

TEUBNERS TECHNISCHE LEITFADEN
BAND 4

BIEBERBACH
DIFFERENTIAL- UND
INTEGRALRECHNUNG

BAND I: DIFFERENTIALRECHNUNG



SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN

TEUBNERS TECHNISCHE LEITFÄDEN

In Bänden zu 8–10 Bogen. gr. 8.

Die Leitfäden wollen zunächst dem Studierenden, dann aber auch dem Praktiker in knapper, wissenschaftlich einwandfreier und zugleich übersichtlicher Form das Wesentliche des Tatsachenmaterials an die Hand geben, das die Grundlage seiner theoretischen Ausbildung und praktischen Tätigkeit bildet. Sie wollen ihm diese erleichtern und ihm die Anschaffung umfangreicher und kostspieliger Handbücher ersparen. Auf klare Gliederung des Stoffes auch in der äußeren Form der Anordnung wie auf seine Veranschaulichung durch einwandfrei ausgeführte Zeichnungen wird besonderer Wert gelegt. — Die einzelnen Bände der Sammlung, für die vom Verlag die ersten Vertreter der verschiedenen Fachgebiete gewonnen werden konnten, erscheinen in rascher Folge.

Bisher sind erschienen bzw. unter der Presse:

Analytische Geometrie. Von Geh. Hofrat Dr. R. Fricke, Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Braunschweig. Mit 96 Fig. [VI u. 135 S.] 1915. M. 11.20. (Bd. 1.)

Darstellende Geometrie. Von Dr. M. Großmann, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule zu Zürich. Band I. Mit 134 Fig. [IV u. 84 S.] 1917. M. 16.— (Bd. 2.). Band II. 2., umg. Aufl. Mit 144 Figuren. [VI u. 154 S.] 1921. (Bd. 3.) M. 32.—

Differential- und Integralrechnung. Von Dr. L. Bieberbach, Professor an der Universität Berlin. I. Differentialrechnung. [IV u. 130 S.] Mit 32 Figuren. Steif geh. M. 11.70. II. Integralrechnung. Mit 25 Figuren. [VI u. 142 S.] 1918. Steif geh. M. 13.60 (Bd. 4/5.)

Funktionentheorie. Von Dr. L. Bieberbach, Professor a. d. Universität Berlin. (Bd. 14.)

Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendung auf die mathematische Physik. Von Prof. Dr. R. Gans, Direktor des physikalischen Instituts in La Plata. 4. Aufl. Geh. M. 37.60, geb. M. 44.80

Praktische Astronomie. Geograph. Orts- u. Zeitbestimmung. Von V. Theimer, Adjunkt a. d. Montanistischen Hochschule zu Leoben. Mit 62 Fig. [IV u. 127 S.] 1921. M. 32.— (Bd. 13.)

Feldbuch für geodätische Praktika. Nebst Zusammenstellung der wichtigsten Methoden und Regeln sowie ausgeführten Musterbeispielen. Von Dr.-Ing. O. Israel, Prof. an der Techn. Hochschule in Dresden. Mit 46 Fig. [IV u. 160 S.] 1920. Kart. M. 32.—. (Bd. 11.)

Erdbau, Stollen- und Tunnelbau. Von Dipl.-Ing. A. Birk, Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Prag. Mit 110 Abb. [V u. 117 S.] 1920. Kart. M. 15.20. (Bd. 7.)

Landstraßenbau einschließlich Trassieren. Von Oberbaurat W. Euting, Stuttgart. Mit 54 Abb. i. Text u. a. 2 Taf. [IV u. 100 S.] 1920. Kart. M. 22.40 (Bd. 9.)

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

TEUBNERS TECHNISCHE LEITFÄDEN
BAND 4

DIFFERENTIAL-
UND INTEGRALRECHNUNG

VON

DR. LUDWIG BIEBERBACH

O. Ö. PROFESSOR AN DER FRIEDRICH-WILHELMS-
UNIVERSITÄT BERLIN

BAND I: DIFFERENTIALRECHNUNG

ZWEITE, VERMEHRTE UND
VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 34 FIGUREN IM TEXT



SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH 1922

ISBN 978-3-663-15488-4
DOI 10.1007/978-3-663-16060-1

ISBN 978-3-663-16060-1 (eBook)

SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA

**COPYRIGHT 1922 BY SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN
URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI B. G. TEUBNER, LEIPZIG 1922**

**ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN**

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Werk, aus Vorlesungen erwachsen, ist zum Gebrauch neben Vorlesungen bestimmt. Es wendet sich hauptsächlich an die Studierenden unserer Universitäten. Darum lege ich stets das Hauptgewicht auf eine exakte Formulierung der Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung und einen exakten Beweis ihrer grundlegenden Sätze. Ich habe mich, wie es sich für einen Leitfaden gehört, bemüht, namentlich den methodischen Gehalt der Beweise hervortreten zu lassen, und habe daher selten die Sätze so allgemein ausgesprochen, als es möglich gewesen wäre. Sonst hätte nämlich unwesentliches Beiwerk den Beweis schleppend gemacht und die Wirksamkeit und Zugkraft des Grundgedankens verwischt. Überall hatte ich das Bestreben, enzyklopädische Kürze zu vermeiden. Wo es nötig schien, habe ich auch eine breite Darstellung nicht gescheut. Kürze und äußerste Knappheit schien mir nur da im Interesse des Lesers, wo es galt, einen Beweis unter etwas anderen Umständen, aber mit demselben Grundgedanken zu wiederholen. Die Arbeit, sich das Wort für Wort zu übersetzen, habe ich immer dem Leser überlassen. Geometrische und andere theoretische Verwendungen sind nur insoweit berücksichtigt, als sie zur Erläuterung, Belebung und Veranschaulichung des Vorgetragenen dienlich schienen. Sie waren mir nur Mittel zu diesem Zweck. Jedoch habe ich die Probleme, die die Anwendungsgebiete der Theorie dieser selbst stellen, voll berücksichtigt und daher überall versucht, die Gedankenentwicklung so weit zu führen, als es das Ziel einer praktischen Beherrschung der theoretischen Rechnungen und Überlegungen verlangt. Das sind mir schon rein pädagogisch vorzügliche Mittel zur Vertiefung des Verständnisses der Überlegungen, die man allgemein der „reinen“ Mathematik zurechnet. Es scheint mir nicht allein historisch ein Fehler, diese Dinge von der „reinen“ Mathematik loszureißen, um aus ihnen und manchen anderen ein neues Gebiet zu machen, die angewandte Mathematik, die man dann zwischen die reine Mathematik und ihre Anwendungsgebiete¹⁾ keilen möchte. Das zerstört wider die Absicht den lebendigen Odem der Anregungen von außen,

1) Das erst ist im richtigen Sprachgebrauch „angewandte“ Mathematik. Was man gewöhnlich so nennt, müßte sprachlich richtig „anwendbare“ oder praktische Mathematik heißen

der die Mathematik entstehen hieß und dem sie immerfort und vielfach neues Leben verdankt.

Ich will mit dem Gesagten nicht bestreiten, daß es nützlich ist wie andere Spezialgebiete der reinen Mathematik auch die Fragen der Anwendbarkeit zusammenhängend zu behandeln. Das geht aber nur auf Grund der Theorie und nicht ohne sie oder gar im Widerspruch mit ihr.

Ich sage das alles zur Erläuterung, warum in diesem Werk so eminent theoretische Fragen, wie die der stetigen, nirgends differenzierbaren Funktionen, und so anwendbare, wie die Methode der graphischen Integration, einträchtig nebeneinander stehen. Darum habe ich mich auch immer bemüht aufzuweisen, wie die Begriffsbildungen der Mathematik im Grunde begriffliche Fassung und damit Stilisierung von Vorstellungsinhalten sind, welche selbst als Unterlage logischer Operationen nichts taugen.

Verschiedene Male bin ich von den sonst üblichen ausgetretenen Pfaden der Beweisführung abgewichen. Denn vielfach gibt es trotz aller Tradition Beweise, die einfacher sind als die zumeist üblichen. Ich verweise z. B. auf die Behandlung des Fundamentalsatzes der Integralrechnung.

Für treue Hilfe bei den Korrekturen sage ich Herrn Privatdozent Dr. O. Szász in Frankfurt und nicht minder Herrn Lehramtskandidat E. Schwarck in Lötzen aufrichtigen Dank.

Frankfurt a. M., im Sommer 1917

Bieberbach.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die zweite Auflage ist ein genau durchgesehener und verbesserter Abdruck der ersten. Neuaufgenommen habe ich weitergehende Veranschaulichungen der unendlichen Reihen und einen kurzen Abschnitt über hyperbolische Funktionen. In den zweiten Band soll die aus unseren heutigen Lehrbüchern meist verschwundene, aber für die numerische Auswertung von Reihen und Integralen so wichtige Eulersche Summenformel Aufnahme finden.

Berlin, im Sommer 1921.

Bieberbach.

Inhaltsverzeichnis.

| | Seite |
|--|-------|
| I. Der Funktionsbegriff. | 1 |
| § 1. Die Funktion als analytischer Ausdruck | 1 |
| § 2. Graphische Darstellungen | 3 |
| § 3. Ganze rationale Funktionen und ihre Nullstellen | 6 |
| § 4. Algebraische und transzendente Funktionen | 8 |
| § 5. Funktionen, die nicht als analytische Ausdrücke gegeben sind | 10 |
| II. Der Zahlbegriff. | 11 |
| § 1. Vorbereitung. | 11 |
| § 2. Der Grenzbegriff | 16 |
| § 3. Das Axiom der Intervallschachtelung. | 20 |
| § 4. Irrationalzahlen und unendliche Dezimalbrüche | 25 |
| § 5. Der Satz vom Dedekindschen Schnitt | 30 |
| III. Unendliche Reihen. | 32 |
| § 1. Fragestellung | 32 |
| § 2. Geometrische Veranschaulichung. | 33 |
| § 3. Stets wachsende Zahlenfolgen und Reihen mit positiven Gliedern. | 34 |
| § 4. Konvergenzkriterien | 35 |
| § 5. Alternierende Reihen | 39 |
| § 6. Beliebige Zahlenfolgen und unendliche Reihen | 40 |
| § 7. Bedingt und unbedingt konvergente Reihen | 43 |
| § 8. Die Multiplikation der absolut konvergenten Reihen. | 47 |
| § 9. Die Berechnung der Summe unendlicher Reihen | 48 |
| IV. Stetige Funktionen. | 50 |
| § 1. Grenzwerte von Funktionen | 50 |
| § 2. Stetige Funktionen | 55 |
| § 3. Allgemeine Sätze über stetige Funktionen | 57 |
| § 4. Mittelbare und inverse Funktionen | 59 |
| V. Differentialrechnung | 61 |
| § 1. Definition des Differentialquotienten | 61 |
| § 2. Differentiationsregeln | 65 |
| § 3. Die Exponentialfunktion und der Logarithmus | 71 |
| VI. Einige geometrische Anwendungen | 77 |
| § 1. Tangenten und Normalen | 77 |
| § 2. Die Vorzeichen der Ableitungen. | 78 |
| § 3. Einiges über Kurvendiskussion | 80 |
| VII. Die Taylorsche Formel | 82 |
| § 1. Der Satz von Rolle. | 82 |
| § 2. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung | 82 |
| § 3. Einige Anwendungen des Mittelwertsatzes | 83 |
| § 4. Beweise der Taylorschen Formel. | 87 |

| | |
|--|-----|
| § 5. Maxima und Minima | 89 |
| § 6. Die Taylorsche Reihe | 90 |
| § 7. Die Berechnung der Logarithmentafeln | 95 |
| § 8. Der binomische Satz | 97 |
| § 9. Über die Interpolation und ihren Zusammenhang mit der Taylorschen Formel | 99 |
| VIII. Unbestimmte Formen | |
| § 1. $\frac{0}{0}$ | 103 |
| § 2. Eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes | 104 |
| § 3. $\frac{\infty}{\infty}$ | 104 |
| § 4. Andere unbestimmte Ausdrücke | 106 |
| IX. Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion. | |
| 107 | |
| X. Funktionen von zwei Variablen | |
| 111 | |
| § 1. Grenzwerte und Stetigkeit | 111 |
| § 2. Ableitungen | 117 |
| § 3. Implizite Funktionen | 120 |
| § 4. Die Taylorsche Formel | 128 |
| § 5. Theorie der Maxima und Minima | 129 |
| Register | |
| 132 | |

I. Der Funktionsbegriff.

§ 1. Die Funktion als analytischer Ausdruck. Ausdrücke wie die folgenden $y = x + 1$, $y = 2x^2 + 3$, $y = ax + b$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = \log x$, $y = x!$ erlauben es entweder, ohne weiteres zu gegebenen Werten von x die zugehörigen Werte von y zu berechnen, oder es sind doch dadurch wie bei $y = \sin x$ und $y = \log x$ in bekannter Weise gegebenen Werten der unabhängigen Veränderlichen x bestimmte, etwa aus einer Tafel zu entnehmende Werte der abhängigen Veränderlichen y zugeordnet. Jedesmal, wenn dies der Fall ist, heißt y eine *Funktion* von x . Man pflegt zur Abkürzung $y = f(x)$ zu schreiben. Dabei ist also mit $f(x)$ die Vorschrift oder der analytische Ausdruck oder der gesetzmäßige Zusammenhang bezeichnet, der die den einzelnen x -Werten zugehörigen y -Werte bestimmt. Immer heißt x die unabhängige Veränderliche, weil die Werte von x beliebig gegeben werden können, und y die abhängige Veränderliche, weil die Werte von y eben durch die gegebenen Werte von x bestimmt sind, also von diesen abhängen. x und y heißen Veränderliche, weil sie nicht ein für allemal feste Zahlen bedeuten, sondern weil sie verschiedene (veränderliche) Werte annehmen können. Diese Angaben sind wohl eine genügende Erläuterung für den Sinn der folgenden

Definition: y heißt eine Funktion von x , wenn gegebenen Werten von x Werte von y zugeordnet sind.

Bemerkungen: 1. Es ist durch die Definition nicht verlangt, daß jedem Wert von x ein Wert von y zugeordnet ist. Die Funktion braucht also nicht für alle Werte von x erklärt zu sein. Ein Beispiel dafür war schon zu Beginn des Paragraphen gegeben: $y = x!$, eine Funktion, die also nur für ganzzahlige x -Werte erklärt ist, nämlich als das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis x , also $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x$. Man liest $y = x$ -Fakultät.

In ähnlicher Weise ist der Logarithmus wohl dem Leser auf der Schule nur für positive Werte von x erklärt worden.

Wir wollen uns also den Vorrat der Werte von x , für die unsere Funktion erklärt sein soll, ganz beliebig denken; es kann bald dieser, bald jener sein, je nach den Zwecken, die man verfolgt.

2. Unsere Definition verlangt nicht, daß jedem x -Wert, für den die Funktion erklärt ist, nur ein Wert von y zugeordnet ist. Es können mehrere sein. Bei $y = \sqrt{x}$ gehören ja bekanntlich zu jedem x zwei Werte von y , die sich voneinander durchs Vorzeichen unterscheiden.

Erklärung: Wenn den x -Werten immer nur ein y -Wert zugeordnet ist, so sprechen wir von einer *eindeutigen* Funktion; sind allen oder einzelnen x -Werten mehrere Werte von y zugeordnet, so haben wir es mit einer *mehrdeutigen* Funktion zu tun.

3. Nach unserer Definition der Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen x wird es dem Leser klar sein, daß man z eine Funktion $z = f(x, y)$ der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y nennen wird, wenn den Wertepaaren (x, y) Werte von z zugeordnet sind; z. B. durch den Ausdruck $z = x^3 + 3y^2$.

4. Die in der Definition verlangte Zuordnung kann auf die mannigfachste Art und Weise hergestellt werden; es kann durch einen *expliziten* analytischen Ausdruck $y = f(x)$ geschehen, aber es gibt auch noch andere Möglichkeiten dafür. So kann z. B. die Herstellung eines expliziten Ausdruckes erst noch Rechenarbeit verlangen, sofern sie überhaupt möglich ist. So ist z. B. durch eine Gleichung wie $x^2 + xy^2 - 4y + 1 = 0$ auch y als Funktion von x definiert; wir brauchen ja nur den Wert von x , für den wir y berechnen wollen, einzusetzen und dann die Gleichung nach y aufzulösen; oder wir können auch die Auflösung der Gleichung ein für allemal bewerkstelligen und dann in die fertige Formel gegebene x -Werte einsetzen und y berechnen. Das war nur ein Beispiel; die vorgelegte Gleichung kann auch so kompliziert sein, daß es ohne tiefere Hilfsmittel gar nicht möglich ist, eine explizite Formel aus ihr zu gewinnen. Nichtsdestoweniger wird man häufig in der Lage sein, nach Einsetzen des gegebenen x -Wertes in die Gleichung z. B. durch Probieren zwar nicht absolut genaue — was ja auch sonst nur in den seltensten Fällen möglich sein wird —, aber doch praktisch brauchbare Näherungswerte zu finden. Wie das in den einzelnen Fällen zu machen ist, wollen wir bei der Fassung unserer Definition dahingestellt sein lassen. Wir nennen y eine *implizite* Funktion von x , wenn eine Gleichung $f(x, y) = 0$ zwischen x und y gegeben ist, wenn also zusammengehörige Werte von x und y dadurch erklärt sind, daß sie eine Funktion zweier Variabler zum Verschwinden bringen.

Es sei uns eine Funktion durch einen analytischen Ausdruck von der folgenden Art gegeben $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, z. B. $y = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$. Dabei soll n , der Grad der Funktion, irgendeine positive ganze Zahl sein, die Koeffizienten a_i sind irgendwelche fest gegebene Zahlen. Eine derartige Funktion heißt eine *ganze rationale Funktion n^{ten} Grades*. Zu ihrer Berechnung für gegebene x -Werte ist also nur die Verwendung der vier Grundrechnungsarten nötig; insbesondere ist bei diesen ganzen Funktionen niemals mit dem Wert von x eine Division auszuführen; denn x kommt nirgends im Nenner vor. Lassen sich Divisionen mit x selbst nicht vermeiden, so liegt eine *gebrochene* rationale Funktion vor. Eine solche läßt sich, wie man schon auf der Schule

lernt, immer auf Hauptnenner bringen. Sie kann also immer in der Gestalt

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

geschrieben werden.

Daß hiernach eine *ganze rationale Funktion von zwei Variablen* durch einen Ausdruck von der Form $|z = \sum a_{i,k} x^i y^k|$ erklärt wird, bedarf keiner näheren Erläuterung. Er entsteht also durch Summation von lauter Einzelausdrücken $a_{i,k} x^i y^k$. Die Exponenten i, k sind wieder ganze positive Zahlen. Die höchste in einem Glied vorkommende Summe der beiden Exponenten $i + k$ heißt die *Ordnung* oder der *Grad* der Funktion. So ist also z. B. $z = x^2 y + x^2 + y + 1$ vom dritten Grade.

Eine Funktion, die durch Nullsetzen einer ganzen rationalen Funktion $f(x, y)$ erklärt werden kann, heißt eine *algebraische Funktion*. Alle anderen Funktionen, die also nicht Lösungen einer algebraischen Gleichung zwischen x und y sein können, heißen *transzendente Funktionen*.

Ob eine gegebene Funktion transzendent ist oder nicht, bedarf gewöhnlich einer näheren Untersuchung, die schwierig sein kann. Es gibt jedoch ein elementares, oft ausreichendes Kriterium, das wir ableiten wollen (§ 3). Wir werden daraus z. B. entnehmen können, daß $y = \sin x$ eine transzendente Funktion ist.

§ 2. Graphische Darstellungen. Der in § 1 eingeführte Funktionsbegriff ist einer wichtigen geometrischen Deutung fähig. Wir erhalten sie, wenn wir die Grundvorstellungen der analytischen Geometrie, insbesondere den Koordinatenbegriff, heranziehen. Das sind Dinge, die wir als bekannt voraussetzen. Fassen wir dann x und y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes auf, so wird das geometrische Bild einer Funktion $y = f(x)$ eine Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$. Umgekehrt aber ist auch durch die Aufzeichnung einer Kurve in einem rechtwinkligen Koordinatensystem eine Funktion definiert; denn die aufgezeichnete Kurve erlaubt es, zu vorgegebenen x -Werten zugehörige y -Werte zu bestimmen. Das sind die Ordinaten derjenigen Kurvenpunkte, deren Abszisse dem gegebenen x -Wert gleich ist. An einfachen Figuren wie den umstehenden Figuren 1 und 2 wird sich der Leser den Unterschied zwischen *eindeutigen und mehrdeutigen* Funktionen klar machen. In Fig. 1 wird der Leser bei jeder Abszisse nur einen Kurvenpunkt finden, in Fig. 2 dagegen gehören zu einzelnen Abszissen mehrere Kurvenpunkte. Die Funktion, deren geometrisches Bild die Kurve darstellt, ist also mehrdeutig.

Wir haben oben schlechthin das geometrische Bild einer Funktion *Kurve* genannt. Die Kurven, die wir so erhalten, entsprechen nicht immer den landläufigen Vorstellungen, die man sich und die sich wohl auch der Leser von einer Kurve zu machen pflegt. Wenn

sich z. B. der Leser das geometrische Bild der Funktion $y = x!$ aufzeichnet, so sieht er oder weiß es von vornherein, daß dieses Bild, das wir oben Kurve nannten, überhaupt nur aus einzelnen Punkten besteht. Nur zu ganzzahligen Abszissen gehören Kurvenordinaten, weil unsere Funktion nur für ganzzahlige Werte von x erklärt ist. Nichtsdestoweniger wollen wir auch für diese geometrischen Bilder das Wort Kurve beibehalten.¹⁾ Wir haben dann eine kurze Benennung. Was wir eben sahen, ist nicht das einzige Unerwartete, was unserem Kurvenbegriff anhaftet. Wir werden im Laufe unserer Betrachtungen noch manche Absonderheit treffen (z. B. S. 107 ff.). Und es ist auch gut, wenn der Leser sich von vornherein daran gewöhnt, daß zwar die meisten mathematischen

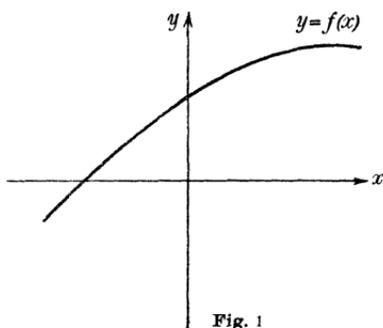


Fig. 1

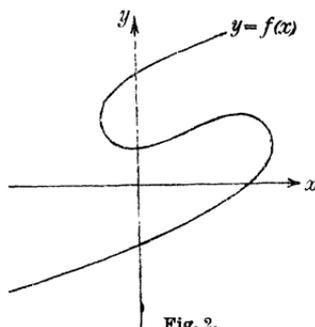


Fig. 2.

Begriffsbildungen letzten Endes aus Anschauung oder Erfahrung stammen, daß sie aber nie den vollen und genauen Inhalt unserer Vorstellungen wiedergeben. Wollte der Leser versuchen, den Kurvenbegriff so zu fassen, daß er den vollen Inhalt unserer Vorstellung wiedergäbe, so würde er sicher nicht ohne eine recht verzwickte Beschreibung auskommen. Wir wollen daher das Wort Kurve als einen bequemen Ausdruck für das geometrische Bild einer Funktion in irgendeinem Koordinatensystem verwenden. Statt rechtwinkliger Koordinaten können dabei ebensogut schiefwinklige oder Polarkoordinaten usw. Verwendung finden.

Wir beschließen diesen Paragraphen mit einem Beispiel einer Kurve bzw. Funktion, auf die wir uns noch öfter beziehen werden. Wir wollen es der Theorie der *Zykloiden* entnehmen. Denken wir uns einen Kreis auf einer anderen Kurve, etwa einer Geraden oder einem Kreis, rollen, so beschreibt ein mit dem rollenden Kreis fest verbundener Punkt eine Kurve, eine Rollkurve oder Zykloide. Der Leser findet darüber auch einiges in Fricke's Leitfaden der analytischen Geometrie auf S. 83 ff. Wir wollen einen Kreis auf einer Geraden rollen lassen und die Kurve betrachten, die ein Punkt

1) Es handelt sich ja hier um ein Vorkommen isolierter Kurvenpunkte, die uns später auch sogar bei algebraischen Kurven wieder begegnen werden (S. 126)

seiner Peripherie beschreibt. Wir machen die genannte Gerade zur x -Achse und wählen senkrecht dazu irgendwie die y -Achse. Nun denken wir uns den Kreis auf die x -Achse gelegt und zunächst den Punkt, der die Kurve beschreiben soll, als tiefsten Punkt gewählt. Er mag in dieser Lage etwa in den Koordinatenanfangspunkt fallen. Von dieser Ausgangslage an lassen wir den Kreis rollen. Wir haben in der Fig. 3 eine weitere Lage gezeichnet. Dabei mag der Kreis gegen die Ausgangslage um den Winkel φ gerollt sein. Dann wird also der Kreisradius, auf dem unser Punkt liegt, gegen die Ausgangslage sich um φ gedreht haben. Sei r die Länge des Kreisradius; dann können wir sofort die Koordinaten des Punktes in seiner neuen Lage aus der Figur ablesen. Wir finden

$$x = r\varphi - r \sin \varphi,$$

$$y = r - r \cos \varphi.$$

Denn das Stück der x -Achse von 0 bis A muß dem darauf abgerollten Kreisbogen A bis P gleich sein, also gleich $r\varphi$.¹⁾ Davon

ist die Strecke BA abzuziehen, die man dem kleinen rechtwinkligen Dreieck entnimmt. Aus diesem liest man auch leicht

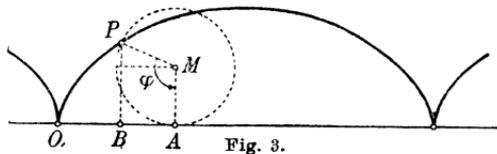


Fig. 3.

den angegebenen Ausdruck für y ab. Den ungefähren Verlauf der Kurve haben wir in der Figur angegeben. Sie definiert uns eine Funktion. Wir haben auch durch die Berechnung von x und y einen analytischen Ausdruck für diese Funktion gefunden. Das ist aber eine andere Art von analytischen Ausdrücken, als die, welche wir im vorigen Paragraphen kennen lernten. Diese neue Art heißt *Parameterdarstellung der Funktion bzw. Kurve*, weil die Zuordnung der y -Werte zu den x -Werten nicht unmittelbar geschieht, wie im vorigen Paragraphen, sondern durch Vermittlung eines Parameters. Man greift oft zu diesem Mittel, weil eine solche Parameterdarstellung vielfach einfachere Ausdrücke liefert, als die im vorigen Paragraphen herangezogenen Mittel. Man kann natürlich immer wenigstens in Gedanken zu einer Darstellung von der Form $y = f(x)$ übergehen. Man hat ja nur das einem gegebenen x -Wert zugehörige φ auszurechnen und in den Ausdruck von y einzutragen. Das würde aber z. B. hier sehr weitläufig. Einfacher, aber noch kompliziert genug, ist es, zunächst aus der zweiten Gleichung φ durch y auszudrücken und in die Gleichung für x

1) Wir messen hier und in der Folge immer die Winkel im Bogenmaß. Wir verweisen den Leser, der schon eine strenge Begründung vermißt, auf die Ausführungen über die Rektifikation des Kreises im Bändchen über Integralrechnung.

einzutragen. Man erhält so die Kurvengleichung in expliziter Gestalt von der Form $x = f(y)$.

Die hier besprochenen graphischen Darstellungen führen uns noch zu einer anderen Begriffsbildung hin, nämlich zur *Umkehrungsfunktion*. Eine gezeichnet vorgelegte Kurve definiert bei gegebenem Koordinatensystem nicht nur eine Funktion, sondern deren zwei. Wir benutzen bisher die Kurve dazu, um zu gegebenen Abszissen die zugehörigen Ordinaten zu bestimmen. Wir faßten also x als unabhängige, y als abhängige Variable auf. Wir können auch beide ihre Rolle vertauschen lassen und die zu gegebenen Ordinaten zugehörigen Abszissen ablesen. Lieferte nun die erste Ablesung $y = f(x)$ und die zweite $x = \varphi(y)$, so nennen wir $x = \varphi(y)$ die *Umkehrungsfunktion oder inverse Funktion* von $y = f(x)$. Wenn wir $y = f(x)$ haben, können wir sie natürlich auch rein rechnerisch finden, indem wir $y = f(x)$ nach x auflösen.

Der Unterschied zwischen ein- und mehrdeutigen Funktionen war an den Kurven leicht klar zu legen. Der Unterschied zwischen algebraischen und transzendenten Funktionen springt geometrisch nicht immer sofort in die Augen. Doch werden wir bald lernen, wie wir manchen Kurven doch sofort ansehen können, daß sie nicht algebraisch sind.

§ 3. Ganze rationale Funktionen und ihre Nullstellen.

Wenn α_1 und α_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ sind, so kennt jedermann die für alle x geltende Faktorzerlegung $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = a_0 (x - \alpha_1) (x - \alpha_2)$. In ihr ist jedenfalls die Aussage enthalten, daß immer, wenn α_1 eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, die auf der linken Seite stehende ganze rationale Funktion zweiten Grades $f(x)$ durch $x - \alpha_1$ teilbar ist. Dabei nenne ich also allgemein die ganze rationale Funktion $f(x)$ durch die ganze rationale Funktion $\varphi(x)$ teilbar, wenn der Quotient $q(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ selbst wieder eine ganze rationale Funktion ist. Der eben bei Funktionen zweiten Grades festgestellte Satz gilt allgemein: Wenn α_1 eine Wurzel der Gleichung $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ist, so ist die ganze rationale Funktion $f(x)$ durch $x - \alpha_1$ teilbar.

Das läßt sich leicht einsehen, wenn man nur daran denkt, wie man die Division $f(x)$ durch $x - \alpha_1$ auszuführen pflegt. Man erhält dabei einen Quotienten vom $(n - 1)$ ten Grad $q_1(x)$ und einen Rest r von niedrigerem Grade als der Divisor $x - \alpha_1$, d. h. also hier einen konstanten Rest. Ich kann daher das Resultat der Rechnung so notieren: $f(x) = q_1(x)(x - \alpha_1) + r$. Das gilt nun für alle x , also namentlich auch für $x = \alpha_1$. Für diesen Wert erhalte ich aber $r = f(\alpha_1)$. Da aber α_1 eine Wurzel von $f(x) = 0$ ist, so habe ich $r = f(\alpha_1) = 0$. Daher gilt $f(x) = q_1(x)(x - \alpha_1)$. Damit ist unser Satz bewiesen.

Wir können aus ihm sofort folgern, daß eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ höchstens n Wurzeln hat. Denn entweder hat der eben berechnete Quotient $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades keine Wurzel, oder er besitzt Wurzeln. Im ersten Falle ist mein Satz bewiesen. Denn dann hat $f(x) = 0$ selbst außer $x = \alpha_1$ keine Wurzel. Wäre nämlich $x = \alpha_2$ eine solche von α_1 verschiedene Wurzel, so hätte ich $f(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Wegen $\alpha_2 \neq \alpha_1$ muß also $q_1(\alpha_2) = 0$ sein, gegen die Annahme. Hat aber $q_1(x) = 0$ selbst eine Nullstelle α_2 , so kann ich schreiben $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$. Daher gilt $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q_2(x)$. α_2 ist also eine Wurzel von $f(x) = 0$. Auf die angegebene Weise kann ich weiter schließen und immer neue Linearfaktoren abspalten. Bei jedem dieser Schritte erniedrigt sich aber der Grad des noch nicht in Linearfaktoren zerlegten Faktors um eine Einheit. Ich kann also höchstens n mal nacheinander Linearfaktoren abspalten. Daraus folgt aber, wie oben behauptet wurde, daß eine Gleichung n^{ten} Grades höchstens n Wurzeln hat. Daß sie bei $a_0 \neq 0$ genau n Wurzeln hat, oder daß das Abspalten von Linearfaktoren genau n mal geht, ist der Inhalt des *Fundamentalsatzes der Algebra*¹⁾: *Jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades ($n > 0, a_0 \neq 0$) hat mindestens eine Wurzel.* Ich kann also jedesmal von dem noch nicht zerlegten Faktor bei dem obigen Prozeß mindestens einen Linearfaktor abspalten, solange dieser Faktor noch von x abhängt. Von x unabhängig wird er aber selbstverständlich erst nach n Schritten, so daß ich also immer n mal nacheinander je einen Linearfaktor abspalten kann. Der dann schließlich noch bleibende konstante Schlußfaktor stimmt mit dem Koeffizienten a_0 überein. Man erkennt das sofort beim Wiederausmultiplizieren der Linearfaktoren durch Betrachtung des Koeffizienten von x^n . Daher bekomme ich immer eine Zerlegung der folgenden Art:

$$f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Ist aber weiter $f(\alpha) = 0$, so muß einer der Faktoren $x - \alpha_k = 0$ sein, so daß also außer den α_k keine Wurzeln auftreten. Wir können daher das Resultat so aussprechen: *Eine jede algebraische Gleichung hat n Wurzeln.* Das ist also nur eine andere Sprechweise für die Tatsache, daß ich eine Funktion n^{ten} Grades (mit nichtverschwindendem Koeffizienten des höchsten Gliedes) immer in genau n Linearfaktoren zerlegen kann. Diese brauchen natür-

1) Wir werden diesen Satz in diesem Buche immer als richtig annehmen, wie er denn auch dem Leser von Beispielen her geläufig ist. Sein Beweis ist nicht Gegenstand dieses Werkes. Der Leser, den die Verwendung eines nicht bewiesenen Satzes stört, mag sich ruhig auf den Standpunkt stellen, daß alles Gesagte eben nur für solche Funktionen gilt, für die der Satz richtig ist. Er kennt solche Funktionen, und andere als solche werden ihm nie begegnen

lich nicht alle voneinander verschieden zu sein, wie dem Leser von trivialsten Beispielen geläufig ist, z. B. $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$. Wenn wir also nur die voneinander verschiedenen Wurzeln zählen wollen, so können dies weniger als n sein. Man kommt aber überein, einer jeden Wurzel eine gewisse Vielfachheit zuzuerteilen. Man zählt nämlich jede Wurzel α so oft, als bei der Zerlegung von $f(x)$ in Linearfaktoren der Faktor $x - \alpha$ auftritt. So rede ich also von einer dreifachen Wurzel, wenn der Faktor $x - \alpha$ genau dreimal vorkommt.

Zusatz: Wenn ich irgendwoher weiß, daß eine ganze rationale Funktion erstens höchstens vom n^{ten} Grade ist, und wenn ich zweitens weiß, daß sie für mehr als n voneinander verschiedene Werte verschwindet, so kann ich daraus schließen, daß die Funktion für alle x -Werte verschwindet, daß ich es also mit der Funktion $y = 0$ zu tun habe.¹⁾

Denn gäbe es eine solche Funktion von genau m^{tem} Grad (m größer als Null, aber kleiner oder höchstens gleich n), so könnte ich sie in genau m Linearfaktoren zerfallen. Ein solches Produkt kann aber natürlich nur für die m zur Bildung seiner Linearfaktoren benutzten Werte verschwinden. Es muß also eine Funktion nullten Grades, also eine Konstante vorgelegen haben. Da diese aber für einzelne Werte der Variablen x verschwindet, andererseits aber für alle Werte von x denselben Wert annimmt, so muß sie eben die Null sein, wie im Zusatz angegeben.

§ 4. **Algebraische und transzendente Funktionen.** Unter einer *algebraischen Kurve* wollen wir das geometrische Bild einer algebraischen Funktion verstehen. Ihre Gleichung ist also von der Form $f(x, y) = 0$, und hier ist $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x und y . Sie entsteht also durch Addition von lauter Gliedern der Form $ax^l y^m$. Die Exponenten l und m sind hier irgendwelche ganze positive Zahlen. Die größte bei den einzelnen Gliedern einer ganzen rationalen Funktion vorkommende Exponentensumme $l + m$ heißt nach S. 3 die Ordnung der Funktion. Das geometrische Bild einer algebraischen Funktion, die einer solchen Gleichung n^{ter} Ordnung genügt, heißt *algebraische Kurve n^{ter} Ordnung*. Wir werden jetzt den Satz beweisen: *Eine jede algebraische Kurve n^{ter} Ordnung wird von einer jeden ihr nicht vollständig angehörigen Geraden in höchstens n Punkten geschnitten.* Es sei nämlich $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ die Gleichung einer geraden Linie, die ich mit der Kurve $f(x, y) = 0$ zum Schnitt bringen will. Das kann man so machen, daß man aus der Gleichung der Geraden sich x oder y ausrechnet und den gefundenen Ausdruck in die Gleichung der Kurve n^{ter} Ordnung einträgt. Habe ich etwa y der Gleichung der Geraden entnommen, so finde ich also für die

1) Diese fällt ja auch unter unsere auf S. 1 gegebene Funktionsdefinition. Es ist eben *jedem* Wert von x der Wert $y = 0$ zugeordnet.

Abszissen der Schnittpunkte die Gleichung $f\left(x, \frac{-\alpha x - \gamma}{\beta}\right) = 0$. Das ist aber jedenfalls eine Gleichung höchstens vom n^{ten} Grad, wie man ohne weiteres sieht, wenn man sich das Aussehen der einzelnen Glieder der ganzen rationalen Funktion n^{ter} Ordnung vergegenwärtigt. Ein jedes wird nach Einsetzen des Wertes $y = \frac{-\alpha x - \gamma}{\beta}$ höchstens vom n^{ten} Grad in x . Wenn ich ferner die einzelnen Glieder der ganzen rationalen Funktion nach Potenzen von x geordnet habe und sie alle zusammenzähle, so kann der Fall eintreten, daß sich einzelne Potenzen von x herausheben. Daher ist der Schlußausdruck *höchstens* vom n^{ten} Grade. Nach den in § 3 für algebraische Gleichungen n^{ten} Grades gewonnenen Ergebnissen hat diese Gleichung, wofern ihre linke Seite nicht identisch verschwindet, höchstens n Wurzeln (die reell oder imaginär sein können, jedenfalls also auch höchstens n reelle Wurzeln). Das sind die Abszissen der Schnittpunkte. Der Gleichung der Geraden entnehme ich dann ohne weiteres die zugehörigen Ordinaten der Schnittpunkte. Verschwindet aber $f\left(x, \frac{-\alpha x - \gamma}{\beta}\right)$ identisch, so bedeutet dies, daß die Gerade der Kurve völlig angehört. Ein Beispiel für dies Vorkommnis ist die in die beiden Geraden $x - y = 0$ und $x + y = 0$ zerfallende „Hyperbel“ $y^2 - x^2 = 0$. So erhalte ich das im obigen Satz ausgesprochene Ergebnis, das ich damit bewiesen habe.

Dieser Satz ist häufig ein bequemes Kriterium für transzendente Kurven. Liegt mir nämlich irgendeine Kurve vor und kenne ich irgendeine Gerade, welche die Kurve nicht in endlich vielen Punkten schneidet, aber auch nicht in ihrem ganzen Verlauf der Kurve als Bestandteil angehört, so kann ich mit Sicherheit sagen, daß die

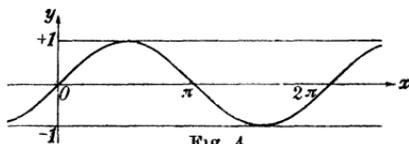


Fig. 4.

Kurve nicht algebraisch sein kann. Das trifft z. B. für die Funktion $y = \sin x$ zu. Denn ihr geometrisches Bild besteht aus lauter Wellen von der Länge 2π und der Amplitude ± 1 (Fig. 4). Der Leser sieht ohne weiteres, daß z. B. die Gerade $y = \frac{1}{2}$ in unendlich vielen Punkten schneidet; diese haben die Abszissen $\frac{\pi}{6} + 2h\pi$ oder $\frac{5\pi}{6} + 2h\pi$ (h eine positive oder negative ganze Zahl). Für

alle diese Winkel ist ja der Sinus gleich ein Halb. Ebenso erkennt man im Kosinus, im Tangens, im Kotangens transzendente Funktionen; ebenso ist die Zykloide von § 2 eine transzendente Kurve.

Ausdrücklich sei der Leser noch darauf hingewiesen, daß das Kriterium nicht umgekehrt werden darf. Es kann eine Kurve sehr wohl transzendent sein, obwohl sie von jeder Geraden nur in einem

oder allgemein nur in endlich vielen Punkten geschnitten wird. Um das ungefähr klar zu legen, mag der Hinweis genügen, daß wir ja in unserer Zeichnung nur die reellen Schnittpunkte sehen können; das können endlich viele sein, und trotzdem kann — wie der Leser wohl ohne weiteres glaubt — der Fall eintreten, daß unendlich viele imaginäre Schnittpunkte vorhanden sind. In der Exponentialfunktion liegt z. B. eine solche Funktion vor, wie wir hier nicht näher ausführen können.¹⁾

§ 5. Funktionen, die nicht als analytische Ausdrücke gegeben sind. Streng genommen ist schon die auf der ersten Seite angegebene Funktion $y = \sin x$ nicht durch einen analytischen Ausdruck gegeben, in den wir nur die Werte des Winkels einzusetzen hätten, um den Wert seines Sinus zu finden. Solche analytischen Ausdrücke — allerdings auch nur in etwas übertragener Bedeutung, in der Gestalt unendlicher Reihen — werden wir erst viel später kennen lernen. Vorläufig ist der durch die Bezeichnung $y = \sin x$ gemeinte gesetzmäßige Zusammenhang durch eine geometrische Vorschrift gegeben: Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck. Auch kennt der Leser Tafeln, aus welchen man für die meist gebrauchten Werte des Winkels den Sinus angenähert entnehmen kann. Man kann die Zahlen dieser Tafeln direkt als Definition einer Sinus genannten Funktion ansehen, die dann annähernd die Eigenschaften der gleichbenannten trigonometrischen Funktion hat, angenähert, nicht genau, weil ja in der Tafel nur angenäherte praktisch ausreichende Werte stehen. Nicht viel anders ist die Sache beim Logarithmus. Statt der Tafel kann man sich auch einer genügend genauen Zeichnung des Funktionsverlaufes bedienen, aus welcher man dann, wie in der Tafel, durch *Interpolieren* die ungefähren Werte der Funktion auch für nicht in der Tafel stehende Winkel entnehmen kann.

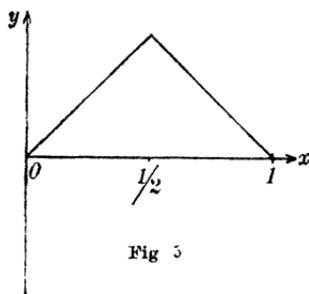


Fig 5

Bemerkung: Kriterien für die damit erreichte Genauigkeit werden wir später kennen lernen, sowie auch Genaueres über das Interpolieren selbst (S. 99 ff.).

Diese Beispiele mögen es dem Leser nahe legen, daß die *Zeichnung oder die Tafel* neben den analytischen Ausdrücken bequeme Methoden sind, Funktionen zu definieren. Sie führen uns auch recht eigentlich die große Mannigfaltigkeit von Vorkommnissen vor Augen, welche die zwei Zeilen in sich bergen, durch die wir auf der S. 1 den Funktionsbegriff definiert haben. Der verblüffend reiche Inhalt dieser Definition

1) Dazu vgl. man meinen Leitfaden der Funktionstheorie. (Teubners techn. Leitfäden Bd. 14.)

wird uns noch oft überraschen. Nur ein paar *Beispiele* seien noch angeführt: Man kann zur Definition einer Funktion mehrere analytische Ausdrücke nötig haben. So sei z. B. für $0 \leq x \leq \frac{1}{2} : y = x$ und für $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 : y = 1 - x$. In der graphischen Darstellung würde dem die Kurve der beistehenden Fig. 5 entsprechen.

Erklärung: Das Zeichen $<$ wird gesprochen kleiner als: $a < b$ bedeutet also, daß die Zahl a kleiner ist als die Zahl b . Analog bedeutet $>$ größer als. Mit $a \leq b$ meinen wir, daß die Zahl a kleiner oder gleich b sein kann. Die Zahlen also, für die $a \leq x \leq b$ ist, bilden die Gesamtheit aller Zahlen zwischen a und b , diese beiden Zahlen mit eingerechnet. Man sagt, sie bilden das *abgeschlossene Intervall* zwischen a und b — abgeschlossen, weil Anfang und Ende, nämlich die Zahlen a und b mitgerechnet sind. Auch die Gesamtheit aller Zahlen $a < x < b$ bilden ein Intervall. Das sind alle Zahlen zwischen a und b , diese beiden selbst nicht mit eingerechnet. Man nennt das ein *nichtabgeschlossenes oder ein offenes Intervall*. In $a \leq x < b$ oder $a < x \leq b$ liegen weitere Sorten von offenen Intervallen vor, bei welchen nur der eine der beiden Endpunkte mit inbegriffen gedacht ist.

Zum Schluß noch ein letztes Beispiel, das eigentlich schon in die Betrachtungen des folgenden Kapitels hinübergreift. Für alle rationalen Werte von x sei $y = f(x)$ gleich Null, für alle irrationalen Werte von x dagegen habe y den Wert Eins. Bedenkt der Leser, daß man in der nächsten Nähe eines jeden Punktes der x -Achse solche mit rationaler und solche mit irrationaler Abszisse finden kann, so wird es einleuchten, wie merkwürdig die Funktion ist, mit der wir es in diesem Beispiel zu tun haben

Bemerkung: Wenn wir so von Funktionen reden, die nicht als analytische Ausdrücke *gegeben* sind, so soll natürlich damit nicht gesagt sein, daß es nicht irgendwie möglich ist, nachträglich analytische Ausdrücke zu *finden*, welche die Funktionen darstellen. Methoden, die das erlauben, werden wir in großer Zahl kennen lernen. Für die in diesem Paragraphen angegebenen Funktionsbeispiele lassen sich, wie noch angefügt sei, durchweg solche analytischen Ausdrücke finden.

II. Der Zahlbegriff.

Es ist nicht meine Absicht, in diesem Kapitel eine bis ins einzelne durchgeführte Theorie der Irrationalzahlen zu entwickeln. Es sollen vielmehr die Betrachtungen über Dinge, welche dem Leser wenigstens als Handwerkszeug vertraut sind, hinüberleiten zum Verständnis der grundlegenden Gedanken, auf welchen letzten Endes die ganze Differential- und Integralrechnung beruht.

§ 1. *Vorbereitung* Von Irrationalzahlen soll in diesem Kapitel die Rede sein. Das Rechnen mit rationalen Zahlen, d. h. also

mit ganzen Zahlen und mit gewöhnlichen Brüchen, und diese selbst nehmen wir als bekannt und geläufig an, wiewohl man auch hierüber manche prinzipielle Betrachtung anstellen kann. Das würde uns aber von unserem eigentlichen Ziel zu sehr abführen. Nur wollen wir uns die Regeln zusammenstellen, nach welchen dieses Rechnen erfolgt. Es sind die Regeln, nach welchen jedes Kind rechnen lernt, und die als gemeinsamer Zug allen Zahlenrechnens dem Schüler beim Erlernen des Buchstabenrechnens zur Kenntnis gebracht werden. Woher uns die Gewißheit kommt, daß ein Rechnen nach diesen Regeln nie zu Fehlern führen kann, darüber wollen wir, wie gesagt, Betrachtungen nicht anstellen, zumal sich bis heute auch die Gelehrten noch nicht in jeder Richtung über derartige mit den Grundlagen der Arithmetik zusammenhängende Fragen einig sind.

Sind also a, b, c irgendwelche rationalen Zahlen (also positive oder negative ganze Zahlen oder Brüche $\frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen sind), so gelten die folgenden Rechenregeln, die wir als die Grundsätze oder die Axiome der Arithmetik bezeichnen wollen. Unter einem *Axiom* verstehen wir also einen Satz, den wir nicht weiter beweisen wollen, sondern den wir allen weiteren Beweisen und Erörterungen als Fundament zugrunde legen. Es ist ja ohne weiteres klar, daß jedes Wissensgebiet ein solches Fundament besitzen muß. Die *Axiome der Arithmetik* aber sind im wesentlichen die folgenden:

- | | |
|---|---|
| 1. $a + b$ ist eine eindeutig bestimmte Zahl. | 1. ab ist eine eindeutig bestimmte Zahl. |
| 2. $a + b = b + a$ kommutatives Gesetz der Addition. | 2. $ab = ba$ kommutatives Gesetz der Multiplikation. |
| 3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ assoziatives Gesetz der Addition. | 3. $(ab)c = a(bc)$ assoziatives Gesetz der Multiplikation. |
| 4. $a(b + c) = ab + ac$ distributives Gesetz. | |
| 5. Die Gleichung $p + x = q$ besitzt stets genau eine Lösung. | 5. Wenn $p \neq 0$, so besitzt die Gleichung $px = q$ stets genau eine Lösung. |
| 6. Es gibt eine Zahl 0, so daß stets $p + 0 = p$. | 6. Es gibt eine Zahl 1, so daß stets $p \cdot 1 = p$. |
| 7. Von den drei Beziehungen $a = b$, $a > b$, $a < b$ besteht stets genau eine. | |
| 8. Aus $a > b$, $b > c$ folgt $a > c$. ¹⁾ | |
| 9. Es gibt mindestens 2 Zahlen, für welche die Relation $a > b$ besteht. | |

1) Siehe die Erklärung dieser Zeichen auf S. 11.

