,5$$

Nach (126) begehen wir — wenn wir  $P_{Cu}$  durch  $\overline{bq}$  messen — den maximalen Fehler, wenn  $K = K_{\max}$  ist; also in unserem Falle würde „in Wahrheit“

$$P_{Cu} = \frac{E_1 \cdot \overline{bq}}{1 - 0,5} = 2 \cdot E_1 \cdot \overline{bq}$$

Wenn wir also  $P_{Cu}$  durch  $\overline{bq}$  ausdrücken, so begehen wir einen maximalen Fehler von 50 Proz.

Aus Abb. 102 ist ferner:

$$E_1 \cdot \overline{a_1 A_1} = E_1 J_1 \cos \varphi_1 = \text{Gesamtleistung}$$

oder:

$$E_1 \cdot \overline{a_1 A_1} = \text{Nutzleistung} + P_{Cu} + \text{Ges. Zus. Verl.} \quad (129)$$

und nach (124) ist

$$E_1 \cdot \overline{a_1 q_1} = P_{Cu} - \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{\xi_x - \xi_2}{N_x^2} \frac{2 \xi_1 (1-\tau) (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu} + \text{G. Z.} \quad (130)$$

Ziehen wir (130) von (129) ab, so wird:

$$E_1 (\overline{a_1 A_1} - \overline{a_1 q_1}) = \text{Nutzleistung} + \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{\xi_x - \xi_2}{N_x^2} \frac{2 \xi_1 (1-\tau) (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu}$$

Nach (112) ist aber die Nutzleistung gegeben durch:

$$P_n = \text{Nutzleistung} = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \frac{r_b}{\omega L_2} (1-\tau) = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} (\xi_x - \xi_2) (1-\tau)$$

und daher:

$$\begin{aligned} E_1 (\overline{a_1 A_1} - \overline{a_1 q_1}) &= E_1 \cdot \overline{q_1 A_1} = \\ &= P_n \left\{ 1 + \frac{\frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{\xi_x - \xi_2}{N_x^2} \frac{2 \xi_1 (1-\tau) (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu}}{\frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} (\xi_x - \xi_2) (1-\tau)} \right\} \end{aligned}$$

oder:

$$E_1 \cdot \overline{q_1 A_1} = P_n \left\{ 1 + \frac{2 \xi_1 (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu} \right\}$$

und nennen wir:

$$\frac{2 \xi_1 (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu} = F \quad (131)$$

so wird:

$$P_n = \frac{E_1 \cdot \overline{q_1 A_1}}{1 + F} \quad (132)$$

Will man also die Nutzleistung durch die Strecken  $\overline{qA}$  messen, so macht man einen Fehler im entgegengesetzten Sinne wie bei der Bestimmung der Kupferverluste. Die Strecke  $\overline{q_1 A_1}$  mißt „mehr“ als die Nutzleistung.

Der Fehler  $F$  ist aber jetzt nach (131) konstant.

Für unser oben erwähntes Beispiel wäre:

$$F = \frac{2 \cdot 0,02 (0,04 + 0,0096)}{0,06 - 0,0012} = \frac{0,002}{0,059} \approx 0,034$$

Wäre  $\xi_1 = 0$ , d. h. der primäre Stromkreis widerstandsfrei, so wäre  $F = 0$ , und  $\overline{q_1 A_1}$  wäre ein Maß für die Nutzleistung.

Bei der praktischen Benutzung des Diagramms sieht man bekanntlich die Gerade  $A_0 A_k$  als die Trennungslinie der Nutzleistung von den Kupferverlusten an. Man heißt deshalb  $A_0 A_k$  die Leistungslinie, weil es die Bezugslinie für die Nutzleistung wird.

Gl. (132) lehrt uns, daß dieses Verfahren ungenau ist, und zwar um so ungenauer, je größer  $F$  und daher  $\xi_1$  sind.

Da es nun ein Leichtes ist, nach (131),  $F$  zu berechnen, so können wir nach (132) in Abb. 103 leicht für einige Punkte die Nutzleistung berechnen. Wir finden auf diese Art die „wahre“ Bezugslinie für die Nutzleistung nicht als die Gerade  $A_0 A_k$ , sondern als die strichpunktierte Kurve  $A_0 A_k$ . Die wahren Nutzleistungen sind dann die Strecken  $\overline{lA}$ , die wahren Kupferverluste die Strecken  $\overline{b\bar{l}}$ .

Der Punkt maximaler Nutzleistung ist  $A_m$ , d. i. jener Kreispunkt, der eine, zu  $A_0 A_k$  parallele Tangente hat. Das Maximum der Nutzleistung ist:

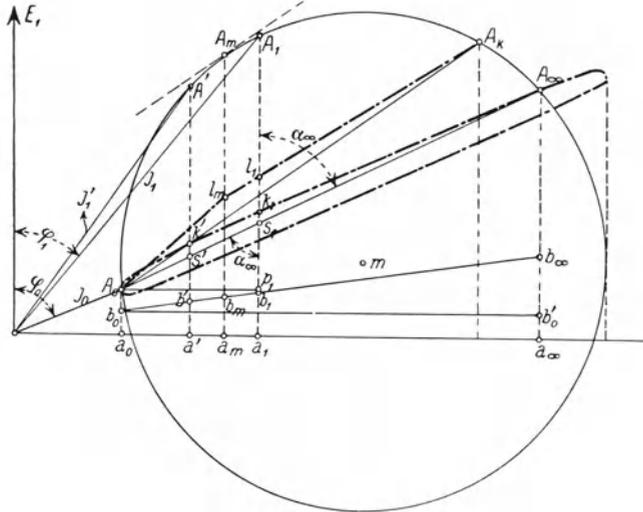
$$P_{n(max)} = E_1 \frac{\overline{q_m A_m}}{1 + F} = E_1 \cdot \overline{l_m A_m}$$

Mit Rücksicht auf die Flachheit der Bezugskurve  $A_0 l_m A_k$  ist sie durch den Zug der geraden Linien  $A_0 l_m$  und  $l_m A_k$  zu ersetzen.

Trennung der Kupferverluste voneinander.

Ziehen wir in Abb. 104 wieder eine beliebige Ordinate  $A_1 a_1$  und schneiden sie mit der Horizontalen durch  $A_0$  in  $p_1$  und mit der Geraden  $A_0 A_\infty$  in  $s_1$ .

Abb. 104.



Dann ist:

$$\overline{a_1 s_1} = \overline{a_1 p_1} + \overline{p_1 s_1} = J_0 \cos \varphi_0 + \overline{A_0 p_1} \cotg \alpha_\infty$$

und da nach der Abbildung:

$$\overline{A_0 p_1} = J_1 \sin \varphi_1 - J_0 \sin \varphi_0$$

und nach (93) für  $\xi_x = 0$ :

$$\cotg \alpha_\infty = \frac{\xi_1 (1 + \tau) + \sin \nu (\tau + \xi_1^2)}{\cos \nu (\tau - \xi_1^2)}$$

wird:

$$\overline{a_1 s_1} = J_0 \cos \varphi_0 + (J_1 \sin \varphi_1 - J_0 \sin \varphi_0) \frac{\xi_1 (1 + \tau) + \sin \nu (\tau + \xi_1^2)}{\cos \nu (\tau - \xi_1^2)}$$

Setzen wir für  $J_0 \cos \varphi_0$  aus (77) und für  $(J_1 \sin \varphi_1 - J_0 \sin \varphi_0)$  aus (124a) die Werte ein, so ist:

$$\overline{a_1 s_1} = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{n_1^2} (\xi_1 + \sin \nu) + \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \frac{1}{n_1^2} (1 - \tau) (\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_x - 2 \xi_1^2 \xi_x \sin \nu) \cdot \cos \nu \frac{\xi_1 (1 + \tau) + \sin \nu (\tau + \xi_1^2)}{\cos \nu (\tau - \xi_1^2)}$$

oder:

$$\overline{a_1 s_1} = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \frac{1}{n_1^2} \frac{1}{\tau - \xi_1^2} \{ N_x^2 (\xi_1 + \sin \nu) (\tau - \xi_1^2) + (1 - \tau) (\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_x - 2 \xi_1^2 \xi_x \sin \nu) \cdot (\xi_1 + \xi_1 \tau + \tau \sin \nu + \xi_1^2 \sin \nu) \}$$

Die Ausführung dieses Ausdruckes bedeutet eine ähnlich mühsame Rechenarbeit, wie die zur Erlangung von (124 b) nötig gewesene. Auch hier kann nur das Resultat wiedergegeben werden. Multipliziert man die ganze Gleichung mit  $E_1$ , um auf den Wattmaßstab überzugehen, so ergibt sich:

$$E_1 \cdot \overline{a_1 s_1} = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{n_x^2}{N_x^2} \xi_1 + \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \sin \nu (\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau) - \left. \begin{aligned} & - \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{n_1^2} \frac{1-\tau}{\tau - \xi_1^2} \frac{2 \xi_1 \xi_x}{N_x^2} \{ \xi_1 (1 + \xi_1^2) + \sin \nu [\tau (1 + \xi_1^2) + 2 \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu] \} \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Es ist nun wieder das erste Glied rechts gleich dem primären Kupferverlust  $P_{1\text{Cu}}$ , das zweite Glied rechts gleich dem gesamten Zusatzverlust, gegeben durch  $E_1 \cdot \overline{a_1 b_1}$ ; somit:

$$E_1 (\overline{a_1 s_1} - \overline{a_1 b_1}) = E_1 \cdot \overline{b_1 s_1} = P_{1\text{Cu}} - \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{n_1^2} \frac{1-\tau}{\tau - \xi_1^2} \frac{2 \xi_1 \xi_x}{N_x^2} \cdot \{ \xi_1 (1 + \xi_1^2) + \sin \nu [\tau (1 + \xi_1^2) + 2 \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu] \};$$

oder, wenn wir rechts  $P_{1\text{Cu}}$  zum Faktor herausheben:

$$E_1 \cdot \overline{b_1 s_1} = P_{1\text{Cu}} \left\{ 1 - \frac{\frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{n_1^2} \frac{1-\tau}{\tau - \xi_1^2} \frac{2 \xi_1 \xi_x}{N_x^2} \{ \xi_1 (1 + \xi_1^2) + \sin \nu [\tau (1 + \xi_1^2) + 2 \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu] \}}{P_{1\text{Cu}}} \right\}$$

und führen wir im Nenner für  $P_{1\text{Cu}}$  den Wert:

$$\frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{n_x^2}{N_x^2} \xi_1$$

ein, so wird:

$$E_1 \cdot \overline{b_1 s_1} = P_{1\text{Cu}} \left\{ 1 - \frac{2 \xi_1 \xi_x (1-\tau) \{ \xi_1 (1 + \xi_1^2) + \sin \nu [\tau (1 + \xi_1^2) + 2 \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu] \}}{n_x^2 \xi_1 (\tau - \xi_1^2)} \right\} \quad (134)$$

und nennen wir:

$$K_1 = \frac{2 \xi_1 \xi_x (1-\tau) \{ \xi_1 (1 + \xi_1^2) + \sin \nu [\tau (1 + \xi_1^2) + 2 \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu] \}}{n_x^2 \xi_1 (\tau - \xi_1^2)} \quad (135)$$

so folgt:

$$P_{1\text{Cu}} = \frac{E_1 \cdot \overline{b_1 s_1}}{1 - K_1} \quad (136)$$

D.h.: Die Strecken  $\overline{bs}$  sind nur dann ein „exaktes“ Maß für den primären Kupferverlust, wenn das Glied  $K_1$  gleich Null ist. Dies ist der Fall [nach (135)], wenn

1.  $\xi_x = 0$ ; d. h. für unendlich hohe Drehzahl ( $A_\infty$ ),
2.  $\xi_x = \infty$ ; d. h. für Leerlauf ( $A_0$ ), wegen  $n_x^2 = 1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu$ .

In jedem anderen Belastungsfall mißt die Strecke  $\overline{bs}$  den primären Kupferverlust ungenau, und zwar für  $\xi_x > 0$ , d. h. im Motorbereich, mißt sie zu wenig, für  $\xi_x < 0$  mißt sie zu viel.

Setzen wir:

$$a = \frac{2(1-\tau)\{\xi_1(1+\xi_1^2) + \sin\nu[\tau(1+\xi_1^2) + 2\xi_1^2(1+\xi_1\sin\nu)]\}}{n_1^2(\tau-\xi_1^2)} \quad (137)$$

so wird unser Korrektionsglied  $K_1$ :

$$K_1 = a \frac{\xi_x}{n_x^2} = a \frac{\xi_x}{1 + \xi_x^2 + 2\xi_x \sin\nu}$$

Dieses aber erreicht sein Maximum für:

$$\xi_x = \pm 1$$

und zwar wird für:

$$\xi_x = +1; \text{ d. h. im Motorbereich}$$

$$K_{1(\max)} = a \frac{1}{2(1 + \sin\nu)} = + \frac{a}{2} \frac{1}{1 + \sin\nu}$$

Für:  $\xi_x = -1$ ;

$$K'_{1(\max)} = - \frac{a}{2} \frac{1}{1 - \sin\nu}$$

Um einen Begriff von der Größenordnung von  $K_1$  zu bekommen, vernachlässigen wir im Ausdruck für  $a$  (137) die Größe  $2\xi_1^2$  gegenüber  $\tau$ , setzen:  $n_1^2 \approx 1$  und erhalten:

$$a \approx 2 \frac{1-\tau}{\tau} (\xi_1 + \tau \sin\nu)$$

Für unser erwähntes Beispiel mit:

$$\tau = 0,06; \quad \xi_1 = 0,02; \quad \sin\nu = 0,16$$

wäre somit:

$$a \approx 2 \frac{0,94}{0,06} (0,02 + 0,0096) \approx 0,93$$

und daher:

$$K_{1(\max)} = \frac{0,465}{1,16} = 0,40; \quad K'_{1(\max)} = - \frac{0,465}{0,84} = -0,55$$

Wenn wir also den primären Kupferverlust durch die Strecken  $\overline{bs}$  ausdrücken, begehen wir, nach Gl. (136), im Motorbereich einen maximalen Fehler von 40 Proz., im anderen Bereich einen maximalen Fehler von 55 Proz.

Die primären Kupferverluste werden also nicht durch die Gerade  $A_0A_\infty$  begrenzt, sondern durch eine Kurve, die zwar

durch die Punkte  $A_0$  und  $A_\infty$  geht, aber im Motorbereich über der Geraden  $A_0A_\infty$ , im anderen Bereich unter dieser Geraden liegt.

Berechnet man die Lage einzelner Punkte dieser Kurve, so findet man, daß die Kurve sehr flach ist. Die stärkste Abweichung der Kurve von der Geraden  $A_0A_\infty$  fanden wir im Motorbereich für  $\xi_x = +1$ .