10. Aus $a > b$ folgt $a + c > b + c$ + c Gesetz der Monotonie bei der Addition.
10. Aus $a > b$ folgt entweder $ac > bc$, wenn c positiv oder $ac < bc$, wenn c negativ oder $0 = ac = bc$, wenn $c = 0$ Monotoniegesetz der Multiplikation.

Bemerkung: Der Leser, welcher hier die Regeln für Subtraktion oder Division vermißt, sei darauf hingewiesen, daß die Subtraktion einer Zahl als Addition der entsprechenden Zahl von anderem Vorzeichen, und daß die Division durch eine Zahl als Multiplikation mit der reziproken Zahl definiert wird.

Bevor wir nun weitergehen, wollen wir gleich im Hinblick auf oft zu machende Anwendungen, die *Hauptregeln für das Rechnen mit den Zeichen $>$ und $<$* zusammenstellen. Diese Regeln folgen zwar alle aus den obigen Axiomen. Wir tun aber trotzdem gut daran, sie uns einmal zusammenzustellen. Zunächst lassen sich die Axiome Nr. 10 ohne weiteres umkehren. Aus $a + c > b + c$ folgt nämlich sofort $a > b$. Denn das Axiom 10 besagt doch, daß eine *Ungleichung* — so nennt man nämlich eine Beziehung von der Form $\alpha > \beta$ oder von der Form $\alpha < \beta$ — daß also eine Ungleichung richtig bleibt, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl (dort war's c) addiert oder subtrahiert. Wenden wir diese Regel auf $a + c > b + c$ an, addieren also auf beiden Seiten $-c$ oder subtrahieren c , so erhalten wir $a > b$. Das Axiom 10 gilt natürlich auch für das Zeichen $<$. Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$. Nach 7. und 8. darf man nämlich die in den Axiomen ausgesprochene Regel von rechts nach links lesen. Dieselben Betrachtungen knüpfen sich an das Monotoniegesetz der Multiplikation. Aus $ac > bc$ folgt $a > b$, wenn c positiv ist. Es folgt aber $a < b$, wenn c negativ ist. (Aus $ac = bc = 0$ folgt natürlich nichts darüber, welche der beiden Zahlen a oder b die größere ist.) Die in den Monotoniegesetzen ausgesprochenen Regeln lassen sich noch erweitern. Aus $a > b$ und $c > d$ folgt nämlich $a + c > b + d$. Ebenso folgt aus $a > b$ und $c > d$, daß auch $ac > bd$, wofern alle vorkommenden Zahlen das positive Vorzeichen haben. Endlich noch eine Bemerkung über das Dividieren: Wenn $m > 1$, so ist $\frac{1}{m} < 1$ und umgekehrt, wenn $m < 1$, so ist $\frac{1}{m} > 1$. Ferner folgt aus $a > b$ und $c > d$, daß $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$. Bei allen diesen Regeln ist wieder vorausgesetzt, daß alle vorkommenden Zahlen nicht negativ sind, und daß alle Nenner wesentlich positiv sind. (Wesentlich positiv heißt eine von Null verschiedene nicht negative Zahl. Man verwendet oft diese Benennung, weil man manchmal in übertragener Bedeutung die Null noch mit zu den positiven Zahlen rechnet.) Der Leser wird alle diese Behauptungen leicht aus den Mo-

notoniesetzen folgern. Er wird sich auch leicht ihren Sinn an Hand der Zahlengeraden, die wir gleich einführen werden, anschaulich klar machen.

Wir wollen uns nun im Rest dieses Paragraphen mit einer Frage befassen, die uns näher an den eigentlichen Gegenstand dieses Kapitels herañführen soll, nämlich mit der Frage, ob die rationalen Zahlen für alle die Zwecke ausreichen, für die wir Zahlen verwenden möchten. Wir werden sehen, daß dies nicht der Fall ist. So werden wir zur Einführung der Irrationalzahlen veranlaßt werden.

Wir wollen uns mit der Aufgabe befassen, Strecken durch eine gegebene Längeneinheit zu messen. Wir können uns die zu messende Strecke und die Längeneinheit von ein und demselben Punkt aus auf einer Geraden aufgetragen denken. Auf dieser Geraden wollen wir uns nun gleich einen Maßstab einrichten unter Zugrundelegung der gegebenen Längeneinheit. Diesen Maßstab wollen wir *Zahlengerade* nennen. Sie wird uns ein geometrisches Bild der gegenseitigen Größenbeziehung der verschiedenen Zahlen geben. Im Grunde haben wir auch die Zahlengerade im vorigen Kapitel in der Abszissenachse und der Ordinatenachse der Koordinatensysteme verwendet. Sie wird uns jetzt von steigender Wichtigkeit werden. Wir wählen irgendeinen festen Punkt der Geraden aus. An jeden Punkt der Geraden wollen wir dann als seine Abszisse die Maßzahl seines Abstandes von dem festen Punkt aus anschreiben, soweit das eben unter bloßer Verwendung der rationalen Zahlen möglich ist. Der feste Punkt selbst bekommt so die Abszisse Null. Um die beiden Seiten dieses Punktes auf der Geraden unterscheiden zu können, tragen wir in bekannter Weise nach rechts die positiven, nach links die negativen Zahlen auf. Betrachten wir nun irgend zwei Zahlen a und b , und sei etwa $a < b$, so liegt der Punkt mit der Abszisse a (wir nennen ihn wieder kurz den Punkt a) links vom Punkt b , und umgekehrt hat jeder rechts von a gelegene Punkt eine größere Abszisse als a . Damit haben wir die geometrische Bedeutung der Beziehung größer und kleiner in unserer geometrischen Deutung der Zahlen. Größer bedeutet soviel als „rechts von“ und kleiner bedeutet „links von“.

Auf der Zahlengeraden werden wir so ohne weiteres zu allen rationalen Zahlen zugehörige Punkte bekommen — die *rationalen Punkte* oder Punkte mit rationaler Abszisse. Bekommt nun aber jeder Punkt unserer Geraden eine rationale Abszisse, oder gibt es Punkte, die keine rationale Abszisse besitzen? Von vornherein ist klar, daß ein jeder Punkt durch seine Abszisse bestimmt ist, und daß wir die Lage eines jeden Punktes unserer Geraden mit beliebiger Genauigkeit durch die Angabe passender Punkte mit rationaler Abszisse festlegen können. Das kann z. B. so geschehen: Sei irgendein Punkt gegeben. Dann wird er entweder eine ganz-

zählige Abszisse haben, und ich kenne seine Abszisse mit absoluter Genauigkeit. Oder aber er liegt zwischen zwei Punkten mit ganzzahliger Abszisse, etwa a und $a + 1$. Dann teile ich dies Intervall in 10 (oder irgendeine andere Zahl) gleiche Teile. So bekomme ich Punkte mit den Abszissen a , $a + \frac{1}{10}$, $a + \frac{2}{10}$ usw. Entweder fällt der gegebene Punkt mit einem dieser zusammen, dann kenne ich wieder seine Abszisse absolut genau oder aber er liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden der angegebenen Punkte, dann kenne ich seine Lage auf ein Zehntel der Längeneinheit genau. Teile ich dann das Intervall wieder in 10 gleiche Teile, so finde ich entweder jetzt die Abszisse absolut genau, oder aber ich kenne doch dann die Lage des Punktes auf ein Hundertstel genau. So fortfahrend kann ich die Lage des Punktes durch Angabe passender Punkte mit rationaler Abszisse mit jeder gewünschten Genauigkeit festlegen. Aber ich kann sicher nicht die Abszisse eines jeden Punktes absolut genau auf diese Weise angeben, z. B. nicht die Abszisse $\frac{1}{3}$. Denn der Leser weiß von den unendlichen Dezimalbrüchen her (von deren Grundlegung dies Kapitel handelt), daß $\frac{1}{3}$ keinem endlichen Dezimalbruch gleich ist. Denn $\frac{1}{3}$ liegt zwischen Null und Eins, zwischen $\frac{3}{10}$ und $\frac{4}{10}$, zwischen $\frac{33}{100}$ und $\frac{34}{100}$ usw. Aber wenigstens hat dieser Punkt eine bestimmte rationale Abszisse.

Wir erkennen jedenfalls aus dieser Betrachtung, daß wir mit den rationalen Zahlen vollkommen ausreichen, solange wir nur die praktische Aufgabe verfolgen, jeden Punkt durch eine Abszisse genau genug festzulegen, — d. h. so genau, wie es gerade unseren Bedürfnissen entspricht. Dabei ist also jede einmal erreichte Genauigkeit verbesserungsfähig. Es kann sein, daß andere Aufgaben eine erhöhte Genauigkeit verlangen. Aber immer reichen in praxi die rationalen Zahlen aus. Anders wird die Sache, wenn wir die Abszissen *absolut genau* bestimmen wollen. Diesem Fragenkreis wenden wir uns nun zu.

Wir wollen uns zunächst davon überzeugen, daß es auf der Geraden auch Punkte gibt, die keine (rationale) Abszisse haben, welchen wir also auf dem bis jetzt festgehaltenen Weg keine Abszisse zuerteilen können. Wir konstruieren ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck von der Kathetenlänge Eins und tragen seine Hypotenuse ($\sqrt{2}$) auf unserer Geraden von Null nach rechts ab. So erhalten wir einen Punkt, der, wie ich zeigen werde, keine rationale Abszisse besitzt.

Bewiesen haben wir bis jetzt diesen *Satz*: *Die Punkte mit rationaler Abszisse liegen überall dicht*, d. h. in jeder Teilstrecke unserer Geraden oder, was dasselbe ist, in beliebiger Nähe eines jeden Punktes derselben lassen sich Punkte mit rationaler Abszisse angeben.

Beweisen wollen wir jetzt am angegebenen Beispiel, daß *zwischen den Punkten mit rationaler Abszisse doch noch Lücken bleiben*,

daß z. B. der Endpunkt der Hypotenuse eines gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreiecks von der Kathetenlänge Eins in eine solche Lücke fällt (obwohl in nächster Nähe Punkte rationaler Abszisse liegen). Wir haben nur zu zeigen, daß es keine positive rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist.

Im Gegensatz zur Behauptung nehme ich an, es gäbe ein Paar ganzer positiver Zahlen t und u , für das $2 = \frac{t^2}{u^2}$. Hier darf man sicher annehmen, daß t und u teilerfremd sind. Wäre nun also $t^2 = 2u^2$, so müßte t^2 also t gerade sein. Daher wäre die linke Seite durch 4 teilbar, und daher muß u gerade sein. t und u wären also gegen die Annahme nicht teilerfremd. Unsere Annahme also, daß 2 das Quadrat einer rationalen Zahl sei, hat uns auf einen Widerspruch geführt. Sie ist also nicht richtig. *Es gibt also keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.* Damit haben wir erkannt, daß die rationalen Zahlen nicht ausreichen, um jedem Punkt einer Geraden eine Abszisse geben zu können. Wollen wir dies also doch erreichen, so werden wir uns nach anderen Zahlbildungen umsehen müssen. Bevor wir jedoch dazu übergehen, schicken wir im nächsten Paragraphen einige Betrachtungen über mehrere wichtige Begriffsbildungen voraus. Diese werden dann bald und von dann an fortwährend Anwendung finden.

§ 2. Der Grenzbegriff.¹⁾ *Definition: Es sei uns nun eine unendliche Menge von (rationalen) Zahlen a_1, a_2, \dots gegeben. Dieselben sollen sich unbegrenzt einer Zahl A nähern, d. h. von einer gewissen Nummer $N(\varepsilon)$ ²⁾ an sollen alle Zahlen der Folge um weniger als eine beliebig vorgegebene positive Zahl ε von A abweichen. Dann schreibe ich $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und lese: A ist der Limes von a_n für n gegen ∞ . ($\infty =$ unendlich.)*

Wir wollen den Sinn dieser Festsetzung noch etwas ausführlicher darlegen. Ich habe also erstens die unendliche Zahlenfolge a_1, a_2, \dots . Ich gebe eine Zahl ε (etwa $\frac{1}{10}$) an. Dann sollen von einer gewissen Nummer $N(\varepsilon)$, meinestwegen von 100 an, alle Zahlen a_{100}, a_{101}, \dots um weniger als ε (also hier $\frac{1}{10}$) von A verschieden sein. Das soll aber nicht nur für dies eine ε gelten, sondern für jedes beliebige. Also sollen z. B. auch von einer gewissen Nummer an, etwa von 755 an, alle a_{755}, a_{756}, \dots um weniger als $\frac{1}{100}$ von A verschieden sein. Allgemein soll sich zu jeder wesentlich positiven Zahl ε eine Nummer $N(\varepsilon)$ bestimmen lassen, so daß von $N(\varepsilon)$ an

1) Für das Verständnis eines gewissen Teils der in diesem Kapitel noch folgenden Paragraphen reicht es hin, wenn der Leser nur erst von den Seiten 17 und 18 Kenntnis nimmt. Man kann also die Lektüre der Seiten 19 und 20 bis ans Ende dieses Kapitels verschieben.

2) Da die Nummer von ε abhängt, ist sie eine Funktion von ε und wurde dementsprechend mit $N(\varepsilon)$ bezeichnet.

alle a um weniger als ε von A verschieden sind. Dann schreibe ich für diesen Sachverhalt kurz $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Etwas weniger präzise, aber vielleicht etwas anschaulicher, kann ich den Sachverhalt dahin bezeichnen, daß ich sage, die Zahlen meiner Folge nähern sich unbegrenzt der Zahl A . Der präzise Sinn dieser populären Ausdrucksweise ist durch die obige Definition festgelegt.

Beispiel: 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn für jedes $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ganz einerlei wie ich ε vorgebe.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Denn für jedes $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ist $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$.

Wir fassen das über den Grenzbegriff Gesagte noch in Zeichen zusammen: Wir schreiben $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, falls sich zu jedem vorgegebenen positiven ε eine Zahl $N(\varepsilon)$ bestimmen läßt, derart, daß $|A - a_n| < \varepsilon$ bleibt, sobald nur $n > N(\varepsilon)$ ist. Häufig bedient man sich auch kurz der folgenden Ausdrucksweise: Wenn für beliebig gewähltes $\varepsilon > 0$ und alle *genügend großen* n die Ungleichung

$$|A - a_n| < \varepsilon$$

gilt, dann ist

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Erklärung: Unter $|B|$ verstehen wir entweder die Zahl B selbst, wenn sie positiv ist, oder aber die Zahl $-B$, wenn B negativ ist. $|A - a_n| < \varepsilon$ heißt also, daß a_n zwischen $A - \varepsilon$ und $A + \varepsilon$ liegt, oder in Zeichen, daß $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. Grenze ich also um die Zahl A irgendein Intervall ab, in dessen Innerem A liegt, so gehören von einer gewissen Nummer N an alle Zahlen der Folge diesem Intervall an, und dies gilt für jedes Intervall, das ich um A abgrenze. (Das ist oben in Zeichen zunächst nur ausgesprochen für Intervalle, die nach beiden Seiten gleich weit (ε) von A sich entfernen, folgt aber daraus sofort für beliebige um A abgegrenzte Intervalle).

Wenn ich ein Intervall um A abgrenze, so liegen in diesem alle Zahlen a_n der Folge von einer gewissen Nummer an. Statt dessen kann ich auch sagen, daß alle Zahlen der Folge mit Ausnahme von endlich vielen im Intervall liegen. Denn offenbar liegen nur endlich viele außerhalb des Intervalles, wenn sie vom N^{ten} an darin liegen, nämlich einige der $N - 1$ ersten oder alle. Wenn umgekehrt alle bis auf endlich viele dem Intervall angehören, so kann ich mir die Nummern, für die das nicht so ist, merken. Darunter gibt es eine größte Nummer. Von der folgenden Nummer an liegen alle a im Intervall. Statt nun zu sagen: „Alle Dinge einer Menge oder alle Zahlen einer Folge bis auf endlich viele haben eine bestimmte Eigenschaft“, wollen wir fortan sagen: „Fast alle Dinge

oder *fast alle Zahlen* der Folge haben diese Eigenschaft.“ *Fast alle heißt also alle bis auf endlich viele.*

Unter Benutzung dieser Worte können wir also die Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ auch dahin erklären, daß einem jeden um A abgegrenzten Intervall fast alle Zahlen a_n der Folge angehören sollen.

A heißt der Grenzwert der Zahlenfolge a_1, a_2, \dots . Es ist ohne weiteres klar, daß eine Zahlenfolge nicht zwei verschiedene Grenzwerte haben kann. Es kann also nur für eine einzige Zahl A die Beziehung $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ gelten. Denn seien andernfalls A und B

zwei verschiedene solche Zahlen. Dann grenze ich um A und B Intervalle ab, welche keinen Punkt gemeinsam haben. Einem jeden müßten fast alle Zahlen der Folge angehören. Das geht aber nicht. Denn wenn in dem Intervall um A alle bis auf endlich viele liegen, so können eben in dem Intervall um B nur einige von diesen endlich vielen sich befinden. Mit diesen Erörterungen, daß eine jede Zahlenfolge nur höchstens einen Grenzwert haben kann, ist natürlich *nicht* behauptet, daß *wirklich jede beliebige Zahlenfolge einen Grenzwert besitzt*. Das ist in der Tat auch gar nicht der Fall. *Es gibt Zahlenfolgen ohne Grenzwert*. Setze ich etwa

für alle geraden Nummern $n(n = 2m)$ das $a_{2m} = \frac{1}{m}$, für alle ungeraden $n(n = 2m + 1)$ aber $a_{2m+1} = 1 - \frac{1}{m}$, so kann es

ersichtlich kein Intervall von der Länge $\frac{1}{4}$ geben, in dem fast alle diese Zahlen liegen. Denn enthält ein solches Intervall von der Länge $\frac{1}{4}$ irgendeinen Punkt der Folge, so kann ich sofort unendlich viele Zahlen der Folge angeben, die von dieser um mehr als $\frac{1}{4}$ verschieden sind, aus dem einfachen Grund, weil es beliebig nahe bei Null sowohl wie bei 1 unendlich viele Zahlen der Folge gibt. Daher kann die Folge keinen Grenzwert besitzen. Denn wenn ich um diesen ein Intervall von der Länge $\frac{1}{4}$ abgrenzte, so müßten diesem fast alle Punkte der Folge angehören. Wie wir einer Zahlenfolge ansehen können, ob sie einen Grenzwert besitzt oder nicht, wird uns im nächsten Kapitel sehr eingehend beschäftigen.

Hier wollen wir uns damit begnügen, noch ein paar Regeln anzugeben, die vielfach die Berechnung von Grenzwerten erleichtern.

1. Der Grenzwert einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden. In Zeichen $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Ich setze zum Beweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$. Dann gibt es

eine Zahl $N_1 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)$, so daß $|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, sobald $n > N_1 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)$, und es gibt eine Zahl $N_2 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)$, so daß $|B - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, sobald $n > N_2$.

Sei nun $N(\varepsilon)$ eine Zahl, die sowohl größer ist als N_1 als auch

größer ist als N_ε . Dann gelten für alle $n > N(\varepsilon)$ die beiden Ungleichungen: $|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|B - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Beachten wir nun, daß der absolute Betrag einer Summe höchstens der Summe der absoluten Beträge der Summanden gleich ist ($|a + b| \leq |a| + |b|$), so finden wir $|A + B - (a_n + b_n)| \leq |A - a_n| + |B - b_n| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$. Da dies aber für jedes $\varepsilon > 0$ so ist, so folgt $A + B = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$.

Diese Überlegung lehrt auch, daß $A - B = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$. Das kann man auch daraus schließen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, wie ohne weiteres einleuchtet. Den hier für zwei Summanden ausgeführten Schluß kann man natürlich auch auf drei und mehr Summanden in der gleichen Weise übertragen; oder ich kann auch durch mehrmalige Anwendung des Schlusses bei zwei Summanden finden, daß für beliebig viele Summanden gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n + \dots + k_n) = A + B + \dots + K.$$

(Wir wollen uns aber gleich anmerken, daß wir dabei voraussetzen, daß wir es mit endlich vielen Summanden zu tun haben. Für unendlich viele gilt jedenfalls unser Schluß nicht. Auch das gewonnene Resultat ist für unendlich viele Summanden im allgemeinen nicht richtig, wie wir später sehen werden.)

2. Der Limes eines Produktes ist gleich dem Produkt der Einzelimites. Wir schließen ganz ähnlich wie vorhin, daß $AB = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$.

Jedenfalls gilt nämlich $AB - a_n b_n = AB - a_n B + a_n B - a_n b_n$. Da die a_n den Grenzwert A haben, so liegen sie fast alle zwischen $A - 1$ und $A + 1$. Sie sind also fast alle dem absoluten Betrag nach kleiner als $|A| + 1$. Einen größeren Betrag können nur endlich viele der a_n haben. Unter diesen gibt es eines mit einem möglichst großen absoluten Betrag etwa M . Dann ist $M \geq |A| + 1$, und ich sehe, daß es eine Zahl M gibt, so daß für alle a_n ohne Ausnahme $|a_n| \leq M$. Nun bestimme ich wie oben eine Zahl $N(\varepsilon)$, so daß für alle $n > N(\varepsilon)$ 1. $|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$ und

1) Wenn beide Summanden von gleichem Vorzeichen, etwa positiv, sind, so ist $|a + b| = a + b = |a| + |b|$. Wenn aber einer der Summanden negativ ist, so ist der absolute Betrag gleich der Differenz des Betrages der absolut größeren Zahl minus den Betrag der absolut kleineren, also jedenfalls kleiner als die Summe der absoluten Beträge. Ebenso schließt man, daß $|a + b| \geq |a| - |b|$ und daß $|a + b| \geq |b| - |a|$. Demnach ist sogar $|a + b| \geq ||a| - |b||$. Ferner

ist $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ und $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

2) Hier benutze ich, daß $B \neq 0$.

2. $|B - b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Dann finde ich aber $|B(A - a_n) + a_n(B - b_n)| < |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2|B|} + |a_n| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$. Trage ich dies oben ein, so habe ich $|AB - a_n b_n| < \varepsilon$, sobald $n > N(\varepsilon)$ ist.

3. Falls $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ von Null verschieden ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}.$$

Das schließt man ganz ähnlich wie oben, wenn man die Differenz $\frac{A}{B} - \frac{a_n}{b_n}$ auf die folgende Form bringt:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} - \frac{a_n}{b_n} &= \frac{1}{B} \cdot (A - a_n) + a_n \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{b_n} \right) \\ &= \frac{1}{B} (A - a_n) + a_n \frac{b_n - B}{b_n B}. \end{aligned}$$

Ich bestimme eine Zahl $N(\varepsilon)$ so, daß für alle $n > N(\varepsilon)$

1. $|b_n| > \frac{|B|}{2}$,¹⁾ 2. $|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}|B|$. 3. $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{|B|^2}{M}$.

Dann geht alles wie oben, wo auch schon die Bedeutung von M erklärt wurde.

Wir haben jetzt in diesem Paragraphen noch einen letzten Begriff zu erklären, nämlich den Begriff des *Häufungspunktes*. Wenn auf der Zahlengeraden eine Folge von Punkten a_1, a_2, \dots gegeben ist, so heißt P ein Häufungspunkt der Folge, wenn in jedem um P abgegrenzten Intervall unendlich viele Punkte der Folge liegen. Diese Eigenschaft besitzen 0 und 1 für das Beispiel von S. 18: Dort war $a_n = \frac{1}{m}$ für $n = 2m$ und $a_n = 1 - \frac{1}{m}$ für $n = 2m + 1$. Ein weiteres Beispiel eines Häufungspunktes liegt im Grenzwert einer Zahlenfolge vor.

§ 3. **Das Axiom der Intervallschachtelung.** Wir gehen nun wieder zu der Frage zurück, die wir am Schlusse von § 1 verlassen haben. Zu dem Zweck wollen wir zunächst die rationalen Punkte einer Geraden mit der Gesamtheit aller ihrer Punkte vergleichen.

Wir beginnen mit der folgenden Bemerkung. Wie die rationalen Punkte, so liegen auch die zwischen ihnen bleibenden *Lücken überall dicht*²⁾ (ohne daß sie jedoch eine Strecke restlos erfüllten). Das leuchtet ohne weiteres ein, wenn wir etwa die schon oben benutzte Hypotenuse des gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks

1) Das geht, weil von einer gewissen Nummer an alle b_n um weniger als $\frac{|B|}{2}$ von B verschieden sind und weil $B \neq 0$.

2) Vgl. S. 15.

mit der Kathetenlänge 1 (also $\sqrt{2}$) zur Einheitsstrecke machen, und alle Punkte aufsuchen, die bei Zugrundelegung dieser neuen Einheitsstrecke rationale Abszissen bekommen. Diese Punkte liegen natürlich überall dicht, und keiner derselben fällt mit einem rationalen zusammen. Außer den so erhaltenen gibt es natürlich noch mehr Lücken zwischen den rationalen Zahlen. So ist z. B. $\sqrt{2} + 1$ eine derartige weitere Lücke. Wir wollen alle Punkte mit einer nicht rationalen Abszisse kurz die *irrationalen Punkte* nennen und nun versuchen, uns einen Überblick über ihre Gesamtheit zu verschaffen.

Dazu knüpfen wir daran an, daß wir schon im § 1 konstatierten, daß wir jeden Punkt der Geraden durch rationale Punkte mit jeder gewünschten Genauigkeit approximieren können. Wir wollen das nun in der folgenden Weise für unsere Zwecke noch etwas genauer fassen. Wenn irgendein Punkt P der Geraden gegeben ist, so können wir eine unbegrenzte Folge von (abgeschlossenen)¹⁾ Intervallen angeben, derart, daß jedes Intervall Teilintervall aller vorher namhaft gemachten ist, und daß sich diese Intervalle auf den Punkt P zusammenziehen. Ausführlicher: I_1 ist ein erstes Intervall von dem rationalen Punkt A_1 bis zum rationalen Punkt B_1 . I_2 ist ein Teilintervall von I_1 und reicht von dem rationalen Punkt A_2 bis zum rationalen Punkt

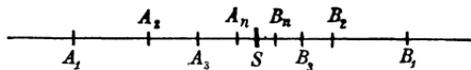


Fig. 6.

B_2 (Fig. 6). I_3 ist nun wieder in I_2 enthalten und hat rationale Endpunkte A_3 und B_3 . So fahren wir ewig weiter. Jedes Intervall, das wir neu konstruieren, ist in allen früher konstruierten enthalten. Der Punkt P gehört allen diesen Intervallen als innerer oder Randpunkt an. Die Intervalle sollen sich auf diesen Punkt zusammenziehen; was das heißen soll, muß noch etwas genauer gesagt werden. Es ist damit gemeint, daß der Grenzwert der Intervalllängen Null sein soll, so daß also die Intervalle mit wachsender Nummer den Punkt P immer enger umschließen. Er soll der *innerste Punkt* der Intervallfolge genannt werden. Ich fasse das Gesagte zusammen:

Definition: Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen I_1, I_2, \dots , derart, daß jedes Intervall in allen mit kleinerer Nummer enthalten ist, und daß der Grenzwert der Intervalllängen Null ist, heißt eine *Intervallschachtelung*.

Ein Beispiel wird dies klarer machen. Wir wollen den Endpunkt unserer Hypotenuse ($\sqrt{2}$) auf die beschriebene Weise approximieren. Die geometrische Bedeutung der Strecke war diese:

1) Wir verwenden weiterhin in § 3 und 4 nur abgeschlossene Intervalle.

Sie ist die Seite eines Quadrates vom Inhalt 2. Wir müssen daher die vorderen Endpunkte der Intervalle, die wir zur Approximation verwenden wollen, so wählen, daß das Quadrat ihrer Abszisse kleiner ist als 2, und die hinteren Endpunkte so, daß das Quadrat der zugeordneten rationalen Zahl größer ist als 2. So finden wir etwa folgende Intervalle, die wir brauchen können. I_1 von 1 bis 2, I_2 von 1,4 bis 1,5, I_3 von 1,41 bis 1,42, I_4 von 1,414 bis 1,415, I_5 von 1,4142 bis 1,4143 usw. (Wendet man das gewöhnliche Verfahren des Quadratwurzelausziehens auf $\sqrt{2}$ an, so findet man ohne weiteres nacheinander die Zahlen, die wir zu den vorderen Enden unserer Intervalle verwendet haben; die hinteren Enden bekommt man, indem man jeweils die letzte Ziffer des approximierenden endlichen Dezimalbruches um eine Einheit erhöht.) Man sieht, wie alle unsere Intervalle nicht länger sind als 1, wie sie vom zweiten an nicht länger sind als $\frac{1}{10}$, wie sie vom dritten an nicht länger sind als $\frac{1}{10^2}$, wie sie allgemein ihrer Entstehung nach vom n -ten an nicht länger sind als $\frac{1}{10^{n-1}}$. Also ist der Grenzwert ihrer Längen Null. Da wir uns gleich auf einen etwas allgemeineren Standpunkt erheben wollen als in dieser Anknüpfung an Allerbekanntestes, so wollen wir bemerken, daß das natürlich nicht die einzige Weise ist, wie wir uns eine *unendliche Folge ineinandergeschachtelter Intervalle* verschaffen können, die sich auf irgendeinen Punkt zusammenziehen. Wir haben hier gerade die rationalen Zahlen verwendet, deren Nenner eine Potenz von 10 ist. Zum ersten Intervalle verwendeten wir die ganzen Zahlen. Wir bestimmten ein Intervall, dessen Enden durch zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen gegeben sind. Alsdann gingen wir zu den Zahlen mit dem Nenner 10 über und verwendeten sie zur Konstruktion des zweiten Intervalles. Als Anfangspunkt war die letzte vor dem gegebenen Punkt gelegene dieser Zahlen zu nehmen, als Endpunkt die erste darauf folgende. Ebenso führten die Zahlen mit dem Nenner 100 zur Konstruktion des dritten Intervalles usw. Statt nun hier Zahlen zu nehmen, deren Nenner eine Potenz von 10 ist, können wir uns natürlich auch der Zahlen bedienen, deren Nenner eine Potenz von 2 oder 3 oder irgendeiner anderen Zahl sind. Bei $\sqrt{2}$ z. B. erhalten wir beim ersten Schritt ein Intervall (von 1 bis 2) von der Länge 1, beim zweiten ein Intervall von der Länge $\frac{1}{2}$ (von 1 bis $\frac{3}{2}$), beim dritten eines von der Länge $\frac{1}{4}$ (von $\frac{5}{4}$ bis $\frac{6}{4}$) usw. Das $(n+1)$ te Intervall hat die Länge $\frac{1}{2^n}$, ist also kürzer als $\frac{1}{10^n}$, falls $n \geq 4\lambda$. Denn es ist ja 10^λ kleiner als $2^{4\lambda}$ und dies kleiner als 2^n . Vom $(4\lambda + 1)$ ten an sind also unsere Intervalle kleiner

als $\frac{1}{10^i}$. Sie ziehen sich also im oben beschriebenen Sinn auf den gegebenen Punkt zusammen, nur nicht mehr so rasch wie vorhin, als wir Potenzen von 10 im Nenner verwendeten. Ganz von selbst wird sich der Leser sagen, daß der Erfolg unserer Approximation durch ineinandergeschachtelte Intervalle nicht dadurch bedingt ist, daß wir gerade Potenzen einer festen Zahl im Nenner verwenden, wir können auch irgendwelche Zahlen im Nenner verwenden, wenn wir nur daran festhalten, daß die Intervalle ineinandergeschachtelt sind, d. h. daß jedes Intervall Teilintervall aller vorher konstruierten ist, und daß die Intervalle sich schließlich auf den Punkt zusammenziehen, d. h. anschaulich gesprochen, daß es keine Strecke gibt, die allen diesen Intervallen angehört. Da nämlich eine solche etwa vorhandene Strecke eine gewisse Länge, etwa größer als $\frac{1}{10^n}$, haben müßte, so haben wir in dem folgenden Kriterium ein Kennzeichen dafür, daß es keine solche Strecke gibt: Wie auch die ganze Zahl n gewählt sein mag, immer sind von einem gewissen an, alle Intervalle kürzer als $\frac{1}{10^n}$. Es sind also fast alle Intervalle kürzer als $\frac{1}{10^n}$, wie auch die ganze Zahl n gewählt sein mag.

Resultat der seitherigen Überlegungen über Intervallschachtelung: Wenn auf der Zahlengeraden irgendein Punkt P gegeben ist, so können wir auf mannigfache Weise eine Intervallschachtelung angeben derart, daß der Punkt P allen Intervallen der Schachtelung angehört. Kein anderer Punkt hat dann für eine derartige P umschließende Intervallschachtelung diese gleiche Eigenschaft.

Der letzte Teil folgt daraus, daß, wenn P und Q allen Intervallen angehören, auch alle dazwischen gelegenen Punkte allen Intervallen angehören müßten. Das geht nicht, weil der Limes der Intervalllängen Null ist, die Längen also fast alle kleiner sind als der Abstand dieser beiden Punkte P und Q .

Sei nun *umgekehrt* eine Intervallschachtelung gegeben; gibt es dann einen ganz bestimmten Punkt, der allen diesen Intervallen angehört, auf welchen sich also die Intervalle zusammenziehen?

Es hat wohl für jedermann etwas zwingendes, diese Frage zu bejahen. Mehrere Punkte können ja sicher nicht allen Intervallen angehören, wie wir eben schon sahen. Es bleiben also nur die Möglichkeiten, daß ein oder kein Punkt allen Intervallen ohne Ausnahme angehört. Daß kein Punkt da sei, widerstrebt unserer Vorstellung von der Lückenlosigkeit der Geraden. Wenn wir behaupten, daß ein solcher Punkt und nur einer immer vorhanden ist, so ist das nur eine (wie sich zeigen wird) *mathematisch brauchbare Formulierung der populären Vorstellung von dem lückenlosen*

Aufbau der Geraden aus ihren Punkten. Wir wollen diese Tatsache als eine Grundtatsache, als ein Axiom allem Weiteren zugrunde legen. Denn es ist klar, daß wir unsere Behauptung nur beweisen könnten, wenn wir zuvor die Voraussetzung von der Lückenlosigkeit der Geraden irgendwie anders begrifflich gefaßt hätten. Das kann man tun.¹⁾ Wir wollen aber darauf verzichten und also folgendes *Axiom* zugrunde legen: *Zu jeder Folge ineinandergeschachtelter, abgeschlossener Intervalle, deren Länge den Grenzwert Null hat, gehört ein ganz bestimmter Punkt der Geraden, der allen diesen Intervallen angehört (Axiom der Intervallschachtelung).*

Um den Satz genau in diesem Wortlaut aussprechen zu können, müssen wir abgeschlossene Intervalle verwenden, d. h. nach der Erklärung auf S.11 Intervalle einschließlich ihrer Endpunkte. Denn sonst würde z. B. die folgende Intervallfolge: I_1 von 0 bis 1, I_2 von 0 bis $\frac{1}{2}$, allgemein I_n von 0 bis $\frac{1}{n}$ keinen innersten Punkt besitzen. Denn außer 0 kommt sicher keiner in Frage, weil jeder andere Punkt für genügend großes n rechts von $\frac{1}{n}$ liegt oder überhaupt links von 0. Der Punkt 0 gehört aber nur allen Intervallen an, wenn wir die Anfangspunkte (das ist ja immer der Punkt 0 selbst) den Intervallen zuzählen. Ebenso muß man, eines ähnlichen anderen Beispielen wegen, die Endpunkte mit zu den Intervallen rechnen, weil wir unseren Satz im gewählten Wortlaut aussprechen wollen. Bei anderer Wahl des Wortlautes könnte man diese Beschränkung auf abgeschlossene Intervalle auch umgehen. Wir wollen aber beim gewählten stehen bleiben. *Auf diesem Axiom ruht die gesamte Differential- und Integralrechnung.*

Beispiel: Um eine Anwendung des Axioms der Intervallschachtelung zu geben, wollen wir auf die am Schluß des letzten Paragraphen erklärten Häufungspunkte zurückkommen. Über die Existenz solcher Häufungspunkte besteht nämlich der folgende allgemeine Satz: *Eine jede in einem endlichen Intervall enthaltene unendliche Menge von Punkten besitzt mindestens einen Häufungspunkt.* — Zum Beweis teile ich das Intervall in zwei gleiche Teile. Dann muß mindestens die eine der beiden Hälften unendlich viele der Punkte enthalten. Eine solche Hälfte wird wieder halbiert und diejenige neue Hälfte herausgesucht, welche unendlich viele Punkte enthält. So weiterfahrend erhalte ich eine Intervallschachtelung, deren jedes Intervall unendlich viele Punkte enthält. In beliebiger Nähe des innersten Punktes der Schachtelung liegen daher auch unendlich viele Punkte der Menge. Er ist also ein Häufungspunkt der Menge.

1) Siehe z. B. § 5 dieses Kapitels.

§ 4. Irrationalzahlen und unendliche Dezimalbrüche.¹⁾

Vom Standpunkt des im vorigen Paragraphen formulierten Axiomes aus wollen wir nun einen Blick auf die dem Leser geläufige Verwendung der unendlichen Dezimalbrüche werfen. Die entscheidende Bemerkung ist dabei diese, daß der Satz von der Intervallschachtelung für die Menge aller Punkte einer Geraden richtig ist, daß er aber seine Richtigkeit verliert, sobald wir nur von rationalen Punkten der Geraden reden. Jede Intervallschachtelung definiert nämlich einen Punkt, aber nicht jede Folge ineinandergeschachtelter Intervalle mit lauter rationalen Endpunkten definiert einen rationalen Punkt. Ein Beispiel war die vorhin gegebene Intervallschachtelung, die auf $\sqrt{2}$ führte. Aber es kann auch einmal eine Intervallfolge mit rationalen Endpunkten wieder auf einen rationalen Endpunkt führen; man denke z. B. an die zur Dezimalbruchdarstellung von $\frac{1}{3}$ gehörige, oben (auf S. 15) schon einmal benutzte Intervallschachtelung oder einfach daran, daß die Menge der rationalen Punkte überall dicht liegt. Wenn wir zu Beginn des vorigen Paragraphen uns vornahmen, die Menge aller Punkte einer Geraden mit der Menge ihrer rationalen Punkte zu vergleichen, so ist der Unterschied zwischen beiden nun klar ausgesprochen in den eben gemachten Bemerkungen über Intervallschachtelungen.

Damit ist auch klar der Grund angegeben, warum die Menge aller rationalen Zahlen nicht ausreicht, um jedem Punkt der Geraden eine Abszisse zuzuordnen. Wollen wir dies erreichen, so müssen wir neue Zahlen einführen derart, daß für die Gesamtheit dann wieder der Satz von der Intervallschachtelung gilt. Ohne auf Vollständigkeit Anspruch zu machen, wollen wir das noch etwas näher ausführen.

Das Axiom der Intervallschachtelung ist das Mittel, durch das wir von den rationalen Punkten einer Geraden zu der lückenlosen Gesamtheit ihrer Punkte aufsteigen. So muß auch das Axiom der Intervallschachtelung das Mittel sein, um die Lücken zwischen den rationalen Zahlen auszufüllen. Jedesmal dann, wenn eine Intervallschachtelung im Gebiete der rationalen Zahlen keine rationale innerste Zahl besitzt, haben wir eine Lücke vor uns. Wir füllen sie aus, indem wir einer jeden solchen Intervallschachtelung eine neue Zahl zuordnen. Wir definieren also: *Eine Intervallschachtelung ohne rationale innerste Zahl bestimmt eine Irrationalzahl.* Wir dürfen aber nicht zwei verschiedenen solchen Intervallschachtelungen immer verschiedene Irrationalzahlen zuordnen. Denn dann bekommen wir mehr Irrationalzahlen als Punkte auf der Zahlen-

1) Pädagogische Bemerkung: Ein Leser, dem die folgenden mehr andeutenden als beweisenden Paragraphen dieses Kapitels noch zu schwer sind, kann die Lektüre ruhig bei Kap III fortsetzen, nachdem er gegebenenfalls die Lektüre von § 2 zu Ende geführt hat.

geraden. Wir werden vielmehr zwei Intervallschachtelungen dieselbe Irrationalzahl zuordnen, wenn sie den gleichen innersten Punkt besitzen.¹⁾ Dann ist das Entsprechen zwischen Zahlen und Punkten nun ein wechselseitig eindeutiges. Die Intervallschachtelungen, die zur Definition der Irrationalzahlen dienen, sind nun sofort das Mittel zu ihrer Bezeichnung. Wir können ja auch den Ort eines Punktes auf der Zahlengeraden durch Angabe einer beliebigen Intervallschachtelung festlegen, deren innerster Punkt er ist. Dies kann auf die mannigfachste Weise geschehen. So haben wir nun auch durch unsere Definition die mannigfachsten Mittel an der Hand, die Irrationalzahlen zu bezeichnen. Am bequemsten wählt man natürlich die Bezeichnung so, daß sie sich möglichst eng an das Dezimalsystem anlehnt, das uns von den ganzen Zahlen geläufig ist. Wie die Dezimalbrüche, auf die wir so kommen, mit unserer Definition zusammenhängen, sei also noch kurz auseinandergesetzt. Wir haben schon oben gezeigt, wie man auf der Zahlengeraden zur Festlegung ihrer Punkte vollständig mit Intervallen auskommt, deren Anfangs- und Endabszissen endliche Dezimalbrüche sind. Diese endlichen Dezimalbrüche müssen also auch als Anfangs- und Endzahlen der Intervallschachtelungen ausreichen, die wir zur Bezeichnung der Irrationalzahlen und der nicht durch endliche Dezimalbrüche dargestellten rationalen Zahlen, wie $\frac{1}{3}$ usw. verwenden wollen. Es genügt völlig, irgendwelche Intervallschachtelungen anzugeben, deren erstes Intervall die Länge 1, deren zweites die Länge $\frac{1}{10}$, deren drittes die Länge $\frac{1}{10^2}$, deren n^{tes} allgemein die Länge $\frac{1}{10^{n-1}}$ hat, um mit diesen Intervallschachtelungen alle Irrationalzahlen und auch alle rationalen Zahlen zu erfassen. Um z. B. $\sqrt{2}$ zu bezeichnen, hätten wir also zu notieren $(1; 2), (1,4; 1,5); (1,41; 1,42) \dots$ ²⁾ Da wir aber die Intervalllängen doch von vornherein kennen, nämlich 1, bzw. $\frac{1}{10}$, bzw. $\frac{1}{10^2}$ usw., so genügt es, nur die Anfangszahlen aufzuschreiben, und da diese immer bis auf die letzte Ziffer, die neu hinzukommt, mit den vorhergehenden übereinstimmen, schreiben wir überhaupt nur die folgende Ziffernfolge $\sqrt{2} = 1,41 \dots$ und merken uns: Was vor dem Komma steht, ist der Anfang des ersten Intervalles, eine Ziffer nach dem Komma hinzugefügt, gibt den Anfang des zweiten Intervalles usw. Dies Beispiel wird dem Leser genügend den Zusammenhang klar machen. Unter dieses allgemeine Schema fallen dann auch die endlichen Dezimalbrüche, denn wir können ja einfach unbegrenzt viele Nullen anfügen. Der Leser sieht so ohne weiteres, wie die endlichen Dezimalbrüche sich unserer all-

1) Wir sprechen dies Kriterium nachher noch etwas anders aus.

2) Unter $(a; b)$ wird also das Intervall $a \leq x \leq b$ verstanden.

gemeinen Bezeichnung als Spezialfall unterordnen. Die innerste Zahl, die so der einem endlichen Dezimalbruch entsprechenden Intervallschachtelung angehört, tritt bei dieser Intervallschachtelung in jedem Intervall entweder immer als Anfangszahl oder immer als Endzahl auf. Anfangszahl ist z. B. 2,5, wenn ich diese Intervallschachtelung verwende:

$$2,5 = 2,500000 \dots$$

Endzahl ist aber 2,5, wenn ich diese Intervallschachtelung verwende:

$$2,5 = 2,4999 \dots$$

Bemerkung: Statt zur Bezeichnung die Zahlen zu verwenden, deren Nenner eine Potenz von 10 ist, kann man natürlich auch die Zahlen verwenden, deren Nenner z. B. eine Potenz von 2 ist. Neben den Dezimalbrüchen erhalte ich so die Dualbrüche als ein weiteres Mittel zur Bezeichnung der Zahlen.

Bezeichne ich die Anfangszahl des n^{ten} Intervalles irgendeiner Schachtelung als n^{ten} Näherungswert d_n , die Zahl selbst mit D , so will ich schreiben $D = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$. Allgemein schreibe ich so, wenn

von einer gewissen Nummer $N(\varepsilon)$ an alle Zahlen d_n einem um D abgegrenzten Intervall der Länge ε angehören. Wir können diesen Sachverhalt auch kurz dadurch ausdrücken, daß wir sagen, von $n = N(\varepsilon)$ an unterschieden sich d_n und D um weniger als ε . So soll für *irrationale* D der Grenzbegriff erklärt werden. Für diese Erklärung bleiben die oben aufgestellten Regeln bestehen. Sie stimmt ja auch fast wörtlich mit der S. 16 für rationale D gegebenen überein. Allerdings dürften wir hier das „um weniger als ε -Unterschiedensein“ nicht durch $|d_n - D| < \varepsilon$ erklären, weil noch nicht definiert ist, was unter der Differenz $d_n - D$ einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl D zu verstehen ist.

Die Benennung der Irrationalzahlen als Zahlen ist erst dann ganz gerechtfertigt, wenn wir noch zeigen, daß man mit diesen neuen Zahlen ganz nach denselben Regeln rechnen kann, wie mit den Rationalzahlen. Dazu müssen wir *erklären*, was wir unter Summe, Differenz, Produkt, Quotient zweier Zahlen verstehen wollen. Dann müssen wir zusehen, ob für die gegebenen Erklärungen die auf S. 12/13 stehenden Rechenregeln gelten.

Wenn da aber ein Leser meinen sollte, an den Summen zweier Irrationalzahlen sei nichts zu erklären, so bitte ich ihn den Dezimalbruch zu bestimmen, der als Summe von 0,3333... und 0,989898... anzusprechen ist. Der Leser möge die beiden Dezimalbrüche direkt addieren.

Wenn ich A und B addieren soll, so nehme ich irgend zwei Intervallschachtelungen, eine für A und eine für B . Sei etwa

$A = (a_n; a'_n)^1$ und $B = (b_n; b'_n)$. Dann erkläre ich die Summe $A + B$ durch die folgende Intervallschachtelung:

$$A + B = (a_n + b_n; a'_n + b'_n).$$

Ist dies auch eine Intervallschachtelung? Ja! Denn es gilt:

$$a_n \leq a_{n+1} < a'_{n+1} \leq a'_n \quad \text{und} \quad b_n \leq b_{n+1} < b'_{n+1} \leq b'_n.$$

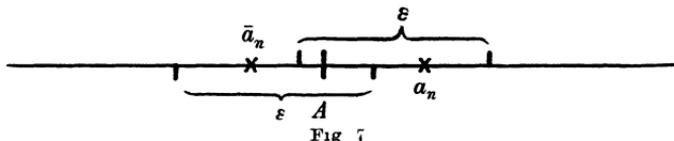
Daraus folgt durch Addition:

$$a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1} < a'_{n+1} + b'_{n+1} \leq a'_n + b'_n.$$

Jedes Intervall liegt also in den vorhergehenden. Ferner ist die Intervalllänge $l_n = a'_n + b'_n - (a_n + b_n)$. Also gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a'_n - a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b'_n - b_n) = 0.$$

Nun kommt aber erst die Hauptschwierigkeit. Wenn ich von einer anderen Darstellung von A oder von B durch eine Intervall-



schachtelung ausgehe, so kann ich darauf auch diesen Prozeß der Summenbildung anwenden. Bekomme ich aber da immer dieselbe Summe, wie ich auch die A und B darstellenden Schachtelungen wählen mag? Wäre dem nicht so, so wäre die Summe zweier Irrationalzahlen durch unsere Erklärung nicht eindeutig bestimmt, und wir wären mit dem ersten unserer Axiome der Arithmetik im Widerspruch. Soll also dies Axiom erfüllt sein, so muß die Summe von der Auswahl der bei ihrer Erklärung benutzten Intervallschachtelungen, also von der Bezeichnung der beiden Irrationalzahlen unabhängig sein. Am raschesten gelangt man zu dieser Einsicht auf dem folgenden Wege. Setze ich $A = (a_n; a'_n)$, so habe ich nach S. 27: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$. Ist weiter $A = (\bar{a}_n; \bar{a}'_n)$ so wird auch $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}'_n$. Daher wird weiter $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \bar{a}_n) = 0$. Denn von einem gewissen $n = N(\varepsilon)$ an gehören a_n und \bar{a}_n einem Intervall der Länge ε an, unterscheiden sich also voneinander um weniger als 2ε . Denn sowohl A und a_n wie A und \bar{a}_n gehören von einem gewissen $N(\varepsilon)$ an je einem Intervall der Länge ε an. Da diesen beiden Intervallen A gemeinsam angehört, so können sich a_n und \bar{a}_n nicht um mehr als 2ε unterscheiden (Fig. 7). Die gleichen Betrachtungen gelten für

1) Das erste Intervall der Schachtelung ist also $a_1 \leq x \leq a'_1$, das zweite $a_2 \leq x \leq a'_2$ usw.

$B = (b_n; b'_n) = (\bar{b}_n; \bar{b}'_n)$. Ich setze $S = (a_n + b_n; a'_n + b'_n)$, $\bar{S} = (\bar{a}_n + \bar{b}_n; \bar{a}'_n + \bar{b}'_n)$. Ich führe nun eine neue Intervallschachtelung $(\alpha_n; \beta_n)$ ein. Hier sei stets α_n die kleinere der beiden Zahlen $a_n + b_n$ und $\bar{a}_n + \bar{b}_n$. β_n aber sei die größere der beiden Zahlen $a'_n + b'_n$ und $\bar{a}'_n + \bar{b}'_n$. Daß $(\alpha_n; \beta_n)$ eine Intervallschachtelung ist, folgt leicht aus den vorausgehenden Bemerkungen. Da aber das Intervall $(\alpha_n; \beta_n)$ sowohl $(a_n + b_n; a'_n + b'_n)$ wie $(\bar{a}_n + \bar{b}_n; \bar{a}'_n + \bar{b}'_n)$ enthält, so sind S und \bar{S} innerste Punkte von $(\alpha_n; \beta_n)$. Also ist $S = \bar{S}$.

Ganz analog verfähre ich nun bei Differenz, Produkt und Quotient. Ich erkläre in verständlicher Abkürzung für wesentlich positive A und B , d. h. für den Fall, daß für genügend große n die $a_n > 0$ und die $b_n > 0$ sind:

$$A - B = (a_n - b'_n; a'_n - b_n). \quad AB = (a_n b_n; a'_n b'_n).$$

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a_n}{b'_n}; \frac{a'_n}{b_n} \right).$$

Ganz wie oben rechtfertige ich diese Definition durch den Nachweis, daß die angeschriebenen wirklich wieder Intervallschachtelungen sind. Der Nachweis, daß das wieder Schachtelungen sind, sichert für jede Wahl der A und B bestimmenden Schachtelungen die Existenz von Produkt, Quotient usw. Die dadurch gesicherte Bedeutung der in zweiter Linie angeführten Grenzwerte beweist, wie oben bei der Summe, die Unabhängigkeit der Produktdefinition usw. von der Art der für A und B gewählten Schachtelungen. Für negative A und B sind die Erklärungen von Produkt und Quotient entsprechend zu ändern. Doch will ich das nicht näher ausführen.

Nun noch die Rechenregeln: Das ist auch rasch gemacht. Die Rechenregeln gelten, kurz gesagt, darum wieder für die Irrationalzahlen, weil sie für die Rationalzahlen gelten, die wir zur Approximation der Irrationalzahlen verwenden. Nehmen wir z. B. das distributive Gesetz: Ich habe $a_n(b_n + c_n) = a_n b_n + a_n c_n$. Daher gilt auch:

$$A(B + C) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b_n + c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = AB + AC.$$

Ebenso zeigt man die Gültigkeit der anderen Rechenregeln.

Ich nenne weiter $A > B$, wenn die Anfangszahlen einer A erklärenden Intervallschachtelung größer gewählt werden können oder was dasselbe ist, für genügend große Intervallnummer größer sind als fast alle Endzahlen einer B bestimmenden Intervallschachtelung. Diese Erklärung erlaubt es nun auch, die noch übrigen Axiome der Arithmetik und die Betrachtungen von § 2 über den Grenzbegriff wörtlich ins Gebiet aller reellen, rationalen und irrationalen Zahlen zu übertragen.

§ 5. **Der Satz vom Dedekindschen Schnitt.** Die Theorie der Irrationalzahlen, welche wir hier im geometrischen Gewand vorgetragen haben, ist auf das Axiom der Intervallschachtelung begründet. Wir haben oben schon darauf hingewiesen, daß es nicht nötig ist, die Vorstellung der lückenlosen Geraden durch dieses Axiom mathematisch zu fassen. Es kann auch in anderer Weise geschehen. Nur wird man natürlich erwarten müssen, daß, rein logisch genommen, beide Formulierungen äquivalent sein müssen. Es muß möglich sein, jede aus der anderen heraus zu beweisen.

Man verdankt *Dedekind* eine Theorie der Irrationalzahlen und damit eine Grundlage für die Differentialrechnung, welche auf einem etwas anderen Axiom beruht. Wir wollen es nennen und zeigen, daß es aus dem Axiom der Intervallschachtelung gefolgert werden kann:

Es sei eine Einteilung sämtlicher Punkte einer Geraden in zwei Klassen gegeben von folgender Art: Jeder Punkt der Klasse I liegt links von jedem Punkt der Klasse II, (und jeder Punkt der Klasse II liegt rechts von jedem Punkt der Klasse I). Dann gibt es genau einen Punkt der Geraden, der diese Einteilung hervorbringt, so daß also jeder Punkt der Klasse I entweder mit ihm zusammenfällt oder links von ihm liegt, und daß jeder Punkt der Klasse II, der nicht mit ihm zusammenfällt, rechts von ihm liegt.

Eine derartige Klasseneinteilung der Punkte erhalten wir z. B., wenn wir irgendeinen Punkt A der Geraden ins Auge fassen und in Klasse I etwa diesen Punkt und alle links von ihm gelegenen aufnehmen, die Klasse II aber aus allen Punkten rechts von A bestehen lassen. Jeder Punkt A bringt also eine Klasseneinteilung hervor, wie sie im Satz beschrieben ist. Der Sinn des Satzes ist nun der, daß die beispielsweise eben angegebenen Klasseneinteilungen die einzigen von der im Satz verlangten Eigenschaften sind, daß sie also alle wie im Beispiel durch einen Punkt der Geraden erzeugt werden.

Wir wollen eine solche Klasseneinteilung einen *Dedekindschen Schnitt* nennen und wollen nun beweisen, daß jeder Schnitt durch einen Punkt hervorgebracht wird. Der Beweis fließt natürlich aus dem Axiom der Intervallschachtelung. Ich bemerke zunächst, daß jedesmal dann, wenn zwei Punkte A und B derselben Klasse angehören, auch alle zwischen beiden gelegenen Punkte dieser Klasse angehören. Denn liegt z. B. B rechts von A und gehören z. B. beide der Klasse I an, so gehören dieser Klasse auch alle links von B gelegenen Punkte an. Denn dort liegen keine Punkte der Klasse II, weil diese alle rechts von B liegen. Zu diesen links von B gelegenen gehören aber auch die Punkte zwischen A und B . Ebenso schließt man in den anderen Fällen. Es können nun nicht alle ganzzahligen Punkte derselben Klasse angehören. Denn sonst

müßten nach der eben gemachten Bemerkung überhaupt alle Punkte einer Klasse angehören. Wir wollen aber eine Einteilung in zwei Klassen haben. Daher gibt es zwei aufeinanderfolgende ganzzahlige Punkte, die verschiedenen Klassen angehören. Zwischen diesen beiden (die Grenzen mit eingerechnet) gibt es aus demselben Grunde zwei aufeinanderfolgende Zahlen mit dem Nenner 10, die verschiedenen Klassen angehören. So fortfahrend erhalten wir eine Intervallschachtelung, die einen Punkt A definiert. Dieser, behaupte ich, bringt den Schnitt hervor. Denn jeder Punkt zu seiner linken liegt auch links von fast allen der A definierenden Intervallanfänge, gehört also zur Klasse I. Ebenso gehören alle Punkte rechts von A zur Klasse II. Damit ist der Satz bewiesen.

Umgekehrt kann man auch den Satz von der Intervallschachtelung aus dem Satz vom Dedekindschen Schnitt beweisen. Wir wollen indessen diesen Nachweis dem Leser überlassen, zumal wir uns vorgenommen haben, unseren ganzen Bau auf dem Axiom der Intervallschachtelung zu errichten.

Ich beschließe diesen Paragraphen mit einer Anwendung des Satzes vom Dedekindschen Schnitt. Eine Zahlenfolge heißt (nach oben) beschränkt, wenn ihre sämtlichen Zahlen nicht größer sind als eine feste Zahl M . Diese heißt eine *obere Schranke* der Folge. Ebenso nennt man jede Zahl, welche so wie M von keiner Zahl der Folge übertroffen wird, eine *obere Schranke* der Folge. *Unter diesen oberen Schranken gibt es eine kleinste. Diese heißt die obere Grenze der Menge.* Die Existenz dieser oberen Grenze ist es, die wir mit Hilfe des Dedekindschen Schnittes beweisen wollen. Falls es in der Zahlenfolge eine größte gibt, so ist diese zugleich die obere Grenze, da sie ja als größte von keiner Zahl übertroffen wird. Aber nicht jede Zahlenfolge enthält eine größte. So ist z. B. unter den Abschnitten (d. h. endlichen abgebrochenen Dezimalbrüchen) eines unendlichen Dezimalbruches kein größter vorhanden. Erst der unendliche Dezimalbruch selbst ist die obere Grenze seiner Abschnitte. Nun zum *Beweis*. Ich teile wie folgt alle Zahlen in zwei Klassen ein. In die erste Klasse nehme ich alle übertroffenen, in die zweite Klasse alle unübertroffenen Zahlen auf. Das heißt: In Klasse I gehören die Zahlen, die von geeigneten Zahlen der Folge übertroffen werden; in die Klasse II aber gehören alle die Zahlen, welche von keiner Zahl der Folge übertroffen werden, also kurz alle oberen Schranken der Folge, während Klasse I alle Zahlen enthält, die nicht obere Schranken sind. Die Zahl, welche den Schnitt hervorbringt, ist die obere Grenze.

Ganz entsprechend werden die Begriffe nach unten beschränkte Folge, untere Schranke, untere Grenze erklärt.

III. Unendliche Reihen.

§ 1. **Fragestellung.** Wir legen unseren Betrachtungen eine Zahlenfolge u_1, u_2, u_3, \dots zugrunde und nehmen uns vor, den Summenbegriff auf diese Folge von unendlich vielen Zahlen zu übertragen. Zum Zeigen dieses Vorhabens pflegt man gerne die Glieder der Folge durch Pluszeichen zu verbinden statt sie durch Kommata zu trennen und von einer *unendlichen Reihe* statt einer unendlichen Folge zu reden: $u_1 + u_2 + \dots$. Durch diese neue Schreibweise ist natürlich der Begriff „*Summe einer unendlichen Folge oder Reihe*“ noch nicht festgelegt, sondern dadurch sind nur die Reihenglieder u erneut notiert. Was man aber unter der Summe der Reihe verstehen will, muß nun erst genau erklärt werden. Am nächsten liegt es, Glied um Glied die Reihe zusammenzuzählen. Diese Vorstellung führt zu der folgenden Erklärung. Die endliche Reihe $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, die wir erhalten, wenn wir die unendliche nach n Summanden abbrechen, nennen wir n^{te} Teilsumme. *Dann betrachten wir die Zahlenfolge s_1, s_2, s_3, \dots und fragen, ob der Grenzwert $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existiert. Ist dies der Fall, so nennen wir*

die Reihe konvergent und nennen S ihre Summe. Existiert der Grenzwert nicht, so besitzt die unendliche Reihe keine Summe und heißt divergent. So besitzt z. B. die unendliche Reihe $1 + 1 + 1 + \dots$, deren Glieder alle gleich eins sind, keine Summe, denn hier ist $s_n = n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} n$ existiert nicht. Denn es gibt z. B. keine Zahl, die von fast allen diesen Teilsummen um weniger als 1 verschieden ist.

Ebenso besitzt die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, deren Glieder abwechselnd $+1$ oder -1 sind, keine Summe. Denn die Teilsummen sind abwechselnd $+1$ oder 0 . Es gibt aber z. B. keine Zahl, die von $+1$ und von 0 weniger als $\frac{1}{2}$ verschieden wäre.

Dagegen besitzt die unendliche geometrische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

eine Summe. Denn hier ist bekanntlich $s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$. Da der Grenzwert eines Quotienten gleich dem Quotient der Grenzwerte ist, so ist $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ die Summe der unendlichen Reihe.

Die Summe der unendlichen Reihe $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots$, in welcher alle a_1, a_2, \dots zwischen Null und neun liegen, ist der unendliche Dezimalbruch $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$. Die Existenz der Summe dieser speziellen unendlichen Reihe ist durch das Axiom der Intervallschachtelung gewährleistet.

Die Frage nach der Summe einer unendlichen Reihe ist identisch mit der Frage nach dem Grenzwert einer unendlichen Zahlenfolge. Denn die Teilsummen bilden einerseits eine unendliche Zahlenfolge, deren eventuell vorhandener Grenzwert die Summe der Reihe ist. Andererseits läßt sich jede unendliche Zahlenfolge als Folge der Teilsummen einer passenden unendlichen Reihe auffassen. Denn ist $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ die Zahlenfolge, so setze ich $u_1 = s_1, u_2 = s_2 - s_1 \dots u_n = s_n - s_{n-1} \dots$ und habe in $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ eine unendliche Reihe, deren Teilsummen die Glieder der Zahlenfolge sind.

Es gibt eine Reihe allgemeiner Kriterien, die es oft sehr rasch erlauben, die Frage nach Konvergenz oder Divergenz einer vorgelegten Reihe zu unterscheiden. Einige derselben wollen wir nun, mit dem einfachsten beginnend, kennen lernen.

§ 2. **Geometrische Veranschaulichung.** Neben der Deutung einer Zahlenfolge als Punktfolge einer Zahlengeraden bedient man sich gerne noch einer anderen Veranschaulichung. Sie beruht darauf, daß man die s_n als Ordinate y zur Abszisse $x = n$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufträgt. Die Anschaulichkeit wird noch erhöht, wenn man die so erhaltenen Punkte durch einen Kurvenzug, z. B. einen Zug gerader Strecken verbindet. Fig. 8 bringt so eine konvergente Zahlenfolge s_n mit dem Grenzwert s zur Darstellung.

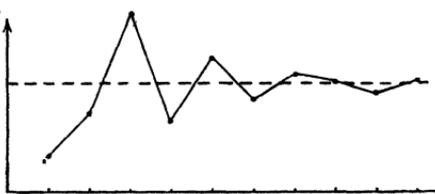


Fig 8

Die Bedingung, daß für genügend große n sich die s_n um höchstens ε von s unterscheiden sollen, hat zur Folge, daß der Zickzackzug sich von diesem n an nicht mehr um mehr als ε nach oben oder unten von der bei s gestrichelten Horizontalen entfernen kann. Die Kurve muß daher in dem Streifen zwischen den Geraden $y = s + \varepsilon$ und $y = s - \varepsilon$ von diesem n an verlaufen. Projiziert man die Kurvenecken durch Parallele zur x -Achse auf die y -Achse, so erhält man die seither allein benutzte Deutung auf einer Zahlengeraden. Diese besagt ja, daß von einem gewissen n an alle s_n einem Intervall der Länge 2ε mit s als Mittelpunkt angehören müssen. Hat man es mit einer nie abnehmenden Folge zu tun, ist also für alle n : $s_{n+1} \geq s_n$, so verläuft der ganze Zickzackzug unterhalb der Geraden $y = s$. Bei einer nie zunehmenden Folge verläuft die Kurve ganz oberhalb der Horizontalen, der sie sich asymptotisch anschmiegt.

Als Beispiel einer nicht konvergenten Zahlenfolge betrachten wir die Teilsummen der Reihe $1 - 1 + 1 - 1 \dots$, die ja abwechselnd 1 oder 0 sind. Das führt zu der folgenden Fig. 9.

Vergleicht man beide Fig. 8 und 9 miteinander, so kommt man zu der Vermutung, daß bei einer *konvergenten*¹⁾ Zahlenfolge der Unterschied zweier aufeinanderfolgenden s_n , also $s_{n+1} - s_n$ gegen Null strebt, daß also aus $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ folgt, daß

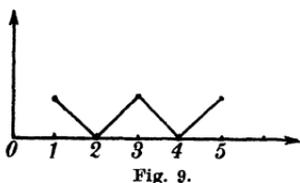


Fig. 9.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = 0$ ist. Tatsächlich folgt ja aus $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, daß auch

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} = s$ ist. Daher ist in der Tat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Beachtet man, daß man jede Zahlenfolge s_n als Folge der Teilsummen einer unendlichen Reihe $u_1 + u_2 + \dots$ ansehen darf, deren allgemeines Glied $u_n = s_n - s_{n-1}$ ist (S. 33), so erkennt man, daß in jeder konvergenten Reihe $u_1 + u_2 + \dots$ stets $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ist.

§ 3. Stets wachsende Zahlenfolgen und Reihen mit positiven Gliedern. Wir betrachten eine unendliche Folge von Zahlen s_1, s_2, \dots derart, daß jede Zahl der Folge nicht kleiner ist als die vorhergehende. Es gelten also die Ungleichungen: $s_n \geq s_{n-1}$

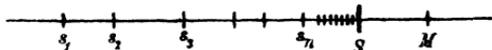


Fig. 10

für jedes n . Außerdem soll die Zahlenfolge beschränkt sein, d. h.

es soll eine Zahl M geben, die größer ist als alle Zahlen der Folge. Es gilt also für alle n : $s_n \leq M$. Eine derartige Zahlenfolge besitzt, so behaupte ich, einen Grenzwert. Wir wollen also den folgenden Satz beweisen: *Jede beschränkte Folge stets wachsender Zahlen besitzt einen Grenzwert S* (Fig. 10).

Wir wollen also die Existenz einer Zahl S beweisen, von der fast alle Zahlen der Folge um weniger als eine beliebig gegebene Zahl ϵ abweichen. Das gelingt durch die Methode der Intervallschachtelung. Wir bemerken zunächst, daß immer nur endlich viele Zahlen der Folge kleiner sind als eine gegebene Zahl der Folge (nämlich die mit kleinerer Nummer als die gegebene). Wir betrachten das Intervall von s_1 bis M . Ihm gehören alle Zahlen der Folge an. Wir teilen es in zwei gleiche Teile (Teilpunkt M_1). Der einen Hälfte gehören sicher fast alle Zahlen der Folge an. Etwa der Hälfte von M_1 bis M . Diese teilen wir wieder in zwei gleiche Teile, und wieder müssen der einen Hälfte fast alle Zahlen angehören. Denn da die Zahlen ständig wachsen, kann immer nur eine Hälfte unendlich viele Zahlen enthalten.

1) d. i. eine Zahlenfolge, die einen Grenzwert s besitzt

So fortfahrend erhalten wir in den jeweiligen weiterzuteilenden Intervallhälften eine unendliche Folge ineinandergeschachtelter Intervalle von gegen Null konvergierender Länge, also eine Intervallschachtelung. Einem jeden dieser Intervalle gehören fast alle Zahlen der Folge an. Die innerste Zahl der Folge ist darum von fast allen Zahlen der Folge um weniger als irgendeine der vorkommenden Intervalllängen verschieden, also auch um weniger als irgendeine vorgegebene Zahl ϵ , denn es gibt Intervalllängen, kleiner als diese Zahl. Daher ist die innerste Zahl der Intervallschachtelung der Grenzwert der Folge.

Anwendung auf unendliche Reihen: $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ sei eine unendliche Reihe mit lauter positiven Gliedern. Alle Teilsummen sollen unterhalb einer festen Grenze M liegen. Dann ist die Reihe konvergent.

In der Folge der Teilsummen haben wir nämlich, da alle Reihenglieder positiv sind, eine stets wachsende Zahlenfolge vor uns, die außerdem beschränkt ist. Sie hat also nach unserem Satz einen Grenzwert, und der ist die Summe der Reihe.

§ 4. **Konvergenzkriterien.** Um die Konvergenz einer vorgelegten Reihe von positiven Gliedern auf Grund des letzten Satzes feststellen zu können, müssen wir uns nach Mitteln umsehen, die es erlauben, die Beschränktheit der Teilsummen zu erkennen. Dies liefert das *Prinzip der Reihenvergleichung*. *Es erlaubt, aus der bekannten Konvergenz einer Reihe mit lauter positiven Gliedern auf die Konvergenz einer anderen Reihe mit positiven Gliedern zu schließen, falls diese lauter kleinere Glieder hat.* Sei also

$$\sum_1^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \dots \text{ eine konvergente Reihe positiver Glieder.}$$

Sei $\sum_1^{\infty} v_k = v_1 + v_2 + \dots$ eine weitere Reihe positiver Glieder,

und sei für jedes n : $v_n \leq u_n$. Dann ist auch $\sum_1^{\infty} v_k$ konvergent.

Denn für jedes n ist hiernach die n^{te} Teilsumme der v Reihe kleiner als die n^{te} Teilsumme der u -Reihe. Die Teilsummen der u -Reihe indessen sind alle kleiner als die Summe der u -Reihe, weil sie sich stets wachsend diesem Grenzwert nähern (Fig. 10). Daher sind alle Teilsummen der v -Reihe kleiner als diese Summe. Sie sind daher beschränkt. Die v -Reihe ist also konvergent. Der eben bewiesene Satz enthält als besondere Fälle fast alle wichtigen Konvergenzkriterien in sich. Solche erhalten wir, sowie wir uns nach gewissen besonderen konvergenten Reihen positiver Glieder umsehen und diese als Vergleichsreihen im Sinne des Satzes ver-

wenden. Bevor wir das tun, sei noch das Gegenstück zum bewiesenen Satz abgeleitet.

Sei $\sum_1^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \dots$ eine divergente Reihe von lauter posi-

tiven Gliedern und habe die Reihe $\sum_1^{\infty} v_k = v_1 + v_2 + \dots$ auch

positive Glieder, die aber alle größer sein sollen als die gleich-numerierten der u -Reihe. Dann ist auch die v -Reihe divergent. Denn wäre sie konvergent, so müßte nach dem eben bewiesenen Satz auch die u -Reihe konvergieren.

Die *erste Vergleichsreihe* soll uns die geometrische Reihe $1 + k + k^2 + \dots$ liefern. Sie konvergiert für $k < 1$, und sie divergiert für $k \geq 1$. Denn hier ist $s_n = \frac{1 - k^n}{1 - k}$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - k}$ für $k < 1$. Dagegen wächst s_n für $k \geq 1$ mit wachsendem n über alle Grenzen. Man schreibt dafür auch zur Abkürzung $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$.

(Dies bedeutet also, daß fast alle s_n größer sind als irgendeine vorgelegte Zahl N .) Benutzen wir die geometrische Reihe als Vergleichsreihe, so erhalten wir zwei wichtige von *Cauchy* herrührende *Kriterien*.

Die Reihe $\sum_1^{\infty} u_k$ mit positiven Gliedern konvergiert, falls es eine positive Zahl l kleiner als eins gibt, so daß fast alle Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner sind als diese. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = m < 1$. Die Reihe divergiert jedoch, falls fast alle diese Quotienten größer sind als 1 oder gleich 1. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L > 1$.

Wenn nämlich von N an $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l$, so ist also

$$u_{N+1} < l \cdot u_N, \quad u_{N+2} < l u_{N+1}, \dots$$

Daraus folgt $u_{N+h} < l^h u_N$. Also sind die Glieder der Reihe $u_N + u_{N+1} + \dots$ kleiner als die Glieder der konvergenten geometrischen Reihe: $u_N + l u_N + l^2 u_N + \dots$. Also ist die Reihe $u_N + u_{N+1} + \dots$ gleichfalls konvergent. Die Summe der vorgelegten Reihe $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ ist dann noch um die Summe $s_{N-1} = u_1 + \dots + u_{N-1}$ größer. Sie konvergiert also auch. (Wir

können auch direkt abschätzen $s_{N+h} < s_{N-1} + u_N \frac{1}{1-l}$ und daraus die Konvergenz folgern.) Ganz ebenso beweist man das Divergenzkriterium.

Aus derselben Wurzel stammt das folgende *Kriterium*: Falls für fast alle n der Ausdruck $\sqrt[n]{u_n} \leq k < 1$ (k von n unabhängig), so konvergiert die Reihe positiver Glieder: $\sum_1^{\infty} k^n u_n$. Ist aber $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ für fast alle n , so divergiert die Reihe. Der Beweis ist derselbe wie beim vorigen Kriterium.

Beispiele: $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergiert für $x < 1$

und divergiert für $x > 1$. Denn hier ist $u_n = \frac{x^n}{n}$. Wir finden also

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Dies ist für alle n kleiner als x . Ist also x kleiner als 1, so haben wir Konvergenz. Ist aber $x > 1$, so sind alle Quotienten von einem gewissen an größer als 1. Denn es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = x$ also größer als 1. Da aber fast

alle Quotienten von ihrem Grenzwert um weniger als $x - 1$ verschieden sind, so sind sie fast alle größer als 1. Darum haben wir Divergenz. Unsere Kriterien versagen völlig für den Fall $x = 1$. Ihn werden wir nachher besonders untersuchen. Die Reihe

$\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ konvergiert für alle positiven x .

Denn hier ist $u_n = \frac{x^n}{n!}$. Daher ist $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$. Daraus folgt

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Also sind fast alle Quotienten z. B. kleiner als $\frac{1}{2}$.

Das gibt für jedes x die Konvergenz der Reihe.

Als weiteres Beispiel sei die für $x \neq 0$ divergente Reihe

$\sum_1^{\infty} n! x^n$ genannt.

Aber alle diese Hilfsmittel versagen, wenn wir sie auf die Reihen

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots$$

(von welchen wir oben schon einen Spezialfall hatten) anwenden. Wenn wir diese also noch besonders untersuchen, erhalten wir

einen weiteren Vorrat an Vergleichsreihen. Wir beginnen mit der sog. *harmonischen Reihe*:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Wir betrachten die folgenden Teilsummen: $s_2, s_4, s_8, \dots, s_{2^n}, \dots$. Falls wir zeigen können, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty$, so wissen wir damit,

daß die harmonische Reihe divergiert. Denn allemal ist $s_{2^{n+h}} > s_{2^n}$. Es wachsen also mit den speziell betrachteten dann überhaupt alle Teilsummen ins Unendliche. Nun ist aber $s_4 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4})$, also größer als $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$. Zu s_4 nehme ich vier neue Glieder hinzu, so erhalte ich s_8 . Jedes der neu hinzugekommenen Glieder $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ ist aber nicht kleiner als das letzte, alle vier also größer als $4 \cdot \frac{1}{8}$, also größer als $\frac{1}{2}$. Also ist s_8 größer als $1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$. Zu s_8 kommen die acht Glieder $\frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{16}$ hinzu. So erhalte ich s_{16} . Keines ist kleiner als das letzte $\frac{1}{16}$, also alle acht zusammen wieder größer als $\frac{1}{2}$. Also ist $s_{16} > 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$. So weiterfahrend bekomme ich allgemein $s_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}$. Also ist die

Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

Daraus schließe ich durch Reihenvergleichung wegen $\frac{1}{n^k} > \frac{1}{n}$

für $k < 1$ allgemein: Die Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^k}$ divergiert für $k \leq 1$.

Nun untersuchen wir die gleiche Reihe für $k > 1$. Wir werden finden, daß sie konvergiert. Wir betrachten jetzt die Teilsummen $s_1, s_3, s_7, s_{15}, \dots, s_{2^n-1}$. Da allgemein $s_n < s_{2^n-1}$, so sind alle Teilsummen beschränkt, falls die eben bezeichneten beschränkt sind. Nun aber ist $s_3 = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}$. Hier ist aber $\frac{1}{3^k} < \frac{1}{2^k}$, also ist $s_3 < 1 + 2 \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2^{k-1}}$. Zu s_3 kommen vier Glieder $\frac{1}{4^k}$ bis $\frac{1}{7^k}$ hinzu. So bekomme ich s_7 . Alle vier sind kleiner als das erste $\frac{1}{4^k}$. Also ist ihre Summe kleiner als

$$4 \cdot \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4^{k-1}} = \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2.$$

So weiterfahrend finden wir allgemein

$$s_{2^n-1} < 1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1}.$$

Also sind alle s_n kleiner als die Summe der geometrischen Reihe

$\sum \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^n$. Also haben wir: Die Reihe $\sum_1^n \frac{1}{n^k}$ konvergiert für $k > 1$.

§ 5. **Alternierende Reihen.** Unter einer alternierenden Reihe versteht man eine Reihe, deren Glieder abwechselnd das positive oder das negative Vorzeichen besitzen. Hier gilt der folgende Satz: *Die alternierende Reihe $u_1 - u_2 + u_3 - \dots$ konvergiert sicher dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ist, und wenn für alle n : $|u_n| \leq |u_{n-1}|$.*

Daß die Reihe höchstens dann konvergieren kann, wenn ihre Glieder den Grenzwert Null haben, ist von S. 34 bekannt. Diese Bedingung ist eben für jede konvergente Reihe erfüllt. Man kann aber aus ihrem Erfülltsein nicht umgekehrt schließen, daß die Reihe konvergiert. Dies lehrt ja schon das im vorigen Paragraphen betrachtete Beispiel der harmonischen Reihe. Sie war die Summe der reziproken ganzen Zahlen, die also gegen Null konvergieren; und doch ist die harmonische Reihe divergent. Um auf die Konvergenz der Reihe schließen zu können, müssen also noch weitere Bedingungen erfüllt sein. Bei alternierenden Reihen — das ist der Sinn unseres Satzes — braucht nur ganz wenig mehr erfüllt zu sein. Die Voraussetzung, daß die absoluten Beträge der Reihenglieder nie zunehmen, d. h. daß jedes Reihenglied dem Betrag nach kleiner oder gleich dem Betrag des vorhergehenden sei, zusammen mit der Annahme abwechselnder Vorzeichen gewährleistet schon die Konvergenz der alternierenden Reihe. Bei Reihen positiver Glieder reicht, wie wieder die harmonische Reihe lehrt, das monotone Abnehmen der Reihenglieder nicht aus.

Nach diesen Bemerkungen, die den Sinn des Satzes ins rechte Licht setzen sollten, kommen wir zu seinem Beweis. Er wird sehr schön gelingen, wenn wir dabei die Teilsummen auf der Zahlengeraden zur Anschauung bringen. Wir wollen etwa annehmen, daß das erste Reihenglied positiv ist, und daß alsdann negative und positive Glieder abwechseln. Die erste Teilsumme s_1 ist gleich u_1 . Wir tragen diesen positiven Wert auf der Zahlengeraden auf. Um s_2 daraus zu erhalten, haben wir nach links u_2 anzutragen. So erhalten wir ein Intervall von s_2 bis s_1 , in dem, wie wir sehen werden, alle folgenden Teilsummen liegen. Um nämlich s_3 zu erhalten, haben wir an s_2 das u_3 nach rechts anzutragen. Damit fügen wir aber weniger hinzu, als wir gerade vorher weggenommen hatten, da die Reihenglieder ständig abnehmen. s_3 liegt also links von s_1 , also zwischen s_1 und s_2 . Wenn wir nach links nun wieder u_4 antragen, so erhalten wir s_4 . Das liegt aber noch rechts von s_3 , da wir eben wieder weniger abzogen, als wir gerade vorher zufügten. So weiterfahrend erkennen wir, daß in dem von zwei aufeinanderfolgenden Teilsummen s_n und s_{n-1} gebildeten Intervall immer alle

auf s_n folgenden ihren Platz haben. Je zwei aufeinanderfolgende bilden ein Intervall, dessen Länge ein Reihenglied beträgt. Damit erhalten wir eine Intervallschachtelung (Fig. 11). Ihr innerster Punkt ist der Grenzwert der Teilsummen, also die Summe unserer Reihe. Denn von diesem innersten Punkt sind fast alle Teilsummen um weniger als ein beliebiges Reihenglied verschieden, also auch um weniger als irgendeine vorgegebene Zahl ε . Denn es gibt Reihenglieder kleiner als diese Zahl. Sie streben nämlich gegen Null

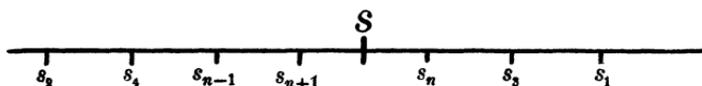


Fig. 11.

Wir erkennen gleichzeitig, daß jede Teilsumme um weniger als den absoluten Betrag ihres letzten Gliedes von der Summe verschieden ist. Die Teilsummen mit gerader Nummer sind zu klein, die mit ungerader Nummer sind zu groß.

Beispiel: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konvergiert.

§ 6. **Beliebige Zahlenfolgen und unendliche Reihen.** Wir nannten eine *Zahlenfolge konvergent*, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Hierüber gilt der folgende *Satz*: Die Zahlenfolge s_1, s_2, \dots konvergiert dann und nur dann, wenn es zu jedem ε eine Zahl $N(\varepsilon)$ gibt, so daß für $n > N(\varepsilon)$ und beliebiges positives p immer $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ ist. (*Allgemeines Konvergenzprinzip*) Man muß den Sinn dieser Bedingung ganz klar erfassen. Sie ist nicht identisch damit, daß für jedes einzelne p der $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+p} - s_n) = 0$ sein soll, wenn auch dies natürlich in der obigen Aussage mit enthalten ist. Wir brauchen nur etwa für die s_n die Teilsummen der harmonischen Reihe zu nehmen. Dann ist $s_{n+p} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}$. Da aber der Grenzwert einer Summe gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden ist, so sieht man, daß für jedes einzelne p der $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+p} - s_n) = 0$ ist. Um ganz klar zu sehen, daß dies weniger ist als die Bedingung unseres Satzes, sprechen wir das im Beispiel eben Benutzte etwas anders aus. Eben gab es zu jeder Zahl ε und zu jedem $p > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon, p)$ (die also von ε und von p abhängt), so daß für $n > N(\varepsilon, p)$ immer $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ ist. Vorhin aber sollte die Zahl $N(\varepsilon)$ nur von ε abhängen. Es sollte für alle p dieselbe Zahl $N(\varepsilon)$ ausreichen, um die Differenz kleiner als ε zu machen. Es kann wohl zu *jedem* p eine besondere solche Zahl N geben, aber wenn dann zu p -Werten, die über alle Grenzen wachsen, N -Werte gehören, die auch über alle Grenzen wachsen, so gibt es eben keine größte unter

diesen Zahlen, die für *alle* p ausreichte. Anders ausgedrückt: Wenn $N(\epsilon, p) < N(\epsilon)$ für *alle* p zugleich gilt, so kann man für jedes p dies $N(\epsilon)$ verwenden, und die Folge konvergiert. Es gibt aber nicht immer eine Zahl N , die größer ist als alle $N(\epsilon, p)$ (nämlich dann nicht, wenn unter diesen beliebig große vorkommen). Dann ist die Folge *divergent*. Damit mag der Sinn unserer Bedingung genügend geklärt sein. Wir kommen zum Beweis des allgemeinen Konvergenzprinzips.

1. Wenn ein Grenzwert existiert, so sei dieser S . Dann sind fast alle s_n um weniger als $\frac{\epsilon}{2}$ von S verschieden. Es gibt also eine

Nummer $N(\epsilon)$, von der an alle s_n um weniger als $\frac{\epsilon}{2}$ von S abweichen. Zwei beliebige unter diesen, etwa s_{n+p} und s_n , sind dann um weniger als ϵ voneinander verschieden. Alles in allem gibt es eine Zahl $N(\epsilon)$, so daß für $n > N(\epsilon)$ und beliebiges p immer $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$ bleibt. Wenn also die Zahlenfolge konvergieren soll, so muß notwendig unsere Bedingung erfüllt sein.

2. Wenn sie aber erfüllt ist, so konvergiert, wie jetzt zu zeigen ist, die Zahlenfolge. Zum Nachweis verwenden wir das Prinzip der Intervallschachtelung. Unsere Bedingung besagt, daß alle s_n mit einer Nummer größer als $N(\epsilon)$ um weniger als ϵ von $s_{N(\epsilon)}$ verschieden sind. Sie liegen also alle im Intervall $s_{N(\epsilon)} - \epsilon$ bis $s_{N(\epsilon)} + \epsilon$. Man kann also ein Intervall von der Länge 2ϵ angeben, in dem fast alle s_n liegen. Das geht für jede Zahl ϵ . Ich wähle daher ein Intervall von der Länge 1, in dem fast alle s_n liegen. Alsdann wähle ich ein Intervall von der Länge $\frac{1}{2}$, in dem gleichfalls alle s_n liegen. Dieses Intervall kann unmöglich ganz außerhalb des zuerst bestimmten liegen, weil sonst jedes der Intervalle unendlich viele Zahlen der Folge enthielte, dann also außerhalb des Intervalles von der Länge 1 doch noch unendlich viele der Zahlen lägen; das geht nicht. Die Intervalle müssen sich also wenigstens zum Teil überdecken. Wenn das von der Länge $\frac{1}{2}$ etwas überstehen sollte, so weiß man von vornherein, daß der gemeinsame Teil beider fast alle Zahlen enthalten muß, und nicht der überschießende, denn sonst lägen außerhalb des einen Intervalles unendlich viele Zahlen. In diesem Fall wähle ich als zweites Intervall I_2 der zu konstruierenden Schachtelung den genannten gemeinsamen Teil. Alsdann konstruiere ich ein Intervall von der Länge $\frac{1}{3}$ und wähle dies als I_3 , wenn es ganz in I_2 liegt. Andernfalls wähle ich als I_3 den Teil, den es mit I_2 gemeinsam hat. (Denn der muß nach der Schlußweise von vorhin fast alle Zahlen enthalten.) So fabre ich fort und erhalte eine Intervallschachtelung. Denn die Intervalle liegen ineinander, und ihre Länge konvergiert gegen Null. Der innerste Punkt ist der Grenzwert der Zahlenfolge, wie ohne weiteres einleuchtet.

Anwendung auf unendliche Reihen: Die unendliche Reihe $u_1 + u_2 + \dots$ sei ganz beliebig, und die s_n seien ihre Teilsummen. Dann ist

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}.$$

Die allgemeinste Konvergenzbedingung ist also diese: Es muß zu jedem ε eine Zahl $N(\varepsilon)$ geben, so daß die Summe beliebig vieler der auf $u_{N(\varepsilon)}$ folgenden Reihenglieder dem Betrag nach kleiner ist als dies ε . Mit dieser Bedingung kann man nun anscheinend noch nicht viel anfangen. Denn wie soll man erkennen, ob sie erfüllt ist oder nicht? Trotzdem werden wir gleich sehr nützliche Anwendungen derselben sehen. Ich behaupte nämlich folgenden Satz: *Eine Reihe ist sicher dann konvergent, wenn die Reihe ihrer absoluten Beträge konvergiert.* Denn wenn $|u_1| + |u_2| + \dots$ konvergiert, so gibt es für jedes ε ein $N(\varepsilon)$, so daß für alle positiven p die Summe $|u_{N+1}| + |u_{N+2}| + \dots + |u_{N+p}| < \varepsilon$ ist. Nun ist aber

$$|u_{N+1} + u_{N+2} + \dots + u_{N+p}| \leq |u_{N+1}| + |u_{N+2}| + \dots + |u_{N+p}|.$$

Daher ist auch für $n > N(\varepsilon)$ die Differenz $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. Die Reihe konvergiert also. Eine Reihe, für welche die Summe der absoluten Beträge konvergiert, heißt *absolut konvergent*. Es ist natürlich nicht jede Reihe absolut konvergent, denn so konvergiert z. B. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, während $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ divergiert. Wir können also nun die im § 4 bei Reihen mit positiven Gliedern gefundenen Kriterien anwenden, um in vielen Fällen die (absolute) Konvergenz einer vorgelegten Reihe zu erkennen.

Aus unserem allgemeinen Konvergenzprinzip lassen sich übrigens auch alle in jenem Paragraphen gewonnenen Kriterien erneut ableiten. Wir verzichten darauf. Nur wollen wir noch einmal daran erinnern, daß für jede konvergente Reihe $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ist. Das folgt aus dem allgemeinen Prinzip für $p = 1$. In diesem Satz ist das gebräuchlichste Divergenzkriterium enthalten. *Eine Reihe, deren Glieder nicht den Grenzwert Null haben, divergiert.*

Beispiel: $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ konvergiert für $|x| \leq 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Hier ist $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. Also ist $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = x^2 \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$. Der Grenzwert ist x^2 . Also für $|x| < 1$ ist die Summe der absoluten Beträge konvergent, die vorgelegte Reihe also auch. Für $|x| > 1$ erkenne ich, daß der Grenzwert des Quotienten größer ist als eins, daß also von einer gewissen Nummer an schon der Quotient größer sein muß als 1. Dann also ist von dieser Nummer an jedes Reihenglied größer als sein vorhergehendes dem Betrag nach. Da keines derselben Null ist, so können sie also in diesem Fall nicht gegen Null streben. Die

Reihe muß also divergieren. Nun bleibt noch $|x| = 1$ zu untersuchen. Für $x = 1$ haben wir eine alternierende Reihe. Die absoluten Beträge ihrer Glieder nehmen ständig ab und konvergieren gegen Null. Also ist die Reihe konvergent. Für $x = -1$ gilt die gleiche Überlegung.

Allgemeines Beispiel: $u_1 + u_2 + \dots$ sei absolut konvergent. Die absoluten Beträge aller Zahlen v_1, v_2, \dots seien beschränkt (es gibt also eine Zahl M , unter der sie alle liegen). Dann ist die Reihe $u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots$ gleichfalls absolut konvergent. Denn alle Teilsommen von $u_1 + u_2 + \dots$ sind kleiner als die Summe der Reihe der absoluten Beträge der u , etwa U genannt. Dann gilt

$$\begin{aligned} |u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n| &\leq |u_1| |v_1| + \dots + |u_n| |v_n| \\ &\leq M \{ |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| \} \leq M U. \end{aligned}$$

Also sind die Beträge aller Teilsommen der Reihe $|u_1 v_1| + |u_2 v_2| + \dots$ kleiner als UM . Die Reihe konvergiert also absolut. Unsere Bedingungen sind z. B. erfüllt, wenn sowohl $\sum |u_n|$ wie $\sum |v_n|$ konvergiert. Denn dann sind alle Glieder der v -Reihe dem Betrag nach kleiner als die Summe ihrer absoluten Beträge. Diese können wir dann als M nehmen.

§ 7. **Bedingt und unbedingt konvergente Reihen.** Der Wert einer Summe ist von der Reihenfolge der Summanden unabhängig. An diese Regel sind wir vom Rechnen mit endlichen Summen gewöhnt. Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, ob die Summe der unendlichen Reihen diese Eigenschaft mit den Summen von endlich vielen Gliedern gemeinsam hat.

Wir fragen zunächst, wie man die Summe zweier unendlicher Reihen bilden kann. Sei etwa $U = u_1 + u_2 + \dots$ eine erste und $V = v_1 + v_2 + \dots$ eine zweite konvergente Reihe, und seien etwa s_n und σ_n die n^{ten} Teilsommen der ersten und zweiten unendlichen Reihe. Dann haben wir natürlich $U + V = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + \sigma_n)$.

Nun ist aber $s_n + \sigma_n$ die n^{te} Teilsomme der unendlichen Reihe $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots$. *Diese konvergiert also auch, und ihre Summe ist gleich der Summe der beiden vorgelegten Reihen.*

Wir betrachten nun eine unendliche Reihe $U = u_1 + u_2 + \dots$. Sie wird positive und negative Glieder enthalten. Die positiven seien etwa der Reihe nach mit p_1, p_2, \dots , die negativen gleichfalls der Reihe nach mit n_1, n_2, \dots bezeichnet. Wir können aus den positiven Gliedern eine Reihe $p_1 + p_2 + \dots$ und aus den negativen eine Reihe $n_1 + n_2 + \dots$ bilden. Wir wollen die Beziehung dieser Reihen zu der vorgelegten untersuchen. Die vorgelegte soll konvergieren. Dann sind folgende Fälle denkbar: 1. Beide Teilsommen konvergieren; 2. eine konvergiert und eine divergiert; 3. beide divergieren. Wir wollen untersuchen, wie weit diese an

sich denkbaren Fälle wirklich möglich sind. Jede Teilsumme s_k der u -Reihe besteht aus einer Teilsumme π_{λ_k} der p - und einer Teilsumme ν_{λ_k} der n -Reihe. Es soll also sein $s_k = \pi_{\lambda_k} + \nu_{\lambda_k}$. Wenn nun nur eine der beiden Teilreihen, etwa die n -Reihe, konvergiert, so sei N ihre Summe. Dann haben wir also sicher $s_k > \pi_{\lambda_k} + N$. Nun wachsen aber die Teilsummen der divergenten p -Reihe über alle Grenzen. Denn sonst müßte diese Reihe von positiven Gliedern konvergieren. Nach der eben festgestellten Ungleichung wachsen also auch die Teilsummen der u -Reihe über alle Grenzen. Diese divergiert also auch. Die zweite Möglichkeit unserer Aufzählung scheidet also für eine konvergente u -Reihe aus.

Wenn also die u -Reihe konvergiert, so müssen die p - und die n -Reihe entweder beide konvergieren oder beide divergieren. Beide Fälle können wirklich eintreten. Denn wenn die vorgelegte Reihe, die u -Reihe, absolut konvergiert, so konvergiert natürlich jede Teilreihe auch absolut.¹⁾ Namentlich konvergiert also die Reihe der positiven und die der negativen Glieder. Umgekehrt, wenn diese beiden konvergieren, so ist nach der Betrachtung zu Beginn des Paragraphen der Wert der u -Reihe die Summe beider. Bilden wir statt dessen die Differenz beider, so konvergiert diese auch und ist weiter nichts als die Summe der absoluten Beträge der u -Reihe.

Auch der andere Fall, daß beide Reihen divergieren, kann eintreten, und zwar werden wir nach den bisher angestellten Betrachtungen erwarten, daß er dann eintritt, wenn eine konvergente Reihe nicht absolut konvergiert. Ein Beispiel gibt die Reihe

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

Die zugehörige p -Reihe ist

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$$

Daß sie divergiert, erkennt man daraus, daß ihre Glieder durch Halbierung der Glieder der harmonischen Reihe entstehen. Auch die n -Reihe muß divergieren. Sie ist $-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \dots$. Ihre Glieder sind jeweils dem Betrag nach größer als die entsprechenden Glieder der Reihe $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$, die natürlich wie die p -Reihe, von der sie ein Stück ist, divergiert.

Beispiel: Aus unseren Betrachtungen folgt, daß eine konvergente Reihe, die nur endlich viele Glieder vom einen der beiden Vorzeichen enthält, absolut konvergiert. Denn sonst müßten beide Teilreihen, also auch die endliche, divergieren. Diese letztere ist aber sicher konvergent.

1) Denn die Summe der absoluten Beträge irgendwelcher Reihenglieder ist kleiner als die Summe der absoluten Beträge aller.

Wie weit darf man nun in einer konvergenten Reihe die Glieder umordnen, ohne dadurch den Wert der Summe zu ändern? Wir wollen zunächst feststellen, daß die Summe einer nicht absolut konvergenten Reihe durch passendes Umstellen der Reihenglieder beeinflusst werden kann. Wir bemerken dazu, daß wegen der Konvergenz der u -Reihe die Glieder der p - und der n -Reihe gegen Null konvergieren. Da beide Reihen divergieren, gibt es in beiden beliebig große Teilsummen, da sie sonst wegen des gleichen Vorzeichens aller Glieder konvergieren müßten. Nach dieser Vorbemerkung wollen wir zeigen, daß bei passender Anordnung der Glieder die u -Reihe jeden beliebigen Wert erhalten kann. Der Gedankengang wird genügend klar werden, wenn wir zeigen, wie wir durch passende Anordnung der Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

den Summenwert eins verschaffen können. Diesen hat sie in der eben aufgeschriebenen Anordnung sicher nicht. Denn nach § 2 liegt ja die Summe dieser alternierenden Reihe immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilsummen, also z. B. zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{6}$, kann also nicht eins sein. Um eine Reihe mit der Summe eins zu erhalten, ordnen wir die Glieder so an, daß die Teilsummen der neuen Anordnung alle in den Intervallen einer Intervallschachtelung mit dem innersten Punkt eins liegen. Gewisse jetzt näher zu bezeichnende Teilsummen liefern also die Endpunkte der Intervallschachtelung. Ein jedes Intervall ist von zwei Teilsummen s_h und s_k der neuen Reihe begrenzt. Diejenigen neuen Teilsummen, deren Nummern zwischen h und k liegen, gehören diesem Intervall an. Wir wählen als erstes Glied 1, als zweites $\frac{1}{3}$. Dann ist $s_2 = \frac{4}{3}$, also größer als 1. Als drittes Glied nehmen wir $-\frac{1}{2}$, so wird $s_3 = \frac{5}{6}$, also wieder kleiner als 1. Damit eine spätere Teilsumme wieder größer als eins wird, nehmen wir nun wieder positive Glieder, so wie sie in der u -Reihe nacheinander kommen, ohne eines zu vergessen, und zwar so viele, daß dadurch die Teilsumme gerade wieder größer als eins wird. Hier genügt es, $\frac{1}{5}$ zu nehmen. Dann wird $s_4 = \frac{31}{30}$. Dann kommen wieder einige negative Glieder, doch nicht mehr als nötig sind, um die Teilsumme gerade kleiner als eins zu machen. Sie wird also höchstens um den Betrag des letzten dabei verwendeten Gliedes unter eins herunter sinken. Beim nächsten Schritt steigt sie wieder über eins, jedoch nicht mehr als um den Betrag des letzten Gliedes. Da aber die Beträge der Glieder gegen Null konvergieren, so konvergieren auch die Unterschiede der Teilsummen der umgeordneten Reihe von eins gegen Null. Also ist eins die Summe der umgeordneten Reihe. Denn diejenigen Teilsummen der neuen Reihe, bei deren Nummer ein Vorzeichenwechsel der Reihenglieder stattfindet, begrenzen die Intervalle der vorhin erwähnten Schachtelung. So wie eins

können wir ihr, wie man sieht, jeden beliebigen Summenwert verschaffen.