Berechnen wir aus Gl. (74) den primären Stromwert für  $\xi_x = +1$ , nach

$$J'_1 = \frac{E_1}{\omega L_1} \sqrt{\frac{1 + 1 + 2 \sin \nu}{\xi_1^2 + (1 + \xi_1)^2 + \tau^2 - 2 \xi_1 \tau \cos 2 \nu + 2 (1 + \xi_1) (\xi_1 + \tau) \sin \nu}}$$

setzen mit  $J'_1$  im Nullpunkt ein und durchschneiden den Kreis in  $A'$ , so ist  $A'$  der Belastungspunkt, welcher der größten Abweichung der Kurve von der Geraden  $A_0A_\infty$  entspricht. Wir fällen nun das Lot  $A'a'$ , bestimmen die Schnittpunkte  $b'$  und  $s'$ , dividieren die Strecke  $\overline{b's'}$  durch  $(1 - K_{1\max})$  und erhalten so eine Länge  $\overline{b'k'} > \overline{b's'}$ , die wir von  $b'$  nach oben auftragen; dann ist  $k'$  der Punkt stärkster Abweichung im Motorbereich. — Ebenso finden wir, für  $\xi_x = -1$ , aus:

$$J''_1 = \frac{E_1}{\omega L_1} \sqrt{\frac{1 + 1 - 2 \sin \nu}{\xi_1^2 + (\xi_1 - 1)^2 + \tau^2 + 2 \xi_1 \tau \cos 2 \nu + 2 (\xi_1 - 1) (\tau - \xi_1) \sin \nu}}$$

einen primären Stromwert  $J''_1$ , der, ebenso wie  $J'_1$  verwendet, den Belastungspunkt  $A''$  der stärksten Abweichung außerhalb des Motorbereichs ergibt.

Die „wahre“ Bezugslinie für die primären Kupferverluste ist also nicht die Gerade  $A_0A_\infty$ , sondern die Kurve durch  $A_0k'A_\infty$ , die in Abb. 104 als strichpunktiert gezeichnet ist. Die Strecken  $\overline{bk}$  sind den primären Kupferverlusten „exakt“ proportional.

Wie schon erwähnt, ist die Kurve sehr flach. In Abb. 104 ist der Punkt  $k'$  — nur der Deutlichkeit wegen — viel zu weit nach rechts gelegt. Er liegt in Wahrheit viel näher an  $A_0$ . Wegen der Flachheit des Bogens  $A_0k'A_\infty$  ist es, mit geringem Fehler, zulässig, den Bogen durch den Zug der geraden Linien  $A_0k'$  und  $k'A_\infty$  zu ersetzen, welcher Linienzug daher als richtige Bezugslinie für die primären Kupferverluste anzusehen ist.

Auf einer beliebigen Ordinate  $A_1a_1$  sind nun die Leistungen folgendermaßen verteilt:

$$\begin{array}{ll} \overline{a_1b_1} = \text{Gesamter Zusatzverlust,} & \overline{b_1k_1} = \text{Primärer Kupferverlust,} \\ \overline{k_1l_1} = \text{Sekundärer Kupferverlust,} & \overline{l_1A_1} = \text{Nutzleistung.} \end{array}$$

## Das Drehmoment.

Das Drehmoment ist der gesamten, auf den Rotor übertragenen Leistung proportional. Wir haben im Absatz über den Zusatzverlust die Schlußfolgerung gezogen, daß die Steigerung der Zusatzverluste, über den Minimalbetrag hinaus, hauptsächlich im Rotor stattfindet. Wir haben demnach diese „Steigerung“ der Zusatzverluste als eine auf den Rotor übertragene Leistung anzusehen.

Nennen wir  $P_R$  die auf den Rotor übertragene Leistung, so ist sie daher auszudrücken durch:

$$P_R = E_1 J_1 \cos \varphi_1 - P_{1\text{Cu}} - Z_{\min} \quad (138)$$

In dieser Formulierung besteht  $P_R$  aus der Summe der Nutzleistung  $P_n$ , des sekundären Kupferverlustes  $P_{2\text{Cu}}$  und der Steigerung  $Z_s$  der Zusatzverluste; denn:

$$E_1 J_1 \cos \varphi_1 = P_{1\text{Cu}} + P_{2\text{Cu}} + P_n + Z_{\min} + Z_s$$

Setzen wir in (138) die Werte ein, so ist zunächst nach (74) und (75 a)

$$E_1 J_1 \cos \varphi_1 = E_1 \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{n_x}{N_x} \frac{A(\xi_x + \sin \nu) + B \cos \nu}{n_x \sqrt{A^2 + B^2}}$$

oder mit Beachtung der Werte von  $A$  und  $B$  aus (73):

$$\begin{aligned} & E_1 J_1 \cos \varphi_1 = \\ & = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} (\xi_1 \xi_x^2 + \xi_x^2 \sin \nu + 2 \xi_1 \xi_x \sin \nu - \xi_x \tau \cos 2\nu + \xi_x + \xi_1 + \tau \sin \nu). \end{aligned} \quad (139)$$

Der primäre Kupferverlust ist nach (110) und (111)

$$P_{1\text{Cu}} = \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{n_x^2}{N_x^2} r_1 = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \xi_1 (1 + \xi_x^2 + 2 \xi_x \sin \nu);$$

oder:

$$- P_{1\text{Cu}} = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} (-\xi_1 \xi_x^2 - 2 \xi_1 \xi_x \sin \nu - \xi_1). \quad (140)$$

Aus (115 a) ist:

$$Z_{\min} = J_0^2 \omega L_1 \sin^2 \nu \cdot n_1^2; \quad \text{also wegen (77)}$$

$$Z_{\min} = \frac{E_1^2}{\omega^3 L_1^2} \cdot \frac{1}{n_1^2} \omega L_1 \sin \nu \cdot n_1^2 = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \sin \nu$$

und multiplizieren wir mit  $\frac{N_x^2}{N_x^2}$  und setzen im Zähler für  $N_x^2$  den Wert

aus (98) ein, so wird:

$$\begin{aligned}
 -Z_{\min} = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} & (-\xi_1^2 \xi_x^2 \sin \nu - \xi_1^2 \sin \nu - 2 \xi_1 \xi_x \sin \nu - \xi_x^2 \sin \nu - \\
 & - \tau^2 \sin \nu + 2 \xi_1 \xi_x \tau \sin \nu - 4 \xi_1 \xi_x \tau \sin^3 \nu - 2 \xi_1^2 \xi_x \sin^2 \nu - \\
 & - 2 \xi_1 \xi_x^2 \sin^2 \nu - 2 \xi_1 \tau \sin^2 \nu - 2 \xi_x \tau \sin^2 \nu) \quad (141)
 \end{aligned}$$

Die Addition von (139), (140) und (141) ergibt:

$$\begin{aligned}
 P_R = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} & \{ \xi_x^2 \sin \nu - \xi_x^2 \sin \nu (1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu) + \xi_x [(1 - 2 \xi_1 \sin \nu - \\
 & - 2 \xi_1^2 \sin^2 \nu) - \tau (1 - 2 \xi_1 \sin \nu + 4 \xi_1 \sin^3 \nu)] + \sin \nu (\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \tau \sin \nu) - \tau^2 \sin \nu \}
 \end{aligned}$$

Stellen wir die Ausdrücke in den runden Klammern durch ihre ersten Glieder allein dar, was mit Rücksicht auf die Größenordnung von  $\xi_1 \sin \nu$  und  $\tau$  mit sehr geringem Fehler zulässig ist, so wird:

$$P_R = \frac{E_1^2}{\omega L_1} \frac{1}{N_x^2} \{ \xi_x (1 - \tau) + \sin \nu \cdot \tau (1 - \tau) \}$$

oder:

$$P_R = \frac{E_1^2}{\omega L_1} (1 - \tau) \frac{\xi_x + \tau \sin \nu}{N_x^2} \quad (142)$$

Das ist die — im Belastungsfall  $\xi_x$  — auf den Rotor übertragene Leistung. Somit folgt das Maximum dieser Leistung aus:

$$\frac{d}{d\xi_x} \frac{\xi_x + \tau \sin \nu}{N_x^2} = 0$$

Setzen wir aus (98) den Wert für  $N_x^2$  ein, so folgt, nach ausgeführter Differentiation, für  $\xi_x$  die Beziehung:

$$\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu = \tau^2 + \xi_1^2 (1 - 2 \tau \sin^2 \nu);$$

und vernachlässigen wir in der Klammer die Größe  $2 \tau \sin^2 \nu$  gegenüber 1, so folgt:

$$\xi_x \approx -\tau \sin \nu \pm \sqrt{\tau^2 \sin^2 \nu + \tau^2 + \xi_1^2} \quad (143)$$

als Wert der Belastung, der zum Maximum der auf den Rotor übertragenen Leistung führt.