So haben wir eine merkwürdige, bei endlichen Reihen gar nicht gewohnte Eigenschaft mancher unendlichen Reihen kennen gelernt. *Die Summe einer unendlichen Reihe ist von der Reihenfolge der Glieder abhängig immer dann, wenn die Reihe zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.* Eine Reihe, deren Summe sich durch Umstellen der Glieder ändert, heißt *bedingt konvergent*, bleibt sie bei beliebigem Umstellen wie bei endlichen Reihen ungeändert, so heißt die Reihe *unbedingt konvergent*. Wir wissen also jetzt schon, daß jede unbedingt konvergente Reihe auch absolut konvergieren muß.

Bemerkung: Bei gewissen Umstellungen bleibt natürlich jede Reihe ungeändert. Wenn z. B. durch eine Umstellung fast alle Teilsummen ungeändert bleiben, so bleibt deren Grenzwert natürlich auch derselbe. Denn eine Abänderung endlich vieler Glieder einer Zahlenfolge beeinflußt den Grenzwert derselben nicht. Wenn wir also z. B. die 100 ersten Glieder untereinander irgendwie vertauschen, so bleiben alle Teilsummen mit höherer Nummer ungeändert.

Wir wollen nun umgekehrt zeigen, daß eine jede absolut konvergente Reihe auch unbedingt konvergiert. Sei also $U = u_1 + u_2 + \dots$ eine absolut konvergente Reihe und S ihre Summe, s_x ihre Teilsummen. Dann ist die Summe der absoluten Beträge von irgendwelchen Gliedern der Reihe kleiner als die Summe der absoluten Beträge aller. Ordnen wir die Reihe nun irgendwie um, etwa zu $u_{x_1} + u_{x_2} + \dots$, so seien s_x die Teilsummen. Die neue Reihe konvergiert auch absolut. Denn die Summe der absoluten Beträge von irgendwelchen Gliedern liegt ja, wie wir sahen, unter einer festen Grenze. Sei Σ die Summe der umgeordneten Reihe. Wir wollen zeigen, daß $S = \Sigma$. Dazu bestimme ich eine Zahl $N(\varepsilon)$, so daß für $n > N(\varepsilon)$ und beliebiges p immer $|s_{n+p} - s_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, also auch $|S - s_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ist und so daß mit diesem $N(\varepsilon)$ die gleichen Ungleichungen auch für die Summe der absoluten Beträge gelten. (Haben wir $N(\varepsilon)$ so gewählt, daß dies für die Summe der absoluten Beträge zutrifft, so ist es mit diesem $N(\varepsilon)$ für die u -Reihe erst recht der Fall.) Ferner sei σ_v eine beliebige Teilsumme der umgeordneten Reihe, die alle Glieder von s_n enthält, und die noch weitere Glieder enthalten kann. Die Differenz $\sigma_v - s_n$ enthält also nur Glieder von höherer Nummer als $N(\varepsilon)$. Die Summe beliebig vieler solcher ist aber nach unserer Annahme dem Betrag nach kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$. Also haben wir $|\sigma_v - s_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Endlich will ich v so groß wählen, daß $|\Sigma - \sigma_v| < \frac{\varepsilon}{3}$. Das geht wegen der Konvergenz der umgeordneten Reihe. Nun haben wir

net. Gehen wir hier zur Grenze $n \rightarrow \infty$ über, so bekommen wir den Wert des Produktes. Wir schreiben einmal versuchsweise $\Pi = \lim A_n + \lim B_n$, müssen uns aber darüber klar sein, daß das erst dann gerechtfertigt ist, wenn wir gezeigt haben, daß beide Grenzwerte existieren. Was nun zunächst den ersten der beiden anlangt, so bilden die A_n genannten Ausdrücke die Teilsummen einer gewissen unendlichen Reihe. Der absolute Betrag einer jeden solchen Teilsumme ist kleiner als die Summe der absoluten Beträge, also kleiner als der analoge Ausdruck, den wir erhalten hätten, wenn wir alles für die Reihen der absoluten Beträge aufgeschrieben hätten. Da dann aber unter dem ersten Limes nur ein Teil der bei der Multiplikation der Teilsummen erhaltenen Ausdrücke steht, so ist unser Ausdruck A_n kleiner als das Produkt

$$\sum_0^n |u_x| \sum_0^n |v_x| < \sum_0^\infty |u_x| \sum_0^\infty |v_x| = U \cdot V. \text{ Also konvergiert}$$

die Reihe, deren Teilsummen mit A_n bezeichnet wurden, absolut. Der erste Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ existiert also. Da aber links eine bestimmte Zahl steht, so muß auch der zweite Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$

existieren. Wir wollen zeigen, daß er Null ist. Dann wird das Produkt durch die eben untersuchte absolut konvergente Reihe geliefert. Die Glieder in der letzten Klammer sind nun aber Teile der auf die n^{te} folgenden Teilsummen der eben betrachteten absolut konvergenten Reihe. Also muß von einem gewissen n an ihre Summe unter einer beliebig gegebenen Schranke liegen. Der zweite Grenzwert ist also Null. Wir finden so für das Produkt zweier absolut konvergenten Reihen den folgenden Wert:

$$U \cdot V = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots$$

$$\text{Beispiel: } (1 + x + x^2 + \dots)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2},$$

was man auch direkt bestätigen kann, indem man ausrechnet:

$$\begin{aligned} (1 - 2x + x^2)(1 + 2x + 3x^2 + \dots) &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \\ &\quad - 2x - 4x^2 - 6x^3 - \dots \\ &\quad + x^2 + 2x^3 + \dots \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

§ 9. Die Berechnung der Summe unendlicher Reihen.

Die seither angestellten Betrachtungen bieten zunächst nur theoretisches Interesse. Denn wenn man praktisch den Wert einer unendlichen Reihe ausrechnen soll, so wird man genau wie bei den unendlichen Dezimalbrüchen — diesen speziellen unendlichen

Reihen — nach einer gewissen Zahl von Gliedern abbrechen und so den Wert der Teilsummen als Näherungswert der Reihensumme auffassen. Dies hat aber natürlich nur dann einen Sinn, wenn man beurteilen kann, wie genau die so benutzten Näherungswerte sind. Bei den unendlichen Dezimalbrüchen weiß man z. B., daß der Wert jedes Näherungsbruches höchstens um eine Einheit der letzten Ziffer vom genauen Wert abweichen kann. Im allgemeinen Fall bieten uns die in den vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen bei geringer Abänderung sofort ein Mittel, die Genauigkeit einer Näherung zu beurteilen. Wir schreiben einfach $S = s_n + r_n$. Dabei nennen wir r_n den n^{ten} Rest. Sein Wert $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ ist also der genaue Unterschied zwischen Näherung und genauem Wert. Es handelt sich darum, die Größe dieses Fehlers, die Größe von r_n , zu beurteilen. Eine besonders bequeme Methode dazu bietet sich im Falle der alternierenden Reihe, wo wir schon auf S. 39 sahen, daß der Wert einer jeden Teilsumme höchstens um das folgende Reihenglied von der Reihensumme verschieden ist. Das erste Glied des Restes also gibt uns schon eine Vorstellung des Fehlers im Falle der alternierenden Reihe. Er ist absolut kleiner als jenes. Ist zudem das erste Glied positiv, so war die Teilsumme zu klein, ist es aber negativ, so ist die Teilsumme zu groß. Im allgemeinen Falle ist natürlich der Fehler nicht kleiner als das erste Glied des Restes. Dies lehrt schon die geometrische Reihe, deren Rest

$$x^n + x^{n+1} + \dots = x^n \cdot \frac{1}{1-x}$$

für $0 < x < 1$ größer als x^n ist. Man muß jetzt etwas anders vorgehen, um die Größe des Restes zu beurteilen, z. B. so: Man weiß ohne weiteres, daß

$$|r_n| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots$$

Nach dem Prinzip der Reihenvergleichung ersetzen wir die Reihe rechts durch eine andere mit größeren Gliedern, die wir bequem summieren können. Dann ist der Wert von $|r_n|$ kleiner als die Summe dieser Reihe. Wir wollen z. B. die Summe

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

so näherungsweise ausrechnen. Wir finden

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \left(\frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Diese Reihe ist kleiner als die folgende

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \left(\frac{1}{n+2} \right)^2 + \dots \right).$$

Also kleiner als $\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$. Wenn wir also nur 9 Glieder summieren, so wird der Fehler höchstens $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^6}$. Wir können die Summe auf Hauptnenner bringen; wir können aber auch in einen Dezimalbruch entwickeln. Brechen wir da nach einer gewissen Stelle ab, etwa nach der sechsten, so bekommt jedes von 7 Gliedern noch einen Fehler von höchstens $\frac{1}{10^6}$. Addieren wir so die 10 ersten Dezimalbrüche, so haben wir in 2,718277 den Wert unserer Reihe um höchstens $\frac{1}{10^5}$ zu klein. 4 Ziffern nach dem Komma sind also sicher richtig; die fünfte stimmt nicht mehr. Die genauere Rechnung liefert für sie eine 8.

Wir betrachten als zweites Beispiel $\sum \frac{1}{n^2}$. Ihr Rest ist $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$. Dieser ist kleiner als

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \\ & = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots = \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Andererseits ist der Rest größer als

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \\ & = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Hat man also z. B. alle Glieder bis zu $\frac{1}{(999)^2}$ zusammengezählt, so hat man die Reihensumme erst bis auf einen Fehler berechnet, der zwischen $\frac{1}{999}$ und $\frac{1}{1000}$ liegt. Um also nur drei Dezimalen der Summe zu sichern, hat man 1000 Reihenglieder nötig. Die Berechnung der Reihensumme ist also nach dieser Methode nicht durchführbar. Wir werden im zweiten Band zugkräftigere Methoden kennen lernen.

IV. Stetige Funktionen.

§ 1. **Grenzwerte von Funktionen.** Seither haben wir den schon auf S. 16 definierten Grenzbegriff im wesentlichen nur auf solche Funktionen angewandt, welche nur für einzelne diskontinuierlich verteilte Werte der unabhängigen Variablen erklärt waren, nämlich auf Zahlenfolgen. Die einzelne Zahl der Folge haben wir dabei als Funktion ihrer Nummer aufgefaßt und den Grenzwert untersucht, welchem diese Funktion bei ins Unendliche wachsen-

der unabhängiger Variablen, nämlich ihrer Nummer, zustrebte. Jetzt wollen wir zu Funktionen übergehen, die in einem gegebenen Intervalle der unabhängigen Variablen überall erklärt sind. Wir können dann den Grenzwert der Funktion bei Annäherung der unabhängigen Variablen an eine endliche oder bei Annäherung an eine unendliche Stelle untersuchen. Nach dem, was wir bisher gemacht haben, liegt es am nächsten, mit der Annäherung an eine unendliche Stelle zu beginnen. Wir betrachten so eine Funktion, die für alle Werte von $x > M$ erklärt sein möge. Dann soll x durch positive Werte ins Unendliche wachsen. (Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir diesen Fall allein betrachten. Der andere, wo x durch negative Werte ins Unendliche geht, wird genau ebenso behandelt.) Wenn wir dann zu jeder positiven Zahl ε ein $N(\varepsilon)$ bestimmen können, so daß für alle $x > N(\varepsilon)$ immer $|f(x) - A| < \varepsilon$ bleibt, so schreiben wir $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$. Für

den so erklärten Limesbegriff gelten natürlich nach wie vor alle auf S. 18 f. abgeleiteten Regeln. Es ist also namentlich der Limes einer Summe gleich der Summe der Einzellimites, der Limes eines Produktes gleich dem Produkt der Einzellimites, der Limes eines Quotienten gleich dem Quotient der Einzellimites, wofern nur der Limes des Nenners nicht verschwindet. (Denn dann könnten nach wie vor z. B. Zähler und Nenner beide den Limes Null haben. $\frac{0}{0}$ aber hat keinen Sinn. Hat aber nur der Nenner den Grenzwert Null und der Zähler einen von Null verschiedenen endlichen oder unendlichen Grenzwert, dann wächst der ganze Ausdruck über alle Grenzen.)

$$\text{Beispiele:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{5x + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{5 + \frac{8}{x}} = \frac{2}{5}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 5}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 5}{x + \sqrt{x^2 - 5}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Dies letztere sieht man am besten ein, wenn man beachtet, daß $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$, oder geometrisch, daß die Kurve $y = \frac{\sin x}{x}$ zwischen den beiden Hyperbeln $y = \frac{1}{x}$ und $y = -\frac{1}{x}$ verläuft, die sich beide asymptotisch der x -Achse nähern. Die zu untersuchende Funktion ist also jeweils um weniger als jede der beiden Hyperbelordinaten der gleichen Abszisse von Null verschieden. Die Produktregel der Limesberechnung kann man hier natürlich nicht anwenden, da der eine Faktor $\sin x$ für $x \rightarrow \infty$ keinen Grenzwert hat. Denn $\sin x$ schwankt immer zwischen -1 und

+ 1 hin und her. Gleichwohl existiert der Limes des Produktes $\frac{1}{x} \sin x$ und ist Null.

Nun betrachten wir eine in einem endlichen Intervall $a < x < b$ überall erklärte Funktion. Wenn sich bei Annäherung von x an eine Stelle α des Intervalles $f(x)$ unbegrenzt dem Werte A nähert, so schreiben wir $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = A$. Schärfer erklären wir also: *Wenn sich zu jeder positiven Zahl ε ein $\delta(\varepsilon)$ bestimmen läßt, so daß für alle dem Intervalle angehörigen und von α verschiedenen x -Werte, für welche $|x - \alpha| < \delta(\varepsilon)$ ist, auch immer $|f(x) - A| < \varepsilon$ bleibt, so schreiben wir $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = A$.*

Den Zusatz „für alle dem Intervall angehörigen x -Werte“ haben wir hier gemacht, weil ersichtlich nicht alle x -Werte, die um $\delta(\varepsilon)$ nach der einen oder der anderen Seite von α abstehen, dem Intervalle $a < x < b$ anzugehören brauchen; es sollen immer nur die gemeint sein, für welche wir die Funktion als erklärt ansehen, die also dem vorgelegten Intervalle angehören. Dieser Fall wird namentlich dann zu berücksichtigen sein, wenn wir den Grenzwert der Funktion bei Annäherung an das Intervallende oder den Intervallanfang untersuchen.

Den Zusatz „und von α verschiedenen“ haben wir gemacht, weil in genauer Übertragung des bei Annäherung an einen unendlichen x -Wert Gesagten ganz außer Betracht bleibt, ob und wie die Funktion $f(x)$ für $x = \alpha$ erklärt ist. Es handelt sich um eine Eigenschaft der Funktion an den *Nachbarstellen* von $x = \alpha$ und *nicht* um eine Eigenschaft von $f(x)$ für $x = \alpha$ selbst. Daher legten wir auch ein offenes Intervall zugrunde, in dem wir die Funktion als erklärt ansehen. Wir könnten statt dessen auch irgendeine Punktmenge zugrunde legen und das Verhalten der Funktion bei Annäherung an einen ihrer Häufungspunkte untersuchen. Indessen genügt uns der oben gegebene Wortlaut.

Die allgemeinen Rechenregeln für Grenzübergänge gelten natürlich auch hier ohne Einschränkung.

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Wir deuten auch hier wieder x im Bogenmaß.¹⁾ Da offenbar immer $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, so können wir uns auf positive x -Werte beschränken. Man entnimmt der beistehenden Figur 12 ohne weiteres, daß die Sehne $2 \sin x$ kürzer ist als der Bogen $2x$. Das liefert also $\frac{\sin x}{x} < 1$. Aus der Figur 12 ersieht man weiter, daß $2 \operatorname{tg} x > 2x$. Also ist $\frac{\sin x}{x} > \cos x$. Da-

1) Siehe die Fußnote auf S 5

her haben wir jetzt die doppelte Ungleichung $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Daraus entnimmt man

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}.$$

Also ist $1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$. Daher ist für $|x| < \sqrt{2}\varepsilon = \delta(\varepsilon)$ immer

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon, \text{ d. h. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Diese Betrachtungen haben uns bisher nur gelehrt, wie man erkennen kann, ob eine vorgelegte Zahl A Limes einer Funktion ist oder nicht. Dazu muß nun noch genau wie bei Zahlenfolgen oder unendlichen Reihen eine Untersuchung kommen, wie man erkennt, ob eine vorgelegte Funktion bei Annäherung an eine bestimmte

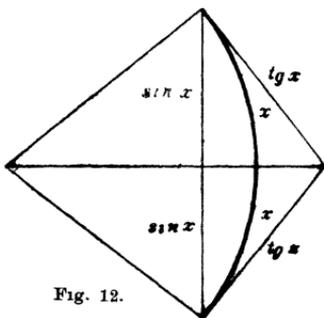


Fig. 12.

Stelle einen Grenzwert hat oder nicht. Auch hier läßt sich alles, was wir bei unendlichen Zahlenfolgen sagten, übertragen.

Wir übertragen zunächst unsere Resultate über stets wachsende Zahlenfolgen. *Es sei etwa eine Funktion $f(x)$ im Intervall $a < x < b$ erklärt, und sie möge etwa von a an bei Annäherung an b stets wachsen. Sie soll dabei aber doch unter einer festen Grenze M bleiben. Dann existiert $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$.* Den Beweis können wir auf die

Betrachtung einer unendlichen Zahlenfolge zurückführen. Ich bestimme mir eine unendliche Folge von wachsenden Abszissen x_1, x_2, \dots , deren Grenzwert b ist. Ich kann dazu etwa $x_n = b - \frac{1}{n}$

setzen. Die zugehörigen Funktionswerte seien y_1, y_2, \dots . Dann ist dies eine stets wachsende Zahlenfolge, die unter M bleibt. Sie hat einen Grenzwert A . Dies A ist nun zugleich der Grenzwert der Funktion, wenn sich x , beliebige Abszissenwerte des Intervalles durchlaufend, also wachsend, dem Intervallende nähert. Denn daß $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ besagt doch, daß für $n > N(\varepsilon)$ immer

$|y_n - A| < \varepsilon$ bleibt. Hier ist nun aber $y_n = f(x_n)$. Also ist $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Betrachte ich nun aber einen beliebigen x -Wert zwischen x_n und b , so liegt $f(x)$ zwischen $f(x_n)$ und A . Denn zunächst ist jedenfalls $f(x) \geq f(x_n)$, da die Funktion immer wächst. Es ist aber auch $f(x)$ nicht größer als A . Denn wenn sonst x_m eine Zahl der Folge wäre größer als x , so müßte auch $f(x_m) > f(x) > A$ sein, was nicht zutrifft. Also habe ich nun $|f(x) - A| < \varepsilon$, sobald $|x - b| < |x_n - b| = \delta(\varepsilon)$. Also ist $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = A$.

Diesem Satz können wir noch einige ähnliche an die Seite stellen. Auch dann existiert ein Grenzwert, wenn bei Annäherung an das Intervallende oder den Intervallanfang die Funktion ständig abnimmt, aber nicht unter eine gewisse Grenze heruntersinkt. (Die negative Funktion ist nämlich dann eine stets wachsende.) Auch für die Annäherung an einen inneren Punkt α des Intervalls können wir ähnliche Sätze aufstellen. Wir müssen uns aber dabei auf eine Annäherung durch stets wachsende oder durch stets abnehmende Werte von x beschränken. Meint man die Annäherung von rechts, so schreibt man $\lim_{x \rightarrow \alpha+0} f(x) = A$, meint man die von links, so schreibt man $\lim_{x \rightarrow \alpha-0} f(x) = A$.¹⁾ Daß hier für *monotone* (das ist der gemeinsame Name für stets wachsende und stets abnehmende) Funktionen dieselben Sätze gelten wie eben bei Annäherung an das Intervallende, erkennt man sofort, wenn man die Betrachtung auf ein Intervall beschränkt, dessen Anfang oder dessen Ende eben $x = \alpha$ ist. Alles Gesagte wird man auch für $x \rightarrow \infty$ bei passender Änderung des Wortlautes ohne weiteres übertragen können.

Noch vor einem Irrtum sei gewarnt. Man kann nicht behaupten, daß eine Funktion, die stets wächst, wenn x den Wert α aus dem Intervallinneren passiert, für $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ einen Grenzwert besitzt. Denn auch durch

$$y = x \quad \text{für } x \leq 0, \quad y = x + 1 \quad \text{für } x > 0$$

ist eine monotone, hier gleichzeitig geometrisch dargestellte (Fig. 13)

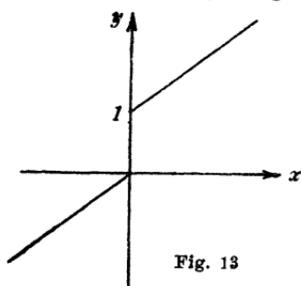


Fig. 13

Funktion erklärt. Man sieht ohne weiteres, daß $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$ und daß

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +1$. Aber der Grenzwert

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht, in dem Sinne,

daß $|f(x) - A| < \varepsilon$, sobald $|x| < \delta(\varepsilon)$. Denn dann müßte es eine Zahl A geben, die sowohl von 0 wie von 1 beliebig wenig verschieden wäre. Diese

Sätze gelten also nur für rechtsseitige und für linksseitige Annäherung, nicht für beliebige Grenzübergänge.

Anders ist es mit dem allgemeinen Konvergenzprinzip, das sich auch übertragen läßt. Es lautet jetzt so:

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ existiert dann und nur dann, wenn zu jeder positiven Zahl ε ein $\delta(\varepsilon)$ gehört, so daß für alle $x_1 \neq \alpha$ und

1) Eigentlich hätten wir vorhin $\lim_{x \rightarrow b-0}$ schreiben müssen. Da aber damals andere x -Werte als die aus dem Intervalle nicht in Betracht kamen, pflegt man dort so zu schreiben, wie es geschah.

$x_2 \neq \alpha$ aus dem Intervall $|x - \alpha| < \delta(\varepsilon)$ immer $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ bleibt.

Wir zeigen zunächst, daß die hier ausgesprochene Bedingung erfüllt ist, sobald ein Grenzwert existiert. Denn dann kann man um α ein Intervall abgrenzen, in dem alle Funktionswerte um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ vom Grenzwert verschieden sind. Dann sind irgend zwei derselben um weniger als ε voneinander verschieden. Wenn aber umgekehrt die Bedingung erfüllt ist, so folgt daraus auch die Existenz des Grenzwertes. Denn dann gibt es um α ein Intervall, in dem alle Funktionswerte um weniger als $\frac{1}{10}$ voneinander abweichen. Dann gibt es um α ein Teilintervall des eben konstruierten, in dem alle Funktionswerte um weniger als $\frac{1}{10^2}$ voneinander abweichen usw. Um nun die Existenz des Grenzwertes einzusehen, betrachten wir die Intervalle der y -Achse, in welche für die eben konstruierten Intervalle die Funktionswerte fallen. Das erste hat die Länge $\frac{1}{10}$. Das zweite ist natürlich ein Teilintervall von diesem — denn es kommen ja nur Abszissen in Betracht, die auch beim ersten Schritt schon verwendet wurden — und hat die Länge $\frac{1}{10^2}$. So haben wir auf der Ordinatenachse eine Schachtelung. Der innerste Wert ist der Grenzwert. Denn für ein gewisses der konstruierten x -Intervalle sind alle Funktionswerte von ihm um weniger als $\frac{1}{10^n}$ verschieden.

Der folgende Satz enthält ein Kriterium, das es oft in bequemer Weise erlaubt, zu erkennen, daß $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ nicht existiert: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = A$ existiert dann und nur dann, wenn für jede gegen α strebende Zahlenfolge x_1, x_2, x_3, \dots , — für die also $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ist — $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ist. Ein Grenzwert müßte also für alle diese Zahlenfolgen existieren; er muß aber auch für alle diese Folgen derselbe sein. Daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = A$ ist, leuchtet ohne weiteres ein. Aber auch die Umkehrung gilt, wie ich hier nicht näher ausführe, da wir keinen Gebrauch davon machen werden.

§ 2. **Stetige Funktionen.** Populär gesprochen versteht man unter einer stetigen Funktion eine solche Funktion, deren Kurvenbild glatt verläuft, wie etwa bei der Parabel oder bei der Geraden, das also keine Sprünge macht, wie das auf S. 54 betrachtete Beispiel, und das auch nicht ins Unendliche läuft, wie etwa die gleichseitige Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ bei $x = 0$. Es handelt sich nun darum, diese populäre, etwas unbestimmte Vorstellung begrifflich

zu fassen: Wir werden so definieren: *Eine Funktion $y = f(x)$ sei im abgeschlossenen Intervall $a \leq x \leq b$ überall eindeutig erklärt. Die Funktion heißt dann an einer Stelle α des Intervalles stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ ist, d. h. also wenn dieser Grenzwert erstens*

existiert und wenn zweitens dieser Grenzwert mit dem Wert übereinstimmt, den die Funktion ihrer Definition nach an dieser Stelle hat, wenn also zu jedem ε ein $\delta(\varepsilon)$ gehört, so daß $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$, sobald $|x - \alpha| < \delta(\varepsilon)$. Um also die Stetigkeitsdefinition zu erhalten, haben wir nur aus dem auf S. 52 gegebenen Wortlaut der Limesdefinition die Worte „und von α verschiedenen“ wegzulassen, und statt des dort offenen, wie es hierin schon liegt, ein abgeschlossenes Intervall zugrunde zu legen.

Beispiele: 1. Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind wieder stetige Funktionen an jeder Stelle, wo der Nenner nicht verschwindet. Also sind alle rationalen Funktionen stetige Funktionen. Denn zunächst gilt doch sicher $\lim_{x \rightarrow \alpha} x = \alpha$.

Also ist $y = x$ an jeder endlichen Stelle stetig. Daraus folgt, daß für jedes ganze positive n : $y = x^n$ eine stetige Funktion ist, denn es gilt doch wegen unserer Bemerkung über das Produkt stetiger Funktionen $\lim_{x \rightarrow \alpha} x^n = \alpha^n$. Das gilt auch für negative Exponenten,

wenn $\alpha \neq 0$ ist. Denn auch $y = \frac{1}{x}$ ist stetig außer bei $x = 0$. Ebenso ist $y = ax^n$ stetig; denn es gilt $\lim_{x \rightarrow \alpha} ax^n = a\alpha^n$. Da die

Summe stetiger Funktionen stetig ist, so ist hiernach jede ganze rationale Funktion überall stetig. Da ferner jede gebrochene rationale Funktion der Quotient zweier ganzer Funktionen ist, so sind auch diese überall stetig, wo der Nenner nicht verschwindet.

2. Die trigonometrischen Funktionen sind stetige Funktionen. Wir bemerken zunächst, daß $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ und daß $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Das folgt aus den Betrachtungen, die wir schon auf S. 53 angestellt haben. Denn dort fanden wir $|\sin x| < |x|$ und $|1 - \cos x| < \frac{x^2}{2}$. Daraus ergibt sich alles. Nun ist weiter

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \lim_{y \rightarrow 0} \sin(\alpha + y) = \lim_{y \rightarrow 0} (\sin \alpha \cos y + \cos \alpha \sin y) = \sin \alpha.$$

Also ist $\sin x$ stetig. Ebenso führt man den Nachweis für $\cos x$. Daraus folgt die Stetigkeit von $\operatorname{tg} x$.

Die stetigen Funktionen lernt man erst richtig schätzen, wenn man sich ein wenig mit den unstetigen abgegeben und gesehen hat, welche merkwürdigen Vorkommnisse sich da darbieten können. Wir wollen daher jetzt ein paar Beispiele unstetiger Funktionen vornehmen und damit diesen Paragraphen schließen. Ein Beispiel lernten wir schon auf S. 54 kennen. Dort besaß die Funktion keinen

Grenzwert und konnte darum nicht stetig sein. Auch die Funktion $y = \sin \frac{1}{x}$ besitzt für $x = 0$ keinen Grenzwert. Denn gerade wie $\sin x$ bei Annäherung von x an ∞ , schwankt sie bei Annäherung an $x = 0$ immer zwischen -1 und $+1$ hin und her. Die Wellenhöhe bleibt immer dieselbe. Aber die Wellenlängen werden bei $\sin \frac{1}{x}$ immer kürzer. Denn die Nullstellen liegen bei $\frac{1}{x} = 2k \frac{\pi}{2}$, die Stellen, wo $\sin \frac{1}{x} = 1$, finden sich bei $\frac{1}{x} = (4k + 1) \frac{\pi}{2}$, und $\sin \frac{1}{x}$ wird -1 bei $\frac{1}{x} = (4k + 3) \frac{\pi}{2}$.

Im Gegensatz hierzu ist die folgende Funktion wieder bei $x = 0$ stetig. Es sei $y = 0$ für $x = 0$ und $y = x \sin \frac{1}{x}$ für alle anderen x . Dann ist $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$. Also ist $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. Und daher ist die Funktion bei $x = 0$ stetig. Das gleiche gilt auch von $x^2 \sin \frac{1}{x}$ usw. Eine Funktion kann auch dann unstetig werden, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Definieren wir z. B. $y = 0$ für $x \neq 0$ aber $y = 1$ für $x = 0$. Dann ist diese Funktion bei $x = 0$ unstetig, denn der Grenzwert 0 stimmt nicht mit dem Funktionswert 1 überein. Unstetig ist auch die Funktion, die wir dadurch erklären, daß sie 0 sein soll für alle rationalen x , daß sie eins sein soll für alle irrationalen x -Werte.

§ 3. Allgemeine Sätze über stetige Funktionen.¹⁾ *Satz 1: Falls $f(x)$ für $a \leq x \leq b$ stetig und endlich ist und falls $\operatorname{sgn} f(a) = -\operatorname{sgn} f(b)$ (sgn lies *signum* = *Vorzeichen*), so verschwindet $f(x)$ an mindestens einer Stelle im Innern des Intervalles [Die genaue Zahl der Vorzeichenwechsel ist ungerade.]*

Wir stellen zunächst den anschaulichen Sinn des Satzes fest: Eine stetig verlaufende Kurve sei z. B. am Anfang des Intervalles unter der x -Achse, am Ende des Intervalles über der x -Achse. Dann muß sie dazwischen die x -Achse schneiden, und zwar im ganzen eine ungerade Zahl von Malen. Die Funktion muß dabei im Intervall stetig sein, denn sonst könnte ihr Kurvenbild einen Sprung über die x -Achse hinweg machen. Mit diesem anschaulichen Beweis dürfen wir uns aber nicht begnügen. Denn wir haben unsere anschauliche Vorstellung von einer stetigen Funktion durch einen exakten Begriff ersetzt. Und wir müssen nun erkennen, daß diesem Begriff die eben anschaulich festgestellte Eigenschaft auch noch zukommt. Das wird unseren Glauben an die Zweckmäßigkeit unserer

1) Wenn die Erörterungen dieses Paragraphen noch zu schwer sind, mag gleich beim nächsten Kapitel weiterfahren und erst nach Bedarf hierher zurückkommen

Definition stärken. Der Beweis gelingt durch das Prinzip der Intervallschachtelung, durch das wir eine Nullstelle direkt aufsuchen. Ich teile das Intervall in zwei gleiche Teile. Wenn im Teilpunkt die Funktion verschwindet, so ist die Behauptung bewiesen. Wenn die Funktion dort nicht verschwindet, so muß an Anfang und Ende der einen Intervallhälfte die Funktion verschiedenes Vorzeichen haben. Dies Intervall teile ich wieder in zwei gleiche Teile und

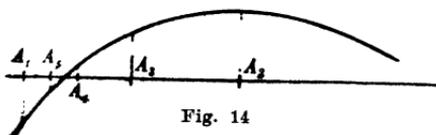


Fig. 14

mache denselben Schluß. So fortfahrend finde ich entweder einmal einen Teilpunkt, der zugleich Nullstelle ist, oder aber ich erhalte eine Intervallschachtelung (Fig. 14), derart, daß in den Intervallanfängen alle Funktionswerte ein und dasselbe Vorzeichen haben, und daß auch in den Intervallenden das Vorzeichen dasselbe ist, aber das entgegengesetzte von dem in den Anfängen.¹⁾ Daher muß der Wert im innersten Punkt der Schachtelung sowohl von positiven wie von negativen Werten beliebig wenig verschieden sein. Er kann daher nur Null sein.

Satz 2: Sei $f(a) = A$ und $f(b) = B$; dann nimmt die Funktion zwischen a und b jeden Wert zwischen A und B mindestens einmal an. Denn sei m dieser Wert, so verschwindet nach Satz 1 die Funktion $f(x) = m$ mindestens einmal im Intervall, da $A - m$ und $B - m$ verschiedenes Vorzeichen haben.

Satz 3: Eine in einem abgeschlossenen endlichen Intervall stetige (daher auch endliche) Funktion ist im Intervall nach oben beschränkt, d. h. sie liegt im ganzen Intervalle unter einer bestimmten endlichen Schranke. Für die Gültigkeit dieses Satzes ist es wesentlich, daß das Intervall abgeschlossen ist, daß also auch an Anfang und Ende die Funktion noch endlich und stetig ist. Denn z. B. ist $y = \frac{1}{x}$ für $0 < x \leq 1$ endlich und stetig, aber im Intervall nicht beschränkt, weil sie bei $x = 0$ unendlich wird, das heißt bei Annäherung an $x = 0$ über alle Grenzen wächst. Wenn der Satz nicht richtig wäre, so müßte es eine Folge von Funktionswerten y_1, y_2, \dots geben, die über alle Grenzen wüchsen. Es genügt, anzunehmen, sie seien alle positiv. Der Fall, daß alle negativ sind, erledigt sich ebenso. Die zugehörigen Abszissen seien der Reihe nach x_1, x_2, \dots . Diese Zahlen besitzen im Intervall oder an einem seiner Enden einen Häufungspunkt.²⁾ Sei dieser ξ . Dann gibt es also beliebig nahe bei ξ Stellen, wo $f(x)$ oberhalb irgendeiner vorgegebenen Grenze bleibt. Andererseits aber ist $f(x)$ bei ξ stetig

1) Wir beschreiben damit ein häufig zur numerischen Berechnung der Gleichungswurzeln verwandtes Verfahren.

2) Siehe S. 20

und endlich. Es sei $f(\xi) = \Xi$. Dann kann ich wegen der Stetigkeit um $x = \xi$ ein Intervall abgrenzen, in dem die Funktion unter $\Xi + 1$ bleibt. Andererseits müßte es aber nach unseren Feststellungen auch in diesem Intervalle Stellen geben, wo $f(x)$ größer als $\Xi + 1$ wird. Das geht nicht. Also ist die Funktion beschränkt.

Unter allen Zahlen, die von keinem Funktionswert einer solchen stetigen beschränkten Funktion übertroffen werden, gibt es eine kleinste. Sie heißt die *obere Grenze* der Funktion im Intervall.

Am bequemsten ist es, sie, wie S. 31 in ähnlichem Fall geschehen, durch den Dedekindschen Schnitt zu bestimmen. Dort handelte es sich um beschränkte Zahlenfolgen. Ein Leser aber, der den dort gegebenen Beweis sich wieder ansieht, wird gleich merken, daß er für den jetzigen Fall unverändert Anwendung finden kann.

Ganz ebenso zeigt man, daß die Funktion *nach unten beschränkt* ist und eine *untere Grenze* besitzt.

Satz 4: Eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion besitzt ein Maximum und ein Minimum, d. h. eine Stelle, wo sie ihrer oberen Grenze gleich wird (Maximum), und eine Stelle, wo sie ihrer unteren Grenze gleich wird (Minimum).

Ich bestimme eine unendliche Folge von Ordinaten, y_1, y_2, \dots , die sich unbegrenzt der oberen Grenze nähern. x_1, x_2, \dots seien die zugehörigen Abszissen. Diese besitzen einen Häufungspunkt ξ . Dann ist $f(\xi)$ der oberen Grenze gleich. Denn wegen der Stetigkeit ist $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Ebenso beweist man die Existenz des Minimums.

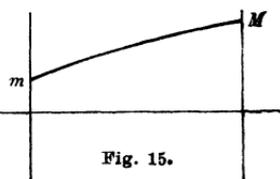


Fig. 15.

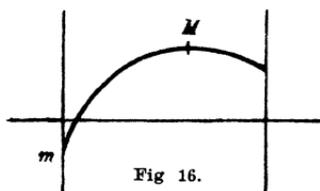


Fig. 16.

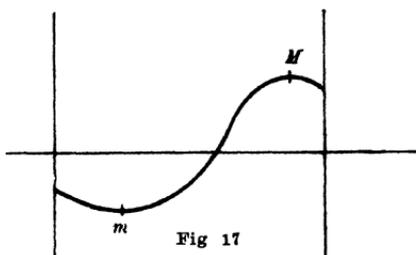


Fig. 17

In den Fig. 15, 16, 17 sind verschiedene Fälle veranschaulicht. Dort sind Maxima mit M , Minima mit m bezeichnet.

§ 4. Mittelbare und inverse Funktionen. I. $y = f(u)$ sei eine stetige Funktion von u ; zugleich sei aber $u = \varphi(x)$ eine stetige Funktion von x . Dann ist die *mittelbare* Funktion $y = f(\varphi(x))$ auch eine stetige Funktion von x . Denn es ist $|f(u) - f(a)| < \varepsilon$, sobald $|u - a| < \delta(\varepsilon)$. Nun sei $a = \varphi(\alpha)$. Dann ist $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| < \delta(\varepsilon)$, sobald $|x - \alpha| < \eta\{\delta(\varepsilon)\}$. Also ist $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(\alpha))| < \varepsilon$, sobald $|x - \alpha| < \eta$. Also ist $f(\varphi(x))$ stetig.

II. $y = f(x)$ sei im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig und monoton z. B. ständig wachsend, und es sei $f(a) = A$, $f(b) = B$; dann nimmt, wie wir im vorigen Paragraphen auf S. 58 sahen, $f(x)$ jeden Wert zwischen A und B im Intervall an. Hier können wir wegen der Monotonität noch hinzufügen, daß die Funktion jeden Zwischenwert nur einmal annimmt, wenn sie nicht stückweise konstant ist. Diesen Fall wollen wir ausschließen. Es soll also für $x_2 > x_1$ immer auch $f(x_2) > f(x_1)$, nie $f(x_2) = f(x_1)$ sein. Dann gehört also zu jeder Ordinate y nur eine Abszisse x zwischen a und b , wo diese Ordinate statthat. So wird die Abszisse x eine im ganzen Intervall A bis B eindeutig definierte Funktion $x = \varphi(y)$.

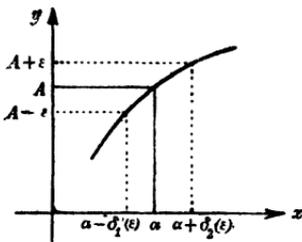


Fig. 18.

Das ist die Umkehrfunktion oder die inverse Funktion von $y = f(x)$. Wir wollen zeigen, daß diese überall zwischen A und B eindeutig definierte Funktion wieder stetig ist. Am bequemsten liest man dies aus der Fig. 18 ab, in der wir die beiden Funktionen $y = f(x)$ und $x = \varphi(y)$ veranschaulicht haben, nämlich die eine oder die andere, je nachdem man x oder y als die unabhängige Variable ansieht.

$y = f(x)$ ist nach Voraussetzung eine stetige Funktion von x . D. h. zu jedem ε kann man ein $\delta(\varepsilon)$ so bestimmen, daß für alle $|x - \alpha| < \delta(\varepsilon)$ immer $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$. Setzen wir $A = f(\alpha)$ und markieren auf der Ordinatenachse $y = A$ sowie $y = A - \varepsilon$ und $y = A + \varepsilon$. Dann können wir, wie in der Figur geschehen, sofort das Intervall auf der x -Achse bestimmen, in welchem die Funktion die Werte zwischen $A - \varepsilon$ und $A + \varepsilon$ annimmt. Für alle x aus dem kleinen Intervall $\alpha - \delta_1(\varepsilon) < x < \alpha + \delta_2(\varepsilon)$ ist immer $|f(x) - A| < \varepsilon$. [Das $\delta(\varepsilon)$ in der obigen Formulierung der Stetigkeit ist einfach die kleinere der beiden Zahlen δ_1 und δ_2 also hier einfach δ_1 .] Diese Konstruktion läßt sich für jedes hinreichend kleine ε ausführen. Nun zur inversen Funktion. Man liest aus der Figur ohne weiteres ab, daß immer dann, wenn die Ordinate y dem Intervall $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ angehört, notwendig auch die Abszisse x dem Intervall $\alpha - \delta_1 < x < \alpha + \delta_2$ angehören muß. Anders ausgedrückt besagt dies, daß immer $|\varphi(y) - \alpha| < \delta_2(\varepsilon)$ ist, sobald nur $|y - A| < \varepsilon$. Diese Aussage enthält die Stetigkeit der inversen Funktion, sobald man nur noch beachtet, daß ich ersichtlich das ε , von dem ich ausging, so einrichten kann, daß $\delta_2(\varepsilon)$ unter einer gegebenen Grenze liegt.

Beispiel: Der eben bewiesene Satz lehrt uns an jeder Stelle, wo der $\sin y$ wächst oder fällt, die Stetigkeit von $\arcsin x$. In der Umgebung der Stellen, die der Sinus nicht wachsend oder fallend passiert (das sind die Maxima und Minima der Funktion) ist der arcsinus nicht eindeutig. Anschaulich macht sich das der Leser am

besten an Fig. 4 S. 9 klar. Sie stellt ja sowohl $y = \sin x$ wie $x = \arcsin y$ dar. Ebenso erschließt man die Stetigkeit von arcuscotinus und arcustangens. Ebenso erkennt man, daß $\sqrt[n]{x}$ eine stetige Funktion von x ist.

V. Differentialrechnung.

§ 1. Definition des Differentialquotienten. Die Veranlassung zur Bildung des mathematischen Begriffes des Differentialquotienten bietet die geometrische Vorstellung der Richtung, in der eine gezeichnete Kurve einen ihrer Punkte passiert, oder auch die mechanische Vorstellung der Geschwindigkeit, die einem beweglichen Körper in einem gegebenen Moment zukommt. Wenn man annimmt, daß die Fortbewegung immer gleich rasch erfolgt, so versteht jedermann unter der Geschwindigkeit der Bewegung den Quotienten des zurückgelegten Weges durch die dazu verbrauchte Zeit. (Sie ist also der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg.) Wenn aber die Bewegung nicht immer gleich rasch oder gleich langsam vor sich geht, so kann ich natürlich auch diesen Quotienten bilden, aber er wird dann nur noch die Bedeutung einer durchschnittlichen Geschwindigkeit haben. Wenn ich mich aber immer so bewege, daß ich die gefundene Durchschnittsgeschwindigkeit einhalte, dann komme ich ebenso rasch ans Ziel, wie wenn ich genau die Art der Bewegung einhalte, von der wir ausgingen. Aber in den Zwischenzeiten werde ich mich bei beiden Arten der Bewegung nicht immer am gleichen Ort befinden, sondern ich werde bald einen Vorsprung haben, bald werde ich zurückbleiben. Wenn ich für eine andere Zeitspanne den Quotienten Weg durch Zeit bilde, so werde ich bei der gleichförmigen Bewegung immer denselben Wert erhalten. Denn dabei komme ich in jeder Zeiteinheit des Bewegungsverlaufes immer um gleich viel voran. Wenn ich aber für die ungleichförmige Bewegung während verschiedener Zeitspannen die durchschnittliche Geschwindigkeit bestimme, so werde ich jedesmal einen anderen Wert bekommen, weil ich mich bald rascher und bald langsamer bewege. Trotz allem habe ich die Vorstellung, daß ich in jedem Augenblick eine bestimmte Geschwindigkeit einhalte. Es fragt sich, welche der verschiedenen Durchschnittsgeschwindigkeiten ich als die wirkliche, in einem Zeitmoment zutreffende, ansehen soll. Wenn ich aber nun eine gewisse Zeit lang eine gefundene Durchschnittsgeschwindigkeit einhalte, so beschreibe ich jedoch eine andere Bewegung als die, von der ich die Durchschnittsgeschwindigkeit entnahm. Also kann ich keine der Durchschnittsgeschwindigkeiten brauchen, solange ich sie während einer gewissen Zeitspanne wirken lassen will. Da kommt uns nun die Vorstellung zu Hilfe, daß die wirkliche Geschwindigkeit von der durchschnittlichen um so weniger abweichen wird, für je kleinere Zeiträume

wir den Durchschnitt bilden. So kommen wir überein, unter der *Geschwindigkeit in einem Zeitmoment t* den Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit für verschwindende Zeilängen zu verstehen.

Sei also der zurückgelegte Weg $s(t)$. Zwischen dem Zeitpunkt t und dem Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist somit der Weg $s(t + \Delta t) - s(t)$ zurückgelegt. Dann ist der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$

die durchschnittliche Geschwindigkeit. Unter der *Geschwindigkeit zur Zeit t* verstehen wir den Grenzwert $\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$.

Wir lesen dies ds nach dt und nennen dies den (ersten) *Differentialquotienten* oder die (erste) *Ableitung* der Funktion $s(t)$ nach t . Sie ist selbst wieder eine Funktion von t und wird als solche auch mit $s'(t)$ bezeichnet.

Zu ganz ähnlichen Überlegungen führt die Betrachtung der Richtung einer Kurve $y = f(x)$. Eine Sehne, die zwei Kurvenpunkte verbindet, gibt nirgends die genaue Richtung der Kurve an, sondern nur eine gewisse durchschnittliche Richtung. Je näher wir aber die beiden durch die Sehne verbundenen Punkte aneinander legen, um so genauer fällt die Sehne mit der Kurve zusammen, und um so genauer wird sie im Punkt P die Richtung der Kurve angeben. Wir

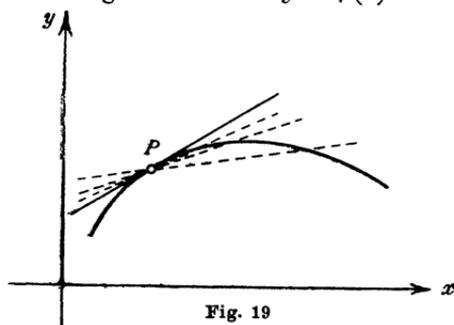


Fig. 19

haben versucht, das in der Fig. 19 zu veranschaulichen. So kommen wir auch hier dazu, unter der *Richtung der Kurve in einem ihrer Punkte (x, y)* den Grenzwert

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

zu verstehen. Der Leser sieht ohne weiteres, wie die Sehne beim Zusammenrücken ihrer beiden Schnittpunkte mit der Kurve in die Tangente der Kurve übergeht oder vielmehr in die Gerade, die wir in unserer Anschauung Tangente der Kurve nennen werden. Die Tangente ist erreicht, sowie die beiden Schnittpunkte zusammenfallen. Wir definieren also und geben damit unserer Vorstellung einen bestimmten begrifflichen Inhalt: *Unter der Tangente an eine Kurve $y = f(x)$ im Punkte (x, y) verstehen wir eine Gerade, die durch diesen Punkt geht und dabei mit der positiven x -Achse einen Winkel bildet, dessen tangens gleich $\frac{dy}{dx}$ ist.* Ist der Kurvenpunkt also (ξ, η) ($\eta = f(\xi)$), so lautet die Gleichung der Tangente $y - \eta = f'(\xi)(x - \xi)$. Unsere Betrachtung läßt erkennen,

daß die Richtung der Tangente die Grenze der Richtungen der verschiedenen den Berührungspunkt passierenden Sehnen ist.

Der Leser erkennt auch, daß wir im Grunde oben bei den Geschwindigkeiten und jetzt bei den Richtungen die gleichen Überlegungen angestellt haben. Die Übereinstimmung wird noch deutlicher, sowie wir die Funktion $s = s(t)$, die die Bewegung angab, graphisch darstellen. Dann wird der Richtungstangens einer Sehne eine durchschnittliche Geschwindigkeit. Die Sehne selbst kennzeichnet den Zusammenhang zwischen Weg und Zeit bei einer Bewegung, die diese (konstante) Geschwindigkeit immer einhält, und zeigt, wie beide voneinander abweichen. Je kürzer das Zeitintervall ist, für das wir die Durchschnittsgeschwindigkeit bilden, um so näher liegen die Schnittpunkte der Sehne beieinander. Um so besser approximiert die gleichförmige „Durchschnittsbewegung“ die wirklich stattfindende. Die Geschwindigkeit im Zeitmoment selbst ist der Richtungstangens der Kurventangente, die für ein sehr kleines Intervall die wirkliche Bewegung sehr gut darstellt. Wie gut die Approximation einer Kurve durch ihre Tangente ist, wird uns im nächsten Kapitel eingehend beschäftigen. Festzustellen, wie man aus den verschiedenen Augenblicksgeschwindigkeiten, deren jede nur eine verschwindende Zeitspanne lang vorhanden ist, rückwärts doch wieder die tatsächliche Bewegung aufbauen kann, wird eine der Aufgaben der Integralrechnung sein.

Bei den Anwendungen wird es ebensowenig wie beim Rechnen mit Irrationalzahlen nötig sein, den Grenzübergang völlig auszuführen. Man wird da immer ohne *merklichen* Unterschied eine Kurve durch ein Sehnenpolygon von genügend vielen Seiten ersetzen. Wie weit man da gehen muß, richtet sich nach der jeweils angestrebten Genauigkeit. Die reine Mathematik zieht es indessen vor, mit absolut genauen Größen zu rechnen, weil man dann die Mühe spart, jedesmal die Genauigkeit eines Resultates besonders anzugeben. Daneben tritt dann die für die Praxis wichtige Aufgabe auf, festzustellen, wie genau die beim Grenzübergang durchlaufenen Zahlen den wirklichen Wert approximieren und statt desselben verwendungsfähig sind. Das ist eine Aufgabe, welche uns ähnlich auch bei den unendlichen Reihen vorgelegen hat. Beides soll, wie dort, getrennt behandelt werden.

Bemerkungen: 1. Im Differentialquotienten liegt wieder ein Beispiel für den Grenzwert eines Quotienten $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ vor, den man nicht nach der Quotientenregel bilden kann, weil man sonst nur das nach wie vor unbestimmte Resultat $\frac{0}{0}$ gewinnen würde. 2. Die Existenz eines Differentialquotienten ist keine Folge der Stetigkeit einer Funktion, sondern eine selbständige Eigenschaft neben dieser. Einige Beispiele sollen dies klarlegen. Die Funktion $y = x$ für $0 \leq x \leq 1$, $y = 2 - x$ für $1 \leq x \leq 2$, ähnlich der

in Fig. 5 S. 10 dargestellten, ist stetig, und doch wird der oberste Punkt von der Kurve nicht in ein und derselben bestimmten Richtung durchlaufen, sondern es findet dort ein sprunghafter Richtungswechsel statt. Wird doch die Kurve in der ersten Hälfte immer in der Richtung der ersten Geraden durchlaufen. Vom obersten Punkt an müssen wir uns jedoch in Richtung der zweiten Geraden fortbewegen. Auch die Rechnung ergibt, daß der Grenzwert $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{2 - (1 + \Delta x) - 1}{\Delta x} = -1$ existiert, ebenso wie der Grenzwert $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{(1 + \Delta x) - 1}{\Delta x} = +1$; aber beide sind voneinander verschieden. Der Leser sieht, wie hier zwar von einem *vorderen und einem hinteren Differentialquotienten* gesprochen werden kann, aber nicht von einer Richtung der Kurve schlechthin, weil bei der Definition des Differentialquotienten $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ angenommen ist, daß $\Delta(x)$ positive *und* negative Werte durchläuft. Ein weiteres Beispiel wird durch die Funktion:

$$\left[y = x \sin \frac{1}{x} (x \neq 0), y = 0 \text{ für } x = 0 \right]$$

geliefert, die bei $x = 0$ stetig ist. Denn für $|x| < \varepsilon$ ist auch $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$. Aber sie ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar. Denn der Differenzenquotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ wird hier für $x = 0$ zu $\frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \sin \frac{1}{h}$. Aber wir wissen schon von S. 57, daß $\lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$ nicht existiert. Betrachten wir aber:

$$\left[y = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \text{ für } x = 0 \right],$$

so haben wir, wie man leicht sieht, wieder eine differenzierbare

Funktion. Denn es ist $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0$.

Diesen Bemerkungen gegenüber besitzt der folgende Satz eine besondere Bedeutung. Wenn $f(x)$ in einem $x = x_0$ enthaltenden Intervall eindeutig definiert ist und wenn $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar ist, so ist $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ auch stetig.

Denn sei $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m$, so ist für alle $|h|$ unter einer gewissen Grenze $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < (|m| + 1)|h|$. Daher ist $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, also $f(x)$ bei $x = x_0$ stetig.

Beispiele: 1. $y = ax + b$, $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = a$.

2. $y = x^2$, Parabel, $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + \lim_{h \rightarrow 0} h = 2x$.

3 $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ (Kreis)¹⁾ $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{r^2 - (x+h)^2} - \sqrt{r^2 - x^2}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2hx - h^2}{h(\sqrt{r^2 - (x+h)^2} + \sqrt{r^2 - x^2})}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - (x+h)^2} + \sqrt{r^2 - x^2}} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{r^2 - (x+h)^2} + \sqrt{r^2 - x^2}}$
 $= \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$.

§ 2. Differentiationsregeln. Wir gehen nun zur systematischen Betrachtung der verschiedenen elementaren Funktionen und zur Bestimmung ihrer Differentialquotienten über.²⁾

1. Die Ableitung (= Differentialquotient) der Konstanten ist Null. Sei nämlich $y = c$, so ist $\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0$, also auch $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 0$.

2. Die Potenz $y = x^n$ (n positiv und ganz) liefert $y' = nx^{n-1}$. $\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$ nämlich ist von der Form

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}.$$

Also wird

$$\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = (x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

Daher finden wir $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = n \cdot x^{n-1}$

3. $y = \sin x$ liefert $y' = \cos x$. Denn es wird

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Nun ist aber: $\left| \frac{\cos h - 1}{h} \right| < \frac{h}{2}$ (nach S. 53). Also $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Ferner nach S. 53 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. Also $y' = \cos x$.

1) Wir halten immer das positive Vorzeichen der Wurzel fest, betrachten also den oberhalb der x -Achse gelegenen Halbkreis.

2) Alle in der Folge vorkommenden Funktionszeichen bedeuten differenzierbare Funktionen.

4. $y = \cos x$ liefert $y' = -\sin x$. Denn es wird:

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}.$$

Allgemeine Regeln: 5. Der Differentialquotient einer Summe ist gleich der Summe der Differentialquotienten der Summanden. Denn es wird:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + \varphi(x+h) - (f(x) + \varphi(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

wofür die beiden Grenzwerte rechts existieren. Die Ausdehnung auf beliebig viele Summanden in endlicher Zahl leuchtet ein.

6. Wenn $y = f(x) \cdot \varphi(x)$, und wenn beide Funktionen differenzierbar (und stetig) sind, so ist auch das Produkt differenzierbar, und es wird $y' = f(x)\varphi'(x) + f'(x)\varphi(x)$. Denn es ist:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x+\Delta x) + f(x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Also wird:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(x+\Delta x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \\ &= \varphi(x)f'(x) + f(x)\varphi'(x). \end{aligned}$$

Beispiel: $y = x \sin x$, $y' = \sin x + x \cos x$.

7. Wenn wieder $f(x)$ und $\varphi(x)$ differenzierbare Funktionen sind, so ist der Quotient $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ überall da differenzierbar, wo

der Nenner nicht verschwindet, und man hat $y' = \frac{\varphi(x)f'(x) - f(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$. Denn es ist:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \frac{f(x+\Delta x)\varphi(x) - f(x)\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x \varphi(x)\varphi(x+\Delta x)} \\ &= \frac{\varphi(x)(f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x \varphi(x)\varphi(x+\Delta x)} + \frac{f(x)(\varphi(x) - \varphi(x+\Delta x))}{\Delta x \varphi(x)\varphi(x+\Delta x)}. \end{aligned}$$

Anwendungen: 8. $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ gibt

$$y' = (-n)x^{-n-1} = -n \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Die Regel für die Differentiation der Potenz gilt also auch für negative ganze Exponenten

9. $y = \operatorname{tg} x \left(= \frac{\sin x}{\cos x} \right)$ gibt $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.
(Siehe Regel 7.)

10. $y = \operatorname{ctg} x \left(= \frac{\cos x}{\sin x} \right)$ gibt $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$.
(Siehe Regel 7.)

11. Die mittelbare Funktion $y = f(u(x))$ liefert $y' = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.
Denn es wird:

$$\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Wegen $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u)$

hat man aber $\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u) + \varepsilon(\Delta u)$

oder $f(u + \Delta u) - f(u) = f'(u)\Delta u + \varepsilon(\Delta u)\Delta u$,

wo $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$ ist. Daher wird

$$\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Da aber für $\Delta x \rightarrow 0$ auch $\Delta u \rightarrow 0$ gilt, so hat man weiter

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} = f'(u) \frac{du}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Das Resultat ist also so zu verstehen, daß man erst die Funktion $f(u)$ nach u differenziert; in der so gefundenen Funktion hat man wieder $u = u(x)$ einzutragen. Dies Ergebnis hat man noch mit u' zu multiplizieren. (Die gefundene Formel heißt auch *Kettenregel*.)

Beispiel: $y = \cos^2 x$ liefert:

$$y' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \sin x \cos x.$$

12. *Die inverse Funktion.* Es sei $y = f(x)$ und $x = \varphi(y)$. Dann ist $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$. Also $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ oder $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Man kann also $\varphi'(y)$ erhalten, indem man das reziproke von $f'(x)$ bildet und darin x durch y ausdrückt.

13. *Beispiel:* $y = x^{\frac{1}{n}}$ gibt $y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, so daß die Potenzregel auch hier wieder gilt. Denn es ist $x = y^n$. Also $x' = n y^{n-1}$. Also $y' = \frac{1}{n} \frac{1}{y^{n-1}}$. Also endlich, da $y = x^{\frac{1}{n}}$: $y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

14. *Beispiel*: $y = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ gibt $y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$. Die Potenzregel gilt somit für beliebige positive und negative *rationale* Exponenten. Ihre Gültigkeit für irrationale Exponenten werden wir erst später (S. 75) gewinnen.

$$15. y = \arcsin x \text{ gibt } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Denn } x = \sin y \text{ gibt}$$

$$x' = \cos y = \sqrt{1-x^2}.$$

Hierdurch ist auch das Vorzeichen bestimmt, das man im Schlußresultat der $\sqrt{1-x^2}$ geben muß. Es ist nämlich das gleiche, wie das von $\cos y$

$$16. y = \arccos x \text{ gibt } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Denn } x = \cos y \text{ gibt}$$

$$x' = -\sin y = \sqrt{1-x^2}.$$

$$17. y = \operatorname{arctg} x \text{ gibt } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}. \text{ Denn } x = \operatorname{tg} y \text{ gibt}$$

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

$$18. y = \operatorname{arcctg} x \text{ gibt } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Wir haben damit die hauptsächlichsten Funktionen differenzieren gelernt. Nur die Exponentialfunktion und der Logarithmus stehen noch aus. Diese wollen wir erst im nächsten Paragraphen vornehmen, da wir etwas ausführlicher dabei verweilen müssen. Auch von der Differentiation der impliziten Funktionen war noch nicht die Rede und von der Verallgemeinerung der Kettenregel, die sich ergibt, wenn ich in einer Funktion von zwei oder mehr Variablen für die Variablen Funktionen von x eingetragen denke. So erhalte ich eine neue Funktion von x . Für ihre Differentiation gilt eine ähnliche Regel, wie wir sie bei den mittelbaren Funktionen von einer Variablen fanden. Wir wollen aber die nähere Betrachtung bis an eine spätere Stelle verschieben (S. 117), weil wir erst dazu einiges aus der Theorie der Funktionen von mehreren Variablen lernen müssen. Wir können das um so eher tun, als man fast immer mit dem auskommen wird, was wir hier bisher¹⁾ besprochen haben. Das gilt auch von den *impliziten Funktionen*, welchen wir vorbehaltlich einer späteren ausführlichen Erörterung noch ein paar Worte widmen wollen. Wir wollen am Beispiel der algebraischen Funktionen eine Regel kennen lernen, die wir später allgemein bestätigt finden werden. Bevor wir das tun, müssen wir erst eine Benennung einführen. Es sei eine Funktion $z = f(x, y)$

1) Vgl. auch noch die „logarithmische Differentiation“ S. 76.

von zwei Variablen vorgelegt. Wenn ich eine der beiden Variablen festhalte und nur die andere sich ändern lasse, so erhalte ich jedesmal eine Funktion dieser anderen Variablen. Wir wollen annehmen, diese seien differenzierbar. Man nennt die so gebildeten Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ nach x oder nach y *partielle Ableitungen* von f nach x bzw. nach y und bezeichnet sie mit $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$. Es ist also definiert:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

und analog $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$. Der Grenzübergang ist jedesmal bei festgehaltenen y bzw. x auszuführen.

19. *Differentiation der algebraischen Funktionen.* Durch die algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ sei die algebraische Funktion $y = y(x)$ definiert. Um sie zu differenzieren — daß sie immer differenzierbar ist, werden wir erst später lernen, doch kennen wir vom Kreis und der Ellipse her Beispiele solcher differenzierbaren Funktionen — haben wir es nicht nötig, erst die Gleichung explizite nach y aufzulösen. Man kann einfacher vorgehen. Denken wir uns nämlich die Gleichung aufgelöst und $y(x)$ bestimmt. Tragen wir dies in die Gleichung ein, so ist diese identisch erfüllt für alle x . Wir haben also einen Ausdruck von dieser Form

$$\sum a_{ik} x^i (y(x))^k,$$

der für alle x verschwindet. Daher muß auch seine Ableitung nach x verschwinden, weil wir ja gelernt haben, daß der Differentialquotient einer Konstanten Null ist. Wir finden daher nach der Produktregel, daß $\sum a_{ik} (i x^{i-1} (y(x))^k + x^i k (y(x))^{k-1} \frac{dy}{dx}) = 0$. Diesen Ausdruck können wir nun anders schreiben, nämlich so:

$$\sum i a_{ik} x^{i-1} (y(x))^k + \frac{dy}{dx} \sum k a_{ik} x^i (y(x))^{k-1}.$$

Hier steht nun in der ersten Summe offenbar weiter nichts als die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach x , und in der zweiten Summe steht die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach y . Also finden wir $\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Und daraus ergibt sich, falls nicht an der betrachteten Stelle der algebraischen Kurve beide partielle Ab-

leitungen verschwinden, $y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f_x}{f_y}$. Um also die Rich-

tung einer algebraischen Kurve in einem ihrer Punkte zu bestimmen, habe ich nur in diesem Ausdruck für x und y die Koordinaten

des betreffenden Punktes einzutragen. Das ist die Regel für die Differentiation impliziter Funktionen, die wir auf S. 122 allgemein bestätigt finden werden.

Bemerkungen: 1. Wir haben in diesem Paragraphen immer angenommen, daß die Funktionen, die wir betrachteten, alle differenzierbar waren. Unter dieser Voraussetzung haben wir also unsere Regel für die Differentiation eines Produktes $f(x)\varphi(x)$ abgeleitet. Wir haben angenommen, daß sowohl $f(x)$ wie $\varphi(x)$ differenzierbar seien. Hier wollen wir nun bemerken, daß ein Produkt unter Umständen auch einmal an einer Stelle differenzierbar sein kann, an der die Faktoren nicht differenzierbar sind. Ich will dafür kein zu triviales Beispiel geben, das sich schon darböte, wenn ich nur das Produkt $f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1$ betrachte, in dem $f(x)$ an einer Stelle nicht differenzierbar ist. Das Produkt 1 ist aber auch dort differenzierbar. Ich will ein etwas komplizierteres Beispiel nehmen. Schon auf S. 57 haben wir konstatiert, daß die Funktion $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ auch bei $x = 0$ stetig ist, wenn wir ihr dort den Wert Null beilegen, obschon dort $\sin \frac{1}{x}$ selbst nicht stetig ist, welchen Wert wir ihm auch dort beilegen, weil ja der $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nicht existiert. S. 64 sahen wir sogar, daß sie auch bei $x = 0$ differenzierbar ist, obwohl sich an dieser Stelle die Anwendung der Produktregel verbietet.

2. Wir wollen zum Schluß dieses Paragraphen noch zeigen, wie unsere Betrachtungen zum Beweis des binomischen Satzes verwandt werden können. Wir wollen $(a+x)^n$ nach Potenzen von x ordnen. Wir wissen von vornherein, daß ein Ausdruck von dieser Gestalt $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ mit konstanten Koeffizienten c_k herauskommen muß. Durch näheres Eingehen auf den Prozeß des Ausmultiplizierens ist es auch nicht schwer, diese Koeffizienten zu bestimmen. Wir wollen aber anders vorgehen. Wir wissen nämlich, daß die Gleichung

$$(a+x)^n - c_0 - c_1x - c_2x^2 - \dots - c_nx^n = 0$$

für alle x erfüllt ist. Es steht also links eine Funktion von x , die für alle x verschwindet. Also ist ihre Ableitung auch Null. Hiervon wollen wir Gebrauch machen. Wir finden also, daß für alle x auch die folgende Gleichung richtig ist:

$$n(a+x)^{n-1} - c_1 - 2c_2x - 3c_3x^2 - \dots - nc_nx^{n-1} = 0.$$

Aus dem angegebenen Grunde muß auch die Ableitung der jetzt links stehenden Funktion für alle x verschwinden. Das liefert uns:

$$n(n-1)(a+x)^{n-2} - 2c_2 - 6c_3x - 12c_4x^2 - \dots \\ - n(n-1)c_nx^{n-2} = 0.$$

Auch hier muß wieder die Ableitung der linken Seite verschwinden. So fortfahrend bekommen wir eine Reihe von Gleichungen, aus welchen wir, wie ich jetzt zeigen werde, die Koeffizienten bestimmen können. Tragen wir in der ersten Gleichung $x = 0$ ein, so finden wir $c_0 = a^n$. Tragen wir nun in die zweite Gleichung $x = 0$ ein, so finden wir $nc_0 = c_1$. Ebenso liefert die dritte Gleichung $c_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}$. Allgemein finden wir auf diesem Wege:

$$c_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} a^{n-k}.$$

Das sind bis auf die Faktoren a^{n-k} die sogenannten Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$. Das Schlußresultat

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}x^2 + \cdots + x^n$$

heißt der *binomische Satz*.

§ 3. Die Exponentialfunktion und der Logarithmus. Die Exponentialfunktion bezeichnen wir mit $y = a^x$. Dabei soll a immer eine positive Zahl sein. Was man unter a^x für ein rationales x versteht, sehen wir als bekannt an. Wir bemerken nur, daß z. B. $a^{\frac{1}{2}}$ an sich zwei Werte hat, einen positiven und einen negativen. Wir verwenden immer den positiven. Die hiermit für rationale x erklärte Funktion $y = a^x$ ist also stets positiv. Wenn $a > 1$, so nimmt sie mit wachsendem x stets zu. Wenn $a < 1$, so nimmt sie mit wachsendem x stets ab. Da beide Fälle durch einen Vorzeichenwechsel von x aufeinander zurückgeführt werden können, so wollen wir für die weitere Betrachtung $a > 1$ annehmen. Wir wollen zunächst ein paar Worte über die Erklärung der Exponentialfunktion für irrationales x sagen. Dazu will ich zunächst zeigen, daß $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$, wenn x durch rationale Werte

der Null zustrebt. Dazu genügt es wieder wegen der Monotonität von a^x anzunehmen, daß x die positiven oder negativen reziproken ganzen Zahlen durchläuft. Wir betrachten erst $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}$. Wir

wollen zeigen, daß von einem zu bestimmenden n an $\left| a^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \frac{1}{n}$

ist. Daß ein Grenzwert existiert, ist ohne weiteres klar. Denn $a^{\frac{1}{n}}$ nimmt mit wachsendem n stets ab und ist größer als 1. Nun suchen wir ein n , für das $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$, d. h. für das $a < (1 + \varepsilon)^n$. Nun ist aber $(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$.¹⁾ Bestimmen wir also n so, daß $a < 1 + n\varepsilon$, so ist erst recht $a < (1 + \varepsilon)^n$. So finden wir: Für

1) Man sieht dies sofort, wenn man auf $(1 + \varepsilon)^n$ den binomischen Satz anwendet.

$n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ ist stets $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Ähnlich ist der Fall negativer Exponenten zu behandeln. Für welche n wird $1 - a^{-\frac{1}{n}} < \varepsilon$? Das ist dann der Fall, wenn $a < \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^n = \left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^n$. Nun ist wieder:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^n > 1 + \frac{n\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

So finden wir: Es ist $\left|a^{-\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$, sobald $n > \frac{(a-1)(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Aus den beiden gefundenen Ungleichungen entnehmen wir $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$, wenn x rationale Werte durchläuft.

Nun betrachten wir allgemein den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x$, wobei wieder x durch rationale Werte sich x_0 nähern möge. x_0 kann dabei rational oder irrational sein. Daß der Grenzwert existiert, folgt wieder aus der Monotonität in Verbindung mit der Tatsache, daß alle verwendeten Werte der Exponentialfunktion kleiner sind als a^M , wo M irgendeine rationale Zahl größer als x_0 bedeutet. Daher ist $|a^{x_1} - a^{x_2}| = a^{x_1} |a^{x_2-x_1} - 1| < a^M |a^{x_2-x_1} - 1|$. Wie wir gerade vorhin gesehen haben, gibt es dann ein $\delta(\varepsilon)$, so daß für $|x_2 - x_1| < \delta(\varepsilon)$ dieser Ausdruck kleiner als ε wird. Daher existiert nach dem allgemeinen Konvergenzprinzip in seiner Anwendung auf Funktionen (s. S. 54) der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x$.

Wie man ohne weiteres sieht, stimmt er für rationales x_0 mit a^{x_0} überein. Für irrationales x_0 aber erklären wir a^{x_0} durch den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x$. Die so jetzt überall erklärte Exponentialfunktion ist ersichtlich eine monoton wachsende Funktion. Sie ist aber auch eine stetige Funktion. Dazu müssen wir nur erkennen, daß $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$,

wenn wir x nun durch beliebige Werte sich x_0 nähern lassen und nicht nur durch rationale, wie vorhin. Für rationale x -Werte wissen wir aber bereits, daß $|a^{x_0} - a^x| < \varepsilon$, sobald $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, d. h. wir können zu jedem ε ein solches $\delta(\varepsilon)$ bestimmen. Wegen der Monotonität gilt aber dann $|a^{x_0} - a^x| < \varepsilon$ nicht allein für die rationalen x -Werte, die der Ungleichung $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ genügen, sondern auch für die irrationalen. Also ist die Stetigkeit der Exponentialfunktion sichergestellt. Daß auch die gewöhnlichen Rechenregeln für die Exponentialfunktion allgemein gelten, folgt wieder aus der Gültigkeit für rationale x durch den Grenzübergang, der zur Definition der Funktion für beliebige x führte.

Die Umkehrfunktion der monotonen Funktion $y = a^x$ sei $x = \log_a y$ (siehe IV. § 4 S. 60 f.). Sie heißt Logarithmus zur Basis a . Sie ist eine für alle positiven y erklärte stetige Funktion.

Wir gehen nun zur Differentiation dieses Logarithmus über. Vorab müssen wir dazu noch den $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ untersuchen. Wir können uns dabei auf ganzzahlige x beschränken. Sei nämlich I. $x > 0$ und $n \leq x \leq n+1$, dann ist auch

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Denn es ist $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$, also $1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{n+1}$.

Dann wird $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

und $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Also wird tatsächlich $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Daraus folgt $\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Wenn also für ganzzahliges n der $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert, so ist für beliebiges x notwendig

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Sei II. $x < 0$. Ich schreibe $x = -y$. Dann habe ich den Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y}$ zu betrachten. Ich finde

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y-1}\right).$$

Existiert also der $\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$, so existiert natürlich auch der

$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1}$ und ist ihm gleich. Daher auch

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y. \end{aligned}$$

Also alles in allem können wir uns tatsächlich auf den Grenz-

wert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für ganze positive n beschränken. Nach dem binomischen Satz (S. 70) ist nun aber

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{1}\right). \end{aligned}$$

Mit wachsendem n nimmt dieser Ausdruck zu. Denn es kommen immer neue Glieder hinzu, und die in den vorhandenen Ausdrücken stehenden Klammern nähern sich wachsend der 1. Ferner sieht man, daß der Ausdruck immer größer ist als 2. Er ist weiter immer kleiner als

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n},$$

also kleiner als 3. Daher existiert der Grenzwert und ist gleich einer Zahl e , für die $2 < e < 3$. Die Berechnung dieser Zahl verschieben wir auf das Ende dieses Paragraphen. Vorab wollen wir nun den Logarithmus differenzieren. Sei also $y = \log_a x$. Dann wird

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Setzen wir nun $\frac{x}{\Delta x} = z$, so finden wir

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{z \rightarrow \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{x} \lim_{z \rightarrow \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z.$$

Da aber der Logarithmus eine stetige Funktion ist, so wird dies

$$= \frac{1}{x} \log_a \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z\right). \text{ Also haben wir } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Diese Formel wird besonders einfach, wenn wir die Zahl e selbst zur Basis des Logarithmensystems machen. Denn dann ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

Diese Logarithmen zur Basis e heißen *natürliche Logarithmen*. Wir bezeichnen sie kurz mit $y = \log x$; dann ist also $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Man kann leicht von den natürlichen Logarithmen zu irgendwelchen anderen übergehen. Denn es ist ja nach der Definition der Logarithmen

$$x = a^{\log_a x} = e^{\log_a \cdot \log_a x} = e^{\frac{\log x}{a}} = a^{\frac{\log_e \log x}{a}}$$

Daraus findet man

$$\log_a x = \log_a e \cdot \log_a x \quad \text{und} \quad \log_a x = \log_a a \cdot \log_a x.$$

Nun zur Differentiation der Exponentialfunktion selbst. Sie ist die Umkehrung des Logarithmus. Ihre Differentiation geschieht daher nach der Regel auf S. 167. Wir finden aus $v = e^x$, $\frac{dv}{dx} = e^x$.

Also $v = e^x$ liefert $\frac{dv}{dx} = e^x$. Die Funktion e^x reproduziert sich also beim Differenzieren.

Anwendungen: 1. Die Funktion $y = a^x$ gibt $y' = a^x \log a$. Denn es ist $a^x = e^{\log a \cdot x}$.

2. Bei beliebigem Exponenten n liefert die Potenz $u = x^n$ immer $u' = nx^{n-1}$. Denn es ist $x^n = e^{n \log x}$. Also

$$u' = e^{n \log x} \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n = nx^{n-1}.$$

Anhang: Berechnung der Zahl e .

Die Zahl e ist definiert durch den Grenzwert:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) \right)$$

Um diesen Grenzwert auszurechnen, zerlegen wir die Summe rechts in zwei Bestandteile, indem wir eine feste Zahl m von Gliedern abspalten. Die Zahl m wird also beim Grenzübergang festgehalten. Welchen Wert wir ihr zweckmäßig geben, werden wir gleich festsetzen. Wir haben so also $e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_m + \lim_{n \rightarrow \infty} r_m$. Hier ist

$$s_m = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n} \right)$$

und

$$r_m = \frac{1}{(m+1)!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{m}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right).$$

Für alle n ist nun $|r_m| < \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{m-1}}$.

Ich wähle nun

1. m so groß, daß $|r_m| < \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{\varepsilon}{3}$.

2. n so groß, daß von ihm an

a) $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!} = \sigma_m$ von

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n} \right)$$

um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ abweicht, und daß von diesem n an

b) e von $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ abweicht.

Dann ist also:

$$|e - \sigma_m| = \left| \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) + \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - s_m \right) + (s_m - \sigma_m) \right|.$$

Also ist $|e - \sigma_m| < \varepsilon$. Also $e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!} \right)$.

Oder $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

Den Wert dieser unendlichen Reihe haben wir schon auf S. 50 auf 4 Dezimalen genau berechnet. Eine etwas genauere Rechnung gibt $e = 2,7182818 \dots$

Diese Zahl e ist, wie wir noch anfügen wollen, *irrational*. Denn wäre $e = \frac{a}{b}$, wo a und b teilerfremde ganze Zahlen sind, so wäre

$$\frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{r}{n!}.$$

Hier wäre nach S. 50 sicher $0 < r < 2$. Daher ist

$$\frac{a}{b} (n-1)! - (n-1)! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) = \frac{r}{n}.$$

Wenn wir nun $(n-1) > b$ wählen, so ist b ein Teiler von $(n-1)!$. Daher ist dann die linke Seite eine ganze Zahl, während die rechte Seite sicher zwischen Null und Eins enthalten ist. Sie ist aber auch von Null verschieden, da ja r eine Summe von positiven Gliedern ist. Also kann die Annahme, daß e rational sei, nicht richtig sein. e ist irrational.

Anwendung: Logarithmisches Differenzieren: Oft ist es bequem, statt einer zu differenzierenden Funktion erst einmal ihren Logarithmus zu differenzieren. Es besteht nämlich ein einfacher Zusammenhang zwischen der Ableitung von $f(x)$ und der Ableitung von $\log f(x)$, nämlich dieser: Es ist $\frac{d \log y}{dx} = \frac{y'}{y}$, oder $y' = y \frac{d \log y}{dx}$. Dies Verfahren, die Ableitung einer Funktion $f(x)$ zu gewinnen, kann z. B. im folgenden Fall mit Erfolg Verwendung finden. Es soll $y = (f(x))^{\varphi(x)}$ differenziert werden. Diese Funktion entsteht dadurch, daß ich für die beiden Variablen u und v der Funktion u^v Funktionen von x eintrage. Wir haben so eine Funktion, die wir noch nicht allgemein differenzieren gelernt haben. Gleichwohl werden wir die auf S. 69 für solche Fälle bereits erwähnte Regel wieder bestätigt finden. Wir bilden $\log y = \varphi(x) \log f(x)$. Dann ist $\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \varphi(x) + \varphi'(x) \log f(x)$. Hieraus entnehmen wir

$$y' = (f(x))^{\varphi(x)} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \varphi(x) + \varphi'(x) \log f(x) \right).$$

VI. Einige geometrische Anwendungen.

§ 1. **Tangenten und Normalen.** Schon zu Beginn des vorigen Kapitels haben wir die geometrische Bedeutung der ersten Ableitung von $f(x)$ festgestellt. Sie ist der Richtungstangens der Kurventangente. Sei $x = a$, $y = b = f(a)$ ein Punkt der Kurve $y = f(x)$, so lautet die Gleichung der Tangente in diesem Punkt $y - b = f'(a)(x - a)$. Unter der Kurvennormalen versteht man die auf der Tangente senkrechte Gerade durch den Kurvenpunkt (a, b) . Ihre Gleichung wird daher $x - a = -f'(a)(y - b)$.

Wir wollen auch noch für andere Gleichungsformen einer Kurve die Tangentenrichtung bestimmen. Sei die Kurve durch eine implizite Gleichung gegeben und algebraisch. Sei etwa $\varphi(x, y) = 0$. Dann fanden wir oben im Kurvenpunkt a, b ($\varphi(a, b) = 0$) für y' den Ausdruck: $y' = -\frac{\varphi_x(a, b)}{\varphi_y(a, b)}$. Die Gleichung der Tangente wird also $\varphi_y(a, b)(y - b) + \varphi_x(a, b)(x - a) = 0$. Sei weiter die Kurve in Parameterdarstellung gegeben: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Sei t_0 der zu betrachtende Kurvenpunkt. Die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ gewinnt man so: Man denke daran, daß man die Gleichung der Kurve in der Form $y = f(x)$ dadurch gewinnen kann, daß man etwa $x = \varphi(t)$ nach t auflöst und die so gefundene Funktion $t = t(x)$ in $y = \psi(t)$ einträgt. So wird $y = \psi(t(x))$. Also findet man $\frac{dy}{dx} = \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$. Nun ist aber nach der Regel über das Differenzieren der inversen

Funktionen $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$. Also wird $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$. Die Gleichung der

Tangente im Punkte t_0 wird also $\varphi'(t_0)(y - b) = \psi'(t_0)(x - a)$.

Endlich sei die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten gegeben: Dann hat man $r = f(\varphi)$. Also findet man sofort eine Parameterdarstellung der Kurve, nämlich: $x = r \cos \varphi = f(\varphi) \cos \varphi$, $y = f(\varphi) \sin \varphi$. Daher wird der Richtungstangens der Kurventangente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\varphi) \sin \varphi + f(\varphi) \cos \varphi}{f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi}.$$

Auch den Winkel, den zwei Kurven in einem Schnittpunkt miteinander bilden, können wir mit unseren Hilfsmitteln bestimmen, sobald wir diesen Winkel definiert haben. Wir verstehen darunter den Winkel der Kurventangenten in diesem Punkt. Dabei sind die Kurventangenten ungerichtete Geraden, deren Richtungstangens eben durch den Wert der ersten Ableitung bestimmt ist. Bildet nun etwa die Tangente der Kurve \mathfrak{C} im Schnittpunkt den Winkel α mit der positiven x -Achse, die Tangente der Kurve \mathfrak{R} aber

den Winkel β mit der positiven x -Achse, dann nenne ich $\alpha - \beta$ den Winkel, den \mathfrak{C} mit \mathfrak{R} im Schnittpunkt bildet. Alle diese Winkel sind nur bis auf Vielfache von π bestimmt, denn in den Ableitungen steht uns nur ihr Tangens zur Verfügung.

Beispiele: 1. Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: Tangente im Punkte (x_1, y_1) : $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$.

2. Die Zykloide $x = r(\varphi - \sin \varphi)$, $y = r(1 - \cos \varphi)$: Tangente im Punkte φ_0 :

$$(y - r(1 - \cos \varphi_0)) \cdot (1 - \cos \varphi_0) = (x - r(\varphi_0 - \sin \varphi_0)) \sin \varphi_0.$$

§ 2. **Die Vorzeichen der Ableitungen.** Wenn in einem Kurvenpunkt x_0 die erste Ableitung $f'(x_0)$ wesentlich positiv ist, so bedeutet das, daß die Kurvenordinaten wachsen, wenn man vom Punkte mit der Abszisse x_0 zu Punkten mit größerer Abszisse übergeht, und daß die Kurvenordinaten kleiner werden, wenn man zu Punkten mit kleinerer Abszisse übergeht. Man kann den Sachverhalt kurz dadurch kennzeichnen, daß man sagt, die Kurve passiere steigend den betreffenden Punkt. Das negative Vorzeichen der ersten Ableitung bedeutet, daß die Kurve fallend den Punkt passiert. Da nämlich die erste Ableitung $f'(x_0)$ der Limes des Differenzenquotienten für verschwindendes h ist, so ist für hinreichend kleine h der Differenzenquotient positiv, wenn die erste Ableitung positiv ist. Sei nun also etwa für $|h| < \delta$ immer $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

> 0 . Dann bedeutet dies bei positivem h , daß immer $f(x_0 + h) > f(x_0)$, und es bedeutet bei negativem h , daß immer $f(x_0 + h) < f(x_0)$ ist. Also gehören zu größeren Abszissen auch größere Ordinaten in der Umgebung $|x - x_0| < \delta$ der Abszisse x_0 . Ähnlich erkennt man den angegebenen Sachverhalt bei negativer erster Ableitung.

Wenn in einem Kurvenpunkt die erste Ableitung verschwindet, d. h. wenn dort die Tangente horizontal (parallel zur x -Achse) verläuft, dann folgt daraus allein nichts darüber, ob die Kurve fallend oder steigend den Punkt passiert oder ob sie dort vom Fallen zum Steigen übergeht. Das legen schon die folgenden Figuren 20a, b, c klar, die einige Möglichkeiten veranschaulichen.

Man vergleiche auch die Kurve $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$, die bei $x = 0$ eine verschwindende Ableitung hat. Eines aber können wir diesen Figuren sofort entnehmen, daß nämlich *immer dann, wenn die Kurve ein Maximum oder ein Minimum passiert*, wie in Fig. 20a und 20b, *die erste Ableitung verschwinden muß*. Wir müssen indessen dies Ergebnis noch etwas genauer aussprechen. Ein (relatives) Maximum ist daran zu erkennen, daß die *hinreichend nahe* rechts und links davon gelegenen Kurvenpunkte eine kleinere Or-

dinate haben als der Punkt selbst. Wenn also $(x_0, f(x_0))$ der Punkt von $y = f(x)$ ist, dann hat die Kurve da ein *Maximum*, wenn es eine positive Zahl ε gibt, so daß $f(x) < f(x_0)$, immer dann, wenn

$$|x - x_0| < \varepsilon.$$

Wenn aber dann immer $f(x) > f(x_0)$ ist, so hat die Kurve dort ein *Minimum*.

Setzen wir nun überdies voraus,

daß die Funktion an der betreffenden Stelle differenzierbar ist, so muß die erste Ableitung daselbst verschwinden.

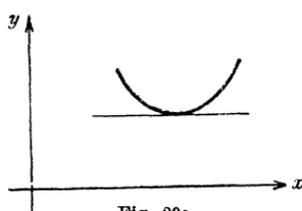


Fig. 20a.

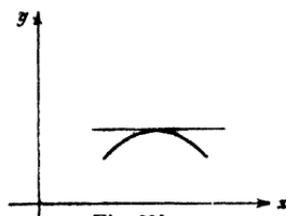


Fig. 20b.

Bemerkung: Auch die in Fig. 5, S. 10 dargestellte Funktion hat in ihrem höchsten Punkt ein Maximum, und doch verschwindet dort die erste Ableitung nicht, aus dem einfachen Grunde, weil die Funktion dort gar nicht differenzierbar ist.

Für Maximum und Minimum haben wir so nur ein gemeinsames Kennzeichen, das dazu noch trügerisch ist, denn die Fig. 20 c zeigt uns, daß trotz verschwindender Ableitung weder Maximum noch Minimum vorzuliegen braucht, daß auch dann noch die Kurve z. B. wachsend

den betreffenden Punkt passieren kann. Um zu erkennen, welcher Fall eintritt, muß man den Verlauf der ersten Ableitung selbst als Funktion von x näher untersuchen. Die erste Ableitung möge, wie wir voraussetzen wollen, selbst eine differenzierbare Funktion sein. Ihre erste Ableitung heißt zweite Ableitung von $f(x)$ und

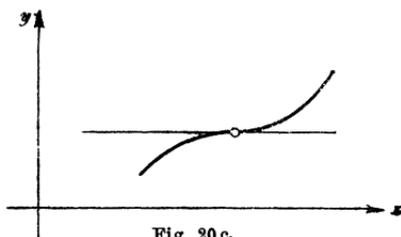


Fig. 20c.

wird als solche mit $f''(x)$ bezeichnet oder auch mit $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Analog wird die dritte Ableitung von $f(x)$ als erste Ableitung der zweiten definiert und so bezeichnet: $\frac{d^3 f}{dx^3} = f'''(x)$. Das Vorzeichen der zweiten

Ableitung gibt nun an, ob beim Passieren des betreffenden Punktes die Tangentenrichtung steiler oder flacher wird. Wenn nämlich $f''(x_0) > 0$ ist, so wird beim Passieren des Punktes die Tangentenrichtung steiler, ist aber $f''(x_0) < 0$, so wird sie flacher. Vorbehaltlich einer späteren genaueren Durchführung (S. 84) wollen wir hier noch nachstehende Folgerungen aus dieser Feststellung ziehen. Geometrisch entspricht dem Steilerwerden der Tangentenrichtung eine nach oben, d. h. gegen die positive Richtung der y -Achse, offen gekrümmte Kurve. Man nennt sie *konkav*. Der Leser wird dies leicht aus der Fig. 21 entnehmen. Wird aber die Tangentenrichtung flacher, so ist die Kurve *konvex* nach oben, sieht also so aus

wie Fig. 22. Aus diesen Bemerkungen ersieht der Leser nun jetzt schon ein zwischen Maximum und Minimum entscheidendes Kennzeichen. Ist die erste Ableitung in einem Kurvenpunkt Null, so liegt ein Maximum vor, wenn die zweite Ableitung negativ ist:

$f''(x_0) < 0$,
wenn aber
die zweite
Ableitung
positiv ist:
 $f''(x_0) > 0$,
so liegt ein
Minimum

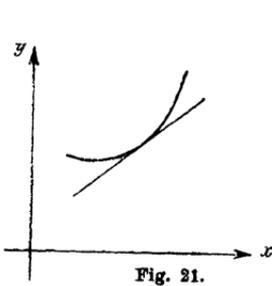


Fig. 21.

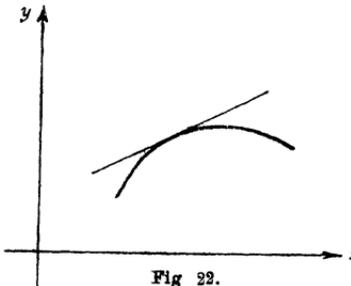


Fig. 22.

vor. Wenn aber die zweite Ableitung verschwindet, so wird im allgemeinen weder Maximum noch Minimum vorliegen, wir haben es mit einem Wendepunkt zu tun (Fig. 20 c, S. 79). Die Kurve wechselt da also die Art der Krümmung. Sie geht von Konvexität zu Konkavität

über. So ist es auch in dem Wendepunkte mit nicht horizontaler Tangente Fig. 23.

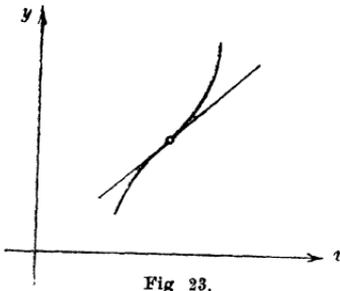


Fig. 23.

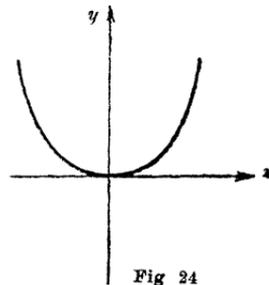


Fig. 24

Indessen ist durch diese Bemerkungen das letzte Wort noch nicht gesprochen.

Denn wie man aus $y = x^4$ ersieht, ist eine verschwindende zweite Ableitung unter Umständen ganz gut mit dem Auftreten von Maximum oder Minimum verträglich. Fig. 24 veranschaulicht die Kurve $y = x^4$ bei $x = 0$, wo $y' = 0$ und $y'' = 0$. Wir werden später sehen, daß in solchen Fällen die Vorzeichen der höheren Ableitungen den Ausschlag geben.

§ 3. Einiges über Kurvendiskussion. Man wird oft vor die Aufgabe gestellt, den Verlauf einer Kurve in groben Zügen anzugeben. Man will also eine ungefähre Vorstellung über den Verlauf der Kurve haben, ohne daß zunächst eine allzu genaue Kenntnis der einzelnen Kurvenpunkte nötig ist. Zur Lösung derartiger Aufgaben gibt die Betrachtung der Ableitungen ein gutes Mittel an die Hand. Wir wollen das in ein paar Beispielen etwas näher ausführen. Sei zunächst der Verlauf von $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ festzustellen. Daß die Kurve bei $x = 1, 2, 3$ die x -Achse passiert, sieht man sofort. Die erste Ableitung wird $y' = (x - 1)(x - 2) + (x - 1)(x - 3) + (x - 2)(x - 3)$ Die zweite ist $y'' = 2(x - 1$

$+x - 2 + x - 3) = 6(x - 2)$. Daraus ersieht man, daß links von $x = 2$ die Kurve konvex, rechts von $x = 2$ dagegen konkav ist. Bei $x = 2$ also liegt ein Wendepunkt. Wenn man weiter beachtet, daß die Kurvenordinaten bei jeder endlichen Abszisse endlich sind, so erkennt man schon, daß die Kurve nur so verlaufen kann, wie in der Fig. 25 gezeichnet ist.

Das nächste Beispiel sei

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Hier wird $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Man

erkennt ohne weiteres, daß für $x^2 > 1$ immer $y' < 0$, und daß für $x^2 < 1$ immer $y' > 0$. Also links von $x = -1$ und rechts von $x = +1$ fällt die Kurve. Zwischen $x = -1$ und $x = +1$ steigt sie an. Daher liegt bei $x = -1$ ein Minimum, bei $x = +1$ ein Maximum. Ferner ist für $x < 0$ auch $y < 0$ und für $x > 0$ auch $y > 0$. Endlich ist

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

Daher muß die Kurve so aussehen: (Fig. 26). (Daß sie durch den Koordinatenanfang geht, sieht man ja sofort.)

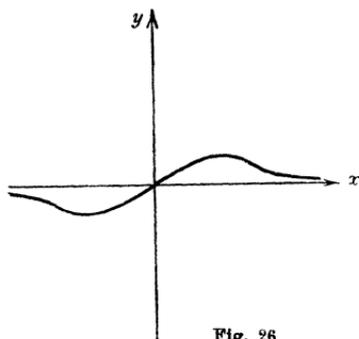


Fig. 26

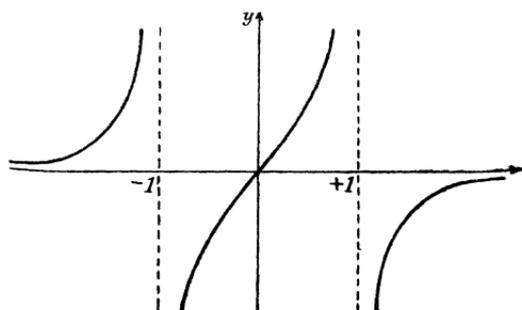


Fig. 27.

Das letzte Beispiel sei: $y = \frac{x}{1-x^2}$. Hier ist: $y' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$. Für $x \rightarrow \mp 1$ strebt $y \rightarrow \infty$. An allen anderen Stellen ist y endlich. Ferner ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$. Man sieht, daß $y > 0$ für $x < -1$ und für $0 < x < 1$ und daß $y < 0$ für $x > 1$ und für $-1 < x < 0$. Ferner steigt die Kurve immer an. Also muß sie so aussehen, wie Fig. 27 zeigt.

VII. Die Taylorsche Formel.

§ 1. **Der Satz von Rolle.** In einem Intervall $a \leq x \leq b$ sei die Funktion $f(x)$ stetig und differenzierbar. Diese im abgeschlossenen Intervall stetige Funktion besitzt im Intervall Maxima und Minima, wofern sie nicht überall denselben konstanten Wert hat (S. 59). Diese Maxima und Minima können am Intervallanfang oder Intervallende liegen oder im Innern des Intervalles. Wir haben schon auf S. 78 gesehen, daß in den im Innern des Intervalles gelegenen Maxima und Minima die erste Ableitung $f'(x)$ verschwinden muß. (Im Anfang oder Ende des Intervalles läßt sich das nicht behaupten, da ja am Anfang die Funktion z. B. nur größer ist als in Punkten rechts davon.) Wenn nun die Funktion an Anfang und Ende des Intervalles verschwindet, so sind wir sicher, daß die vielleicht vorhandenen Maxima oder Minima im Innern des Intervalles liegen. Auf alle Fälle gibt es dann also im Innern des Intervalles Stellen, wo die erste Ableitung verschwindet. So erhalten wir den *Satz von Rolle*: Sei $f(x)$ für $a \leq x \leq b$ stetig und differenzierbar, und sei $f(a) = f(b) = 0$. Dann gibt es im Innern des Intervalles mindestens eine Stelle ξ für die $f'(\xi) = 0$ ist. Wir können den Satz auch so aussprechen: Zwischen zwei Nullstellen von $f(x)$ liegt mindestens eine von $f'(x)$.

§ 2. **Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.** Eine der wichtigsten Folgerungen aus dem Satz von Rolle ist der sogenannte *Mittelwertsatz*. Er lautet:

Wenn die Funktion $f(x)$ für $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ stetig und differenzierbar ist, so gibt es im Intervall mindestens eine Stelle $x = x_0 + \vartheta h$ ($0 < \vartheta < 1$), für die: $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \vartheta h)$.