Es ist nun nach (98)

$$N_x^2 = \xi_1^2 \xi_x^2 + (\xi_1 + \xi_x)^2 + \tau^2 - 2 \xi_1 \xi_x \tau \cos 2 \nu + 2 (\xi_1 + \xi_x) (\xi_1 \xi_x + \tau) \sin \nu.$$

Das können wir in der Form schreiben:

$$\begin{aligned}
 N_x^2 &= \xi_1^2 \xi_x^2 + \xi_1^2 + \xi_x^2 + 2 \xi_1 \xi_x + \tau^2 - 2 \xi_1 \xi_x \tau + 4 \xi_1 \xi_x \tau \sin^2 \nu + 2 \xi_1^2 \xi_x \sin \nu + \\
 &+ 2 \xi_1 \xi_x^2 \sin \nu + 2 \xi_1 \tau \sin \nu + 2 \xi_x \tau \sin \nu = \\
 &= \xi_x^2 (1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu) + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau^2 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu + \\
 &+ 2 \xi_1 \xi_x (1 - \tau + 2 \tau \sin^2 \nu + \xi_1 \sin \nu)
 \end{aligned}$$

In den runden Klammern aber können wir je die zwei letzten Glieder gegenüber den ersten vernachlässigen, so daß mit sehr guter Annäherung:

$$N_x^2 \approx \xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau^2 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu + 2 \xi_1 \xi_x (1 - \tau).$$

Wir können also (142) auch in der Form schreiben:

$$P_R \approx \frac{E_1^2}{\omega L_1} (1 - \tau) \frac{\xi_x + \tau \sin \nu}{\xi_x^2 + 2 \xi_x \tau \sin \nu + \tau^2 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu + 2 \xi_1 \xi_x (1 - \tau)}.$$

Führen wir jetzt aus (143) den positiven Wert für  $\xi_x$  ein, um das Maximum von  $P_R$  im Motorbereich zu erhalten, so wird der Nenner:

$$\begin{aligned} & \tau^2 \sin^2 \nu - 2 \tau \sin \nu \sqrt{\tau^2 \sin^2 \nu + \tau^2 + \xi_1^2} + \tau^3 \sin^2 \nu + \tau^2 + \xi_1^2 + \tau^2 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu - \\ & - 2 \tau^3 \sin^2 \nu + 2 \tau \sin \nu \sqrt{\tau^2 \sin^2 \nu + \tau^2 + \xi_1^2} - 2 \xi_1 (1 - \tau) \tau \sin \nu + \\ & + 2 \xi_1 (1 - \tau) \sqrt{\tau^2 \sin^2 \nu + \tau^2 + \xi_1^2} \end{aligned}$$

Der Zähler aber wird:

$$\sqrt{\tau^2 \sin^2 \nu + \tau^2 + \xi_1^2}.$$

Somit:

$$P_{R(\max)} \approx \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1 - \tau}{2} \frac{\sqrt{\tau^2 \sin^2 \nu + \tau^2 + \xi_1^2}}{\tau^2 + \xi_1^2 + \xi_1 \tau^2 \sin \nu + \xi_1 (1 - \tau) \sqrt{\tau^2 \sin^2 \nu + \tau^2 + \xi_1^2}};$$

oder:

$$P_{R(\max)} \approx \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1 - \tau}{2} \frac{1}{\xi_1 (1 - \tau) + \frac{\tau^2 + \xi_1^2 + \xi_1 \tau^2 \sin \nu}{\sqrt{\tau^2 + \xi_1^2 + \tau^2 \sin^2 \nu}}} \quad (144)$$

Das ist das Maximum der auf den Rotor übertragenen Leistung.

Das Drehmoment  $Dr. M.$  für einen beliebigen Belastungszustand ist nun bekanntlich:

$$Dr. M._{\text{mkg}} = \frac{1}{9,81 \frac{\pi n_0}{30}} \cdot P_R^{(\text{Watt})} \quad (145)$$

wobei  $n_0$  die synchrone Drehzahl ist.

Es kommt nun darauf an, im Diagramm die richtige Bezugslinie für das Drehmoment anzugeben. Diese Linie ist natürlich mit der Bezugslinie für  $P_R$  identisch.

$P_R$  aber ist gegeben durch:

$$P_R = P_n + P_{2\text{Cu}} + Z - Z_{\min}$$

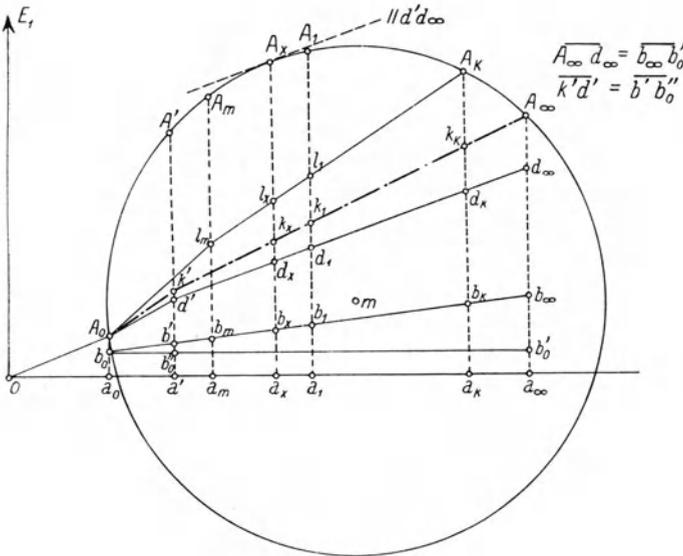
Im Diagramm fanden wir:

$$\begin{aligned} P_n &= \overline{A_1 l_1} \\ P_{2\text{Cu}} &= \overline{l_1 k_1} \\ Z &= \overline{a_1 b_1} \\ Z_{\min} &= \overline{a_0 b_0} \end{aligned}$$

Wenn wir also im Diagramm den Strecken  $\overline{Ak} = \overline{Al} + \overline{lk}$  noch die Differenz  $\overline{ab} - \overline{a_0b_0}$  hinzufügen, so erhalten wir Strecken, die unser  $P_R$  im Wattmaßstab angeben.

Ziehen wir in Abb. 105 durch  $b_0$  die Horizontale nach  $b'_0$ , so geben die Lote von  $b_0b_\infty$  auf  $b_0b'_0$  die Größe  $Z - Z_{\min}$ , d. h. die Steigerung der Zusatzverluste. Tragen wir von  $A_\infty$  die Strecke  $\overline{b_\infty b'_0}$  nach unten

Abb. 105.



ab, und ebenso von  $k'$  die Strecke  $\overline{b' b''}$  nach unten, so ist der Linienzug  $A_0 d' d_\infty$  die richtige Bezugslinie für  $P_R$  und damit für das Drehmoment.

Die Strecken  $\overline{Ad}$  messen die auf den Rotor übertragene Leistung und damit nach (145) das Drehmoment.

Die zu  $d_\infty d'$  parallele Kreistangente berührt den Kreis in  $A_x$ , dem Punkte, dem das maximale Drehmoment  $\overline{A_x d_x}$  entspricht.  $\overline{A_x d_x}$  mißt also das sogenannte Kippmoment.

### Die Schlüpfung.

Der sekundäre Kupferverlust ist:

$$P_{2Cu} = J_2^2 r_2;$$

im Diagramm dargestellt durch Strecke  $\overline{k'l}$ .

Der sekundäre Kupferverlust plus der Nutzleistung ist:

$$P_{2\text{Cu}} + P_n = J_2^2(r_2 + r_b) = J_2^2 r_x$$

im Diagramm dargestellt durch Strecke  $\overline{kA}$ .