Sein geometrischer Sinn ist dieser: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \vartheta h)$

bedeutet, daß es im Intervall eine Stelle $x_0 + \vartheta h$ gibt, für welche die Kurventangente der die Punkte $x_0, f(x_0)$ und $x_0 + h, f(x_0 + h)$ verbindenden Sehne parallel ist. In dieser Form ist der Satz geometrisch einleuchtend. Aber das enthebt uns nicht der Pflicht, seine Gültigkeit für die Begriffe, durch welche wir die anschaulichen Vorstellungen ersetzt haben, zu beweisen. Wir können ihn aus dem Satz von Rolle sofort gewinnen, sowie wir von der vorgelegten Kurve die Ordinaten der Sehne abziehen, und so zu einer Kurve übergehen, deren Ordinaten die Abweichung unserer Kurve von ihrer Sehne angeben. Wir betrachten also die Hilfsfunktion

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} (x - x_0).$$

Hier ist nun aber $\varphi(x_0) = \varphi(x_0 + h) = 0$. Also gibt es nach Rolle

eine Stelle $x_0 + \vartheta h$ ($0 < \vartheta < 1$) zwischen x_0 und $x_0 + h$, wo $\varphi'(x_0 + \vartheta h) = 0$ ist. Nun aber ist

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Also wird

$$0 = \varphi'(x_0 + \vartheta h) = f'(x_0 + \vartheta h) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Daraus entnimmt man den Mittelwertsatz. Dieser Satz ist von großer Wichtigkeit. Er bietet ein Mittel, um den Unterschied zweier Kurvenordinaten zu beurteilen. Er gibt also ein Mittel an, um festzustellen, mit welcher Genauigkeit man in einem Intervall eine Kurve durch eine einzige Ordinate ersetzen kann, d. h. durch eine Gerade, die im Abstand einer Ordinate parallel zur x -Achse verläuft. Auf den ersten Blick scheint diese Aufgabe durch die Formel des Mittelwertsatzes nur sehr unvollkommen gelöst. Denn sie drückt ja die Differenz $f(x_0 + h) - f(x_0)$ durch den Wert der ersten Ableitung an einer Stelle aus, deren Existenz wir zwar nachgewiesen haben, deren genaue Lage wir aber darum doch nicht kennen. Demgegenüber muß man aber bedenken, daß die Frage, die wir uns vorgelegt haben, nur von der Beurteilung der Genauigkeit eines *Näherungswertes* handelt. Dazu brauchen wir aber den numerischen Wert des Fehlers gar nicht exakt zu kennen, denn dann brauchen wir keine Näherungen mehr. Dazu genügt es, zu wissen, daß der Fehler höchstens so und so groß sein kann. Da sagt aber z. B. unsere Formel, daß der Fehler höchstens das h -fache vom Maximum der ersten Ableitung im Intervall $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ sein kann. Von der Größe dieses Maximums kann man sich aber im allgemeinen leicht eine Vorstellung verschaffen. Ein Beispiel mag das noch etwas klarer machen. Die erste Ableitung von $\sqrt{1+x}$ ist $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Man erkennt, daß hier $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ für $|x| < \frac{1}{100}$ kleiner ist als $\frac{10}{\sqrt{99}} < 1,006$. . dem Betrag nach. Mit welcher Genauigkeit kann ich nun im Intervall $\frac{99}{100} < 1+x < \frac{101}{100}$ die Funktion $\sqrt{1+x}$ durch 1 annähern? Sei $1+h$ eine Stelle aus diesem Intervall, dann ist $\sqrt{1+h} - 1 = h \frac{1}{2\sqrt{1+\vartheta h}}$. Hier ist nun $\frac{1}{\sqrt{1+\vartheta h}} < 1,006$ und $|h| < \frac{1}{100}$. Also ist der Fehler der Näherung höchstens 0,00503. Ebenso findet man für $|h| < \frac{1}{10}$ einen Maximalfehler von 0,053.

§ 3. **Einige Anwendungen des Mittelwertsatzes.** 1. Wenn in einem Intervall $a \leq x \leq b$ überall $f(x)$ stetig und differenzier-

bar ist, und wenn überall im Intervall $f'(x) = 0$, so ist $f(x)$ eine Konstante. Wenn nämlich $a + h$ irgendeine Stelle des Intervalles ist, so ist nach dem Mittelwertsatz $f(a + h) - f(a) = hf'(a + \vartheta h)$. Da aber die erste Ableitung überall verschwindet, so ist für alle h $f(a + h) = f(a)$.

2. Erneut (S. 78), aber weniger allgemein ergibt sich, daß positives Vorzeichen der ersten Ableitung ein Steigen der Funktion nach sich zieht: Denn sei in einem die Stelle x_0 umgebenden Intervall durchweg die erste Ableitung positiv. Weil für jede Stelle dieses Intervalles $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \vartheta h)$ ist, so ist für positives h immer $f(x_0 + h) > f(x_0)$ und für negatives h immer $f(x_0 + h) < f(x_0)$.

Bemerkung: Hier müssen wir ein ganzes Intervall haben, in dem die erste Ableitung positiv ist. Auf S. 78 mußten wir nur wissen, daß an der Stelle x_0 selbst die erste Ableitung positiv ist. Das ist nicht ganz soviel. Wenn wir aber außerdem noch wissen, daß die erste Ableitung dort stetig ist, so haben wir damit sofort ein solches Intervall. Aber es kann natürlich auch ein solches Intervall geben, ohne daß die erste Ableitung stetig ist.

3. Falls $f(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ ist in einem Intervall um x_0 , so hat $f(x_0 + h)$ das gleiche Vorzeichen wie h . Denn es ist ja jetzt $f(x_0 + h) = hf'(x_0 + \vartheta h)$.

4. Wir wollen analytisch untersuchen, ob eine Kurve in der Nähe des Berührungspunktes oberhalb oder unterhalb ihrer Tangente verläuft. Dazu müssen wir die Differenz $f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)$ untersuchen.¹⁾ Um das bequem machen zu können, stellen wir folgende Überlegung an. Es mögen x_0 und $x_0 + k$ zwei feste Stellen bezeichnen. Dagegen soll $x_0 + k$ zwischen x_0 und $x_0 + h$ variabel sein (also k zwischen 0 und h). Jedenfalls ist nun, wenn wir die Existenz der zweiten Ableitung voraussetzen, für ein passendes ξ und ϑ : $f'(x_0 + \xi) - f'(x_0) - \xi f''(x_0 + \vartheta \xi) = 0$. Daher ist für positive h, ξ, k

$$f'(x_0 + \xi) - f'(x_0) - \xi \text{Max. } f''(x_0 + k) < 0$$

und

$$f'(x_0 + \xi) - f'(x_0) - \xi \text{Min. } f''(x_0 + k) > 0 \text{ für } 0 \leq \xi \leq h.$$

Diese Ausdrücke sind nun aber die Ableitungen nach ξ von

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) - \xi f'(x_0) - \frac{\xi^2}{2} \text{Max. } f''(x_0 + k)$$

und von

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) - \xi f'(x_0) - \frac{\xi^2}{2} \text{Min. } f''(x_0 + k)$$

1) Vgl. auch die Bemerkung auf S. 79.

Beide Ausdrücke verschwinden für $\xi = 0$. Also können wir hier das unter Nr. 3 Gesagte anwenden. Wir finden für positives ξ

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) - \xi f'(x_0) - \frac{\xi^2}{2} \text{Max. } f''(x_0 + k) < 0$$

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) - \xi f'(x_0) - \frac{\xi^2}{2} \text{Min. } f''(x_0 + k) > 0;$$

für negatives ξ haben wir immer die entgegengesetzten Vorzeichen. Daraus schließen wir, daß auch der Ausdruck $f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)$ einem Werte zwischen $\frac{h^2}{2} \text{Max. } f''(x_0 + k)$ und $\frac{h^2}{2} \text{Min. } f''(x_0 + k)$ gleich sein muß. Da aber die stetige zweite Ableitung alle Werte zwischen ihrem Maximum und Minimum im Intervall annimmt, so gibt es mindestens eine Stelle im Intervall, an der

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0) = \frac{h^2}{2} f''(x_0 + \vartheta h).$$

So haben wir die Abschätzung unserer Differenz gefunden. Um nur ein paar Anwendungen herauszugreifen, so sei die zweite Ableitung im Intervall $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ positiv. Das hat zur Folge, daß dort die Kurve oberhalb ihrer Tangente verläuft. Sie ist also nach oben konkav (Fig. 21, S. 80). Wenn insbesondere die Tangente horizontal ist, so liegt in diesem Fall ein Minimum vor. Ebenso erkennt man, daß bei negativer zweiter Ableitung die Kurve unter ihrer Tangente verläuft, also konvex ist. Bei horizontaler Tangente liegt jetzt wieder ein Maximum vor. Man erkennt auch, daß man wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitung nur das Vorzeichen in dem betreffenden Punkt selbst zu kennen braucht, um daraus einen Schluß auf das Vorzeichen in einem ganzen Intervall um den Punkt ziehen zu können.

Beispiel: Wir wollen wieder das auf S. 83 behandelte Beispiel vornehmen, damit uns recht deutlich zu Bewußtsein kommt, daß die Tangente die Kurve besser approximiert als die Horizontale. Es war $y = \sqrt{1+x}$, $y' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, und es ist $y'' = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}$.

Für $|x| < \frac{1}{100}$ ist nun aber

$$\left| x^2 \frac{y''}{2} \right| < \frac{1}{8} \left(\frac{10}{\sqrt{99}} \right)^3 \frac{1}{10^4} < 0,00002$$

und für $|x| < \frac{1}{10}$ ist

$$\left| x^2 \frac{y''}{2} \right| < \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{10}{9}} \right)^3 \cdot \frac{1}{10^2} < 0,002.$$

Also wird die Funktion $\sqrt{1+x}$ durch $1 + \frac{1}{2}x$ approximiert, und zwar bis auf einen Maximalfehler von $\frac{2}{10^5}$ im Intervall $-\frac{1}{10^2} \leq x \leq \frac{1}{10^2}$ und bis auf einen Maximalfehler von $\frac{2}{10^3}$ im Intervall $-\frac{1}{10} \leq x \leq \frac{1}{10}$.

Den Prozeß, der uns zur Approximierung der Kurve durch ihre Tangente führte, können wir fortsetzen. Wenn wir annehmen, daß sich $f''(x)$ nur langsam ändert, so wird es nahe liegen, die genaue Korrektur $\frac{h^2}{2} f''(x_0 + \vartheta h)$ durch $\frac{h^2}{2} f''(x_0)$ zu ersetzen, um so eine noch bessere Approximation als durch die Tangente zu erzielen. Wir haben also dann die Differenz

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0) - \frac{h^2}{2} f''(x_0)$$

zu untersuchen. Geometrisch bedeutet dies, daß wir die Kurve statt durch ihre Tangente durch eine Parabel mit senkrechter Achse approximieren, die in $x = x_0$, $y = f(x_0)$ die Kurve berührt. Denn die allgemeine Gleichung einer Parabel mit senkrechter Achse lautet $y = a_0 + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2$. Soll sie aber die Kurve in zweiter Ordnung berühren, d. h. in derselben Richtung den Punkt passieren wie die Kurve selbst, und dort noch die zweite Ableitung $f''(x_0)$ mit ihr gemeinsam haben, so ist

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

oder
$$y = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2$$

ihre Gleichung. Die Neuanwendung unseres Verfahrens zur Untersuchung der Differenz würde ergeben

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0 + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1).$$

So können wir beliebig fortfahren und die Kurve in der Umgebung eines Punktes durch „Parabeln“ von immer höherem Grade approximieren, deren Gleichungen in immer mehr Ableitungen mit den Ableitungen der zu approximierenden Kurve übereinstimmen. Wenn die Funktion

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

möglichst viele Ableitungen bei $x = x_0$ mit $f(x)$ gemeinsam haben soll, so muß sie notwendig von der Form

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

sein. Denn man kann sie nach Potenzen von $x - x_0$ entwickeln. Trägt man nämlich $x = x_0 + (x - x_0)$ ein und ordnet dann nach Potenzen von $x - x_0$, so wird

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n.$$

Die Werte der Ableitungen bei $x = x_0$ werden $c_0, c_1, 2c_2, \dots, n!c_n$. Wenn sie mit den Ableitungen von $f(x)$ übereinstimmen sollen, so findet man

$$c_0 = f(x_0), c_1 = f'(x_0) \dots c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Es stimmen also n Ableitungen überein. Mehr können im allgemeinen nicht gemeinsam sein, da die folgenden Ableitungen der ganzen rationalen Funktion verschwinden. Unsere nächste Aufgabe ist es nun, zu beurteilen, mit welcher Genauigkeit durch den angegebenen Ausdruck die Funktion $f(x)$ approximiert wird. Wir überlassen es dem Leser, den in diesem Paragraphen angedeuteten Weg bis zu diesem Ziel zu verfolgen. Wir wollen im nächsten Paragraphen einen etwas anderen Gedankengang verfolgen, der uns etwas mehr liefert, als wir so gewinnen könnten.

§ 4. **Beweis der Taylorschen Formel.** Um unsere Differenz zu untersuchen, machen wir den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) \\ &+ \dots + \frac{h^{n-1} f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + h^n \cdot Q. \end{aligned}$$

Für Q wollen wir also einen handlichen Ausdruck gewinnen. Dieser Ansatz rechtfertigt sich durch die Erfahrungen, die wir in speziellen Fällen gemacht haben. Zur folgenden Untersuchung wollen wir annehmen, daß in einem Intervall $a \leq x \leq b$, dem die Stelle x_0 angehört, $f(x)$ samt allen seinen Ableitungen bis zur n^{ten} einschließlich endliche eindeutige Funktionen seien. Die Stetigkeit der Funktion samt den $n - 1$ ersten Ableitungen folgt hieraus nach S. 64 von selbst. Nun setze ich $X = x_0 + h$ und betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} F(x) &= f(X) - f(x) - f'(x)(X - x) \\ &- \dots - f^{(n-1)}(x) \frac{(X - x)^{n-1}}{(n-1)!} - Q(X - x)^n. \end{aligned}$$

Dabei ist die Zahl Q immer noch durch die Gleichung zu Beginn des Paragraphen erklärt. Es ist also

$$\begin{aligned} 0 &= f(X) - f(x_0) - f'(x_0)(X - x_0) \\ &- \dots - f^{(n-1)}(x_0) \frac{(X - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} - Q(X - x_0)^n. \end{aligned}$$

Nun bilde ich $F'(x)$. Ich finde

$$F'(x) = Qp(X-x)^{p-1} - f^{(n)}(x) \frac{(X-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Nun ist aber $F'(x_0) = F'(X) = 0$. Also muß $F'(x)$ nach dem Rolleschen Satz an einer Stelle ξ zwischen x_0 und $X = x_0 + h$ verschwinden. Das liefert mir

$$0 = F'(\xi) = Qp(X-\xi)^{p-1} - f^{(n)}(\xi) \frac{(X-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Daraus entnehme ich, wenn ich wieder $X = x_0 + h$ und $\xi = x_0 + \vartheta h$ setze,

$$Q = \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) (1 - \vartheta)^{n-p} \cdot h^{n-p}}{(n-1)! p}.$$

Setze ich also $r_n = Qh^p$, so finde ich

$$r_n = \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) (1 - \vartheta)^{n-p} h^n}{(n-1)! p}.$$

Bisher haben wir über die Zahl p keine besondere Annahme gemacht. Wir wollen nun zwei Fälle besonders betrachten, nämlich $p = 1$ und $p = n$. Für das Restglied r_n der *Taylorschen Formel* haben wir dann zwei Ausdrucksformen gefunden, nämlich

1. $r_n = \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta_1 h)}{(n-1)!} (1 - \vartheta_1)^{n-1} h^n$ *Cauchys Form des Restgliedes.*
2. $r_n = \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta_2 h)}{n!} h^n$ *Lagranges Form des Restgliedes.*

Man kann die Taylorsche Formel noch in zwei anderen oft benutzten Formen aussprechen, nämlich einmal so, wenn ich $x = x_0 + h$ setze:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x - x_0)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta_1(x - x_0))(1 - \vartheta_1)^{n-1} \\ \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta_2(x - x_0)) \end{array} \right.$$

oder, wenn ich insbesondere $x_0 = 0$ nehme und x statt h schreibe, auch so:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\vartheta_1 x) (1 - \vartheta_1)^{n-1} \\ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\vartheta_2 x) \end{array} \right.$$

Für diese letztere Formel hat man ganz unnötigerweise noch einen besonderen Namen eingeführt. Sie heißt die *Mac Laurinsche Formel*. Das wichtigste an diesen Formeln sind die Restglieder. Denn sie lassen erst ein Urteil darüber zu, ob die ersten Terme rechts wirklich eine Approximation der Funktion liefern und mit welcher Genauigkeit man sie zur Darstellung der Funktion verwenden kann. Diese Formeln erlauben nun auch für Funktionen wie e^x , $\sin x$ usw., für die bisher eigentliche analytische Ausdrücke nicht vorlagen, solche anzugeben. So gewinnen wir die Mittel, diese Funktionen für gegebene Werte von x wirklich zu berechnen. Das soll in einigen der nächsten Paragraphen weiter verfolgt werden.

§ 5. **Maxima und Minima.** Wir sind nun in der Lage, die Frage nach den Maxima und den Minima der Funktionen abschließend zu behandeln. An verschiedenen Stellen sind uns diese Extreme schon begegnet. Zuerst wohl auf S. 59, wo wir allgemein erkannten, daß eine jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion in diesem Intervall einen größten und einen kleinsten Wert besitzt. Diese Extreme werden wir zweckmäßig als *absolute Extreme* bezeichnen, da es unter *allen* Werten des endlichen Intervalles die größten bzw. kleinsten sind. Eine Erweiterung der Definition des Maximums und des Minimums nahmen wir dann auf S. 78 vor. Wir führten da die *relativen Extreme* ein. Wir nannten einen Punkt ein relatives Maximum einer Kurve, wenn alle Kurvenpunkte, deren Abszissen einem passend gewählten, nicht zu großen Intervall um die Abszisse dieses Punktes angehören, kleinere Ordinaten besitzen. Der Punkt ist also der höchste aus seiner Umgebung. Es braucht nicht der allerhöchste im ganzen Intervall zu sein. Hier haben wir nun namentlich die im Innern des Intervalles gelegenen Extreme betrachtet. Wir können sie mit ihrer beiderseitigen Nachbarschaft vergleichen, während dies am Intervallanfang z. B. nicht möglich ist, weil uns da nur zur Rechten Kurvenpunkte zur Verfügung stehen. Sei nun bei $x = x_0$ ($a < x_0 < b$) ein solches relatives Extrem im Intervallinnern gegeben, so wollen wir annehmen, daß alle Ableitungen von $f(x)$, von welchen weiterhin die Rede sein wird, in dem Intervall $a < x < b$ stetig sind. Dann lehrt uns die Formel $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \vartheta h)$, daß $f'(x_0)$ weder positiv noch negativ sein kann, denn sonst wäre wegen der Stetigkeit auch für genügend kleines h : $f'(x_0 + \vartheta h) > 0$ bzw. < 0 . Dann würde aber bei Vorzeichenänderung von h die Differenz ihr Vorzeichen ändern. Soll dies also nicht der Fall sein, so muß $f'(x_0) = 0$ sein. Nun haben wir für die Differenz

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^2}{2} f''(x_0 + \vartheta h).$$

Man erkennt, daß diese Differenz für $f''(x_0) > 0$ in einem gewissen Intervall immer positiv ist, daß also ein Minimum vor-

liegt. Ebenso schließt man aus $f''(x_0) < 0$ auf ein Maximum. Wenn aber $f''(x_0) = 0$, so versagt dieser Schluß. Dann betrachten wir die Differenz

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0) - \frac{h^2}{2} f''(x_0),$$

die aber wegen $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ mit $f(x_0 + h) - f(x_0)$ zusammenfällt. Ihr Wert ist $\frac{h^3}{3} f'''(x_0 + \vartheta h)$. Wegen des Vorkommens der ungeraden Potenz h^3 , die bei Vorzeichenwechsel von h ihr Vorzeichen wechselt, schließt man wie bei der ersten Ableitung, daß im Falle eines Extremes notwendig jetzt auch $f'''(x_0) = 0$ sein muß. Unsere Differenz wird daher jetzt durch $\frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_0 + \vartheta h)$ dargestellt. Für $f^{(4)}(x_0) < 0$ liegt dann wieder ein Maximum vor, für $f^{(4)}(x_0) > 0$ ein Minimum. Wenn aber auch $f^{(4)}(x_0) = 0$, so muß man wie angegeben weiter schließen. So findet man das folgende Resultat: Wenn bei der Abszisse x_0 die Funktion $f(x)$ ein Extrem besitzen soll, so muß notwendig $f'(x_0) = 0$ sein. Ob dann ein Extrem vorliegt oder nicht, entscheiden die höheren Ableitungen. Es kann nämlich nur dann ein Extrem vorliegen, wenn die erste bei x_0 nicht verschwindende Ableitung von *gerader* Ordnung ist. Ist diese dann positiv, so liegt ein Minimum vor. Ist sie aber negativ, so liegt ein Maximum vor. Falls indessen die erste nicht verschwindende höhere Ableitung von *ungerader* Ordnung ist, so liegt weder ein Maximum noch ein Minimum vor, sondern ein Wendepunkt. Er ist dadurch charakterisiert, daß die Kurve in ihm ihre Tangente durchsetzt. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß es nichtverschwindende höhere Ableitungen gibt. Andernfalls *versagt* unsere Betrachtung. Ein Beispiel dieser Art werden wir im zweiten Band kennen lernen.

Analoge Kriterien gelten für die Konkavität und die Konvexität in einem beliebigen Kurvenpunkt. Man hat nur in dem Beweis den Teil, der vom Verschwinden der ersten Ableitung handelt, wegzulassen. Im Wortlaut des obigen Resultates hat man dann überall statt Maximum konvex und statt Minimum konkav zu lesen.

§ 6. Die Taylorsche Reihe. Wir wollen nun in Beispielen die Frage behandeln, inwieweit man eine vorgelegte Funktion durch eine Taylorsche Formel von genügender Gliederzahl mit jeder gewünschten Genauigkeit darstellen kann. Das Kriterium dafür besteht darin, daß das Restglied der Formel, das ja die Güte der erreichten Approximation bestimmt, für unendlich wachsende Gliederzahl der Formel gegen Null konvergiert. Durch diesen Grenzübergang erhalten wir dann eine konvergente unendliche Reihe, die die Funktion darstellt. Da sie nach Potenzen von x oder von $(x - x_0)$ fortschreitet, ist die so erhaltene *Taylorsche Reihe eine*

Potenzreihe. Wir wollen das damit umschriebene Programm nun in einigen Beispielen durchführen.

Wir beginnen mit der Exponentialfunktion e^x . Da alle ihre Ableitungen wieder e^x sind, so finden wir unter Benutzung der Lagrangeschen Form des Restgliedes:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Wir halten nun x fest und bestimmen zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen, zwischen welchen $|x|$ liegt. Sei also $m < |x| \leq m+1$. Dann ist jedenfalls $e^{\vartheta x} < e^{m+1}$. Ferner ist für $n > m$

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{x}{m+1} \cdot \frac{x}{m+2} \cdots \frac{x}{n}.$$

Setzen wir $M = \frac{(m+1)^m}{m!} e^{m+1}$, und beachten, daß alle $\frac{|x|}{m+h}$ kleiner sind als 1, so finden wir, daß der Rest r_n der Ungleichung $r_n < \frac{|x| M}{n}$ genügt. Daher ist $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Für alle x gilt also diese

Reihendarstellung von e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Einen besonderen Fall ($x = 1$) haben wir schon auf S. 49 rechnerisch verfolgt. Wir finden aus dem Restglied $r_{10} < \frac{1}{10^6}$ in Übereinstimmung mit unseren damaligen Überlegungen.

Wir gehen zu den trigonometrischen Funktionen über. Sei: $f(x) = \sin x$. Man findet:

$$\begin{aligned} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \vartheta x. \end{aligned}$$

Ebenso findet man:

$$\begin{aligned} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \\ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cos \vartheta x. \end{aligned}$$

Genau wie bei der Exponentialfunktion findet man, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

Also gelten für $\sin x$ und $\cos x$ diese unendlichen Reihen:

$$\begin{aligned} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots \end{aligned}$$

Wir wollen hiermit etwa $\sin 1^\circ$ ausrechnen. Da wir in den Formeln Bogenmaß verwenden, so haben wir

$$x = \frac{\pi}{180} = 0,017453 \dots$$

einzutragen. Wir finden weiter

$$\frac{x^2}{2!} = 0,000152 \dots$$

$$\frac{x^3}{3!} = 0,000000 \dots$$

$$\text{Daraus folgt} \quad \sin \frac{\pi}{180} = 0,01745 \dots - \frac{x^3}{3!} \cos \vartheta x$$

$$\text{und} \quad \cos \frac{\pi}{180} = 0,99984 \dots + \frac{x^4}{4!} \cos \vartheta x.$$

In beiden Fällen beträgt also der Fehler weniger als eine Einheit der fünften Dezimale.

Wir behandeln noch den *Logarithmus*. Eine direkte Anwendung der Formeln auf $\log x$ führt nicht zum Ziel, da bei $x = 0$ der Logarithmus nicht differenzierbar ist. Wir wollen daher die Funktion $\log(1+x)$ zugrunde legen und auf sie die Maclaurinsche Formel anwenden. Wir finden zunächst für *positives* x bei Verwendung der Lagrangeschen Form des Restgliedes:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \frac{1}{(1+\vartheta x)^n}.$$

Auf alle Fälle ist $0 < \frac{1}{(1+\vartheta x)^n} < 1$. Also ist dieser Rest kleiner als $\frac{x^n}{n}$. Dieser Ausdruck strebt sicher gegen Null, wenn $x \leq 1$.

Für $0 \leq x \leq 1$ stellt also die Taylorsche Reihe den $\log(1+x)$ dar. Wie steht es aber bei $x > 1$? Man kann dem Ausdruck für r_n nicht unmittelbar ansehen, daß er dann nicht mehr dem Grenzwert Null zustrebt. Um uns nicht in eine längere Erörterung einzulassen, wollen wir einfacher feststellen, daß für $x > 1$ die Reihe überhaupt nicht konvergiert, daß sie also auch nicht den Logarithmus darstellen kann. Wir betrachten den Quotienten zweier aufeinanderfolgenden Glieder. Er ist bis aufs Vorzeichen $x \frac{n}{n+1}$. Sein Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ ist x , also in unserem Fall größer als 1. Von einem gewissen Gliede an wachsen also die absoluten Beträge der Reihenglieder. Ihr Grenzwert kann daher nicht Null sein, er wächst, wie man nebenbei erkennt, sogar über alle Grenzen. Wir haben so nebenbei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = \infty$ für $x > 1$. Wir gehen zu

negativem x über. Hier verwenden wir die Cauchysche Form des Restgliedes. Wir finden:

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} \cdots - \frac{x^{n-1}}{n-1} - x^n \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{(1-\vartheta x)^n}.$$

Der Rest ist dem Betrag nach sicher kleiner als $x^n \frac{1}{1-x}$, wenn $x < 1$ (nicht gleich 1). Sein Grenzwert ist also Null. Hier stellt die Reihe also die Funktion dar. Für $x = 1$ finden wir die harmonische Reihe, die also nicht konvergiert. Und für $x > 1$ haben wir auch keine Konvergenz. Somit haben wir das Schlußresultat:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots$$

gilt für $-1 < x \leq +1$, d. h. so lange, als die Reihe überhaupt konvergiert.

Bemerkung: Die oben gefundenen Reihen für e^x , $\cos x$, $\sin x$ deuten auf einen tieferen Zusammenhang zwischen diesen drei Funktionen hin. Wir wollen ihn dem Leser nicht vorenthalten, wiewohl wir ihn hier nicht begründen können. Er offenbart sich, wenn wir imaginäre Werte von x zulassen. Bezeichnen wir also $\sqrt{-1}$ mit i , so finden wir ganz formal:

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} \cdots$$

Wir haben so ohne Beweis $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Sie ist für manche Rechnungen ein bequemes Hilfsmittel. Wenn wir z. B. $\cos ny$ durch $\cos y$ und $\sin y$ ausdrücken sollen, so können wir uns dazu der folgenden Methode bedienen: Es ist

$$e^{iny} = \cos ny + i \sin ny \quad \text{und} \quad e^{-iny} = (\cos y + i \sin y)^n.$$

Nach dem binomischen Lehrsatz finden wir so z. B. für $n = 4$:

$$\begin{aligned} \cos 4y + i \sin 4y &= \cos^4 y + 4i \cos^3 y \sin y - 6 \cos^2 y \sin^2 y \\ &\quad - 4i \cos y \sin^3 y + \sin^4 y \end{aligned}$$

$$\text{und daraus} \quad \cos 4y = \cos^4 y - 6 \cos^2 y \sin^2 y + \sin^4 y$$

$$\text{und} \quad \sin 4y = 4 \cos^3 y \sin y - 4 \cos y \sin^3 y,$$

Formeln, die man auch (allerdings weniger bequem) durch Rechnen bloß im Reellen in bekannter Weise ableiten kann. Man kann sie übrigens auch in mehr geometrischer Weise ohne Verwendung der Exponentialfunktion verifizieren. Aus $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ und $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ folgt noch:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{und} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Anhang: Über hyperbolische Funktionen. Vielfach verwendet man mit Nutzen die Funktionen

$$\operatorname{Cos} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \operatorname{Sin} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Man liest auch hier Cosinus und Sinus und nennt die Funktionen hyperbolischer Cosinus und Sinus. Dementsprechend bezeichnet man sie auch mit $\operatorname{cosh} y$ und $\operatorname{sinh} y$. Die Benennungen Cosinus und Sinus erinnern an den engen Zusammenhang der Funktionen mit den trigonometrischen Funktionen. Man hat ja

$$\cos iy = \operatorname{Cos} y \quad \text{und} \quad \sin iy = i \operatorname{Sin} y.$$

Die Zusätze hyperbolisch deuten darauf hin, daß diese Funktionen für die Parameterdarstellung der Hyperbel eine ähnliche Bedeutung haben, wie die trigonometrischen beim Kreis. Man findet nämlich $\operatorname{Cos}^2 y - \operatorname{Sin}^2 y = 1$ ¹⁾ entweder aus $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, oder aus den Darstellungen beider Funktionen durch die Exponentialfunktion, was vorzuziehen ist, wenn jemand dem Imaginären nicht trauen sollte. Wir haben ja auch die Verwendung des Imaginären nicht ordentlich begründet. Immerhin kann man es verwenden, um auch aus den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen die für die hyperbolischen zu gewinnen. Man kann sie ja dann leicht mit Hilfe der Exponentialfunktion verifizieren. So findet man:

$$\operatorname{Cos}(y+z) = \operatorname{Cos} y \operatorname{Cos} z + \operatorname{Sin} y \cdot \operatorname{Sin} z.$$

$$\operatorname{Sin}(y+z) = \operatorname{Sin} y \operatorname{Cos} z + \operatorname{Cos} y \cdot \operatorname{Sin} z.$$

Aus den Definitionsgleichungen findet man leicht:

$$\frac{d \operatorname{Cos} y}{dy} = -\operatorname{Sin} y, \quad \frac{d \operatorname{Sin} y}{dy} = \operatorname{Cos} y$$

Setzt man noch $\operatorname{Tg} y = \frac{\operatorname{Sin} y}{\operatorname{Cos} y}$, $\operatorname{Ctg} y = \frac{\operatorname{Cos} y}{\operatorname{Sin} y}$,

so hat man $\frac{d \operatorname{Tg} y}{dy} = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 y}$, $\frac{d \operatorname{Ctg} y}{dy} = -\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 y}$

Die Gleichungen $x = \operatorname{Cos} y$ und $x = \operatorname{Sin} y$

kann man leicht nach y auflösen und so die Umkehrfunktionen bestimmen. Man nennt diese *Area-Cosinus* und *Area-Sinus*²⁾ und schreibt:

$$y = \operatorname{ArCos} x \quad \text{und} \quad x = \operatorname{ArSin} y.$$

1) Setzt man $\xi = \operatorname{Cos} y$, $\eta = \operatorname{Sin} y$, so hat man eine Parameterdarstellung der Hyperbel $\xi^2 - \eta^2 = 1$. Die geometrische Bedeutung des Parameters können wir erst in der Integralrechnung besprechen.

2) *Area* = Fläche. Der Grund der Benennung wird erst in der Integralrechnung deutlich.

Man findet für diese Funktionen die Darstellungen:

$$\text{ArCos } x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\text{ArSin } x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Ferner findet man: $\text{ArTg } x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x},$

$$\text{ArCtg } x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}.$$

Wendet man die Regel über die Differentiation der Umkehrfunktion an, so findet man:

$$\frac{d \text{ArCos } x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \frac{d \text{ArSin } x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$\frac{d \text{ArTg } x}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad \frac{d \text{ArCtg } x}{dx} = \frac{1}{1 - x^2} \text{.)}$$

Aus der Maclaurinschen Reihe für e^x entnimmt man leicht:

$$\text{Cos } y = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots$$

$$\text{Sin } y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots$$

§ 7. Die Berechnung der Logarithmentafeln. Die wirkliche Berechnung der Logarithmen geschieht nicht unmittelbar durch die vorhin gewonnenen Formeln. Man würde eine sehr große Zahl von Reihengliedern brauchen, um halbwegs gute Werte zu erhalten. Der Herleitung besserer Formeln wenden wir uns jetzt zu.

Wenn wir die für $\log(1+x)$ und $\log(1-x)$ gefundenen Reihen voneinander subtrahieren, so erhalten wir eine Reihe für $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Diese sieht so aus:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) \\ &\quad + x^{2n+1} \left(\frac{\vartheta_1}{2n+1} + \frac{\vartheta_2}{1-x} \right). \end{aligned}$$

Wir wollen sie verwenden, um z. B. $\log 2$ zu berechnen. Damit $\frac{1+x}{1-x} = 2$ wird, müssen wir $x = \frac{1}{3}$ eintragen. Dann wird also der Rest der Formel kleiner als $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{3}{2}\right)$. Also schon für $n = 7$ wird der Rest kleiner als $\frac{2}{10^7}$. Rechnet man die 7 Reihenglieder auf 7 Dezimalstellen genau aus, so findet man für ihre

1) Man beachte, daß $\text{ArTg } x$ nur für $|x| < 1$, $\text{ArCtg } x$ nur für $|x| > 1$ reell ist

Summe 0,6931467. So erkennt man, daß man durch diese 7 Reihenglieder $\log 2 = 0,69314 \dots$ auf 5 Dezimalen genau hat. Hätte man die gleiche Genauigkeit mit der Reihe von $\log(1+x)$ erreichen wollen, so hätte man gefunden: $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$. Wir hätten also hier mindestens 10^6 Glieder nötig gehabt, um der gleichen Genauigkeit gewiß zu sein. Wollte man unsere Reihe verwenden, um $\log 3$ mit derselben Genauigkeit auszurechnen, so müßten wir $x = \frac{1}{2}$ eintragen. Jetzt hätten wir aber schon mindestens 11 Reihenglieder nötig. Man sieht, daß jetzt die Sache ungünstiger ist. Sie wird das um so mehr, je größer die Zahl wird, deren Logarithmus wir ausrechnen wollen. Denn um so größer wird auch das x , das wir in unserer Reihe eintragen müssen. Darum empfiehlt sich jetzt schon für $\log 3$ ein anderer Weg. Es bietet sich nämlich ein bequemer Weg dar, um aus $\log a$ den $\log(a+1)$, also den Logarithmus der folgenden ganzen Zahl auszurechnen. Es ist nämlich

$$\log(a+1) = \log(a) + \log\left(1 + \frac{1}{a}\right) = \log a + \log \frac{1 + \frac{1}{2a+1}}{1 - \frac{1}{2a+1}}$$

Um also $\log 3$ zu berechnen, müssen wir nur weiter $\log \frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}$

haben. Das gewinnen wir, indem wir in der Formel zu Beginn des Paragraphen $x = \frac{1}{5}$ eintragen. Je größer nun die Zahl a wird, d. h. je weiter wir die Logarithmen schon haben, um so günstiger stellt sich die Sache.¹⁾ Je weiter wir kommen, um so weniger Reihenglieder reichen aus. Neben den hier besprochenen Rechen-vorteilen kann man sich bei weiterer Vertiefung in die Sache noch manchen anderen verschaffen. Wir wollen das aber nicht weiter verfolgen. Lieber wollen wir noch ein Wort sagen über die Interpolation in 5-stelligen Tafeln. Man findet darin noch mit *P.P.* bezeichnete Hilfstafeln, die der Interpolation nach Proportionalteilen dienen. Die Frage, die wir zu beantworten haben, ist diese: Inwieweit verträgt es sich mit der gewünschten Genauigkeit von fünf Dezimalen, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen die Änderung des Logarithmus der Änderung des Numerus proportional anzunehmen? Wir setzen also angenähert:

$$\log(a+\alpha) \sim \log a + \alpha [\log(a+1) - \log a] = \log a + \alpha \log\left(1 + \frac{1}{a}\right),$$

während in Wirklichkeit $\log(a+\alpha) = \log a + \log\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)$ ist.

1) Auf die beim Fortschreiten fortgesetzte Addition der Fehler der Einzelberechnungen ist dabei keine Rücksicht genommen.

Nun ist aber 1. $\alpha \log \left(1 + \frac{1}{a}\right)$ um weniger als $\frac{\alpha}{2a^2}$ von $\frac{\alpha}{a}$ verschieden¹⁾ und 2. ist aus demselben Grund $\log \left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)$ von $\frac{\alpha}{a}$ um weniger als $\frac{\alpha^2}{2a^2}$ verschieden. Der Gesamtfehler beträgt also höchstens $\frac{1}{a^2}$, ist also von $a = 1000$ an durchaus mit der gewünschten Genauigkeit verträglich; denn dann wird er kleiner als $\frac{1}{10^6}$. Durch den Umstand, daß wir nicht zwischen den genauen Werten der Logarithmen, sondern zwischen Näherungswerten derselben interpolieren, kommt natürlich keine neue Ungenauigkeit herein. Eine noch bessere Fehlerabschätzung als die eben gegebene werden wir in § 9 kennen lernen, wo wir die Interpolation etwas eingehender studieren werden. Für die Briggischen Logarithmen, die ja in den Tafeln stehen, stellt sich die Sache noch günstiger. Denn nach S. 74 erhält man die Briggischen Logarithmen, indem man die natürlichen mit $\frac{1}{\log 10}$, das ist also mit einer Zahl kleiner als $\frac{1}{2}$, multipliziert. Dabei multiplizieren sich also auch die Fehler mit dieser Zahl. Jetzt also beträgt der Fehler höchstens $\frac{1}{2 \cdot 10^6}$.

§ 8. **Der binomische Satz.** Auf S. 70 haben wir den binomischen Satz für ganze positive Exponenten abgeleitet. Jetzt wollen wir sein Analogon für gebrochene und für negative Exponenten entwickeln. Da immer $(a + b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, so dürfen wir uns dabei auf den Fall $(1 + x)^n$ beschränken. Wir nehmen 1. x und n positiv an. Die Taylorsche Formel mit Lagrangeschem Restglied liefert uns:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{k-1} x^{k-1} + \binom{n}{k} x^k (1 + \vartheta x)^{n-k}.$$

Hier haben wir zur Abkürzung gesetzt: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$.

Von einem gewissen Glied an wird nun aber sicher der Stellenzeiger k größer als die feste Zahl n . Daher wird von da an jedenfalls $0 < (1 + \vartheta x)^{n-k} < 1$. Es bleibt so noch der Grenzwert von $\binom{n}{k} x^k$ zu untersuchen. Wir schreiben:

$$\left| \binom{n}{k} x^k \right| = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-[n]+1}{[n]} \cdot \frac{n-[n]}{[n]+1} \dots \left| \frac{n-k+1}{k} \right| x^k$$

1) Siehe die alternierende Reihe für $\log \left(1 + \frac{1}{a}\right)$ und die S. 39 und 40 besprochene Abschätzung des Restes solcher Reihen.

Dabei ist mit $[n]$ die größte ganze Zahl unter n bezeichnet. Setze ich die feste Zahl $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-[n]+1}{[n]} = N$, so ist offenbar $\left| \binom{n}{k} x^k \right| < N \cdot x^k$, wird also mit wachsendem k beliebig klein, falls $x < 1$ ist. Für $x < 1$ gilt also jedenfalls die binomische Reihe

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \cdots$$

Ähnlich wie bei $\log(1+x)$ sieht man, daß für $x > 1$ die binomische Reihe divergiert, weil der Grenzwert des Quotienten zweier aufeinanderfolgenden Glieder x ist, also größer als 1. Für den Fall $x = 1$ selbst ist eine eingehendere Untersuchung nötig. Sie ergibt Konvergenz und zeigt, daß

$$2^n = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots$$

Die Abschätzung des Restgliedes haben wir hier nur für große Gliederzahlen durchgeführt, nämlich für Gliederzahlen, die den Exponenten n übertreffen. Wir fanden für alle x unter eins bei genügend großer Gliederzahl Kleinheit des Restes. Aber auch wenige Glieder der binomischen Reihe geben bei genügend kleinem x brauchbare Annäherungen. Denn wenn $k \leq n$ ist, so sind die endlich vielen $\binom{n}{k}$ alle unter einer festen Grenze gelegen. Ebenso liegt $(1+\vartheta x)^{n-k}$ unter 2^n . Wegen des Faktors x^k sieht man also dann, daß der Rest bei genügend kleinem x recht klein wird. Ein Beispiel hierzu begegnete uns schon auf S. 85, wo wir die Approximation von $\sqrt{1+x}$ durch $1 + \frac{1}{2}x$ näher betrachteten.

Wir betrachten 2. den Fall: x positiv und n negativ. Wir finden eine ganz gleich aussehende Reihe. Während aber vorhin unser Beweis wesentlich darauf beruhte, daß alle Binomialkoeffizienten beschränkt waren (sie sind ja alle dem Betrag nach kleiner als N), trifft dies hier nicht zu. Denn setzen wir $n = -m$, so wird

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \cdot \frac{m(m+1) \cdots (m+k-1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

Da dies z. B. für $m = 2$ zu $(-1)^k(k+1)$ wird, so sind also hier die Binomialkoeffizienten nicht beschränkt. (Es ist ja nach S. 48 $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots$). Trotzdem wird auch hier wieder $\lim_{k \rightarrow \infty} \binom{n}{k} x^k = 0$, falls $x < 1$. Um das einzusehen, brauchen wir uns nur von der Konvergenz der binomischen Reihe zu über-

zeugen. Daraus ergibt sich ja dann, daß der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \binom{n}{k} x^k$ ihrer Glieder verschwinden muß. Wir finden:

$$\left| \frac{\binom{n}{k+1} x^{k+1}}{\binom{n}{k} x^k} \right| = \left| \frac{n-k}{k+1} \right| x.$$

Der Grenzwert ist aber x , also kleiner als 1. Da außerdem auch $(1 + \vartheta x)^{n-k} < 1$ ist, so stellt also wieder die binomische Reihe die Funktion dar, wenn $x < 1$. Endlich bleibt noch *der Fall* $x < 0$. Wir fassen uns hier etwas kürzer. Wir setzen $x = -y$. Dann ergibt die Anwendung des Cauchyschen Restgliedes:

$$(1-y)^n = 1 - ny + \binom{n}{2} y^2 - \binom{n}{3} y^3 \dots + (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} y^{k-1} \\ + (-1)^k \binom{n-1}{k-1} y^{k-1} \cdot ny (1 - \vartheta y)^{n-1} \cdot \left(\frac{1 - \vartheta y}{1 - \vartheta y} \right)^{k-1}.$$

Hier ist nun aber $0 < \vartheta y < \vartheta$ und daher $0 < 1 - \vartheta < 1 - \vartheta y$. Bezeichnet also ϑ_1 eine weitere Größe zwischen Null und Eins, so wird dieser Rest:

$$(-1)^k \binom{n-1}{k-1} y^{k-1} \cdot ny \cdot (1 - \vartheta y)^{n-1} \cdot \vartheta_1.$$

Aus den vorhin angestellten Betrachtungen ergibt sich schon, daß sein Grenzwert für unendlich wachsendes k Null ist. Also haben wir nun das Schlußresultat: *Für beliebiges n und alle $-1 < x < +1$ gilt die Reihe:*

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \dots$$

§ 9. **Über die Interpolation und ihren Zusammenhang mit der Taylorschen Formel.** Einen Spezialfall der Frage der Interpolation haben wir schon auf S. 96 behandelt, wo wir zwischen zwei Logarithmen nach Proportionalteilen interpolierten. Da haben wir die Logarithmuskurve durch eine gerade Linie approximiert, die in zwei Punkten mit ihr übereinstimmte. Von der Approximation der Kurven durch gewisse berührende Parabeln beliebigen Grades war gelegentlich der Taylorschen Formel die Rede. Allgemein handelt es sich bei der Frage der Interpolation durch ganze rationale Funktionen n^{ten} Grades darum, die Funktion $f(x)$ durch eine solche ganze rationale Funktion $P(x)$ vom n^{ten} Grad zu approximieren, deren Kurvenbild durch $n + 1$ Punkte der Kurve hindurchgeht oder, anders ausgedrückt, die für $n + 1$ Werte der unabhängigen Variablen x die gleichen Funktionswerte wie $y = f(x)$ besitzt. Durch die Angabe der Werte, die eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades an $n + 1$ verschiedenen Stellen annehmen soll, ist diese Funktion völlig bestimmt. Denn die Differenz zweier

derartiger Funktionen ist eine ganze rationale Funktion von höchstens n^{ten} Grad, die an $n + 1$ verschiedenen Stellen verschwindet. Eine solche Funktion ist aber nach einem Ergebnis auf S. 8 für alle x -Werte Null. Es ist leicht zu verifizieren, daß die ganze rationale Funktion n^{ten} Grades, die an den $n + 1$ Stellen x_0, x_1, \dots, x_n die Werte $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ annimmt, durch den folgenden Ausdruck geliefert wird (*Newtons Interpolationsformel*):

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}(f(x_1)-f(x_0)) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}(f(x_2)-s_2(x_2)) \\ + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}(f(x_n)-s_n(x_n)).$$

Dabei ist allgemein mit $s_k(x)$ die Summe der k ersten Glieder dieser Formel bezeichnet.

Man kann den Ausdruck dieser ganzen rationalen Funktion noch auf eine etwas andere Gestalt bringen, die viel verwendet wird. Wir setzen dazu $\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$. Man erkennt nun sofort, daß wegen $\varphi(x_k) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\varphi(x)'}{x-x_k} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_k)}{x-x_k} = \varphi'(x_k).$$

Dies folgt sofort aus der Definition des Differentialquotienten von $\varphi(x)$. Dies vorausgeschickt, erkennt man, daß die Funktion

$$P(x) = \frac{f(x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_0)} + \frac{f(x_1)}{x-x_1} \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} + \dots + \frac{f(x_n)}{x-x_n} \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_n)}$$

ganz und rational vom n^{ten} Grade ist und alle gewünschten Eigenschaften besitzt. Man nennt das die *Lagrangesche Interpolationsformel*. Sie ist natürlich nur eine identische Umformung der Newtonschen.

Wir wenden uns nun zu der Frage, wie man die Güte der durch einen solchen Ausdruck erreichbaren Approximation beurteilen kann. Dazu müssen wir den Unterschied zwischen $f(x)$ und unserem Polynom $P(x)$ auf eine handlichere Form bringen. Das kann ähnlich wie bei der Taylorsche Formel, vielleicht sogar noch einfacher, geschehen. Wir machen den Ansatz

$$f(x) = P(x) + \nu(x) \cdot \varphi(x).$$

In $F(z) = f(z) - P(z) - \nu(x)\varphi(z)$ haben wir alsdann bei festem x eine Funktion von z vor uns, die an $n + 2$ verschiedenen Stellen verschwindet, nämlich einmal für $z = x_0, x_1, \dots, x_n$ und dann für $z = x$. Nun stützen wir uns auf eine Verallgemeinerung des Rolleschen Satzes. Dort lag zwischen zwei Nullstellen von $f(x)$ mindestens eine von $f'(x)$. Wenn wir aber nun drei Nullstellen von $f(x)$ zur Verfügung haben, so schließen wir, daß in jedem der zwei davon gebildeten Intervalle eine von $f'(x)$ liegt, und

zwischen diesen beiden so erhaltenen Nullstellen von $f'(x)$ liegt dann wieder eine von $f''(x)$. So weiterschließend erkennt man, daß, wenn $f(x)$ $n + 2$ verschiedene Nullstellen besitzt, zwischen der kleinsten und größten derselben mindestens eine von $f^{(n+1)}(x)$ liegt. Das wenden wir hier auf die Funktion $F(z)$ an. Sie hat $n + 2$ verschiedene Nullstellen. Also gibt es dazwischen ein ξ , so daß

$$F^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - \nu(x)(n+1)!$$

Daraus entnimmt man $\nu(x)$. Also bekommen wir das Resultat:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \varphi(x).$$

Wenn wir dabei namentlich x , wie es im Sinne der Interpolation liegt, auf das Intervall x_0 bis x_n beschränken ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$), so ist ξ eine Stelle aus diesem Intervall. Wir wollen uns aber für später merken, daß die Formel auch gilt, wenn wir x irgendwie außerhalb nehmen, wenn nur in dem ganzen Intervall, auf das sich x_0, x_1, \dots, x_n, x dann verteilen, die erforderlichen Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt sind.

Als Anwendung wollen wir, wie schon auf S. 97 angekündigt, nochmals den Fehler beim Interpolieren nach Proportionalteilen in Logarithmentafeln vornehmen. Da wir dort geradlinig interpolieren zwischen $x = a$ und $x = a + 1$, so haben wir folgende Formel:

$$\log x = \log a + (x-a)(\log(a+1) - \log a) - (x-a)(x-a-1) \frac{1}{2!} \frac{1}{\xi^2}.$$

Der Fehler wird also für $a \geq 10^3$ kleiner als $\frac{1}{2} \frac{1}{10^6}$. Bei Briggschen Logarithmen wird der Fehler nach der Bemerkung auf S. 97 sogar höchstens die Hälfte von diesem. Das Interpolieren ist also durchaus mit der Genauigkeit der Tafel verträglich von $a = 10^3$ an.