Es ist somit:

$$\frac{r_2}{r_x} = \frac{\overline{k\bar{l}}}{\overline{kA}}; \quad \text{und da: } r_x = r_2 \frac{f}{f_s}$$

so ist:

$$\frac{f_s}{f} 100 = s \text{ Proz.} = \frac{\overline{k\bar{l}}}{\overline{kA}} 100 \quad (146)$$

Auch die Schlüpfung  $s$  ist also dem Diagramm, als Verhältnis von Längen, zu entnehmen.

Wenn wir noch einmal die definitive und dabei recht befriedigend genaue Bedeutung der Abschnitte einer beliebigen Betriebsordinate  $A_1 a_1$  feststellen, so ist:

$$\begin{aligned} \overline{a_1 b_1} = Z &= \text{Zusatzverlust}; & \overline{l_1 A_1} = P_n &= \text{Nutzleistung} \\ \overline{b_1 k_1} = P_{1\text{Cu}} &= \text{prim. Kupferverlust}; & \overline{A_1 d_1} = P_R &\doteq \text{Drehmoment} \\ \overline{k_1 l_1} = P_{2\text{Cu}} &= \text{sek. Kupferverlust}; & 100 \frac{\overline{k_1 l_1}}{\overline{k_1 A_1}} = s &= \text{Schlüpfung.} \end{aligned}$$

Zum Schlusse sei noch die Bestimmungsmöglichkeit — aus dem Diagramm — von Größen erwähnt, die einer direkten Messung schwer zugänglich sind.

Das ist zunächst:

$$\xi_2 = \frac{r_2}{\omega L_2}$$

Bestimmung von  $r_2$ :

Im Diagramm ist  $\overline{A_0 A_k}$  der auf den Primärkreis reduzierte sekundäre Kurzschlußstrom  $J'_{2k}$ .

Somit nach (88)

$$J_{2k} = \overline{A_0 A_k} \frac{L_1}{M} \sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu} = \overline{A_0 A_k} \frac{L_1}{M} n_1$$

Nach (48 a) ist:

$$L_1 = L'_1(1 + \tau_1)$$

und nach (44) ist:

$$\frac{L'}{M} = \frac{z_1}{z_2}; \quad \text{somit: } \frac{L_1}{M} = \frac{z_1}{z_2} (1 + \tau_1)$$

und daher:

$$J_{2k} = \overline{A_0 A_k} \frac{z_1}{z_2} (1 + \tau_1) n_1 \text{ Ampère}$$

Der sekundäre Kupferverlust bei Kurzschluß ist:

$$P_{2\text{Cu}(k)} = J_{2k}^2 r_2$$

Dieser Verlust ist im Diagramm durch die Strecke  $\overline{A_k a_k}$  im Wattmaßstab gegeben, also:

$$P_{2\text{Cu}(k)} = \overline{A_k a_k} \text{ (Watt)}$$

und somit:

$$\boxed{r_2} = \frac{\overline{A_k a_k} \text{ (Watt)}}{J_{2k}^2} \quad (147)$$

Bestimmung von  $L_2$ :

Ferner ist:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L'_1}{L'_2} \frac{1 + \tau_1}{1 + \tau_2} = \frac{z_1^2}{z_2^2} \frac{1 + \tau_1}{1 + \tau_2}$$

oder:

$$\boxed{L_2} = L_1 \left( \frac{z_2}{z_1} \right)^2 \frac{1 + \tau_2}{1 + \tau_1} \quad (148)$$

und daher:

$$\boxed{M} = \sqrt{L_1 L_2 (1 - \tau)} \quad (149)$$

Es ist also:

$$\xi_2 = \frac{r_2}{\omega L_2}$$

aus (147) und (148) zu berechnen.

Man könnte  $\xi_2$  auch direkt auf folgende Weise bestimmen.

Wir hatten in (109) die Beziehung gefunden:

$$\tau = 1 - n_1 n_2 \frac{\overline{A_0 A_k}}{O A_k} \quad (\alpha)$$

Hier war bestimmt:  $\tau$  aus (84);  $n_1 = \sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu}$ ; mit:

$\xi_1 = \frac{r_1}{\omega L_1}$ ; aus (82) und:  $\sin \nu$  aus (83).

Die Strecken  $\overline{A_0 A_k}$  und  $\overline{O A_k}$  entnehmen wir dem Diagramm. Es folgt aus ( $\alpha$ )

$$n_2 = \frac{1 - \tau}{n_1 \frac{\overline{A_0 A_k}}{O A_k}}$$

und da:

$$n_2 = \sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu}; \text{ so ist: } 1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu = \left( \frac{1 - \tau}{n_1 \frac{\overline{A_0 A_k}}{O A_k}} \right)^2$$

und daher:

$$\xi_2 = -\sin \nu + \sqrt{\sin^2 \nu + \left( \frac{1 - \tau}{n_1 \frac{A_0 A_k}{O A_k}} \right)^2 - 1} \quad (150)$$

Diese Formel reagiert aber — wie leicht ersichtlich — wegen der Differenz unter der Wurzel auf den kleinsten Meß- oder Konstruktionsfehler, so empfindlich, daß ihr Resultat unsicher ist. Es ist jedenfalls sicherer  $\xi_2$  aus  $r_2$  und  $L_2$  nach dem zuerst angegebenen Vorgang zu bestimmen.

Zur Erläuterung der Herstellung und des Gebrauches des Diagramms möge noch ein Beispiel dienen (s. beiliegende Tafel).

Es soll das Kreisdiagramm eines dreiphasigen Wechselstrommotors aufgenommen werden, der folgende Daten hat:

$$\begin{aligned} \text{Polzahl: } 2p &= 4; & \text{Primärwindungszahl: } z_1 &= 756; \\ & & \text{Sekundärwindungszahl: } z_2 &= 336; \\ \text{Primäre Phasenspannung: } E_1 &= 127 \text{ Volt;} \\ \text{Periodenzahl: } f &= 48,3 \end{aligned}$$

Dann wurde gemessen:

$$\begin{aligned} \text{Primärer Widerstand: } r_1 &= 0,780 \Omega; \\ \text{Sekundäre Spannung bei offenem Rotorkreis: } E_{2,0} &= 54,3 \text{ Volt} \\ \text{Im Leerlauf: } J_0 &= 4,11 \text{ Amp; } \cos \varphi_0 = 0,191 \\ \text{Im Kurzschluß: } J_k &= 49,0 \text{ Amp; } \cos \varphi_k = 0,635 \end{aligned}$$

Letztere Werte sind durch Extrapolation in der früher angegebenen Art gewonnen. Die Spannung konnte hierbei bis zu 85 Proz. der Normalspannung gesteigert werden, so daß die extrapolierten Werte ziemlich zuverlässig sind.