Nun wollen wir zeigen, daß die Taylorsche Formel ein Grenzfall dieser Interpolationsformel ist. Wir wollen, um das einzusehen, die $n + 1$ Stellen x_0, x_1, \dots, x_n alle in eine, in x_0 , zusammenschieben lassen. Ich behaupte, daß dann als Grenzfall die Taylorsche Formel herauskommt. Man darf das angekündigte Ergebnis von vornherein erwarten, wenn man nur daran denkt, wie durch den Grenzübergang aus der Sehne die Tangente, also aus der Interpolationsformel ersten Grades, die mit der Funktion in zwei Stellen übereinstimmt, die Taylorsche Formel wird, die mit der Funktion gewissermaßen in zwei zusammenfallenden Punkten übereinstimmt. So werden wir allgemein sehen, daß wir das Polynom der Taylorschen Formel als eine Funktion ansehen können, die $y = f(x)$ in $n + 1$ *zusammenfallenden Punkten* schneidet. Das ist dann also der geometrische Sinn der Übereinstimmung der Ab-

leitungen bis zur n^{ten} einschließlich bei beiden Funktionen. Man spricht dann auch von einem $n + 1$ -punktigen Schnitt oder einer Berührung n^{ter} Ordnung. Nun zum Beweis. Ich untersuche zunächst, was beim Grenzübergang aus dem Interpolationspolynom $P(x)$ wird. Dazu wollen wir den Grenzübergang so ausführen, daß wir erst x_1 nach x_0 rücken lassen. Wenn das geschehen ist, soll x_2 nachrücken, dann x_3 usw., bis alle nach x_0 gerückt sind. Dann wird gerade die Taylorsche Formel (ohne Restglied natürlich) vor uns stehen. Lassen wir x_1 nach x_0 rücken, so wird zunächst

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \left(f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

Aus $s_2(x)$ wird also $\sigma_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$. Das dritte Glied unserer Funktion ist also jetzt:

$$(x - x_0)^3 \frac{f(x_2) - f(x_0) - (x_2 - x_0) f'(x_0)}{(x_2 - x_0)^2} = \frac{(x - x_0)^3}{2} f''(x_0 + \vartheta(x_2 - x_0)).$$

Lasse ich nun hier x_2 und x_0 zusammenrücken, so wird dies zu $\frac{(x - x_0)^3}{2} f''(x_0)$. Daher ist jetzt das vierte Glied der Formel:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^3 \frac{f(x_3) - f(x_0) - (x_3 - x_0) f'(x_0) - \frac{(x_3 - x_0)^2}{2} f''(x_0)}{(x_3 - x_0)^3} \\ = \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0 + \vartheta(x_3 - x_0)). \end{aligned}$$

Lasse ich wieder x_3 nach x_0 rücken, so finde ich dafür $\frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0)$.

So weiterfahrend bekomme ich tatsächlich zum Schluß das Polynom der Taylorsche Formel heraus. Nun zum Restglied. Die zweite Formel auf S. 101 lehrt, daß für ein festes außerhalb des Intervalls $x_0 < x_1 \dots x_n$ gelegenes x stets $\frac{f(x) - P(x)}{\varphi(x)} (n + 1)!$ zwischen Maximum und Minimum liegt, dessen $f^{(n+1)}(\xi)$ fähig ist, wenn man ξ in einem alle Stellen x_0, x_1, \dots, x_n und x enthaltenden Intervall variieren läßt. Daher liegt der Ausdruck auch dann noch zwischen diesen Schranken, wenn man in $P(x)$ und $\varphi(x)$ alle Stellen x_0 bis x_n nach x_0 rücken läßt. Daraus folgt also, daß es auch für das Polynom $T(x)$ der Taylorsche Formel ein ξ aus dem Intervall $x_0 < \xi < x$ gibt, für das $\frac{f(x) - T(x)}{(x - x_0)^n} (n + 1)! = f^{(n+1)}(\xi)$ ist. Das ist aber gerade die Taylorsche Formel mit Restglied.

VIII. Unbestimmte Formen.

§ 1. $\frac{0}{0}$. Wir verwenden in diesem Kapitel die Taylorsche Formel zur Berechnung gewisser Grenzwerte. Wir beginnen mit den Grenzwerten gewisser Quotienten, die man nicht dadurch bestimmen kann, daß man in Zähler und in Nenner für sich zur Grenze übergeht. Das wird dann nicht möglich sein (nach den Ergebnissen auf S. 20), wenn dabei Zähler und Nenner zugleich entweder beide verschwinden oder beide unendlich werden. In verständlicher Abkürzung pflegt man da von den unbestimmten Ausdrücken $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ zu reden. Daß indessen gleichwohl ein derartiger Ausdruck einen ganz bestimmten Grenzwert besitzen kann, lehren schon die einfachsten Beispiele, z. B. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$. Jedermann wird da ganz von selbst, ehe er zur Grenze übergeht, erst Zähler und Nenner von dem gemeinsamen in der Grenze verschwindenden Faktor $x - a$ befreien und dann den Grenzübergang mit Leichtigkeit ausführen können. Diese gemeinsamen verschwindenden Faktoren von Zähler und Nenner drängen sich nicht immer so unmittelbar auf, wie in diesem Beispiel. Indessen gibt die Taylorsche Formel ein Mittel an die Hand, sie aufzufinden, wenn sie sich dem unmittelbaren Augenschein entziehen.

Wir wollen also nun den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{0}$ betrachten und dabei annehmen, daß x_0 eine endliche Stelle ist, und daß in einer gewissen einseitigen oder beiderseitigen Umgebung von x_0 die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ samt allen ihren weiter zu verwendenden Ableitungen stetig und außer bei x_0 von Null verschieden¹⁾ sind. Bei $x = x_0$ möge überdies $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ sein. Dann kann man unter zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{(x - x_0)f'(x_0 + \vartheta_1(x - x_0))}{(x - x_0)\varphi'(x_0 + \vartheta_2(x - x_0))}$$

schreiben. Wenn nun $f'(x_0)$ und $\varphi'(x_0)$ nicht beide verschwinden, so ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Ableitungen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0 + \vartheta_1(x - x_0))}{\varphi'(x_0 + \vartheta_2(x - x_0))} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

(Dabei setzen wir gegebenenfalls $\frac{f'(x_0)}{0} = \infty$.)

1) Diese Annahme läßt sich, wie dem aufmerksamen Leser nicht entgehen wird, durch eine andere etwas weniger besagende ersetzen. Indessen wollen wir der Kürze halber an der gemachten Annahme festhalten.

Wenn aber beide ersten Ableitungen verschwinden, so können wir von vornherein schreiben:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f''(x_0 + \vartheta_1(x - x_0))}{\varphi''(x_0 + \vartheta_2(x - x_0))},$$

falls bei x_0 nicht beide zweite Ableitungen verschwinden, sonst gehen wir in der Bildung des Restes gleich noch weiter. So fortfahrend seien die n^{ten} Ableitungen die ersten nicht beide verschwindenden. Dann finden wir $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_0)}$. Wie schon zu Beginn gesagt wurde, ist dies Ergebnis an bestimmte Voraussetzungen geknüpft, und man kann nicht erwarten, daß das Verfahren in allen Fällen, wo ein Grenzwert existiert, zum Ziel führen muß.

$$\text{Beispiele: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

§ 2. **Eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.** In einem Intervall, das die Stellen x_0 und $x_0 + h$ enthalten möge, seien $f(x)$ und $\varphi(x)$ differenzierbar, und es sei zwischen x_0 und $x_0 + h$ stets $\varphi'(x)$ von Null verschieden. Dann gibt es ein ϑ zwischen 0 und 1, so daß $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \vartheta h)}{\varphi'(x_0 + \vartheta h)}$. Die Anwendung des Mittelwertsatzes auf Zähler und Nenner würde eine ähnliche Formel geben. Indessen würde dann in Zähler und Nenner nicht das gleiche ϑ auftreten; daß man aber ϑ so wählen kann, daß es in Zähler und Nenner dasselbe ist, das ist der Sinn dieser Erweiterung des Mittelwertsatzes, die eine wesentliche Rolle bei der Betrachtung der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$ im nächsten Paragraphen spielen wird.

Zum Beweis gehen wir ähnlich wie auf S. 82 vor. Wir setzen:

$$\psi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} (\varphi(x) - \varphi(x_0)).$$

Dann ist $\psi(x_0) = \psi(x_0 + h) = 0$. Also gibt es eine Stelle $x_0 + \vartheta h$ für die

$$\psi'(x_0 + \vartheta h) = 0 = f'(x_0 + \vartheta h) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} \varphi'(x_0 + \vartheta h).$$

Daraus entnimmt man unsere Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.

§ 3. $\frac{\infty}{\infty}$. Es sei also $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$, ferner $\varphi(x) \neq 0$ von einem gewissen x an. Nach dem vorigen Paragra-

phen gibt es eine Stelle x_1 zwischen x und x_0 , so daß

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}. \quad \text{Daher wird: } \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)} \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$$

Ich nehme nun an, der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ existiere. Dann wähle ich x_0 so groß, daß für alle $x_1 > x_0$ der Ausdruck $\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}$ um weniger als eine irgendwie gegebene Größe ε von $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ abweicht.

Dies x_0 halte ich dann fest und wähle noch x so groß, daß $\frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$

beliebig wenig von Eins abweicht. Dann ist also von einem gewissen x an $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ um weniger als eine irgendwie gegebene Zahl η von $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ verschieden. Ich habe so das Resultat: *Wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ ist und wenn für $x > \xi$ immer*

$\varphi'(x) \neq 0$ bleibt, wenn weiter $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ und ist gleich $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Der Leser wird die Umkehrung dieses Satzes leicht selbst beweisen.

Bemerkung: Man kann den neuen Mittelwertsatz auch bei dem Problem des § 1 verwenden. Man findet dann

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}.$$

Daraus schließt man: Die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

existieren gleichzeitig und sind einander gleich, sobald $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ ist.

Beispiele: 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$. Hier wird der Grenzwert der ersten Ableitungen selbst von der Form $\frac{\infty}{\infty}$. Ich muß also erst ihn untersuchen, bevor ich auf $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$ schließen kann. Auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$

ist von der Form $\frac{\infty}{\infty}$. Erst der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$ wird $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$. Daher existieren auch die Grenzwerte der Quotienten der anderen Ableitungen und sind diesem gleich. Also ist auch schließlich $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$. Man kann das so ausdrücken, daß man sagt, e^x werde stärker ∞ als jede Potenz von x .

§ 4. **Andere unbestimmte Ausdrücke.** Es gibt noch eine Reihe anderer unbestimmter Formen, die man auf die bisher behandelten zurückführen kann.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{0}$, wenn x nach ∞ strebt. Man kann hier ent-

weder $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\varphi(x)}{f(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$ setzen oder aber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{0}{0} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

so daß also auch in diesem Fall die allgemeine Regel bestehen bleibt

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ bei endlichem x_0 : Man setzt entweder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{\varphi(x)}{f(x)}} = \frac{0}{0} \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f\left(x_0 + \frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(x_0 + \frac{1}{y}\right)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f'\left(x_0 + \frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(x_0 + \frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad \text{Auch hier bleibt also die allge-}$$

meine Regel bestehen. Die Untersuchung *aller* unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ kann also auf die Untersuchung der Grenzwerte der Quotienten der Ableitungen zurückgeführt werden.

3. $\lim f(x) \varphi(x) = 0 \cdot \infty$. Man setzt:

$$\lim f(x) \cdot \varphi(x) = \lim \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{oder} \quad = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{0}{0}.$$

4. $\lim (f(x) - \varphi(x)) = \infty - \infty$. Man kann z. B. setzen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \left(1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right).$$

5. 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . Man setzt: $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)} = e^0 \cdot \infty$.

$$\text{Beispiele: } \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \log x} = 1.$$

IX. Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion.

Schon auf S. 64 haben wir einige Andeutungen über den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion gegeben. Wir hatten damals erkannt, daß zwar die Differenzierbarkeit die Stetigkeit nach sich zieht, daß aber umgekehrt nicht aus der Stetigkeit auf die Differenzierbarkeit geschlossen werden kann. Wir hatten S. 64 Beispiele stetiger Funktionen gegeben, die an einer Stelle nicht differenzierbar waren. Diese Ausführungen sollen nun durch ein Beispiel einer *stetigen* Funktion ergänzt werden, welche sogar *an keiner Stelle* eines ganzen Intervalles *differenzierbar* ist. Wir werden zunächst in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ eine Kurve angeben, die durch jeden Punkt eines ganzen Quadrates hindurch geht. Sie führt nach Peano, der sie zuerst angab, den Namen *Peanokurve*. Die Funktionen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ werden sich zwar als stetig, aber nicht als differenzierbar erweisen. Wir wollen zunächst die Zuordnung der Punkte des Quadrates zu den Punkten einer Strecke definieren, auf der das Weitere beruht. Wir fassen so gewissermaßen zunächst die Punkte des Quadrates als eindeutige Funktion einer Variablen t auf. Zugrunde gelegt sei die Strecke $0 \leq t \leq 1$ und das Quadrat $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. So wie wir gelernt haben, die Punkte einer Strecke vermöge von Intervallschachtelungen zu erfassen, so kann man auch die Punkte des Quadrates durch Quadratschachtelungen erfassen; indem man nämlich für die Abszissen und die Ordinaten Intervallschachtelungen von jeweils gleicher Intervalllänge verwendet, erhält man die Punkte des Quadrates als innerste Punkte von Quadratschachtelungen. Wir wollen nun festlegen, welcher Punkt des Quadrates einem gegebenen Punkt der Strecke zugeordnet sein soll.

Wir teilen die Strecke in neun gleiche Teile ein und nummerieren sie von rechts nach links fortlaufend von 1 bis 9. Alsdann teilen wir wieder jede Teilstrecke der ersten Unterteilung in neun Teile, die wir wieder in jedem Intervall von links nach rechts mit 1 bis 9 nummerieren. Das ist die zweite Unterteilung. Ihre Strecken haben die Länge $(\frac{1}{9})^2$. Wir teilen sie wieder in neun Teile und

numerieren wie vorhin. So fahren wir unaufhörlich weiter. Die Strecken der n^{ten} Unterteilung haben die Länge $(\frac{1}{3})^n$. Jeden Punkt der Strecke können wir nun durch Angabe der Nummern der Teilstrecken einer jeden Unterteilung, in deren Innerem er liegt, bezeichnen, ähnlich wie wir das in Kap. II ausführlich erörtert haben.

Den gleichen Prozeß wenden wir nun beim Quadrat an. Wir zerlegen es in neun gleiche Teilquadrate von der Kantenlänge $\frac{1}{3}$ und erhalten so die erste Unterteilung; wir numerieren die Quadrate

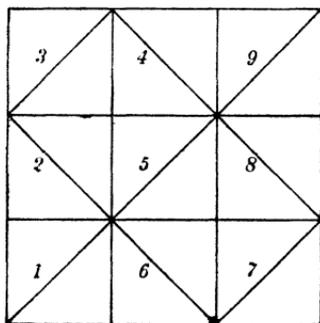


Fig. 28.

fortlaufend mit 1 bis 9, jedoch so, daß zwei Quadrate mit aufeinanderfolgender Nummer längs einer ganzen Kante aneinander grenzen. Das kann so geschehen wie in der Fig. 28 angedeutet. Nun kommen wir zur zweiten Unterteilung. Wir erhalten sie, indem wir wieder jedes Teilquadrat in neun gleiche Quadrate teilen. Diese Quadrate der zweiten Unterteilung haben also die Kantenlänge $(\frac{1}{3})^2$. Wir numerieren sie auch wieder mit 1 bis 9, und zwar wie-

der so, daß zwei aufeinanderfolgende Quadrate längs einer Kante aneinander grenzen. Das kann im einzelnen Quadrat so geschehen wie vorhin, jedoch müssen wir noch darauf achten, daß auch das neunte Quadrat eines Teilquadrates der ersten Teilung in einer Kante an das erste Teilquadrat des folgenden Quadrats der ersten Teilung angrenzt. Auf diese Weise fahren wir unaufhörlich weiter. Wir erhalten dann bei der n^{ten} Unterteilung Quadrate von der Kantenlänge $(\frac{1}{3})^n$. Wieder kann nun jeder Punkt des Quadrates aufgefaßt werden als innerster Punkt einer gewissen mit diesen Quadratteilungen erhaltenen Quadratschachtelung. Denn der Punkt liegt in einem Teilquadrat der zweiten Unterteilung, einem der dritten usw. Wir können ihn also vollständig bezeichnen, indem wir einfach nur die Nummern der betreffenden Teilquadrate angeben. Das kann so wie ein unendlicher Dezimalbruch notiert werden. Nun können wir die Zuordnung der Quadratpunkte zu den Punkten der Strecke angeben. Wir ordnen jedem Punkt der Strecke den Quadratpunkt zu, der in der eben eingeführten Bezeichnungsweise die gleiche Benennung trägt.

Wir wollen uns nun zunächst davon überzeugen, daß hierdurch die Quadratpunkte als *eindeutige* Funktion der Streckenpunkte definiert sind. Wie bei den unendlichen Dezimalbrüchen kann nämlich ein und derselbe Streckenpunkt unter Umständen in verschiedener Weise bezeichnet werden, nämlich dann, wenn er selbst einmal als Teilpunkt auftritt. Aber wie bei den Dezimalbrüchen bieten sich dann nur genau zwei verschiedene Möglichkeiten der

Bezeichnung. Wir müssen uns also überzeugen, daß zwei verschiedene Bezeichnungen, die denselben Punkt der Strecke liefern immer auch denselben Quadratpunkt ergeben. Das kann aus der Art unserer Numerierung bei den Quadrattteilungen gefolgert werden, und das war auch einer der Gründe dafür, sie so zu wählen wie geschehen. Zwei verschiedene Bezeichnungen ein und desselben Streckenpunktes stimmen nämlich in einer gewissen Zahl von Anfangsziffern überein. Alsdann kommen zwei verschiedene aber aufeinanderfolgende Ziffern, dann in der einen lauter Einsen, in der anderen lauter Neunen. Vergleichen wir zwei derartige Quadratschachtelungen miteinander, so erkennen wir, daß eine gewisse Zahl von Anfangsquadraten übereinstimmen, dann kommen zwei verschiedene aber aufeinanderfolgende der nächsten Unterteilung, die also in einer Kante aneinandergrenzen, dann kommen in der einen lauter Einsen, d. h. immer die ersten Quadrate der nächsten Unterteilungen, in der anderen lauter Neunen, d. h. die letzten Quadrate der folgenden Unterteilungen. Diese stoßen aber bei unserer Wahl der Bezeichnung immer in Kanten aneinander, und ihr innerster Punkt ist ihnen daher gemeinsam. So sind die Quadratpunkte eine eindeutige Funktion der Streckenpunkte. Wir wollen beiläufig angeben, daß aber nicht umgekehrt die Streckenpunkte eine eindeutige Funktion der Quadratpunkte sind. Denn wenn ein Quadratpunkt einmal als Eckpunkt einer Teilung auftritt, so ist er innerster Punkt von vier verschiedenen Schachtelungen, die also nicht alle auf den gleichen Streckenpunkt führen können. Denn da ist ein jeder Punkt innerster Punkt von höchstens zwei verschiedenen Schachtelungen. Somit sind nun die Abszissen und die Ordinaten der Quadratpunkte als eindeutige Funktionen des Parameters t definiert.

Wir wollen weiter sehen, daß sie *stetige Funktionen* sind. Es genügt $x(t)$ zu betrachten. Bei $y(t)$ ist die Sache ganz ähnlich. Wir müssen zeigen, daß es zu jedem ε ein $\delta(\varepsilon)$ gibt, so daß $|x(t_0 + h) - x(t_0)| < \varepsilon$, sobald $|h| < \delta(\varepsilon)$. Zum Beweis betrachte ich eine Teilstrecke, die aus zwei aufeinanderfolgenden Strecken der n^{ten} Unterteilung besteht. Sie hat die Länge $2(\frac{1}{3})^n$. Die ihren Punkten zugeordneten Quadratpunkte gehören zwei längs einer Kante aneinandergrenzenden Quadraten der n^{ten} Unterteilung an. Die bei ihnen vorkommenden Abszissendifferenzen sind also höchstens $2(\frac{1}{3})^n$. Seien nun t_0 und $t_0 + h$ zwei Punkte der eben eingeführten Strecke, und sei t_0 ein innerer Punkt der Strecke. Dann ist also immer $|x(t_0 + h) - x(t_0)| < \frac{2}{3^n}$. Setze ich $\frac{2}{3^n} = \varepsilon$, so ist ohne weiteres zu sehen, daß durch hinreichend große Wahl von n , d. h. der Unterteilung, der ich die beiden Strecken entnehme, ε unter jede Grenze herabgedrückt werden kann. Das zugehörige $\delta(\varepsilon)$ der Stetigkeitsformulierung ist definiert als Minimalabstand

von t_0 von den Intervallenden. So ist die Stetigkeit nachgewiesen.

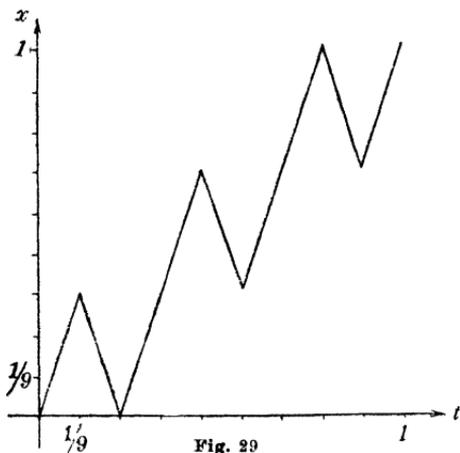
Nun wollen wir zeigen, daß $x(t)$ nirgends differenzierbar ist. Wir haben also zu zeigen, daß für kein t_0 der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

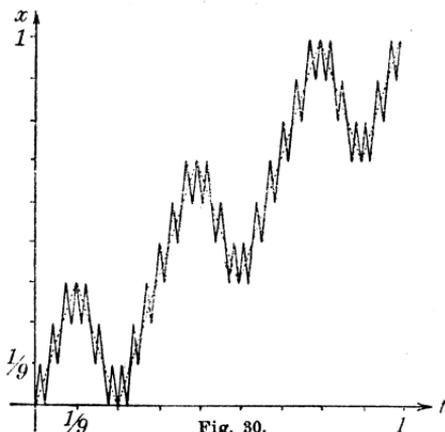
existiert. Das wird nach S. 55 geschehen sein, sowie wir erkannt haben, daß es beliebig kleine Werte von h gibt, für die der Differenzenquotient verschwindet, und daß es andererseits beliebig kleine Werte von h gibt, für die er über einer irgendwie fixierten Grenze liegt. Es soll wieder t_0 der oben eingeführten Doppelstrecke angehören, die wir ja beliebig kurz wählen können. Man sieht sofort, daß es in dem zugeordneten Doppelquadrat Punkte gleicher Abszisse gibt. Ich kann daher $t_0 + h$ in der Doppelstrecke so wählen, daß $x(t_0 + h) = x(t_0)$. Daraus folgt der erste Teil der gewünschten Feststellung. Überall, wo der Differentialquotient existiert, muß er Null sein. Daraus folgt schon, daß er nicht überall existieren kann, da sonst die Funktion $x(t)$ konstant sein müßte. Er kann nicht einmal in einem Intervall existieren. Daß er aber nirgends existiert, werden wir erkannt haben, sowie wir gezeigt haben, daß es für jedes t_0 beliebig kleine h gibt, für die der Differenzenquotient oberhalb einer festen Grenze bleibt. In unserem Doppelquadrat können wir nämlich immer eine Abszisse $x(t_0 + h)$ finden, die von $x(t_0)$ um mindestens die Hälfte der Kante des Doppelquadrates absteht, die zur x -Achse parallel ist. Die Länge derselben ist aber mindestens $(\frac{1}{3})^n$ (nämlich $(\frac{1}{3})^n$, wenn die Quadrate übereinanderliegen und $2(\frac{1}{3})^n$, wenn sie nebeneinanderliegen. Daher ist bei dieser Wahl von h immer $|x(t_0 + h) - x(t_0)| \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n$. Ferner ist aber $|h|$ selbst natürlich kleiner als $2(\frac{1}{3})^n$. Daher ist

$$\left| \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \right| > \frac{1}{4} 3^n.$$

Damit ist der Beweis zu Ende. Man wird noch den Wunsch haben, auch etwas anschaulich in das Zustandekommen der eben festgestellten Eigenschaft hineinzusehen. Man kann sich eine ungefähre Vorstellung von dem Verlauf der Funktion $x(t)$ machen. Zu dem Zweck muß man an den Streckenzug denken, den wir in unsere



Figur 28 eingezeichnet haben und dessen Bedeutung wir jetzt angeben wollen. Das ist weiter nichts als ein Sehnenpolygon, das der Peanokurve eingezeichnet ist. Man sieht nämlich leicht ein, daß es die Eckpunkte mit der Peanokurve gemeinsam hat. Ich kenne so auch die Werte der Funktion $x(t)$ in einzelnen Punkten, nämlich in allen Teilpunkten. Ich will nun die Funktion $x(t)$ in einem rechtwinkligen x - t -System deuten, und dabei die eben gefundenen Stellen der Kurve $x(t)$ verwenden. Verbinde ich sie durch gerade Linien, so erhalte ich als erste Annäherung das Sehnenpolygon der Fig. 29, der ersten Unterteilung entsprechend. Bei der zweiten Unterteilung wird es durch das kompliziertere der nächsten Fig. 30 ersetzt. So bekommt man einen ungefähren Einblick.



Man erkennt, wie die in der Fig. 30 dargestellte zweite Annäherung aus der ersten Annäherung der Fig. 29 dadurch hervorgeht, daß jedes geradlinige Stück durch einen Zickzackzug ersetzt wird.

So erhält man auch jede folgende Annäherung aus der vorhergehenden. Der Leser wird auch leicht sehen, wie es kommt, daß es an jeder Stelle verschwindende und sehr große Differenzenquotienten gibt.

X. Funktionen von zwei Variablen.

§ 1. **Grenzwerte und Stetigkeit.** Was man unter einer Funktion von zwei Variablen versteht, ist dem Leser schon von S. 2 geläufig. Als geometrische Deutung einer solchen Funktion $z = f(x, y)$ bietet sich die Darstellung durch eine Fläche in dem dreiaxigen rechtwinkligen Koordinatensystem (x, y, z) . Wann werden wir eine solche Funktion an einer Stelle (x, y) der unabhängigen Variablen stetig nennen? Doch jedenfalls immer dann, wenn sich die Werte der Funktion in der Nachbarschaft des Punktes x_0, y_0 der x - y -Ebene von $f(x_0, y_0)$ beliebig wenig unterscheiden, einerlei ob die Funktion überall erklärt ist oder nicht. Um aber mit dieser Vorstellung logisch operieren zu können, müssen wir sie, wie bei einer Variablen, erst in ein begrifflich faßbares Gewand bringen. Dazu sind vorab Erörterungen über den Grenzbegriff notwendig

Unter einer *Umgebung* einer Stelle (x_0, y_0) der x - y -Ebene wol-

len wir fortan immer entweder das Innere eines Kreises verstehen, dessen Mittelpunkt dieser Punkt (x_0, y_0) ist, oder aber das Innere eines Rechteckes, dessen Mittelpunkt wieder (x_0, y_0) ist. Das ist also die genaue Verallgemeinerung des um einen Punkt der Zahlengeraden abgegrenzten Intervalles, wie denn hier überhaupt an die Stelle der Zahlengeraden die Zahlenebene, die x - y -Ebene, tritt. Von der Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips war schon auf S. 107 die Rede. Nun zur Definition des *Grenzwertes einer Funktion* $f(x, y)$ beim Übergang zur Stelle (x_0, y_0) . Wir werden schreiben $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ dann und nur dann, wenn sich

für jedes vorgegebene ε um die Stelle (x_0, y_0) eine Umgebung abgrenzen läßt, derart, daß für alle x, y dieser Umgebung immer $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ ist. Für diesen hiermit definierten *Doppellimes* gelten ganz ähnliche Gesetze wie für den Limes bei Funktionen einer Variablen, namentlich auch das allgemeine Konvergenzprinzip: *Der Doppellimes existiert dann und nur dann, wenn sich für jedes ε um die Stelle eine Umgebung abgrenzen läßt, so daß für zwei beliebige Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) dieser Umgebung immer $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$ ist.* Der Beweis ist genau der gleiche wie bei einer Variablen, wofern man nur in dem dort auf S. 55 gegebenen Wortlaut überall statt „Intervall um $x = \alpha$ “ liest: „Umgebung von (x_0, y_0) “. Der Leser mag den Beweis also dort nachsehen.

Ein Kreis um (x_0, y_0) ist analytisch charakterisiert durch die Ungleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon$, während die beiden Ungleichungen $|x - x_0| < \varepsilon_1$ und $|y - y_0| < \varepsilon_2$ ein Rechteck um den Punkt liefern.

Beispiele: 1. $|x^2 + y^3| < \varepsilon$ für $|x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ und $|y| < \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Also ist die Funktion stetig bei $x = 0, y = 0$.

2. $\left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| < |x| |y| < \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} < \varepsilon$, für $|x|^2 + |y|^2 < 2\varepsilon$.

Also ist die Funktion stetig bei $x = 0, y = 0$, wenn man ihr dort den Wert Null beilegt.

Der hier definierte Doppellimes muß scharf unterschieden werden von dem *doppelten oder zweifachen Limes* $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$. Bei diesem handelt es sich darum, erst y nach Null rücken zu lassen. Dabei bleibt x fest. Man nähert sich also dabei dem Punkt x der x -Achse. Wenn das geschehen ist, soll man weiter den Grenzübergang $x \rightarrow 0$ ausführen. Von allen Werten, die die Funktion in der Umgebung von $x = 0, y = 0$ annimmt, kommen also bei diesem zweifachen Limes nur die in der Nähe der x -Achse angenommenen vor. Darin liegt, daß das etwas anderes sein kann als

der doppelte Grenzübergang $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ liefert, bei dem nur

die Reihenfolge der Grenzübergänge vertauscht ist. Denn da hängt der Grenzwert nur ab von den Werten, die $f(x, y)$ in der Nähe der y -Achse besitzt, oder richtiger ausgedrückt von den Grenzwerten, die $f(x, y)$ bei Annäherung an die y -Achse besitzt. Indessen gilt, wie man leicht übersieht, ein wichtiger Satz über die Beziehung zwischen doppeltem Limes und Doppellimes: *Wenn der Doppellimes $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ und die beiden doppelten Limes*

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ und $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existieren, so sind alle drei einander gleich. Denn dann sind alle bei den beiden doppelten

Limes vorkommenden Funktionswerte, soweit sie in einer genügend kleinen Umgebung von $(0, 0)$ angenommen werden, um weniger als ε voneinander verschieden, also sind auch die doppelten Limes selbst beide voneinander und vom Doppellimes um weniger als ε verschieden. Also sind sie einander gleich, da ε beliebig angenommen werden kann.

Man kann indessen aus der Existenz des Doppellimes nicht folgern, daß auch nur einer der doppelten Limes existiert. Betrachten wir z. B. die Funktion: $f(x, y) \equiv y \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $f(x, y) \equiv 0$ für $x = 0$. Der Doppellimes $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ existiert und

ist gleich Null; denn für $|y| < \varepsilon$ und beliebiges x , also erst recht für $|x| < \varepsilon$ und $|y| < \varepsilon$, ist immer $|y \sin \frac{1}{x}| < \varepsilon$. Jedoch existiert der $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}$ nicht. Denn schon $\lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}$ existiert nicht.

In diesem Beispiel existiert zufällig noch der $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = 0$. Aber das ist wirklich nur ein Zufall. Denn bei

$f(x, y) \equiv y \sin \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{y}$ für $x \neq 0, y \neq 0, f(x, y) \equiv 0$ für $x = 0$

und für $y = 0$ existiert zwar der Doppellimes, aber keiner der doppelten Limes.

Ebensowenig kann man umgekehrt aus der Existenz der beiden doppelten Limes die Existenz des Doppellimes erschließen. Betrachten wir nämlich z. B. die Funktion $\frac{x}{x+y^2}$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{x+y^2} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+y^2} = 0.$$

Aber der Doppellimes existiert nicht; denn auf der x -Achse ist ja unsere Funktion 1, auf der y -Achse dagegen ist sie 0. Also kann es keine Zahl geben, die von beiden beliebig wenig abweicht.

Der Leser denkt vielleicht, das liege daran, daß eben die beiden doppelten Limites verschieden waren. Wenn sie aber gleich sind, ist es genau ebenso. Ich will ein Beispiel einer Funktion angeben, für die nicht allein die beiden doppelten Limites einander gleich sind, nein, in dem sogar bei jeder geradlinigen Annäherung an den Nullpunkt $(0, 0)$ $f(x, y)$ demselben Grenzwert Null zustrebt, und wo doch der Doppellimes nicht existiert. Ich setze

$f(x, y) = \frac{4y^2x}{(y^2+x)^2}$. Dann ist $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, und es ist $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$. Ferner ist längs der Geraden

$$y = kx : f(x, y) = \frac{4k^2x}{(k^2x+1)^2}. \quad \text{Also} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = 0.$$

Und doch kann der Doppellimes nicht existieren, da es z. B. in jeder Nähe von $(0, 0)$ noch Punkte gibt, wo $f(x, y) = 1$. Das sind die Punkte der Parabel $x = y^2$.

Man kann sich von den hier berührten Dingen auch anschaulich leicht eine Vorstellung verschaffen. Ich gebe daher noch folgendes Beispiel, das bei $(0, 0)$ ganz dasselbe Verhalten zeigt, wie das vorbergehende, das aber wohl anschaulich durchsichtiger ist als dieses. Die Funktion $f(x, y)$ sei so definiert: Für $x = 0$ soll $f(x, y) = 0$ sein, für die Punkte der xy -Ebene, die der Gleichung $y^2 = x(\alpha - x)$ genügen, soll $f(x, y) = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$ sein. Die Punkte, die bei einem bestimmten α der Gleichung $y^2 = x(\alpha - x)$ genügen, liegen auf einem Kreis, der die y -Achse im Koordinatenanfang berührt. Jedem Wert des Parameters α entspricht ein solcher Kreis. Ich erhalte eine Kreisschar, deren Parameter das α ist. Die Kreise mit positivem α liegen rechts, die mit negativem α links der y -Achse. $\alpha \rightarrow \infty$ liefert die y -Achse selbst. Die Kreise mit kleinem $|\alpha|$ haben einen kleinen Radius, der sich mit abnehmendem $|\alpha|$ fortwährend verkleinert und für $|\alpha| = 0$ verschwindet. Die Kreise mit kleinerem $|\alpha|$ liegen im Inneren der Kreise mit größerem $|\alpha|$. Diese Kreise sind nun die Höhenlinien unserer Fläche. Denn längs eines jeden derselben hat $f(x, y)$ denselben Wert. Den Verlauf der Funktion $z = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$ haben wir auf S. 81 studiert. Demnach nimmt unsere Funktion ihren größten Wert auf dem Kreise $\alpha = 1$ ein, ihren kleinsten auf dem Kreise $\alpha = -1$. Mit wachsendem oder gegen Null abnehmendem $|\alpha|$ nähert sich $f(x, y)$ unbegrenzt der Null. Wenn ich den Verlauf der Fläche über irgendeiner Geraden $y = mx$ durch den Koordinatenanfang verfolge, so hat längs dieser Geraden bei Annäherung an $(0, 0)$, $f(x, y)$ immer den Grenzwert Null, welche Gerade ich auch nehmen mag. Denn eine solche Gerade trifft in der Umgebung von $(0, 0)$ nur Kreise mit sehr kleinem Parameter. Eine Ausnahme macht

nur die y -Achse. Auf dieser Geraden aber verschwindet die Funktion ja ohnedies. Also längs *jeder Geraden* ist der Grenzwert Null. Aber wenn ich mich längs eines der *Kreise* meiner Schar dem Koordinatenanfang nähere, so ist der Grenzwert natürlich gleich $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$, wenn α den Parameter des Kreises bedeutet, auf welchem ich mich dem Koordinatenanfang nähere. Ich kann als Grenzwert jeden Wert zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ herausbekommen.

Bei der nun gleich folgenden Definition der Stetigkeit wird der Doppellimes eine wichtige Rolle spielen. Er ist die eigentliche Verallgemeinerung des Limes bei Funktionen einer Variablen. Für ihn, wie auch für die doppelten Limes, gelten die folgenden Regeln wie bei einer Variablen: Der Limes einer Summe ist gleich der Summe der Einzellimes, ferner der Limes eines Produktes ist gleich dem Produkt der Einzellimes, der Limes eines Quotienten ist gleich dem Quotient der Einzellimes, wofern der Limes des Nenners nicht Null ist. Der Beweis wird genau wie bei einer Variablen geführt. Wir gehen daher nicht näher darauf ein.

Wir nennen eine Funktion an der Stelle x_0, y_0 stetig, wenn $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ist. Man darf sich von dem Aussehen des

geometrischen Bildes einer nur an einer Stelle stetigen Funktion keine falsche Vorstellung machen. Stetig im Sinne dieser Definition ist bei $(0, 0)$ auch die Funktion $z = y$ für $x \geq 0$, $z = -y$ für $x < 0$. Man veranschaulicht sich dieselbe am besten geometrisch dadurch, daß man sich die (x, y) -Ebene längs der y -Achse aufgeschnitten denkt und dann die beiden Halbebenen um die x -Achse gegeneinander dreht, so daß dabei der Schlitz immer über der y -Achse bleibt.

Sätze über stetige Funktionen: Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind wieder stetige Funktionen überall da, wo der Nenner nicht verschwindet. Der Beweis verläuft genau wie bei einer Variablen. Wir bemerken noch, daß natürlich x und y selbst stetige Funktionen der beiden Variablen x und y sind. Dann können wir schließen, daß alle rationalen Funktionen von x und y wieder stetige Funktionen sind, außer an den Nullstellen des Nenners. Wir können weiter bemerken, daß alle stetigen Funktionen der einen Variablen x auch stetige Funktionen der beiden Variablen x und y sind, denn wir können sie als solche Funktionen der beiden Variablen auffassen, deren Wert an jeder Stelle nur von x abhängt.

Wenn wir in einer stetigen Funktion $f(u, v)$ für die beiden Variablen wieder stetige Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ eintragen, so ist die mittelbare Funktion wieder eine stetige Funktion. Also ist z. B. auch $f(u(x), v(x))$ eine stetige Funktion von x , wenn $u(x)$ und $v(x)$ solche Funktionen sind und wenn $f(u, v)$ eine stetige

Funktion seiner beiden Variablen ist, für solche Werte derselben natürlich, die von $u(x)$ und $v(x)$ angenommen werden.

Um nun weiter die allgemeinen Sätze über stetige Funktionen übertragen zu können, müssen wir erst wieder ein paar Grundbegriffe für das zweidimensionale Gebiet neu einführen. Wenn in der xy -Ebene eine unendliche Menge von Punkten gegeben ist, so heißt ein Punkt P *Häufungspunkt* dieser Menge, wenn in jeder Umgebung dieses Punktes unendlich viele Punkte der Menge liegen.

Eine Punktmenge heißt *beschränkt* oder im Endlichen gelegen, wenn sich ein Quadrat (oder, was dasselbe bedeutet, ein Kreis) angeben läßt, der alle Punkte der Menge im Inneren enthält.

Eine beschränkte unendliche Punktmenge besitzt mindestens einen *Häufungspunkt*. Der Beweis geht ähnlich wie auf der Geraden durch Quadratschachtelung. Wir teilen das Quadrat in vier gleiche Teilquadrate. Mindestens eines enthält unendlich viele der Punkte. Dieses oder (wenn es mehrere sind) irgendeines derselben teilen wir wieder in vier Quadrate. So weiterfahrend erhalten wir eine Quadratschachtelung, deren innerster Punkt ein Häufungspunkt ist.

Unter einem *Bereich* verstehen wir eine Punktmenge von folgender Art: Jeder Punkt der Menge besitzt eine Umgebung, die nur aus Punkten der Menge besteht. Irgend zwei Punkte der Menge aber lassen sich durch einen Polygonzug miteinander verbinden, welcher nur Punkte der Menge passiert (Polygonzug heißt eine Kurve, die aus endlich vielen geradlinigen Stücken besteht). Ein Bereich ist also z. B. das Kreisinnere, das Ellipseninnere und viele andere.

Unter einem *Grenzpunkt* oder *Randpunkt* eines Bereiches verstehen wir einen Punkt, der selbst nicht dem Bereich angehört, der aber Häufungspunkt von Bereichspunkten ist, in dessen beliebiger Nähe also Bereichspunkte liegen; z. B. die Kreisperipherie, der Rand der Ellipse usw.

Ein *Gebiet* (abgeschlossener Bereich) entsteht aus einem Bereich durch Hinzunahme der Randpunkte, also z. B. Kreisinneres plus Rand.

Allgemeine Sätze über stetige Funktionen: Eine in einem abgeschlossenen, ganz im Endlichen gelegenen Bereich stetige und endliche Funktion (d. h. stetig im Inneren und auf dem Rande) ist beschränkt. Denn sonst ließe sich eine Stelle angeben, an welcher der Betrag der Funktion größer als 1 wäre, eine Stelle, wo ihr Betrag größer als 2, allgemein eine Stelle, wo ihr Betrag größer wäre als die beliebige ganze Zahl n . Diese Punkte besitzen dann mindestens einen Häufungspunkt, der dem Bereich oder seinem Rand angehört. Da aber hier die Funktion einen endlichen Wert besitzt, so besitzt sie auch für alle Stellen einer gewissen Umgebung einen Wert unterhalb einer gewissen Schranke, während

nach unserer Konstruktion in jeder Umgebung dieses Punktes Stellen lägen, wo der Betrag über jeder gegebenen Schranke liegt. Daher existiert nun auch für die Funktionswerte eine *obere und eine untere Grenze*, die aber beide irgendwo von der Funktion angenommen werden. Das erkennt man wie bei einer Variablen. Daher hat jede im abgeschlossenen Bereich stetige Funktion im Bereich ein *Maximum und ein Minimum*.

§ 2. **Ableitungen.** Die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ haben wir schon auf S. 69 eingeführt. Wir haben der dort gegebenen Definition nichts hinzuzufügen. Als eine Anwendung des seither Besprochenen wollen wir nun die Kettenregel auf mittelbare Funktionen $f(x(t), y(t))$ erweitern. Durch die Gleichungen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ für $t_0 \leq t \leq t_1$ wird eine Kurve der xy -Ebene definiert. Die Funktion $f(x, y)$ möge eine stetige Funktion der beiden Variablen x und y sein in einem Bereich, der diese Kurve ganz im Innern enthält. Ferner sollen die partiellen Ableitungen $p(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ existieren und stetig sein. Weiter sollen auch $x(t)$ und $y(t)$ differenzierbar sein. Dann ist auch die mittelbare Funktion $f(x(t), y(t))$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Der Beweis fließt aus der Definition der Differentialquotienten und der Stetigkeit. Wir haben nämlich:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x, y)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Dies wird nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p(x + \vartheta_1 \Delta x, y + \Delta y) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} q(x, y + \vartheta_2 \Delta y) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= p(x, y) \frac{dx}{dt} + q(x, y) \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung der Kettenregel auf mittelbare Funktionen, die aus Funktionen von noch mehr Variablen entstehen, liegt hier nach auf der Hand, wie denn überhaupt der Leser imstande sein wird, alles bisher Gesagte sich auch bei Funktionen von mehr als zwei Variablen zurechtzulegen.

Wir kommen zu den *höheren Ableitungen*. Sie werden erhalten, wenn die partiellen ersten Ableitungen wieder differenziert werden. So aber erhält man schon 4 partielle Ableitungen zweiter Ordnung, nämlich je nachdem ob wir p oder q wieder nach x oder nach y differenzieren. Jeder, der sich naiv oder rein mechanisch mit diesen

Dingen befaßt, kommt ganz von selber darauf, daß es Funktionen gibt, für die $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, für die also die Reihenfolge der Differentiationen gleichgültig ist. Mancher wird auch ohne weiteres Nachdenken es für selbstverständlich halten, daß es so ist. Aber dem ist nicht so. Das wäre ein Irrtum. Schon die ganz einfache Funktion $z = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ beweist das Gegenteil. Sie besitzt, wie wir oben sahen, bei $(0, 0)$ einen Grenzwert, nämlich Null. Erklären wir also für $(0, 0)$ die Funktion dadurch, daß wir dort $z = 0$ setzen, erklären wir sie aber an allen anderen Stellen (wo dieser Ausdruck ja nicht versagt) durch $z = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, so ist sie bei $(0, 0)$ stetig. Nun wird

$$p(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 0}{x} = -y$$

und

$$q(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 0}{y} = x.$$

Daher wird $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$, dagegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$. Ein weiteres solches Beispiel wird durch die Funktion $z = xy \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $z = 0$ für $(x, y) = (0, 0)$ gegeben. Auch diese Funktion ist bei $(0, 0)$ stetig. Denn es ist

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} (x^2 + 2y^2) < \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} (2x^2 + 2y^2) \right| < 2|x||y| < \varepsilon \text{ für}$$

$$|x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad |y| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Hier wird $p(0, y) = 2y$ und $q(x, 0) = x$. Daher wird $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$.

Wir wollen noch suchen, einen geometrischen Einblick in den Sachverhalt zu gewinnen. Die Fläche $z = xy \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$ sieht in der Umgebung von $(0, 0)$ ähnlich aus wie das hyperbolische Paraboloid $z = xy$. Genau wie dieses passiert sie in den beiden geradlinigen Erzeugenden $x = 0$ und $y = 0$ die xy -Ebene und ist im ersten und dritten Quadranten oberhalb, im zweiten und vierten unterhalb dieser Ebene gelegen. Um nun weiter die geometrische Bedeutung der Verschiedenheit von $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ einzusehen, was ja bei $z = xy$ anders ist, fragen wir zunächst nach der geometrischen Bedeutung der beiden partiellen ersten Ableitungen p

und q . Wenn wir durch die Fläche $z = f(x, y)$ einen Schnitt legen parallel zur xz -Ebene, etwa bei $y = y_0$, so erhalten wir eine Schnittkurve mit der Gleichung $z = f(x, y_0)$. Der Richtungstangens dieser Schnittkurve ist $p(x, y_0)$. Schneiden wir parallel zur yz -Ebene bei $x = x_0$, so erhalten wir eine Schnittkurve mit der Gleichung $z = f(x_0, y)$. Ihr Richtungstangens wird $q(x_0, y)$. Die zweiten Ableitungen geben nun an, wie sich diese Richtungstangens ändern, wenn man sie längs einer Parallelen zur x - oder y -Achse auf der Fläche verfolgt. Die in unserem Beispiele aufgeschriebenen waren direkt die Richtungstangens der Schnittkurven in den Punkten der x -Achse bzw. den Punkten der y -Achse. Während beim Paraboloid die Schnittkurven diese beiden Geraden gleich steil durchsetzen, besteht hier ein Unterschied der Steigungen. Die y -Achse wird steiler durchsetzt wie die x -Achse. Dazu nimmt die Steigung längs der y -Achse bei Annäherung an den Koordinatenanfang rascher ab als längs der x -Achse.

Wenn man den hier dargelegten Sachverhalt mit der evidenten Tatsache vergleicht, daß bei ganzen rationalen Funktionen die Reihenfolge der *Differentiationen* sich als vertauschbar erweist, so drängt sich einem die Frage nach den Bedingungen auf, unter welchen diese Gleichheit stattfindet, zumal für das bloße Auge gar kein so großer Unterschied z. B. zwischen unserer Fläche und dem Paraboloid bei $(x, y) = (0, 0)$ zu bestehen scheint. Wir werden in dieser Richtung den folgenden Satz beweisen:

In einer Umgebung von x_0, y_0 sollen $f(x, y)$, p , q , $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren und stetig sein, dann ist an dieser Stelle $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Zum Beweis müssen wir auf die Definition der Ableitungen zurückgehen. Es ist $p(x_0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h}$. Daher wird

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

Ferner ist aber $q(x, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$, und es wird

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

Die beiden Ausdrücke unterscheiden sich also nur durch die Reihenfolge der beiden Grenzübergänge. Wir hatten schon oben S. 112 Beispiele dafür, daß die Reihenfolge zweier Grenzübergänge nicht gleichgültig ist. Hier finden wir neue Beispiele. Wir erkannten damals, daß beide sicher dann gleich sind, wenn der zugehörige Doppellimes existiert. Dieser Satz wird bei unserem Beweis eine

Rolle spielen. Wir wenden den Mittelwertsatz mehrmals an. Um $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ umzuformen, setze ich:

$$\frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h} = \varphi(y).$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_0 + \vartheta_1 k) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \vartheta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \vartheta_1 k)}{h} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 + \vartheta_1 k). \end{aligned}$$

Nun existiert aber wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ der Doppellimes und ist diesem doppelten Limes gleich (S. 115). Daher ist

$$\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 + \vartheta_1 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Also ist wirklich: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Es bleibt noch ein Wort über die dritten und höheren Ableitungen. Man bezeichnet sie so: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \dots$. Der Leser wird sich leicht ähnliche Vertauschbarkeitssätze auch dort überlegen.