Nun ist zu rechnen nach (83):

$$\sin \nu = \sqrt{\frac{E_1^2 \cos^2 \varphi_0 + r_1^2 J_0^2 - 2 E_1 J_0 r_1 \cos \varphi_0}{E_1^2 + r_1^2 J_0^2 - 2 E_1 J_0 r_1 \cos \varphi_0}} = 0,1665$$

also:

$$\nu = 9^\circ 35'$$

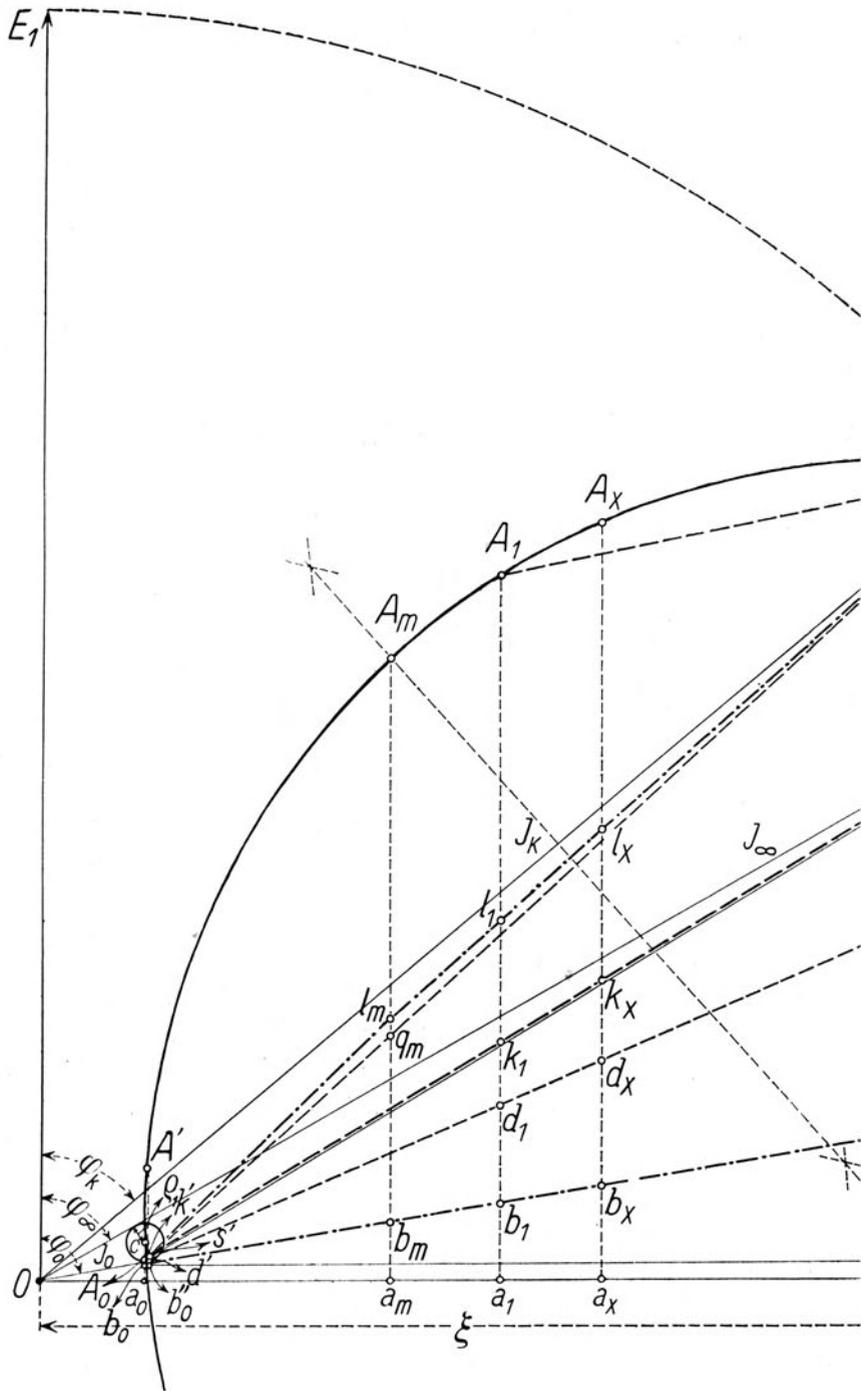
$$\cos \nu = 0,9860; \quad \sin 2\nu = 0,3283; \quad \cos 2\nu = 0,9446$$

nach (82)

$$\omega L_1 = \sqrt{\frac{E_1^2 + r_1^2 J_0^2 - 2 E_1 J_0 r_1 \cos \varphi_0}{J_0}} = 30,75$$

also:

$$L_1 = \frac{30,75}{2\pi f} = 0,1014 \text{ Henry}$$



Tafel zu dem Beispiel in Abschn.



somit:

$$|\underline{\xi}_1| = \frac{r_1}{\omega L_1} = 0,02536; \quad |\underline{n}_1| = \sqrt{1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu} = 1,0045$$

Der ideelle Leerlaufstrom:

$$|\underline{J}_{0i}| = \frac{E_1}{\omega L_1} = 4,13;$$

nach (84)

$$\tau = \frac{\xi_1^2 \cos \nu \frac{J_k^2 - J_0^2}{J_{0i}} - 2 \xi_1 \cos \nu (J_k \cos \varphi_k - J_0 \cos \varphi_0) - (J_k \sin \varphi_k - J_0 \sin \varphi_0)}{\sin 2\nu (J_k \cos \varphi_k - J_0 \cos \varphi_0) + \cos 2\nu (J_k \sin \varphi_k - J_0 \sin \varphi_0) - (\xi_1 \sin 2\nu + \cos \nu) \frac{J_k^2 - J_0^2}{J_{0i}}} = \frac{-34,95}{-531,9} = 0,0657;$$

nach (71): Die Koordinaten des Kreismittelpunktes:

$$|\underline{\eta}| = \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{2 \xi_1 \cos \nu + \tau \sin 2\nu}{\cos \nu \{ \xi_1^2 + \tau (1 + 2 \xi_1 \sin \nu) \}} = 2,26$$

$$|\underline{\xi}| = \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1 + \tau \cos 2\nu}{\cos \nu \{ \xi_1^2 + \tau (1 + 2 \xi_1 \sin \nu) \}} = 33,50$$

und der Radius:

$$\varrho = \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1 - \tau}{\cos \nu \{ \xi_1^2 + \tau (1 + 2 \xi_1 \sin \nu) \}} = 29,47$$

Jetzt wählen wir den Ampère-Maßstab und setzen:

$$1 \text{ cm} = 2 \text{ Amp.}$$

Dann ist dies natürlich auch der Maßstab für  $\eta$ ,  $\xi$  und  $\varrho$ . Der Diagrammkreis erhält also einen Radius von 14,73 cm.

Wir zeichnen den Kreis und können nun durch die Lage der Punkte  $A_0$  und  $A_k$  — die Endpunkte der Vektoren der gemessenen Leerlauf- und Kurzschlußströme —, die auf den Kreis fallen müssen, die Genauigkeit unserer Rechnung kontrollieren.

Die Punkte fallen in der Tat genau auf den Kreis!

Nun suchen wir auf dem Kreise den Punkt  $A_\infty$ , d. h. den Betriebspunkt, welcher der unendlich großen Drehzahl entspricht. Er liegt auf einem — durch den Koordinatenursprung gehenden — Strahl, der mit der Vertikalen (der Richtung der Primärspannung  $E_1$ ) den Winkel  $\varphi_\infty$  einschließt. Es ist aber nach (79):

$$tg \varphi_\infty = \frac{\tau \cos \nu}{\xi_1 + \tau \sin \nu} = 1,785; \quad \text{also: } \varphi_\infty = 60^\circ 45';$$

oder wir können den Punkt  $A_\infty$  so bestimmen, daß wir das zugehörige  $J_\infty$  in den Zirkel nehmen und damit von  $O$  aus den Kreis durchschneiden.  $J_\infty$  ist aber nach (79) bestimmt aus:

$$\underline{J_\infty} = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \xi_1^2 + 2\xi_1 \tau \sin \nu}} = 55,66 \text{ Amp.}$$

Nun fragen wir nach dem konstanten Phasenfehler des Sekundärstromes, dem Winkel  $\beta$ .

Dieser ergibt sich nach (94) aus:

$$\underline{tg \beta} = \frac{\xi_1 \cos \nu}{1 + \xi_1 \sin \nu} = 0,0249; \text{ also: } \beta = 1^\circ 25'$$

Ferner ergibt sich der Radius  $\varrho_1$  des kleinen Kreises, auf dem der Endpunkt des Sekundärstromes, oder der Endpunkt des Magnetisierungsstromes wandert, aus (96a) mit:

$$\varrho_1 = \varrho \frac{\xi_1}{1 + \frac{\xi_1^2}{4} + \frac{\xi_1 \sin \nu}{2}} = 29,47 \cdot 0,0253 = 0,745 \text{ Amp.} = 0,373 \text{ cm.}$$

Wir setzen in  $A_0$  ein, durchschneiden — mit  $\varrho_1$  im Zirkel — den großen Kreis und erhalten im Schnittpunkt  $c$  den Mittelpunkt des kleinen Kreises.

#### Der Spannungsmaßstab.

Der Kurzschlußstrom  $J_k$ , im Diagramm die Strecke  $\overline{OA_k}$ , ist das natürliche Maß für die Primärspannung  $E_1$ . Im Diagramm ist:

$$\overline{OA_k} = 24,5 \text{ cm}$$

Es ist also:

$$E_1 = 127 \text{ Volt} = 24,5 \text{ cm}$$

also:

$$1 \text{ cm} = 5,18 \text{ Volt.}$$

#### Berechnung von $\tau_1$ und $\tau_2$ :

$$\frac{E_1}{E_{2,0}} = \frac{z_1}{z_2} \sqrt{1 + \xi_1^2 + 2\xi_1 \sin \nu} (1 + \tau_1) = \frac{z_1}{z_2} n_1 (1 + \tau_1)$$

$E_{2,0}$ , die Sekundärspannung bei offenem Rotor, haben wir gemessen mit

$$E_{2,0} = 54,3 \text{ Volt}$$

Es ergibt sich somit  $\tau_1$  mit:

$$\tau_1 = \frac{E_1}{E_{2,0}} \cdot \frac{z_2}{z_1} \frac{1}{n_1} - 1 = \frac{127}{54,3} \frac{336}{756} \frac{1}{1,0045} - 1 = 0,036$$

und daher aus (107)

$$\tau_2 = \frac{\tau - \tau_1(1 - \tau)}{(1 + \tau_1)(1 - \tau)} = 0,033$$

Die Bezugslinien:

Der Wattmaßstab ergibt sich aus:

Kurzschlußleistung =  $3 E_1 J_k \cos \varphi_k = 11\,850 \text{ Watt} = \overline{A_k a_k} = 15,63 \text{ cm}$ ;  
somit:

$$1 \text{ cm} = 758,1 \text{ Watt}; \quad 1 \text{ Watt} = 0,01319 \text{ mm.}$$

1. Linie der Zusatzverluste:  $b_0 b_\infty$

Wir berechnen:

$$\overline{a_0 b_0} = 3 J_0^2 \omega L_1 \sin \nu = 259,5 \text{ Watt} = 3,42 \text{ mm.}$$

Ferner berechnen wir nach (116)

$$\overline{a_\infty b_\infty} = 3 J_0^2 \omega L_1 \sin \nu \cdot n_1^2 \frac{\tau}{\tau^2 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu} = 3122 \text{ Watt} = 41,2 \text{ mm}$$

Die Linie  $b_0 b_\infty$  begrenzt also den Zusatzverlust im Bereich  $A_0$  bis  $A_\infty$  und zeigt, daß der Zusatzverlust etwa auf den 12fachen Betrag seines Wertes bei Leerlauf anwächst.

2. Die Leistungslinie  $A_0 l_m A_k$

Wir berechnen aus (131) die Größe:

$$F = \frac{2 \xi_1 (\xi_1 + \xi_2 + \tau \sin \nu)}{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \sin \nu} = 0,0456$$

Nun ziehen wir die Linie  $A_0 A_k$  und legen eine zu  $A_0 A_k$  parallele Tangente an den Kreis, die diesen in  $A_m$  berührt. Wir fällen das Lot  $A_m a_m$ , das die Linie  $A_0 A_k$  in  $q_m$  schneidet, messen die Länge  $\overline{q_m A_m}$  und berechnen:

$$\overline{A_m l_m} = \frac{\overline{A_m q_m}}{1 + F} = \text{Maximale Nutzleistung } P_{n(\max)} \text{ (in Watt)} = 5269 \text{ Watt}$$

Damit haben wir den Punkt  $l_m$ , den Punkt, in welchem die wahre Leistungslinie am meisten von der Geraden  $A_0 A_k$  abweicht, gefunden. Man kann nun — wenn man ganz genau sein will — auf dieselbe Art noch mehrere Punkte der Leistungslinie bestimmen, aus

$$\overline{A l} = \frac{\overline{A q}}{1 + F}$$

oder sich damit begnügen, als Leistungslinie den geknickten Zug der geraden Linien  $A_0 l_m$ ,  $l_m A_k$  anzusehen, wie es im Bilde geschehen ist.

3. Die Trennungslinie der primären und sekundären Kupferverluste.  $A_0 k' A_\infty$

Wir ziehen die Linie  $A_0 A_\infty$ . Dann berechnen wir, für  $\xi_x = 1$ , aus:

$$J'_1 = \frac{E_1}{\omega L_1} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \sin \nu}{\xi_1^2 + (1 + \xi_1)^2 + \tau^2 - 2 \xi_1 \tau \cos 2 \nu + 2(1 + \xi_1)(\xi_1 + \tau) \sin \nu}} = 6,05 \text{ Amp.} = 3,02 \text{ cm}$$

jenen Primärstrom, welcher der größten Abweichung der „wahren“ Trennungslinie von der Geraden  $A_0 A_\infty$  entspricht. Wir durchschneiden — mit  $J'_1$  im Zirkel — den Kreis in  $A'$  und fällen das Lot  $A'a'$ , welches die Linien  $b_0 b_\infty$  und  $A_0 A_\infty$  bzw. in  $b'$  und  $s'$  schneidet. Nun berechnen wir die Größe:

$$K_{1(\max)} = \frac{1 - \tau}{\tau} \frac{\xi_1 + \tau \sin \nu}{1 + \sin \nu} = 0,441;$$

dann ist der primäre Kupferverlust im Punkte  $A'$  gegeben durch:

$$\overline{b'k'} = \frac{\overline{b's'}}{1 - K_{1(\max)}} = 1,79 \overline{b's'}$$

Wir tragen, von  $b'$  aus, die Strecke  $1,79 \overline{b's'}$  nach oben auf, erhalten dadurch den Punkt  $k'$  und nun in dem Linienzuge  $A_0 k' A_\infty$  die wahre Trennungslinie. Das Diagramm zeigt, daß  $A'$  und  $A_0$  beinahe auf demselben Lote liegen.  $\overline{b's'}$  ist aber so klein, das  $k'$  nur ganz unbedeutend über  $A_0 A_\infty$  liegt.

#### 4. Die Drehmomentenlinie.

Wir ziehen durch  $b_0$  die Horizontale  $b_0 b'_0$ , welche das Lot  $A'a'$  in  $b'_0$  schneidet; nun machen wir:

$$\overline{A_\infty d_\infty} = \overline{b'_0 b_\infty}; \quad \text{und} \quad \overline{k'd'} = \overline{b''_0 b'}$$

und erhalten so die Punkte  $d_\infty$  und  $d'$ , wobei  $d'$  mit  $A_0$  nahezu zusammenfällt. Dann ist der Linienzug  $A_0 d' d_\infty$  die Bezugslinie für das Drehmoment; in unserem Falle also beinahe genau die Gerade  $A_0 d_\infty$ .

Um das „Kippmoment“ zu erhalten, legen wir, zu  $d' d_\infty$  parallel, die Tangente an den Kreis, der ihn in  $A_x$  berührt. Dann ist  $\overline{A_x d_x}$  dem Kippmoment proportional. Es ist nämlich die maximale, auf den Rotor übertragene Leistung

$P_{R(\max)} = \overline{A_x d_x} (\text{cm}) \cdot 758,1 \text{ Watt} = 10,46 \cdot 758,1 = 7930 \text{ Watt}$   
und somit das Kippmoment:

$$\text{Dr. } M_{\max} = \frac{p \cdot P_{R(\max)}}{9,81 \cdot 2 \pi f} = \frac{2 \cdot 7930}{9,81 \cdot 6,28 \cdot 48,3} = 5,327 \text{ mkg}$$

Und die hierzu gehörige Schlüpfung ist:

$$s = 100 \frac{\overline{k_x l_x}}{k_x A_x} = 100 \frac{29,0}{88,9} = 32,6 \text{ Proz.}$$

Da die synchrone Tourenzahl dieses Motors:

$$n_0 = \frac{60f}{p} = \frac{60 \cdot 48,3}{2} = 1449 \text{ Touren pro Minute,}$$

so sehen wir ihn „kippen“ bei einer Tourenzahl von

$$1449 (1 - 0,326) = 977.$$

Berechnung von  $L_2$ ,  $M$  und  $r_2$ :

Es ist:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L'_1 (1 + \tau_1)}{L'_2 (1 + \tau_2)} = \frac{z_1^2 (1 + \tau_1)}{z_2^2 (1 + \tau_2)}$$

also:

$$\underline{L_2} = L_1 \left( \frac{z_2}{z_1} \right)^2 \frac{(1 + \tau_2)}{(1 + \tau_1)} = 0,1014 \cdot 0,444^2 \frac{1,033}{1,036} = 0,01991$$

und daher:

$$M = \sqrt{L_1 L_2 (1 - \tau)} = 0,04343.$$

Ist  $J_{2k}$  der sekundäre Kurzschlußstrom, so ist der sekundäre Kupferverlust bei Kurzschluß gegeben durch:

$$P_{2\text{Cu}(k)} = 3 J_{2k}^2 r_2.$$

Dieser Verlust ist im Diagramm durch die Strecke  $\overline{A_k k_k} = 51,3 \text{ mm}$  gegeben.

Er beträgt also:

$$P_{2\text{Cu}(k)} = 51,3 \cdot 75,81 = 3889 \text{ Watt}$$

Der, auf den Primärkreis reduzierte, sekundäre Kurzschlußstrom  $J'_{2k}$  ist im Diagramm die Strecke  $\overline{A_0 A_k} = 227 \text{ mm} = 45,4 \text{ Amp.}$

Also nach (88):

$$\begin{aligned} J_{2k} &= \overline{A_0 A_k} \frac{L_1}{M} \cdot n_1 = \overline{A_0 A_k} \frac{z_1}{z_2} (1 + \tau_1) n_1 = \\ &= 45,4 \frac{756}{336} \cdot 1,036 \cdot 1,0045 = 106,4 \text{ Amp.} \end{aligned}$$

und daher:

$$\underline{r_2} = \frac{3889}{3 \cdot 106,4^2} = 0,115 \Omega,$$

somit folgt aus:

$$\xi_2 = \frac{r_2}{\omega L_2}$$

$$|\xi_2| = \frac{0,115}{303,5 \cdot 0,01991} = 0,0190$$

daher:

$$n_2 = \sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu} = 1,0033$$

Für einen beliebigen Belastungspunkt  $A_1$  ist:  $\overline{A_1 A_k} = E'_2$ , die auf den Primärkreis reduzierte Sekundärspannung. Die wahre Sekundärspannung erhalten wir aus (104) mit:

$$E_2 = E'_2 \frac{L_2}{M} \sqrt{1 + \xi_2^2 + 2 \xi_2 \sin \nu} = E'_2 \frac{L_2}{M} n_2$$

oder da:

$$\frac{L_2}{M} = \frac{z_2}{z_1} (1 + \tau_2)$$

wird:

$$E_2 = E'_2 \frac{z_2}{z_1} (1 + \tau_2) n_2 = E'_2 \frac{336}{756} \cdot 1,033 \cdot 1,0033 = 0,4604 E'_2.$$

Es ist also der Umwandlungsfaktor, welcher die, dem Diagramm entnommene Sekundärspannung in die wahre Sekundärspannung überführt, der Faktor:

$$0,4604.$$

Die hier gegebene Entwicklung des Kreisdiagramms und der Theorie des Induktionsmotors ist unter konsequenter Berücksichtigung der Zusatzverluste, von der Ausgangsdifferentialgleichung aus, geschehen.

Es wurde schon früher bemerkt, daß auch diese Theorie natürlich nur eine Annäherung bedeuten kann, da eben der, von Punkt zu Punkt des Betriebszustandes, veränderlichen Permeabilität  $\mu$  und damit der Veränderlichkeit der Streuung nur insofern Rechnung getragen wird, als das verwendete  $\tau$ , der Streukoeffizient, aus den Extremwerten der Belastung gewonnen wurde und daher einen Mittelwert für den ganzen Belastungsbereich darstellt. Diese Art der Mittelwertbildung ist aber nicht exakt. Immerhin stehen die durch Messung gewonnenen Resultate in recht befriedigender Übereinstimmung mit dieser Theorie.

Will man — wie es in älteren Arbeiten geschah — die Zusatzverluste in der Differentialgleichung nicht berücksichtigen, so muß nur der Winkel  $\nu$  gleich Null gesetzt werden. Alle hier entwickelten Ausdrücke übergehen mit  $\nu = 0$  in die Ausdrücke, die für den eisen- und

reibungsfreien Motor gelten würden und sind dann exakt. Will man nun aber das entstandene Diagramm für den Motor der Praxis verwenden und die Zusatzverluste nachträglich dadurch berücksichtigen, daß man sie — wie es oft geschieht — in der „konstant bleibenden“ Größe des Leerlaufverlustes zu den Strecken  $\overline{Aa}$  hinzuaddiert, d. h. nichts anderes als das man die Abszissenachse um den Betrag des Leerlaufverlustes nach unten verschiebt, so werden die Ergebnisse des Diagramms auch für die Ansprüche der Praxis zu ungenau.

Gerade der Veränderlichkeit der Zusatzverluste, die für das Diagramm sehr bedeutungsvoll ist, trägt die hier mitgeteilte Theorie nach Tunlichkeit Rechnung.

## Berichtigungen während des Druckes.

Überall, wo die goniometrische Funktion durch das Symbol ausgedrückt ist, soll zwischen beiden nicht das Gleichheitszeichen stehen, sondern das Zeichen:

$\approx$ ;

so auf S. 11, Gleichung (10); S. 49, Gleichung (12); S. 89, Gleichung (48).

S. 73, 4. Zeile von unten:

Anstatt  $(\lambda_2^2 - \lambda_1)$  soll stehen  $(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$ .

S. 74, 9. Zeile von oben:

Anstatt  $(-2 \alpha_e^2 \omega_e^2)$  soll stehen  $(-2 \alpha \omega_e^2)$ .

S. 75, 4. Zeile von unten:

Anstatt  $\frac{1}{\omega L}$  soll stehen  $\frac{1}{\omega C}$ .

S. 113, 9. Zeile von unten, in der Gleichung für  $\frac{d\mathcal{E}}{dC}$ :

Anstatt  $L$  soll stehen  $L_1$ .

S. 213, 2. Zeile von oben:

Anstatt konzentrierte soll stehen „konzentrische“.

S. 219, 4. Zeile von unten:

Anstatt  $\varepsilon \operatorname{arctg} \frac{n}{m}$  soll stehen  $\varepsilon \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{bei} z}{\operatorname{ber} z}$ .

S. 237, 7. Zeile von unten:

Anstatt  $c^2 \frac{d^2 jx}{dz^2}$  soll stehen  $c^2 \frac{d^2 jx}{dz^2}$ .

S. 242, 5. und 8. Zeile von unten:

Anstatt  $f$  soll stehen  $\omega$ .

S. 248, 9. Zeile von unten, Gleichung für  $\mathfrak{H}_{i_u} = \mathfrak{H}_x$ :

Anstatt  $i \operatorname{bei}_1$  soll stehen  $\iota \operatorname{bei}_1$ .

S. 304, 8. Zeile von unten:

Anstatt  $\tau$ , den Streukoeffizienten soll stehen  $\tau$ , dem Streukoeffizienten.