Aus diesem Satz folgt z. B., daß für alle rationalen Funktionen die Differentiationsordnung gleichgültig ist mit Ausnahme der Stellen, wo der Nenner verschwindet.

§ 3. Implizite Funktionen. Wir sind nun imstande, eine Frage in Angriff zu nehmen, die wir früher zurückstellen mußten, nämlich Fragen über implizite Funktionen, die also durch Gleichungen von der Form $F(x, y) = 0$ definiert sind. Die erste Frage ist die nach der Existenz von Lösungen. Nun kann man natürlich nicht erwarten, daß eine jede solche Gleichung eine Lösungsfunktion besitzt, das heißt eine Funktion $y = f(x)$, durch deren Einsetzen die Gleichung identisch erfüllt wird. Denn z. B. e^{x-y} wird nie Null. Aber es gibt einen Satz von ungefähr folgendem Charakter: Wenn eine solche Funktion an einer Stelle (x_0, y_0) zu Null wird, dann gibt es auch eine Funktion $y = f(x)$, die sie zu Null macht. Wir müssen, bevor wir beweisen können, die Voraussetzungen, die wir machen wollen, klar formulieren. Ich stelle folgenden Satz auf:

Es sei $F(x_0, y_0) = 0$ und $F(x, y)$ sowie $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ stetig in einer Umgebung von (x_0, y_0) . Außerdem sei $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ von Null

verschieden. Dann kann man um die Abszisse x_0 ein Intervall abgrenzen, und um die Ordinate y_0 gleichfalls ein Intervall angeben, derart, daß zu jedem x_1 aus dem ersten Intervall ein y_1 aus dem zweiten gehört, für die $F(x_1, y_1) = 0$ ist. Die so definierte Lösung $y = f(x)$ ist eindeutig und bei x_0 stetig und differenzierbar, und

$$\text{es ist } \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, will ich zum Beweis annehmen, daß $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ ist. Ich grenze nun um (x_0, y_0) als Mittelpunkt ein Rechteck (Fig. 31) ab, in dem 1. $F(x, y)$ und seine Ableitungen stetig sind, und in welchem 2. durchweg $\frac{\partial F}{\partial y}$

positiv ist. Das geht, weil ja $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ und dort stetig ist.

Betrachte ich nun die Parallele zur y -Achse bei $x = x_0$, so muß

F , weil $\frac{\partial F}{\partial y}$ positiv ist, und weil $F(x_0, y_0) = 0$ ist, beim Übergang zu größeren y -Werten positiv, beim Übergang zu kleineren y -Werten dagegen negativ werden.

Ich kann also auf dieser Geraden die Punkte A und B in gleicher Entfernung von (x_0, y_0) so wählen, daß in ihnen $F(x, y)$ verschiedenes Vorzeichen besitzt. Und zwar ist in A : $F > 0$, in B dagegen $F < 0$.

Daher kann ich nun wieder um A und B zwei Rechtecke abgrenzen, in deren einem F positiv, in deren anderem aber F negativ ist.

Ich darf sogar annehmen, daß diese Rechtecke kongruent sind. Die Abszissen dieser Rechtecke mögen zwischen $x_0 - \delta$ und $x_0 + \delta$ liegen

und ihre Ordinaten zwischen $y_0 - \varepsilon$ und $y_0 + \varepsilon$. Dann sind

und ihre Ordinaten zwischen $y_0 - \varepsilon$ und $y_0 + \varepsilon$. Dann sind

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \quad \text{und} \quad y_0 - \varepsilon \leq y \leq y_0 + \varepsilon$$

zwei Intervalle, für die unser Satz gilt. Denn verfolge ich $F(x, y)$ längs irgendeiner Geraden $x = x_1$, deren Abszisse dem Intervall angehört, so ist F bei der Ordinate $y_0 - \varepsilon$ negativ, bei der Ordinate $y_0 + \varepsilon$ dagegen positiv. Da aber inzwischen $\frac{\partial F}{\partial y}$ positiv ist,

so wächst dazwischen F monoton und passiert einmal die Null. Damit ist also die im Satz erwähnte eindeutige Lösung $y = f(x)$ gefunden. Sie ist außerdem stetig bei $x = x_0$, weil einer Änderung von x um weniger als δ eine Änderung von y um weniger als ε entspricht, und δ wie ε beliebig klein gewählt werden können.

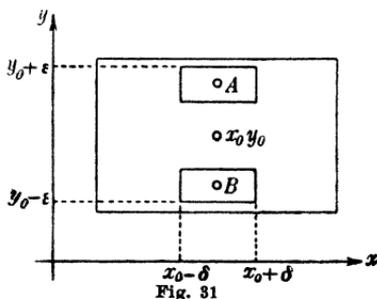


Fig. 31

Es bleibt also noch die Aussage über die Differentialquotienten zu beweisen. Wir gehen auf die Definition des Differentialquotienten zurück. Tragen wir die Lösung $y = f(x)$ in $F(x, y)$ ein, so ist die mittelbare Funktion $F(x, f(x))$ für alle x Null. Daher sind auch die Differenzenquotienten Null. Wir finden also:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) - F(x_0, f(x_0))}{\Delta x} \\ &= \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} + \frac{F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= p(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) + q(x_0, y_0 + \vartheta_2 \Delta y) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{p(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)}{q(x_0, y_0 + \vartheta_2 \Delta y)}$. Da nun aber $p(x, y)$ und $q(x, y)$ bei x_0, y_0 stetig sind, so existieren die Grenzwerte $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} p(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)$ und $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} q(x_0, y_0 + \vartheta_2 \Delta y)$, und da außerdem $q(x_0, y_0)$ von Null verschieden ist, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Daher ist $y = f(x)$ differenzierbar, und es ist $f'(x_0) = -\frac{p(x_0, y_0)}{q(x_0, y_0)}$.

Den Fall, wo an der betreffenden Stelle $q = 0$, aber $p \neq 0$ ist, behandelt man ebenso. Wenn aber an einer Stelle beide erste partielle Ableitungen verschwinden, so versagt unsere Überlegung völlig. Dann läßt sich auch keine allgemeine Aussage über die Existenz von Lösungen machen. Es kann sein, daß gar keine Lösung vorhanden ist, wie z. B. bei $x^2 + y^2 = 0$, das im Reellen nur bei 0,0 (Einsiedlerpunkt) verschwindet. Es können aber auch zwei Lösungen verschiedener Richtung (Doppelpunkt) da sein, wie bei $x^2 - y^2 = 0$, die beiden Geraden $y = x$ und $y = -x$ (siehe auch S. 124). Endlich können auch zwei Lösungen gleicher Richtung da sein, wie z. B. bei $y^2 = x^3$. Das gibt ein derartiges Kurvenbild (Fig. 32) mit

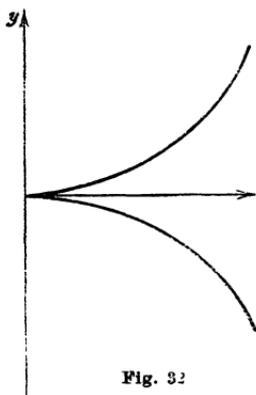


Fig. 32

Spitze. Wir haben damit nur die einfachsten Fälle aufgezählt, es gibt deren noch viele andere. Die Kriterien, die es ermöglichen, sie voneinander zu trennen, wollen wir nicht mehr ausführlich behandeln. Wir wollen nur noch angeben, wie man die Richtung eines Kurvenastes bestimmen kann, der einen solchen, wie man sagt, singulären Punkt passiert, wenn man erst weiß, daß der Ast eine sich bis in den Punkt stetig ändernde Tangentenrichtung besitzt. Dann kann man so verfahren: Man geht wieder von der

identisch richtigen Gleichung aus: $F(x, f(x)) = 0$. Wenn man sie einmal differenziert, so kann man daraus im allgemeinen wie vorher y' entnehmen. Wenn aber im singulären Punkt p und q beide verschwinden, so geht das nicht. Ich differenziere alsdann die Gleichung noch einmal und erhalte:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} y' + \frac{\partial q}{\partial x} y' + \frac{\partial q}{\partial y} y'^2 + q y'' = 0.$$

Hieraus bestimmt man im allgemeinen y'' . In unserem Falle aber verschwindet der Koeffizient von y'' . Ich erhalte also wieder eine Gleichung für y' , nämlich:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + y' \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + y'^2 \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Aus ihr kann man nun im allgemeinen y' berechnen; geht es wieder nicht, weil wieder alle Koeffizienten verschwinden, so differenziert man noch einmal und fährt so fort, bis vielleicht einmal die Bestimmung von y' gelingt. Im allgemeinen erhält man dabei mehrere verschiedene Richtungen (reell oder imaginär) entsprechend den verschiedenen Kurvenästen, die im allgemeinen den Doppelpunkt oder mehrfachen Punkt passieren.

Wir wollen es nicht unterlassen, noch die folgende manchmal nützliche *Bemerkung* zu machen. Wir werden in einem der nächsten Paragraphen die Maxima und Minima der Flächen studieren und dafür Kriterien angeben. Diese Kriterien sind nun direkt Kriterien, um daraus in gewissen Fällen die Existenz der Lösungsfunktion zu erkennen; denn es ist ja unmittelbar klar, daß, wenn die z -Koordinate Null eine höchste Erhebung oder eine tiefste Senkung bedeutet, daß dann in der Nachbarschaft des betreffenden Punktes die Fläche die xy -Ebene nicht trifft und daß auch umgekehrt dann, wenn die xy -Ebene in der Umgebung einer Nullstelle von $z = f(x, y)$ nicht getroffen wird, ein eigentliches Maximum oder Minimum der Fläche vorliegen muß.

Zusatz: Den am Beginn dieses Paragraphen ausgesprochenen und bewiesenen Satz kann man ohne weiteres auf Funktionen beliebig vieler Variablen übertragen. Auch der Beweiskgang läßt sich leicht den neuen Verhältnissen anpassen. Man muß nur in den Raum gehen. An die Stelle der x -Achse von damals tritt jetzt die x, u -Ebene; die y -Achse geht senkrecht dazu in den Raum. Statt Intervallen benutzen wir nun Umgebungen, statt Umgebungen der dort mit A und B bezeichneten Punkte nun Kisten um die entsprechenden Raumpunkte. Hiernach wird der Leser leicht den Beweis durchführen können.

Beispiel: Durch $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ wird eine nach Cartesius wegen ihrer Gestalt Cartesisches Blatt genannte Kurve dargestellt. Wir wollen ihre in der Fig. 33 skizzierte Gestalt zu bestimmen

suchen. Die Kurve ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden $y = x$, denn bei Vertauschung von x und y bleibt die Gleichung un­ge­ändert. Die Winkelhalbierende selbst wird außer in $(0,0)$ im

Punkte $x = y = \frac{3}{2} a$ getroffen, wie man sofort nachrechnet. Um aber zu erkennen, wie die Kurve in der Nähe dieses Punktes verläuft, denken wir zunächst an unser Existenztheorem. Man sieht sofort, daß in diesem Punkt seine Voraussetzungen erfüllt sind. Dann entnimmt man der Gleichung

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax},$$

daß die Kurve die Winkelhalbierende senkrecht passiert. Liegt sie aber nun in der Nähe dieses Punktes auf derselben Seite ihrer Tangente wie der Koordinatenanfang,

den sie ja auch passiert, oder auf der entgegengesetzten? Um das zu erkennen, haben wir zwei Feststellungen nötig. Einmal konstatieren wir, daß jede Gerade mit einer Gleichung von der Form $y = -x + \alpha$ die Kurve höchstens in zwei Punkten trifft. Ihre Abszissen bestimmt man ja aus der Gleichung

$$3x^2(a + \alpha) - 3x(\alpha^2 + a\alpha) + \alpha^3 = 0.$$

Hiernach führen wir Polarkoordinaten ein: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und finden als Gleichung der Kurve $r = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$. Daher liegt in jeder Richtung höchstens ein Punkt, und es wird beim Grenzübergang $\varphi \rightarrow 0$ auch $r = 0$. Diese Erkenntnis mit der erstgenannten zusammen lehrt uns, daß die Kurve im ersten Quadranten so aussieht, wie in der Figur angegeben. Denn wenn sich die Kurve in der Nähe des Schnittpunktes mit der Winkelhalbierenden erst jenseits ihrer Tangente befände, dann aber mit flacher werdendem Azimut sich unbegrenzt dem Koordinatenanfang näherte, so müßte eine jenseits von $x = y = \frac{3}{2} a$ gelegene, zur Tangente in diesem Punkt parallele Gerade gegen unsere Feststellung wegen der Symmetrie der Kurve in mindestens 4 Punkten getroffen werden. Man erkennt auch aus dieser Überlegung, daß die Kurve im Koordinatenanfang die x - und die y -Achse berührt. Diese beiden Geraden selbst werden indessen von der Kurve nur im Koordinatenanfang getroffen. Ähnliche Überlegungen lassen uns auch im zweiten und vierten Quadranten die Gestalt der Kurve erkennen. Daß sie im dritten Quadranten keine Punkte hat, entnimmt man aus der Kurvengleichung auf Grund der Tatsache, daß dort sowohl x wie y negativ sind. Die Gerade $x + y + a = 0$ ist Asymptote der Kurve, d. h. sie berührt die Kurve in einem ihrer unendlich fernen Punkte. Man erkennt das schon im Endlichen daran, daß der Kur-

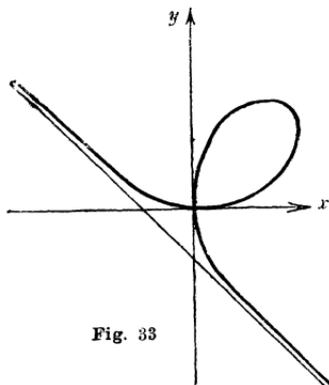


Fig. 33

venast sich dieser Geraden unbegrenzt nähert. Um sie analytisch zu bestimmen, hat man zunächst aus der Kurvengleichung den $\lim_{x \rightarrow a} \frac{y}{x}$ zu bestimmen. Dieser Grenzwert gibt die Richtung der Asymptote. Denn er gibt an, in welcher Richtung die Kurve ins Unendliche geht. Dividiert man die Kurvengleichung durch x^2 und läßt $x \rightarrow \infty$ streben, so findet man $\lim_{x \rightarrow a} \frac{y}{x} = -1$. Daher schneidet man nun die Kurve mit den Geraden $y = -x + \alpha$ und hat noch α so zu bestimmen, daß möglichst viele Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve ins Unendliche fallen. Der Schnitt führt zu der Gleichung von S. 124 Mitte. Ihr Grad wird möglichst klein, wenn man $\alpha = -a$ setzt. Daher wird $y = -x - a$ Asymptote.

Der Koordinatenanfang erweist sich als ein singulärer Punkt der Kurve, und zwar hier speziell als ein Doppelpunkt, weil ihn zwei Äste der Kurve passieren. Dort verschwinden ja auch die beiden ersten partiellen Ableitungen. Differenziert man also die Kurvengleichung zweimal nach x , um die Richtungen der Kurvenäste im Doppelpunkt zu finden, so erhält man:

$$6x + 6y \cdot y' + 3y^2 y'' - 6ay' - 3axy'' = 0.$$

Hieraus findet man nun natürlich für $x = y = 0$ nur die eine Richtung $y' = 0$; die andere $y' = \infty$ würde man erhalten, wenn man die Umkehrfunktion differenziert hätte.

Wir wählen noch ein zweites lehrreiches *Beispiel*, das wir der Theorie der sog. divergierenden Parabeln entnehmen. Wir betrachten die Kurve

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c) \quad (0 < a < b < c)$$

Ersichtlich besitzt sie nur da reelle Punkte, wo die rechte Seite positiv ist. Das ist zwischen a und b einerseits, sowie rechts von c andererseits der Fall. Weiter ist die Funktion an jeder x -Stelle endlich und stetig, wächst aber bei ins Unendliche wachsendem x über alle Grenzen. Zwischen a und b muß sie daher beschränkt sein.

Da sie außerdem symmetrisch zur x -Achse ist, so muß sie ungefähr aussehen, wie in Fig. 34 gezeichnet. (Daß sie in den drei Punkten a, b, c die x -Achse senkrecht trifft, rechnet man ja sofort nach.) Der geschlossene Zug zwischen a und b ist ein konvexes Oval, d. h. er kann keine Einbuchtungen haben. Die genaue mathematisch begriffliche Formulierung dieser Aussage ist die: Die Verbindungsstrecke zweier Punkte des Ovalinneren trifft (zwischen diesen beiden Punkten) die Kurve nicht. Andernfalls würde eine solche

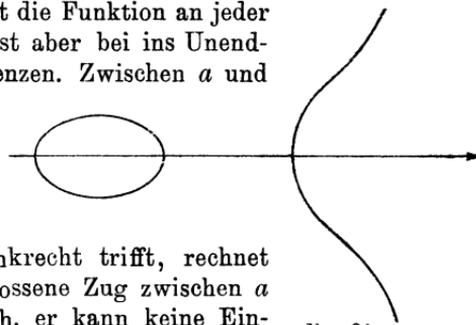


Fig. 34.

Gerade die Kurve mindestens viermal treffen. Das kann aber bei einer Kurve dritter Ordnung nie eintreten. Auch die Gestalt des unendlichen Zuges kann man noch etwas besser festlegen. Ich behaupte, er besitzt zwei zur x -Achse symmetrisch gelegene Wendepunkte. Dazu verfolge ich den Kurvenzug von seinem Schnitt mit der x -Achse an. Er setzt dort senkrecht ein. Gehe ich nach oben weiter, so muß seine Tangentenrichtung alsbald flacher werden. Sie kann aber nicht unbegrenzt sich der Horizontalen nähern, da sonst die Tangenten auch noch das Oval in zwei Punkten, die Kurve also im ganzen in vier Punkten schnitten (zwei fallen immer im Berührungspunkt zusammen). Das wären wieder zuviel Schnittpunkte. Wenn sie also doch immer flacher würde, so müßte sie sich einer Grenzlage nähern, die flacher ist als die y -Achse. Man entnimmt aber der Ableitung

$$y' = \frac{(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

daß ihr Limes für $x \rightarrow \infty$ wieder ∞ ist. Also muß irgendwann die Tangentenrichtung wieder beginnen steiler zu werden. Dort liegt aber nach den Erörterungen auf S. 79 ein Wendepunkt der Kurve. Man kann auch noch zeigen, daß auf jeder Seite der x -Achse nur einer liegt. Wir wollen das aber nicht mehr weiter ausführen. Läßt man b und c zusammenrücken, so sieht man wie ein Doppelpunkt entsteht. Fallen a , b , c alle drei zusammen, so kommt der Spitzentypus von Fig. 32 heraus. Fallen aber a und b zusammen, so schrumpft das Oval zu einem Einsiedlerpunkt zusammen.

Über die Auflösung von Gleichungssystemen. Mit Rücksicht auf spätere Anwendung im zweiten Band wollen wir hier noch die Frage behandeln, wann es zwei Funktionen $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ gibt, die das Gleichungssystem $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ lösen. Die Entscheidung darüber wird im allgemeinen durch das Verschwinden oder Nichtverschwinden der sog. Funktionaldeterminante

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

gegeben. Wir wollen zunächst folgenden Satz beweisen: *Die Funktionen $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ seien in einem gewissen Bereich stetig. Für einen inneren Punkt x_0, y_0 desselben sei $u_0 = f(x_0, y_0)$, $v_0 = g(x_0, y_0)$. In der Umgebung dieses Punktes sollen die vier partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren und stetig sein. Ferner soll in diesem Punkt die Funktionaldeterminante $\frac{d(u, v)}{d(x, y)}$ nicht verschwinden. Dann gibt es zwei in einer Umgebung von u_0, v_0 stetige Funktionen $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, die der Gleichung genügen, und für die $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$. Sie haben außerdem bei u_0, v_0 stetige Ableitungen.*

Der Beweis beruht auf unserem zu Beginn des Paragraphen bewiesenen Satz. Wenn die Funktionaldeterminante nicht verschwindet, muß mindestens eine der vier partiellen Ableitungen von Null verschieden sein. Es sei etwa $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Dann kann ich nach dem Zusatz S. 123 $u - f(x_0, y) = 0$ nach y auflösen. Ich finde eine Funktion $y = \bar{y}(u, x_0)$, die in einer gewissen Umgebung von u_0 definiert und eindeutig ist. Was ich aber hier für $x = x_0$ gemacht habe, kann ich auch für die x einer gewissen Umgebung von x_0 machen. Denn wegen der Stetigkeit ist auch da noch $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. So erhalte ich eine Funktion $y = \bar{y}(u, x)$ der beiden Variablen u und x . Diese Funktion trage ich nun in die zweite Gleichung ein. So erhalte ich $v - g(x, \bar{y}(u, x)) = 0$, und es ist $v_0 - g(x_0, \bar{y}(u_0, x_0)) = 0$. Ich habe nun noch zu zeigen, daß ich hier wieder in der Umgebung von v_0, u_0 nach x auflösen kann. Dazu muß ich nur wissen, daß die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial x}$ dort nicht verschwindet. Für sie findet man aber $\frac{\partial g}{\partial x} = g_x + g_y \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}$. Hier bestimmt sich aber $\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}$ aus der Gleichung $f_x + f_y \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = 0$. Also wird $\frac{\partial g}{\partial x} = g_x - g_y \cdot \frac{f_x}{f_y}$, und das kann nicht verschwinden, weil die Funktionaldeterminante nicht verschwindet. Daher kann ich nun wieder auflösen und finde $x = x(u, v)$. Trage ich das in $y = \bar{y}(u, x)$ ein, so habe ich noch $y = y(u, v)$. Im ganzen habe ich also die Auflösung $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ gefunden.

Nun bleibt noch die Stetigkeit und die zum Teil schon benutzte Differenzierbarkeit zu beweisen. Wir haben das bis jetzt verschoben im Interesse einer glatten Gedankenentwicklung. Beim Nachweis der Stetigkeit reduziert sich alles darauf, daß nach dem Zusatz S. 123 die Auflösung von $u - f(x, y) = 0$ nach y in der Umgebung von u_0, x_0 eine stetige Funktion der beiden Variablen u, x ergibt. Ebenso ergibt sich die Differenzierbarkeit.

Wenn an einer Stelle die Funktionaldeterminante verschwindet, so läßt sich ohne weiteres keine allgemeine Aussage darüber machen, ob eine Lösung existiert oder nicht. Wir wollen nur noch einen Fall betrachten, nämlich den, daß in einem Bereich der x, y -Ebene die Funktionaldeterminante an jeder Stelle verschwindet. Dann ist die Auflösung sicher nicht möglich. Es ist vielmehr $g(x, y)$ als Funktion von $f(x, y)$ darstellbar, das will sagen, daß der Wert, den $g(x, y)$ an einer Stelle des Bereiches annimmt, feststeht, so wie dort der Wert von $f(x, y)$ bekannt ist.

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des Satzes bei einer Variablen, der besagt, daß eine stetige Funktion, deren Ableitung in einem Intervall überall verschwindet, dort konstant ist. Der Beweis ergibt sich genau an Händen der seitherigen Entwick-

lungen. Wenn nämlich die beiden ersten Ableitungen überall im Bereich verschwinden, so sind die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ von x und y unabhängig. Dann ist der gewünschte Beweis bereits erbracht. Wenn aber an einer Stelle und damit wegen der Stetigkeit in einer gewissen Umgebung derselben eine Ableitung, etwa $\frac{\partial f}{\partial y}$, nicht verschwindet, so können wir die seither befolgte Schlußweise zunächst einhalten, bis wir zur Berechnung der partiellen Ableitung von $g(x, y(u, x))$ nach x kommen. Diese erweist sich aber nun als Null, so daß in jener Umgebung eben $g(x, y(u, x))$ nicht von x , sondern nur von u abhängt. Dann ist also $g(x, y)$ als Funktion von f dargestellt.

§ 4. Die Taylorsche Formel. Bei einer Variablen handelte es sich darum, die Funktion $f(x+h)$ durch ein nach Potenzen von h fortschreitendes Polynom zu approximieren. Hier wird es sich darum handeln, die Funktion $f(x+h, y+k)$ durch eine nach Potenzen von h und k fortschreitende ganze rationale Funktion anzunähern. Dies gelingt sehr leicht durch einen kleinen Kunstgriff. Für $t=1$ geht die Funktion

$$f(x+ht, y+kt) = F(t)$$

in $f(x+h, y+k)$ über. Wir wollen nun die Funktion $F(t)$ nach der Maclaurinschen Formel behandeln und dann $t=1$ eintragen. Wir wollen so zunächst den Mittelwertsatz übertragen. Als Wert der ersten Ableitung finden wir:

$$F'(t) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x+ht, y+kt) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x+ht, y+kt).$$

Daher wird die Differenz

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= f(x+h, y+k) - f(x, y) \\ &= h \frac{\partial f}{\partial x}(x+\vartheta h, y+\vartheta k) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x+\vartheta h, y+\vartheta k). \end{aligned}$$

Dies ist also unsere Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Die Voraussetzungen, die diese Operation legal machen, sind offenbar die, daß in einem die beiden Stellen x, y und $x+h, y+k$ sowie ihre geradlinige Verbindung $x+ht, y+kt$ ($0 \leq t \leq 1$) enthaltenden Gebiet $f(x, y)$ samt allen bei der Betrachtung auftretenden Ableitungen endlich und stetig ist. An dieser Voraussetzung halten wir fest, wenn wir jetzt zum allgemeinen Fall der Taylorsche Formel übergehen. Dann ist nämlich auch in allen Fällen, wie wir S. 119 sahen, die Reihenfolge der verschiedenen Differentiationen nach x und y gleichgültig. Wir finden so:

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ferner finden wir:

$$F'''(t) = h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Man sieht, wie hier jede Ableitung in h und k homogen ist, d. h. in jedem Term ist die Summe der Exponenten von h und k dieselbe. Ferner sieht man, daß als Koeffizienten immer die Binomialkoeffizienten auftreten. Wir schreiben die Schlußformel noch beim Vorgehen bis zur zweiten Ableitung auf. Es wird dann:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ + \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+\vartheta h, y+\vartheta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\vartheta h, y+\vartheta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+\vartheta h, y+\vartheta k) \right) \cdot \\ \underline{\hspace{10em} 2! \hspace{10em}}$$

§ 5. **Theorie der Maxima und Minima.** Wir wollen die Taylorsche Formel verwenden, um Kriterien für die höchsten und tiefsten Punkte einer Fläche zu finden. Sei ein solcher bei x_0, y_0 gelegen, so haben wir seine z -Koordinate mit den z -Koordinaten der Nachbarpunkte zu vergleichen. Dazu betrachten wir die Differenz

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k) \\ + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k).$$

Haben wir nun etwa ein Maximum, so muß für alle h und k einer gewissen Umgebung von $(0, 0)$ immer $f(x_0+h, y_0+k) < f(x_0, y_0)$ sein. Verschwinden nun nicht die beiden partiellen ersten Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ an dieser Stelle, so könnten wir wegen ihrer Stetigkeit eine Umgebung von x_0, y_0 angeben, in welcher sie nicht Null werden, also auch das gleiche Vorzeichen haben wie in x_0, y_0 selbst. Wenn wir aber dann in h und k die Vorzeichen ändern, so ändert auch die rechte Seite des Mittelwertsatzes ihr Vorzeichen; also kann die Differenz $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ nicht immer dasselbe Vorzeichen haben. Für das Auftreten eines Maximums oder eines Minimums ist also eine notwendige Bedingung die, daß die beiden¹⁾ partiellen Ableitungen p und q an der betreffenden Stelle verschwinden. Geometrisch bedeutet diese Bedingung, daß die Tangentialebene des Flächenpunktes horizontal ist. Wir schalten, um das klar zu sehen, eine kleine *Betrachtung über die Tangentialebene* ein. Ihre Definition beruht auf einem Satz. Dieser lautet: Die Tangenten an beliebige Flächenkurven durch den betreffenden Punkt liegen in einer Ebene. Diese heißt

1) Wenn nur $f_y \neq 0$ wäre, so setze man $h=0$ und mache auf Grund des wechselnden Vorzeichens von k denselben Schluß wie vorhin.

Tangentialebene der Fläche in dem betrachteten Punkt. Wir wollen das hier¹⁾ allein zeigen für den uns interessierenden Fall eines Flächenpunktes, in dem die ersten Ableitungen verschwinden. Wir wollen die Fläche mit irgendeiner vertikalen Ebene schneiden und zeigen, daß alle Schnittkurven diesen Punkt horizontal passieren. Wir haben einzutragen $y \equiv m(x - x_0) + y_0$. Dann wird die Gleichung der Schnittkurve $z = f(x, m(x - x_0) + y_0)$. Also ist der Richtungstangens ihrer Tangente in x_0, y_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)m = 0$$

Sie ist also wieder horizontal.

Diese Bedingung horizontaler Tangentialebene ist nun natürlich nicht hinreichend für die Existenz eines Maximums oder Minimums. Man braucht nur etwa an einen Gebirgssattel zu denken oder an das hyperbolische Paraboloid $z = xy$ im Koordinatenanfang. Dazu ist es ja auch nur eine gemeinsame Bedingung für Maximum und Minimum. Um die verschiedenen Fälle zu trennen, ziehen wir das nächste Glied der Taylorentwicklung heran. Da aber die beiden Ableitungen p und q verschwinden, so erhalten wir eine Abschätzung der Differenz $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ durch die zweiten Ableitungen. Wir haben nämlich:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) \\ + hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k).$$

Hier muß nun für alle h und k einer gewissen Umgebung von $h = 0, k = 0$ die rechte Seite immer positiv sein, wenn ein Minimum vorliegen soll, sie muß immer negativ sein, wenn ein Maximum da sein soll. Wegen der Stetigkeit der Ableitungen genügt es also, zu verlangen, daß für alle h, k einer gewissen Umgebung von Null $R \equiv h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ ständig positiv bzw. negativ sei. Wir untersuchen jetzt die Bedingungen, welche dies für die Ableitungen nach sich zieht, die hier als Koeffizienten der *quadratischen Form* in h und k auftreten. Wir wollen zunächst annehmen, daß keine der Ableitungen

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

verschwindet. Dann bringen wir R in diese Gestalt:

$$f_{xx} \left(h + k \frac{f_{xy}}{f_{xx}} \right)^2 + k^2 \left(\frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}} \right) \equiv R.$$

1) Vgl. auch Bd. 2 Kap. VII § 6

Hieraus erkennt man, daß eine hinreichende Bedingung für ein Maximum die ist, daß $f_{xx} < 0$ und daß $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$. Daraus folgt noch $f_{yy} < 0$. Ebenso ist hinreichend für ein Minimum, daß $f_{xx} > 0$ und daß $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$. Daraus folgt noch $f_{yy} > 0$. Wie weit sind aber diese Bedingungen notwendig? Unsere seitherige Überlegung zeigt nur die Notwendigkeit der Bedingung $R \leq 0$ beim Maximum und der Bedingung $R \geq 0$ beim Minimum. Sei zunächst noch $f_{xx} \neq 0$; dann ist ersichtlich notwendig beim Maximum, daß $f_{xx} < 0$ und daß $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \geq 0$. Beim Minimum ist notwendig, daß $f_{xx} > 0$ und $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \geq 0$. Wenn aber $f_{xx} = 0$, so sei zunächst noch $f_{yy} \neq 0$. Dann zeigt die gleiche Überlegung, daß notwendig auch $f_{xy} = 0$ sein muß. Wenn nun aber alle Ableitungen verschwinden, so können wir gar keine Schlüsse ziehen. Wir müssen die höheren Ableitungen betrachten. Wir gehen darauf nicht mehr ein.

Register.

- Abgeschlossenes Intervall** 11
Ableitung, erste 62
 —, höhere 79
 —, partielle 69
absolute Konvergenz 42
algebraische Kurve 8
algebraische Funktion
 3. 8 ff. 69
allgemeines Konvergenzprinzip 40
 — — bei Funktionen 54
alternierende Reihen 39
Axiom 12
Axiome der Arithmetik
 12
Axiom der Intervallschachtelung 20
Bedingte Konvergenz
 43
Bereich 116
Berührung n -ter Ordnung 102
 beschränkt 34. 116
binomischer Satz 70. 97
Cartesisches Blatt 123
Cosinus 91
Cykloide 5
Dedekindscher Schnitt
 30
Dezimalbrüche 25
Differentialquotient 61
 64
Differentiationsregeln
 65
Differentiationsreihenfolge 119
Divergenz 32
Doppellimes 112
doppelter Limes 112
Eindeutige Funktion 2
Erklärung der Zeichen
 $>$, $<$ 11. 13
 — des Zeichens $|a|$ 17
 — — — $n!$ 1
 — — — ∞ 16
explizite Funktion 2
Exponentialfunktion 71. 91
Extrem 89
Fakultät 1
 fast alle 17/18
Fundamentalsatz der Algebra 7
Funktion 1
Funktionaldeterminante 126
Gebiet 116
Gleichungssystem 126
graphische Darstellung 3
Grenzbegriff 16. 27. 51
Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 52
 — $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 73
Harmonische Reihe 37
Häufungspunkt 20. 24. 116
 hinterer Differentialquotient 64
 hyperbolische Funktionen 94
Implizite Funktion 2. 68 120
Interpolation 99
Interpolationsformeln
 100
Intervall 11
Intervallschachtelung 21
inverse Funktion 6. 59
Irrationalität von e 76
Irrationalzahl 25
Kettenregel 67
 konkav 79
Konvergenz einer Reihe
 32
 — einer Zahlenfolge 40
Konvergenzkriterien 35
 konvex 79
Kurve 4
Kurvendiskussion 80
Limes 16
Logarithmentafeln 95
logarithmische Differentiation 76
Logarithmus 71. 92
Maclaurinsche Formel
 89
Maximum 8. 59. 78. 89
mehrdeutige Funktion 2
Minimum 8. 59. 78. 89
mittelbare Funktion 59
Mittelwertsatz 82. 104
 monoton 54
Nichtabgeschlossenes Intervall 11
Normale 77
Obere Grenze 31. 59
offenes Intervall 11
Parameterdarstellung 6
partielle Ableitung 69
Peanokurve 107
Potenzreihe 91
Prinzip der Reihenvergleichung 35
Rationale Funktionen
 3 6
Rechnen mit $>$, $<$ 13
 — — $|a|$ 19
 — — \lim 19
 — — Irrationalzahlen 27
Reihenvergleichung 35
Restglied der Taylorschen Formel 88
Rollescher Satz 82
Schnitt in n zusammenfallenden Punkten 101
Sinus 91
Stetigkeit 56. 115
Summe einer unendlichen Reihe 32
Tangente 62 77
Tangentialebene 130
Taylorsche Formel 87
 — Reihe 90
transzendente Funktion
 3. 8
Überall dicht 15
Umgebung 111
Umkehrungsfunktion 6. 59 67
unbedingte Konvergenz
 43
unendliche Reihen 32
Ungleichung 13
untere Grenze 31. 59
Vorderer Differentialquotient 64
Wendepunkt 80
Zahlengerade 14
Zykloide 5

Von Prof. Dr. *L. Bieberbach* erschien ferner:

Integralrechnung. Mit 25 Fig. [VI u. 142 S.] Steif geh. M. 10.20.

Bringt die Hauptsätze aus der Theorie der Funktionenreihen und als Musterbeispiel eine elementare, aber eindringende Behandlung der Fourierschen Reihen und endlich die Behandlung der Doppel- und Kurvenintegrale. Eine Einleitung in die Funktionentheorie einer komplexen Variablen beschließt das Werk.

Lehrbuch der modernen Funktionentheorie. Bd. I: Elemente der Funktionentheorie. Mit 80 Fig. im Text. [VI u. 314 S.] gr. 8. 1921. Geh. M. 70.—, geb. M. 80.—

Das Werk gibt eine für die Hand der Studierenden bestimmte Darstellung der modernen Funktionentheorie komplexer Variabler. Der erste Band behandelt unter Verschmelzung Riemannschen und Weierstraßischen Geistes die Elemente der allgemeinen und der speziellen Funktionentheorie, der zweite wird die Auswirkung der Methoden in den modernen funktionentheoretischen Arbeitsgebieten zum Gegenstand haben.

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen. Von Geh. Hofrat Dr. *R. Fricke*, Prof. an der Techn. Hochsch. Braunschweig. gr. 8. I. Bd.: Differentialrechnung. 2. u. 3. Aufl. Mit 129 in d. Text gedr. Fig., 1 Samml. v. 253 Aufg. u. 1 Formelstab. [XII u. 388 S.] 1921. Geh. M. 80.—, geb. M. 96.—. II. Bd.: Integralrechnung. 2. u. 3. Aufl. Mit 100 in d. Text gedr. Fig., 1 Samml. v. 242 Aufg. u. 1 Formelstab. [IV u. 406 S.] 1921. Geh. M. 80.—, geb. M. 96.—

Das Problem des Unterrichts in den Grundlagen der höheren Mathematik an den Technischen Hochschulen ist seit mehr als zwei Jahrzehnten nicht nur wiederholt besprochen und in Monographien behandelt, sondern hat auch die Gestaltung der neueren Lehrbuchliteratur wesentlich beeinflußt. Auch das vorliegende Lehrbuch ist aus dieser Bewegung hervorgewachsen.

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Ursprünglich Übersetzung des Lehrbuches von *J. A. Serret*, seit der 3. Aufl. gänzlich neu bearbeitet von Geh. Reg.-Rat Dr. *G. Scheffers*, Prof. an der Techn. Hochschule Berlin. gr. 8. I. Band: Differentialrechnung. 6. u. 7. Aufl. Mit 70 Fig. [XVI u. 670 S.] 1915. Geh. M. 82.70, geb. M. 96.—. II. Band: Integralrechnung. 6. u. 7. Aufl. Mit 108 Fig. [XII u. 612 S.] 1921. Geh. M. 86.70, geb. M. 100.—. III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnungen. 4. u. 5. Aufl. Mit 64 Fig. [XIV u. 735 S.] 1914. Geh. M. 86.70, geb. M. 100.—

„Die rasche Aufeinanderfolge der Auflagen spricht zur Genüge für die Güte des Buches, das auch wegen der Reichhaltigkeit des Stoffes und der leicht faßlichen Darstellung Lehrenden und Lernenden aufs wärmste empfohlen werden kann.“ (Archiv der Mathematik u. Physik.)

Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung. Von Hofrat Dr. *E. Czuber*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. I. Bd. gr. 8. 4., sorgf. durchges. Aufl. Mit 128 Figuren. [XII u. 569 S.] 1918. Geh. M. 60.—. II. Band. 5. Aufl. Mit 119 Figuren. [XI u. 599 S.] 1921. Geh. M. 60.—, geb. M. 72.—

„Die Darstellung ist ungemein klar und einfach, die Anordnung des Stoffes musterhaft, die Anwendungen, besonders aus dem Gebiete der Geometrie, vortrefflich ausgewählt und vielfach durchaus originell. Auch die Ausführung der zahlreichen Figuren ist zu loben.“ (Archiv d. Math. u. Phys.)

Einführung in die höhere Mathematik. Von Hofrat Dr. *E. Czuber*, Prof. an der Techn. Hochschule Wien. 2. Aufl. Mit 114 Fig. [X u. 382 S.] gr. 8. 1921. Geh. M. 70.—

Das Buch umfaßt eine recht eingehende Entwicklung des Zahlbegriffs, die Darstellung von Zahlen durch unendliche arithmetische Prozesse, eine Einführung in die Funktionentheorie, im Anschlusse daran die Elemente der Differentialrechnung, weiter die Determinantentheorie, endlich die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.

Höhere Mathematik für Ingenieure. Von Prof. Dr. *J. Perry*. Autor. dtsh. Bearb. v. Geh. Hofrat Dr. *R. Fricke*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Braunschweig in Verbindung mit *F. Süchting*, Prof. a. d. Bergakad. in Clausthal. 3. Aufl. M. 106 i. d. Text gedr. [XVI u. 450 S.] gr. 8. 1919. Geh. M. 60.—, geb. M. 66.—

„Hier ist ein Lehrmittel entstanden, das bei der Reichhaltigkeit der in die mathematischen Aufgaben hineingearbeiteten Sammlung von Anwendungsbeispielen weit mehr bietet als ein gewöhnliches Lehrbuch der Integral- und Differentialrechnung.“ (Zentralbl. d. Bauverwaltg.)

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Unter Mitwirkung von Sachgenossen herausgegeben von
Oberstudiendir. Dr. W. Liegmann u. Oberstudienrat Prof. Dr. A. Witting
Mit zahlreichen Figuren. kl. 8. In kartonierten Bänden je M. 5.—

Bisher erschienene Bändchen:

- Der Begriff d. Zahl in seiner logisch. u. histor. Entwicklung.** Von H. W. Leitner. 2. Aufl. (2.)
Ziffern u. Ziffernsysteme. Von E. Söffler. 2. Aufl. I: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. (Bd. 1.) II: Die Zahlzeichen im Mittelalter und in der Neuzeit. (Bd. 34.)
Die sieben Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. W. Leitner. 2. Aufl. (Bd. 7.)
Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. I: Die Differential-, II: Die Integralrechnung. (Bd. 9 u. 41.)
Wahrscheinlichkeitsrechnung. V. O. Meißner. 2. Aufl. I. Grundlehren. (4.) II. Anwendungen. (33.)
Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von A. Leman. (Bd. 19.)
Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Liegmann. 2. Aufl. (Bd. 3.)
Darstellende Geometrie d. Geländes u. verw. Anwendungen der Methode der kotierten Projektionen. V. R. Rothe. 2. Aufl. (Bd. 35/36.)
Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. (Bd. 26.)
Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. (Bd. 6.)
Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Süßke. (Bd. 11.)
Nichteuclidische Geometrie in der Kugelfläche. Von W. Dieck. (Bd. 31.)
Einführung in die Trigonometrie. Von A. Witting. (Bd. 43.)
Einführung in die Homographie. Von P. Ludeq. I: Die Funktionsleiter. (Bd. 28.) II: Die Zeichnung als Rechenmaschine. (Bd. 37.)
Abgekürzte Rechnung nebst einer Einführ. in die Rechnung mit Funktionsstufen insbes. in d. Rechnung mit Logarithmen. Von A. Witting. (42.)
In Vorbereitung: Doeblmann, Mathematik und Architektur. Kirchberger, Atom- und Quantentheorie. Schüge, Die mathem. Grundlagen der Lebensversicherung. Winkelmann, Der Kreisfel. Wolff, Selbmesen und Höhenmesen.
- Theorie und Praxis des logarithm. Rechnens.** V. A. Röhrberg. 2. Aufl. (Bd. 23.)
Die Anfertigung mathem. Modelle. (Für Schüler mittl. Kl.) Von K. Giebel. (Bd. 16.)
Karte und Krok. Von H. Wolff. (Bd. 27.)
Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Baruch. (Bd. 29.)
Die mathem. Grundlagen der Variations- u. Vererbungslehre. V. P. Riebesell. (Bd. 24.)
Mathematik u. Biologie. Von M. Schips. (44.)
Mathematik und Malerei. 2 Teile in 1 Bde. Von G. Wolff. (Bd. 20/21.) [(Bd. 32.)
Der Goldene Schnitt. Von H. E. Uimerding. Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting u. M. Gebhardt. (Bd. 15.)
Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. 2. Aufl. (Bd. 18.)
Die Quadratur des Kreises. Von E. Beutel. 2. Aufl. (Bd. 12.)
Wo steckt der Fehler? Von W. Liegmann und V. Tier. 2. Aufl. (Bd. 10.)
Gehimmnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 2. Aufl. (Bd. 13.)
Rlesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Liegmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)
Was ist Geld? Von W. Liegmann. (Bd. 30.)
Die Fallgelese. Von H. E. Uimerding. 2. Aufl. (Bd. 5.)
Jonentheorie. Von P. Bräuer. (Bd. 38.)
Das Relativitätsprinzip. Leichtfasslich dargestellt von A. Angersbach. (Bd. 39.)
Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. (Bd. 17.)
Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. 2. Aufl. (Bd. 8.)
Beobachtung des Himmels mit einfachen Instrumenten. V. Fr. Rusch. 2. Aufl. (Bd. 14.)
Mathem. Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie. Von P. Kirchberger. (Bd. 40.)

Maschinenbau. Von Ing. O. Stolzenberg, Direktor der Gewerbeschule u. d. gewerbl. Fach- und Fortbildungsschulen zu Charlottenburg. Band I: Werkstoffe des Maschinenbaues und ihre Bearbeitung auf warmem Wege. Mit 255 Abb. Kart. M. 28.—. Band II: Arbeitsverfahren. Mit 750 Abb. Kart. M. 48.—. Band III: Methodik der Sachkunde u. Sachrechnen. Mit 30 Abb. Kart. M. 19.—

„Das Bestreben, die ursächlichen Zusammenhänge in anschaulicher Art bei allen behandelten Hauptstücken klar hervorzuheben, bildet ein wesentliches Merkmal des Wertes. Zahlreiche Abbildungen unterstützen diese Absicht in bemerkenswerter Weise. Dem Buch ist eine weite Verbreitung zu wünschen, um die darin enthaltenen Früchte erfolgreicher Arbeit gleichsam als „Norm“ dem Unterricht in den Fachgewerbe- und Werkschulen zugrunde zu legen.“ (Stahl und Eisen.)

Zeitgemäße Betriebswirtschaft. Von Direktor Dr. Ing. G. Peiseler. I. Teil: Grundlagen. Geh. M. 30.—, geb. M. 34.—

Das Werk entwickelt ein umfassendes System der deutschen Betriebswirtschaft, indem es von dem wirtschaftlichen Aufbau des Einzelunternehmens (technisches Büro, Einkauf, Fertigung, Vertrieb, Selbstkostenberechnung, Preisbildung) ausgehend, alle grundlegenden Fragen, die unsere heutige Wirtschaft beherrschen (Verteilung des Ertrages, Wirtschaftsfrieden, Produktionssteigerung, Taylorsystem, verbandsmäßige Preisbildung, Geldentwertung, Auslandssteuerungslage) in ihrem inneren Zusammenhänge behandelt. Die Darstellung ist nach dem Grundsatz „Wahrheit und Klarheit“ ohne jede Parteinahme allein auf das Wohl aller Arbeitenden gerichtet, denen sie zu ihrem eigenen Nutzen und zum Wohle der allgemeinen deutschen Sache eine Fülle von Anregungen bieten wird.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

TEUBNERS TECHNISCHE LEITFADEN

Hochbau in Stein. Von Geh. Baurat H. Walbe, Prof. an der Tech. Hochsch. zu Darmstadt. Mit 302 Fig. i. Text. [VI u. 110 S.] 1920. Kart. M. 25.60. (Bd. 10.)

Veranschlagen, Bauleitung, Baupolizei, Heimatschutzgesetze. Von Stadtbaurat Fr. Schultz, Bielefeld. Mit 3 Taf. [IV u. 150 S.] 1921. Kart. M. 37.60. (Bd. 12.)

Baustoffkunde. Von Geh. Hofrat Dr. M. Foerster, Professor an der Technischen Hochschule Dresden. (Bd. 15.)

Mechanische Technologie. Von Dr. R. Escher, weil. Professor a. d. Eidgenössischen Technischen Hochschule zu Zürich. 2. Aufl. Mit 418 Abb. [VI u. 164 S.] 1921. Kart. M. 32.—. (Bd. 6.)

Grundriß der Hydraulik. Von Hofrat Dr. Ph. Forchheimer, Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 114 Fig. i. Text. [V. u. 118 S.] 1920. Kart. M. 32.80. (Bd. 8.)

In Vorbereitung befinden sich:

Höhere Mathematik. 2 Bände. Von Dr. R. Rothe, Professor an der Technischen Hochschule Berlin.

Maschinenelemente. 2 Bde. V. K. Kutzbach, Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden.

Thermodynamik. 2 Bände. Von Geh. Hofrat Dr. R. Mollier, Professor an der Technischen Hochschule Dresden.

Kolbenkraftmaschinen. V. Dr.-Ing. A. Nägel, Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden.

Dampfturbinen und Turbokompressoren. Von Dr.-Ing. H. Baer, Professor an der Technischen Hochschule zu Breslau.

Wasserkraftmaschinen und Kreiselpumpen. Von Oberingenieur Dr.-Ing. F. Lawaczek, Halle.

Grundlagen der Elektrotechnik. 2 Bände. Von Dr. E. Orlich, Professor an der Technischen Hochschule Berlin.

Elektrische Maschinen. 4 Bde. V. Dr.-Ing. M. Klotz, Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin.

I: Transformatoren und asynchrone Motoren.

II: Drehstrom-Maschinen (Synchronmaschinen).

III: Gleichstrommaschinen.

IV: Wechselstrom-Kommutatormaschinen.

Mechanische Technologie der Textilindustrie. V. Dr.-Ing. W. Frenzel-Delft.

Eisenbau. Von Dr. A. Hertwig, Prof. an der Techn. Hochschule Aachen.

Hydrographie. Von Dr. H. Gravelius, Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden.

Hochbau in Holz. Von Geh. Baurat H. Walbe, Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt.

Weitere Bände erscheinen in rascher Folge.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN