

В. Р. КУЗНЕЦОВ  
В. А. САБЕЛЬНИКОВ

# ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ГОРЕНИЕ

В.Р. КУЗНЕЦОВ,  
В.А. САБЕЛЬНИКОВ

# ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ГОРЕНИЕ



МОСКВА "НАУКА"  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1986

ББК 22.253.3

К 89

УДК 532.5

**Кузнецов В.Р., Сабельников В.А.** Турбулентность и горение. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986, 288 с.

Рассматривается с единых позиций турбулентное горение газов и ряд вопросов теории турбулентности. Объединение этих научных дисциплин в рамках одной книги предпринято впервые, и оно достигнуто благодаря широкому использованию плотностей распределений вероятностей концентраций, скорости и других величин в турбулентных потоках. Систематизированы методы вывода и замыкания уравнений для распределений вероятностей, значительное внимание уделено описанию перемежаемости. Исследуется ряд проблем горения неперемешанных газов и горения однородной горючей смеси.

Для специалистов по теории турбулентности и горения, аспирантов и студентов старших курсов.

Ил. 92. Библиогр. 475 назв.

**Рецензенты**

доктор технических наук *Г.Н. Абрамович*.

доктор физико-математических наук *Ю.С. Рязанцев*

К  $\frac{1703040000-105}{053(02)-86}$  76-86

© Издательство "Наука"  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1986

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	5
Введение .....	8
<b>Глава 1. Перемежаемость и качественный вид плотностей распределений вероятностей в турбулентных потоках .....</b>	<b>17</b>
§ 1.1. Перемежаемость в турбулентных потоках .....	17
§ 1.2. Качественная структура двухточечных и трехточечных плотностей распределений вероятностей разностей скоростей в локально однородной турбулентности .....	35
§ 1.3. Качественный вид плотности распределения вероятностей концентрации пассивной примеси в турбулентных течениях .....	38
§ 1.4. Качественный вид плотности распределения вероятностей концентрации при горении однородной смеси .....	48
<b>Глава 2. Уравнения для плотностей распределений вероятностей .....</b>	<b>54</b>
§ 2.1. Уравнение для плотности распределения вероятностей концентрации .....	55
§ 2.2. Уравнение для двухточечной плотности распределения вероятностей разности скоростей в локально однородной турбулентности .....	60
§ 2.3. Гипотезы, используемые при замыкании уравнений для распределения вероятностей .....	63
<b>Глава 3. Распределение вероятностей концентрации пассивной примеси ..</b>	<b>70</b>
§ 3.1. Уравнение для условной плотности вероятностей концентрации в турбулентной жидкости. Граничные условия .....	71
§ 3.2. Гипотеза замыкания для слагаемого, описывающего процесс смешения до молекулярного уровня .....	74
§ 3.3. Гипотеза замыкания для конвективного слагаемого .....	80
§ 3.4. Распределение вероятностей концентрации в однородной турбулентности .....	87
§ 3.5. Приближенное описание распределения вероятностей концентрации в свободных турбулентных течениях .....	93
1. Решение на оси или плоскости симметрии (94). 2. Решение в области максимального поперечного градиента средней концентрации (97). 3. Решение на краю турбулентного потока (98) 4. Приближенный метод определения распределения вероятностей концентрации и коэффициента перемежаемости (101).	
§ 3.6. Математические свойства уравнения для плотности вероятностей концентрации в свободных турбулентных течениях. Постановка краевой задачи .....	104
1. Основные уравнения (104). 2. Автомодельная задача (107) 3. Общие свойства уравнения для автомодельной задачи (109). 4. Постановка краевой задачи (112). 5. Решение на особой линии $\xi = 0$ (113). 6. Решение на особой линии $\xi = \infty$ (120).	
§ 3.7. Численное решение краевой задачи .....	127



§ 3.8. Структура изоскалярных поверхностей в турбулентных потоках . . .	132
1. Изоскалярные поверхности, расположенные внутри турбулентной жидкости (133). 2. Предельные изоскалярные поверхности (135). 3. Связь структуры изоскалярных поверхностей с граничными условиями и перемежаемостью (136).	
<b>Глава 4. Статистические характеристики мелкомасштабной турбулентности</b>	<b>139</b>
§ 4.1. Гипотеза подобия . . . . .	142
§ 4.2. Связь характеристик турбулентной и нетурбулентной жидкостей . . .	146
§ 4.3. Взаимодействие между турбулентной и нетурбулентной жидкостями	149
§ 4.4. Влияние вязкости на структуру мелкомасштабных пульсаций . . . . .	156
§ 4.5. Экспериментальные исследования структуры мелкомасштабной части спектра турбулентности . . . . .	159
<b>Глава 5. Турбулентное диффузионное горение</b> . . . . .	<b>166</b>
§ 5.1. Газодинамические эффекты при турбулентном диффузионном горении . . . . .	170
§ 5.2. Влияние пульсаций температуры и концентрации на среднюю скорость реакций . . . . .	178
§ 5.3. Влияние излучения на характеристики турбулентного диффузионного горения . . . . .	181
§ 5.4. Влияние скорости химических реакций на турбулентное диффузионное горение . . . . .	185
1. Очень малые отклонения от термодинамического равновесия (186). 2. Влияние скорости химических реакций на не слишком большие отклонения от термодинамического равновесия (187). 3. Условие существования турбулентного диффузионного пламени (197).	
§ 5.5. Образование окислов азота при турбулентном диффузионном горении . . . . .	199
§ 5.6. Турбулентное горение частично перемешанных газов . . . . .	205
<b>Глава 6. Турбулентное горение однородной смеси</b> . . . . .	<b>215</b>
§ 6.1. Основные проблемы . . . . .	215
§ 6.2. Механизм турбулентного горения . . . . .	223
§ 6.3. Влияние различий в коэффициентах молекулярного переноса на структуру пламени в лидирующих точках . . . . .	228
§ 6.4. Спектральное представление скорости распространения пламени . . .	232
§ 6.5. Влияние неустойчивости пламени на турбулентное горение однородной смеси . . . . .	234
§ 6.6. Критериальное описание турбулентного горения однородной смеси .	242
§ 6.7. Предельно возможная интенсивность процесса турбулентного горения однородной смеси . . . . .	247
§ 6.8. Перспективы дальнейшего развития теории турбулентного горения однородной смеси . . . . .	255
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>257</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>265</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время значительная часть используемой энергии вырабатывается при сжигании газов или испаренного жидкого топлива в турбулентном потоке. По-видимому, такой способ получения энергии еще долго будет оставаться преобладающим, в особенности на транспорте. Поэтому изучение турбулентного горения представляет значительный практический интерес.

В исследованиях турбулентного горения наблюдается заметный разрыв между фундаментальными и прикладными разработками, что сдерживает развитие техники, поскольку устройства для сжигания топлива достигли высокого совершенства и дальнейшее увеличение их эффективности невозможно без тщательного анализа гидродинамических особенностей камер сгорания, в частности характеристик турбулентности. Между тем в последнее время теория турбулентности значительно продвинулась вперед. Разумеется, удовлетворительное количественное описание всех турбулентных течений с единых позиций в настоящее время невозможно. Однако достигнуто качественное понимание многих особенностей турбулентности, а накопленный экспериментальный материал и соображения размерности позволяют достаточно точно оценивать характеристики турбулентности в широком классе течений. С другой стороны, сейчас ясны и многие особенности горения газов в ламинарном потоке. Поэтому возникают предпосылки создания теории турбулентного горения.

Предлагаемая монография ставит своей целью изложить с единой точки зрения основы этой теории, сформулированные к настоящему времени. Выбор круга проблем, на которых иллюстрируются основные понятия, идеи и методы теории, в значительной мере продиктован собственными исследованиями авторов. Уже самые начальные этапы этих исследований показали, что создание теории турбулентного горения невозможно без развития собственно теории турбулентности и, в частности, тех ее разделов, которые были менее всего изучены (перемежаемость, распределения вероятностей различных гидродинамических параметров). Как это часто случается, исследование указанных вопросов приобрело самостоятельное значение, и хочется надеяться, что полученные результаты повлияют на развитие теории турбулентности. Высказанные соображения определили название книги и отбор материала. Несмотря на определенную уязвимость и тенденциозность, такой подход, по-видимому, наилучшим образом позволяет выполнить поставленную задачу. Теория турбулентного горения находится в стадии становления. Авторы сознают, что предлагаемая моно-

графия – лишь небольшой (но тем не менее необходимый) шаг на пути решения проблем турбулентности и турбулентного горения.

Монография состоит из введения, шести глав и заключения. За исключением § 1.4, четыре первые главы посвящены исследованию течений без химических реакций. Это исследование проведено на основе уравнений для плотностей распределений вероятностей различных характеристик турбулентности.

В главе 1 изучается перемежаемость турбулентных течений и ее влияние на качественный вид плотностей распределений вероятностей скорости и концентрации. В главе 2 дается вывод уравнений для плотностей распределений вероятностей различных гидродинамических величин и проведен обзор известных методов замыкания этих уравнений.

В главе 3 анализируется уравнение для плотности распределения вероятностей концентрации пассивной примеси. Получены, проанализированы и сопоставлены с экспериментом решения этого уравнения. В главе 4 исследуется уравнение для плотности распределения вероятностей разности скоростей в двух точках, расстояние между которыми принадлежит инерционному интервалу спектра турбулентности.

Результаты, полученные в первых четырех главах, используются для анализа диффузионного горения (глава 5) и горения однородной смеси (глава 6). Главный результат главы 5 – метод расчета основных характеристик турбулентного диффузионного горения.

В методе учтен цепной характер химических реакций. Показано, что влияние турбулентности на условия протекания химических реакций определяется скалярной диссипацией. Дан метод расчета концентрации окислов азота.

В главе 6 построена качественная схема, в рамках которой учитывается влияние неустойчивости пламени и различий в коэффициентах молекулярного переноса на процесс горения однородной смеси. Получен ряд нетривиальных критериев, характеризующих распространение пламени. На основе теории локально однородной турбулентности дана оценка предельной теплонапряженности процесса горения и показано, что эта теплонапряженность существенно ниже теплонапряженности в нормальном пламени, если интегральный масштаб турбулентности много больше, чем толщина нормального фронта пламени.

Развитие теории турбулентности и турбулентного горения, как и развитие любой физической теории, невозможно без тесной и непрерывной связи с экспериментом. Поэтому большое внимание уделяется подбору и анализу экспериментальных данных, иллюстрирующих принятые гипотезы и сделанные выводы. Развитые в монографии методы могут быть использованы в научных и прикладных задачах, связанных с исследованием влияния турбулентности на протекание химических реакций (например, в химической технологии, в газодинамических лазерах и т.д.). Авторы надеются, что данная монография будет способствовать дальнейшему взаимному проникновению и обогащению методов теории турбулентности и теории турбулентного горения и стимулировать новые исследования на стыке этих двух теорий.

Все основные физические идеи и математический аппарат теории турбулентности и теории горения даются в тексте только в том объеме, который

находит непосредственное применение в теории турбулентного горения. Дополнительные сведения по теории турбулентности, теории горения, а также широко используемой в монографии теории подобия можно найти в специальной литературе (см. Бэтчелор [1953], Таунсенд [1956], Хинце [1959], Монин и Яглом [1965, 1967], Франк-Каменецкий [1967], Щетников [1965], Вильямс [1965], Седов [1977] и другие книги, ссылки на которые имеются в тексте монографии).

Разработка общего плана монографии и обсуждение отдельных глав проводились совместными усилиями обоих авторов, тем самым они в равной мере ответственны за возможные недочеты и упущения.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность академику О.М. Белоцерковскому и членам-корреспондентам АН СССР В.М. Иевлеву и В.В. Сычеву за просмотр некоторых разделов рукописи этой монографии. Большую признательность авторы испытывают к редактору этой книги А.Н. Секундову, замечания которого способствовали существенному улучшению качества книги, и Ю.Я. Бурико, в сотрудничестве с которым получен ряд результатов.

Для создания теории турбулентного горения необходимо соединить в единое целое методы и представления, сложившиеся в двух существенно различающихся областях науки -- теории турбулентности и кинетике химических реакций. Чтобы решить эту задачу, прежде всего необходимо установить, какие характеристики турбулентности представляют главный интерес для теории горения. Ответ дается теорией ламинарного горения, которая исходит из того, что толщина зоны осуществления процессов химического превращения много меньше характерного размера задачи. Например, при ламинарном горении однородной стехиометрической пропано-воздушной смеси в нормальных условиях толщина зоны реакции меньше 0,5 мм. Кроме того, при горении происходит сильное изменение температуры, а скорости химических реакций сильно зависят от температуры. Это обстоятельство также приводит к тому, что химические реакции локализуются в узких зонах.

На основе указанной особенности в теории ламинарного горения разработаны методы, позволяющие существенно упростить описание явления. В самом деле, зону химических реакций можно рассматривать как некоторый пограничный слой. Тогда решение этой внутренней задачи (т.е. распределения концентраций и температуры в зоне реакций) находится с помощью сравнительно простых методов, поскольку в уравнениях диффузии и теплопроводности перенос тепла и вещества вдоль фронта пламени несуществен, и, следовательно, достаточно проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений. При решении внешней задачи химические реакции можно не учитывать, а сращивание внутреннего и внешнего решений позволяет определить положение фронта пламени.

Для иллюстрации сказанного приведем два характерных примера -- ламинарное горение неперемешанных газов (диффузионное горение) и горение однородной смеси. В первом случае используется изящный прием, который предложен Бурке и Шуманом [1928], а именно вводится так называемая восстановленная концентрация горючего  $z = (St c_f - c_o + 1) / (1 + St)$ , где  $St$  -- стехиометрический коэффициент (показывающий, сколько граммов окислителя необходимо для полного сгорания одного грамма топлива),  $c$  -- массовая концентрация, индексы  $f$  и  $o$  относятся к горючему и окислителю соответственно. Введенную величину можно интерпретировать как концентрацию атомов горючего во всех образовавшихся химических соединениях. Следовательно, химические реакции явно не влияют

на ее распределение и последнее находится из решения уравнения диффузии без источников. Поскольку химическая реакция идет с большой скоростью, то во фронте пламени концентрации горючего и окислителя одновременно близки к нулю, т.е. фронт пламени в первом приближении есть поверхность, на которой выполняется условие  $z = z_{\zeta} = 1/(1 + St)$ . Исследование внутренней структуры фронта пламени при диффузионном горении проведено Зельдовичем [1949] в предположении о том, что химическая реакция является одноступенчатой и необратимой. Это исследование сводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения с нелинейным источником.

Другим примером служит ламинарное горение однородной смеси. Решение этой задачи получено Зельдовичем и Франк-Каменецким [1938 а,б]. в работах которых проанализировано распространение нормального (плоского) фронта пламени. В пламени выделяются две зоны. В первой (тепловой) химические реакции несут незначительный вклад. В ней вследствие конвекции и теплопроводности происходит прогрев смеси. Во второй зоне (зоне химических реакций) происходит превращение веществ. Конвекция в этой зоне незначительна, а отвод тепла определяется лишь теплопроводностью. Существенно, что толщина зоны химических реакций во много раз меньше толщины тепловой зоны. Поэтому зону реакций можно рассматривать как некоторую поверхность, на которой выполняются определенные граничные условия. Первое условие очевидно: температура равна температуре термодинамически равновесных продуктов сгорания. Второе условие связывает скачок производной от температуры по нормали к зоне реакции со скоростью химической реакции и коэффициентами молекулярного переноса (существование такого скачка следует из того, что тепловыделение сосредоточено на поверхности).

Метод Зельдовича и Франк-Каменецкого можно использовать и для описания горения однородной смеси в общем случае. Для этого следует решить уравнение теплопроводности без источников с двумя граничными условиями: 1) на поверхности фронта пламени температура равна температуре продуктов сгорания и 2) на бесконечном удалении от фронта пламени температура равна температуре свежей смеси. Еще одно граничное условие для скачка производной от температуры по нормали к зоне реакций определяет положение фронта пламени.

В ряде случаев решение может быть еще более упрощено, так как не только толщина зоны реакций, но и тепловая толщина фронта пламени зачастую мала по сравнению с характерным размером задачи (как уже отмечалось, при горении однородной смеси пропана с воздухом в нормальных условиях основное изменение температуры происходит на расстоянии меньше миллиметра). Поэтому фронт пламени можно рассматривать как поверхность, на которой происходит скачкообразное изменение скорости, плотности, концентраций и температуры. Скорость движения этой поверхности относительно свежей смеси является некоторой физико-химической постоянной, обычно называемой нормальной скоростью распространения  $u_n$ . Таким образом, определение положения фронта пламени сводится к решению чисто кинематической задачи: найти поверхность, каждая точка которой движется со скоростью  $u + u_n n$  ( $u$  — скорость свежей смеси,  $n$  — единичная нормаль к фронту пламени).

Из вышеизложенного следует, что в ламинарном потоке как при горении заранее не перемешанных газов, так и при горении однородной смеси положение фронта пламени можно определить, не рассматривая деталей химической кинетики.

Указанные выше методы можно использовать как при анализе турбулентного горения однородной смеси (Дамкелер [1940], Шелкин [1943]), так и при исследовании турбулентного диффузионного горения (Гауссорн, Уиддел и Хоттел [1949]). В настоящее время нет больших сомнений в том, что при турбулентном диффузионном горении зону реакций можно считать тонкой (здесь и далее зона реакций определяется по неосредненным распределениям температуры и концентраций). Что же касается турбулентного горения однородной смеси, то известные экспериментальные данные (хотя в настоящее время и весьма немногочисленные) также свидетельствуют о том, что в большинстве случаев толщина зоны реакций мала по сравнению с характерным размером задачи.

Таким образом, исследование турбулентного горения можно провести в два этапа. На первом этапе изучается внутренняя структура зоны реакций. Эта структура определяется только локальными характеристиками турбулентности. Например, если толщина зоны реакций много меньше, чем минимальный пространственный масштаб пульсаций скорости, то в окрестности зоны реакций можно принять, что скорость среды и восстановленная концентрация горючего меняются линейно. Такой подход уже использовался в теории горения однородной смеси (Климов [1963]). На втором этапе исследуются крупномасштабные колебания зоны реакций, которые приводят к ее перемещениям как целого. В этом случае основной интерес представляют амплитудные характеристики колебаний, так как они определяют среднюю протяженность зоны горения. На этом этапе детали химической кинетики не имеют особого значения.

Чтобы сформулировать, какие параметры турбулентности и какие методы исследования необходимо использовать на каждом из указанных этапов, рассмотрим основные особенности турбулентных течений и вытекающие из этих особенностей направления в теории турбулентности. Сейчас в этой теории можно выделить два основных подхода. Целью первого (традиционного) является нахождение различных статистических характеристик. Второй возник сравнительно недавно в связи с появлением мощных ЭВМ и основан на численном интегрировании уравнений Навье — Стокса, т.е. на выяснении более или менее детальной картины течения. К этому направлению относятся и исследования так называемых когерентных структур, т.е. неслучайных или не вполне случайных крупномасштабных колебаний скорости.

Выбор правильного подхода должен основываться на главной особенности турбулентности, которая обусловлена многомасштабностью характеристик течения.

Для пояснения напомним, что любое сложное пространственное распределение скорости можно представить в виде суперпозиции гармонических колебаний. В турбулентных потоках длина волны крупномасштабных колебаний сопоставима с характерным линейным размером задачи. Длина волны наиболее мелкомасштабных колебаний намного меньше характерного размера задачи и, что самое главное, уменьшается по мере роста

числа Рейнольдса. Поэтому в рассматриваемой суперпозиции (т.е. в спектре турбулентности) представлено очень большое число колебаний, длины волн которых сильно варьируются. Крупномасштабные колебания определяют энергию турбулентности, а мелкомасштабные — ее диссипацию, которая оказывается существенной при всех числах Рейнольдса (т.е. при любой сколь угодно малой вязкости).

Последнее обстоятельство заслуживает особого внимания. Из общих соображений ясно, что крупномасштабные колебания скорости практически не зависят от вязкости, так как числа Рейнольдса для них обычно очень велики. Такие колебания, однако, неустойчивы, в результате чего образуются колебания с меньшим пространственным масштабом и несколько меньшим числом Рейнольдса. Этот процесс продолжается, пока не появятся колебания со столь малым пространственным масштабом, что их числа Рейнольдса будут порядка единицы. Эти колебания устойчивы из-за сильного влияния вязкой диссипации. Следовательно, с уменьшением вязкости наименьший пространственный масштаб колебаний падает, что приводит к увеличению градиента скорости, и поэтому в среднем диссипация энергии остается неизменной.

Из описанной картины вытекает, что многомасштабность процессов турбулентного переноса приводит к автомодельности турбулентных течений по числу Рейнольдса. Выражаясь точно, это означает, что средние значения всех величин, определяемых крупномасштабными колебаниями скорости, не зависят от числа Рейнольдса, если это число стремится к бесконечности. К таким величинам относятся, например, скорость, давление или концентрация инертной примеси, а также различные степени этих величин. Принцип автомодельности по числу Рейнольдса, вообще говоря, неприменим к описанию градиентов гидродинамических параметров, поскольку эти градиенты определяются мелкомасштабными колебаниями скорости. Справедливость рассматриваемого принципа хорошо подтверждена экспериментально и в настоящее время не вызывает особых сомнений.

Из сказанного следует ряд важных выводов. Прежде всего ясно, что описание одних только энергосодержащих, крупномасштабных колебаний скорости не может быть замкнутым. В самом деле, эволюция таких колебаний определяется вязкой диссипацией, зависящей от мелкомасштабных пульсаций. Более того, поскольку энергетический спектр пульсаций непрерывен, крупно- и мелкомасштабные колебания не могут рассматриваться изолированно, подобно тому, как в теории ламинарного движения сплошной среды рассматриваются макроскопические и молекулярные движения. Поэтому возможны только два пути создания теории турбулентности. На первом рассматриваются характеристики колебаний всех масштабов. При этом учет вязких эффектов обязателен и, следовательно, в такой теории должен фигурировать коэффициент кинематической вязкости. Рассматриваемый путь, однако, связан с анализом в известном смысле излишней информации, так как основные черты турбулентности не зависят от числа Рейнольдса.

Поэтому более естествен второй путь, основанный на поиске универсальных связей между характеристиками мелко- и крупномасштабных пульсаций. Как ясно из теории Колмогорова [1941] и Обухова [1941], такие связи действительно существуют, если характерные масштабы колебаний,



определяющих энергию турбулентности и ее диссипацию, сильно различны. Эти связи являются следствием принципа автомодельности турбулентности по числу Рейнольдса.

Строго говоря, такой подход предполагает рассмотрение предела решений уравнений Навье – Стокса при  $Re \rightarrow \infty$ . В этом случае возникает трудность, для пояснения которой обратимся к известному из квантовой механики рассуждению, иллюстрирующему необходимость статистического описания проблемы. Следуя идеям квантовой механики, рассмотрим, возможно ли измерение какой-либо величины (в том числе и диссипации энергии) при  $Re \rightarrow \infty$ . Под термином "измерение" естественно понимать не только собственно измерение с помощью какого-либо физического прибора, но и численное решение уравнений Навье – Стокса.

Ясно, что в любом опыте или численном решении уравнений Навье – Стокса определяются лишь величины, осредненные по некоторой пространственно-временной области (такие величины удобно назвать частично осредненными). Если число Рейнольдса стремится к бесконечности, то проблема измерения (или численного расчета) становится особенно важной, поскольку пространственные масштабы колебаний скорости, определяющих диссипацию, стремятся к нулю. Очевидно, что теория имеет объективное значение, только если в ней рассматриваются величины, имеющие предел при стремлении к нулю размера области, по которой производится осреднение (в противном случае разные измерительные приборы или разные численные алгоритмы будут давать несовпадающие между собой результаты). Таким образом, необходимо проанализировать двойной предельный переход, когда, с одной стороны, число Рейнольдса стремится к бесконечности, а с другой – размер области  $l$ , по которой производится осреднение, приближается к нулю. С практической точки зрения это означает, что производится серия опытов, в которых варьируются величины  $l$  и  $Re$ , а затем результаты измерений экстраполируются в область  $l = 0, Re = \infty$ .

Существующие экспериментальные данные вполне определенно свидетельствуют о том, что такая экстраполяция принципиально невозможна. Этот вывод основан на многочисленных опытах, в которых исследовалась перемежаемость, т.е. крайне нерегулярное распределение градиентов скорости и концентрации в турбулентных потоках, когда области с чрезвычайно малыми значениями градиентов (нетурбулентная жидкость) нерегулярным образом перемежаются с областями, в которых значения градиентов очень велики (турбулентная жидкость) – Корсин [1943], Бэтчелор и Таунсенд [1949], Таунсенд [1956] и др. Скорость диссипации энергии турбу-

лентности  $\epsilon = \frac{1}{2} \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$  и скалярная диссипация концентрацион-

ных неоднородностей  $N = D \left( \frac{\partial z}{\partial x_k} \right)^2$  ( $\nu, D$  – кинематическая вязкость

и коэффициент молекулярной диффузии соответственно) квадратичны по градиентам, поэтому сказанное в равной степени относится и к полям  $\epsilon$  и  $N$ , которые играют важнейшую роль в теории турбулентности и турбулентного смешения.

В нетурбулентной жидкости диссипация энергии и мелкомасштабные колебания скорости отсутствуют. В турбулентной жидкости диссипация и мелкомасштабные колебания скорости всегда играют важную роль.

Поэтому, если измерения проводятся внутри турбулентной жидкости, то при  $l = \text{const}$  всегда найдется такое достаточно большое число Рейнольдса, что диссипация энергии будет существенно изменяться внутри измерительного объема. Следовательно, измеренное значение диссипации зависит от размера и формы области, по которой производится осреднение. Сказанное означает, что в турбулентной жидкости, по-видимому, не существует объективного способа нахождения частично осредненной диссипации энергии. Таким образом, если число Рейнольдса стремится к бесконечности, то возможно лишь статистическое описание течения в турбулентной жидкости (т.е. там, где  $\epsilon > 0$ ). С другой стороны, в нетурбулентной жидкости детерминированное описание течения возможно, так как в ней отсутствуют мелкомасштабные колебания скорости и, следовательно, измерения величин  $\epsilon$  и  $N$  возможны.

Отсюда ясны трудности, возникающие в том направлении исследования турбулентности, которое связано с исследованием детальной картины течения. Действительно, численное интегрирование уравнений Навье — Стокса возможно при не столь больших числах Рейнольдса, какие представляют основной интерес в конкретных научных и прикладных задачах. Для преодоления этих трудностей предложен ряд так называемых подсеточных моделей турбулентности, в которых непосредственно рассматриваются частично осредненные характеристики течения. Вычисление этих характеристик основано на уравнениях движения, в которых влияние колебаний с длинами волн, меньшими масштаба осреднения, описывается с помощью коэффициента турбулентной (точнее, микротурбулентной) вязкости. Однако ясно, что с помощью подсеточных моделей нельзя решить всех проблем, поскольку, как уже отмечалось, перемежаемость приводит к тому, что не существует объективного способа нахождения частично осредненной диссипации энергии. По той же причине нельзя дать и замкнутого описания когерентных структур.

Значительные трудности существуют и в статистическом подходе. В этом подходе можно выделить три направления: 1) исследование формализма моментов, связанных бесконечной цепочкой уравнений Келлера — Фридмана [1924]; 2) функциональный подход к теории турбулентности, основанный на рассмотрении характеристического функционала, введенного Колмогоровым [1935], для которого Хопфом [1952] получено линейное уравнение в вариационных производных; 3) формализм конечномерных распределений вероятностей, введенных сравнительно недавно в работах Монина [1967], Ландгрена [1967], Новикова [1967], Улинича и Любимова [1968], Кузнецова [1967].

Лишь функциональный подход к теории турбулентности является замкнутым. Однако отсутствие математической теории уравнений в вариационных производных и, что не менее важно, отсутствие ясности в тех дополнительных ограничениях, которые позволяют выделить множество функционалов, представляющих интерес для теории турбулентности, не позволяют получить до сих пор на этом пути какие-либо конкретные

результаты \*). Кроме того, характеристический функционал описывает все статистические свойства поля скорости, в том числе зависящие от числа Рейнольдса свойства мелкомасштабных пульсаций. Следовательно, такой подход связан с переработкой в известном смысле излишней информации.

Остальные направления, в том числе и модели турбулентности, в которых главные усилия направлены на отыскание первых двух одноточечных моментов поля скорости и концентрации, основаны на точных (но не замкнутых) соотношениях, вытекающих из уравнений Навье – Стокса. Для замыкания этих соотношений привлекается информация, которая заимствуется из опыта. Несмотря на отдельные успехи, такой путь, однако, не привел к созданию универсальной теории, способной с достаточной для практики точностью описать все турбулентные течения.

Таким образом, значительные трудности возникают как при использовании статистических методов, так и при попытках выяснить детальную картину течения. По-видимому, лишь сочетание обоих подходов, статистического и детерминированного, позволит решить проблему описания турбулентности. Такое сочетание, как сейчас станет ясно, важно и в теории турбулентного горения.

Ранее указывалось, что в большинстве случаев толщина зоны реакций весьма мала. Поэтому для приближенного описания горения можно ввести некую поверхность, вблизи которой локализованы реакции. Эта поверхность сильно искривлена турбулентными пульсациями разных масштабов и, если можно так выразиться, имеет вид сильно смятого комка бумаги со множеством внутренних пустот самых разнообразных размеров. Несмотря на столь сложную структуру, можно отдельно рассмотреть две проблемы: 1) какова внутренняя структура зоны реакций, 2) какова структура поверхности, вблизи которой она локализована?

Рассмотрим первую проблему. Так как толщина зоны химических реакций мала, то ее структура определяется локальными характеристиками турбулентности. На основе теории Колмогорова [1941] и Обухова [1941, 1949] можно предположить, что эти характеристики определяются коэффициентами молекулярного переноса, диссипацией энергии  $\epsilon$  и, если речь идет о горении неперемешанных газов, скалярной диссипацией  $N$ .

При исследовании внутренней структуры зоны реакций статистическое описание процесса в известном смысле оказывается излишним. В самом деле, если зона реакций локально плоская, то в системе координат, связанной с какой-либо изотермой в этой зоне, все характеристики процесса описываются одномерными, квазистационарными уравнениями диффузии и теплопроводности. В эти уравнения входит компонента скорости среды, нормальная зоне реакций, и, если рассматривается горение неперемешанных газов, восстановленная концентрация горючего. В связи с тем, что толщина зоны реакций мала, можно принять, что эти величины линейно зависят от координаты, нормальной зоне реакций. Поэтому решение уравнений диффузии и теплопроводности внутри зоны реакций можно получить с помощью достаточно простых методов. В решение, очевидно, войдут

---

\* ) Подробное обсуждение проблемы и изложение строгих результатов, относящихся к уравнению Хопфа, содержится в книге Вишика и Фурсикова [1980].

неосредненные градиенты скорости и восстановленной концентрации горючего, которые следует рассматривать как случайные параметры. В рамках такого подхода статистические методы необходимы лишь для определения средних характеристик процесса внутри зоны реакций.

Понятно, что решение этой задачи очень тесно связано с исследованием статистических характеристик мелкомасштабной части спектра турбулентности. Отсюда видно, что диссипация энергии и скалярная диссипация играют фундаментальную роль не только в теории турбулентности (Колмогоров [1941], Обухов [1941, 1949]), но и в теории турбулентного горения.

Рассмотрим вторую проблему. Ее решение должно основываться на анализе распределений вероятностей различных гидродинамических параметров. Действительно, из геометрических соображений понятно, что плотность вероятностей температуры (или концентрации) может быть связана с объемом, заключенным между двумя близкими изотермами, в частности, и между теми, где происходит основное превращение вещества. Последний объем пропорционален поверхности, вблизи которой локализованы химические реакции. Это обстоятельство обуславливает особую роль плотностей вероятностей в теории турбулентного горения. Формально она проявляется в том, что при решении уравнений, описывающих поведение реагирующего газа, приходится осреднять скорости химических реакций, нелинейно зависящие от температуры и концентрации.

На рассматриваемом этапе исследования детали химической кинетики не играют особой роли. Например, при горении неперемешанных газов зона реакций находится вблизи поверхности, на которой восстановленная концентрация горючего, т.е. концентрация примеси, не участвующей в реакции, является постоянной. Это означает, что статистические характеристики колебаний фронта пламени непосредственно не зависят от скорости химической реакции, т.е. задача сводится к исследованию распределения вероятностей инертной (нерагирующей) примеси.

При горении однородной смеси зона реакций расположена вблизи поверхности, на которой температура постоянна и близка к температуре продуктов сгорания. Тем самым описание крупномасштабных колебаний фронта пламени сводится к изучению распределения вероятностей температуры. Детали химической кинетики не имеют значения и в этом случае, поскольку часто можно считать, что скорость движения зоны реакций относительно среды близка к  $u_n$  и, таким образом, особенности химических реакций влияют только на нормальную скорость распространения пламени.

При использовании описанных представлений в исследованиях турбулентного горения необходимо учесть целый ряд нетривиальных эффектов. Один из них обусловлен влиянием изменения плотности газа на гидродинамическую структуру течения, вследствие чего изменяются средние скорости исходных горючих компонентов и продуктов сгорания. Этот процесс прежде всего воздействует на крупномасштабную часть спектра турбулентности. Следовательно, характеристики последнего слабо зависят от кинетики химических реакций и в основном определяются отношением плотностей исходных горючих компонентов и продуктов сгорания. При горении однородной смеси, помимо отмеченных факторов, существенную

роль может играть гидродинамическая (тепловая) неустойчивость пламени, которая при определенных условиях может приводить к дополнительной турбулизации потока. Из линейной теории устойчивости (Ландау [1944]) известно, что инкремент нарастания амплитуды гармонического колебания пламени возрастает с уменьшением масштаба этого колебания или с увеличением нормальной скорости распространения пламени. Поэтому прежде всего должна возникнуть мелкомасштабная турбулентность. Характеристики этой турбулентности зависят от  $u_n$ , т.е. определяются скоростью химических реакций.

Другая группа эффектов связана с влиянием процессов молекулярного переноса на структуру зоны химических реакций. В этой связи следует подчеркнуть, что поскольку толщина зоны реакций мала, то ее структура определяется мелкомасштабной частью спектра турбулентности, для описания которой принцип автомодельности по числу Рейнольдса неприменим. Отметим также, что важную роль могут сыграть и различия между коэффициентами молекулярного переноса, которые приводят к изменению состава и температуры в зоне реакций.

Наконец, при анализе внутренней структуры фронта пламени необходимо учесть цепной характер химических реакций, т.е. следует иметь в виду, что химические превращения происходят в несколько стадий, на которых образуется много промежуточных веществ (атомов и свободных радикалов).

## ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ И КАЧЕСТВЕННЫЙ ВИД ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ

В данной главе обсуждаются основные представления о турбулентном движении при больших числах Рейнольдса, необходимые для анализа структуры турбулентных потоков и закономерностей протекания в них химических реакций. Масштабы длины и скорости, определяющие число Рейнольдса  $Re$ , соответствуют крупномасштабным флуктуациям в потоке, т.е.  $Re = qL/\nu$ , где  $q$  – среднеквадратическое значение пульсационной скорости,  $L$  – интегральный масштаб турбулентности,  $\nu$  – кинематическая молекулярная вязкость. В главе рассматривается перемежаемость и качественный вид плотностей распределений вероятностей в турбулентных потоках. Как указывалось во введении, эти характеристики имеют первостепенное значение для теории турбулентного горения и собственно теории турбулентности. В настоящее время благодаря обширным экспериментальным исследованиям стало ясно, что качественный вид плотностей распределений вероятностей существенно определяется перемежаемостью и локальной структурой турбулентности, вследствие чего эти вопросы невозможно рассматривать изолированно друг от друга.

Изложение перечисленных вопросов следует этой точке зрения, которая высказана в статье Кузнецова и Сабельникова [1981 а].

### § 1.1. Перемежаемость в турбулентных потоках

В теории турбулентности фундаментальную роль играет предположение о том, что средние значения скорости диссипации энергии  $\langle \epsilon \rangle$  и скалярной диссипации  $\langle N \rangle$  стремятся к конечным и отличным от нуля пределам при  $Re \rightarrow \infty$  (далее, слово "скорость" в этих словосочетаниях для краткости опускается). Здесь

$$\epsilon = \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 = \nu |\vec{\omega}|^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}, \quad N = D(\nabla z)^2.$$

$D$ ,  $\nu$  – коэффициент диффузии и кинематическая вязкость,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор точки в декартовой прямоугольной системе координат,  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$  – символ операции градиента (оператор Гамильтона),  $\vec{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  – вектор вихря (завихренность),  $z$  – концентрация инертной примеси (т.е. примеси, не участвующей в химической реакции): по повторяющимся индексам производится суммирование, а угловыми скобками  $\langle \rangle$  обозначено безусловное осреднение.

Подобно тому, как величина  $\epsilon$  характеризует уменьшение энергии турбулентности из-за вязкости, скалярная диссипация  $N$  описывает, с какой скоростью происходит выравнивание неосредненных концентрационных неоднородностей из-за молекулярной диффузии. Поэтому можно сказать, что скалярная диссипация дает скорость смешения вещества до молекулярного уровня.

Предположение о существовании конечных пределов величин  $\langle \epsilon \rangle$  и  $\langle N \rangle$  при  $Re \rightarrow \infty$  хорошо подтверждается экспериментально. Его качественное обоснование обычно опирается на теорию гидродинамической устойчивости, а именно считается, что при уменьшении вязкости из-за неустойчивости течения образуются более мелкомасштабные движения. Этот процесс автоматически приводит к такому увеличению неосредненных градиентов скорости и концентрации, которое в среднем компенсирует уменьшение вязкости. Указанные соображения положены в основу теории локально однородной и изотропной турбулентности Колмогорова [1941], Обухова [1941, 1949], подробное изложение которой содержится в книге Мони́на и Ягло́ма [1967]. Согласно этой теории пространственный масштаб наиболее мелкомасштабных движений, так называемый колмогоровский или внутренний масштаб турбулентности  $\eta$  равен  $\eta = \nu^{3/4} \langle \epsilon \rangle^{-1/4}$ .

Следует отметить, что скалярная диссипация и диссипация энергии не зависят от коэффициентов молекулярного переноса и в ламинарном пограничном слое при большом числе Рейнольдса. Примером может служить течение в пограничном слое при нулевом градиенте давления или в слое смешения между двумя плоскопараллельными потоками. В обоих случаях увеличение числа Рейнольдса приводит к уменьшению толщины пограничного слоя и соответствующему возрастанию градиентов скорости и концентрации. В результате, как это легко проверить из решения Блазиуса (см., например, Шлихтинг [1960]), величины  $\epsilon$  и  $N$  остаются в точности неизменными. Такая картина течения наблюдается только внутри узкого пограничного слоя (толщина слоя стремится к нулю при увеличении числа Рейнольдса), вне которого процессы молекулярного переноса незначительны, т.е.  $\epsilon = N = 0$ , а характеристики потока описываются уравнениями Эйлера (в ряде случаев для описания течения вне пограничного слоя можно использовать предположение о потенциальности течения).

Описанная структура потока характерна для многих задач гидродинамики в том смысле, что при очень больших числах Рейнольдса силы вязкости существенны лишь в очень узких областях, вне которых процессы молекулярного переноса не играют роли. Этот вывод — вполне естественное следствие уравнений Навье — Стокса, в которых при больших числах Рейнольдса содержится малый параметр при старшей производной.

Аналогичная структура наблюдается и в турбулентных потоках. В этом случае процессы диссипации также происходят лишь в узких областях. Особенность турбулентного течения проявляется в том, что эти области хаотически перемешаются в пространстве, а значения  $\epsilon$  и  $N$  в них, вообще говоря, зависят от числа Рейнольдса. Описанное явление впервые обнаружено Корсиным [1943] и обычно называется перемежаемостью. В настоящее время установлено, что оно характерно для всех турбулентных течений.

Различают два вида перемежаемости — внешнюю и внутреннюю. Для пояснения того, что понимается под этими терминами, обратимся к наглядному примеру — истечению струи дыма из трубы электростанции. Наблюдения за такой струей показывают, что существует достаточно резкая граница, за которую дым не проникает. Эта граница искривлена и нестационарно колеблется. Такая граница наблюдается не только в струях, но и в следах и в пограничных слоях. Измерения свидетельствуют о том, что вне границы диссипация энергии равна нулю (Таунсенд [1956]). Таким образом, пространственное распределение диссипации энергии оказывается очень неравномерным: области, в которых  $\epsilon > 0$ , чередуются с областями, в которых  $\epsilon = 0$ . Колебание границ следов, струй, пограничных слоев обычно называется внешней перемежаемостью, причем слово "внешняя" часто опускается.

Известно, что внутри границ этих течений пространственные распределения диссипации энергии и скалярной диссипации также весьма неравномерны: области, в которых наблюдаются интенсивные пульсации градиентов скорости и концентрации, перемежаются с областями, в которых такие пульсации практически отсутствуют. Это явление впервые обнаружено Бэтчелором и Таунсендом [1949]. Оно получило название внутренней перемежаемости.

Существенно, что из-за пульсаций давления флуктуации скорости наблюдаются во всем потоке. Поэтому исследование перемежаемости не может основываться на рассмотрении поля скорости. В силу сказанного наиболее распространенный способ изучения перемежаемости связан с анализом поля градиентов скорости, т.е. диссипации энергии. В этом способе, однако, возникает проблема разделения внешней и внутренней перемежаемостей. Чтобы подчеркнуть важность этой проблемы, проанализируем результаты исследований обоих типов перемежаемости.

Согласно установившейся терминологии будем говорить, что области с малыми значениями градиентов скорости или концентрации заполнены нетурбулентной жидкостью, а области с большими значениями градиентов — турбулентной жидкостью. В литературе вместо термина "нетурбулентная" жидкость часто используется выражение "потенциальная" жидкость, т.е. предполагается, что существуют области, в которых течение потенциально. Указанное предположение будет использоваться в настоящей книге, хотя и его справедливость в настоящее время полностью неясна (см., например, Монин [1978]).

Характеристики внешней перемежаемости подробно исследовались в целом ряде работ (Хедли и Кеффер [1974а, б], Томас [1973], Фабрис [1979а, б], Пайцис и Шварц [1974, 1975], Мобс [1968], Мерлис, Зай и Брэдшоу [1982], Вуд и Брэдшоу [1982] и т.д.). Они основаны на измерениях различных условно осредненных моментов, т.е. на осреднении по таким промежуткам времени, когда в рассматриваемой точке наблюдается турбулентная жидкость. Такое осреднение далее обозначается символом  $\langle \rangle_t$ . Обычно считается, что жидкость является турбулентной, если квадрат градиента скорости превышает некоторое пороговое значение (Таунсенд [1956]). Иногда принимают, что градиент скорости должен превышать пороговое значение в течение некоторого промежутка времени, продолжительность которого не менее некоторой заданной величины (Хедли и



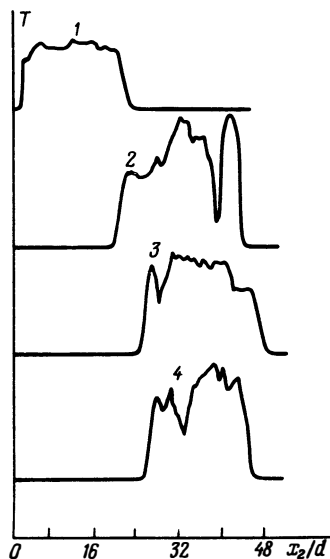


Рис. 1.1. "Замороженные" распределения температуры в плоской затопленной струе по данным Уберои и Сингха [1975]. Распределения получены в сечении  $x_1/d = 45$ ,  $d = 3,18$  мм. Максимальный перегрев в начальном сечении равен  $50^\circ\text{C}$ ; максимальная средняя скорость в сечении измерения равна  $0,305$  м/с; скорость перемещения термометра сопротивления равна  $6,1$  м/с. Осциллограммы 1 - 4 получены в разные моменты времени. Единицы измерения по оси ординат произвольны

Кеффер [1974а, б]). В ряде случаев в качестве индикатора турбулентности используется поле концентрации, т.е. жидкость считается турбулентной, если  $z > 0$ . Подробный обзор различных экспериментальных методик выбора индикатора турбулентности при измерении усредненных характеристик в турбулентных потоках можно найти в работах Антониа [1981], Шона и Шарне [1977].

Для иллюстрации применимости поля концентрации (или температуры) в качестве индикатора турбулентности на рис. 1.1 приведены осциллограммы, полученные в работе Уберои и Сингха [1975]\*). Опыты проведены со слабоподогретой плоской струей, вытекающей в неподвижное пространство. В этих опытах термометр сопротивления передвигался перпендикулярно плоскости симметрии со скоростью, в 20 раз большей, чем максимальная скорость струи в том сечении, где производились измерения. Поэтому на рис. 1.1 изображены "замороженные" распределения температуры. Видно, что на границе струи происходит почти скачкообразное изменение температуры. Следовательно, в данном случае идентификация турбулентной жидкости не вызывает особого труда. Такая ситуация, по-видимому, характерна для не слишком больших чисел Рейнольдса (в данном случае число Рейнольдса, вычисленное по неосредненной ширине струи и максимальной средней скорости, лежит в диапазоне  $10^3 - 1,3 \cdot 10^3$ ). Как будет видно далее, область, которая на рис. 1.1 целиком заполнена пульсациями, при  $Re \rightarrow \infty$  приобретает гораздо более сложную структуру.

В результате исследования внешней перемежаемости установлены следующие факты. В тех областях потока, где существенна перемежаемость (т.е. часто наблюдается граница течения), одноточечные распределения вероятностей скорости и концентрации сильно отличаются от нормального распределения. Например, в работах Ля Рю и Либби [1974], Антониа,

\* На этом и других рисунках используются следующие обозначения:  $x_1$  - продольная координата, измеряемая вдоль основного направления потока;  $x_2$  - поперечная координата для плоских сечений и радиальная - для осесимметричных. Начало координат расположено, для струй - в плоскости выходного сечения сопла на оси или плоскости симметрии; для следа за круговым цилиндром - на оси цилиндра; для слоя смешения - в точке, где происходит контакт двух потоков. Часто также вместо  $x_1$  и  $x_2$  используются обозначения  $x$  и  $y$  соответственно.

Прабху и Стефенсона [1975] показано, что коэффициенты асимметрии  $A$  и эксцесса  $E$  пульсаций концентраций могут быть больше десяти. Здесь

$$A = \frac{\langle (\xi - \langle \xi \rangle)^3 \rangle}{\langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle^{3/2}}, \quad E = \frac{\langle (\xi - \langle \xi \rangle)^4 \rangle}{\langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle^2} - 3,$$

где под величиной  $\xi$  понимается скорость или концентрация. Далее будут употребляться также величины  $A_t$  и  $E_t$ , которые получаются, если в формулах для  $A$  и  $E$  осреднение производится по турбулентной жидкости.

В противоположность безусловным распределениям вероятностей, условные распределения вероятностей скорости и концентрации в турбулентной жидкости слабо отличаются от нормальных. Например, измерения Ля Рю и Либби [1974], Антониа, Прабху и Стефенсона [1975] свидетельствуют о том, что величины  $A_t$  и  $E_t$  для поля концентрации не превышают нескольких десятых. Аналогичное утверждение справедливо и для поля скорости (Таунсенд [1956]).

Установлено также, что в струях и следах величины, осредненные по турбулентной жидкости, в поперечном направлении изменяются гораздо слабее, чем безусловно осредненные величины. Этот вывод впервые сделан Таунсендом [1956]. В качестве примера на рис. 1.2 представлены результаты измерений диссипации энергии в следе за цилиндром, приведенные в его работе ( $d$  — диаметр цилиндра,  $u_0$  — скорость набегающего потока). Аналогичные данные получены и для поля концентрации в осесимметричных струях Беккером, Хоттелем и Вильямсом [1967], Антониа, Прабху и Стефенсоном [1975]. Результаты первой работы помещены на рис. 1.3, 1.4, а второй — на рис. 1.5, 1.6 ( $d$  — диаметр сопла,  $u_0$  — скорость истечения струи,  $u_\infty$  — скорость спутного потока).

Из рис. 1.3, 1.4 видно, что при изменении  $x_2/x_1$  в диапазоне 0,14–0,26 безусловно осредненная концентрация меняется на два порядка, в то время как концентрация, осредненная по турбулентной жидкости, меняется всего в 2,5 раза, а интенсивность пульсаций концентрации в турбулентной жидкости остается практически неизменной.

Как показывают измерения Фабриса [1979а, б] в следе за подогретым круговым цилиндром, такой же характер имеют и средние значения квадрата производной температуры  $(\partial T/\partial t)^2$  (рис. 1.7). Используя гипотезу Тейлора о замороженности турбулентности (т.е. предположение о том, что  $\partial/\partial t = -\langle u_1 \rangle \partial/\partial x_1$ ) и предположение о локальной изотропии турбулентности, можно сделать заключение, что сказанное в равной степени относится и к скалярной диссипации.

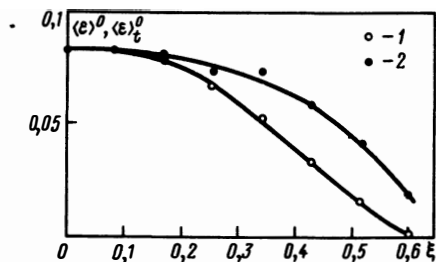


Рис. 1.2 Профили безусловно и условно осредненной скорости диссипации энергии турбулентности в следе за круговым цилиндром по данным Таунсенда [1956].  $x_1/d = 160$ .  $Re_d = u_0 d/\nu = 8,4 \cdot 10^3$ ; 1 —  $\langle \epsilon \rangle^0 = \langle \epsilon \rangle (x_1 - x_{10})^2 / (u_0^3 d)$ , 2 —  $\langle \epsilon \rangle_t^0 = \langle \epsilon \rangle_t (x_1 - x_{10})^2 / (u_0^3 d)$ ,  $\xi = x_2 / \sqrt{(x_1 - x_{10})d}$ ,  $x_{10} = -20d$

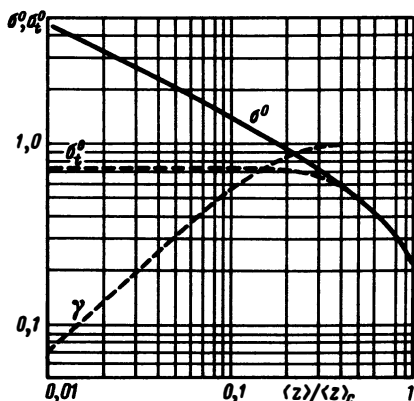
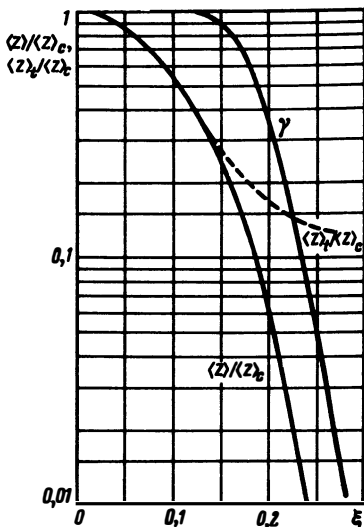


Рис. 1.3. Профили безусловно и условно осредненной концентрации в затопленной осесимметричной струе по данным Беккера, Хоттела и Вильямса [1967].  $x_1/d = 20-36$ ,  $Re_d = u_0 d/\nu = 5,4 \cdot 10^4$ ,  $d = 2,41$  см,  $u_0 = 130$  м/с,  $\langle z \rangle_c$  - средняя концентрация на оси струи,  $\xi = x_2/(x_1 - x_{10})$ ,  $x_{10} = -4,8d$

Рис. 1.4. Безусловные и условные среднеквадратические концентрации в затопленной осесимметричной струе по данным Беккера, Хоттела и Вильямса [1967].  $\sigma^0 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle^{1/2} / \langle z \rangle$ ,  $\sigma_c^0 = \langle (z - \langle z \rangle_c)^2 \rangle_c^{1/2} / \langle z \rangle_c$ . Условия опытов и обозначения те же, что и на рис. 1.3

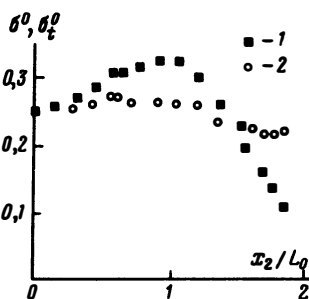
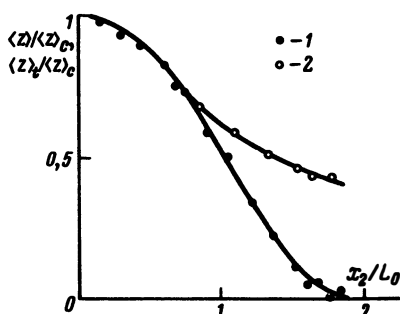


Рис. 1.5. Профили безусловно и условно осредненной концентрации в спутной осесимметричной струе по данным Антониа, Прабху и Стефенсона [1975].  $x_1/d = 59$ ,  $Re_d = u_0 d/\nu = 4,3 \cdot 10^4$ ,  $u_0/u_\infty = 6,6$ ,  $d = 2,03$  см,  $u_0 = 32$  м/с; 1 -  $\langle z \rangle / \langle z \rangle_c$ , 2 -  $\langle z \rangle_p / \langle z \rangle_c$ ,  $\langle z \rangle_c$  - средняя концентрации на оси струи,  $L_0$  - линейный масштаб, равный расстоянию от оси симметрии, при котором  $\langle z \rangle = \langle z \rangle_c/2$

Рис. 1.6. Профили безусловных и условных среднеквадратических концентраций в спутной осесимметричной струе по данным Антониа, Прабху и Стефенсона [1975]. 1 -  $\sigma^0 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle^{1/2} / \langle z \rangle_c$ , 2 -  $\sigma_c^0 = \langle (z - \langle z \rangle_c)^2 \rangle_c^{1/2} / \langle z \rangle_c$ ,  $\langle z \rangle_c$  - средняя концентрация на оси струи. Условия опытов те же, что и на рис. 1.5

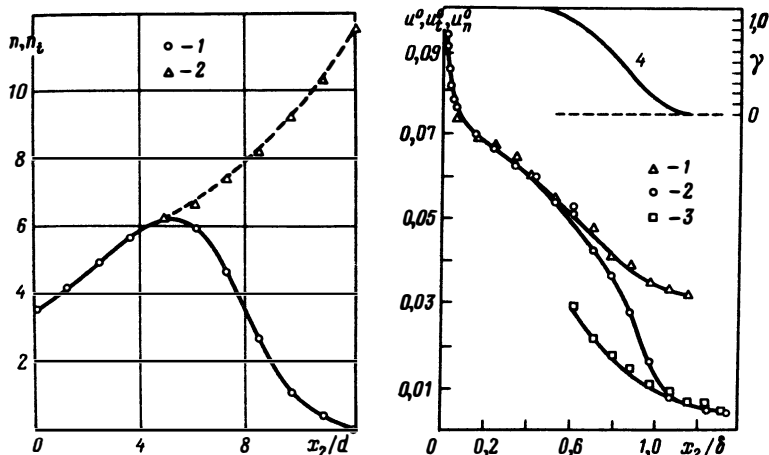


Рис. 1.7. Профили безусловно и условно осредненных квадратов производной температуры в следе за круговым цилиндром по данным Фабриса [1979а, б].  $x_1/d = 400$ ,  $Re_d = u_0 d/\nu = 2,7 \cdot 10^3$ .  $d = 6,25$  мм,  $u_0 = 6,46$  м/с; 1 -  $n = \langle (\partial z/\partial t)^2 \rangle d^2/u_0^2$ , 2 -  $n_t = \langle (\partial z/\partial t)^2 \rangle_t d^2/u_0^2$ ,  $z = \Delta T/(\Delta T)_{max}$ ,  $\Delta T = T - T_\infty$

Рис. 1.8. Профили безусловных и условных средних квадратических пульсаций продольной скорости в турбулентной и нетурбулентной жидкостях и коэффициента перемежаемости в турбулентном пограничном слое на пластине по данным Коважного, Кибенса и Блэкуелдера [1970]. Измерения проведены в сечении, расположенном на расстоянии  $x_1 = 9$  м от носика пластины, толщина пограничного слоя  $\delta = 10$  см,  $Re_\delta = u_\infty \delta/\nu = 2,75 \cdot 10^4$ .  $u_\infty = 4,3$  м/с; 1 -  $u_t^0 = \langle (u_1 - \langle u_1 \rangle_t)^2 \rangle_t^{1/2}/u_\infty$ , 2 -  $u^0 = \langle (u_1 - \langle u_1 \rangle)^2 \rangle^{1/2}/u_\infty$ , 3 -  $u_n^0 = \langle (u_1 - \langle u_1 \rangle_n)^2 \rangle_n^{1/2}/u_\infty$ , 4 -  $\gamma$

В отличие от концентрации примеси, которая не проникает в нетурбулентную жидкость, энергия пульсаций в нетурбулентной жидкости не равна нулю, что обусловлено пульсациями давления, которые, как известно, обуславливают нелокальный характер процессов переноса в турбулентных потоках. Для иллюстрации обратимся к рис. 1.8, где изображены результаты измерений условно осредненных моментов  $\langle (u_1 - \langle u_1 \rangle_t)^2 \rangle_t^{1/2}$  и  $\langle (u_1 - \langle u_1 \rangle_n)^2 \rangle_n^{1/2}$  в турбулентном пограничном слое на пластине (нижний индекс  $n$  соответствует осреднению по нетурбулентной жидкости). Эти данные приведены Коважным, Кибенсом и Блэкуелдером [1970] (аналогичные результаты получены в плоской струе Дженкинсом и Гольдшмидтом [1976], Олером, Дженкинсом и Гольдшмидтом [1981]). Видно, что если рассматриваемая точка расположена не слишком далеко от средней границы пограничного слоя, то энергия флуктуаций в обеих жидкостях одного порядка, т.е. пульсации давления достаточно эффективно перераспределяют энергию.

Рассмотрим теперь результаты исследований внутренней перемежаемости. Уже в первой работе, посвященной анализируемому вопросу (Бэтчелор и Таунсенд [1949]), установлено, что коэффициенты эксцесса пульсаций градиента скорости (и, следовательно, коэффициенты эксцесса пульсаций диссипации энергии) очень велики. Показано также (и это наиболее важно),

что эти коэффициенты растут с увеличением числа Рейнольдса. Результаты описанных опытов позже подтверждены Пондом и Стюартом [1965] Гурвичем [1966, 1967], Стюартом, Вильсоном и Берлингом [1970], Вингардом и Теннекесом [1970], Гибсоном, Стегеном и Вильямсом [1970] Гибсоном, Стегеном и Мак-Коннелом [1970], Виньянским и Фидлером [1970], Куо и Корсиным [1971], Ченом [1971], Гибсоном и Масейо [1971], Шейхом, Теннекесом и Ламли [1971], Антониа [1973], Вингардом и Пао [1975], Френкилем и Клебановым [1975], Вингардом, Пао и Виньянским [1976], Антониа и Данем [1977], а также рядом других исследователей.

В качестве примера на рис. 1.9, 1.10 представлены зависимости коэффициентов эксцесса пульсаций одной из компонент градиента скорости  $\partial u_1 / \partial x_1$  от числа  $Re_\lambda = \sqrt{\langle (u_1 - \langle u_1 \rangle)^2 \rangle} \lambda / \nu \sim Re^{1/2}$ , где  $\lambda^2 = \langle (u_1 - \langle u_1 \rangle)^2 \rangle / (\partial u_1 / \partial x_1)^2$ ,  $\lambda$  – микромасштаб Тейлора. Рис. 1.9 взят из работы Ван Атта и Антониа [1980], а рис. 1.10 – из работы Френкиля и Клебанова [1975]. Результаты измерений коэффициентов эксцесса градиента концентрации носят аналогичный характер (рис. 1.11, заимствованный из работы Тэваулэриса и Корсина [1981б]).

Результаты рассмотренных измерений свидетельствуют о том, что в потоке существуют области, в которых диссипация энергии намного превышает среднее значение. Поскольку  $\langle \epsilon \rangle$  не зависит от числа Рейнольдса, а коэффициент эксцесса пульсаций диссипации энергии, по-видимому, неограниченно растет с увеличением числа Рейнольдса, то отсюда вытекает, что диссипация энергии происходит в объеме, который стремится к нулю при  $Re \rightarrow \infty$ . Для пояснения сделанного вывода заметим, что распределение вероятностей случайной величины  $\xi$  можно рассматривать как отношение той части объема, в которой выполняется неравенство  $\xi < \xi_0$ , к общему объему системы (для простоты предполагается, что распределение  $\xi(x)$  статистически однородно, а процесс эргодичен). В связи с этим остановимся на вопросе, каковы распределения вероятностей диссипации энергии и скалярной диссипации.

Хотя известны и непосредственные измерения этих распределений (см. литературу, приведенную выше), здесь удобно ряд заключений сделать на

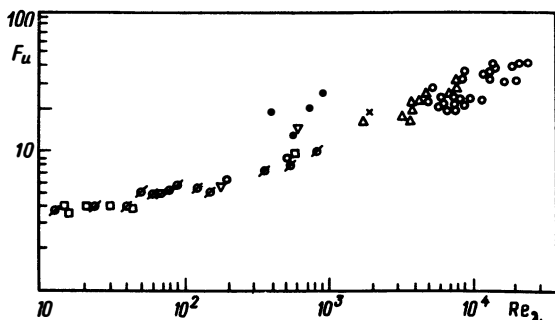


Рис. 1.9. Зависимость коэффициента эксцесса производной скорости от числа Рейнольдса по данным разных авторов (рисунок соответствует опытам в призмечном пограничном слое и в лабораторных условиях).  $F_u = \langle (\partial u_1 / \partial x_1)^4 \rangle / (\partial u_1 / \partial x_1)^2 = 3 + E_u$ . Различными значками обозначены данные разных авторов

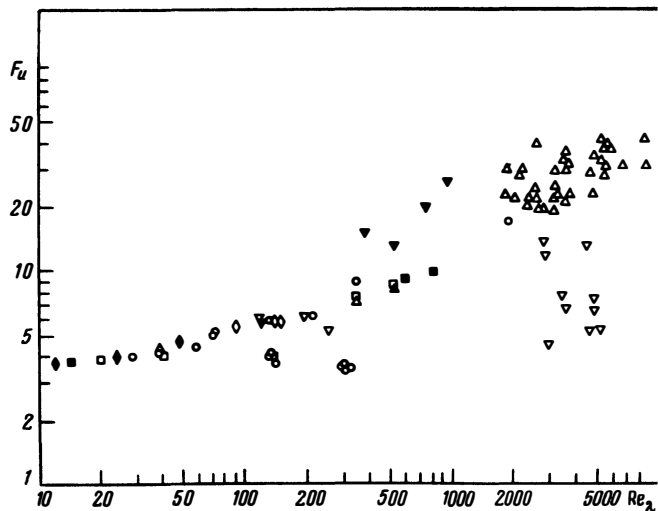


Рис. 1.10. Зависимость коэффициента эксцесса производной скорости от числа Рейнольдса в приземном пограничном слое и в лабораторных опытах по данным разных авторов.  $F_u = \langle (\partial u_i / \partial x_1)^4 \rangle / (\langle \partial u_i / \partial x_1 \rangle^2)^2 = 3 + E_u$ . Различными значками обозначены данные разных авторов

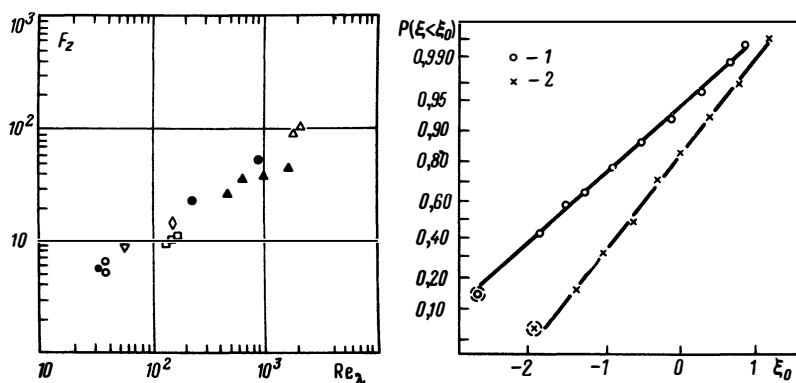


Рис. 1.11. Зависимость коэффициента эксцесса производной концентрации от числа Рейнольдса по данным разных авторов.  $F_z = \langle (\partial z / \partial x_1)^4 \rangle / (\langle \partial z / \partial x_1 \rangle^2)^2 = 3 + E_z$ . Различными значками обозначены данные разных авторов

Рис. 1.12. Распределение вероятностей квадрата разности температур в двух близких точках в приземном пограничном слое по данным Гурвича [1967]. Датчики устанавливались на высоте  $H = 4$  м от поверхности земли на расстоянии  $l = 2$  см друг от друга в направлении средней скорости ветра  $1 - Re_H = \langle u_1 \rangle H / \nu = 1.8 \cdot 10^6$ ,  $\langle u_1 \rangle = 7$  м/с,  $2 - Re_H = \langle u_1 \rangle H / \nu = 1.4 \cdot 10^6$ ,  $\langle u_1 \rangle = 5$  м/с,  $\xi_0 = \lg [(\Delta_l T)^2 / \langle (\Delta_l T)^2 \rangle]$ .  $P(\xi < \xi_0)$  — вероятность события  $\xi < \xi_0$ ,  $\langle u_1 \rangle$  — средняя скорость ветра; зависимости 1, 2 соответствуют двум отрезкам записи  $\Delta_l T$ , полученным в разные дни; масштаб по оси ординат выбран таким образом чтобы нормальному закону распределения соответствовала прямая линия

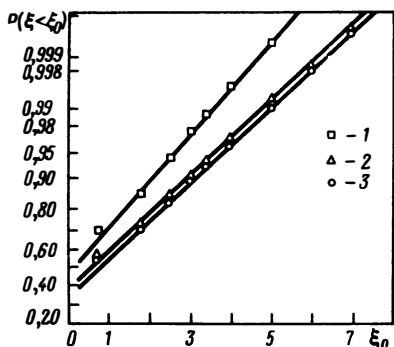


Рис. 1.13. Распределение вероятностей квадрата разности скоростей в двух близких точках в приземном пограничном слое по данным Гибсона, Стегена и Вильямса [1970]. Датчики устанавливались на высоте  $H = 1, 2$  и  $7$  м от поверхности земли на расстоянии  $l = 1$  см друг от друга в направлении средней скорости ветра. 1 –  $H = 7$  м, 2 –  $H = 2$  м, 3 –  $H = 1$  м,  $\xi_0 = \ln(\Delta_l \mu_1)^2 + \text{const}$ .  $P(\xi < \xi_0)$  – вероятность события  $\xi < \xi_0$ ; масштаб по оси ординат выбран тем же способом, что и на рис. 1.12

основе измерений распределений вероятностей разности скоростей или температур в двух близко расположенных точках. Из теоретических работ Колмогорова [1962а, б], Обухова [1962], Яглома [1966], Бетхова [1974, 1975, 1976], Бетхова и Лоренцена [1974], Бетхова и Ларсена [1981] известно, что эти распределения принципиально отличаются от нормального. Для иллюстрации на рис. 1.12 приведены результаты измерений в приземном пограничном слое распределения вероятностей квадрата разности температуры в двух близко расположенных точках  $(\Delta_l T)^2 = [T(x_1 + l) - T(x_1)]^2$  (ось  $x_1$  расположена в направлении среднего ветра). Эти данные получены Гурвичем [1967]. Аналогичные данные для квадрата разности скоростей  $(\Delta_l u_1)^2 = [u_1(x_1 + l) - u_1(x_1)]^2$  представлены на рис. 1.13, на котором помещены результаты опытов Гибсона, Стегена и Вильямса [1970] (см. также Гурвич [1966]). В обоих случаях расстояние между точками  $l$  удовлетворяет неравенству  $\eta \ll l \ll L$ .

Из приведенных данных видно, что в первом приближении рассматриваемые распределения близки к логнормальному (т.е. логарифм величины распределен по нормальному закону). Попытка теоретического обоснования этого закона содержится в работе Яглома [1966]. В указанной работе рассмотрено поле диссипации энергии  $\epsilon^l$ , осредненной по области с малым размером  $l$ . На основе достаточно правдоподобной гипотезы показано, что плотность вероятностей величины  $\epsilon^l$  имеет вид

$$P(\epsilon^l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\epsilon \epsilon^l} \exp \left\{ - \frac{(\ln(\epsilon^l/\langle \epsilon \rangle) + \sigma_\epsilon^2/2)^2}{2\sigma_\epsilon^2} \right\}, \quad (1.1)$$

$$\sigma_\epsilon^2 = \mu \ln(L/l) = \langle (\ln \epsilon^l - \langle \ln \epsilon^l \rangle)^2 \rangle,$$

$$\langle \ln \epsilon^l \rangle = \ln \langle \epsilon \rangle - \frac{1}{2} \sigma_\epsilon^2,$$

где  $\mu$  – некоторая константа. Часто предполагается, что эта формула дает плотность распределения вероятностей неосредненной диссипации, если  $l \sim \eta$  (см., например, Френкль и Клебанов [1975]). Из приведенной формулы следует, что при  $l = \eta$  предел

$$\lim_{R\epsilon \rightarrow \infty} \int_{k(\epsilon)}^{\infty} P(\epsilon^l) d\epsilon^l$$

равен нулю при любом сколь угодно малом (но фиксированном) значе-

нии  $k$ . Отсюда вытекает, что при  $Re \rightarrow \infty$  диссипация энергии сосредотачивается в области, объем которой стремится к нулю (Мандельброт [1974, 1976]).

Возникает вопрос, каким образом можно интерпретировать изложенные выше результаты. Еще раз напомним, что при больших числах Рейнольдса течение описывается системой уравнений с малым параметром при старших производных. Хорошо известно, что решения таких уравнений, как правило, имеют особенности, состоящие в том, что возникают области двух типов. В первом типе областей старшие производные (которые в данном случае описывают силы вязкости) несущественны. Во втором типе областей силы вязкости всегда играют важную роль: объем этих областей стремится к нулю при увеличении числа Рейнольдса. Теория ламинарного пограничного слоя на твердой поверхности хорошо иллюстрирует эту картину течения.

В свободном потоке, по-видимому, также могут возникать такие пограничные слои. Этот вывод, в частности, находит подтверждение в линейной теории устойчивости (напомним о так называемом критическом слое, внутри которого силы вязкости всегда существенны). С точки зрения теории идеальной жидкости пограничные слои рассматриваемого типа можно интерпретировать как тангенциальные разрывы.

К этой интерпретации следует относиться с большой осторожностью, так как возможно, что развитие неустойчивости в идеальной жидкости приводит к возникновению особенностей другого типа. Об этом свидетельствуют результаты, полученные в численном расчете течения, соответствующего вихрю Тейлора – Грина [1937], т.е.  $u_1 = \cos x_1 \sin x_2 \cos x_3$ ,  $u_2 = -\sin x_1 \cos x_2 \cos x_3$ ,  $u_3 = 0$  при  $t = 0$ . Такие расчеты для идеальной жидкости проводились Морфом, Оржегом и Фришем [1980], а для вязкой – Бречитом и др. [1983]. Установлено, что при  $t > 0$  течение становится трехмерным, а вихревые трубки растягиваются с нарастающей по времени скоростью и, как следствие, завихренность становится бесконечно большой через конечный промежуток времени. Разумеется, сейчас нет полной уверенности в том, что указанный результат отражает принципиальные свойства уравнений гидродинамики, а не обусловлен несовершенством численного алгоритма. Более подробное обсуждение вопроса о возникновении особенностей в решениях уравнений Эйлера и Навье – Стокса дано в работах Ладыженской [1970], Сафмена [1978, 1981], Сафмена и Бэйкера [1979], Марсдена и Мак-Кракена [1976]. Здесь отметим лишь наиболее важный результат, заключающийся в том, что особенности могут возникать только в трехмерном случае, так как в двумерном случае для гладких начальных условий доказана теорема о глобальном существовании и единственности решения как для уравнений Эйлера, так и для уравнений Навье – Стокса (см., например, Ладыженская [1970]). В трехмерном случае такую теорему доказать не удастся, и поэтому была высказана гипотеза о том, что в решении нестационарных уравнений Эйлера и Навье – Стокса с гладкими начальными условиями через конечное время возникает особенность (Лере [1934], Крейкнан [1975], Мандельброт [1976]).

Продолжим теперь обсуждение причин возникновения перемежаемости. Рассмотрим дальнейшую “судьбу” тангенциального разрыва. Известно, что в линейном приближении этот разрыв неустойчив, а инкремент нарастающей амплитуды возмущения (поверхности) обратно пропорционален дли-



не волны возмущения (см., например, Ландау и Лифшиц [1954], Бэтчелор [1967]). Последнее обстоятельство имеет, по-видимому, очень большое значение, так как при достаточно большой начальной интенсивности мелко-масштабных возмущений площадь поверхности разрыва сильно возрастает за малое время.

Можно предположить, что поверхность разрыва компактна (т.е. ее точки не выходят за пределы ограниченной пространственной области), а ее площадь бесконечно велика. Такая поверхность в известной мере напоминает губку, т.е. образование со множеством внутренних пустот, имеющих широкий спектр характерных размеров, и нечетко определенной внешней границей (существуют тонкие "каналы", соединяющие внутренность образования с внешним пространством). С этой точки зрения колебания внешней границы "губки" можно назвать внешней перемежаемостью, а колебания внутренних каналов – внутренней перемежаемостью.

Геометрические схемы перемежаемости, отражающие описанную выше картину, развивались Новиковым и Стюартом [1964], Новиковым [1965, 1966, 1969, 1971], Ягломом [1966], Мандельбротом [1976] (см. также обзор в книге Монина и Яглома [1967]). Попытки описания перемежаемости, основанные на численном интегрировании уравнений гидродинамики, предприняты Сиггие и Петерсоном [1978], Сиггие [1981], Пуллином [1981], Чорином [1981], Бречитом и др. [1983].

По-видимому, наиболее точно и вместе с тем просто отражает существо дела модель Новикова и Стюарта [1964], в которой предполагается, что поток можно разбить на  $n^3$  одинаковых кубов таких, что вся диссипация энергии сосредоточена в  $\gamma n^3$  из них ( $0 < \gamma < 1$ ), а в остальных равна нулю. Предполагается также, что каждый из числа  $\gamma n^3$  кубов можно снова разбить аналогичным образом, а при  $Re \rightarrow \infty$  процесс разбиения можно продолжить неограниченно. Таким образом, в любой точке потока можно найти нетурбулентную жидкость. Характерный размер областей, заполненных этой жидкостью, варьируется от нуля до интегрального масштаба турбулентности. Области, занятые турбулентной жидкостью, тесно "переплетаются" с областями, в которых находится нетурбулентная жидкость.

Аналогичные соображения высказаны Мандельбротом [1974, 1975, 1976, 1977], в работах которого для описания структуры турбулентной жидкости использовалось понятие о фракталах.

В практических исследованиях это понятие появилось в связи с определением длины береговой линии на основе картографических измерений. Оказалось, что она степенным образом растет при увеличении масштаба карты (учитываются все более и более мелкие детали). Основной количественной характеристикой фракталей является размерность Хаусдорфа – Безиковича, определяющая меру "запутанности" множества. Не приводя формального определения этой размерности, ограничимся простым, но нестрогим пояснением.

Пусть в некотором кубе есть множество точек. Разобьем этот куб на  $N^3$  одинаковых кубиков. Будем считать, что известно правило, позволяющее найти те кубики, в которых есть точки анализируемого множества. Пусть  $M(N)$  – число таких кубиков. Размерность Хаусдорфа – Безиковича можно определить по формуле  $d = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln M(N) / \ln N$ . Легко видеть, что если

множество точек имеет привычный вид, то  $d$  — целое число:  $d = 0$  для конечного числа точек:  $d = 1$  для линии конечной длины:  $d = 2$  для поверхности конечной площади:  $d = 3$  для конечного объема. В общем случае число  $d$  — нецелое. Таким образом, величина  $d$  дает также и обобщение понятия о числе измерений пространства.

Согласно Мандельброту [1976, 1977] при  $Re \rightarrow \infty$  диссипация энергии сосредоточена на множестве точек, которое с топологической точки зрения является поверхностью. Эта поверхность имеет бесконечную площадь и является столь "запутанной", что ее можно рассматривать как фракталь, для которого  $2 < d < 3$ .

Другая точка зрения на моделирование перемежаемости может быть основана на понятии о странных аттракторах. Проблеме странных аттракторов посвящен специальный сборник переводов "Странные аттракторы" под редакцией Синая и Шильникова [1981], а также обзоры Рабиновича [1978] и Моница [1978].

Основной результат, достигнутый в этой области, можно сформулировать следующим образом. Решения детерминированных систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с числом уравнений, равным или большим трех, часто оказываются плохо "прогнозируемыми" (и стохастическими с точки зрения экспериментатора) даже в том случае, когда решение существует и единственно и, следовательно, в этом решении не возникает никаких особенностей. Такая структура решений обусловлена тем, что каждая фазовая траектория неустойчива (т.е. с течением времени расстояние между двумя первоначально близкими фазовыми траекториями экспоненциально растет). Множество фазовых траекторий (странный аттрактор) компактно в том смысле, что все его точки не выходят за пределы некоторого конечного фазового объема. Для неконсервативных систем фазовый объем (точнее, лебегова мера) равен нулю, подобно тому, как равен нулю объем турбулентной жидкости при  $Re \rightarrow \infty$ . Распределение фазовых точек также напоминает распределение точек, принадлежащих турбулентной жидкости, в физическом пространстве. Связь между странными аттракторами и фракталами прослеживается вполне отчетливо (Мандельброт [1976]).

Рассмотренные выше экспериментальные данные и результаты их теоретического анализа указывают на то, что количественное определение характеристик перемежаемости связано с рядом принципиальных трудностей. Во-первых, неясно, как определить границы турбулентной жидкости (как уже указывалось, внутри области, которая на первый взгляд целиком заполнена турбулентной жидкостью, могут "проникать" тонкие каналы, заполненные нетурбулентной жидкостью). Во-вторых, поскольку при  $Re \rightarrow \infty$  вязкие эффекты существенны, по-видимому, лишь в области с нулевым объемом, становится неясным, что такое коэффициент перемежаемости, который обычно понимается как относительная величина объема, заполненного турбулентной жидкостью. В-третьих, возникает вопрос, какая гидродинамическая характеристика наилучшим образом подходит для определения перемежаемости. В самом деле, вблизи турбулентной области всегда найдется нетурбулентная. Если размеры обеих областей одного порядка, то энергии пульсаций также одного порядка, что ясно из ра-

бот Ландау и Лифшица [1954]. Филлипса [1955] (пульсации давления приводят к нелокальному переносу энергии). Следовательно, по характеру пульсаций скорости обе жидкости могут оказаться трудно различимыми.

Рассмотрим, как можно преодолеть указанные трудности. Очевидно, что последняя из них может быть устранена, если анализировать величины, определяемые наиболее мелкомасштабными пульсациями. Одной из таких величин является диссипация энергии. Она и будет рассматриваться в дальнейшем.

Заметим теперь, что при любом конечном числе Рейнольдса из-за вязкой диффузии завихренности диссипация энергии в любой точке отлична от нуля. Аналогичное утверждение справедливо и для концентрации примеси, т.е. из-за молекулярной диффузии скалярная диссипация везде отлична от нуля. Таким образом, перемежаемость, если так можно выразиться, явление, которое возникает только при  $Re = \infty$ , а при конечном числе  $Re$  строгого определения не имеет. Тем не менее, как это довольно часто бывает в физике вообще и в теории турбулентности в частности, введение при конечном числе Рейнольдса (пусть нестрогого и приближенного) понятия о перемежаемости оказывается чрезвычайно плодотворным\*). В этом случае, однако, при количественном определении перемежаемости требуется ввести некоторый граничный уровень  $\epsilon_0$ , считая жидкость турбулентной, если  $\epsilon > \epsilon_0$ , и нетурбулентной — в противном случае. Так как не существует сколько-нибудь удовлетворительного способа выбора  $\epsilon_0$ , то, несмотря на свою естественность и широкое использование в экспериментальных исследованиях, приведенное определение неконструктивно. Отмеченную трудность, казалось бы, можно преодолеть, если устремить число Рейнольдса к бесконечности и в связи с этим считать, что  $\epsilon_0 \rightarrow 0$ .

Однако в этом случае возникает новая трудность, связанная с тем, что объем турбулентной жидкости стремится к нулю и, следовательно, характеристики перемежаемости нельзя измерить. Несмотря на указанные трудности, количественные характеристики перемежаемости можно ввести, исходя из схемы Обухова [1962] (см. также Яглом [1966], Гурвич и Яглом [1967]). Рассмотрим поле диссипации  $\epsilon'$ , осредненной по областям с размером  $l$ , скажем по сферам с радиусом  $l$  и центром в точке  $x$ . Рассмотрение поля  $\epsilon'$  представляется не только естественным, но и даже вынужденным, если учесть, что в опытах всегда измеряются величины, осредненные по некоторой конечной области (размер этой области определяется, конечно, локальностью используемого измерительного устройства). В качестве граничного уровня диссипации энергии  $\epsilon_0$  возьмем  $\epsilon_0 = \langle \epsilon \rangle / Re$ . Такой выбор основан на интуитивных соображениях, согласно которым можно ожидать, что в нетурбулентной жидкости  $\lim_{Re \rightarrow \infty} \partial u_i / \partial x_j$  конечен и, следовательно, диссипация энергии в этой жидкости обратно пропорциональна числу Рейнольдса.

---

\*) Цель введения такого понятия основана на стремлении разделить область течения на участки, в которых существенна молекулярная вязкость и диссипация, и участки, где вязкие процессы не важны. Такое разделение позволит далее не только качественно, но и количественно описать многие сложные явления, наблюдающиеся в турбулентных течениях.

Введем функцию (индикатор) перемежаемости  $\Gamma^l(\mathbf{x}, t)$ :

$$\Gamma^l = 1, \quad \text{если} \quad \epsilon^l > \epsilon_0.$$

$$\Gamma^l = 0, \quad \text{если} \quad \epsilon^l < \epsilon_0.$$

Для моментов этой функции используем следующие обозначения:

$$\langle \Gamma^l \rangle = \gamma^l,$$

$$\langle [\Gamma^l(\mathbf{x}^{(1)}) - \Gamma^l(\mathbf{x}^{(2)})]^2 \rangle = D_{\gamma\gamma}^l, \quad (1.2)$$

$$\langle \Gamma^l(\mathbf{x}^{(1)}) \Gamma^l(\mathbf{x}^{(2)}) \Gamma^l(\mathbf{x}^{(3)}) \rangle = S_{\gamma\gamma\gamma}^l.$$

В случае локально однородной турбулентности имеем

$$D_{\gamma\gamma}^l = D_{\gamma\gamma}^l(r), \quad S_{\gamma\gamma\gamma}^l = S_{\gamma\gamma\gamma}^l(r, R), \quad (1.3)$$

$$r = \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}, \quad R = \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(1)}.$$

Рассмотрим также вероятность того, что в одной части точек пространства находится турбулентная жидкость, а в другой – нетурбулентная. Такой анализ необходим для выяснения структуры двух- и трехточечных плотностей распределения вероятностей скорости (см. главу 4). Эти вероятности будем обозначать символом  $\gamma^l$  с нижними индексами  $i$  и  $n$  (индекс  $l$  относится к турбулентной, а  $n$  – к нетурбулентной жидкости; порядковый номер индекса соответствует номеру точки). Например, символ  $\gamma_{int}^l$  означает, что рассматривается вероятность такого события, когда в первой и третьей точках находится нетурбулентная жидкость, а во второй – турбулентная. Введенные вероятности связаны с функцией перемежаемости. Так, например,

$$\gamma_{ii}^l = \langle \Gamma^l(\mathbf{x}^{(1)}) \Gamma^l(\mathbf{x}^{(2)}) \rangle, \quad \gamma_{int}^l = \langle \Gamma^l(\mathbf{x}^{(1)}) [1 - \Gamma^l(\mathbf{x}^{(2)})] \Gamma^l(\mathbf{x}^{(3)}) \rangle$$

и т.д. Используя определение структурной функции  $D_{\gamma\gamma}^l$  и соотношения, связывающие  $\gamma_{ii}^l, \dots, \gamma_{nn}^l$  с функцией перемежаемости, для локально однородной турбулентности найдем

$$\langle \Gamma^l(\mathbf{x}^{(1)}) \Gamma^l(\mathbf{x}^{(2)}) \rangle = \gamma_{ii}^l = \gamma^l - \frac{1}{2} D_{\gamma\gamma}^l(r)$$

$$\langle \Gamma^l(\mathbf{x}^{(1)}) [1 - \Gamma^l(\mathbf{x}^{(2)})] \rangle = \gamma_{in}^l = \frac{1}{2} D_{\gamma\gamma}^l(r), \quad (1.4)$$

$$\langle [1 - \Gamma^l(\mathbf{x}^{(1)})] \Gamma^l(\mathbf{x}^{(2)}) \rangle = \gamma_{ni}^l = \frac{1}{2} D_{\gamma\gamma}^l(r).$$

$$\langle [1 - \Gamma^l(\mathbf{x}^{(1)})] [1 - \Gamma^l(\mathbf{x}^{(2)})] \rangle = \gamma_{nn}^l = 1 - \gamma^l - \frac{1}{2} D_{\gamma\gamma}^l(r).$$

Из общих соображений ясно, что рациональное определение характеристик перемежаемости должно основываться на двойном предельном переходе, когда  $Re \rightarrow \infty$  и  $l \rightarrow 0$ . Результат такого перехода, по-видимому, неоднозначен. Косвенно этот вывод подтверждается тем, что до сих пор не выработан общепринятый алгоритм измерения коэффициента перемежаемости. Известны и прямые доказательства его справедливости. В частности, в работе Куо и Корсина [1971] был избран алгоритм измерения, приведший к необычным результатам. Во-первых, было установлено, что коэффициент перемежаемости уменьшается с ростом числа Рейнольдса. Во-вторых, полученные значения  $\gamma$  оказались существенно меньше единицы в тех областях

потока, в которых традиционно считается, что  $\gamma = 1$  (например, на оси затопленной струи).

Таким образом, можно предположить, что моменты функции перемежаемости стремятся к некоторым значениям, которые существенно зависят от того, по каким законам стремятся  $l$  к нулю и  $Re$  к бесконечности. В частности, для коэффициента перемежаемости можно получить любое значение в интервале  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{\max} \leq 1$ . Здесь нижняя оценка  $\gamma$  выбрана на основе изложенных выше георетических соображений и экспериментальных данных, из которых следует, что объем, занятый турбулентной жидкостью, стремится к нулю при  $Re \rightarrow \infty$ . Очевидно, что если сначала  $l$  стремится к нулю, а затем  $Re$  — к бесконечности, т.е. все измерения проводятся точно, то будет получено нулевое значение  $\gamma$ . Тем самым будут измерены характеристики внутренней перемежаемости. Другой вариант предельного перехода основан на том, что сначала устремляется к бесконечности число  $Re$ , а затем устремляется к нулю размер области  $l$ . В этом случае происходит максимальное сглаживание всех мелкомасштабных деталей, и, следовательно, можно предположить, что в таком варианте получается максимально возможное значение  $\gamma$ .

На основе проведенной ранее аналогии между турбулентной жидкостью и губкой можно ожидать, что такое сглаживание как бы "закрывает" все внутренние каналы, которые идут внутрь от ее внешней границы. При этом в турбулентной жидкости могут оставаться неодносвязные нетурбулентные области, размер которых сильно варьируется (он может быть и порядка интегрального масштаба турбулентности). Таким образом, представляется, что второй вариант предельного перехода дает характеристики внешней перемежаемости. Сравнение обоих вариантов предельного перехода показывает, что при строгом понимании нет двух разных видов перемежаемости, а есть лишь одна перемежаемость, характеристики которой до сих пор определялись неоднозначно.

Представляется, что второй вариант предельного перехода ( $\lim_{l \rightarrow 0} \lim_{Re \rightarrow \infty}$ ) наилучшим образом соответствует алгоритмам, которые используются в опытах при исследовании так называемой внешней перемежаемости.

Сделанное заключение основывается на следующих соображениях. Обратимся к формуле (1.1). Хотя и в настоящее время существуют серьезные сомнения в справедливости логнормального закона (см. главу 4), эта формула иллюстрирует основную качественную особенность распределения диссипации, состоящую в том, что амплитуда пульсаций величины  $\epsilon$  изменяется в исключительно широком диапазоне значений. Следовательно, оценивая локальность измерительного устройства, размер области, по которой производится осреднение, необходимо сравнивать не с колмогоровским масштабом, определяемым по величине  $\langle \epsilon \rangle$ , а с колмогоровским масштабом, вычисляемым по истинному (неосредненному) значению  $\epsilon$ . Поскольку  $\epsilon \gg \langle \epsilon \rangle$  в турбулентной жидкости, то требования, предъявляемые к локальности измерительной аппаратуры, сильно возрастают. В частности, оценки, проведенные в главе 4, показывают, что в большинстве случаев для точного измерения  $\epsilon$  необходимо, чтобы размер осредняющей области был меньше, чем  $\nu^{3/4} / \langle \epsilon \rangle^{1/4}$ . Это условие, насколько известно, не выполнялось ни в одном из известных исследований. Таким образом, в опытах изме-

руются значительно сглаженные характеристики и, следовательно, существует определенная аналогия между предложенным теоретическим алгоритмом и алгоритмами, используемыми в экспериментальных исследованиях (легко видеть, что при  $Re \rightarrow \infty$  и  $l \neq 0$  также рассматриваются сглаженные характеристики турбулентности). Следует также отметить, что в ряде исследований специально используются алгоритмы, фактически основанные на рассмотрении сглаженных характеристик; например, жидкость считается турбулентной, если пороговое значение превышает в течение промежутка времени, продолжительность которого не менее заданной величины (Хелли и Кеффер [1974а, б]).

В соответствии с проведенным выше анализом, далее, под величинами  $\gamma$ ,  $D_{\gamma\gamma}$ ,  $S_{\gamma\gamma}$  понимаются такие пределы  $\gamma^l$ ,  $D_{\gamma\gamma}^l$ ,  $S_{\gamma\gamma}^l$ , когда сначала  $Re \rightarrow \infty$  при  $l = \text{const}$ , а затем  $l \rightarrow 0$ . При этом в формулах (1.2) – (1.4) верхний индекс  $l$  будет опускаться.

В заключение этого параграфа остановимся на результатах измерений некоторых характеристик перемежаемости, которые потребуются для интерпретации результатов, полученных в главах 3 и 4. Начнем с изучения поведения структурной функции  $D_{\gamma\gamma}$ , о котором можно судить по результатам измерений спектра корреляции функции перемежаемости  $\langle \Gamma(x^{(1)}) \Gamma(x^{(2)}) \rangle$  в работе Ля Рю и Либби [1976] (измерения этой корреляции проводились также Коважным, Кибенсом и Блэкуелдером [1970], Барсоумом, Каваллом и Кеффером [1978], Моумом, Каваллом и Кеффером [1979]; их результаты аналогичны данным Ля Рю и Либби [1976]). В этой работе исследовался след за нагретым круговым цилиндром, а границы турбулентной жидкости определялись по полю температуры (применимость этого способа измерения перемежаемости рассматривалась выше; см. также § 1.3). Хотя и нет полной уверенности в адекватности введенного выше определения перемежаемости и определения, использованного в опытах Ля Рю и Либби [1976], все же можно ожидать, что качественный характер функции  $D_{\gamma\gamma}(r)$  в эксперименте установлен правильно. Согласно данным Ля Рю и Либби [1976] (рис. 1.14) спектр структурной функции  $D_{\gamma\gamma}$  пропорционален  $\kappa^{-2}$  ( $\kappa$  – волновое число) и, следовательно,  $D_{\gamma\gamma}(\dot{r}) \sim r$  (в опытах значения  $r$  лежат в диапазоне  $r = 0,01 - 0,1 L_c$ ,  $L_c$  – ширина следа). Из соотношений (1.4) тогда получаем, что  $\gamma_{\tau\tau}$  возрастает с умень-

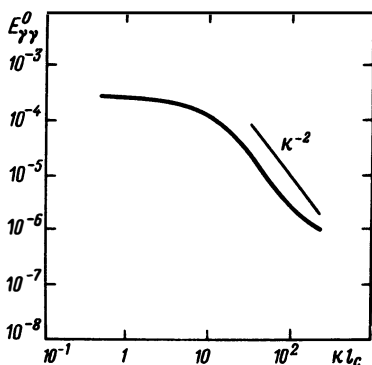


Рис. 1.14. Нормированный спектр функции перемежаемости в следе за круговым цилиндром по данным Ля Рю и Либби [1976].  $x_1/d = 400$ ,  $Re_d = u_0 d/\nu = 2,8 \cdot 10^3$ ,  $d = 0,66$  см,  $u_0 = 7,6$  м/с,  $E_{\gamma\gamma}^0 = E_{\gamma\gamma}/l_c \langle (\Gamma - \langle \Gamma \rangle)^2 \rangle$ ,  $E_{\gamma\gamma}$  – спектр корреляции  $\langle \Gamma(x_1) \Gamma(x_1 + r) \rangle$ ,  $\kappa$  – волновое число,  $l_c = \sqrt{(x_1 - x_{10}) d}$ ,  $x_{10} = -40d$ . На рисунке показаны данные на различных расстояниях от плоскости симметрии следа в диапазоне  $x_1/l_c = 0,294 - 0,396$ ,  $\gamma = 0,299 - 0,762$

шением  $r$ . Поскольку величина  $\gamma_{rt}$  по своему физическому смыслу характеризует относительный объем областей, занятых турбулентной жидкостью и имеющих размер порядка  $r$  то проявление перемежаемости уменьшается по мере перехода к малым масштабам.

Так как энергия передается от крупномасштабных возмущений к мелкомасштабным, то естественно предполагать, что возмущения с размером порядка  $r$  возникли в результате неустойчивости течения в областях с большими, чем  $r$ , размерами. Увеличение  $\gamma_{rt}$  при  $r/L \rightarrow 0$  показывает, что происходит захват нетурбулентной жидкости. Обратный процесс (переход турбулентной жидкости в нетурбулентную) невозможен, поскольку жидкие частицы не выходят из области, занятой вихревым движением (см., например, Ландау и Лифшиц [1954]).

Величины  $\gamma_{nt}$  и  $\gamma_{tn}$  характеризуют относительный объем областей, в которых наблюдаются одновременно обе жидкости. Эти величины, следовательно, могут служить мерой искривленности границы области, занятой турбулентной жидкостью. Из (1.4) видно, что  $\gamma_{tn} = \gamma_{nt} \rightarrow 0$  при  $r/L \rightarrow 0$  ( $D_{\gamma\gamma} \rightarrow 0$ ), т.е. границы турбулентной жидкости искривлены не слишком сильно. Количественную меру этих искривлений удобно дать позже (см. § 3.1 и 3.8) при обсуждении вопроса о площади изоскалярных поверхностей в турбулентных потоках. Полученный вывод подтверждается измерениями плотности вероятностей  $P(\tau)$  протяженности  $\tau$  "турбулентных" интервалов (промежутков времени, в течение которых в данной точке наблюдается турбулентная жидкость; такие промежутки времени можно связать с пространственными масштабами, используя гипотезу Тейлора о замороженности турбулентности). В работах Корсина и Кистлера [1955], Ля Рю и Либби [1976, 1978], Кавалла и Кеффера [1979], Шеврэ и Туту [1978], Барсоума, Кавалла и Кеффера [1978], Моума, Кавалла и Кеффера

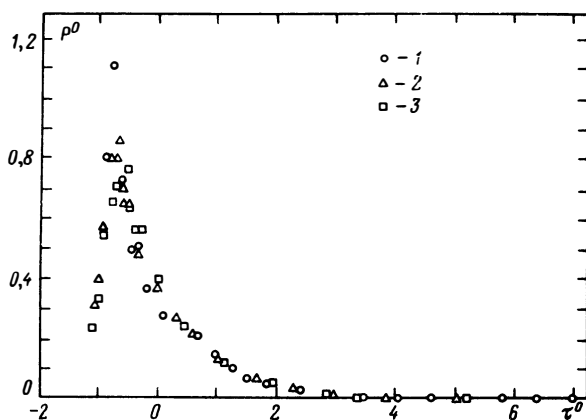


Рис. 1.15 Плотность распределения вероятностей протяженности "турбулентных" интервалов по данным Ля Рю и Либби [1976] 1 -  $x_2/c = 0.294$ ,  $\gamma = 0.762$ , 2 -  $x_2/c = 0.349$ ,  $\gamma = 0.509$ , 3 -  $x_2/c = 0.39$ ,  $\gamma = 0.299$ ,  $P^0 = \tau'P$ ,  $\tau^0 = (\tau - \langle \tau \rangle) / \tau'$ ,  $\langle \tau \rangle$  - средняя продолжительность "турбулентных" интервалов,  $\tau' = \langle (\tau - \langle \tau \rangle)^2 \rangle^{1/2}$  - среднеквадратическое значение продолжительности "турбулентных" интервалов. Условия опытов те же, что и на рис. 1.14

[1979] показано, что  $P(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ . В качестве примера, иллюстрирующего сказанное, на рис. 1.15 показаны экспериментальные данные Ля Рю и Либби [1976] (измерения проводились в следе за нагретым круговым цилиндром). Если границы турбулентной жидкости были бы сильно искривлены, то рассматриваемая плотность вероятностей принимала бы очень большие значения при  $\tau \rightarrow 0$ . Таким образом, наблюдаемый в опытах характер поведения  $P(\tau)$  при  $\tau \rightarrow 0$  согласуется с принятым определением коэффициента перемежаемости.

### § 1.2. Качественная структура двухточечных и трехточечных плотностей распределений вероятностей разностей скоростей в локально однородной турбулентности

В предыдущем параграфе уже говорилось, что перемежаемость оказывает существенное влияние на  $n$ -точечные ( $n \geq 2$ ) плотности вероятностей скоростей в турбулентных потоках. В особенности это относится к случаю, когда расстояние между какими-либо двумя точками мало по сравнению с масштабом турбулентности  $L = q^3 / \langle \epsilon \rangle$ ,  $q^2 = \langle (\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle)^2 \rangle$ . Целью этого параграфа является качественный анализ влияния перемежаемости на вид рассматриваемых плотностей вероятностей для  $n = 2$  и  $n = 3$ .

Вначале проанализируем структуру двухточечной плотности вероятностей разности скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(x^{(2)}) - \mathbf{u}(x^{(1)})$ ,  $r = x^{(2)} - x^{(1)}$ . Введем в рассмотрение четыре условные двухточечные плотности вероятностей разности скоростей:  $P_{tt}$ ,  $P_{tn}$ ,  $P_{nt}$ ,  $P_{nn}$ , которые соответствуют вероятностям  $\gamma_{tt}$ ,  $\gamma_{tn}$ ,  $\gamma_{nt}$ ,  $\gamma_{nn}$ . Согласно формуле Бейеса для безусловной плотности вероятностей разности скоростей имеем

$$P(\mathbf{v}, r) = \gamma_{tt} P_{tt} + \gamma_{nt} P_{nt} + \gamma_{tn} P_{tn} + \gamma_{nn} P_{nn}. \quad (1.5)$$

Рассмотрим случай, когда расстояние между точками удовлетворяет неравенству  $r \ll L$ . Как уже отмечалось, пульсации давления, возникающие в турбулентной жидкости, генерируют колебания скорости в нетурбулентной жидкости. Поэтому можно предположить, что при переходе через границу этой жидкости энергия турбулентности меняется не слишком сильно.

Это предположение согласуется с измерениями в струях, следах и пограничных слоях различных одноточечных моментов, полученных условным осреднением по турбулентной и нетурбулентной жидкостям (Коважный, Кибенс и Блэкуелдер [1970], Дженкинс и Гольдшмидт [1976], Олер, Дженкинс и Гольдшмидт [1981] и т.д.). В качестве характерного примера сошлемся на рис. 1.8, где приведены результаты измерений в пограничном слое на пластине.

Напомним также о теоретических результатах Ландау и Лифшица [1954] и Филлипа [1955] относительно движения в нетурбулентной жидкости. Ими показано, что по мере удаления от границ турбулентной жидкости пульсации скорости затухают плавным образом. В силу сказанного можно предположить, что пульсации давления настолько эффективно перераспределяют энергию между обеими жидкостями, что

$$P_{nt} = P_{tn} = P_{tt} \text{ при } r/L \rightarrow 0. \quad (1.6)$$



Эти формулы несправедливы при любом фиксированном значении  $r/L$ , так как из работ Ландау и Лифшица и Филлипса известно, что по мере продвижения в глубь нетурбулентной жидкости амплитуда пульсаций затухает тем быстрее, чем больше ее волновое число.

Рассмотрим теперь общиe свойства функции  $P_{nn}$ . Две точки могут лежать либо близко от границ турбулентной жидкости, либо далеко от них. Как установлено в § 1.1, эти границы искривлены не слишком сильно, и, следовательно, при  $r/L \rightarrow 0$  можно пренебречь вероятностью первого события и рассматривать только второе, т.е. наибольший вклад в условную плотность вероятностей  $P_{nn}$  дают события, происходящие в точках, которые находятся глубоко в нетурбулентной жидкости (на расстояниях от границ много больше  $r$ ). По мере проникновения в глубь нетурбулентной жидкости гармонические колебания давления и скорости экспоненциально затухают, а декремент этого затухания обратно пропорционален волновому числу (Ландау и Лифшиц [1954], Филлипс [1955]). Отсюда вытекает ряд важных выводов. В нетурбулентной жидкости интенсивность мелко-масштабных пульсаций мала, в связи с чем можно считать, что в области с характерным размером порядка  $r$  ( $r/L \rightarrow 0$ ) скорость меняется по линейному закону (это предположение нетривиально, так как  $Re = \infty$ ), т.е.  $v_i = A_{ij} r_j$ , где  $A_{ij}$  — некоторый случайный тензор. Поскольку в нетурбулентную жидкость проникают главным образом крупномасштабные пульсации, то тензор  $A_{ij}$  определяется крупномасштабным движением в турбулентной жидкости. Следовательно, пульсации скорости в нетурбулентной жидкости локально однородны ( $v$  зависит лишь от расстояния между точками), но, вообще говоря, не изотропны (тензор  $A_{ij}$  зависит от крупномасштабных флуктуаций). Отсюда также следует, что в нетурбулентной жидкости при малом расстоянии между точками структурная функция пульсаций скорости  $\langle v_i v_j \rangle_n$  определяется крупномасштабными пульсациями.

Таким образом, влияние турбулентной жидкости на нетурбулентную определяется непосредственным взаимодействием крупномасштабных и мелкомасштабных флуктуаций. Из проведенного анализа следует также, что поскольку  $v_i = A_{ij} r_j$ , то справедлива оценка

$$\langle v^k \rangle_n \approx A_k(r/L)^k, \quad (1.7)$$

где  $A_k$  не зависит от  $r$ .

В § 1.1 установлено, что  $D_{\gamma\gamma}(r) \rightarrow 0$  при  $r/L \rightarrow 0$ . Используя этот результат, из (1.5) с помощью (1.4), (1.6), (1.7) получим следующее асимптотическое представление безусловной двухточечной плотности вероятностей разности скоростей:

$$P(v, r) \rightarrow \gamma P_{tt} + (1 - \gamma) P_{nn} \quad \text{при } r/L \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

Формула (1.8) свидетельствует о том, что если  $r/L \rightarrow 0$ , то при нахождении величин  $\gamma_{tt}, \gamma_{tn}, \gamma_{nt}, \gamma_{nn}$  обе точки можно формально рассматривать как одну.

Покажем теперь, что аналогичные результаты справедливы и для трехточечной безусловной плотности вероятностей разностей скоростей  $P(v, V, R, R)$ ,  $V = u(x^{(3)})$ ,  $u(x^{(1)})$ ,  $R = x^{(3)} - x^{(1)}$ . Связь этой функции с

условными трехточечными плотностями вероятностей имеет вид

$$P(v, V, r, R) = \gamma_{ttt} P_{ttt} + \gamma_{ttn} P_{ttn} + \dots + \gamma_{int} P_{int} + \gamma_{nnn} P_{nnn}. \quad (1.9)$$

Здесь вместо остальных четырех членов, вид которых ясен из структуры формулы, стоит многоточие.

Вероятности  $\gamma_{ttt} \dots \gamma_{nnn}$  легко выражаются через  $\gamma$ ,  $D_{\gamma\gamma}$  и  $S_{\gamma\gamma\gamma}$  с помощью соотношений, аналогичных формулам (1.4). Далее, основной интерес будут представлять два случая: 1)  $r/L \rightarrow 0, R \sim L$ ; 2)  $r/L \rightarrow 0, R/L \rightarrow 0$ .

По-прежнему будем считать, что если в одной из точек находится турбулентная жидкость, то во всех остальных близких расположенных точках статистические свойства пульсаций такие же, как и в турбулентной жидкости. Тогда в первом случае по аналогии с формулой (1.6) имеем соотношения

$$P_{ntn} = P_{ttn} = P_{ttn}, \quad P_{nnt} = P_{int} = P_{itt}, \quad (1.10)$$

и, следовательно, формула (1.9) принимает вид

$$P(v, V, r, R) = (\gamma_{ttt} + \gamma_{nnt} + \gamma_{int}) P_{ttt} + \gamma_{nnt} P_{nnt} + (\gamma_{ttn} + \gamma_{ntn} + \gamma_{inn}) P_{ttn} + \gamma_{nnn} P_{nnn}. \quad (1.11)$$

Поскольку  $R \sim L$ , то при нахождении вероятностей  $\gamma_{ttt} \dots \gamma_{nnn}$  в первом приближении можно считать, что появление турбулентной жидкости в точке  $x^{(3)}$  не зависит от того, какая жидкость находится в точках  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$ . Учитывая это замечание, а также то, что при  $r/L \rightarrow 0$  структурная функция  $D_{\gamma\gamma}$  стремится к нулю, нетрудно показать, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{ttt} &\rightarrow \gamma^2, \quad \gamma_{nnt} = \gamma_{int} \rightarrow 0, \quad \gamma_{ntn} = \gamma_{ttn} \rightarrow 0, \\ \gamma_{ttn} = \gamma_{nnt} &\rightarrow \gamma(1-\gamma), \quad \gamma_{nnn} \rightarrow (1-\gamma)^2, \quad r/L \rightarrow 0, \quad R \sim L. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Во втором случае имеем

$$P_{ttn} = P_{ttn} = P_{ntn} = P_{nnt} = P_{ntt} = P_{itt} = P_{ttt}, \quad r/L \rightarrow 0, \quad R/L \rightarrow 0, \quad (1.13)$$

и формула (1.9) дает

$$P(v, V, r, R) = (\gamma_{ttt} + \gamma_{ttn} + \gamma_{ttn} + \gamma_{ntn} + \gamma_{nnt} + \gamma_{ntt} + \gamma_{int}) P_{ttt} + \gamma_{nnn} P_{nnn}, \quad r/L \rightarrow 0, \quad R/L \rightarrow 0. \quad (1.14)$$

Вероятности  $\gamma_{ttt}, \gamma_{ttn}, \dots$  выражаются через момент  $S_{\gamma\gamma\gamma}$ , для нахождения асимптотики которого при  $r/L \rightarrow 0, R/L \rightarrow 0$  рассмотрим тождество (при проверке этого тождества надо учесть, что из определения функции перемежаемости следует, что  $[\Gamma(x)]^2 = \Gamma(x)$ )

$$\begin{aligned} S_{\gamma\gamma\gamma} &= \frac{1}{2} \{ \langle \Gamma(x^{(1)}) \Gamma(x^{(3)}) \rangle + \langle \Gamma(x^{(2)}) \Gamma(x^{(3)}) \rangle - \\ &- \langle [\Gamma(x^{(1)}) - \Gamma(x^{(2)})]^2 \Gamma(x^{(3)}) \rangle \}. \end{aligned}$$

Поскольку  $1 \geq \Gamma \geq 0$ , то

$$\begin{aligned} \langle [\Gamma(x^{(1)}) - \Gamma(x^{(2)})]^2 \Gamma(x^{(3)}) \rangle &\leq \\ \leq \langle [\Gamma(x^{(1)}) - \Gamma(x^{(2)})]^2 \rangle &= D_{\gamma\gamma}(r). \end{aligned}$$

Так как  $D_{\gamma\gamma} \rightarrow 0$  при  $r/L \rightarrow 0$ , то из полученного неравенства и соотношений (1.4) следует, что

$$S_{\gamma\gamma\gamma} \rightarrow \gamma, \quad r/L \rightarrow 0, \quad R/L \rightarrow 0.$$

Используя условия  $S_{\gamma\gamma\gamma} \rightarrow \gamma$ ,  $D_{\gamma\gamma} \rightarrow 0$  при  $r/L \rightarrow 0$ ,  $R/L \rightarrow 0$ , можно показать, что среди  $\gamma_{ttt}$ , ... ненулевые пределы существуют лишь у  $\gamma_{ttt}$  и  $\gamma_{nnn}$ , т.е.

$$\gamma_{ttt} \rightarrow \gamma, \quad \gamma_{nnn} \rightarrow 1 - \gamma, \quad r/L \rightarrow 0, \quad R/L \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

Формула (1.15) показывает, что во втором случае при нахождении  $\gamma_{ttt}, \dots, \gamma_{nnn}$  все три точки можно формально рассматривать как одну.

Подставляя предельные зависимости (1.12) и (1.15) в соотношения (1.11) и (1.14) соответственно, получим следующие асимптотические представления для  $P(v, V, r, R)$ :

$$P(v, V, r, R) = \gamma^2 P_{ttt} + \gamma(1 - \gamma)(P_{tin} + P_{nnt}) + (1 - \gamma)^2 P_{nnn}, \quad (1.16)$$

$$r/L \rightarrow 0, \quad R \sim L,$$

и

$$P(v, V, r, R) = \gamma P_{ttt} + (1 - \gamma) P_{nnn}. \quad r/L \rightarrow 0, \quad R/L \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

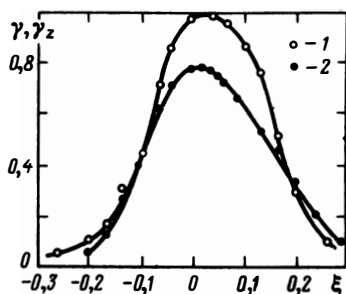
### § 1.3. Качественный вид плотности распределения вероятностей концентрации пассивной примеси в турбулентных течениях

Особенно сильное влияние перемежаемость оказывает на плотности распределения вероятностей скалярных величин, изменяющихся как правило, в ограниченном интервале. В данном параграфе это влияние анализируется в случае динамически пассивной примеси, концентрация которой будет обозначаться буквой  $z$ . Известно, что при малых перегревах жидкости (т.е. когда архимедовы силы малы по сравнению с инерционными) температурное поле также может рассматриваться как пассивная примесь. Отмеченное свойство широко используется в экспериментальных исследованиях. При этом роль концентрации играет безразмерная разность температур  $\Delta T / (\Delta T)_{\max}$  (здесь  $\Delta T = T - T_0$ ,  $T_0$  — минимальное значение температуры в потоке).

Как ясно из § 1.1, структура полей диссипации энергии  $\epsilon$  и скалярной диссипации  $N$  качественно одинакова. В тех областях потока, где  $\epsilon = 0$ , можно ожидать, что и  $N = 0$  (напомним еще раз, что имеется в виду предельный случай, когда числа Рейнольдса и Пекле стремятся к бесконечности; поскольку для газов коэффициенты молекулярного переноса близки между собой, далее, для краткости будем говорить только о числе Рейнольдса). Так как предполагается, что в начальный момент времени примесь в нетурбулентной жидкости отсутствует, то пульсации давления, возбуждающие флуктуации скорости в нетурбулентной жидкости, не могут генерировать в ней флуктуации концентрации, поскольку в уравнении диффузии нет члена, аналогичного градиенту давления в уравнении движения. Поэтому наличие или отсутствие пульсаций концентрации в нетурбулентной жидкости зависит только от начальных условий. Вследствие одностороннего обмена меж-

ду турбулентной и нетурбулентной жидкостями (см. предыдущий параграф) можно ожидать, что если при  $l = 0$  в нетурбулентной жидкости примеси не было, то она будет отсутствовать в ней и во все последующие моменты времени. Это заключение подтверждается наблюдениями в струях, следах и других свободных течениях (см., например, работы Уберои и Сингха [1975], Фабриса [1979а, б], Брайденалея [1981], Лонга и Чу [1981], Лонга, Чу и Ченга [1981]). Поэтому коэффициенты перемежаемости  $\gamma$  и  $\gamma_z$ , определенные по динамическому и скалярным полям соответственно,

Рис. 1.16. Профиль коэффициента перемежаемости в слое смешения на начальном участке затопленной подогретой осесимметричной струи по данным Кузнецова и Расщупкина [1977]. Измерения проводились на расстоянии  $x_1 = 30$  см от кромки сопла; толщина динамического пограничного слоя на кромке сопла  $\delta = 7$  мм; толщина температурного пограничного слоя на порядок меньше;  $Re_\delta = u_0 \delta / \nu = 3,73 \cdot 10^3$ ,  $u_0 = 8$  м/с;  $1 - \gamma$ ,  $2 - \gamma_z$ ,  $\xi = x_2 / x_1$ ; начало координат располагается на кромке сопла; ось  $x_2$  направлена под прямым углом к оси симметрии струи в сторону затопленного пространства



обычно совпадают (возможные исключения проанализированы ниже). Последнее обстоятельство используется во многих экспериментальных работах (см., например, Беккер, Хоттел и Вильямс [1967], Антониа, Прабху и Стефенсон [1975], Ля Рю [1974], Ля Рю и Либби [1974], Башир и Уберон [1975], Андерсон, Ля Рю и Либби [1979]). Тем не менее необходимо отчетливо сознавать, что перемежаемость есть чисто гидродинамическое явление, описание которого должно опираться на уравнения Навье — Стокса. Свойства поля концентрации служат лишь косвенными признаками, по которым можно судить о проявлении перемежаемости.

Остановимся теперь на обсуждении уже упомянутых выше случаев, когда возможны отклонения от равенства  $\gamma = \gamma_z$ . Из интуитивных соображений, основанных на физической картине течения, ясно, что примесь распространяется, вообще говоря, не по всей турбулентной жидкости, так как отдельные "куски" такой жидкости не обязательно имеют общие границы. Наблюдения за струей дыма, распространяющейся в турбулентной атмосфере, иллюстрируют сказанное. Очевидно, что коэффициенты  $\gamma$  и  $\gamma_z$  связаны неравенством

$$\gamma \geq \gamma_z. \quad (1.18)$$

Неравенство (1.18) для свободных турбулентных течений подтверждено в опытах Кузнецова и Расщупкина [1977] (рис. 1.16). В этих опытах исследовался слой смешения на начальном участке подогретой осесимметричной струи, вытекавшей в неподвижный холодный воздух. В начальном сечении ширина динамического пограничного слоя была на порядок меньше ширины теплового пограничного слоя, в силу чего и выполнялось неравенство (1.18).

На основе вышеизложенного можно предположить, что особенно сильные различия между  $\gamma$  и  $\gamma_z$  возникают в тех случаях, когда число не

связанных между собой "кусков" турбулентной жидкости велико. Такая ситуация может иметь место, например, в потоке за турбулизирующими решетками и течениях в каналах. Здесь число "кусков" столь велико, что гидродинамический коэффициент перемежаемости практически не отличается от единицы, т.е.  $\gamma \approx 1$ , в то время как  $\gamma_z$  может быть близким к нулю. Указанный эффект целиком обусловлен различными начальными условиями для скалярного и динамического поля и не связан с какими-либо принципиальными особенностями перемежаемости.

Экспериментальному исследованию поля концентрации в таких течениях посвящено достаточно большое количество работ (Расщупкин и Секундов [1978], Гад-Эль-Хак и Мортон [1979], Кеффер, Ольсен и Кавалл [1977], Ля Рю и Либби [1981], Мешков и Щербина [1981], Ля Рю, Либби и Сешадри [1981], Щербина [1982]). В этих работах изучалось статистически неоднородное поле концентрации в однородной турбулентности. В этих случаях перемежаемость особенно сильно сказывается на характеристиках скалярного поля и процесс турбулентного переноса примеси обладает целым рядом особенностей (Расщупкин и Секундов [1978]).

В данной книге такие случаи рассматриваться не будут. Ниже основной интерес представляют течения, близкие к автомобильным (дальний след, основной участок струй), в которых величины  $\gamma$  и  $\gamma_z$  практически неразличимы, вследствие чего, далее, индекс  $z$  часто будет опускаться.

Если в нетурбулентной жидкости примесь отсутствует, то условная плотность вероятностей концентрации в ней есть дельта-функция. В простейшем случае есть два типа областей, занятых нетурбулентной жидкостью: в одних областях  $z = 0$ , а в других  $z = 1$ . При любом сколь угодно большом, но конечном числе  $Re$  таких областей в строгом смысле не существует. Поэтому во избежание недоразумений еще раз подчеркнем, что в этих рассуждениях число Рейнольдса предполагается равным бесконечности, а результат такого анализа будет далее использован для приближенного описания течений при конечном числе Рейнольдса. Если вероятность наблюдения в нетурбулентной жидкости значения  $z = 1$  мала (дальний след, основной участок струй), безусловная плотность вероятностей концентрации имеет вид (Кузнецов [1972а], Кузнецов и Фрост [1973])

$$\begin{aligned} P(z) &= \gamma P_t(z) + (1 - \gamma) \delta(z) \\ P_t(z) &= \theta(z) F(z). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь  $P_t$  — условная плотность распределения вероятностей концентрации в турбулентной жидкости,  $F$  — гладкая функция,  $\theta(s)$  — функция Хевисайда, т.е.  $\theta(s) = 0$  при  $s < 0$  и  $\theta(s) = 1$  при  $s > 0$ .

Обобщение формулы (1.19) достаточно очевидно (Брэй и Либби [1976], Кузнецов, Лебедев, Секундов и Смирнова [1981], Сабельников [1979, 1980б], Либби и Брэй [1981]):

$$\begin{aligned} P(z) &= \gamma_0 \delta(z) + \gamma_1 \delta(z - 1) + \gamma_z P_t(z), \\ \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_z &= 1, \quad P_t(z) = [\theta(z) - \theta(z - 1)] F(z). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Формула (1.20) применима, например, к смешению большого количества близко расположенных струй в камере смешения (Кузнецов, Лебедев, Секундов и Смирнова [1981]).

Коэффициент перемежаемости  $\gamma_z$  и условная плотность вероятностей концентрации в турбулентной жидкости  $P_t$ , входящие в формулы (1.19) и (1.20), характеризуют степень смешения до молекулярного уровня. В частности, если коэффициент молекулярной диффузии  $D$  равен нулю и в начальный момент концентрация принимает лишь два значения 0 и 1, то получим  $\gamma_1 = \langle z \rangle$ ,  $\gamma_0 = 1 - \langle z \rangle$ ,  $\gamma_z = P_t = 0$  и  $\langle z^n \rangle = \langle z \rangle^n = \gamma_1$ . В указанном случае происходит просто турбулентная диффузия меченных жидких частиц (см. обзор в книге Моница и Яглома [1965]), процесс, который в литературе иногда называется "черно-белым" смешением (Прудников и др. [1971]). Дисперсия пульсаций концентрации при "черно-белом" смешении достигает максимально возможных значений  $\sigma_{\max}^2 = \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 = \langle z \rangle(1 - \langle z \rangle)$ . По этой причине отношение  $\sigma^2 / [\langle z \rangle(1 - \langle z \rangle)]$  часто используется как количественная характеристика степени молекулярного смешения в турбулентных потоках (см., например, Рошко [1976]).

Далее, неоднократно будет использоваться геометрическая интерпретация плотности вероятностей как величины, пропорциональной объему между двумя близкими изоскалярными поверхностями. Для большей наглядности рассмотрим статистически однородное поле концентрации. Пусть  $V$  — некоторый достаточно большой объем, а  $\delta V_z$  — объем, заключенный между двумя изоскалярными поверхностями  $z$  и  $z + dz$ , полностью расположенными в объеме  $V$ . Тогда в силу эргодичности справедливо соотношение

$$P(z) dz = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\delta V_z}{V} \quad (1.21)$$

Объем  $\delta V_z$  определяется очевидной формулой

$$\delta V_z = dz \int_{S_z} \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} dS_z \quad (1.22)$$

Здесь  $S_z$  — площадь изоскалярной поверхности  $z(x, t) = \text{const}$ ,  $n$  — единичная нормаль к этой поверхности.

Из соотношений (1.21) и (1.22) для плотности вероятностей концентрации получим следующую формулу:

$$P(z) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_{S_z} \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} dS_z = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{S_z}{V} \left\langle \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_z \quad (1.23)$$

где нижний индекс  $z$  у угловых скобок означает условное осреднение при заданном значении концентрации.

Обобщение формулы (1.23) на случай неоднородного поля имеет вид

$$P(z) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{d\langle S_z \rangle}{dV} \left\langle \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_z \quad (1.24)$$

Формулы (1.23) и (1.24) справедливы лишь в тех случаях, когда отдельные значения концентрации не могут наблюдаться с конечной вероятностью. Как обсуждалось выше, для турбулентных течений из-за перемежаемости характерен противоположный случай, когда в областях с конечным объемом концентрация принимает постоянные значения (при  $Re \rightarrow \infty$ ).

В этих областях  $\partial z/\partial n = 0$ , и формальное применение соотношения (1.23) дает  $P(z) = \infty$ . В действительности же, согласно соотношению (1.20), плотность вероятностей содержит сингулярные добавки (заметим, что формула (1.21) остается справедливой, если ее понимать в смысле обобщенных функций; неверна лишь формула для  $\delta V_z$  (1.22)).

Формулы (1.21), (1.23) и (1.24) легко видоизменить так, чтобы они были справедливы для условной плотности вероятностей концентрации в турбулентной жидкости. Для этого нужно только заменить в них  $V$  на  $\gamma_z V$  и  $dV$  на  $\gamma_z dV$ . В результате вместо (1.21), (1.23) и (1.24) получим соответственно такие соотношения:

$$\gamma_z P_r(z) dz = \lim_{V \rightarrow \infty} \lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} \frac{\delta V_z}{V}, \quad (1.25)$$

$$\gamma_z P_r(z) = \lim_{V \rightarrow \infty} \lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} \frac{S_z}{V} \left\langle \left. \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_{t,z}, \quad (1.26)$$

$$\gamma_z P_r(z) = \lim_{dV \rightarrow 0} \lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} \frac{d \langle S_z \rangle}{dV} \left\langle \left. \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_{t,z}. \quad (1.27)$$

Зависимости (1.19), (1.20), (1.25) – (1.27) справедливы только при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . В связи с этим несомненный интерес представляют следующие два вопроса: 1) каков качественный характер влияния числа Рейнольдса на плотность вероятностей концентрации и 2) каков порядок отброшенных членов? Проанализируем вначале первый вопрос. Из физических соображений ясно, что основное изменение плотности вероятностей из-за эффектов молекулярного переноса произойдет в окрестности границы фазового пространства, т.е. вблизи точек  $z = 0$  и  $z = 1$ , так как дельта-функции, содержащиеся в предельных формулах (1.19) и (1.20), окажутся "размазанными" на конечный интервал, длина которого по порядку величины должна совпадать с характерным значением амплитуды мелкомасштабных пульсаций, определяемых вязкими процессами  $z_\nu$ , оценку которой удобно дать ниже. Сразу отметим, что наблюдаемая в рассмотренных ниже экспериментах "размазанность" дельта-функций может быть вызвана как обсуждаемым принципиальным влиянием процессов молекулярного переноса, так и неточностью измерений. Ответ на вопрос, какой из названных факторов оказывает большее влияние на плотность вероятностей, требует специального рассмотрения в каждом конкретном случае. Некоторые соображения о влиянии неточности измерений на плотность вероятностей будут высказаны после обсуждения влияния числа Рейнольдса.

Для иллюстрации "размазывания" дельта-функций на рис. 1.17 приведены результаты опытов Бэрча, Брауна, Додсона и Томаса [1978], в которых измерялась плотность вероятностей концентрации на краю затопленной осесимметричной струи метана. Видно резкое увеличение  $P(z)$  при  $z \rightarrow 0$ , что можно интерпретировать как след дельта-функции. Аналогичные результаты получены Кузнецовым и Расшупкиным [1977]. Шринивасаном, Антониа и Стефенсоном [1979], Раджагопаланом и Антониа [1980], Мешковым и Щербиной [1981]. В качестве еще одного примера на рис. 1.18 приведены данные измерений плотности вероятностей температуры на

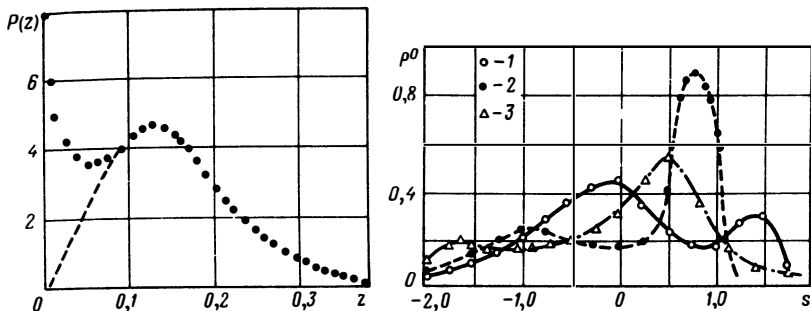


Рис 1.17. Плотность вероятностей концентрации на краю затопленной осесимметричной струи метана по данным Бэрча, Брауна, Додсона и Томаса [1978]  $x_1/d = 10$ ,  $x_2/d = 1.49$ ,  $Re_d = \nu_0 d/\nu = 1.6 \cdot 10^4$ ,  $d = 1.3$  см,  $\nu_0 = 19$  м/с

Рис 1.18. Плотность вероятностей температуры в слое смешения на начальном участке затопленной подогретой осесимметричной струи по данным Кузнецова и Расщупкина [1977] 1 -  $\xi = 0$ , 2 -  $\xi = -0.067$ , 3 -  $\xi = 0.067$ ,  $\xi = x_2/x_1$ ,  $s = (z - \langle z \rangle)/\sigma$ ,  $P'' = \sigma P$ ,  $z = \Delta T/(\Delta T)_{max}$ . Условия опытов и система координат те же, что и на рис 1.16

начальном участке подогретой осесимметричной струи, вытекавшей в неподвижный холодный воздух (Кузнецов и Расщупкин [1977]). Во всех трех точках измеренные плотности вероятностей получились бимодальными, т.е. имеющими по два максимума. Один из максимумов в каждой из точек обусловлен "размазанностью" дельта-функции. Действительно, в точке  $x_2/x_1 = 0$  максимум на  $s = 1,5$  ( $s = (z - \langle z \rangle)/\sigma$ ,  $\sigma^2 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle$  - дисперсия пульсаций концентрации) соответствует  $z = 0,92$ , при  $x_2/x_1 = -0,067$  максимум на  $s = 0,85$  соответствует  $z = 0,98$ , а при  $x_2/x_1 = 0,067$  максимум на  $s = -1,7$  соответствует  $z = 0,15$ . Поэтому максимумы при  $x_2/x_1 = 0$  и  $x_2/x_1 = -0,067$  являются "следом"  $\delta(z - 1)$ , а максимум при  $x_2/x_1 = 0,067$  - "следом"  $\delta(z)$ . В этих оценках использованы результаты измерений  $\langle z \rangle$  и  $\sigma$ , приведенные в рассматриваемой работе.

Продолжим обсуждение влияния числа  $Re$  на поведение плотности вероятностей концентрации в окрестности точек  $z = 0$  и  $z = 1$ . Важно подчеркнуть, что при конечном числе Рейнольдса, пусть сколь угодно большом, в любой конечной области минимальное  $z_{min}$  и максимальное  $z_{max}$  значения концентрации, в силу принципа максимума для уравнения диффузии\*), отличаются от нуля и единицы. Надо также иметь в виду, что при конечном числе Рейнольдса величины  $z_{min}$  и  $z_{max}$  являются функциями координат (и времени, если задача нестационарна в среднем). Определение этих функций - достаточно сложная задача, и она здесь не рассматривается.

Для того чтобы получить более конкретные заключения о поведении плотности вероятностей, необходима информация о поле концентрации в окрестности точек  $z_{min}$  и  $z_{max}$ . Согласно формулам (1.23), (1.24) плотность вероятностей зависит от площади изоскалярной поверхности и величины  $\left\langle \frac{\partial z}{\partial n} \Big|^{-1} \right\rangle_z$ . Из физических соображений понятно, что площадь изо-

\*) Этот принцип можно рассматривать как одну из формулировок второго закона термодинамики.



скалярной поверхности имеет конечные пределы при  $z \rightarrow z_{\min}$  и  $z \rightarrow z_{\max}$  (число Рейнольдса конечно). Таким образом, задача сводится к определению зависимости  $\left\langle \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_z$  от  $z$ . Здесь будут рассмотрены две простые

физические модели поля концентрации в окрестности экстремальных точек. Первая модель соответствует статистически однородному полю концентрации в однородной турбулентности. Вторая — предназначена для описания свободных турбулентных течений. Разберем вначале первую модель. В ней предполагается, что поле концентрации в окрестности каждой экстремальной точки  $z = z_m$  представляется в следующем виде (для простоты выкладки рассматривается одномерное поле):

$$z = z_m + \alpha n^2. \quad (1.28)$$

Здесь координата  $n$  отсчитывается от точки положения экстремума, случайная постоянная  $\alpha$  имеет смысл кривизны изоскалярной поверхности в экстремальной точке и зависит от числа  $Re$ , так что  $\alpha \rightarrow \infty$  при  $Re \rightarrow \infty$ .

Из формулы (1.28) имеем

$$\left| \frac{\partial z}{\partial n} \right| = 2 |\alpha(z - z_m)|^{1/2}. \quad (1.29)$$

Задача теперь состоит в том, чтобы использовать соотношение (1.29) для оценки условного среднего  $\left\langle \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_z$ . Для качественных оценок пренебрежем флуктуациями величины  $\alpha$ . В результате, например, в окрестности точки  $z = z_{\min}$  получим такую формулу:

$$\left\langle \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_z \sim |\alpha(z - z_m)|^{-1/2}. \quad (1.30)$$

Из (1.23) и (1.30) находим

$$P(z) \sim |\alpha(z - z_{\min})|^{-1/2}, \quad (1.31)$$

т.е. плотность вероятностей имеет интегрируемую особенность в точке  $z = z_{\min}$ . Аналогичный вывод справедлив и для другой граничной точки  $z = z_{\max}$ .

Перейдем к обсуждению второй модели. Она основана на результатах экспериментального исследования замороженных пространственных профилей концентрации (или температуры) в свободных турбулентных течениях (см. рис. 1.1). Из рис. 1.1 видно, что на краю струи происходит скачкообразное изменение температуры. Аналогичные результаты получены в работах Дженкинса и Гольдшмидта [1976], Чена и Блэкуелдера [1978], Шринивасана, Антониа и Бритца [1979].

Можно предположить, что профиль температуры в окрестности скачка находится в некотором квазистационарном состоянии вследствие баланса двух противоположно действующих факторов — диффузии и конвективного потока, обусловленного сильной гидродинамической деформацией среды. Аналогичная постановка задачи для поля вихря в теории локально однородной и изотропной турбулентности впервые предложена Таунсендом [1951].

Уравнение диффузии, выписанное в системе координат, связанной с поверхностью  $z = z_0 = \text{const}$ , на которой происходит скачок, в пренебрежении искривлением поверхности и граничные условия, описывающие квазистационарный профиль концентрации, имеют вид

$$-kn \frac{dz}{dn} = D \frac{d^2z}{dn^2}, \quad k > 0, \quad (1.32)$$

$$z(0) = z_0, \quad z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow -\infty.$$

Здесь  $k$  — неосредненный градиент скорости; считается, что турбулентная жидкость находится в области  $n > 0$ . Асимптотика решения уравнения (1.32) при  $n \rightarrow -\infty$  ( $z \rightarrow 0$ ) имеет вид

$$z \rightarrow - \left[ \frac{dz}{dn} \right]_{n=0} \frac{D}{kn} \exp\left(-\frac{kn^2}{2D}\right). \quad (1.33)$$

Продифференцируем (1.33) по  $n$ , выразим  $n$  через  $z$  с помощью (1.33) и подставим зависимость  $n(z)$  в полученное соотношение. В результате найдем

$$\frac{dz}{dn} \rightarrow \left(-\frac{2k}{D} \ln z\right)^{1/2} z, \quad z \rightarrow 0. \quad (1.34)$$

В оценках пренебрежем пульсациями диссипации, т.е. будем считать, что  $k = \text{const} \sim \sqrt{\langle \epsilon \rangle / \nu}$ . Тогда из (1.24) и (1.34) для плотности вероятностей получим

$$P(z) \sim \left[ \left(-\frac{2k}{D} \ln z\right)^{1/2} z \right]^{-1}. \quad (1.35)$$

Из (1.35) видим, что во второй модели плотность вероятностей ограничена при  $z \rightarrow z_{\text{min}}$ . Такой характер  $P(z)$  обусловлен тем, что нулевое значение концентрации не достигается на любом конечном расстоянии от границ течений струйного типа.

Рассмотренные выше примеры показывают, что при конечном числе Рейнольдса процессы молекулярного переноса достаточно сложным образом сказываются на форме распределения плотности вероятностей концентрации. В связи с этим полезно отметить, что во многих случаях, представляющих практический интерес, рассматриваемые процессы могут быть существенными.

Как уже указывалось ранее, влияние числа Рейнольдса особенно велико вблизи границ фазового пространства (т.е. точек  $z = 0$  и  $z = 1$ ), так как в окрестности этих границ плотность распределений вероятностей стремится к дельта-функциям. Поэтому дальнейшее обсуждение построим следующим образом. Оценим сначала величину  $z_\nu$ , т.е. тот интервал значений концентрации, на котором "размазаны" дельта-функции, а затем найдем порядок отброшенных членов в асимптотическом разложении функции  $P(z)$  вне рассматриваемого интервала.

Очевидно, что величина  $z_\nu$  определяется амплитудой наиболее мелко-масштабных, зависящих от вязкости пульсаций концентрации. Поэтому для оценки величины  $z_\nu$  можно воспользоваться теорией Колмогорова

[1941] и Обухова [1941, 1949], согласно которой  $z_\nu$  зависит только от  $\langle N \rangle$ ,  $\langle \epsilon \rangle$ ,  $\nu$  и  $D$ . Будем считать, что  $\nu \sim D$ , и учтем, что при замене  $z$  на  $\lambda z$  ( $\lambda$  произвольно) величина  $\langle N \rangle$  преобразуется по закону  $\langle N \rangle \rightarrow \lambda^2 \langle N \rangle$ . Тогда из соображений размерности получим

$$z_\nu \sim \langle N \rangle^{1/2} \left( \frac{\nu}{\langle \epsilon \rangle} \right)^{1/4}. \quad (1.36)$$

Для оценки  $\langle \epsilon \rangle$  и  $\langle N \rangle$  воспользуемся известными соотношениями  $\langle \epsilon \rangle \sim q^3/L$ ,  $\langle N \rangle \sim \sigma^2 q/L$ . Тогда

$$\frac{z_\nu}{\sigma} \sim \left( \frac{qL}{\nu} \right)^{-1/4} = \text{Re}^{-1/4}. \quad (1.37)$$

Поскольку в (1.37) число Рейнольдса входит в малой степени, то влияние процессов молекулярного переноса на плотность распределения вероятностей концентрации вблизи граничных точек  $z = 0$  и  $z = 1$  может быть весьма значительным. Например, расчет показывает, что  $z_\nu/\sigma = 0,16$  в условиях опытов Бэрча, Брауна, Додсона и Томаса [1978].  $z_\nu/\sigma = 0,13$  в условиях опытов Кузнецова и Расщупкина [1977]. В обоих случаях значения  $z_\nu$  сопоставимы с интервалом, на котором "размазаны" дельта-функции (см. рис. 1.17, 1.18).

Обратимся теперь к оценке порядка отброшенных членов в асимптотике плотности вероятностей концентрации при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  во внутренних точках интервала  $z_{\min} < z < z_{\max}$ , т.е. оценим добавки к функции  $P_I$ , входящей в (1.19) и (1.20). В оценках используем гипотезу о статистической независимости крупномасштабного, автомоделльного по числу Рейнольдса, и мелкомасштабного, определяемого молекулярной вязкостью, движений в турбулентной жидкости. Подробное обсуждение этой гипотезы с соответствующими ссылками на литературу дано в § 3.2. Здесь ограничимся только указанием на то, что введенная гипотеза является органической частью теории локально однородной и изотропной турбулентности Колмогорова — Обухова. Чтобы применить эту гипотезу, разложим поле концентрации на сумму двух полей

$$z = z^{(1)} + z^{(2)}, \quad \langle (z^{(1)})^2 \rangle^{1/2} \sim \sigma, \quad \langle (z^{(2)})^2 \rangle^{1/2} \sim z_\nu, \quad (1.38)$$

одно из которых —  $z^{(1)}$  — крупномасштабное, а другое —  $z^{(2)}$  — мелкомасштабное, локально однородное изотропное поле. Последнее, в частности, означает, что при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  справедливо такое выражение:

$$\frac{\langle (z^{(2)})^2 \rangle}{\sigma^2} \sim \text{Re}^{-1/2}. \quad (1.39)$$

Разбиение (1.38) можно осуществить, например, следующим образом. Рассмотрим куб  $\omega$  с центром в точке  $x$  и стороной  $l$ , удовлетворяющей условию  $l = \kappa \eta$ ,  $\kappa \gg 1$ , и введем величины

$$z^{(1)} = \frac{1}{V} \int_{\omega} z dV, \quad z^{(2)} = z - z^{(1)}.$$

Здесь  $V$  — объем области  $\omega$ . Устремляя число Рейнольдса к бесконечности при  $\kappa = \text{const}$ , получим представление (1.38).

Использование гипотезы о статистической независимости полей  $z^{(1)}$  и  $z^{(2)}$  позволяет расщепить корреляции типа  $\langle (z^{(1)})^{k_1} (z^{(2)})^{k_2} \rangle$ , т.е.

$$\langle (z^{(1)})^{k_1} (z^{(2)})^{k_2} \rangle = \langle (z^{(1)})^{k_1} \rangle \langle (z^{(2)})^{k_2} \rangle, \quad (1.40)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — любые положительные числа. Теперь все готово для того, чтобы оценить порядок отброшенных членов в асимптотике плотности вероятностей концентрации.

Действительно, как известно, плотность вероятностей однозначно определяется своей характеристической функцией, т.е. величиной  $\langle \varphi \rangle = \langle \exp(i\lambda z) \rangle$ . Из (1.38), (1.40) имеем  $\langle \varphi \rangle = \langle \exp(i\lambda z^{(1)}) \rangle \langle \exp(i\lambda z^{(2)}) \rangle$ . Так как  $\langle (z^{(2)})^2 \rangle^{1/2} \ll \sigma$  в силу (1.39), то приближенно получаем  $\langle \exp(i\lambda z^{(2)}) \rangle = \langle 1 + i\lambda z^{(2)} - \frac{1}{2} \lambda^2 (z^{(2)})^2 \rangle$ . Поскольку поле  $z^{(2)}$  локально однородно, то  $\langle \exp(i\lambda z^{(2)}) \rangle = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \langle (z^{(2)})^2 \rangle + \dots$ . Таким образом, разложение характеристической функции имеет вид

$$\langle \varphi \rangle = \langle \exp(i\lambda z^{(1)}) \rangle (1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \langle (z^{(2)})^2 \rangle + \dots).$$

Так как  $\langle (z^{(2)})^2 \rangle \rightarrow 0$  при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , то обратное преобразование Фурье от первого члена в этом разложении, в силу (1.19) и (1.20), есть  $\gamma P_r$ . Обратное преобразование Фурье от следующего члена в разложении характеристической функции, в силу (1.39), порядка  $\text{Re}^{-1/2}$ .

Таким образом, предположение об автомодельности функции  $P$  по числу Рейнольдса выполняется с точностью порядка  $\text{Re}^{-1/2}$ .

Даже в лабораторных условиях, когда число Рейнольдса  $\text{Re} = Lq/\nu$  редко превышает  $10^4$ , эта точность порядка одного процента. Поэтому влияние процессов молекулярного переноса на плотность распределения вероятностей концентрации вне малых окрестностей точек  $z = 0$  и  $z = 1$  можно не учитывать. И, наоборот, в окрестности этих точек влияние числа Рейнольдса существенно, что связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, как установлено выше, при указанном выше числе Рейнольдса интервал, на котором "размазаны" дельта-функции, достаточно велик ( $z_\nu \sim 0,1\sigma$ ). Во-вторых, поскольку  $P \sim \delta(z)$  при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , то число Рейнольдса сильно сказывается на абсолютных значениях плотности вероятностей (при конечном числе Рейнольдса  $P(z)$  имеет ярко выраженный максимум, расположенный при  $z = 0$ ; изменение числа Рейнольдса сильно сказывается на амплитуде этого максимума).

Таким образом, при интерпретации экспериментальных данных следует с большой осторожностью пользоваться предположением об автомодельности распределений вероятностей по числу Рейнольдса. Это обстоятельство зачастую игнорируется. В качестве примера можно привести работы Поупа [1979, а, б], в которых для аппроксимации измеренных в опытах плотностей распределений вероятностей, т.е. функций с особенностями, обусловленными вязкостью, предложен ряд вариационных принципов, не содержащих числа Рейнольдса.

К рассмотренной выше проблеме о воздействии процессов молекулярного переноса на вид плотностей распределений вероятностей тесно примыкает вопрос о влиянии приборных погрешностей на измеренные значения  $P(z)$ . В ряде случаев влияние числа Рейнольдса и погрешностей измерения приводит к качественно одинаковым результатам. Например, при отличной

от нуля ширине окна компаратора<sup>\*)</sup>, служащего для измерения плотности вероятностей, дельта-функция будет "размазанной". Указанный эффект может быть существенным. Например, в опытах Кузнецова и Расщупкина [1977] эта ширина совпадает с оцененной выше амплитудой мелкомасштабных пульсаций  $z_p$ . В ряде опытов, однако, "размазывание" дельта-функций обусловлено в первую очередь шумами в комплексе измерительной аппаратуры (Ля Рю и Либби [1974], Раджагопалан и Антониа [1980], Мешков и Щербина [1981]), что всегда надо иметь в виду при анализе экспериментальных данных. Метод преодоления указанной трудности предложен в работах Билджера, Антониа и Шринивасана [1976], Брэдшоу [1978], Билджера [1978], Мешкова и Щербины [1981], Щербины [1982]. Основная идея метода состоит в том, что "размазанная" шумами плотность вероятностей в окрестности точек  $z = 0$  и  $z = 1$  аппроксимируется специально подогнанными гауссовскими кривыми, площади под которыми дают соответственно  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ .

Проведенный анализ показывает, что учет влияния процессов молекулярного переноса на вид плотности распределения вероятностей сопряжен с преодолением значительных трудностей, возникающих как при теоретических, так и при экспериментальных исследованиях. Введение перемежаемости позволяет обойти эти трудности. Именно в этом и заключается основное преимущество рассмотрения предельной картины течения при  $Re = \infty$ .

#### § 1.4. Качественный вид плотности распределения вероятностей концентрации при горении однородной смеси

При горении в турбулентных потоках в плотностях распределения вероятностей концентрации химически активной примеси имеется ряд качественных особенностей, существенно отличающих этот случай от проанализированного в предыдущем параграфе смешения пассивной примеси. Как будет показано в главе 5, лишь для диффузионного горения, т.е. при раздельной подаче горючего и окислителя, при некоторых предположениях общего характера задачу можно свести к исследованию плотности вероятностей химически инертной примеси. Поэтому при таком способе организации процесса качественная картина плотности вероятностей концентрации остается прежней.

Однако положение кардинальным образом меняется при горении предварительно перемешанных газов. Анализ этого случая является целью данного параграфа. Далее концентрация химически активной примеси будет обозначаться буквой  $c$ . Это же обозначение применяется и для нормированной температуры. Условимся, что в последнем случае  $c = 0$  в свежей смеси и  $c = 1$  в продуктах сгорания, т.е.  $c = (T - T^{(0)}) / (T^{(b)} - T^{(0)})$ ,  $T^{(0)}$  — температура свежей смеси,  $T^{(b)}$  — температура продуктов сгорания.

<sup>\*)</sup> Компаратор — устройство, на выходе которого напряжение принимает одно из двух возможных значений: нуль или единицу. Напряжение равно единице, если концентрация примеси лежит в интервале  $(z, z + \Delta z)$ , и нулю в противном случае. Плотность вероятностей пропорциональна среднему напряжению на выходе компаратора, если  $\Delta z$  — окно компаратора — достаточно мало.

В работах Дамкелера [1940], Шелкина [1943], Шелкина и Трошина [1965] были сформулированы два предельных механизма горения однородной смеси: 1) горение происходит в протяженных зонах, размеры которых сравнимы с масштабом турбулентности, — объемный механизм горения и 2) горение протекает в узких зонах, сильно искривленных и запутанных из-за флуктуаций скорости, — фронтальный механизм горения. Специально подчеркнем, что здесь рассматривается неосредненная картина течения и горения. За дальнейшими сведениями о моделях турбулентного



Рис. 1.19. Осциллограмма пульсаций температуры при горении однородной смеси по данным Кокушкина [1960]. Опыты проведены с бензино-воздушной смесью; коэффициент избытка воздуха  $\alpha = 1,6 - 1,8$ ; начальная температура 573 К; давление нормальное. Смесь горела за коническим стабилизатором диаметром 6 см, расположенным на срезе трубы диаметром 40 см. Скорость истечения составляла 90–110 м/с. Измерения проводились на расстоянии 40 см от среза трубы. Единицы измерения по осям координат произвольны

горения можно обратиться к книгам Талантова [1975], Щетинкова [1965], Прудникова и др. [1971], Ильяшенко и Талантова [1964], Раушенбаха и др. [1964], Вильямса [1965] и обзорам Эндрюса, Брэдли и Лвакавамба [1975], Либби и Вильямса [1981], Абдель-Гайеда и Брэдли [1981], Брэя [1980], Борги [1984], Брэдли [1984].

”Замороженное” (мгновенное) распределение температуры в двух указанных случаях существенно различно. При объемном механизме горения изменение температуры происходит на масштабах порядка  $L$  и качественный вид плотностей вероятностей концентрации при горении и при смешении без реакций принципиально не отличаются.

Подробные оценки, проведенные в главе 6, свидетельствуют, что в условиях, реализующихся в технических устройствах, горение однородной смеси чаще всего происходит по фронтальному механизму. В этом случае профиль температуры состоит из последовательности импульсов почти прямоугольной формы с одной и той же амплитудой, но разной продолжительности. Изменение температуры от нижнего уровня до верхнего происходит на толщине  $\delta$ , имеющей порядок толщины нормального фронта пламени. Сказанное иллюстрируется осциллограммой пульсаций температуры, которая получена Кокушкиным [1960] (рис. 1.19). Из этой осциллограммы видно, что горение происходит в соответствии с фронтальной моделью.

Структура поверхности пламени проиллюстрирована на рис. 1.20, заимствованном из той же работы. В этом опыте использовались пять термометров сопротивления, расположенных на расстоянии 6 мм друг от друга вдоль прямой, перпендикулярной оси факела (ось  $x_2$  на рис. 1.20). Вертикальные отметки на рис. 1.20 соответствуют моментам времени, в которые фронт пламени проходит через датчик. При интерпретации рис. 1.20 на основе известной гипотезы Тейлора о замороженности турбулентности

время можно связать с продольной координатой с помощью соотношения  $x_1 = \langle u_1 \rangle t$ . Поэтому сплошные линии соответствуют зарегистрированному положению фронта пламени.

Таким образом, в первом приближении фронт пламени можно рассматривать как поверхность, на которой претерпевают разрыв скорость, плотность, температура и концентрации.

Очевидно, что при фронтальном механизме горения плотность вероятностей промежуточных значений температуры ( $0 < c < 1$ ) пропорциональна

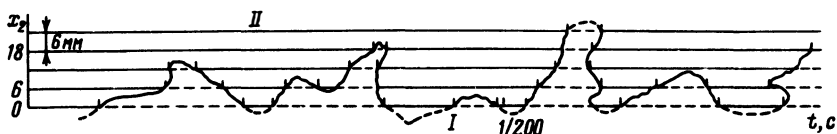


Рис. 1.20 "Замороженное" положение фронта пламени по данным Кокушкина [1960] Условия опытов те же, что и на рис. 1.19

тепловой толщине нормального пламени  $\delta \sim a/u_n$ , где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $u_n$  – скорость нормального распространения пламени. Более подробно об этих параметрах говорится в главе 6. Проведенные там оценки показывают, что параметр  $\delta$  мал (меньше 1 мм). Поэтому справедлива оценка

$$P(c) \sim \delta/L, \quad \delta = a/u_n, \quad 0 < c < 1. \quad (1.42)$$

Аналогичная оценка получена Прудниковым в 1960 г. (см. изложение работы Прудникова в книге Раушенбаха и др. [1964]). Эта оценка, разумеется, неверна при  $c = 0$  или  $c = 1$ , так как ясно, что при  $\delta = 0$  промежуточные значения температуры не наблюдаются, а плотность вероятностей имеет вид

$$P(c) = \gamma_0 \delta(c) + \gamma_1 \delta(c - 1), \quad \gamma_0 + \gamma_1 = 1. \quad (1.43)$$

Соотношение (1.43) дает главный член асимптотического разложения плотности вероятностей по большому параметру  $L/\delta = u_n L/a$ , который в данном случае можно рассматривать как аналог числа Рейнольдса.

Формула (1.43) также, по-видимому, впервые получена Прудниковым в 1960 г. (см. изложение работы Прудникова в книге Раушенбаха и др. [1964]). Так как в (1.20), (1.43) фигурируют сингулярные слагаемые, то можно считать, что при горении однородной смеси возникает явление, внешне сходное с перемежаемостью в турбулентных потоках. Эта аналогия оправдана также и тем, что в условия применимости формулы (1.43) входит коэффициент молекулярного переноса.

Подчеркнем, однако, что отмеченная аналогия далеко не полная, так как при горении жидкость до и после фронта пламени, разделяющего области с  $c = 0$  и  $c = 1$ , может быть завихренной.

Измерения плотности вероятностей температуры при горении однородной смеси проводились Йошидой и Гюнтером [1980] (в качестве горючего газа использовался природный газ). Одна из полученных в этой работе плотностей вероятностей приведена на рис. 1.21. Четко видны два максимума, соответствующие двум "размазанным" дельта-функциям в выраже-

нии (1.43). Причины "размазанности" те же, что и при диффузии пассивной примеси (этот вопрос подробно обсуждался в § 1.3). При  $0 < c < 1$  плотность вероятностей мала. В этой же работе проверено следствие формулы (1.43):

$$\sigma^2 = \langle c \rangle (1 - \langle c \rangle). \quad (1.44)$$

Результаты сопоставления соотношения (1.44) с экспериментальными данными приведены на рис. 1.22. Видно, что соотношение (1.44) выполняется с точностью не менее 10% при любом значении  $\langle c \rangle$ . Аналогичные результаты получаются и при обработке опытов Калгатги и Мюсса [1979]. С фронтальным механизмом горения согласуются и результаты опытов Билла, Неймера и Талбота [1981]. В этой работе исследовалось горение смеси этилена с воздухом в потоке за турбулизирующей решеткой, расположенной в канале. Пульсации скорости измерялись лазерным анемометром. На рис. 1.23 изображена плотность распределения вероятностей продольной скорости, измеренная в некоторой внутренней точке зоны горения. Отчетливо видна бимодальная структура этой плотности вероятностей. Тем самым в точке с конечной вероятностью наблюдались две жидкости с различными статистическими свойствами. Другие результаты рассматриваемой работы будут отмечены в § 6.6.

В отличие от случая, рассмотренного в § 1.3, при горении однородной смеси следует учесть поправки к плотности вероятностей, которые обусловлены влиянием процессов молекулярного переноса. В самом деле, с помощью формулы (1.43) нельзя найти, например, среднее значение скорости химической реакции. Проанализируем это влияние, пользуясь теорией Зельдовича и Франк-Каменецкого [1938а, б], которая, как известно, дает главный член в асимптотическом разложении решения уравнения теплопроводности с источником (скоростью тепловыделения, описываемой законом Аррениуса) по малому параметру  $RT^{(b)}/E$ , где  $R$  – газовая постоянная,  $E$  – энергия активации,  $T^{(b)}$  – адиабатическая температура горения. В рамках указанной теории толщина слоев  $\delta_c$ , в которых происходят химические реакции, по порядку равна  $\delta_c = \delta RT^{(b)}/E \ll \delta$ . При фиксированном значении  $\delta$  и  $RT^{(b)}/E \rightarrow 0$  можно, следовательно, считать, что реакции идут на поверхности  $c = 1 - 0$ . По одну сторону этой поверхности – в продуктах сгорания – концентрация сохраняет постоян-

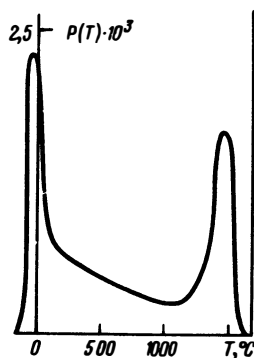


Рис 1.21 Плотность распределения вероятностей температуры при горении однородной смеси в бунзеновской горелке по данным Юшиды и Гюнтера [1980]  $x_1/d = 1.75$ ,  $x_2/d = 0.3$ ,  $Re_d = u_0 d/\nu = 1.44 \cdot 10^4$ ,  $u_0 = 5.44$  м/с,  $d = 3.97$  см



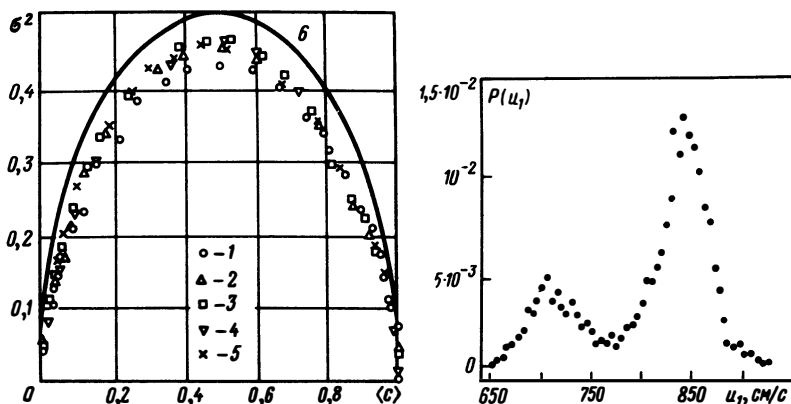


Рис. 1.22. Связь дисперсии пульсаций температуры со средней температурой при горении однородной смеси в бунзеновской горелке по данным Иошиды и Гюнтера [1980]. 1 -  $x_1/d = 3$ ,  $u_1'/u_0 = 6\%$ ,  $\alpha = 1.25$ . 2 -  $x_1/d = 2.375$ ,  $u_1'/u_0 = 6\%$ ,  $\alpha = 1.18$ . 3 -  $x_1/d = 1.75$ ,  $u_1'/u_0 = 6\%$ ,  $\alpha = 1.11$ . 4 -  $x_1/d = 3$ ,  $u_1'/u_0 = 4\%$ ,  $\alpha = 1.25$ . 5 -  $x_1/d = 1.75$ ,  $u_1'/u_0 = 9\%$ ,  $\alpha = 1.25$ . 6 - зависимость, описываемая формулой (1.44),  $\alpha$  - коэффициент избытка воздуха,  $u_1' = ((u_1 - \langle u_1 \rangle)^2 / 2)^{1/2}$ ,  $c = (T - T(0)) / (T(b) - T(0))$ ,  $\sigma^2 = ((c - \langle c \rangle)^2)$

Рис. 1.23. Плотность распределения вероятностей продольной скорости при горении однородной смеси этилена с воздухом в потоке за турбулизирующей решеткой в канале по данным Билла, Неймера и Талбота [1981]. Измерения проводились в сечении, расположенном на расстоянии 7.5 см от решетки. Размер ячейки решетки  $M = 0.5$  см, ширина канала 10 см,  $u_0 = 6.84$  м/с - средняя скорость перед решеткой. Коэффициент избытка воздуха  $\alpha = 1.33$

ное значение  $c = 1$ , а по другую - наблюдаются все промежуточные значения концентрации. Следовательно, в приближении Зельдовича и Франк-Каменецкого в выражении для плотности вероятностей температуры должен содержаться член, пропорциональный  $\delta(c - 1)$ . В приведенном рассуждении, принадлежащем Кузнецову [1976б], существенно то, что параметр  $\delta$  фиксирован (число Рейнольдса конечно) и, следовательно, в плотности вероятностей отсутствует член  $\delta(c)$ . Заметим, что это обстоятельство упущено из внимания в ряде работ и, в частности, у Прудникова (см. Раушенбах и др. [1964]), Зимонта [1977], Брзя [1980], Либби и Брзя [1981], Либби и Вильямса [1981]. Таким образом, имеем

$$P(c) = \gamma_1 \delta(c - 1) + \gamma P_t(c), \quad \gamma_1 + \gamma = 1. \quad (1.45)$$

Во избежание недоразумений подчеркнем, что здесь нижний индекс  $t$  имеет смысл иной, чем в формуле (1.19). Он употребляется здесь лишь на основе формальной аналогии между соотношениями (1.19) и (1.45).

В рассмотренном предельном переходе  $(RT^{(b)})/E \rightarrow 0$ ,  $\delta/L$  фиксировано) профиль концентрации обладает тем свойством, что  $\partial c / \partial n \rightarrow 0$  при  $c \rightarrow 0$  и, следовательно,  $P_t(c) \rightarrow \infty$  при  $c \rightarrow 0$ , т.е. условная плотность вероятностей, как видно из (1.24), имеет интегрируемую особенность в нуле.

Важно еще раз подчеркнуть, что в анализируемом случае, в отличие от чистого смешения, использование принципа автомодельности по числу

Рейнольдса для условной плотности вероятностей температуры неприемлемо.

Как и в случае смешения без реакций, когда перемежаемость обусловлена крупномасштабными колебаниями узкой границы, разделяющей турбулентную и нетурбулентную области, так и в случае горения однородной смеси перемежаемость вызвана крупномасштабными колебаниями фронта горения. Однако, несмотря на формальное сходство формул (1.45) и (1.19), оба вида перемежаемости не связаны между собой и обусловлены совершенно разными физическими причинами: гидродинамическая перемежаемость возникает при  $Re \rightarrow \infty$ , а перемежаемость в случае горения однородной смеси – при  $RT^{(b)}/E \rightarrow 0$ .

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ  
ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Первая попытка получить уравнение для плотности вероятностей в турбулентном потоке, по-видимому, сделана Фростом [1960] при рассмотрении турбулентного горения однородной смеси горючих газов. В этой работе найдено уравнение для плотности вероятностей температуры. При выводе, помимо точного уравнения теплопроводности, привлекались дополнительные соображения (например, о марковском характере процесса турбулентного смешения). Похожее уравнение (под названием модели Ланжевена) появилось позже в работе Чанга [1969]. В дальнейшем этот подход развивался в работах Кузнецова и Фроста [1973] и Фроста [1973, 1977].

Точные незамкнутые уравнения для  $n$ -точечных плотностей распределений вероятностей различных гидродинамических характеристик, полученные из уравнений Навье – Стокса, введены в теорию турбулентности практически одновременно в работах Молина [1967а, б], Ландгрена [1967], Новикова [1967], Кузнецова [1967], Улинича [1968], Улинича и Любимова [1968]. Впоследствии уравнения для плотностей вероятностей были обобщены на случай лагранжева описания движения среды в работах Любимова [1969], Любимова и Улинича [1970]. Общий метод вывода уравнений для плотностей вероятностей в произвольной сплошной среде дан в работах Иевлева [1972, 1975] и Фокса [1975] (см. также Хилл [1976]). Достаточно подробный обзор работ, выполненных в этом направлении, включая и способы замыкания уравнений, содержится в статьях Кузнецова и Сабельникова [1981а, б] (см. также § 2.3 данной книги), книге “Турбулентные течения реагирующих газов” под редакцией Либби и Вильямса [1980], обзоре Борги [1980] и статьях Сабельникова [1985а, 1986].

В следующих главах потребуются лишь два уравнения: первое – для одноточечной плотности вероятностей концентрации и второе – для двухточечной плотности вероятностей разности скоростей. Используемый ниже метод вывода этих уравнений отличается от описанных в литературе тем, что уже на первом его этапе вводится перемежаемость. Это, как указывалось в главе 1, позволяет избежать формальных трудностей, связанных с предельным переходом  $Re \rightarrow \infty$ . Такой подход был предложен Кузнецовым [1972а]. Затем он использовался в работах Кузнецова и Фроста [1973], Кузнецова [1977б, 1979а], Сабельникова [1979, 1980а, б, 1982б, в], Кузнецова и Сабельникова [1981а, б], Кузнецова, Лебедева, Секундова и Смирновой [1981], О’Брайена и Допазо [1978], О’Брайена [1978] и ряде других работ.

## § 2.1. Уравнение для плотности распределения вероятностей концентрации

В данном параграфе рассматриваются процессы в трех разных случаях: 1) смешение в отсутствие химических реакций, 2) горение, возникающее при смешении потоков топлива и окислителя (диффузионное горение); 3) горение предварительно перемешанных горючих компонентов. Во втором случае предполагается, что скорости всех химических реакций бесконечно велики, т.е. состав и температура термодинамически равновесны. В третьем - считается, что происходит одноступенчатая реакция, а скорость ее конечна. Предполагается, что число Рейнольдса стремится к бесконечности, а число Маха - к нулю. В силу последнего предположения при вычислении плотности  $\rho$  давление  $p$  можно считать постоянным, т.е.  $\rho$  зависит лишь от температуры и состава (в таком приближении градиент давления, входящий в уравнение Навье - Стокса, всегда учитывается).

Предположим также, что все коэффициенты молекулярного переноса равны, а начальные распределения концентраций всех веществ и энтальпии и граничные условия подобны. Первое ограничение не является слишком сильным, поскольку характеристики смешения слабо зависят от числа Рейнольдса. Как известно, в указанных выше предположениях для описания рассматриваемых процессов достаточно задать лишь гидродинамическую скорость и концентрацию какого-нибудь одного вещества (Бурке и Шуман [1928], Зельдович и Франк-Каменецкий [1938а, б], Шваб [1948], Зельдович [1949]).

Этот вывод очевиден для случая смешения без реакций.

Если в потоке происходят химические реакции, то суммарные весовые концентрации  $c_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ) атомов данного вида, содержащиеся во всех химических соединениях, и полная энтальпия (включающая в себя энергию химических связей)  $c_0$  описываются одинаковыми уравнениями без источников. Поскольку начальные и граничные условия обычно подобны, то величины  $c_0$  и  $c_\alpha$  линейно выражаются через решение уравнения диффузии без источника. Тогда при диффузионном горении температуру, плотность и концентрации всех веществ можно связать с этим решением с помощью термодинамического расчета. Далее предполагается, что эта операция уже выполнена.

Если химическая реакция является одноступенчатой, то при горении заранее перемешанных горючих компонентов количество выделившегося тепла и изменение концентраций реагирующих веществ легко выражаются через концентрацию какого-нибудь одного вещества. Следовательно, и в этом случае достаточно задать распределение какой-нибудь одной характеристики процесса (например, температуры).

Таким образом, во всех рассматриваемых случаях плотность  $\rho$  и скорость химической реакции  $W$  выражаются через одну переменную. Эту переменную обозначим буквой  $c$  ( $c = z$  - концентрация инертной примеси при

смешении или при диффузионном горении,  $c = \frac{T - T^{(0)}}{T^{(b)} - T^{(0)}}$  при горении однородной смеси,  $T$  - температура, индексы 0 и  $b$  относятся к свежей

смеси и продуктам сгорания соответственно). Все результаты, полученные в данной главе, остаются справедливыми и в случае  $W = 0$ .

Сформулированные предположения значительно упрощают анализ и вместе с тем вполне достаточны для решения задач, рассмотренных в главах 5, 6.

Выпишем неосредненные уравнения диффузии и неразрывности

$$\rho \frac{\partial c}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla c = \nabla(\rho D \nabla c) + \rho W, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{u} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь  $D$  — коэффициент диффузии,  $W$  — скорость химической реакции ( $W = 0$  при смешении или диффузионном горении).

Введем величину  $\varphi = \exp(i\lambda c)$ ,  $\lambda$  — действительное число. По определению  $\langle \varphi \rangle$  — характеристическая функция плотности вероятностей концентрации. Поэтому, если функция  $\langle \varphi \rangle$  известна, то плотность вероятностей находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$P(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \varphi \rangle \exp(-i\lambda c) d\lambda.$$

Продифференцируем  $\varphi$  по  $t$ . Появляющуюся при этом производную  $\partial c / \partial t$  выразим из уравнения теплопроводности (2.1). В результате получим

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = i\lambda \varphi [-\rho \mathbf{u} \nabla c + \nabla(\rho D \nabla c) + \rho W].$$

Первый член в правой части этого соотношения приводится к виду  $-\rho \mathbf{u} \nabla \varphi$ . Поэтому после использования уравнения неразрывности (2.2) и осреднения имеем

$$\frac{\partial \langle \rho \varphi \rangle}{\partial t} + \nabla \langle \rho \mathbf{u} \varphi \rangle = i\lambda \langle \rho W \varphi \rangle + i\lambda \langle \varphi \nabla(\rho D \nabla c) \rangle. \quad (2.3)$$

Второе слагаемое в правой части соотношения (2.3) можно преобразовать к следующему виду (Кузнецов [1967, 1972a], Фокс [1971], Поуп [1976]):

$$\begin{aligned} i\lambda \langle \varphi \nabla(\rho D \nabla c) \rangle &= i\lambda \nabla \langle \rho D \varphi \nabla c \rangle - i\lambda \langle \rho D \nabla c \cdot \nabla \varphi \rangle = \\ &= \nabla \langle \rho D \nabla \varphi \rangle + \lambda^2 \langle \rho N \varphi \rangle, \quad N = D(\nabla c)^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Преобразование (2.4) играет важную роль при получении уравнения для плотности вероятностей концентрации. Заметим, что оно аналогично преобразованию, обычно используемому при выводе уравнения для дисперсии пульсаций концентрации (Корсин [1951]). Слагаемое  $\nabla \langle \rho D \nabla \varphi \rangle$ , содержащееся в правой части (2.4), описывает молекулярный перенос моментов поля концентрации, и оно пропорционально  $\text{Re}^{-1}$ . Поскольку рассматривается предел  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , это слагаемое далее опускается (остальные слагаемые в уравнении конечны, так как плотность вероятностей и  $\langle N \rangle$  при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  имеют конечные пределы)

Используя (2.4), приведем соотношение (2.3) к виду

$$\frac{\partial \langle \rho \varphi \rangle}{\partial t} + \nabla \langle \rho \mathbf{u} \varphi \rangle = \lambda^2 \langle \rho N \varphi \rangle + i \lambda \langle \rho W \varphi \rangle. \quad (2.5)$$

Соотношения (2.3) и (2.5), как и все точные уравнения для статистических характеристик в теории турбулентности, незамкнуты. В них, помимо корреляции  $\langle \rho W \varphi \rangle$ , которая (при принятом предположении относительно вида скорости химической реакции  $W$ ) точно выражается через плотность вероятностей  $P(c)$  (это обстоятельство и составляет главное преимущество использования плотностей вероятностей в теории турбулентного горения), входят корреляции  $\langle \rho \mathbf{u} \varphi \rangle$  и  $\langle \rho N \varphi \rangle$ , не выражающиеся через искомую плотность вероятностей.

Относительно корреляции  $\langle \rho W \varphi \rangle$  отметим следующее. Наиболее распространен случай, когда в нетурбулентной жидкости  $W = 0$  и, следовательно,

$$\langle \rho W \varphi \rangle = \gamma \langle \rho W \varphi \rangle_t = \gamma \int \rho W \varphi P_t(c) dc. \quad (2.6)$$

Интегрирование в (2.6) проводится по всему интервалу изменения  $c$ . Для краткости пределы интегрирования не указываются. Такое сокращение записи будет использоваться и далее.

Рассмотрим теперь корреляцию  $\langle \rho \mathbf{u} \varphi \rangle$ . По определению имеем

$$\langle \rho \mathbf{u} \varphi \rangle = \int \rho \mathbf{u} \varphi P(\mathbf{u}, c) d^3 \mathbf{u} dc. \quad (2.7)$$

Здесь  $P(\mathbf{u}, c)$  — совместная плотность вероятностей скорости и концентрации. Соображения, аналогичные тем, которые использовались в § 1.3 при получении формул (1.19), (1.20), позволяют установить вид этой функции (Сабельников [1979, 1980б]):

$$P(\mathbf{u}, c) = \gamma P_t(\mathbf{u}, c) + \gamma_0 P_n(\mathbf{u} | c = 0) \delta(c) + \gamma_1 P_n(\mathbf{u} | c = 1) \delta(c - 1). \quad (2.8)$$

Здесь  $P_t(\mathbf{u}, c)$  — условная совместная плотность вероятностей скорости и концентрации в турбулентной жидкости,  $P_n(\mathbf{u} | c = 0)$  и  $P_n(\mathbf{u} | c = 1)$  — условные плотности вероятностей скорости в нетурбулентной жидкости при условии  $c = 0$  и  $c = 1$  соответственно.

Подставляя (2.8) в (2.7), получим

$$\langle \rho \mathbf{u} \varphi \rangle = \gamma \int \rho \langle \mathbf{u} \rangle_{t, c} \varphi P_t(c) dc + \gamma_0 \rho(0) \langle \mathbf{u} \rangle_{n, 0} + \gamma_1 \rho(1) \exp(i \lambda) \langle \mathbf{u} \rangle_{n, 1}. \quad (2.9)$$

где

$$\langle \mathbf{u} \rangle_{n, 0} = \int \mathbf{u} P_n(\mathbf{u} | c = 0) d^3 \mathbf{u},$$

$$\langle \mathbf{u} \rangle_{n, 1} = \int \mathbf{u} P_n(\mathbf{u} | c = 1) d^3 \mathbf{u},$$

$$\langle \mathbf{u} \rangle_{t, c} = \int \mathbf{u} P_t(\mathbf{u} | c) d^3 \mathbf{u}.$$

Здесь  $P_t(\mathbf{u} | c)$  — условная плотность вероятностей скорости в турбулентной жидкости при заданном значении концентрации,  $\langle \mathbf{u} \rangle_{n, 0}$ ,  $\langle \mathbf{u} \rangle_{n, 1}$  —

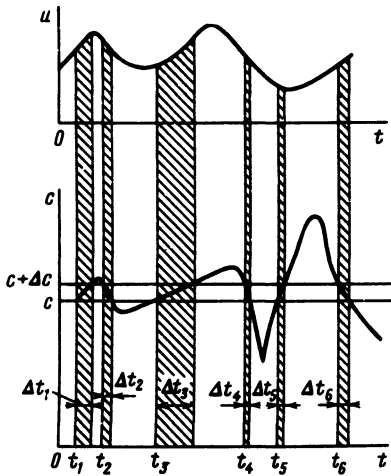


Рис 2.1 К определению условно осредненной скорости

$$\langle u \rangle_{t,c} = \frac{\sum u(t_k) \Delta t_k}{\sum \Delta t_k}$$

$\Delta t_k$  — продолжительность  $k$ -го интервала времени, когда значения концентрации находятся в диапазоне  $c, c + \Delta c, k = 1, 2, 3$ .

условно осредненные скорости в нетурбулентной жидкости при  $c = 0$  и  $c = 1$  соответственно,  $\langle u \rangle_{t,c}$  — условно осредненная скорость в турбулентной жидкости при заданном значении концентрации. Для пояснения смысла условно осредненных характеристик  $\langle \rangle_{t,c}$  на рис. 2.1 схематически показана процедура определения условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_{t,c}$  в статистически стационарном случае.

Проанализируем корреляцию  $\langle \rho N \varphi \rangle$ . По определению имеем

$$\langle \rho N \varphi \rangle = \int \rho N \varphi P(N, c) dN dc. \quad (2.10)$$

Здесь  $P(N, c)$  — совместная плотность вероятностей скалярной диссипации и концентрации. Из-за перемежаемости значения  $c = 0, c = 1$  и  $N = 0$  наблюдаются с отличной от нуля вероятностью. Поэтому

$$P(N, c) = \gamma P_t(N, c) + \gamma_0 \delta(c) \delta(N) + \gamma_1 \delta(c - 1) \delta(N). \quad (2.11)$$

Здесь  $P_t(N, c)$  — совместная плотность вероятностей скалярной диссипации и концентрации в турбулентной жидкости.

Подстановка соотношения (2.11) в (2.10) дает

$$\langle \rho N \varphi \rangle = \gamma \langle \rho N \varphi \rangle_t = \gamma \int \rho N \varphi P_t(N, c) dN dc = \gamma \int \rho \langle N \rangle_{t,c} \varphi P_t(c) dc. \quad (2.12)$$

где

$$\langle N \rangle_{t,c} = \int N P_t(N | c) dN.$$

Здесь  $P_t(N | c)$  — условная плотность вероятностей скалярной диссипации в турбулентной жидкости при заданном значении концентрации,  $\langle N \rangle_{t,c}$  — условно осредненная скалярная диссипация в турбулентной жидкости при заданном значении концентрации.

Вполне аналогично представляется и корреляция  $\langle \varphi \nabla (\rho D \nabla c) \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \varphi \nabla (\rho D \nabla c) \rangle &= \gamma \langle \varphi \nabla (\rho D \nabla c) \rangle_t = \\ &= \gamma \int \varphi \langle \nabla (\rho D \nabla c) \rangle_{t,c} P_t(c) dc. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь  $\langle \nabla(\rho D \nabla c) \rangle_{l, c}$  — условное среднее значение дивергенции диффузионного потока  $\nabla(\rho D \nabla c)$  в турбулентной жидкости при заданном значении концентрации.

В зависимости от того, используется или нет преобразование (2.4), получают две различные формы записи уравнения для плотности вероятностей концентрации. Рассмотрим вначале соотношение (2.3). Применим к нему обратное преобразование Фурье и учтем выражения (2.6), (2.9) и (2.13). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho P}{\partial t} + \nabla(\rho \int \mathbf{u} P(\mathbf{u}, c) d^3 \mathbf{u}) = \\ = -\gamma \frac{\partial}{\partial c} \langle \nabla(\rho D \nabla c) \rangle_{l, c} P_t(c) - \gamma \frac{\partial}{\partial c} \rho W P_t(c). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Аналогичным образом из соотношения (2.5) получим вторую форму записи уравнения

$$\frac{\partial \rho P}{\partial t} + \nabla(\rho \int \mathbf{u} P(\mathbf{u}, c) d^3 \mathbf{u}) = -\gamma \frac{\partial^2}{\partial c^2} \rho \langle N \rangle_{l, c} P_t - \gamma \frac{\partial}{\partial c} \rho W P_t \quad (2.15)$$

Интеграл, фигурирующий в уравнениях (2.14) и (2.15), после подстановки выражения (2.8) для  $P(\mathbf{u}, c)$  принимает вид (Сабельников [1979, 19806])

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} P(\mathbf{u}, c) d^3 \mathbf{u} = \gamma_0 \delta(c) \langle \mathbf{u} \rangle_{n, 0} + \\ + \gamma_1 \delta(c-1) \langle \mathbf{u} \rangle_{n, 1} + \gamma \langle \mathbf{u} \rangle_{l, c} P_t(c). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Две приведенные здесь формы записи уравнения для плотности вероятностей концентрации (2.14) и (2.15) эквивалентны. Физический смысл отдельных слагаемых в (2.14) и (2.15) достаточно прозрачен. Первый член в левой части каждого из уравнений (2.14), (2.15) обусловлен возможной нестационарностью (в среднем), а второй — описывает конвекцию и турбулентную диффузию. В правой части (2.14) и (2.15) содержатся члены, характеризующие затухание концентрационных неоднородностей из-за смещения до молекулярного уровня и влияние тепловыделения.

В заключение этого параграфа приведем вывод уравнения для плотности вероятностей концентрации, основываясь на ее геометрической интерпретации, данной в § 1.3, что полезно для понимания результатов, полученных в главах 3, 5 и 6. Кроме того, использованные при таком выводе промежуточные формулы будут неоднократно применяться в главах 3 и 5. Для простоты рассмотрим статистически однородное поле концентрации. Вычислим скорость изменения объема  $\delta V_c$ , заключенного между двумя близко расположенными изоскалярными поверхностями  $c$  и  $c + dc$  и полностью лежащими в некотором достаточно большом объеме  $V$ . Имеем

$$\frac{d \delta V_c}{dt} = \int_{S_{c+dc}} \mathbf{v} n dS_e - \int_{S_c} \mathbf{v} n dS_e = \frac{\partial \int \mathbf{v} n dS_e}{\partial c} dc. \quad (2.17)$$



Здесь  $\mathbf{v}$  – скорость движения изоскалярной поверхности относительно газа,  $\mathbf{n} = \nabla c / |\nabla c|$  – вектор единичной нормали к изоскалярной поверхности. Скорость  $\mathbf{v}$  находится из уравнения диффузии, записанного в системе координат, связанной с изоскалярной поверхностью  $c(\mathbf{x}, t) = \text{const}$  (Гибсон [1968], Климов [1972]):

$$-\rho \mathbf{v} \nabla c = \nabla(\rho D \nabla c) + \rho W, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}.$$

Здесь  $\mathbf{u}_c = d\mathbf{x}/dt$  – абсолютная скорость движения точек, расположенных на изоскалярной поверхности. Из (2.18) находим, что

$$\mathbf{v} \mathbf{n} = -\rho^{-1} \nabla(\rho D \nabla c) |\nabla c|^{-1} - W |\nabla c|^{-1}.$$

Подстановка этого выражения в (2.17) дает

$$\begin{aligned} \frac{d\rho \delta V_c}{dt} &= \frac{\int_{S_c} [-\nabla(\rho D \nabla c) |\nabla c|^{-1} - \rho W |\nabla c|^{-1}] dS_c}{\partial c} dc = \\ &= \frac{\int_{\delta V_c} [-\nabla(\rho D \nabla c) - \rho W] d\delta V_c}{\partial c} dc. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Разделим (2.19) на объем  $V$  и устремим  $V$  к бесконечности. Учитывая определение плотности вероятностей (1.21), получим

$$\frac{\partial \rho P}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial}{\partial c} \langle \nabla(\rho D \nabla c) \rangle_{t,c} P_t - \gamma \frac{\partial}{\partial c} \rho W P_t, \quad (2.20)$$

где

$$\langle \nabla(\rho D \nabla c) \rangle_{t,c} = \frac{1}{\delta V_c} \int_{\delta V_c} \nabla(\rho D \nabla c) d\delta V_c.$$

В статистически однородном случае уравнение (2.20) совпадает с полученным выше уравнением (2.14), поскольку в силу эргодичности выполняется равенство

$$\langle \nabla(\rho D \nabla c) \rangle_{t,c} = \langle \nabla(\rho D \nabla c) \rangle_{t,c}.$$

## § 2.2. Уравнение для двухточечной плотности распределения вероятностей разности скоростей в локально однородной турбулентности

Рассмотрим однородное и изотропное поле турбулентности в несжимаемой жидкости. Пусть  $\mathbf{x}^{(1)}$  и  $\mathbf{x}^{(2)}$  – две произвольные точки, расстояние между которыми принадлежит инерционному интервалу, т.е.  $\eta \ll r \ll L$ , где  $\eta$  – колмогоровский масштаб,  $L$  – интегральный масштаб турбулентности,  $r = \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}$ . При выводе уравнения для плотности вероятностей разности скоростей в этих точках, так же как и в предыду-

шем параграфе, будем считать, что число Рейнольдса стремится к бесконечности. Тем самым дальнейшее изложение относится лишь к главному члену в асимптотическом разложении плотности вероятностей при  $Re \rightarrow \infty$ , который имеет вид (1.8).

Приведенный здесь вывод уравнения основан на работах Кузнецова [1967, 1976а, 1977в] (см. также статью Кузнецова и Сабельникова [1981а]). Введем величину  $\varphi = \exp(i\vec{\lambda} \cdot \mathbf{v})$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(2)}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(1)}, t)$ ,  $\vec{\lambda}$  — действительный вектор. Среднее значение  $\langle \varphi \rangle$  является характеристической функцией плотности вероятностей разности скоростей в двух точках.

Продифференцируем  $\varphi$  по времени и выразим появляющиеся при дифференцировании производные  $\frac{\partial u_k(\mathbf{x}^{(1)}, t)}{\partial t}$  и  $\frac{\partial u_k(\mathbf{x}^{(2)}, t)}{\partial t}$  из уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \Delta u_k. \quad (2.21)$$

взятых в точках  $\mathbf{x}^{(1)}$  и  $\mathbf{x}^{(2)}$ . В (2.21)  $p$  — давление, поделенное на плотность.

После осреднения выражения, полученного в результате выполнения указанной процедуры, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial t} = i \lambda_k \left\langle \varphi \left[ u_l^{(1)} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l^{(1)}} - u_l^{(2)} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_l^{(2)}} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_k^{(1)}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_k^{(2)}} + \nu \Delta_{\mathbf{x}^{(2)}} u_k^{(2)} - \nu \Delta_{\mathbf{x}^{(1)}} u_k^{(1)} \right] \right\rangle. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Входящие в правую часть этого соотношения инерционные члены после использования предположения об однородности турбулентности и уравнения неразрывности  $\nabla \mathbf{u} = 0$  приводятся к виду

$$\begin{aligned} i \lambda_k \left\langle \varphi \left[ u_l^{(1)} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l^{(1)}} - u_l^{(2)} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_l^{(2)}} \right] \right\rangle = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_k^{(1)}} \langle u_k^{(1)} \varphi \rangle - \frac{\partial}{\partial x_k^{(2)}} \langle u_k^{(2)} \varphi \rangle = - \frac{\partial}{\partial r_k} \langle v_k \varphi \rangle = i \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle}{\partial r_k \partial \lambda_k}. \quad (2.23) \end{aligned}$$

Преобразуем теперь в соотношении (2.22) члены, характеризующие силы давления. С этой целью дважды продифференцируем уравнения Навье — Стокса (2.21) по  $x_k$  и  $x_l$ . Воспользовавшись уравнением неразрывности, получим в результате для градиента давления уравнение Пуассона

$$\Delta \frac{\partial p}{\partial x_l} = - \frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_l \partial x_k \partial x_l}. \quad (2.24)$$

Из (2.24) находим

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i^{(1)}} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|x^{(3)} - x^{(1)}|} d_{ikl} u_k^{(3)} u_l^{(3)} d^3 x^{(3)},$$

$$\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i^{(2)}} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|x^{(3)} - x^{(2)}|} d_{ikl} u_k^{(3)} u_l^{(3)} d^3 x^{(3)},$$

где  $d_{ikl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i^{(3)} \partial x_k^{(3)} \partial x_l^{(3)}}$ .

Поскольку справедливо очевидное соотношение

$$d_{ikl} u_k^{(3)} u_l^{(3)} = d_{ikl} V_k V_l, \quad V = u^{(3)} - u^{(1)},$$

то получим

$$i\lambda_k \left\langle \varphi \left[ \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_k^{(1)}} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_k^{(2)}} \right] \right\rangle =$$

$$= i \frac{\lambda_k}{4\pi} \int T D_{ikl} \varphi P(v, V, r, R) V_k V_l d^3 V d^3 R.$$

$$T = \frac{1}{R} - \frac{1}{|R - r|}, \quad R = x^{(3)} - x^{(1)}, \quad D_{ikl} = \frac{\partial^3}{\partial R_i \partial R_k \partial R_l}.$$

Здесь  $P(v, V, r, R)$  – трехточечная плотность вероятностей разностей скоростей.

Рассмотрим вязкие члены в (2.22). Как и при выводе уравнения для плотности вероятностей концентрации (см. § 2.1), их можно записать в двух различных формах. Далее будет использоваться только одна из них, а именно та, которая соответствует записи уравнения для плотности вероятности концентрации  $P(c)$  в форме (2.15). Чтобы получить эту форму записи, примем во внимание следующие тождества (легко видеть, что они аналогичны преобразованию (2.4)):

$$i\lambda_k \varphi \Delta_{x^{(1)}} u_k^{(1)} = -\lambda_i \lambda_j \varphi \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j^{(1)}} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i^{(1)}} - \Delta_{x^{(1)}} \varphi.$$

$$i\lambda_k \varphi \Delta_{x^{(2)}} u_k^{(2)} = \lambda_i \lambda_j \varphi \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j^{(2)}} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_i^{(2)}} + \Delta_{x^{(2)}} \varphi.$$

которые позволяют представить вязкие члены в нужном виде

$$i\lambda_k \nu \langle \varphi [\Delta_{x^{(2)}} u_k^{(2)} - \Delta_{x^{(1)}} u_k^{(1)}] \rangle =$$

$$= \lambda_i \lambda_j \langle \varphi (\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}) \rangle + 2\nu \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle}{\partial r_i \partial r_j},$$

$$\epsilon_{ij} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Вторым слагаемым в правой части этого соотношения (оно описывает молекулярный перенос моментов разности скоростей) при  $r \gg \eta$  и  $\text{Re} \rightarrow \infty$  можно пренебречь. Что касается первого слагаемого в правой части (2.27), то, как показывают выкладки и рассуждения, аналогичные тем, которые использовались в главе 1 при получении формулы для плотности вероятностей разности скоростей (1.8) из (1.5), оно при  $\eta \ll r \ll L$  имеет вид

$$\langle \varphi(\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}) \rangle = \gamma \langle \varphi(\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}) \rangle_r. \quad (2.28)$$

Для дальнейшего преобразования соотношения (2.28) введем условную плотность распределения вероятностей  $P_{t\epsilon}(\epsilon_{ij} | \mathbf{v})$  величины  $\epsilon_{ij}$  при условии, что точки  $\mathbf{x}^{(1)}$  и  $\mathbf{x}^{(2)}$  находятся в турбулентной жидкости, а разность скоростей в этих точках равна  $\mathbf{v}$ . Введем обозначение

$$e_{ij}(\mathbf{v}) = \int \epsilon_{ij}^{(1)} P_{t\epsilon}(\epsilon_{ij}^{(1)} | \mathbf{v}) d\epsilon_{ij}^{(1)} = \int \epsilon_{ij}^{(2)} P_{t\epsilon}(\epsilon_{ij}^{(2)} | \mathbf{v}) d\epsilon_{ij}^{(2)}. \quad (2.29)$$

Равенство интегралов в (2.29) следует из соображений симметрии. Используя формулу Байеса для условной совместной плотности вероятностей  $\epsilon_{ij}$  и  $\mathbf{v}$  в турбулентной жидкости:

$$P_{tt}(\epsilon_{ij}, \mathbf{v}) = P_{t\epsilon}(\epsilon_{ij} | \mathbf{v}) P_{tt}(\mathbf{v}, r)$$

и введенное обозначение (2.29), приходим к соотношению

$$\langle \varphi(\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}) \rangle = 2\gamma \int \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) \varphi P_{tt}(\mathbf{v}, r) d^3 \mathbf{v}. \quad (2.30)$$

Из формул (2.23), (2.26), (2.27) и (2.30) получаем уравнение для характеристической функции. Применяя к этому уравнению обратное преобразование Фурье, найдем, что плотность вероятностей разности скоростей в двух точках удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_k \frac{\partial P}{\partial r_k} + 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} e_{ij}(\mathbf{v}) P_{tt} + \frac{\partial \pi_k}{\partial v_k} = 0. \quad (2.31)$$

Здесь

$$\pi_k = \frac{1}{4\pi} \int T D_{kij} V_i V_j P(\mathbf{v}, \mathbf{V}, r, R) d^3 \mathbf{V} d^3 \mathbf{R}.$$

Связь безусловной плотности вероятностей  $P(\mathbf{v}, r)$  с условными плотностями вероятностей  $P_{tt}(\mathbf{v}, r)$  и  $P_{nn}(\mathbf{v}, r)$  дается формулой (1.8).

В инерционном интервале в полученном уравнении, в силу равновесности мелкомасштабной турбулентности, нестационарное слагаемое можно опустить.

### § 2.3. Гипотезы, используемые при замыкании уравнений для распределений вероятностей

Уравнения для плотностей вероятностей, полученные в первых двух параграфах данной главы, как и все осредненные уравнения в статистической теории турбулентности, строго следующие из уравнений Навье – Стокса и диффузии, незамкнуты (исключение составляет лишь уравнение для характеристического функционала, Монин и Яблом [1967]). Для неизвестных функций, входящих в эти уравнения, можно выписать новые уравнения, которые также будут незамкнутыми и т.д. В результа-

те получается бесконечная зацепляющаяся цепочка уравнений, сходная с цепочкой уравнений Ивона – Борна – Кирквуда – Боголюбова в статистической физике. Попытки замкнуть эту цепочку уравнений пока немногочисленны. Методы, предложенные для аппроксимации неизвестных членов, в большей своей части являются чисто полуэмпирическими или формальными и, как правило, основаны на аналогии с кинетической теорией газов.

Рассмотрим по необходимости кратко сначала те гипотезы, которые используются при замыкании уравнения для одноточечной плотности вероятностей концентрации (подробный обзор и анализ гипотез замыкания содержится в работе Сабельникова [1985а]). В этом случае наибольшие трудности, по-видимому, возникают при описании смещения до молекулярных масштабов, т.е. первого слагаемого, которое фигурирует в правой части уравнения (2.14) или (2.15). Поэтому очень часто в качестве исходного соотношения используются не точные уравнения механики сплошной среды, а некоторые модельные уравнения, основанные на качественных представлениях о характере процесса молекулярного смещения в турбулентных потоках. Например, в работах Кузнецова и Фроста [1973], Фроста [1973], Чанга [1969, 1970, 1976] применялось уравнение Ланжевена. В этом случае первый член в правой части (2.14) приобретает вид\*)

$$-\frac{\partial}{\partial c} \langle \nabla \cdot (D \nabla c) \rangle_c P = \beta \frac{\partial}{\partial c} (c - \langle c \rangle) P, \quad (2.32)$$

где  $\beta$  – некоторая функция, не зависящая от концентрации.

Аналогичное выражение предложено Допазо [1975], Допазо и О'Брайеном [1976]. В этих работах показано, что (2.32) есть точное выражение, если двухточечное распределение вероятностей концентрации в двух близких точках является нормальным (по этой причине замыкание (2.32) в литературе часто называется квазигауссовским). Тогда функция  $\beta$  имеет вид  $\beta = \langle N \rangle / \sigma^2$ , где  $\sigma = \sqrt{\langle (c - \langle c \rangle)^2 \rangle}$  – среднеквадратическая концентрация. В главе 1 отмечалось, что указанное распределение вероятностей концентрации при малом расстоянии между точками принципиально отличается от нормального (см. рис. 1.11).

Следовательно, трудно ожидать, что соотношение (2.32) даст удовлетворительные результаты и действительно анализ, выполненный Фростом [1973], Допазо [1979], О'Брайеном [1980а], Сабельниковым [1982б, 1985а, 1986], подтверждает этот вывод.

Иной подход развит в работах Кела [1963], Поупа [1976, 1981б], Кольмана и Янички [1982], Фроста [1973, 1977], Янички, Кольбе и Кольмана [1979], Допазо [1979], Недоруба, Фроста и Щербины [1979] (см. также обзоры О'Брайена [1980а,б], Компанийца, Овсянникова и Полака [1979], Щербины [1982]). В этих работах рассматриваемое слагаемое заменяется фактически произвольным выражением, которое нелинейно и нелокально зависит от плотности распределения вероятностей. Так, Поуп [1976]

\*) Заметим, что Кузнецов и Фрост [1973] использовали выражение (2.32) только в турбулентной жидкости.

предложил такое выражение:

$$\frac{\partial}{\partial c} \langle \nabla (D \nabla c) \rangle_c P \sim \frac{q\sigma}{L} \frac{\partial^2}{\partial c^2} \int_0^c g\left(\frac{c-c'}{\sigma}\right) P(c') dc' \times \\ \times \int_c^{1+0} g\left(\frac{c''-c}{\sigma}\right) P(c'') dc'', \quad (2.33)$$

где  $g(s) = \ln(1+s)$ ; здесь и далее символы  $-0$  и  $1+0$  означают, что при интегрировании в согласии с (1.20) учитываются слагаемые, пропорциональные  $\delta(c)$  и  $\delta(c-1)$  соответственно.

Закрывающие соотношения, предложенные в остальных из перечисленных выше работ, за исключением замыкания из статьи Фроста [1973], следуя статье Янички, Кольбе и Кольмана [1979], можно записать в следующем общем виде\*):

$$\frac{\partial}{\partial c} \langle \nabla (D \nabla c) \rangle_c P \sim -\frac{q}{L} \left[ \int_{-0}^c dc' \int_c^{1+0} dc'' P(c') P(c'') \times \right. \\ \left. \times G(c, c', c'') - P(c) \right], \int_c^{c''} G(c, c', c'') dc = 2, \quad c' \leq c \leq c''. \quad (2.34)$$

Здесь  $G$  — некоторая неотрицательная функция, которая преобразуется по закону  $G(\lambda c, \lambda c', \lambda c'') = \lambda^{-1} G(c, c', c'')$ . Замыкание Фроста [1973] отличается от общего соотношения (2.34) тем, что в нем, во-первых, функция  $G$  ( $G=1$ ) не удовлетворяет указанному закону преобразования и, во-вторых, перед  $P(c)$  вместо единицы стоит коэффициент

$$\left[ \frac{1}{2} \int_{-0}^c (c-c') P(c') dc' + \int_c^{1+0} (c''-c) P(c'') dc'' \right].$$

Формула (2.34) вытекает из модели, согласно которой молекулярное смешение происходит при контакте двух молей с концентрациями  $c'$  и  $c''$ . При таком контакте возникают новые моли с концентрациями  $c$ , удовлетворяющими условию  $c' < c < c''$ . В частности, если сделать простейшее предположение о том, что образуется моль лишь с одной концентрацией, равной  $c = \frac{1}{2}(c' + c'')$ , т.е.  $G = 2\delta[c - \frac{1}{2}(c' + c'')]$ , то получим известную схему Кела [1963]

$$\frac{\partial}{\partial c} \langle \nabla (D \nabla c) \rangle_c P \sim -\frac{q}{L} \left\{ 4 \int_{-0}^c P(c-c') P(c+c') dc' - P(c) \right\}.$$

Более сложные выражения для функции  $G$  анализируются Яничкой, Кольбе и Кольманом [1979], Допазо [1979], Недорубом, Фростом и Щербиной [1979], Кольманом и Яничкой [1982], Щербиной [1982].

Главный недостаток замыканий вида (2.34) в том, что они не опираются на экспериментальные данные. Основная цель, которая преследуется при построении перечисленных замыкающих соотношений, состоит в том, чтобы найти такие уравнения, которые допускали бы возможность численного интегрирования с помощью стандартных методов (имеющиеся на таком пути возможности продемонстрированы в работах Поупа [1981a],

\* В своей последующей статье Кольман и Яничка [1982] используют (2.34) только в турбулентной жидкости. Полное выражение для члена, описывающего смешение до молекулярных масштабов, содержит также дополнительные слагаемые, отвечающие взаимодействию между турбулентной и нетурбулентной жидкостями.

Недору́ба, Фроста и Щербины [1979], Локвуда и Шэха [1982], Кольмана и Янички [1982]).

Описание смешения до молекулярного уровня – не единственная проблема, возникающая при анализе одноточечного распределения вероятностей концентрации. Другой важной проблемой является описание турбулентной диффузии (второе слагаемое в левой части (2.14) или (2.15)). В уравнении для  $P(c)$  это слагаемое обычно записывается по аналогии с полуэмпирической теорией турбулентной диффузии (Кузнецов и Фрост [1973], Фрост [1973, 1977], Поуп [1976], Недору́б, Фрост и Щербина [1979], Недору́б и Щербина [1979], Щербина [1982] и ряд других работ), т.е.

$$\int \mathbf{u} P(\mathbf{u}, c) d^3 \mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle P - D_t \nabla P. \quad (2.35)$$

Здесь  $D_t$  – коэффициент турбулентной диффузии.

Нетрудно видеть, что формула (2.35) предполагает равенство коэффициентов переноса для коэффициента перемежаемости, вероятностей  $\gamma_0, \gamma_1$  и всех моментов поля концентрации введенному в (2.35) коэффициенту диффузии  $D_t$ . Этот вывод, вообще говоря, не согласуется с известными полуэмпирическими теориями. В них, как известно, для лучшего совпадения теоретических и экспериментальных данных используются различные значения коэффициентов переноса для  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma, \langle c \rangle$  и  $\sigma^2 = \langle (c - \langle c \rangle)^2 \rangle$  (см., например, Мешеряков [1974], Роди [1980], Мешеряков и Сабельников [1984а, б]).

Подчеркнем, что, несмотря на указанный недостаток, замыкание (2.35) в ряде случаев, по-видимому, может оказаться вполне удовлетворительным. Так, например, при "черно-белом" смешении, когда  $\langle c^k \rangle = \langle c \rangle^k = \gamma_1$ ,  $k > 0$  (см. § 1.3), коэффициенты переноса всех моментов в точности совпадают. Поэтому можно предположить, что соотношение (2.35) применимо, когда мала вероятность наблюдения промежуточных значений концентрации, т.е. при малых значениях коэффициента перемежаемости.

Описание турбулентной диффузии значительно упрощается, если используются уравнения для совместного распределения вероятностей скорости и концентрации. Такой подход развивался Кузнецовым [1976б], Допазо [1976], Онуфриевым [1977], Сабельниковым [1979, 1981, 1983], Поупом [1981б], Либби и Брэм [1981] (см. также обзор Либби и Вильямса [1981]). В этом случае вообще отпадает необходимость введения каких-либо гипотез о характере турбулентной диффузии. Однако возникают две новые трудности. Первая связана с многомерным характером уравнения для совместной плотности распределения вероятностей скорости и концентрации. Вторая возникает при описании пульсаций давления. Вследствие указанных трудностей рассматриваемый подход не привел пока к каким-либо конкретным результатам.

Рассмотрим теперь гипотезы, используемые при замыкании уравнений для плотностей распределений вероятностей скоростей. Уравнение для одноточечной плотности вероятностей скорости рассматривалось Ландгреном [1969], Иевлевым [1970, 1975], Онуфриевым [1977], Сабельниковым [1982а, г]. В работе Ландгрена для описания сил давления использовалось релаксационное выражение, совпадающее с выражением, которое вытекает из модели Крука в кинетической теории газов (см., например, Черчиньяни [1975]). Аналогичные выражения использовались Онуфриевым [1977]. Для аппроксимации вязких сил в работе Ландгрена [1969] предполагалось,

что двухточечное распределение вероятностей скорости является нормальным (аналогичный характер носит рассмотренная выше гипотеза (2.32)). Предположение о том, что  $n$ -точечные распределения вероятностей скорости слабо отличаются от нормальных, использовалось также Иевлевым [1975]. В работах Ландгрена и Иевлева слагаемые, описывающие процессы молекулярного переноса, пропорциональны первым производным по скорости от плотности распределения вероятностей. В случае уравнения для распределения вероятностей концентрации такое описание соответствует записи уравнения в форме (2.14).

В отличие от предыдущих работ, Сабельников [1982а, г] использовал уравнение, в котором вязкие слагаемые пропорциональны вторым производным от плотности распределения вероятностей, что соответствует форме описания, принятой в § 2.2. Указанный способ представления уравнений для плотностей распределений вероятностей предложен в работах Кузнецова [1967], Улинича и Любимова [1968]. В работе Сабельникова [1982а] влияние пульсаций давления аппроксимировалось с помощью диффузионного приближения, которое часто используется в задачах кинетической теории газов (см., например, Черчиньяни [1975]). Полученное уравнение сходно с уравнением Фоккера — Планка.

Уравнения для двухточечных плотностей распределений вероятностей скорости рассматривались Кузнецовым [1967, 1976а], Ландгреном [1975], Иевлевым [1970, 1975], Сосиновичем [1973, 1974, 1981а, б]. В работе Ландгрена [1975] трехточечная плотность вероятностей скорости выражается через двухточечную и одноточечную с помощью гипотезы о том, что трехточечная корреляционная функция в групповом представлении трехточечной плотности вероятностей совпадает с трехточечной гауссовской корреляционной функцией (указанное замыкание легко обобщается на случай любой  $n$ -точечной плотности вероятностей,  $n > 3$ ). Такое замыкание приводит к интегро-дифференциальному уравнению достаточно сложной структуры. Оно существенно упрощается при анализе инерционного интервала и сводится к замкнутому уравнению для структурной функции.

Основная идея метода, предложенного Иевлевым [1970], состоит в специальном задании функционального вида выражений для условно осредненных моментов, которые входят в уравнение для любой  $n$ -точечной плотности вероятностей ( $n \geq 2$ ). Количество неизвестных функций в этих приближенных выражениях совпадает с количеством условий, следующих из всех предельных свойств  $n$ -точечных плотностей распределений вероятностей (таким условием, например, является стремление к нулю семиинвариантов при неограниченном раздвижении рассматриваемых точек и т.д.) Метод замыкания Иевлева использовался Алексеевым, Иевлевым и Киселевым [1976], Киселевым [1977] при анализе вырождения однородной турбулентности в модели Бюргерса, а также в задаче об однородной и изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости. В работе Куо и О'Брайена [1981] метод Иевлева применялся для описания двухточечной плотности вероятностей концентраций в химической турбулентности (т.е. стохастического колебания концентраций в неподвижной реагирующей среде).

В работах Сосиновича [1973, 1974] вывод замкнутого уравнения для двухточечной плотности вероятностей скоростей основан на диаграммной технике неравновесной статистической механики и квантовой теории поля



(эти методы в теорию турбулентности введены Крейкнаном [1959]). Найденное таким образом уравнение содержит квадратичные члены, что вызывает пока непреодолимые трудности при отыскании точного решения. По этой причине в последующих работах Сосиновича [1981а, б] используются более простые гипотезы замыкания, приводящие к замкнутому уравнению для структурной функции.

В гипотезах, которые предложены в рассмотренных работах, нет эмпирических постоянных. Однако выражения, которые из них вытекают, достаточно громоздки и поэтому мало исследованы. Окончательные возможности описания турбулентности в рамках полученных уравнений пока неясны.

Рассмотренные замыкающие гипотезы имеют много общего. Во-первых в них часто явно или неявно используются предположения о близости  $n$ -точечных плотностей распределений вероятностей к гауссовским функциям. Экспериментальные данные показывают, что это предположение в общем случае далеко от истины (см. § 1.1). Сказанное в наибольшей степени относится к многоточечным плотностям вероятностей, когда расстояние между точками мало по сравнению с масштабом турбулентности (см рис. 1.9 – 1.13). Основной причиной отклонения от нормального закона как уже отмечалось в главе 1, является существование внешней и внутренней перемежаемостей. Во-вторых, в большинстве из указанных работ отсутствует связь с фундаментальной теорией локально однородной и изотропной турбулентности, развитой Колмогоровым [1941, 1962а, б], Обуховым [1941, 1962] и, независимо, Онзагером [1945, 1949] и Вейцзекером [1948]. В особенности это касается идей об универсальном равновесии и статистической независимости мелко- и крупномасштабного движений в развитом турбулентном потоке, наиболее полно и отчетливо изложенных в книге Бэтчелора [1953]. Более того, в некоторых работах ставится задача получить рассматриваемые свойства дедуктивным образом из формально замкнутых уравнений. Так, например, Ландгрэн [1975] в инерционном интервале спектра турбулентности получил закон "двух третей" Колмогорова – Обухова с числовым коэффициентом, очень близким к экспериментальному значению. Однако, имея в виду, что в инерционном интервале двухточечная плотность вероятностей скорости принципиально отличается от нормальной, следует признать, что полученный Ландгреном результат выглядит не совсем убедительным.

Не отрицая всей важности этого направления исследований, необходимо отметить, что в настоящее время более плодотворным, по-видимому, является другой подход, в котором существование универсального равновесия предполагается изначально. Тем самым задача сводится к исследованию и использованию свойств универсального равновесия. В связи с этим подчеркнем, что цепочка уравнений для  $n$ -точечных плотностей вероятностей, вообще говоря, имеет не одно, а широкий класс решений, и для того, чтобы выделить представляющее физический интерес решение, необходимо, видимо, заранее наложить некоторые ограничения на искомые функции.

Здесь можно провести аналогию с решением проблемы равновесных ансамблей в статистической физике. Известно (см., например, главу 4 в книге Балеску [1975]), что, оставаясь в рамках механики, невозможно однозначно решить эту проблему. Лишь введение статистического пред

положения — так называемого принципа равных априорных вероятностей — позволяет построить функцию равновесного распределения.

Принимая во внимание эти соображения, в данной книге предпринята попытка получить уравнения для плотностей распределений вероятностей различных характеристик турбулентности, исходя из предположения о том, что существует универсальное статистическое равновесие между крупномасштабными и мелкомасштабными пульсациями. Другими словами, принятые ниже замыкающие соотношения существенно основаны на теории локально однородной турбулентности, развитой Колмогоровым [1941, 1962а, б] и Обуховым [1941, 1949, 1962]. Такой подход предложен Кузнецовым [1967, 1972а, 1976а], Улиничем и Любимовым [1968], Любимовым и Улиничем [1970].

Как известно, в теории локально однородной турбулентности фундаментальную роль играют диссипация энергии и скалярная диссипация. Поэтому далее основное внимание уделяется уравнениям для плотностей распределения вероятностей концентрации и разности скоростей, записанных соответственно в виде (2.15) и (2.31). Из этих уравнений следует, что в фазовом пространстве перераспределение плотности вероятностей носит диффузионный характер, а коэффициентами диффузии служат взятые с обратным знаком скалярная диссипация и диссипация энергии. Эти коэффициенты отрицательны, что, как будет показано далее, обуславливает многие весьма необычные свойства полученных уравнений.

Таким образом, в развиваемой теории главную роль играют условно осредненные значения скалярной диссипации  $\langle N \rangle_{r,c}$  и диссипация энергии  $e_{ij}(v)$ . Важно подчеркнуть следующее. Заранее не очевидно, что функции  $\langle N \rangle_{r,c}$  и  $e_{ij}(v)$  обладают большей простотой и универсальностью, чем сами распределения вероятностей. Проведенное в последующих главах исследование, которое основано на теории локально однородной турбулентности, а также некоторые (пока немногочисленные) экспериментальные данные показывают, что такая простота и универсальность, по-видимому, существует. В противном случае точные незамкнутые уравнения для плотностей распределений вероятностей позволяли бы только выразить одни неизвестные функции через другие.

В исследованиях, проведенных в главах 3, 4, немаловажную роль играет условие неотрицательности решений уравнений для плотностей распределений вероятностей, которое обычно специально не анализируется. Необходимо подчеркнуть, что рассматриваемое условие с математической точки зрения далеко не тривиально. Оно существенно сужает класс возможных замыканий уравнения для плотности вероятностей (при известной структуре точного незамкнутого уравнения), накладывая определенные ограничения на функциональный вид замыкающих соотношений. К сожалению, сейчас нет общей теории, которая позволяла бы указать вид этих ограничений.

Отметим, что, несмотря на свою незамкнутость, уравнения (2.15) и (2.31) представляют собой точную связь между непосредственно измеряемыми характеристиками турбулентности. Это позволяет, по крайней мере в принципе, совершенствовать замыкание по мере получения новых экспериментальных данных. Как представляется, в таком направлении и должно происходить в будущем уточнение теории.

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ  
ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ**

В данной главе рассматривается уравнение для плотности вероятностей концентрации динамически пассивной примеси. Как и в § 1.3, для обозначения этой концентрации используется буква  $z$ . Здесь подробно обсуждаются гипотезы, используемые для замыкания этого уравнения. Анализируются решения замкнутого уравнения в случае статистически однородного поля концентрации и в свободных турбулентных течениях. В главе преследуются три основные цели. Первая является чисто практической и заключается в том, чтобы дать простой приближенный метод определения распределения вероятностей концентрации и коэффициента перемежаемости в струях. Эта задача решается по возможности без сложных математических выкладок. Вторая цель — исследовать математические свойства уравнения для плотности вероятностей концентрации, сформулировать краевую задачу и показать, что из условия разрешимости этой краевой задачи вытекают дополнительные связи между заранее не известными функциями, входящими в замыкающие соотношения. Этот результат имеет принципиальное значение, так как из него следует, что развиваемый подход позволяет сократить количество произвольных функций по сравнению с обычными полуэмпирическими теориями для одноточечных моментов. Не исключено, что новые пути построения замкнутой теории турбулентности будут связаны с совершенствованием этого подхода. Третья цель — изучить структуру изоскалярных поверхностей в турбулентных потоках. Такое исследование позволяет, во-первых, предложить дополнительный способ получения граничных условий для плотности вероятностей концентрации и выявить их физический смысл и, во-вторых, проследить взаимосвязь между перемежаемостью и структурой изоскалярных поверхностей.

Исследование распределения вероятностей концентрации предполагает, что заданы все гидродинамические характеристики течения, т.е. поле средних скоростей и коэффициент перемежаемости. В статистически однородном случае, когда средняя концентрация постоянна, этих характеристик достаточно для решения задачи. В турбулентных струях, поскольку средняя концентрация неизвестна, в число параметров, которые должны быть заданы, нужно включить еще и величину  $\langle z \rangle$ . Решение практических вопросов показывает, что удобно несколько изменить указанную постановку задачи. Дело в том, что сейчас методы расчета коэффициента перемежаемости находятся на начальном этапе развития, в то время как средняя концентрация (или, что то же, поток вещества) может достаточно надежно рассчитываться из полуэмпирических моделей турбулентности

Поэтому целесообразно считать, что средняя концентрация известна, а искомой функцией является коэффициент перемежаемости. Подчеркнем, что оправданием произведенному изменению постановки задачи служат только соображения удобства, поскольку гидродинамический параметр  $\gamma$ , вообще говоря, не связан с полем концентрации (см. § 1.3). Измененная постановка вполне приемлема в струях или следах, где, как отмечалось в § 1.3, коэффициенты перемежаемости, определенные по динамическому и скалярным полям, практически равны между собой.

Содержание главы основано на работах Кузнецова [1972а, 1977б], Сабельникова [1980а, 1982б, 1985б] и Кузнецова и Сабельникова [1981б].

### § 3.1. Уравнение для условной плотности вероятностей концентрации в турбулентной жидкости. Граничные условия

В уравнение для безусловной плотности вероятностей концентрации (2.15), как это следует из выражения (1.20), наряду с гладкими функциями входят обобщенные функции -- разрывная функция Хевисайда, дельта-функция и ее производная. Это обстоятельство наводит на мысль, что из уравнения (2.15) могут быть получены соотношения трех различных типов. Ниже показано, что это действительно так, и из уравнения (2.15) удается выделить, во-первых, отдельное уравнение для условной плотности вероятностей концентрации, во-вторых, уравнения для вероятностей  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  и, в-третьих, найти граничные условия для условной плотности вероятностей при  $z = 0$  и  $z = 1$ . Напомним, что  $z = 0$  и  $z = 1$  характеризуют диапазон изменения концентрации внутри турбулентной жидкости, т.е. являются границами фазового пространства и соответствуют значениям  $z$  в нетурбулентной жидкости при  $Re \rightarrow \infty$ .

Способ, с помощью которого получаются названные уравнения и граничные условия, предложен Кузнецовым [1972а]. В этой работе, предполагалось, что условно осредненная скалярная диссипация  $\langle N \rangle_{t,z}$  не зависит от  $z$ , т.е.  $\langle N \rangle_{t,z} = \langle N \rangle_t$  (подробнее об этой гипотезе см. § 3.2). Но область применимости указанного способа не ограничивается только этим случаем.

В соответствии с работой Кузнецова [1972а] умножим уравнение (2.15), в которое предварительно подставлено выражение (1.20) для безусловной плотности вероятностей  $P(z)$ , на произвольную гладкую функцию концентрации  $\psi(z)$  и проинтегрируем по  $z$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Используя хорошо известные правила действий с обобщенными функциями (см., например, Гельфанд и Шилор [1959]), получим

$$\int_0^1 \psi \left[ \frac{\partial \gamma F}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_{t,z} \gamma F + \gamma \frac{\partial^2 \langle N \rangle_{t,z} F}{\partial z^2} \right] dz +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_{n,0} \gamma_0 + \gamma \left[ \frac{\partial \langle N \rangle_{t,z} F}{\partial z} \right]_{z=0} \right\} \psi(0) +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_{n,1} \gamma_1 - \gamma \left[ \frac{\partial \langle N \rangle_{t,z} F}{\partial z} \right]_{z=1} \right\} \psi(1) -$$

$$- \psi'(0) \gamma \langle N \rangle_{t,z} F \Big|_{z=0} + \psi'(1) \gamma \langle N \rangle_{t,z} F \Big|_{z=1} = 0. \quad (3.1)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по  $z$ . Теперь учтем, что функция  $\psi(z)$  произвольна. Следовательно, подынтегральное выражение, а также все функции перед  $\psi(0)$ ,  $\psi(1)$ ,  $\psi'(0)$  и  $\psi'(1)$  в (3.1) должны по отдельности тождественно равняться нулю. В результате приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial \gamma F}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_{t,z} \gamma F = -\gamma \frac{\partial^2 \langle N \rangle_{t,z} F}{\partial z^2}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_{n,0} \gamma_0 = -\gamma \left[ \frac{\partial \langle N \rangle_{t,z} F}{\partial z} \right]_{z=0}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_{n,1} \gamma_1 = \gamma \left[ \frac{\partial \langle N \rangle_{t,z} F}{\partial z} \right]_{z=1}, \quad (3.4)$$

$$F = 0, \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = 1. \quad (3.5)$$

Необходимо заметить, что при получении граничных условий (3.5) неявно использовано предположение, что  $\langle N \rangle_{t,z} \neq 0$ ,  $z = 0$  и  $z = 1$ . Это предположение вполне оправдано в рамках рассматриваемой асимптотической теории, когда  $Re = \infty$ . Результаты, полученные в § 1.3, позволяют вообще утверждать, что  $\langle N \rangle_{t,z} \neq 0$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . В самом деле, функция  $\langle N \rangle_{t,z}$  представляет собой главный член асимптотического разложения условно осредненной скалярной диссипации  $\langle N \rangle_z$  при  $Re \rightarrow \infty$  и тем самым не зависит от числа Рейнольдса. Поэтому обращение  $\langle N \rangle_{t,z}$  в нуль противоречило бы сделанному в § 1.3 выводу, что закон, по которому  $\langle N \rangle_{t,z}$  стремится к нулю на границах фазового пространства, принципиально зависит от числа  $Re$  (в формулах (1.29) и (1.34) величины  $\alpha$  и  $k$  зависят от числа  $Re$ ).

Поясним физический смысл уравнений (3.3), (3.4) для вероятностей  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  и уравнения для коэффициента перемежаемости, которое получается либо интегрированием уравнения (3.2) по всем  $z$ , либо из (3.3) и (3.4) после использования соотношения  $\gamma = 1 - \gamma_0 - \gamma_1$ :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_t \gamma = \gamma \left[ \langle N \rangle_{t,z=0} \frac{\partial F(0)}{\partial z} - \langle N \rangle_{t,z=1} \frac{\partial F(1)}{\partial z} \right]. \quad (3.6)$$

При преобразовании членов в правой части (3.6) использовались граничные условия (3.5). Из условия неотрицательности плотности вероятностей и граничных условий (3.5) следует, что  $\partial F(0)/\partial z > 0$  и  $\partial F(1)/\partial z < 0$ . Тем самым правая часть (3.6) всегда положительна. Следовательно, уравнение (3.6) описывает увеличение относительного объема турбулентной жидкости вследствие захвата нетурбулентной жидкости. Аналогичные рассуждения показывают, что уравнения (3.3) и (3.4) описывают уменьшение относительного объема нетурбулентной жидкости с  $z = 0$  и  $z = 1$  соответственно. В рамках развиваемой теории скорости изменения объемов турбулентной и нетурбулентной жидкостей, описываемые правыми частями уравнений (3.3), (3.4) и (3.6), оказываются пропорциональными потокам плотности вероятностей концентрации на границах фазового пространства.

Рассмотрим теперь граничные условия (3.5). Прежде всего надо отметить, что они не являются неожиданными, если учесть характер осцилло-

грамм неосредненных профилей температуры в струе, полученных в работе Уберои и Сингха [1975] (см. рис. 1.1). Эти осциллограммы анализировались ранее в § 1.3. Напомним, что на них отчетливо видно практически скачкообразное изменение температуры на границе струи. Тем самым градиент температуры на границе стремится к бесконечности. Отсюда, если использовать геометрическую интерпретацию плотности вероятностей (см. формулу (1.23)), приходим к (3.5).

Сделаем еще одно замечание относительно физического смысла граничных условий (3.5). С этой целью перепишем формулу (1.27) в виде оценки

$$\gamma P_t(z) \approx \lim_{D \rightarrow 0} \frac{d \langle S_z \rangle}{dV} \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\langle N \rangle_t}}. \quad (3.7)$$

При получении (3.7) считалось, что  $\left\langle \frac{\partial z}{\partial n} \right\rangle_{t,z} \sim \sqrt{\frac{D}{\langle N \rangle_t}}$ , т.е. пренебрегалось пульсациями градиента концентрации (это оправдано при определении не слишком высоких моментов градиента; см., например, Монин и Яглом [1967]).

Соотношение (3.7) показывает, что  $\lim_{Re \rightarrow \infty} d \langle S_z \rangle Re^{-1/2}$  при  $0 < z < 1$  конечен. Тем самым зависимость площади элемента внутренней изоскалярной поверхности  $z = \text{const} \neq 0$  или  $1$  от числа Рейнольдса имеет вид  $d \langle S_z \rangle \sim \sim \sqrt{Re}$ . Если  $z = 0$  или  $z = 1$ , то из (3.5) и (3.7) следует, что для этих значений концентрации  $\lim_{Re \rightarrow \infty} d \langle S_z \rangle Re^{-1/2} = 0$ . Отсюда заключаем, что  $d \langle S_z \rangle \sim Re^k$ ,  $0 < k < 1/2$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ . Следовательно, при  $Re \rightarrow \infty$  площадь и тем самым степень искривленности предельных изоскалярных поверхностей  $z = 0$  и  $z = 1$  существенно слабее, чем любой внутренней изоскалярной поверхности  $0 < z = \text{const} < 1$ , расположенной в турбулентной жидкости. Таким образом, характер поведения изоскалярных поверхностей в турбулентных потоках позволяет провести вполне определенную аналогию с перемежаемостью, а точнее, с ее качественным описанием, данным в § 1.1. Действительно, если под колебаниями предельных изоскалярных поверхностей иметь в виду внешнюю перемежаемость, а под колебаниями внутренних изоскалярных поверхностей — внутреннюю перемежаемость, то получится наглядная физическая модель турбулентной жидкости, близкая к образу "губки", предложенному в § 1.1. Описанная модель турбулентной жидкости делает весьма прозрачным и смысл процедуры осреднения, с помощью которой в § 1.1 определялась граница турбулентной жидкости и тем самым выделялась внешняя перемежаемость. Напомним, что эта граница выбиралась из условия максимальной гладкости. Связь оценки искривленности предельных изоскалярных поверхностей с указанным условием достаточно очевидна.

Обсуждение структуры изоскалярных поверхностей в турбулентном потоке будет продолжено в § 3.8. Содержащееся там более строгое исследование вопроса подтверждает сформулированные здесь выводы.

### § 3.2. Гипотеза замыкания для слагаемого, описывающего процесс смешения до молекулярного уровня

Обратимся к случаю статистически однородного поля концентрации (см. § 3.4). Тогда в уравнении для плотности вероятностей, кроме нестационарного члена, остается только анализируемое слагаемое. Следовательно, качественный вид решения в этом случае полностью определяется слагаемым, которое описывает процесс молекулярного смешения. Данный пример особенно ясно указывает на то, что гипотезы замыкания относительно функций  $\langle N \rangle_{t,z}$  (или  $\langle \nabla(D \nabla z) \rangle_{t,z}$ ) должны быть тщательно обоснованы, в особенности с физической точки зрения.

Детальные измерения величин  $\langle N \rangle_{t,z}$  и  $\langle \nabla(D \nabla z) \rangle_{t,z}$  неизвестны. Поэтому большое значение приобретают общие представления о структуре турбулентных течений при больших числах Рейнольдса. В этом отношении преимущество имеет запись уравнения в форме (2.15), содержащей функцию  $\langle N \rangle_{t,z}$ . Сделанное заключение основано на том факте, что при анализе свойств величины  $\langle N \rangle_{t,z}$  естественно воспользоваться теорией локально однородной и изотропной турбулентности Колмогорова [1941, 1962а, б] и Обухова [1941, 1949, 1962]. Эта теория, как уже обсуждалось в главе 1, исходит из каскадного механизма передачи энергии по спектру масштабов турбулентного движения. Как следствие этого механизма, мелкомасштабное пульсационное движение получает энергию от крупномасштабного лишь опосредствованно в результате многократного дробления вихревых образований. При очень больших значениях числа Рейнольдса количество таких дроблений велико. Отсюда естественным образом вытекает предположение о том, что характеристики энергосодержащих вихрей и вихрей с достаточно малыми размерами статистически независимы. Это утверждение было сформулировано Вейцекером [1948] и Онзагером [1945, 1949] в виде гипотезы о том, что в однородной турбулентности компоненты Фурье с сильно отличающимися волновыми числами статистически независимы. Подробное и физически прозрачное изложение сформулированной гипотезы дано Бэтчелором [1953].

Используем указанную гипотезу в рассматриваемом случае. Очевидно, что поле концентрации  $z$  – макрохарактеристика, а поле скалярной диссипации  $N$  – микрохарактеристика турбулентности (здесь и далее под макрохарактеристикой понимается величина, определяемая в основном достаточно крупными вихрями, под микрохарактеристикой – величина, определяемая мелкими вихрями). Согласно гипотезе эти поля при больших числах Рейнольдса статистически независимы, т.е. функция  $\langle N \rangle_{t,z}$  от  $z$  не зависит. Таким образом, при  $Re \rightarrow \infty$  имеем

$$\langle N \rangle_{t,z} = \langle N \rangle_t. \quad (3.8)$$

Ввиду важности гипотезы (3.8) еще раз перечислим те ограничения, при выполнении которых ее можно использовать. Прежде всего, гипотеза (3.8) применяется лишь в турбулентной жидкости. В этой связи заметим, что в работах Кузнецова [1967] и Поупа [1976] гипотеза о статистической независимости полей  $z$  и  $N$  использовалась без учета перемежаемости, т.е. считалось, что  $\gamma = 1$  и  $\langle N \rangle_z = \langle N \rangle$ . Поупом [1976] и Допазо [1979] было указано, что применение гипотезы в таком виде приводит к уравнению,

решениям которого присущ ряд физически неправдоподобных свойств. На этом основании они сделали заключение, что гипотеза о статистической независимости неприемлема для аппроксимации члена, описывающего смешение до молекулярного уровня, а также и о нецелесообразности записи уравнения для плотности вероятностей в форме (2.15) (такая точка зрения получила распространение в работах зарубежных ученых; см., например, обзоры О'Брайена [1980а, б]). Но еще раньше в работе Кузнецова [1972а] было показано, что учет перемежаемости при формулировке гипотезы о статистической независимости автоматически устраняет все трудности, отмеченные Поупом и Допазо.

Ввиду особой важности для дальнейшего рассмотрения здесь необходимо специально подчеркнуть следующие обстоятельства. Проблемы, с которыми столкнулись Поуп и Допазо, обусловлены именно неучетом перемежаемости, а не тем, что ими использовалось предположение о независимости  $\langle N \rangle_z$  от  $z$ . Это утверждение становится понятным, если учесть, что между функциями  $\langle N \rangle_{t,z}$  и  $\langle N \rangle_z$  существует связь

$$\langle N \rangle_{t,z} = \langle N \rangle_z, \quad 0 < z < 1, \quad (3.9)$$

и тем самым гипотеза (3.8) в равной степени применима и к функции  $\langle N \rangle_z$ . Для доказательства равенства (3.9) учтем, что концентрация примеси может служить индикатором турбулентности (см. § 1.1). По этому условию, что  $0 < z = \text{const} < 1$  и что жидкость турбулентна, эквивалентны. Следовательно, условные средние  $\langle N \rangle_{t,z}$  и  $\langle N \rangle_z$  совпадают при  $0 < z < 1$ . В нетурбулентной жидкости  $N = 0$  и, таким образом,  $\langle N \rangle_z = 0$  при  $z = 0$  и  $z = 1$ . т.е. величина  $\langle N \rangle_z$ , в отличие от  $\langle N \rangle_{t,z}$ , терпит разрыв на границах фазового пространства.

Обратим теперь внимание на то, что применение гипотезы (3.8) ограничивается только случаем поля химически инертной примеси. Для реагирующей примеси сформулированная гипотеза неверна. Это заключение есть следствие того факта, что химические превращения, как отмечалось во введении к книге, сосредоточены в очень узких зонах. Поэтому статистические свойства мелкомасштабных пульсаций концентрации реагирующей примеси (или температуры) определяются не каскадным дроблением вихрей различных масштабов, а химическими реакциями. В результате условно осредненная скалярная диссипация оказывается явно зависящей от концентрации, т.е. поля  $c$  и  $N_c = D(\nabla c)^2$  коррелируют между собой. Рассмотрим в качестве примера диффузионное горение. В этом случае, как указано в § 2.1 (доказательство приводится в главе 5), концентрации всех реагирующих веществ  $c$  (индекс для краткости не пишется) выражаются через концентрацию химически инертной примеси, т.е.  $c = c(z)$ . Следовательно, для скалярной диссипации концентрации  $c$  имеем

$$\langle N_c \rangle_{t,c} = \left( \frac{\partial c}{\partial z} \right)^2 \langle N \rangle_{t,z}, \quad \frac{\partial c}{\partial z} \neq \text{const.}$$

Отсюда видно, что при выполнении гипотезы (3.8) функция  $\langle N_c \rangle_{t,c}$  зависит от  $c$ .

Остановимся на применении гипотезы о статистической независимости макро- и микрохарактеристик для динамической задачи, т.е. для поля



скорости  $u$  и диссипации энергии  $\epsilon$ . Значение этого случая состоит в том, что он допускает более простую экспериментальную проверку рассматриваемой гипотезы. Предположение, что  $\langle \epsilon \rangle_u = \langle \epsilon \rangle$ , было введено в работах Кузнецова [1967], Улинича и Любимова [1968]. Перемежаемость была учтена позже в работе Сабельникова [1979], где принято  $\langle \epsilon \rangle_{t,u} = \langle \epsilon \rangle_t$ . Поскольку в нетурбулентной жидкости диссипация равна нулю, а пульсации скорости отличны от нуля, то условные средние  $\langle \epsilon \rangle_{t,u}$  и  $\langle \epsilon \rangle_u$ , в отличие от рассмотренных выше условных средних скалярных диссипаций  $\langle N \rangle_{t,z}$  и  $\langle N \rangle_z$ , не равны. Нетрудно видеть, что они связаны неравенством

$$\langle \epsilon \rangle_{t,u} \geq \langle \epsilon \rangle_u. \quad (3.10)$$

Из общих соображений понятно, что различие между  $\langle \epsilon \rangle_{t,u}$  и  $\langle \epsilon \rangle_u$  уменьшается по мере увеличения амплитуды пульсаций скорости, а в области больших пульсаций они практически совпадают между собой, так как такие пульсации происходят в основном в турбулентной жидкости.

Рассмотрим теперь вопрос о том, в какой степени гипотеза о статистической независимости макро- и микрохарактеристик в турбулентной жидкости подтверждается экспериментально. Проверка гипотезы проводилась в опытах Кузнецова и Расщупкина [1977], Прасковского [1982, 1983], Кузнецова, Прасковского и Сабельникова [1984а, б]. Во всех этих опытах измерения выполнены в следе за круговым цилиндром. В первой из указанных работ в плоскости симметрии следа, т.е. при  $\gamma \approx 1$ , измерялись условно осредненные квадраты производных концентрации и продольной скорости, т.е. величины  $\left\langle \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_z$  и  $\left\langle \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_{u_1}$ .

В остальных опытах измерялись в разных точках поперечного сечения и область, где перемежаемость существенна, величины  $\left\langle \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_{u_1}$  и  $\left\langle \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_{t,u_1}$ .

Экспериментальные данные Кузнецова и Расщупкина [1977] приведены на рис. 3.1, а Кузнецова, Прасковского и Сабельникова [1984а, б] — на рис. 3.2. Видно, что в опытах Кузнецова и Расщупкина условные средние  $\left\langle \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_z$  и  $\left\langle \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_{u_1}$  практически постоянны при изменении уровня, при котором производится осреднение, в исследованном диапазоне ампли-

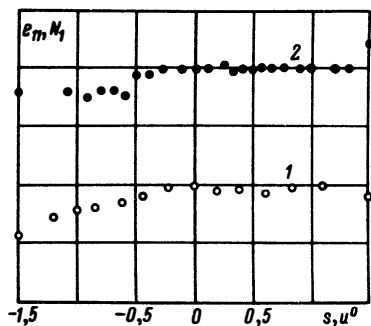


Рис. 3.1. Условно осредненные значения квадратов производных концентрации и скорости на плоскости симметрии следа за круговым цилиндром по данным Кузнецова и Расщупкина [1977]  $x_1/d = 52.5$ ,  $x_2/d = 0$ ,  $Re_d = 8 \cdot 10^3$ ,  $d = 8$  мм,  $u_0 = 15$  м/с; 1 —  $e_{11} = \langle (\partial u_1 / \partial x_1)^2 \rangle_{u_1}$ , 2 —  $N_1 = \langle (\partial z / \partial x_1)^2 \rangle_z$ ,  $s = (z - \langle z \rangle) / \sigma$ ,  $u^0 = (u_1 - \langle u_1 \rangle) / (\langle (u_1 - \langle u_1 \rangle)^2 \rangle)^{1/2}$ . Единицы измерения по оси ординат произвольны

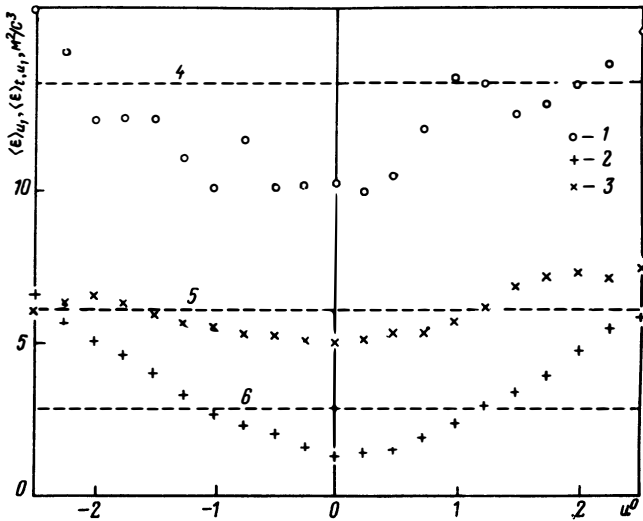


Рис 3.2 Условно осредненные значения квадрата производной скорости на различных расстояниях от плоскости симметрии в следе за круговым цилиндром по данным Кузнецова, Прасковского и Сабельникова [1984а, б].  $x_1/d = 38.4$ ,  $Re_d = u_0 d/\nu = 2.5 \cdot 10^4$ ,  $d = 36$  мм,  $u_0 = 10,2$  м/с; 1 -  $\langle \epsilon \rangle_{u_1, x_2} = 0$ ,  $\gamma \approx 1$ , 2 -  $\langle \epsilon \rangle_{u_1, x_2}/d = 3,89$ ,  $\gamma = 0,42$ , 3 -  $\langle \epsilon \rangle_{r, u_1, x_2}/d = 3,89$ ,  $\gamma = 0,42$ , 4 -  $\langle \epsilon \rangle_{x_2} = 0$ . 5 -  $\langle \epsilon \rangle_{r, x_2}/d = 3,89$ , 6 -  $\langle \epsilon \rangle_{x_2}/d = 3,89$ ,  $\epsilon = 15\nu(\partial u_1/\partial x_1)^2$ .  $u^0 = (u_1 - \langle u_1 \rangle)/((u_1 - \langle u_1 \rangle)^2)^{1/2}$

туд пульсаций концентрации и скорости  $|z - \langle z \rangle| \leq 1.5 \sigma$  ( $\sigma = ((z - \langle z \rangle)^2)^{1/2}$ ),  $|u_1 - \langle u_1 \rangle| \leq 1.5 ((u_1 - \langle u_1 \rangle)^2)^{1/2}$ . В опытах Кузнецова, Прасковского и Сабельникова изменение величины  $\left\langle \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_{u_1}$  в плоскости симметрии

и величины  $\left\langle \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_{r, u_1}$  в точке, где  $\gamma = 0,42$ , не превышает 20% в диапазоне амплитуд пульсаций скорости  $|u_1 - \langle u_1 \rangle| \leq 2,5 ((u_1 - \langle u_1 \rangle)^2)^{1/2}$ .

Результаты измерений, как показывает рис. 3.2, находятся в соответствии с неравенством (3.10). Значения  $\left\langle \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_{u_1}$  в точке, где  $\gamma = 0,42$ ,

всегда меньше, чем значения  $\left\langle \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_{r, u_1}$ , и монотонно растут с увеличением модуля амплитуды пульсаций скорости. На интервале  $|u_1 - \langle u_1 \rangle| \leq 2,5 ((u_1 - \langle u_1 \rangle)^2)^{1/2}$  величина  $\left\langle \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_{u_1}$  возрастает в 5–6 раз. Моно-

тонный характер зависимости  $\left\langle \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle_{u_1}$  от амплитуды пульсаций скорости нетрудно объяснить, если учесть, что с ростом амплитуды пульсаций скорости увеличивается вклад в рассматриваемое условное среднее от областей с большими значениями диссипации энергии.

Суммируя результаты проанализированных экспериментов, можно заключить, что они, во-первых, вполне удовлетворительно согласуются с гипотезой о статистической независимости макро- и микрохарактеристик в турбулентной жидкости и, во-вторых, подтверждают вывод о той принципиальной роли, которую играет перемежаемость в формулировке гипотезы.

Гипотеза о статистической независимости имеет широкую область применимости, так как она позволяет "расщеплять" большое количество корреляций между макро- и микрохарактеристиками турбулентности при  $Re \rightarrow \infty$  (т.е. представлять среднее значение произведения через произведение средних). Рассмотрим этот вопрос, следуя в основном работе Кузнецова [1979а].

Представим градиенты скорости и концентрации в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_i} &= \frac{\sigma}{L} [\sqrt{Re} \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)}], \quad \langle [\varphi_i^{(1)}]^2 \rangle \sim 1, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{q}{L} [\sqrt{Re} u_{ij}^{(1)} + u_{ij}^{(2)}], \quad \langle [u_{ij}^{(1)}]^2 \rangle \sim 1, \\ \lim_{Re \rightarrow \infty} \langle [\varphi_i^{(2)}]^2 \rangle, Re^{-1} &= 0, \\ \lim_{Re \rightarrow \infty} \langle [u_{ij}^{(2)}]^2 \rangle, Re^{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В формулах (3.11) учтено, что величины  $\langle N \rangle$  и  $\langle \epsilon \rangle$  стремятся к конечным пределам при  $Re \rightarrow \infty$  (см. § 1.1) (заметим, что разложения (3.11) аналогичны представлению поля концентрации  $z$  в § 1.3 в форме (1.38)). Функции  $\varphi_i^{(1)}$  и  $u_{ij}^{(1)}$  (умноженные на  $\sqrt{Re}$ ) характеризуют вклад мелких вихрей в градиенты концентрации и скорости, а функции  $\varphi_i^{(2)}$  и  $u_{ij}^{(2)}$  — вклад всех промежуточных и крупных вихрей. Функции  $\varphi_i^{(1)}$  и  $u_{ij}^{(1)}$ , вообще говоря, зависят от числа Рейнольдса, но среднеквадратические значения этих функций, по их определению, от числа Рейнольдса не зависят и принимают значения порядка единицы. Моменты более высокого порядка величин  $\varphi_i^{(1)}$  и  $u_{ij}^{(1)}$ , вследствие внутренней перемежаемости, уже зависят от числа Рейнольдса. Однако эту зависимость при не очень больших значениях порядков моментов вполне можно не учитывать (см., например, Монин и Яглом [1967]).

Дальнейшие рассуждения будем проводить только для поля концентрации, так как они практически без изменений переносятся и на поле скорости. Рассмотрим корреляцию  $\langle f\Phi \rangle$  двух достаточно произвольных функций  $f$  и  $\Phi$ . Пусть одна из них ( $f$ ) зависит только от  $z$ , другая ( $\Phi$ ) — только от  $\nabla z$ , т.е.  $f = f(z)$ , а  $\Phi = \Phi(\nabla z)$ . Проанализируем предел  $\lim_{Re \rightarrow \infty} \langle f\Phi \rangle$ . При таком предельном переходе возникает перемежаемость и, согласно формуле Бейеса, справедливо соотношение

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \langle f\Phi \rangle = \gamma \langle f\Phi \rangle_r + (1 - \gamma) \langle f\Phi \rangle_n. \quad (3.12)$$

Из (3.11) видно, что основной вклад в градиент концентрации дает слабое, содержащее функции  $\varphi_i^{(1)}$ . В соответствии с гипотезой поля вели-

чин  $\lim_{Re \rightarrow \infty} \varphi_i^{(1)}$  и  $\lim_{Re \rightarrow \infty} z$  статистически независимы в турбулентной жидкости. Поэтому корреляцию  $\langle f\Phi \rangle_t$  можно "расщепить", т.е. записать

$$\langle f\Phi \rangle_t = \langle f \rangle_t \langle \Phi \rangle_t. \quad (3.13)$$

Таким образом, получим

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \langle f\Phi \rangle = \gamma \langle f \rangle_t \langle \Phi \rangle_t + (1 - \gamma) \langle f\Phi \rangle_n. \quad (3.14)$$

Если в негурбулентной жидкости  $\Phi = 0$ , как это имеет место для величины  $N$ , то второе слагаемое в правой части соотношения (3.14) отсутствует.

Подчеркнем, что гипотеза о статистической независимости позволяет найти только главные члены асимптотических разложений корреляций микро- и макрохарактеристик в турбулентной жидкости при  $Re \rightarrow \infty$ . В тех случаях, когда они равны нулю, для нахождения первых ненулевых членов в разложениях этих корреляций необходимо принять во внимание следующие члены в разложениях градиентов концентрации и скорости, т.е. функции  $\varphi_i^{(2)}$  и  $u_{ij}^{(2)}$  в (3.11). Эти функции, как отмечалось ранее, уже определяются всеми промежуточными масштабами. Поэтому, например, поля  $z$  и  $\varphi_i^{(2)}$  нельзя считать статистически независимыми.

Характерными примерами корреляций макро- и микрохарактеристик, применение к которым рассматриваемой гипотезы не дает результата, являются, например, следующие:

$$1) \langle f(z) (\nabla z)^{2k+1} \rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$2) \left\langle (u_j - \langle u_j \rangle) \frac{\partial (u_i - \langle u_i \rangle)}{\partial x_j} \right\rangle;$$

$$3) \left\langle (u_i - \langle u_i \rangle) \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle.$$

$$4) \langle (u_i - \langle u_i \rangle) \epsilon \rangle.$$

При формальном использовании гипотезы получаем, что все эти корреляции равны нулю. Рассмотрим в качестве примера вторую из корреляций. В соответствии с разложением (3.11) имеем

$$\left\langle (u_j - \langle u_j \rangle) \frac{\partial (u_i - \langle u_i \rangle)}{\partial x_j} \right\rangle \sim \sqrt{Re} \langle u_{ij}^{(1)} (u_j - \langle u_j \rangle) \rangle,$$

где коэффициент перед  $\sqrt{Re}$  равен нулю в силу гипотезы о статистической независимости макро- и микрохарактеристик турбулентности. С другой стороны, если воспользоваться уравнением неразрывности, то анализируемую корреляцию можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial \langle (u_i - \langle u_i \rangle) (u_j - \langle u_j \rangle) \rangle}{\partial x_j}, \quad \text{т.е. к пространственной производной от напряжений Рейнольдса.}$$

В неоднородных потоках эта производная, как хорошо известно, отлична от нуля и имеет порядок  $q^2/L$ . Аналогичные соображения справедливы и для остальных трех корреляций. Заметим, что корреляции 2—4 играют важную роль в полуэмпирических теориях турбулентности (см., например, Рейнольдс [1976], Гиневский и др. [1978], книгу "Методы расчета турбулентных течений" под ред. В. Кольмана [1980]).

Можно указать и другой тип корреляций, для которых гипотеза о статистической независимости макро- и микрохарактеристик не позволяет найти первый ненулевой член асимптотического разложения при  $Re \rightarrow \infty$ . Эти корреляции содержат производные скорости и концентрации порядка выше, чем первый, например,  $\langle u_i \Delta u_j \rangle$  и  $\langle z \Delta z \rangle$ ; здесь  $\Delta$  — лапласиан. Именно это обстоятельство и затрудняет использование теории локально однородной и изогрошной турбулентности при аппроксимации условно осредненной дивергенции диффузионного потока  $\langle \nabla (D \nabla z) \rangle_{t,z}$ , входящей в уравнение для плотности вероятностей концентрации, записанное в форме (2.14).

В заключение остановимся на следующем весьма важном моменте. Гипотеза о статистической независимости макро- и микрохарактеристик в турбулентной жидкости применима лишь для развитой, в определенном смысле "равновесной" турбулентности. Другими словами, необходимо, чтобы существовало подвижное равновесие между мелкими и крупными масштабами движения. Это условие, как известно, является необходимым и для справедливости теории локально однородной и изотропной турбулентности. Следовательно, если в начальный момент времени поля скорости и концентрации находятся в произвольном состоянии, то должно пройти некоторое время релаксации, спустя которое можно будет пользоваться введенной гипотезой. Из соображений размерности следует, что время релаксации имеет порядок  $L/q$ . Здесь уместно провести аналогию с эволюцией спектра турбулентности из произвольного начального состояния. Если воспользоваться полуэмпирическими теориями переноса энергии по спектру турбулентности (см., например, Мошин и Яглом [1967]), то можно показать, что равновесный интервал в спектре энергии появляется также через время порядка  $L/q$ . Сделанное замечание играет большую роль при определении границ применимости полуэмпирического уравнения для плотности вероятностей концентрации. Дальнейшее обсуждение затронутого вопроса содержится в § 3.4.

### § 3.3. Гипотеза замыкания для конвективного слагаемого

Точная запись интеграла (2.16), фигурирующего в конвективном слагаемом в уравнении для плотности вероятностей концентрации, как показано в § 2.1, содержит большое количество неизвестных функций. Напомним, что в выражение (2.16) входят условно осредненные скорости в нетурбулентной жидкости  $\langle u \rangle_{n,0}$  и  $\langle u \rangle_{n,1}$  и условно осредненная скорость в турбулентной жидкости  $\langle u \rangle_{t,z}$ . Те же соображения, что использовались в предыдущем параграфе при получении равенства  $\langle N \rangle_{t,z} = \langle N \rangle_z$ ,  $0 < z < 1$ , показывают, что величины  $\langle u \rangle_{t,z}$ ,  $\langle u \rangle_{n,0}$ ,  $\langle u \rangle_{n,1}$  и условно осредненная скорость  $\langle u \rangle_z$  связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{t,z} &= \langle u \rangle_z, & 0 < z < 1, \\ \langle u \rangle_{n,0} &= \langle u \rangle_{z=0}, & \langle u \rangle_{n,1} = \langle u \rangle_{z=1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отметим, что нет никаких оснований считать, что

$$\langle u \rangle_{n,0} = \langle u \rangle_{t,z=0}, \quad \langle u \rangle_{n,1} = \langle u \rangle_{t,z=1}.$$

Поэтому функция  $\langle u \rangle_z$  в общем случае имеет разрывы при  $z = 0$  и  $z = 1$ .

Сейчас нельзя дать достаточно обоснованное описание поведения функции  $\langle u \rangle_z$  на всем отрезке  $0 \leq z \leq 1$ . Это обусловлено в основном двумя причинами. Во-первых, крайним недостатком экспериментальных данных и, во-вторых, большими погрешностями при измерении  $\langle u \rangle_z$  в области больших амплитуд пульсаций концентрации, вызванными как эффектами молекулярного переноса (см. § 1.3), так и большими статистическими ошибками при таких редких событиях, какими являются большие амплитуды пульсаций. Особенно серьезны перечисленные проблемы в тех областях потока, где существенна перемежаемость.

Таким образом, применение точного выражения (2.16) пока не представляется возможным. Необходимо вводить упрощающие предположения. Чтобы почувствовать характер упрощений, начнем с анализа наиболее простого случая, когда перемежаемость незначительна, т.е.  $\gamma \approx 1$ ,  $\gamma_0 \approx 0$ ,  $\gamma_1 \approx 0$ . Ситуация, близкая к этому случаю, наблюдается в центральных областях струйных течений. Общие соображения, основанные на экспериментальных данных, показывают, что в рассматриваемом случае распределения вероятностей слабо отличаются от нормальных. Если принять, что совместная плотность вероятностей скорости и концентрации  $P(u, z)$  описывается плотностью нормального распределения, то для условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$  после простых вычислений получим линейную зависимость

$$\langle u \rangle_z = \langle u \rangle + q \sigma^{-2} (z - \langle z \rangle). \quad (3.16)$$

Здесь  $q = \langle (u - \langle u \rangle)(z - \langle z \rangle) \rangle$  — вектор потока вещества,  $\sigma^2 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle$  — дисперсия пульсаций концентрации.

Предположение, что условно осредненная скорость  $\langle u \rangle_z$  описывается линейной зависимостью при всех значениях  $z$  независимо от того, является ли  $P(u, z)$  гауссовской кривой или нет, сделано в работе Кузнецова [1972a]. Коэффициенты в этой зависимости найдены следующим образом. Пусть в соответствии с предположением справедливо соотношение

$$\langle u \rangle_z = A + B(z - \langle z \rangle),$$

где векторы  $A$  и  $B$  зависят только от координат и времени. Их можно связать с полями средней скорости и потока вещества. Для этого умножим выписанное соотношение на  $(z - \langle z \rangle)^k P(z)$ ,  $k = 0, 1$ , и проинтегрируем по всем значениям  $z$ . В результате найдем  $A = \langle u \rangle$ ,  $k = 0$ ;  $B = q \sigma^{-2}$ ,  $k = 1$ . Тем самым опять приходим к соотношению (3.16).

Сравним линейную зависимость (3.16) с результатами измерений условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$  вблизи оси затопленной осесимметричной струи (Безуглов [1974], Венкатарамани, Туту и Шеврэ [1975], Голованов [1977], Щербина [1982]) и в течении за подогретой турбулизирующей решеткой при постоянном поперечном градиенте средней температуры (Венкатарамани и Шеврэ [1978], Тэваулэрис и Корсин [1981a]). На рис. 3.3 представлены условно осредненные продольные скорости  $\langle u_1 \rangle_z$ , полученные в опытах Безуглова и Голованова, а на рис. 3.4 и 3.5 — условно осредненные поперечные скорости  $\langle u_2 \rangle_z$ , полученные Щербиной и Венкатарамани и Шеврэ соответственно.

Из рис. 3.3 — 3.5 видно, что условно осредненные скорости  $\langle u_k \rangle_z$ ,  $k = 1, 2$ , достаточно хорошо описываются линейными функциями в области

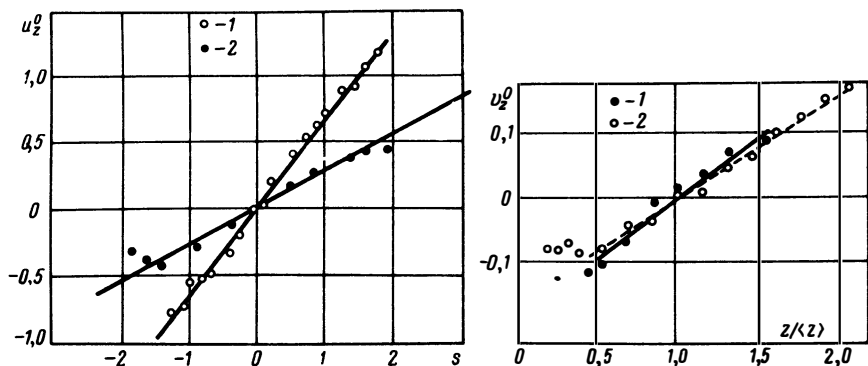


Рис. 3.3. Условно осредненная продольная скорость при заданном значении концентрации на оси и вблизи оси затопленной осесимметричной струи по данным Безуглова [1974] и Голованова [1977]. 1 — измерения Безуглова, условия опытов:  $x_1/d = 48$ ,  $x_2/d = 0$ ,  $Re_d = u_0 d / \nu = 3,24 \cdot 10^3$ ,  $d = 3$  мм; 2 — измерения Голованова, условия опытов:  $x_1/d = 30$ ,  $x_2/x_1 = 0,088$ ,  $Re_d = 7,46 \cdot 10^3$ ,  $d = 4$  мм,  $u_0 = 28$  м/с,  $u_z^0 = \langle (u_1)_z - \langle u_1 \rangle \rangle / \sqrt{\langle (u_1 - \langle u_1 \rangle)^2 \rangle}$ ,  $s = (z - \langle z \rangle) / \sigma$

Рис. 3.4. Условно осредненная поперечная скорость при заданном значении концентрации вблизи оси затопленной осесимметричной струи по данным Щербины [1982].  $x_1/d = 20$ ,  $u_0 = 50$  м/с,  $d = 5$  мм; 1 —  $x_2/x_1 = 0,025$ ,  $\sigma/\langle z \rangle = 0,24$ , 2 —  $x_2/x_1 = 0,1$ ,  $\sigma/\langle z \rangle = 0,545$ ,  $v_z^0 = \langle u_2 \rangle_z / \sqrt{\langle (u_2 - \langle u_2 \rangle)^2 \rangle}$

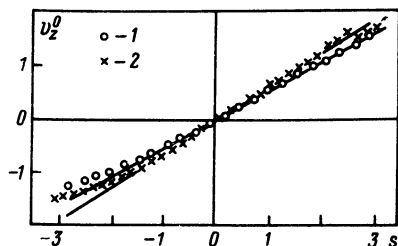


Рис. 3.5. Условно осредненная поперечная скорость при заданном значении концентрации в потоке за турбулизирующей решеткой по данным Венкатарамани и Шеврэ [1976].  $Re_\lambda = 64,4$ ,  $Re_M = u_0 M / \nu = 2 \cdot 10^4$ ; 1 —  $x_1/M = 49,2$ ,  $x_2/M = 0$ ,  $2 - x_1/M = 55,2$ ,  $x_2/M = 0$ .  $v_z^0 = \langle u_2 \rangle_z / \sqrt{\langle (u_2 - \langle u_2 \rangle)^2 \rangle}$ ,  $s = (z - \langle z \rangle) / \sigma$ ,  $M$  — размер ячейки решетки

$|z - \langle z \rangle| \lesssim 2\sigma$ . При больших амплитудах пульсаций концентрации наблюдаются отклонения от линейной зависимости. Характер этих отклонений удобно обсудить несколько позже.

Суммируя, можно сделать вывод, что в области потока, где перемежаемость незначительна, линейная зависимость (3.16) является хорошим приближением для условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$ . Этот вывод, вообще говоря, не имел бы большого значения, если бы не следующие два обстоятельства. Во-первых, оказывается, что линейная зависимость может служить неплохим первым приближением для описания  $\langle u \rangle_z$  и в тех областях потока, где перемежаемость существенна и, следовательно, совместное распределение вероятностей скорости и концентрации сильно отличается от нормального. Во-вторых, величина скачков функции  $\langle u \rangle_z$  на границах фазового пространства  $z = 0$  и  $z = 1$  мала, и в первом приближении ими можно пренебречь.

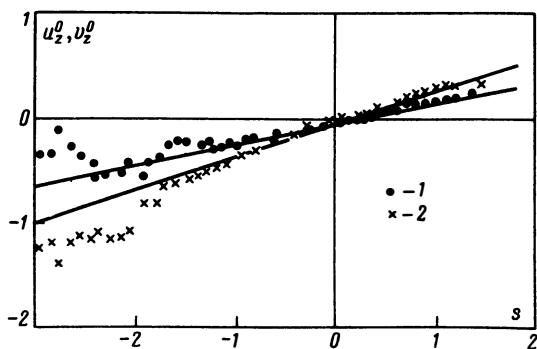


Рис 3.6 Условно осредненные продольная и поперечная скорости при заданном значении концентрации на большом расстоянии от оси симметрии в спутной осесимметричной струе по данным Шринивасана и Антониа [1978].  $x_1/d = 59$ ,  $Re_d = u_0 d/\nu = 4,27 \cdot 10^4$ ,  $d = 2$  см.  $u_0 = 32$  м/с.  $u_\infty = 4,8$  м/с; измерения проводились в точке, где коэффициент перемежаемости  $\gamma = 0,28$ ;  $1 - u_z^0 = (\langle u_1 \rangle_z - \langle u_1 \rangle) / \sqrt{(\langle u_1 - \langle u_1 \rangle \rangle^2)}$ .  $2 - v_z^0 = (\langle u_2 \rangle_z - \langle u_2 \rangle) / \sqrt{(\langle u_2 - \langle u_2 \rangle \rangle^2)}$ ,  $s = (z - \langle z \rangle) / \sigma$

В пользу первого утверждения свидетельствуют опыты Шринивасана и Антониа [1978] а второе подтверждается косвенным образом \*).

Обратимся вначале к опытам Шринивасана и Антониа, в которых проведены измерения  $\langle u_1 \rangle_z$  и  $\langle u_2 \rangle_z$  на краю потока в осесимметричной спутной струе в точке, где  $\gamma = 0,28$ . Результаты этих измерений представлены на рис. 3.6. Видно, что результаты экспериментов действительно можно весьма удовлетворительно аппроксимировать прямыми линиями. Понятно, что из-за разрывов условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$  в точках  $z = 0$  и  $z = 1$  коэффициенты в уравнениях прямых для  $\langle u_k \rangle_z (= \langle u_k \rangle_{t,z}, 0 < z < 1)$  не обязаны равняться  $\langle u_k \rangle$  и  $q_k \sigma^{-2}$ . В частности, если для определения коэффициентов использовать способ, предложенный в работе Кузнецова [1972а], то получим

$$\langle u_k \rangle_{t,z} = \langle u_k \rangle_t + q_{tk} \sigma_t^{-2} (z - \langle z \rangle_t),$$

$$q_{tk} = \langle (u_k - \langle u_k \rangle_t)(z - \langle z \rangle_t) \rangle_t, \quad \sigma_t^2 = \langle (z - \langle z \rangle_t)^2 \rangle_t,$$

$$\langle u_k \rangle_z = \langle u_k \rangle_{t,z}, \quad 0 < z < 1.$$

\* ) Попытка прямой оценки величины скачков функции  $\langle u \rangle_z$  на границах фазового пространства сделана в недавно выполненных опытах Щербиной и Могилко [1985]. В этих опытах с использованием оптического метода вблизи ядра осесимметричной струи на расстоянии  $x/d = 3 - 4$  от среза сопла измерялась функция  $\langle u_1 \rangle_z$ . Установлено, что в окрестности границы фазового пространства  $z = 1$  происходит довольно резкое изменение  $\langle u_1 \rangle_z$ , которое интерпретируется авторами рассматриваемой работы как скачок, "размазанный" главным образом вследствие шумов в измерительной аппаратуре. Величина скачка рассчитывается с помощью приближенной методики, в основе которой лежит ряд предположений о форме совместной плотности вероятностей скорости и концентрации и плотности вероятностей шумов в аппаратуре. Полученные таким путем результаты также говорят в пользу того, что величина скачков мала. Более категоричное утверждение, ввиду приближенного характера методики обработки результатов измерений, делать сейчас рано. Можно надеяться, что дальнейшее развитие указанного направления позволит прояснить рассматриваемый вопрос.



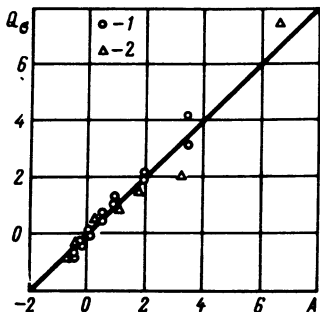


Рис. 3.7. Связь потока пульсаций концентрации в поперечном направлении с коэффициентом асимметрии пульсаций концентрации по данным разных авторов. 1 – след за круговым цилиндром по данным Фреймуса и Уберои [1971] (условия опытов приведены на рис. 3.16) и Ля Рю и Либби [1974] (условия опытов приведены на рис. 1.14); 2 – осесимметричная струя в спутном потоке по данным Антониа, Прабху и Стефенсона [1975] (условия опытов приведены на рис. 1.5); линия отвечает зависимости  $Q_{\sigma} = A$ , вытекающей из формулы (3.16)

Количественную оценку величины скачков функции  $\langle u_k \rangle_z$  на границах  $z = 0$  и  $z = 1$  можно получить косвенным образом. С этой целью примем, что линейная зависимость (3.16) справедлива на всем интервале  $0 \leq z \leq 1$ , и проанализируем одну из связей между моментами, которые вытекают из (3.16). Эта связь находится, если (3.16) умножить на  $(z - \langle z \rangle)^2 P(z)$  и проинтегрировать по всем  $z$ . В результате получим

$$\langle (u - \langle u \rangle)(z - \langle z \rangle)^2 \rangle = q\sigma^{-2} \langle (z - \langle z \rangle)^3 \rangle.$$

Найденное соотношение связывает поток пульсаций концентрации (левая сторона равенства) и асимметрию пульсаций концентрации  $A = \langle (z - \langle z \rangle)^3 \rangle / \sigma^3$ . Сравнение полученной формулы с экспериментальными данными в следе за круговым цилиндром (Фреймус и Уберои [1971], Ля Рю и Либби [1974]) и в осесимметричной спутной струе (Антониа, Прабху и Стефенсон [1975]) приведено на рис. 3.7 в виде зависимости безразмерной поперечной компоненты вектора потока пульсаций концентрации  $Q_{\sigma} = \langle (u_2 - \langle u_2 \rangle)(z - \langle z \rangle)^2 \rangle / q_2 \sigma$  от коэффициента асимметрии.

Коэффициент асимметрии принимает отрицательные значения вблизи эси или плоскости симметрии, а большие положительные значения  $A$  достигаются в областях, где существенна перемежаемость. Из рис. 3.7 видно, что экспериментальные данные удовлетворительно описываются зависимостью  $Q_{\sigma} = A$ , следующей из (3.16), включая и области потока, где перемежаемость существенна.

Этот результат служит дополнительным косвенным свидетельством в пользу (3.16), но, кроме того, он показывает (также косвенно), что не надо переоценивать значение разрывов функции  $\langle u \rangle_z$  и в первом приближении ими, по-видимому, можно просто пренебречь.

Суммируя, кратко повторим два основных вывода проведенного выше анализа. Первый состоит в том, что простая функция – линейная зависимость (3.16) – является весьма хорошим первым приближением для  $\langle u \rangle_z$  во всех областях свободного турбулентного потока. Второй вывод сводится к утверждению, что можно пренебречь разрывами функции  $\langle u \rangle_z$ . Значение второго из выводов заключается в том, что он позволяет представить интеграл, входящий в конвективное слагаемое (2.16) уравнения (2.15), в упрощенной форме

$$\int u P(u, z) d^3 u = \langle u \rangle_z P(z). \quad (3.17)$$

Эта форма будет использоваться далее. Подчеркнем еще раз, что выражение (3.17) является приближенным. Оно справедливо только в том случае, когда  $\langle u \rangle_z$  непрерывна на отрезке  $0 \leq z \leq 1$ .

Соотношение (3.16) было предложено в работе Кузнецова [1972а] (без указания условий, когда оно справедливо).

Линейная зависимость (3.16) для  $\langle u \rangle_z$ , вследствие своей простоты, наиболее подходит для решения первой из задач, указанных в начале главы, — разработать способ приближенного описания распределения вероятностей концентрации и коэффициента перемежаемости в турбулентных потоках. Исследование, проведенное в § 3.5, показывает, что использование (3.16) в целом позволяет справиться с этой проблемой. Однако в § 3.5 также установлено, что линейная зависимость имеет и определенные дефекты. Эти дефекты проявляются в том, что плотность вероятностей осциллирует при больших амплитудах пульсаций концентрации, т.е. в той области, где результаты измерений  $\langle u \rangle_z$  наименее достоверны из-за больших ошибок. Забегая вперед, отметим, что из результатов, описанных в § 3.6, следует, что для устранения осциллируемости требуется более медленный рост модуля  $\langle u \rangle_z$  при больших значениях амплитуды пульсаций концентрации, чем это предписывает линейная функция (3.16).

Таким образом, приходим к заключению, что при проведении строгого исследования распределения вероятностей концентрации необходимо учесть отклонения  $\langle u \rangle_z$  от линейной зависимости (3.16) в области больших пульсаций концентрации.

Существующие сейчас экспериментальные данные по причинам, которые были указаны выше, не позволяют сделать однозначное заключение о характере рассматриваемого отличия (хотя некоторые тенденции и просматриваются на рис. 3.3 — 3.5; см. ниже). Поэтому обратимся за помощью к общим качественным рассуждениям в надежде, что они позволят выявить некоторые главные особенности функции  $\langle u \rangle_z$ . Прежде всего, ряд сведений об этой функции естественным образом вытекает из теории пути смещения. Рассмотрим поток с постоянным поперечным градиентом средней концентрации  $\langle z \rangle - \langle z(0) \rangle = Kx_2$  (пусть для определенности  $K > 0$ ). Ясно, что в точке  $x_2 = 0$  положительные значения пульсаций концентрации происходят главным образом вследствие того, что в данной точке появляются жидкие частицы (моли), пришедшие из области  $x_2 > 0$ . Поперечная скорость таких молей отрицательна. Можно также предположить, что чем больше наблюдаемое значение пульсации концентрации, тем из более далеких областей приходит указанный моль и, следовательно, тем больше абсолютное значение его поперечной скорости. Отсюда заключаем, что при положительных пульсациях концентрации, во-первых,  $\langle u_2 \rangle_z < 0$  и, во-вторых,  $|\langle u_2 \rangle_z|$  монотонно растет с увеличением  $z$ . Аналогичным образом рассматривается и случай отрицательных пульсаций концентрации, а также случай  $K < 0$ .

Экспериментальные данные, представленные на рис. 3.3 — 3.6, хорошо согласуются с выводом о монотонном характере зависимости условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$ .

Продолжим обсуждение течения с постоянным градиентом средней концентрации. Исходя из описанной качественной картины такого течения.

естественно заключить, что моли, обуславливающие максимальные значения концентрации в точке  $x_2 = 0$ , являются не только самыми быстрыми, но и имеют большие пространственные масштабы (порядка расстояния от точки  $x_2 = 0$  до точки, из которой приходит быстрый моль). Следовательно, перенос максимальных (а также минимальных) концентраций осуществляется крупными вихревыми образованиями, скорости которых, как известно (Таунсенд [1956]), ограничены.

В этой связи напомним об известных результатах, полученных в теории турбулентной диффузии с конечной скоростью (см. обзор этой теории в книге Монина и Яглома [1965], а также статью Зимонта и Сабельникова [1975]). Главным выводом этой теории состоит в том, что предельная скорость переноса концентрации имеет порядок среднеквадратической пульсации скорости.

Подводя итог вышеизложенному, можно выдвинуть гипотезу, согласно которой условно осредненная скорость  $\langle u \rangle_z$  стремится к конечным пределам при  $|z - \langle z \rangle| / \sigma \rightarrow \infty$ . Сейчас нет экспериментальных данных, которые позволили бы осуществить прямую проверку сформулированной гипотезы. Пока она может быть проконтролирована только косвенным образом по непротиворечивости выводов при исследовании распределения вероятностей концентрации.

Необходимо отметить, что хотя экспериментальные данные на рис. 3.3 – 3.6 и не дают возможности для прямой проверки гипотезы, они в целом не противоречат выводу о более медленном росте модуля  $\langle u \rangle_z$ , чем по линейному закону, так как в опытах Голованова [1977], Венкатарамани и Шеврэ [1976] (см. рис. 3.3 и 3.5) в области  $|z - \langle z \rangle| \gg 1,5\sigma$  вполне отчетливо прослеживается тенденция к замедленному темпу роста условно осредненной скорости.

Проведенный анализ позволяет утверждать, что отклонения функции  $\langle u \rangle_z$  от линейной зависимости существенны лишь при достаточно больших амплитудах пульсаций концентрации. По этой причине тонкие детали поведения  $\langle u \rangle_z$  в этой области будут весьма слабо сказываться на виде плотности вероятностей концентрации в основном интервале ее изменения. Это обстоятельство несколько облегчает задачу количественной формулировки об отклонении функции  $\langle u \rangle_z$  от линейной зависимости.

Далее будет использоваться следующая аппроксимация, отражающая главные качественные особенности функции  $\langle u \rangle_z$  (Сабельников [1982в])

$$\langle u \rangle_z = \langle u \rangle + q\sigma^{-1}\mu^{-1} [V_0 + s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2}], \quad s = (z - \langle z \rangle) / \sigma. \quad (3.18)$$

Здесь  $V_0$ ,  $\mu$  и  $\omega$  – функции координат. Функция  $\langle u \rangle_z$ , описываемая выражением (3.18), линейна при малых амплитудах пульсаций концентрации и стремится к конечным пределам при  $|s| \rightarrow \infty$ . Отклонения от линейной зависимости начинают проявляться при  $|s| \sim 1/\omega$ .

Между функциями  $V_0$ ,  $\mu$  и  $\omega$  имеются две связи, так как должны тождественно выполняться следующие условия:

$$\int \langle u \rangle_z P dz = \langle u \rangle, \quad \int (z - \langle z \rangle) (\langle u \rangle_z - \langle u \rangle) P dz = q.$$

Как указано в начале данной главы, поле средней скорости и поток веществ

ва при рассмотрении распределения вероятностей концентрации считаются известными. Подставив формулу (3.18) для  $\langle u \rangle_z$  в выписанные условия и принимая во внимание формулу (1.20) для безусловной плотности вероятностей  $P(z)$ , найдем указанные связи

$$\begin{aligned}
 V_0 &= -\langle s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} \rangle = -\gamma_0 s_0 (1 + \omega^2 s_0^2)^{-1/2} - \\
 &- \gamma_1 s_1 (1 + \omega^2 s_1^2)^{-1/2} - \gamma \int_0^1 s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} F dz, \\
 \mu &= \langle s^2(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} \rangle = \gamma_0 s_0^2 (1 + \omega^2 s_0^2)^{-1/2} + \\
 &+ \gamma_1 s_1^2 (1 + \omega^2 s_1^2)^{-1/2} + \gamma \int_0^1 s^2(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} F dz, \\
 s_0 &= -\langle z \rangle / \sigma, \quad s_1 = (1 - \langle z \rangle) / \sigma.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

При  $\omega = 0$  из (3.19) получим  $V_0 = 0$ ,  $\mu = 1$ , и аппроксимация (3.18) переходит в линейную зависимость (3.16). Следовательно, функция  $\omega$  отражает описанное выше влияние особенностей крупномасштабного переноса концентрации. Относительно величины этой функции можно высказать следующее общее соображение. Так как отличие  $\langle u \rangle_z$  от линейной зависимости существенно только при больших значениях амплитуд пульсаций концентрации, то следует ожидать, что значения  $\omega$  будут достаточно малы. Этот вывод подтверждается строгим анализом, проведенным в §§ 3.6 и 3.7.

Сделаем еще одно замечание об уточнении линейной зависимости (3.16) для  $\langle u \rangle_z$  при больших амплитудах пульсаций концентрации. Полученный в данном параграфе вывод о необходимости такого уточнения при строгом анализе уравнения для плотности вероятностей концентрации остается в силе и в том случае, если отбросить используемое здесь предположение об отсутствии скачков у функции  $\langle u \rangle_z$  на границах фазового пространства.

### § 3.4. Распределение вероятностей концентрации в однородной турбулентности

Случай статистически однородного поля концентрации является, пожалуй, одной из наиболее простых задач, доступных для полного теоретического анализа в рамках уравнений (3.2) – (3.4). Вместе с тем, помимо самостоятельного интереса, этот пример позволяет проиллюстрировать некоторые из общих свойств уравнения для плотности вероятностей.

Прежде всего заметим, что статистически однородное поле концентрации является идеализацией процесса, имеющего место в ряде технических устройств. например в камере смешения, когда в канал постоянного сечения с помощью большого количества струй со скоростью, отличной от скорости спутного потока, подается примесь некоторого вещества. Обычно эффекты турбулентного перемешивания в слоях смешения столь велики, что течение в камере быстро приобретает статистически однородный характер (т.е. поля средних параметров выровнены поперек канала, а остаются только пульсации скорости, концентрации и т.д.). Полезно рассмотреть предельную ситуацию, когда в начальном сечении канала концентрация примеси принимает случайным образом только два значения  $z = 0$  и  $z = 1$

( $z = 1$  в струях,  $z = 0$  вне струй), а начальная турбулентность пренебрежимо мала. Качественная картина развивающегося при  $x > x_0$  ( $x_0$  – координата начального сечения) процесса здесь достаточно прозрачна. С увеличением разности  $x - x_0$  на границах отдельных объемов, в которых  $z = 0$  или  $z = 1$ , образуются и развиваются слои смешения, где из-за сдвига скорости возникают турбулентные пульсации скорости и наблюдаются промежуточные значения концентрации. Этот процесс приводит к монотонному уменьшению пульсаций концентрации и монотонному увеличению суммарного объема, занимаемого слоями смешения. При  $x - x_0 \rightarrow \infty$  произойдет полное смешение до молекулярного уровня, т.е. пульсации концентрации обратятся в нуль, а концентрация примет значение, равное начальной средней концентрации  $\langle z \rangle$  (предполагается, что в камеру нет дополнительного подвода вещества со стенок канала при  $x > x_0$ ).

Описанный процесс соответствует нестационарному статистически однородному полю концентрации, если положить  $t = (x - x_0)/U$ , где  $U$  – средняя по сечению скорость потока в канале. Плотность вероятностей концентрации, в соответствии с вышеизложенным, в начальный и конечный моменты времени имеет вид

$$P(z) = \gamma_0 \delta(z) + \gamma_1 \delta(z - 1), \quad (3.20)$$

$$\gamma = 0, \quad \gamma_1 = \langle z \rangle, \quad \gamma_0 = 1 - \langle z \rangle \quad \text{при } t = 0;$$

$$P(z) = \delta(z - \langle z \rangle), \quad \gamma = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_0 = 0 \quad \text{при } t = \infty \quad (3.21)$$

(строго говоря, здесь вместо  $\gamma$  надо писать  $\gamma_z$ , но для краткости индекс  $z$  далее будет опускаться).

Поясним теперь, что следует понимать здесь под предельным переходом  $t \rightarrow \infty$ . При  $t \rightarrow \infty$  турбулентность вырождается (если нет источника, поддерживающего ее) и тем самым число Рейнольдса стремится к нулю. Следовательно, гипотеза о статистической независимости микро- и макрохарактеристик турбулентности при больших значениях времени эволюции будет неприменимой. Поэтому здесь и далее предполагается двойной предельный переход, когда сначала  $Re \rightarrow \infty$ , а затем  $t \rightarrow \infty$ .

Указанные выше закономерности в поведении средней концентрации и дисперсии сразу следуют из первых двух уравнений для моментов

$$\frac{d\langle z \rangle}{dt} = 0, \quad \frac{d\sigma^2}{dt} = -2\langle N \rangle = -2\gamma\langle N \rangle_t \quad (3.22)$$

Система уравнений (3.2) – (3.4) в статистически однородном случае приобретает вид

$$\frac{\partial \gamma F}{\partial t} = -\gamma\langle N \rangle_t \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} = -\gamma\langle N \rangle_t \frac{\partial F(0)}{\partial z}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = \gamma\langle N \rangle_t \frac{\partial F(1)}{\partial z}. \quad (3.25)$$

Соотношение (3.23) есть уравнение теплопроводности с отрицательным коэффициентом диффузии. Тем самым оно принадлежит к типу обратнопараболических уравнений, для которых, как известно (см., например, Тихонов и Арсенин [1974]), глобальное решение задачи Коши (т.е. на полуоси  $t \geq 0$ ) существует не при всяких начальных условиях. В тех случаях, когда существование решения установлено, задача Коши является некорректной. Некорректность проявляется в том, что уменьшение длины волны возмущений в начальных условиях приводит к увеличению скорости их нарастания. В результате решение быстро искажается.

Известна теорема (Фридман [1964]) о единственности решения задачи Коши для обратнопараболического уравнения при условии, что оно существует.

Точка  $t = \infty$  (поскольку  $\langle N \rangle_t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ ) является особой для уравнения (3.23). Но указанная теорема применима и в рассматриваемом случае, так как эту особенность можно устранить с помощью замены переменной

$\tau = \int_0^t \langle N \rangle_t dt$ . Интеграл здесь сходится в силу ограниченности дисперсии пульсаций концентрации. Действительно, из уравнения для  $\sigma^2$  в (3.22) вытекает, что  $\tau \rightarrow \frac{1}{2} \sigma^2, t \rightarrow \infty$  (здесь учитывается, что  $\gamma \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$ ).

Чтобы найти глобальное решение уравнений (3.23) – (3.25), которое единственно в силу указанной теоремы, рассмотрим вместо прямой задачи Коши с начальными условиями (3.20), заданными в момент  $t = 0$ , обратную задачу Коши с “начальными” условиями (3.21), заданными в момент  $t = \infty$ . При интегрировании уравнения (3.23) в обратном направлении задача Коши становится корректной. Решение, соответствующее “начальным” условиям при  $t = \infty$ , определяет тот класс начальных условий, для которых решение прямой задачи Коши существует при всех  $t \geq 0$ . Ниже будет показано, что при некоторых ограничениях на функцию  $\langle N \rangle_t$  таковыми являются именно условия (3.20). Важно подчеркнуть, что поскольку  $N > 0$ , то приведенные соображения носят общий характер и не связаны с принятой в § 3.2 гипотезой о статистической независимости полей  $N$  и  $z$  в турбулентной жидкости.

Решение сформулированной обратной задачи Коши находится стандартным методом Фурье. Окончательный результат имеет вид (Кузнецов, Лебедев, Секундов и Смирнова [1981], Кузнецов и Сабельников [1981б])

$$\begin{aligned} \gamma F &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin \pi k \langle z \rangle \sin \pi k z \exp(-\pi^2 k^2 \tau), \\ \gamma_0 &= 1 - \langle z \rangle - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k \langle z \rangle}{k} \exp(-\pi^2 k^2 \tau), \\ \gamma_1 &= \langle z \rangle + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \pi k \langle z \rangle}{k} \exp(-\pi^2 k^2 \tau), \\ \gamma &= 1 - \gamma_0 - \gamma_1, \quad \tau = \int_0^t \langle N \rangle_t dt. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Проанализируем два предельных случая: 1) заключительный этап вырождения пульсаций концентрации, т.е.  $t \rightarrow \infty$ , и 2) начальный этап вырождения, т.е.  $t \rightarrow 0$ .

В первом случае имеем  $\gamma \approx 1$ ,  $P \approx P_t$  (далее показано, что эти приближенные равенства справедливы с точностью до экспоненциально малых членов),  $\tau \rightarrow \frac{1}{2} \sigma^2 \rightarrow 0$ , и, следовательно, ряды в (3.26) сходятся крайне медленно. Поэтому главный член асимптотики решения в рассматриваемом случае проще найти непосредственно из уравнений (3.23) – (3.25). Обратимся вначале к уравнению для плотности вероятностей (3.23). Поскольку  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\sigma / \langle z \rangle) = 0$ , то при определении главного члена асимптотического

разложения плотности вероятностей, пригодного вне малых окрестностей граничных точек  $z = 0$  и  $z = 1$ , краевые условия (3.5) можно поставить при  $z = -\infty$  и  $z = +\infty$ . Если теперь принять во внимание "начальные" условия (3.21) и связь  $\tau \rightarrow \frac{1}{2} \sigma^2$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , то нетрудно видеть, что главный член асимптотики описывается гауссовской кривой (Кузнецов [1967])

$$P(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(z - \langle z \rangle)^2}{2\sigma^2}\right], \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

Этот результат хорошо согласуется с экспериментальными данными Мияваки, Цуджикава и Урагучи [1974].

Главные члены асимптотики плотности вероятностей, пригодные в окрестности  $z = 0$  и  $z = 1$ , находятся с помощью известного метода отображений (см., например, Морс и Фешбах [1953]). В результате получим, что

$$P(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left\{ \exp\left[-\frac{(z - \langle z \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] - \exp\left[-\frac{(z + \langle z \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] \right\}, \quad t \rightarrow \infty \quad (3.28)$$

в окрестности  $z = 0$  и

$$P(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left\{ \exp\left[-\frac{(z - \langle z \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] - \exp\left[-\frac{(z - 2 + \langle z \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] \right\}, \quad t \rightarrow \infty \quad (3.29)$$

в окрестности  $z = 1$ .

Подставив выражения (3.28), (3.29) в уравнения (3.24), (3.25), найдем главные члены асимптотик вероятностей  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma}{\langle z \rangle} \exp\left(-\frac{\langle z \rangle^2}{2\sigma^2}\right), \\ \gamma_1 &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma}{1 - \langle z \rangle} \exp\left[-\frac{(1 - \langle z \rangle)^2}{2\sigma^2}\right], \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  вероятности  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  и тем самым разность  $1 - \gamma$  экспоненциально малы.

Найдем теперь главный член асимптотики решений уравнений (3.23) – (3.25) в другом предельном случае  $t \rightarrow 0$ . Из общего решения (3.26) следует, что эта асимптотика определяется характером зависимости

от времени скалярной диссипации  $\langle N \rangle_t$  при  $t \rightarrow 0$ . Чтобы установить эту зависимость, обратимся к физической картине явления. Как уже указывалось в начале параграфа, при  $t > 0$  на границах областей с  $z = 0$  и  $z = 1$  возникают слои смешения, в которых из-за молекулярной диффузии появятся промежуточные значения концентрации. Скалярная диссипация, естественно, зависит от разности концентраций  $\Delta z$  и разности скоростей  $\Delta u$  на границах слоев смешения, а также от их характерной ширины  $l$ . Из соображений размерностей получим  $\langle N \rangle_t \sim \Delta u (\Delta z)^2 / l$ . Учтем, что  $\Delta u$  и  $\Delta z$  при  $t \rightarrow 0$  имеют конечные пределы (в частности,  $\Delta z \rightarrow 1$ ,  $t \rightarrow 0$ ), а характерная ширина  $l$ , как показывают соображения размерностей, пропорциональна времени:  $l \sim \Delta u t$ ,  $t \rightarrow 0$ . В итоге для  $\langle N \rangle_t$  получим следующую формулу:

$$\langle N \rangle_t = \frac{a}{t}, \quad t \rightarrow 0. \quad (3.31)$$

Здесь  $a$  — некоторая постоянная; ее значение будет найдено ниже. Таким образом, для переменной  $\tau$  в формулах (3.26) имеем

$$\tau \rightarrow -a \ln \frac{t}{t_0}, \quad t \rightarrow 0.$$

Здесь  $t_0$  — масштаб времени, определяемый крупными вихрями в слоях смешения на поздней стадии развития процесса. Поэтому  $\tau \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow 0$  и, следовательно, главный член асимптотики решения определяется лишь первыми членами в формулах (3.26), т.е.

$$\begin{aligned} F &= \frac{\pi}{2} \sin \pi z, \\ \gamma &= \frac{4}{\pi} \sin \pi \langle z \rangle \exp(-\pi^2 \tau) = \frac{4}{\pi} \sin \pi \langle z \rangle \left( \frac{t}{t_0} \right)^{a\pi^2}, \\ \gamma_0 &= 1 - \langle z \rangle - \frac{2}{\pi} \sin \pi \langle z \rangle \left( \frac{t}{t_0} \right)^{a\pi^2}, \\ \gamma_1 &= \langle z \rangle - \frac{2}{\pi} \sin \pi \langle z \rangle \left( \frac{t}{t_0} \right)^{a\pi^2}, \quad t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Значение постоянной  $a$ , входящей в соотношение (3.31) для скалярной диссипации, можно найти, если привлечь дополнительное соображение, что при  $t \rightarrow 0$  коэффициент перемежаемости  $\gamma$  пропорционален характерной ширине слоев смешения, т.е.  $\gamma \sim t$ . Это соображение основывается на физической картине течения и на определении величины  $\gamma$  как доли объема, занятой вполне турбулентной жидкостью. Приравняв единице показатель степени в формуле (3.32) для  $\gamma$ , получим, что  $a = \pi^{-2}$ .

Это теоретическое значение достаточно хорошо согласуется с косвенной оценкой постоянной  $a$ , которую можно получить, если рассмотреть полуэмпирическое соотношение для скалярной диссипации  $\langle N \rangle = \chi(\epsilon) \sigma^2 / q^2$ ,  $\chi \approx 2$  (см., например, Бегге, Декейсе и Лондер [1978]), в автомодельном слое смешения. Для оценки перейдем от этой стационарной задачи к рассматриваемому нестационарному случаю с помощью следующего преобразования:  $t = x / (u_0 / 2)$ . Если теперь в указанное выражение для  $\langle N \rangle$  подста-



вить экспериментальные значения (взяты в области, где  $\gamma \approx 1$ )  $\langle \epsilon \rangle = 0,04u_0^3/x$  и  $q^2 = 0,05u_0^2$ , приведенные в книге Таунсенда [1956],  $\sigma = 0,22$  из опытов Раджагопалана и Антониа [1980], то получим  $\langle N \rangle \approx \chi \cdot 0,08/t$ . Используя для  $\langle \epsilon \rangle$  и  $q^2$  экспериментальные данные Виньянски и Фидлера [1970]:  $\langle \epsilon \rangle = 0,025u_0^3/x$ ,  $q^2 = 0,06u_0^2$ , получим  $\langle N \rangle \approx \chi \cdot 0,037/t$ . Следовательно, в первом случае  $a \approx 0,16$ , во втором  $a \approx 0,074$ .

Остановимся на одном важном моменте, связанном с полученным решением. Проанализированная задача является в некотором смысле исключительной. Действительно, хотя уравнение (3.23) содержит только первую производную по времени, здесь вследствие специфических начальных условий удалось достичь того, что решение удовлетворяет двум условиям (3.20) и (3.21) по временной переменной.

В случае произвольных начальных условий характер смещения усложнится. Рассматриваемый вопрос уже был затронут в § 3.2, где отмечалось, что гипотеза о статистической независимости  $N$  и  $z$  в турбулентной жидкости несправедлива для турбулентного потока, находящегося в произвольном начальном состоянии. Прежде чем турбулентность достигнет равновесной структуры, должно пройти некоторое время релаксации, равное по порядку  $L/q$ . Лишь после этого станет справедливой рассматриваемая гипотеза и, следовательно, уравнение (3.23).

В рассмотренной задаче турбулентность уже в начальный момент времени находится в равновесном состоянии (точнее, время релаксации много меньше  $L/q$  и стремится к нулю при  $Re \rightarrow \infty$ ), что и дало возможность удовлетворить двум условиям по временной переменной.

Интересно, что физические рассуждения о границах применимости гипотезы о статистической независимости микро- и макрохарактеристик пульсационного движения в турбулентных потоках находят свое формальное отражение в свойствах уравнений (решение существует не при произвольных начальных условиях).

В заключение на примере рассматриваемой задачи приведем ряд качественных соображений о связи между перемежаемостью и теорией локально однородной турбулентности в ее неуточненном варианте (Колмогоров [1941], Обухов [1941, 1949]). Напомним, что в этой теории считается, что  $\gamma = 1$ , т.е. перемежаемость отсутствует. Покажем, что в этом случае уравнение для плотности вероятностей концентрации приводит к физически абсурдным результатам. Предположим вначале, что при всех  $z$  справедлива гипотеза (3.8). Тогда, как легко проверить, решением уравнения (3.23) является плотность нормального распределения (3.27) при всех  $t > 0$ . Поскольку для такого решения  $P \neq 0$  при  $-\infty < z < \infty$ , то оно не имеет физического смысла.

Возникающая трудность носит принципиальный характер, и ее нельзя обойти, отказавшись от гипотезы (3.8). Действительно, пусть  $\langle N \rangle_z$  является функцией концентрации. Существенно, что в асимптотической теории, в которой полагается  $Re = \infty$ , функция  $\langle N \rangle_z$  отлична от нуля при  $0 \leq z \leq 1$ . Это утверждение вытекает из результатов проведенного в § 1.3 исследования поведения  $\langle N \rangle_z$  в окрестности границ фазового пространства. Там установлено, что обращение  $\langle N \rangle_z$  в нуль на границах фазового пространства обусловлено только эффектами молекулярного переноса и принципиально

зависит от числа Рейнольдса (величины  $\alpha$  и  $k$  в формулах (1.29) и (1.34) – функции  $Re$ ). С физической точки зрения отличие  $\langle N \rangle_z$  от нуля во всем фазовом пространстве соответствует такой картине течения, когда мелкомасштабные турбулентные пульсации распределены в пространстве более или менее равномерно, т.е.  $\epsilon > 0$  и  $N > 0$  во всех точках; при  $Re \rightarrow \infty$  градиенты скорости и концентрации неограниченно возрастают во всем потоке (сравни с картиной потока, в котором есть перемежаемость – § 1.3).

Рассмотрим решения уравнения (3.23) с граничными условиями  $P = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ . Очевидно, что для таких решений будем иметь  $\partial \langle N \rangle_z P / \partial z \neq 0$  при  $z = 0$  и  $z = 1$ , т.е. условие нормировки  $\int_0^1 P dz = 1$  не выполняется, так

как "потоки" плотности вероятностей  $\partial \langle N \rangle_z P / \partial z$  за естественные границы фазового пространства  $z=0$  и  $z=1$  не равны нулю (если искать гладкое решение (3.23), удовлетворяющее условию нормировки и постоянству средней концентрации, то, как легко показать, необходимо дополнительно считать  $\partial P / \partial z = 0$ ,  $z = 0$  и  $z = 1$ ; граничным условиям  $P = \partial P / \partial z = 0$ ,  $z = 0$  и  $z = 1$  удовлетворяет только тривиальное решение  $P = 0$ , не имеющее физического смысла). Эти потоки и обуславливают возникновение перемежаемости или, более строго, перемежаемости в поле концентрации. Вблизи границ фазового пространства теория локально однородной турбулентности уже не может быть справедливой, так как здесь становится существенным взаимодействие между турбулентной и нетурбулентной жидкостями, для которого, как отмечалось в главе 1, характерно прямое (а не каскадное) влияние крупномасштабных флуктуаций на мелкомасштабные (см. также главу 4).

### § 3.5. Приближенное описание распределения вероятностей концентрации в свободных турбулентных течениях

В данном параграфе на основе уравнения (3.2) проведено нестрогое исследование распределения вероятностей концентрации в турбулентных струях. В соответствии с выводами § 3.3 для упрощения анализа предполагается, что условно осредненная скорость  $\langle u \rangle_z$  описывается линейной зависимостью (3.16). С помощью достаточно простых математических средств установлен качественный вид решений уравнения в двух характерных областях струи – в центральной области, где перемежаемость играет малую роль, и на краю струи, где перемежаемость существенна.

Эти результаты используются затем для решения чисто практической задачи – разработки простого приближенного метода определения плотности вероятностей концентрации и коэффициента перемежаемости в струях.

Содержание параграфа основано на работе Кузнецова [1972а] (с некоторыми дополнениями из работ Кузнецова и Сабельникова [1981б] и Сабельникова [1982б]).

Рассмотрим в среднем стационарный, медленно расширяющийся свободный турбулентный поток. Таким потоком может быть струя или след за телом. Проанализируем плотность вероятностей концентрации в дальнем следе или на основном участке струи. Тогда вероятностью наблюдения

значения  $z = 1$  можно пренебречь, т.е. считать, что  $\gamma_1 \approx 0$ . Примем, что условно осредненная скорость  $\langle u \rangle_z$  описывается линейной зависимостью (3.16). Тогда уравнения (3.15) и (3.2) для безусловной и условной плотностей вероятностей концентрации соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \langle u \rangle \nabla P + \nabla [q\sigma^{-2}(z - \langle z \rangle)P] &= -\gamma \langle N \rangle_t \frac{\partial^2 P_t}{\partial z^2}, \\ \langle u \rangle \nabla \gamma F + \nabla [q\sigma^{-2}(z - \langle z \rangle)\gamma F] &= -\gamma \langle N \rangle_t \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Проанализируем ряд частных решений уравнений (3.33).

**1. Решение на оси или плоскости симметрии.** Экспериментальные исследования показывают, что вблизи оси или плоскости симметрии перемежаемость практически отсутствует, т.е.  $\gamma \approx 1$  и, следовательно,  $\langle N \rangle_t = \langle N \rangle$ ,  $P(z) \approx P_t(z)$ . Кроме того, в рассматриваемой области можно пренебречь переносом вещества вдоль потока, т.е. можно считать, что  $q_1 \approx 0$ . Здесь индекс 1 относится к направлению потока. Очевидно, что на оси или плоскости симметрии  $\langle u_\alpha \rangle = q_\alpha = \partial \langle z \rangle / \partial x_\alpha = \partial \sigma / \partial x_\alpha = 0$ ,  $\alpha = 2, 3$ . Тогда из первого уравнения в (3.33) получаем

$$\langle u_1 \rangle \frac{\partial P}{\partial x_1} + P\sigma^{-2}(z - \langle z \rangle) \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\langle N \rangle \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \quad (3.34)$$

Чтобы преобразовать второй член в левой части (3.34), используем уравнение для средней концентрации

$$\langle u \rangle \nabla \langle z \rangle + \nabla q = 0. \quad (3.35)$$

На оси или плоскости симметрии из (3.35) имеем

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\langle u_1 \rangle \frac{\partial \langle z \rangle}{\partial x_1}, \quad \alpha = 2, 3. \quad (3.36)$$

В результате уравнение (3.34) принимает вид

$$\langle u_1 \rangle \frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{z - \langle z \rangle}{\sigma^2} \langle u_1 \rangle \frac{\partial \langle z \rangle}{\partial x_1} P = -\langle N \rangle \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \quad (3.37)$$

Будем искать автомодельное решение уравнения (3.37) в виде  $P = g(s)/\sigma$ , где  $g$  — функция одной переменной  $s = (z - \langle z \rangle)/\sigma$ . Подстановка в (3.37) дает следующее уравнение для функции  $g$ :

$$mg'' + (s + h)g' + (hs + 1)g = 0, \quad (3.38)$$

$$m = -\frac{\langle N \rangle}{\frac{1}{2}\langle u_1 \rangle \partial \sigma^2 / \partial x_1}, \quad h = \frac{\partial \langle z \rangle / \partial x_1}{\partial \sigma / \partial x_1}.$$

Штрихом в (3.38) обозначено дифференцирование по  $s$ .

Из уравнения (3.38) видно, что автомодельное решение существует, если только параметры  $m$  и  $h$  — постоянные. Это условие выполнено на основном участке струй и в дальнем следе.

Поясним физический смысл постоянных  $m$  и  $h$ . Параметр  $m$ , как легко установить из уравнения для дисперсии пульсаций концентрации  $\sigma^2$ , равен

отношению удвоенной скалярной диссипации к абсолютному значению адвекции. Данные измерений отдельных слагаемых в уравнении баланса пульсаций концентрации показывают, что в рассматриваемых здесь течениях  $m > 1$ . Так,  $m \approx 2,6$  в дальнем следе за круговым цилиндром (Фреймус и Уберои [1971]).  $m \approx 1,8$  в плоской струе (Башир и Уберои [1975]),  $m \approx 2$  в осесимметричной струе в спутном потоке (Антониа, Прабху и Стефенсон [1975]).

Величины  $\sigma$  и  $\langle z \rangle$  на основных участках струй или в дальнем следе изменяются в зависимости от расстояния  $x_1$  по степенным законам. Следовательно, параметр  $h$  обратно пропорционален интенсивности пульсаций концентрации. Согласно экспериментальным данным (см., например, Ля Рю и Либби [1974], Башир и Уберои [1975], Беккер, Хоттел и Вильямс [1967], Кузнецов [1971] и др.) он принимает достаточно большие значения:  $h = 4 - 5$ . Отмеченное обстоятельство позволяет получить асимптотическое разложение решения уравнения (3.38) по целочисленным степеням малой величины  $h^{-1}$ . Перед тем как выписать это разложение, укажем некоторые общие свойства решения уравнения (3.38).

С этой целью сделаем в (3.38) замену переменных

$$\Pi = g \exp \left[ \frac{(s+h)^2}{4m} \right], \quad s_1 = \frac{s+h-2mh}{\sqrt{m}}.$$

Уравнение для функции  $\Pi$  имеет вид

$$\Pi'' + (-\frac{1}{2}s_1^2 + \nu + \frac{1}{2})\Pi = 0, \quad (3.39)$$

$$\nu = h^2(m-1).$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по  $s_1$ . Решение уравнения (3.39) выражается через функции параболического цилиндра (см., например, Бейтмен и Эрдейи [1953a]). Поскольку  $m > 1$ , то индекс функций параболического цилиндра  $\nu > 0$ . На основании известных свойств этих функций заключаем, что условие неотрицательности плотности вероятностей не выполняется. Такой дефект решения связан с неточностью аппроксимации условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$  с помощью линейной зависимости (3.16) в области больших значений  $|s|$ . Более тщательное исследование показывает, что корни функции  $g$  лежат вне интервала ее основного изменения, а именно при  $z > \langle z \rangle + 3\sigma$ . Связь между неточностью линейной аппроксимации  $\langle u \rangle_z$  в области больших амплитуд пульсаций концентрации и расположением корней очевидна. Заметим, что вследствие рассмотренного нефизического характера поведения плотности вероятностей в области больших амплитуд пульсаций концентрации она, вообще говоря, не может быть использована для вычисления моментов высокого порядка.

Найдем теперь асимптотическое разложение решения уравнения (3.38) при  $h \rightarrow \infty$ . Будем искать решение в виде асимптотического ряда

$$g(s) = g^{(0)}(s) + \frac{1}{h} g^{(1)}(s) + \frac{1}{h^2} g^{(2)}(s) + \dots \quad (3.40)$$

Подставим ряд (3.40) в уравнение (3.38) и приравняем нулю коэффициенты при последовательных степенях  $h$ . В результате получим рекуррентную

систему уравнений для функций  $g^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Уравнения для первых трех из этих функций имеют вид

$$g^{(0)'} + sg^{(0)} = 0, \quad (3.41)$$

$$g^{(1)'} + sg^{(1)} = -(mg^{(0)''} + sg^{(0)'} + g^{(0)}), \quad (3.42)$$

$$g^{(2)'} + sg^{(2)} = -(mg^{(1)''} + sg^{(1)'} + g^{(1)}). \quad (3.43)$$

Последовательно решая уравнения (3.41) – (3.43), найдем

$$g^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right),$$

$$g^{(1)} = \frac{1-m}{3} (s^3 - 3s)g^{(0)} = -\frac{1}{3}(1-m) \frac{d^3 g^{(0)}}{ds^3}, \quad (3.44)$$

$$g^{(2)} = \frac{1-m}{4} \frac{d^4 g^{(0)}}{ds^4} + \frac{(1-m)^2}{18} \frac{d^6 g^{(0)}}{ds^6}.$$

Из выражений (3.40) и (3.44) следует, что распределение вероятностей концентрации на оси или плоскости симметрии близко к нормальному. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальными данными. В качестве примера согласования теории с экспериментом на рис. 3.8 представлены данные измерений плотности вероятностей концентрации в осесимметричной струе (Кузнецов [1971]), а на рис. 3.9 – данные измерений

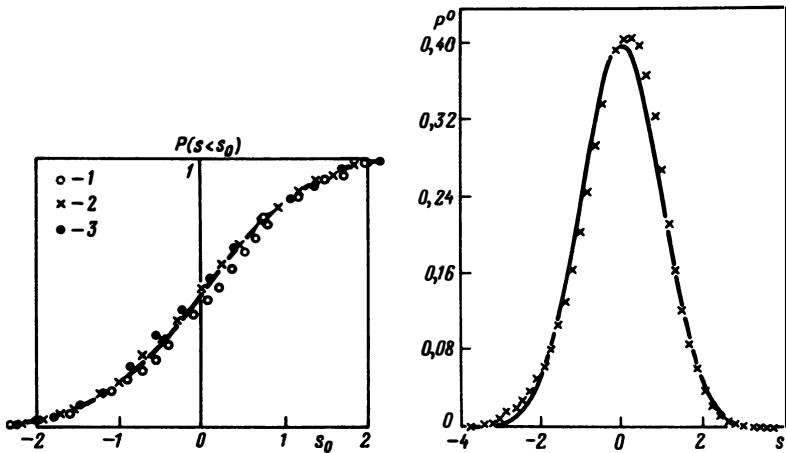


Рис. 3.8. Распределение вероятностей концентрации на оси затопленной осесимметричной струи углекислого газа по данным Кузнецова [1971].  $Re_d = u_0 d/\nu = 1,3 \cdot 10^4$ ,  $d = 5$  мм,  $u_0 = 20$  м/с; 1 -  $x_1/d = 20$ , 2 -  $x_1/d = 30$ , 3 -  $x_1/d = 40$ ,  $s = (z - \langle z \rangle)/\sigma$ ,  $P(s < s_0)$  – вероятность события  $s < s_0$ . Штриховая кривая отвечает нормальному закону распределения

Рис. 3.9. Плотность вероятностей концентрации вблизи плоскости симметрии в следе за круговым цилиндром по данным Ля Рю и Либби [1974].  $x_2/\sqrt{(x_1 - x_{10})d} = 0,0275$ ,  $x_{10} = -40d$ ,  $P^0 = \sigma P$ ,  $s = (z - \langle z \rangle)/\sigma$ . Кривая отвечает плотности нормального распределения; крестиками отмечены экспериментальные данные. Условия опытов те же, что и на рис. 1.14

вблизи плоскости симметрии дальнего следа за круговым цилиндром (Ля Рю и Либби [1974]). Аналогичные экспериментальные данные получены также в работах Ибрагимова, Петрищевой и Таранова [1968], Мешкова и Щербины [1979], Голованова и Щербины [1979], Щербины [1982].

Отклонения от нормального распределения описываются функциями  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$  в (3.44). Общепринятой количественной характеристикой этого отклонения являются коэффициенты асимметрии  $A$  и эксцесса  $E$ . Из (3.40) и (3.44) находим

$$A = \int s^3 g ds = h^{-1} \int s^3 g^{(1)} ds = 2(1 - m) h^{-1}, \quad (3.45)$$

$$E = \int s^4 g ds - 3 = h^{-2} \int s^4 g^{(2)} ds = 6(1 - m) h^{-2}.$$

Значение коэффициента асимметрии, рассчитанное с помощью (3.45), достаточно близко к результатам измерений. В качестве примера рассмотрим дальний след за круговым цилиндром. Здесь  $m = 2,6$ ,  $h \approx 4,75$  (Фреймус и Уберои [1971]) и формула для  $A$  в (3.45) дает  $A \approx -0,67$ . В опытах Ля Рю и Либби [1974]  $A \approx -0,4$ . Для коэффициента эксцесса расчет по формуле (3.45) дает  $E \approx -0,43$ , что существенно отличается от экспериментального значения Ля Рю и Либби  $E \approx 0,1$  (не совпадает даже знак). Аналогичный результат справедлив и для струй. Такое несоответствие теории с экспериментом обусловлено, как отмечалось уже выше, приближенным характером аппроксимации условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$  с помощью линейной зависимости (3.16) в области больших амплитуд пульсаций концентрации.

В заключение пункта приведем без вывода формулу, связывающую коэффициент перемежаемости и интенсивность пульсаций концентрации на оси или плоскости симметрии:

$$1 - \gamma = \frac{m^{1/4}}{h\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^{\nu+1/2} \exp\left[-h^2 \left(\sqrt{m} - \frac{1}{2}\right)\right], \quad h \rightarrow \infty, \quad (3.46)$$

$$\nu = h^2(m - 1).$$

Из (3.46) видно, что разность  $1 - \gamma$  экспоненциально мала при  $h \rightarrow \infty$ . Расчет показывает, что  $1 - \gamma = 10^{-4} - 10^{-3}$  при  $h = 4 - 5$  и  $m = 1,8 - 2,6$ . Тем самым предположение, что  $\gamma \approx 1$ , использованное выше, вполне оправдано.

2. Решение в области максимального поперечного градиента средней концентрации. Рассмотрим теперь ту область потока, где поперечный градиент концентрации достигает максимального значения. Из опытов хорошо известно, что в этой области основными процессами являются порождение и диссипация пульсаций концентрации (см., например, Фреймус и Уберои [1971]). Поэтому в уравнении для плотности вероятностей (3.33) можно пренебречь конвективным членом. Кроме того, в рассматриваемой области максимальных значений достигают поток вещества в поперечном направлении и дисперсия концентрации, т.е.  $\partial q_\alpha / \partial x_\alpha = \partial \sigma^2 / \partial x_\alpha = 0$ ,  $\alpha = 2, 3$ . Учет также, что здесь по-прежнему перемежаемость незначительна, а продольный поток вещества мал, т.е.  $\gamma \approx 1$ ,  $q_1 \approx 0$ . С использованием указанных

допущений первое из уравнений в (3.33) принимает вид

$$\frac{q_\alpha}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (z - \langle z \rangle) P = - \langle N \rangle \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \quad (3.47)$$

Как и в первом пункте параграфа, будем искать автомодельное решение этого уравнения вида  $P = g(s)/\sigma$ . Для функции  $g$  из (3.47) получим уравнение

$$(sg)' - \frac{\langle N \rangle}{q_\alpha \partial \langle z \rangle / \partial x_\alpha} g'' = 0. \quad (3.48)$$

При выводе (3.48) учтено, что

$$\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} = - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \langle z \rangle}{\partial x_\alpha} g'.$$

Теперь заметим, что коэффициент перед второй производной в (3.48) представляет собой отношение скалярной диссипации к порождению пульсаций концентрации. По предположению эти величины совпадают, т.е. коэффициент равен единице. Следовательно, функция  $g$  удовлетворяет уравнению

$$g'' + (sg)' = 0. \quad (3.49)$$

Решение уравнения (3.49)

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right). \quad (3.50)$$

Таким образом, в области максимального поперечного градиента средней концентрации и вероятность концентрации распределена по нормальному закону. Этот результат согласуется с экспериментальными данными (см., например, Кузнецов [1971]).

Суммируя результаты, полученные в первых двух пунктах параграфа, заключаем, что в области, где перемежаемость не существенна, распределение вероятностей концентрации близко к нормальному.

**3. Решение на краю турбулентного потока.** Найдем, наконец, условную плотность вероятностей концентрации  $F$  ( $P_t = F(z) \cdot \theta(z)$ ) в области, где существенна перемежаемость, т.е. на краю турбулентного потока. Главное допущение основывается на результатах измерений условно осредненных характеристик во вполне турбулентной жидкости (см. § 1.1). Анализ этих результатов показывает, что рассматриваемые характеристики изменяются весьма слабо от точки к точке. В качестве примера сошлемся на измерения Беккера, Хоттела и Вильямса [1967] в затопленной осесимметричной струе, результаты которых изображены на рис. 1.3, 1.4. Видно, что при изменении отношения  $x_2/x_1$  в диапазоне 0,16–0,26 производная  $\partial \gamma / \partial x_2$  на порядок превышает производные  $\partial \langle z \rangle_t / \partial x_2$ ,  $\partial \sigma_t / \partial x_2$ . Поэтому во втором из уравнений в (3.3) можно пренебречь производными  $\partial F / \partial x_k$  по сравнению с  $\partial \gamma / \partial x_k$ . Тогда получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + (a_1 - b_1 z) F = 0, \quad (3.51)$$

$$a_1 = \frac{1}{\langle N \rangle} [\langle u \rangle \nabla \gamma - \nabla (q \sigma^{-2} \langle z \rangle \gamma)],$$

$$b_1 = - \frac{1}{\langle N \rangle} \nabla (q \sigma^{-2} \gamma).$$

Решение уравнения (3.51) должно удовлетворять граничным условиям (3.5), т.е.  $F = 0$  при  $z = 0$  и  $z = 1$ . Относительно граничного условия при  $z = 1$  заметим следующее. В рассматриваемой области потока величина  $\langle z \rangle_t$  мала, а отношение  $\sigma_t / \langle z \rangle_t$  порядка единицы (см., например, данные Беккера, Хоттэла и Вильямса на рис. 1.3 и 1.4). Поэтому основное изменение плотности вероятностей  $F$  происходит в области малых  $z$ , а именно при  $z \sim \langle z \rangle_t \ll 1$ . Следовательно, второе граничное условие приближенно можно поставить не при максимально возможном значении концентрации  $z = 1$ , а при  $z = \infty$ .

Решение (3.51), удовлетворяющее граничному условию  $F = 0$  при  $z = \infty$ , выражается через функцию Эйри  $Ai$  (см., например, Абрамовиц и Стиган [1964]):

$$F = R_1 b_1^{1/3} Ai(\chi),$$

$$Ai(\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left( \frac{t^3}{3} + t\chi \right) dt, \quad (3.52)$$

$$\chi = b_1^{1/3} \left( z - \frac{a_1}{b_1} \right).$$

Здесь  $R_1$  — произвольная постоянная. Удовлетворяя граничному условию  $F = 0$ ,  $z = 0$ , получим уравнение  $Ai(\nu) = 0$ ,  $\nu = -a_1 b_1^{-2/3}$  — безразмерный параметр. Как известно (см. Абрамовиц и Стиган [1964]), уравнение  $Ai(\nu) = 0$  имеет счетное количество корней таких, что  $\nu < 0$ . Физическим смыслом обладает лишь наибольший корень функции Эйри  $\nu_1$ , так как при всех других значениях  $\nu$  решение осциллирует в интервале  $0 < z < \infty$ . Приближенное значение наибольшего корня  $\nu_1 = -2,338$ , т.е.  $a_1 b_1^{-2/3} = 2,338$ . Тем самым установлено, что решение уравнения (3.51) существует не при всех  $a_1$  и  $b_1$  или, другими словами, не при всяких функциях  $\langle z \rangle_t$ ,  $\sigma$  и  $\langle N \rangle$ .

Теперь учтем, что функция  $F$  должна удовлетворять условию нормировки, а ее первый момент равен условно осредненной концентрации  $\langle z \rangle_t$ , т.е.  $\int_0^{\infty} F dz = 1$  и  $\int_0^{\infty} z F dz = \langle z \rangle_t$ . Отсюда найдем значение постоянной  $R_1$  и выразим параметр  $b_1$  через  $\langle z \rangle_t$ :

$$R_1 = \frac{1}{J_0}, \quad b_1^{1/3} = \frac{b^{1/3}}{\langle z \rangle_t},$$

$$b^{1/3} = \left( \frac{J_1}{J_0} - \nu_1 \right), \quad J_k = \int_{\nu_1}^{\infty} \chi^k Ai(\chi) d\chi, \quad k = 0, 1.$$

Расчет дает  $J_0 = 1,274$ ,  $J_1 = -0,701$ , т.е.  $R_1 = 0,785$ ,  $b^{1/3} = 1,788$ . Численные



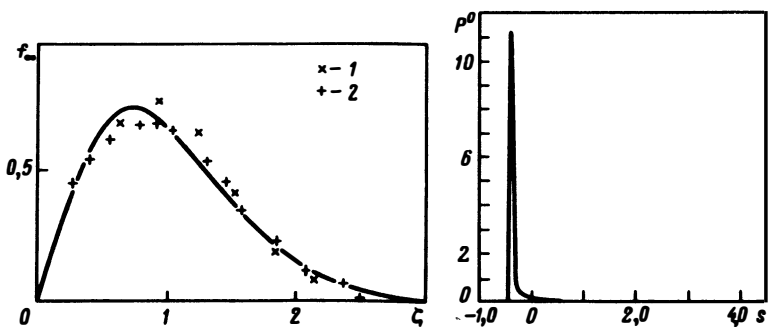


Рис. 3.10. Сравнение измеренной и рассчитанной плотностей вероятностей концентрации в турбулентной жидкости на большом расстоянии от оси затопленной струи. Значки – опытные данные. 1 – Бэрч, Браун, Додсон и Томас [1978], условия опытов приведены на рис. 1.17; 2 – Эбрахими, Гюнтер и Хаберда [1977];  $x_1/d = 50$ ,  $x_2/d = 6$ ;  $\xi = z / \langle z \rangle_t$ ; кривая – расчет

Рис. 3.11. Плотность вероятностей концентрации на большом расстоянии от плоскости симметрии в следе за круговым цилиндром по данным Ля Рю и Либби [1974]. Условия опытов приведены на рис. 1.14,  $P^0 = \sigma P$ ,  $\xi = 0,431$ ,  $\gamma = 0,175$ ,  $s = (z - \langle z \rangle) / \sigma$

значения интенсивности пульсаций концентрации, коэффициентов асимметрии и эксцесса во вполне турбулентной жидкости соответственно равны  $\sigma_t / \langle z \rangle_t = 0,555$ ,  $A_t = 0,802$ ,  $E_t = 0,694$ . Отметим, что найденное решение

(3.52) имеет автомодельную форму, т.е.  $F = \frac{1}{\langle z \rangle_t} f_\infty(\xi)$ , где

$$f_\infty = R \text{Ai}(\chi), \quad \chi = b^{1/3} \xi + \nu_1, \quad \xi = \frac{z}{\langle z \rangle_t}, \quad (3.53)$$

$$R = R_1 b^{1/3} = 1,403, \quad b^{1/3} = 1,788, \quad \nu_1 = -2,338.$$

Из соотношения (3.53) заключаем, что плотность вероятностей на краю потока полностью определяется только одним параметром – условно осредненной концентрацией  $\langle z \rangle_t$ .

Рассмотрим теперь, в какой степени теоретические результаты соответствуют экспериментальным данным. График функции  $f_\infty(\xi)$ , описываемой формулой (3.53), приведен на рис. 3.10. Здесь же нанесены экспериментальные данные Эбрахими, Гюнтера и Хаберды [1977], Бэрча, Брауна, Додсона и Томаса [1978]. Сделаем пояснение относительно обработки этих данных. Поскольку из-за процессов молекулярного смешения и шумов в измерительной аппаратуре плотность вероятностей концентрации “размазана” на границе фазового пространства  $z = 0$  (см. § 1.3), то осуществлялась экстраполяция экспериментальных точек, лежащих вне интервала “размазывания” в начало координат (см. рис. 1.17). Построенная таким образом кривая нормировалась и затем определялась условно осредненная концентрация  $\langle z \rangle_t$ . Из рис. 3.10 можно сделать вывод, что соответствие между теоретической плотностью вероятностей и экспериментальными данными вполне удовлетворительное. Результаты, полученные в § 5.1, косвенно подтверждают этот вывод в более широком диапазоне изменения концентрации.

Вычисленная интенсивность пульсаций концентрации в турбулентной жидкости  $\sigma_r / \langle z \rangle_r = 0,555$  находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными Беккера, Хоттела и Вильямса [1967], Ля Рю и Либби [1974], Антониа, Прабху и Стефенсона [1975] (см. рис. 1.4–1.6, а также график зависимости  $\sigma_r / \langle z \rangle_r$  от коэффициента перемежаемости  $\gamma$ , построенный с использованием данных указанных трех работ, в статье Кузнецова [19776]). Рассчитанное значение коэффициента асимметрии  $A_r = 0,802$  также хорошо согласуется с измерениями Ля Рю и Либби [1974] ( $A_r = 0,8–0,9$ ), Антониа, Прабху и Стефенсона [1975] ( $A_r = 0,5$ ). Заметное расхождение возникает при сравнении рассчитанных и экспериментальных значений коэффициента эксцесса:  $E_r = 0,694$  – теоретическое значение,  $E_r = -0,1$  (Ля Рю и Либби [1974]),  $E_r = (-0,4)–(-0,5)$  (Антониа, Прабху и Стефенсон [1975]). Такое различие может быть объяснено как неточностью предположений, с помощью которых получено уравнение для плотности вероятностей концентрации, так и серьезными трудностями корректного измерения моментов высоких порядков в турбулентной жидкости при малых значениях коэффициента перемежаемости. В этих случаях на результатах измерений коэффициента перемежаемости и плотности вероятностей концентрации особенно сильно сказываются процессы молекулярного переноса. Как показано в § 1.3, эти процессы приводят к тому, что дельта-функция в выражении (1.19) для безусловной плотности вероятностей  $P(z)$  "размазывается" на интервал, имеющий порядок  $\sigma \text{Re}^{-1/4}$ . Поэтому при малых значениях коэффициента перемежаемости  $\gamma$ , в силу ограниченности разрешающей способности аппаратуры, регистрируется лишь "размазанная" дельта-функция. Для иллюстрации рассматриваемого эффекта на рис. 3.11 приведена измеренная Ля Рю и Либби [1974] плотность вероятностей концентрации в следе за круговым цилиндром в точке, где  $\gamma = 0,175$ , т.е. в области, находящейся на краю турбулентного потока. Из рис. 3.11 видно, что в указанной работе удалось зарегистрировать лишь "размазанную" дельта-функцию.

4. Приближенный метод определения распределения вероятностей концентрации и коэффициента перемежаемости. В практических приложениях, связанных главным образом с расчетом течений реагирующего газа, важно иметь простой приближенный метод определения плотности вероятностей концентрации и коэффициента перемежаемости. В литературе известно несколько таких методов (см., например, Вилунов и Дик [1976], Борги [1980] и др.). В названных работах уравнение для плотности вероятностей вообще не используется. Вместо этого функциональный вид плотности вероятностей задается априори, и он обычно считается универсальным во всех областях турбулентного потока. Такое предположение позволяет "восстановить" плотность вероятностей по первым двум моментам, которые можно рассчитать с помощью традиционных полумпирических теорий турбулентности.

Главным результатом исследования, проведенного выше, является вывод о том, что вид плотности вероятностей концентрации в свободных турбулентных потоках существенно различен в областях с сильной и слабой перемежаемостью. Этот вывод показывает, что область применимости указанных приближенных методов крайне ограничена.

В данном пункте предлагается другой подход к приближенному определению плотности вероятностей концентрации и перемежаемости в турбулентных потоках (см. работу Кузнецова и др. [1977]). В его основу положены результаты упрощенного анализа уравнения для плотности вероятностей, проведенного в первых трех пунктах параграфа. Тем самым он учитывает качественное влияние перемежаемости на вид плотности вероятностей. Как и в упомянутых ранее приближенных методах, описываемый ниже метод требует знания двух моментов концентрации  $\langle z \rangle$  и  $\sigma^2$ . Рассмотрим вначале способ определения коэффициента перемежаемости на основном участке струй или в дальнем следе, когда можно принять, что  $\gamma_1 = 0$ . Способ опирается на точную формулу, справедливую в этом случае и связывающую интенсивность пульсаций концентрации  $\sigma/\langle z \rangle$ , коэффициент перемежаемости  $\gamma$  и интенсивность пульсаций концентрации во вполне турбулентной жидкости  $\sigma_t/\langle z \rangle_t$ :

$$\gamma = \frac{(1 + \sigma_t^2/\langle z \rangle_t^2)\langle z \rangle^2}{\langle z \rangle^2 + \sigma^2} \quad (3.54)$$

Для пояснения укажем, что формула (3.54) вытекает из равенства  $\langle z^2 \rangle = \gamma \langle z^2 \rangle_t$ , если в правую и левую его части подставить соответственно  $\langle z^2 \rangle = \langle z \rangle^2 + \sigma^2$ ,  $\langle z^2 \rangle_t = \langle z \rangle_t^2 + \sigma_t^2$  и учесть, что  $\langle z \rangle_t = \langle z \rangle/\gamma$ .

В соответствии с результатами, полученными в первых трех пунктах параграфа, значение суммы  $1 + \sigma_t^2/\langle z \rangle_t^2$  меняется по сечению струи (следа) весьма слабо:  $1,04 \lesssim 1 + \sigma_t^2/\langle z \rangle_t^2 \lesssim 1,31$ . Поэтому будем считать, что значение суммы  $1 + \sigma_t^2/\langle z \rangle_t^2$  постоянно и равно предельному значению 1,31. Тогда формула (3.54) позволяет рассчитать коэффициент перемежаемости, если известны безусловно осредненные моменты  $\langle z \rangle$  и  $\sigma^2$ . В тех случаях, когда интенсивность пульсаций мала, а именно при  $\sigma/\langle z \rangle < 0,555$ , расчет по формуле (3.54) при сделанном предположении  $\sigma_t/\langle z \rangle_t = 0,555$  дает лишнее физического смысла значение  $\gamma > 1$ . Такая ситуация возникает в центральной области течения вблизи оси или плоскости симметрии, где перемежаемость несущественна. В этих случаях просто считается, что  $\gamma = 1$ . Принятое допущение вполне оправдано, так как в силу формулы (3.46) неточности в задании отношения  $\sigma_t/\langle z \rangle_t$  в этой области сказываются лишь на малых отклонениях коэффициента перемежаемости от единицы.

В итоге получаем следующую алгебраическую аппроксимацию для коэффициента перемежаемости через  $\langle z \rangle$  и  $\sigma^2$ :

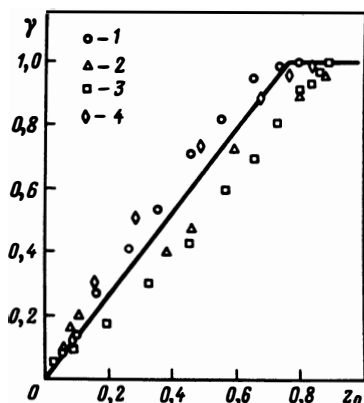
$$\gamma = 1,31 \frac{\langle z \rangle^2}{\langle z \rangle^2 + \sigma^2}, \quad \frac{\sigma}{\langle z \rangle} \geq 0,555, \quad (3.55)$$

$$\gamma = 1, \quad \frac{\sigma}{\langle z \rangle} < 0,555.$$

Формулы, отличающиеся от (3.55) только значением коэффициента, предлагались также Зимонтом, Мещеряковым и Сабельниковым [1978, 1981], Кентом и Билджером [1977].

В качестве иллюстрации эффективности описанного приближенного способа определения коэффициента перемежаемости на рис. 3.12, взятом из работы Кента и Билджера [1977], приведено сравнение формулы (3.55)

Рис. 3.12. Зависимость коэффициента перемежаемости от средней концентрации и дисперсии в свободных турбулентных течениях по данным разных авторов. 1 – затопленная осесимметричная струя, Беккер, Хотел и Вильямс [1967] (условия опытов указаны на рис. 1.3); 2 – след за круговым цилиндром, Ля Рю и Либби [1974] (условия опытов те же, что и на рис. 1.14); 3, 4 – спутная осесимметричная струя, Антониа, Прабху и Стефенсон [1975] ( $3 - u_0/u_\infty = 6,6$ ,  $4 - u_0/u_\infty = 2,9$ ,  $u_\infty$  – скорость спутного потока (условия опытов указаны на рис. 1.5)); сплошные прямые отвечают зависимости (3.55),  $z_0 = (1 + \sigma^2/\langle z \rangle^2)^{-1}$



с корреляционной зависимостью между  $\gamma$  и  $\sigma/\langle z \rangle$  по результатам измерений этих параметров в затопленной осесимметричной струе (Беккер, Хотел и Вильямс [1967]), в спутных осесимметричных струях (Антониа, Прабху и Стефенсон [1975]) и в дальнем следе за круговым цилиндром (Ля Рю и Либби [1974]). Аналогичная корреляционная зависимость между  $\gamma$  и  $\sigma/\langle z \rangle$ , как показано в опытах Дрейка, Питца и Лэппа [1984], справедлива и в диффузионном факеле.

Изложим теперь приближенный метод описания плотности вероятностей концентрации. Метод основан на том, что вид плотности вероятностей качественно различен в областях с сильной и слабой перемежаемостью. Следовательно, струи и следы можно разбить на две области. В центральной области, где перемежаемость незначительна, плотность вероятностей описывается гауссовской кривой. Вблизи границ струи или следа, где важна перемежаемость, условная плотность вероятностей концентрации в турбулентной жидкости выражается через функцию Эйри по формуле (3.53). Суммируя, получим приближенное описание плотности вероятностей концентрации и коэффициента перемежаемости в турбулентных струях и следах

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z - \langle z \rangle)^2}{2\sigma^2}\right], \quad \gamma = 1, \quad \frac{\sigma}{\langle z \rangle} \leq 0,555, \quad (3.56)$$

и

$$P = \gamma P_t(z) + (1 - \gamma)\delta(z), \quad \gamma < 1,$$

где

$$P_t(z) = R \frac{1}{\langle z \rangle_t} \text{Ai}(\chi), \quad \chi = b^{1/3}\zeta + \nu_1, \quad \zeta = \frac{z}{\langle z \rangle_t}, \quad (3.57)$$

$$R = 1,4, \quad b^{1/3} = 1,79, \quad \nu_1 = -2,338,$$

$$\gamma = 1,31 \frac{\langle z \rangle^2}{\langle z \rangle^2 + \sigma^2}, \quad \langle z \rangle_t = \frac{\langle z \rangle}{\gamma}, \quad \frac{\sigma}{\langle z \rangle} > 0,555.$$

Напомним, что формулы (3.56) и (3.57) справедливы в тех областях потока, где  $\gamma_1 = 0$ , т.е. на основном участке струи. Они также пригодны и

на начальном участке в области, где  $\langle z \rangle < 0,5$ . В области, где  $\langle z \rangle > 0,5$ , в них надо произвести замену  $z \rightarrow 1 - z$ .

Таким образом, соотношения (3.56) и (3.57) решают задачу простого приближенного описания плотности вероятностей концентрации и коэффициента перемежаемости. Расчет  $\langle z \rangle$  и  $\sigma^2$ , входящих в формулы (3.56) и (3.57), как уже отмечалось, можно выполнить с помощью полуэмпирических теорий турбулентности.

### § 3.6. Математические свойства уравнения для плотности вероятностей концентрации в свободных турбулентных течениях. Постановка краевой задачи

Данный параграф посвящен более строгому (чем это было сделано в § 3.5) математическому исследованию уравнения для плотности вероятностей концентрации в свободных турбулентных течениях. При анализе используется уточненная аппроксимация условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$  в области больших амплитуд пульсаций концентрации (3.18). Обсуждаются такие общие качественные свойства уравнения, как особые точки, существование автомодельного решения, постановка краевой задачи. Отмечаются имеющиеся аналогии со случаем статистически однородного поля концентрации, рассмотренного в § 3.4. Важную роль в проведенном анализе играют существенно нелокальные свойства уравнения. Показано, что условие разрешимости краевой задачи позволяет найти две неизвестные функции, входящие в замыкающие соотношения. В данном, а также в следующем параграфе (в нем приведено численное решение сформулированной краевой задачи) преследуются две главные цели. Первая – дать обоснование приближенного метода исследования уравнения, описанного в § 3.5. Вторая цель – показать на примере уравнения для плотности вероятностей концентрации, что с развитием направления, предложенного в книге, могут быть связаны вполне определенные перспективы построения замкнутой теории турбулентности. По крайней мере в настоящее время удастся уменьшить количество произвольных функций по сравнению с полуэмпирическими теориями для одноточечных моментов. Заметим, что проведенное исследование сопряжено с большим количеством достаточно громоздких выкладок, а также с использованием ряда неформальных качественных соображений. Материал этого параграфа рассчитан в первую очередь на такого читателя, которого заинтересует весьма нестандартная математическая структура уравнений для плотностей вероятностей, полученных с помощью теории локально однородной и изотропной турбулентности Колмогорова – Обухова, и те возможности, которые предоставляют такие уравнения (или уравнения с похожими свойствами) в решении проблемы замыкания в теории турбулентности. Остальные читатели могут этот параграф пропустить и сразу перейти к § 3.7, в котором приведено численное решение автомодельной задачи и в краткой форме перечислены основные результаты исследования уравнения.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, в среднем стационарные медленно расширяющиеся свободные турбулентные течения, у которых есть ось или плоскость симметрии (струя, след).

Отличительным свойством таких течений является неоднородность статистических характеристик турбулентности, что существенно затрудняет теоретический анализ уравнения для плотности вероятностей концентрации. Пренебрежем потоком вещества в продольном направлении, т.е. будем считать, что  $q_1 = 0$ . Предположим, что условно осредненная скорость  $\langle u \rangle_z$  описывается уточненной зависимостью (3.18), (3.19). Тогда из уравнений (3.2) – (3.4) получим

$$\langle u \rangle \frac{\partial \gamma F}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \gamma F}{\partial y} + \frac{1}{y^i} \frac{\partial y^i \langle v' \rangle_z \gamma F}{\partial y} = -\gamma \langle N \rangle_t \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad (3.58)$$

$$\langle u \rangle \frac{\partial \gamma_0}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \gamma_0}{\partial y} + \frac{1}{y^i} \frac{\partial y^i \langle v' \rangle_{z=0} \gamma_0}{\partial y} = -\gamma \langle N \rangle_t \frac{\partial F(0)}{\partial z}, \quad (3.59)$$

$$\langle u \rangle \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + \frac{1}{y^i} \frac{\partial y^i \langle v' \rangle_{z=1} \gamma_1}{\partial y} = \gamma \langle N \rangle_t \frac{\partial F(1)}{\partial z}. \quad (3.60)$$

Здесь

$$\begin{aligned} x &= x_1, \quad y = x_2, \quad u = u_1, \quad v = u_2, \quad v' = v - \langle v \rangle, \\ \langle v' \rangle_z &= \langle v \rangle_z - \langle v \rangle = q_y \sigma^{-1} \mu^{-1} V, \quad q_y = q_2, \quad V = V_0 + s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2}, \\ s &= (z - \langle z \rangle) / \sigma, \\ V_0 &= -\langle s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} \rangle = -\gamma_0 s_0 (1 + \omega^2 s_0^2)^{-1/2} - \\ &- \gamma_1 s_1 (1 + \omega^2 s_1^2)^{-1/2} - \gamma \int_0^1 s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} F dz, \\ \mu &= \langle s^2(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} \rangle = \gamma_0 s_0^2 (1 + \omega^2 s_0^2)^{-1/2} + \\ &+ \gamma_1 s_1^2 (1 + \omega^2 s_1^2)^{-1/2} + \gamma \int_0^1 s^2(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} F dz, \\ s_0 &= -\langle z \rangle / \sigma, \quad s_1 = (1 - \langle z \rangle) / \sigma. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Параметр  $i$  равен нулю для течений, имеющих плоскость симметрии, и единице – для осесимметричных течений.

При решении уравнений (3.58) – (3.60), как отмечалось в начале главы, заданными считаются поле средней скорости, поток вещества и скалярная диссипация. Тем самым функции  $\langle u \rangle$ ,  $\langle v \rangle$ ,  $q_y$  и  $\langle N \rangle_t$  далее предполагаются известными. Заметим, что поток вещества  $q_y$  и средняя концентрация  $\langle z \rangle$  связаны уравнением турбулентной диффузии

$$\langle u \rangle \frac{\partial \langle z \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle z \rangle}{\partial y} + \frac{1}{y^i} \frac{\partial y^i q_y}{\partial y} = 0. \quad (3.62)$$

Поэтому можно считать, что вместо потока вещества задано поле средней концентрации.

Искомыми функциями являются условная плотность вероятностей концентрации в турбулентной жидкости  $F$ , коэффициент перемежаемости  $\gamma$  и одна из вероятностей  $\gamma_0$  или  $\gamma_1$  (другая может быть найдена с помощью связи  $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma = 1$ ). Эти функции определяются из уравнения (3.58), од-

ного из уравнений (3.59) или (3.60) и условия нормировки плотности вероятностей  $F$ . В коэффициенты уравнений (3.58) – (3.60) входят интегралы от искомой функции  $F$ , а именно величины  $\sigma$ ,  $\mu$  и  $V_0$  (см. (3.61)). Следовательно, (3.58) – (3.60) есть система интегро-дифференциальных уравнений.

Заранее не известна в этих уравнениях и функция  $\omega$ , фигурирующая в выражении для условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$  (3.18). Эта функция, как будет показано ниже на примере автоматического случая (дальний след, основной участок струи), находится из условия разрешимости краевой задачи. Дадим общую характеристику уравнения (3.58). Как и уравнение, проанализированное в § 3.4, оно является обратнопараболическим (роль времени играет координата  $x$ , продольная средняя скорость  $\langle u \rangle$  положительна, а коэффициент при второй производной по  $z$  отрицателен). Рассмотрим особые точки уравнения (3.58). Таких точек, как и в статистически однородном случае, вообще говоря, две – это бесконечно удаленная точка  $x = \infty$  и начало координат  $x = 0$  (напомним, что по условию начало координат располагается на срезе сопла). Существенно, что особая точка

$x = \infty$  может быть устранена с помощью следующей замены переменных:

$X = \int_x^\infty \langle N \rangle_t / \langle u \rangle d\xi$ ,  $Y = y$ . Действительно, если использовать известные

закономерности затухания струи величин  $\langle N \rangle_t$  и  $\langle u \rangle$  при  $x \rightarrow \infty$  (см., например, Таунсенд [1956], Хинце [1959]), то получим, что отношение  $\langle N \rangle_t / \langle u \rangle$  пропорционально  $x^{-2}$  в плоской струе,  $x^{-3}$  – в осесимметричной и  $x^{-2}$  – в следе за круговым цилиндром. Следовательно, во всех случаях интеграл

$\int_x^\infty \langle N \rangle_t / \langle u \rangle d\xi$  сходится, и тем самым можно применить указанную в § 3.4

при анализе статистически однородного случая теорему о единственности решения задачи Коши для обратнопараболического уравнения.

Вторая особая точка  $x = 0$  возникает в тех случаях, когда слой смешения на начальном участке струи близок к автоматическому состоянию. Тогда, как легко установить с помощью соображений размерности,  $\langle N \rangle_t \sim u_0/x$ ,  $x \rightarrow 0$  (см. формулу (3.31) в § 3.4). Асимптотика решения уравнений (3.58) – (3.60) для струй при  $x \rightarrow 0$  найдена в § 3.7 с помощью численного метода.

Основное внимание далее в данном параграфе будет уделено анализу только главного члена асимптотического разложения плотности вероятностей при  $x \rightarrow \infty$ . Из общих соображений можно заключить, что главный член асимптотики является автоматическим решением уравнения (3.58). В пользу такого заключения свидетельствуют следующие экспериментальные данные.

Хорошо известно, что в свободных турбулентных течениях моменты полей скорости и концентрации при  $x/d \gg 1$  ( $d$  – ширина или диаметр сопла для струйных течений, диаметр цилиндра для следа) с большой точностью описываются автоматическими зависимостями (см., например, Таунсенд [1956], Хинце [1959]). Следовательно, аналогичное поведение должны иметь и плотности вероятностей концентрации. Эксперименты, выполненные Кузнецовым [1971], Головановым и Щербиной [1979], Ля Рю и Либби [1981], Шринивасаном [1981], Щербиной [1982], подтверждают это заключение.

Рассматриваемая асимптотика играет ту же роль, что и асимптотика (3.27) для статистически однородного случая (нетрудно видеть, что (3.27) — также автомодельное решение уравнения (3.23)).

Глобальное решение, найденное с помощью решения обратной задачи Коши, определяет те начальные условия, для которых решение прямой задачи Коши существует на полуоси  $x > 0$  (см. аналогичные рассуждения для статистически однородного случая). Для струй, когда в сечении на срезе сопла концентрация принимает только два значения  $z = 0$  и  $z = 1$  ( $z = 0$  вне струи,  $z = 1$  в струе), асимптотика глобального решения при  $x \rightarrow 0$  является автомодельным решением для слоя смешения.

Выведем уравнение, которому удовлетворяет автомодельная асимптотика уравнения (3.58) в окрестности бесконечно удаленной точки  $x = \infty$ . Аналогичным образом могут быть получены уравнения и для автомодельной задачи в слое смешения (см. Сабельников [1982б]).

**2. Автомодельная задача.** В свободных турбулентных течениях главные члены в асимптотических разложениях средних скоростей  $\langle u \rangle$  и  $\langle v \rangle$  в окрестности точки  $x = \infty$  имеют автомодельную форму

$$\langle u \rangle = u_s u(\xi), \langle v \rangle = u_s v(\xi), \xi = \frac{y}{l(x)} \quad (3.63)$$

для струй и

$$\langle u \rangle = u_0 - u_s u(\xi), \langle v \rangle = 0 \quad (3.64)$$

для дальнего следа за круговым цилиндром. Здесь  $u_s = u_0 (d/x)^\beta$ ,  $\beta = (1+i)/2$ ,  $u_0$  — скорость на выходе из сопла в случае струйных течений и скорость свободного потока для следа,  $l(x)$  — характерный масштаб:  $l(x) = x$  для струй,  $l(x) = (xd)^{1/2}$  для следа.

Главные члены в асимптотических разложениях функций  $\langle z \rangle$ ,  $\sigma^2$  и  $\langle N \rangle_t$  представим в виде

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= z_s Z(\xi), \quad \sigma^2 = z_s^2 \Sigma^2(\xi), \\ \langle N \rangle_t &= \frac{u_s z_s^2}{l} n_t(\xi), \quad z_s = \frac{u_s}{u_0} = \left( \frac{d}{x} \right)^\beta. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Согласно предположению об автомодельности главные члены в разложениях функций  $F(z, x, y)$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  имеют вид

$$\begin{aligned} F(z, x, y) &= \langle z \rangle_t^{-1} f(\xi, \xi), \quad \xi = \frac{z}{\langle z \rangle_t}, \\ \gamma &= \gamma(\xi), \quad \gamma_0 = 1 - \gamma, \quad \gamma_1 = 0, \quad \frac{x}{d} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Необходимо подчеркнуть, что рассматриваемый главный член асимптотического разложения непригоден в окрестности границы фазового пространства  $z = 1$  (он не удовлетворяет граничному условию  $F = 0, z = 1$ ). Главный член асимптотики решения в этой области может быть найден, как и в статистически однородном случае, с помощью метода отображений (этот метод может быть применен, поскольку уравнение (3.58) инвариантно относительно преобразования  $z \rightarrow -z + \text{const}$ ). В результате получим в



окрестности  $z = 1$

$$F \rightarrow \frac{1}{\langle z \rangle_t} \left[ f\left(\frac{z}{\langle z \rangle_t}, \xi\right) - f\left(\frac{2-z}{\langle z \rangle_t}, \xi\right) \right].$$

Главный член асимптотического разложения  $\gamma_1$  находится из уравнения (3.60) с использованием этого соотношения.

Таким образом, для определения главных членов асимптотических разложений решений уравнений (3.58)–(3.60) достаточно найти автомодельное решение уравнения (3.58) – функцию двух переменных  $f(\zeta, \xi)$ . Подставив соотношения (3.63)–(3.66) в (3.58) и выполнив громоздкие, но простые преобразования, получим уравнение для функции  $f(\zeta, \xi)$ :

$$A \frac{\partial \gamma f}{\partial \xi} + B \gamma \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + C \gamma f. \quad (3.67)$$

Коэффициенты в уравнении (3.67) описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A &= \beta \xi^{-i} \Psi Z_t^2 n_t^{-1} [1 - h \mu^{-1} V], \quad Z_t = \frac{Z}{\gamma}, \\ B &= \beta \xi^{-i} \left\{ -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} Z_t - \Psi \frac{\partial Z_t}{\partial \xi} [1 - h \mu^{-1} V] \right\} Z_t n_t^{-1} \xi, \\ C &= -B \zeta^{-1} + Z_t^2 n_t^{-1} \left[ \xi^{-i} \frac{\partial \xi^i W}{\partial \xi} - \zeta \frac{\partial Z_t}{\partial \xi} Z_t^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W &= \beta \xi^{-i} \Psi h \mu^{-1} V, \\ h &= \frac{Z}{\Sigma} = \sqrt{\frac{\gamma}{I_2 - \gamma}}, \quad I_k = \int_0^\infty \zeta^k f d\zeta, \\ V &= V_0 + s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2}, \quad s = h(\zeta - \gamma) \gamma^{-1}, \\ V_0 &= (1 - \gamma) h(1 + \omega^2 h^2)^{-1/2} - \gamma \int_0^\infty s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} f d\zeta, \\ \mu &= (1 - \gamma) h^2(1 + \omega^2 h^2)^{-1/2} + \gamma \int_0^\infty s^2(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} f d\zeta, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$\Psi = \xi^i \beta^{-1} (u\xi - v)$  – функция тока для струйных течений,  $u = \xi^{-i} \partial \Psi / \partial \xi$ ;  $\Psi = \xi$  – для следа.

При выводе соотношений (3.69) использовалась алгебраическая связь между потоком вещества и средней концентрацией  $q_\gamma = \beta \xi^{-i} Z \Psi z_s u_s$ , полученная после однократного интегрирования автомодельного уравнения для средней концентрации (3.62).

Автомодельная функция  $f(\zeta, \xi)$ , как это следует из (3.5) и естественного предположения существования моментов  $I_k$  при  $k > 0$ , должна удовлетворять следующим краевым условиям:

$$f(0, \xi) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta^l f = 0, \quad (3.70)$$

где  $l$  – произвольное положительное число.

3. Общие свойства уравнения для автомодельной задачи. Если отвлечься от того, что в коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  входят моменты искомой функции  $f$ , то (3.67) — параболическое уравнение. Роль времениподобной координаты в этом уравнении играет переменная  $\xi$ . Из теории стандартных параболических уравнений известно, что для них корректной является задача Коши, т.е. начальные условия задаются при одном значении времениподобной координаты.

Рассматриваемая задача принципиально отличается от классического случая, что обусловлено специальными свойствами коэффициента при времениподобной координате. Часть этих свойств обусловлена симметрией задачи. Прежде всего, из (3.68) следует, что  $A = 0$  при  $\xi = 0$ . Кроме того, также в силу симметрии должно быть выполнено условие  $\partial f / \partial \xi = 0$  при  $\xi = 0$ . Тем самым уравнение (3.67) на этой линии в фазовом пространстве вырождается в обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение. Далее, как это видно из (3.68),  $A \sim \xi$  при малых  $\xi$ . Поэтому уравнению (3.67) удовлетворяют решения вида  $\xi^k g(\xi)$ , где  $k$  — произвольное число,  $g$  — некоторая функция. За исключением случая  $k = 0$ , такие решения физического смысла не имеют. Таким образом, линия  $\xi = 0$  — особая. Так как

интеграл  $\int_0^{\xi} A^{-1} d\xi$  расходится, то эту особенность нельзя устранить с по-

мощью преобразования координаты  $\xi$ . Таким образом, плотность вероятностей на линии  $\xi = 0$  не может задаваться произвольно (здесь ситуация похожа на ту, которая имеет место при определении в § 3.4 асимптотики решения при  $t \rightarrow 0$  в статистически однородном случае и при  $x \rightarrow 0$  в струях; см. § 3.7).

Аналогичная ситуация возникает и на линии  $\xi = \infty$ . Для пояснения обратимся к уже неоднократно упоминавшимся измерениям условно осредненных моментов поля концентрации в турбулентной жидкости (Беккер, Хоттел и Вильямс [1967]). Результаты этих измерений изображены на рис. 1.3, 1.4, из которых видно, что отклонения от статистической однородности в турбулентной жидкости при установившемся равновесии весьма незначительны. Например, измерения, выполненные Беккером, Хоттелом и Вильямсом [1967] в затопленной осесимметричной струе, показывают, что при изменении  $u/x$  в диапазоне 0,16–0,26 коэффициент перемежаемости изменяется в 30 раз, средняя концентрация меняется в 60 раз, в то время как условно осредненная концентрация в турбулентной жидкости  $\langle z \rangle_t$  меняется всего в два раза (см. рис. 1.4). Безразмерная величина  $\sigma_t / \langle z \rangle_t$  — интенсивность пульсаций концентрации в турбулентной жидкости — в этих опытах в указанном диапазоне  $u/x$  практически постоянна. Аналогичные результаты получены и в других экспериментальных работах (Ля Рю и Либби [1974], Антониа, Прабху и Стефенсон [1974], Фабрис [1979а, б]). Осциллограммы "замороженных" профилей температуры, полученные в затопленной плоской струе Уберои и Сингхом [1975] и приведенные на рис. 1.1, также согласуются с описанной выше картиной.

Тем самым можно заключить, что в турбулентных потоках достаточно быстро устанавливается подвижное равновесие между двумя конкурирующими процессами — захватом нетурбулентной жидкости и смешением

до молекулярного уровня вещества, захваченного из окружающей среды, с веществом, вытекающим из сопла.

Из физических соображений понятно, что каждый акт захвата нетурбулентной жидкости может только увеличить неоднородности в распределении гидродинамических величин в турбулентной жидкости. Молекулярное смешение, напротив, способствует установлению однородности. Как показывают измерения, суммарная скорость захвата нетурбулентной жидкости не зависит от числа Рейнольдса при  $Re \gg 1$  (Таунсенд [1956]). Следовательно, из двух рассматриваемых процессов захват нетурбулентной жидкости является лимитирующим. Смешение до молекулярного уровня, если так можно выразиться, подстраивается под изменение скорости захвата соответствующей перестройкой мелкомасштабной структуры турбулентности (см. аналогичные соображения в работе Бродвелла и Брайденала [1982]).

На основании вышеизложенного естественно предположить, что при  $\xi \rightarrow \infty$  все безразмерные комбинации условно осредненных моментов в турбулентной жидкости стремятся к конечным значениям. Ясно, что это возможно только в том случае, когда функция  $f(\zeta, \xi)$  имеет конечный предел при  $\xi \rightarrow \infty$ , т.е. справедливо соотношение

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\zeta, \xi) = f_{\infty}(\zeta). \quad (3.71)$$

Подчеркнем, что предположение (3.71) слабее простого допущения о полной статистической однородности в турбулентной жидкости, так как из соотношения (3.71) вытекает, что моменты  $\langle z^k \rangle_t$  ( $k > 0$ ) могут зависеть от поперечной координаты  $y$  ( $\langle z \rangle_t$  зависит от  $y$ ).

Коэффициенты в (3.67) должны иметь такой вид, чтобы (3.67) на линии  $\xi = \infty$  вырождалось в обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение. Функция  $f_{\infty}$  определяется из этого уравнения. Следовательно, как и на линии  $\xi = 0$ , функцию  $f$  на линии  $\xi = \infty$  нельзя задать произвольно.

Таким образом, линия  $\xi = \infty$  — также особая, и эта особенность неустрашимая. Этот вывод формально обусловлен тем, что интеграл  $\int_{\xi} A^{-1} d\xi$  расходится. Действительно, из приведенного ниже выражения (3.96) следует, что  $A \sim Z(dZ/d\xi)^{-1}$ , т.е.  $\int A^{-1} d\xi \sim \ln Z$ . Поэтому уравнению (3.67) удовлетворяют решения вида  $Z^k \theta(\zeta)$ , где  $\theta$  — некоторая функция. При  $k < 0$  эти решения не имеют физического смысла.

Помимо указанных выше свойств, коэффициент  $A$  в (3.67) обладает еще одной, весьма нетривиальной особенностью. Она связана с геометрией областей его знакопостоянства. Для упрощения рассмотрения этого вопроса будем здесь считать, что условно осредненная поперечная скорость  $\langle v \rangle_z$  описывается линейной зависимостью (3.16), т.е. в (3.69) надо положить  $V_0 = \omega = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $V = s$ . Такое предположение вполне оправдано при выявлении качественных особенностей задачи, поскольку, как установлено в § 3.3, линейная зависимость весьма удовлетворительно описывает экспериментальные данные в диапазоне амплитуд пульсаций  $|z - \langle z \rangle| < 1,5 \sigma$ .

Приняв это предположение, из соотношения для коэффициента  $A$  в (3.68) нетрудно найти области знакопостоянства  $A$ . Они описываются

следующими неравенствами:

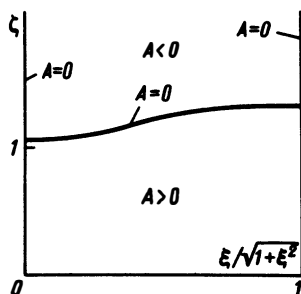
$$\begin{aligned} A > 0 & \text{ при } 0 \leq \xi \leq I_2(\xi), \quad 0 < \xi < \infty; \\ A < 0 & \text{ при } I_2(\xi) < \xi < \infty, \quad 0 < \xi < \infty; \\ A = 0 & \text{ при } \xi = 0, \quad \xi = \infty, \quad \xi = I_2(\xi). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Теперь заметим, что второй момент  $I_2(\xi)$  является ограниченной функцией  $\xi$  при  $0 \leq \xi \leq \infty$  (ограниченность при  $\xi = \infty$  вытекает из предположения (3.71)), т.е.  $I_2 < \infty$ . Кроме того, из определения  $I_2$  имеем

$$I_2 = \frac{\langle z^2 \rangle_t}{\langle z \rangle_t^2} = 1 + \frac{\sigma_z^2}{\langle z \rangle_t^2}, \quad \sigma_z^2 = \langle (z - \langle z \rangle_t)^2 \rangle_t,$$

т.е. справедливо неравенство  $I_2 > 1$ . Таким образом, заключаем, что области

Рис. 3.13. Схема областей знакопостоянства коэффициента при времениподобной координате в уравнении (3.67). Для удобства изображения асимптотического вида области при  $\xi \rightarrow \infty$  использована замена переменной, переводящая бесконечно удаленную прямую  $\xi = \infty$  на конечное расстояние от начала координат



знакопостоянства  $A$  неограничены в направлении  $\xi$ . Качественный вид этих областей иллюстрируется рис. 3.13. Влияние отклонения функции  $\langle v \rangle_z$  от линейной зависимости (3.16) в области больших амплитуд пульсаций концентрации на расположение в фазовом пространстве линии, на которой коэффициент  $A$  обращается в нуль, проанализировано в пунктах 5 и 6 данного параграфа. Там показано, что это влияние не меняет качественного вида областей знакопостоянства  $A$ .

На основании проведенного анализа можно заключить, что оба направления по времениподобной координате  $\xi$  для параболического уравнения (3.67) равноправны. Таким образом, по-видимому, для этого уравнения следует ставить краевую задачу не только по переменной  $\zeta$ , но и по координате  $\xi$ .

Найденные свойства коэффициента  $A$  и наличие особых линий  $\xi = 0$  и  $\xi = \infty$  указывают на то, что уравнение (3.67) обладает существенно нелокальными свойствами. Остановимся на этом моменте более подробно. Рассмотрим для определенности малую окрестность особой линии  $\xi = 0$ . Напомним, что на этой линии (3.67) вырождается в обыкновенное интегродифференциальное уравнение, решением которого является функция  $f(\zeta, 0)$ . В окрестности линии  $\xi = 0$  можно построить ряд Тейлора по переменной  $\xi$  для искомого решения  $f(\zeta, \xi)$ . Коэффициенты этого ряда зависят от переменной  $\zeta$  и также удовлетворяют обыкновенным интегродифференциальным уравнениям. Однако в общем случае такое решение не будет удовлетворять условию (3.71) и будет особым в окрестности линии  $\xi = \infty$ . Так, не исключен случай, когда  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \gamma = \infty$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} f = \infty$ . Отсюда вытекает

что условие (3.71) удовлетворяется лишь при определенной связи между коэффициентами в уравнении (3.67). Такая связь, очевидно, получается из решения краевой задачи по переменной  $\xi$  и, следовательно, носит нелокальный характер. Заметим, что этот результат в некотором смысле аналогичен условию разрешимости двухточечной краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка со свободным параметром, входящим в коэффициенты уравнения. Такая задача, как хорошо известно, разрешима лишь при определенных значениях свободного параметра. Отличие состоит в том, что (3.67) – уравнение в частных производных, для которого краевые условия задаются на линиях  $\xi = 0$  и  $\xi = \infty$ , и здесь условие разрешимости краевой задачи позволяет найти целую функцию.

Кроме рассмотренной существует вторая связь между коэффициентами в (3.67). Она вытекает из условия нормировки функции  $f(\zeta, \xi)$ , имеет вид интегрального уравнения  $I_0 = 1$  и, следовательно, также носит нелокальный характер. Заметим, что условие  $I_1 = 1$ , вытекающее из определения условно осредненной концентрации в турбулентной жидкости  $\langle z \rangle_t$ , выполнено при  $I_0 = 1$  автоматически. Чтобы доказать это, уравнение (3.67) следует умножить на  $\zeta$  и проинтегрировать по  $\zeta$  от нуля до бесконечности. Из полученного в результате дифференциального уравнения для  $I_1$  нетрудно показать, что  $I_1 = 1$ , если только  $I_0 = 1$ .

В заключение пункта укажем, что параболические уравнения с аналогичными свойствами коэффициента при времениподобной координате встречаются в асимптотической теории отрыва пограничного слоя (Нейланд [1971], Сычев [1972], Стюартсон [1974]) и в теории нестационарного пограничного слоя (Стюартсон [1951], Холл [1965], Уонг [1983]).

**4. Постановка краевой задачи.** Приведенные в предыдущем пункте соображения носят качественный характер, и их нельзя, разумеется, рассматривать как строгое доказательство существования решения уравнения (3.67). Основная цель этих рассуждений состояла в том, чтобы показать, что для параболического уравнения (3.67) корректной (в математическом смысле) может быть только краевая по времениподобной координате задача (т.е. дополнительные условия должны ставиться при двух значениях времениподобной координаты  $\xi = 0$  и  $\xi = \infty$ ). Условия симметрии и результаты проведенного выше исследования приводят к следующей постановке краевой задачи. В области  $0 \leq \zeta < \infty$ ,  $0 < \xi < \infty$  ищется неотрицательная функция  $f(\zeta, \xi)$ , удовлетворяющая уравнению (3.67) и условиям

$$\begin{aligned}
 f(0, \xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \zeta^k f = 0, \\
 \frac{\partial^{2l+1} f(\zeta, 0)}{\partial \xi^{2l+1}} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\
 \lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\zeta, \xi) = f_\infty(\zeta), \quad I_0 = \int_0^\infty f d\zeta = 1.
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Напомним, что поля средних скоростей (т.е. функция  $\Psi$ ), средней концентрации  $Z$  и скалярной диссипации  $n_t$  считаются заданными. В коэффициенты уравнения (3.67), помимо указанных величин, входят две заранее не известные функции одной переменной – коэффициент перемежае-

мости  $\gamma(\xi)$  и функция  $\omega(\xi)$ , характеризующая процесс турбулентной диффузии (она входит в уточненное в области больших амплитуд пульсаций концентрации выражение (3.18) для условно осредненной скорости  $\langle v \rangle_z$ ). В формулах (3.68) и (3.69) для коэффициентов уравнения (3.67) фигурируют также величины  $\mu$ ,  $V_0$ ,  $\Sigma$ , которые известным образом выражаются через различные интегралы от плотности распределения вероятностей. Две указанные неизвестные функции находятся из двух дополнительных связей, которые вытекают из следующих условий.

Первое — это условие разрешимости краевой задачи по времени подобной координате  $\xi$ . Вторая связь между  $\gamma$  и  $\omega$  дается условием нормировки (последнее условие в (3.73)).

Следует особо отметить принципиальную роль, которую играет требование неотрицательности  $f$  в условии разрешимости краевой задачи. Характер ограничений, вытекающих из этого условия, будет хорошо виден на примере изложенного в пунктах 5 и 6 данного параграфа анализа уравнения (3.67) на особых линиях  $\xi = 0$  и  $\xi = \infty$ . Для определенности рассмотрим линию  $\xi = \infty$ . Проведенный в пункте 6 анализ показывает, что на этой линии существует счетное множество решений, из которых лишь одно (неотрицательное) имеет смысл (см. также § 3.5, пункт 3). Можно ожидать, что аналогичная ситуация возникает и при решении общей краевой задачи (3.73). Численный расчет (см. § 3.7) подтверждает этот вывод. Поэтому условие неотрицательности решения играет важную роль в сформулированной краевой задаче.

Таким образом, функция  $\omega$ , характеризующая особенности крупномасштабного процесса турбулентного переноса концентрации примеси, находится из условия разрешимости краевой задачи, т.е. рассматриваемый процесс носит существенно нелокальный характер. Развиваемый подход, следовательно, дает возможность учесть нелокальное влияние крупномасштабных пульсаций на турбулентное смешение.

В заключение этого пункта отметим, что сформулированная краевая задача существенно отличается от описанных в литературе краевых задач для параболических уравнений смешанного типа (см., например, Вентцель [1975], Кислов [1980]). Имеющиеся здесь теоретические результаты относятся к уравнениям, которые рассматриваются в ограниченных прямоугольных областях, не имеют особенностей, а линия, на которой меняется тип уравнения, заранее известна.

Численное решение сформулированной краевой задачи получено в § 3.7. Это решение служит пока единственным доводом в пользу существования решения уравнения (3.67). Чтобы понять качественную структуру решения уравнения, проанализируем в остальных пунктах параграфа решения на особых линиях  $\xi = 0$  и  $\xi = \infty$ .

**5. Решение на особой линии  $\xi = 0$ .** Поскольку  $A = 0$  при  $\xi = 0$ , то из (3.67) получим

$$f'' + a_1 \xi f' + a_1 (1 + h\mu^{-1}V) f = 0, \quad V = V_0 + s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2}, \quad (3.74)$$

где  $a_1 = \frac{h^2}{\gamma m}$ ,  $h^2 = \frac{Z^2}{\Sigma^2} = \frac{\gamma}{I_2 - \gamma}$ ,  $m = \frac{\gamma n_t}{\beta u \Sigma^2}$  для струй,  $m = 2\gamma n_t / \Sigma^2$  для следа: штрихом в (3.74) обозначено дифференцирование по  $\xi$ .

Физический смысл параметров  $m$  и  $h$  в уравнении (3.74) был рассмотрен в § 3.5. Напомним, что  $m$  равно отношению удвоенной скалярной диссипации к абсолютному значению адвекции, а  $h$  обратно пропорционально интенсивности пульсаций концентрации. В анализируемых здесь течениях, как указано в § 3.5,  $m > 1$ :  $m \approx 2,6$  в дальнем следе за круговым цилиндром,  $m \approx 1,8$  в плоской струе,  $m \approx 2$  в осесимметричной струе в спутном потоке. Значения параметра  $h$  лежат в диапазоне 4–5, т.е.  $h$  — достаточно большая величина.

Укажем вначале общие свойства решения уравнения (3.74). Из них, по-видимому, главное значение имеет то свойство, что нетривиальное решение уравнения (3.74) существует только при выполнении строгого неравенства  $\gamma < 1$ . Этот важный вывод следует из соотношения, которое получится, если (3.74) умножить на  $\zeta$ , проинтегрировать по  $\zeta$  от нуля до бесконечности и воспользоваться условием нормировки

$$f'(0) = a_1 h \mu^{-1} \left[ \int_0^{\infty} f s (1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} d\xi + h (1 + \omega^2 h^2)^{-1/2} \right] (1 - \gamma). \quad (3.75)$$

Отсюда видно, что  $f'(0) = 0$  при  $\gamma = 1$ . Поскольку  $f(0) = 0$ , то при  $\gamma = 1$  существует только тривиальное решение. Таким образом, из развиваемой теории следует, что  $\gamma < 1$  во всех точках потока, хотя это неравенство и не исключает существования протяженных областей, в которых разность  $1 - \gamma$  ничтожно мала. Далее в этом пункте будет показано, что  $1 - \gamma \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow \infty$ .

Продолжим обсуждение общих свойств уравнения (3.74). Найдем, от какого количества параметров зависит его решение. Воспользуемся для этого следующими рассуждениями. Будем считать, что значения величин  $\omega$ ,  $h$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$  и  $V_0$ , входящих в коэффициенты (3.74), пока совершенно произвольны и, следовательно, (3.74) — линейное дифференциальное уравнение. Тогда, используя стандартные методы, легко установить, что одно из линейно независимых решений этого уравнения убывает при  $\zeta \rightarrow \infty$  экспоненциально (пропорционально  $\exp(-\frac{1}{2} a_1 \zeta^2)$ ), а второе — степенным образом (пропорционально  $\zeta^{-l}$ ,  $l = 1 + h \mu^{-1} |\omega|^{-1}$ ). Следовательно, граничное условие  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta^k f = 0$  в (3.73) нетривиально, а краевая задача раз-

решима при отдельных значениях  $\omega$ . Условие неотрицательности функции  $f(\zeta, 0)$  будет выполнено только при одном из этих значений. Найденная таким образом величина  $\omega$  и функция  $f(\zeta, 0)$  содержат неизвестные  $h$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$  и  $V_0$  в качестве параметров. Поскольку при заданных  $h$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$  и  $V_0$  уравнение (3.74) линейно, а граничные условия (3.73) однородны, то функция  $f(\zeta, 0)$  определяется с точностью до произвольного множителя. Теперь примем во внимание, что функция  $f(\zeta, 0)$  должна быть нормирована, а в выражения для величин  $\mu$ ,  $V_0$  и  $h$  входят интегралы от  $f(\zeta, 0)$  (см. (3.69)). Из этих условий получим систему из четырех нелинейных уравнений для пяти неизвестных:  $\mu$ ,  $V_0$ ,  $h$ ,  $\gamma$  и упомянутого произвольного множителя. Таким образом, решение уравнения (3.74) находится с точностью до одного параметра. В качестве такого параметра удобно выбрать коэффициент перемежаемости. Связь между  $\gamma$  и  $h$  при этом дается соотношением (3.75).

Проведенный анализ позволяет, во-первых, понять роль, которую играет предложенное в § 3.3 уточнение линейной зависимости условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$  в области больших амплитуд пульсаций концентрации при определении неотрицательного решения, и, во-вторых, выявить причину осциллируемости решений уравнения при использовании линейной зависимости (3.16) для  $\langle u \rangle_z$ . Уравнение для этого случая получается из (3.74), если в нем положить  $V_0 = \omega = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $V = s$ . Тогда оба линейно независимых решения уравнения удовлетворяют граничному условию  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^k f = 0$  и, следовательно, краевая задача разрешима всегда. Именно это обстоятельство и ответственно за то, что нельзя удовлетворить требованию неотрицательности функции  $f$  (напомним, что рассматривается случай  $m > 1$ ).

Проанализируем асимптотическое разложение решения уравнения (3.74) по целочисленным степеням малой величины  $h^{-1}$  при  $h \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим вначале асимптотику решения, пригодную вне малых окрестностей точек  $\xi = 0$  и  $\xi = \infty$ . Перед этим заметим, что анализ равномерной асимптотики, результаты которого приведены ниже, показывает, что разность  $1 - \gamma$  экспоненциально мала при  $h \rightarrow \infty$ . Следовательно, при определении асимптотики в коэффициентах уравнения (3.74) можно положить  $\gamma = 1$ .

Сделаем в (3.74) замену переменных  $g(s) = h^{-1} f(\xi)$ ,  $s = h(\xi - 1)$ . Уравнение для функции  $g$  имеет вид

$$mg'' + (s+h)g' + (h\mu^{-1}V+1)g = 0,$$

$$V = V_0 + s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2},$$

$$V_0 = - \int_{-h}^{\infty} s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} g ds, \quad (3.76)$$

$$\mu = \int_{-h}^{\infty} s^2(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2} g ds,$$

$$g = 0, \quad s = -h, \quad s = \infty.$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по  $s$ .

Уравнение (3.76) отличается от уравнения, проанализированного в § 3.5, лишь коэффициентом перед функцией  $g$ . Поэтому, чтобы не повторять здесь анализ асимптотики, остановимся только на различиях, которые возникают вследствие уточнения функции  $\langle u \rangle_z$  в области больших пульсаций концентрации. Как и § 3.5, асимптотики решения и собственного значения  $\omega$  ищем в виде рядов

$$g = g^{(0)} + h^{-1}g^{(1)} + h^{-2}g^{(2)} + \dots, \quad (3.77)$$

$$\omega = h^{-1}\Omega_1 + h^{-3}\Omega_3 + \dots$$

Тогда, как это следует из (3.76), асимптотические разложения величин  $V_0$  и  $\mu$  имеют вид

$$V_0 = \frac{1}{2}\Omega_1^2 A h^{-2} + \dots,$$

$$\mu = 1 - \frac{1}{2}\Omega_1^2(3+E)h^{-2} + \dots, \quad (3.78)$$

$$A = A_0 + A_1 h^{-1} + \dots,$$

$$E = E_0 + E_1 h^{-1} + E_2 h^{-2} + \dots$$



Здесь  $A$  и  $E$  — коэффициенты асимметрии и эксцесса соответственно, т.е.

$$A = \int s^3 g ds, \quad E = \int s^4 g ds - 3.$$

При выводе соотношений (3.78) учитывалось, что функция  $g$  должна удовлетворять следующим условиям:

$$\int g ds = \int s^2 g ds = 1, \quad \int s g ds = 0.$$

Подстановка рядов (3.77) и (3.78) в уравнение (3.76) и приравнение нулю коэффициентов при последовательных степенях  $h$  дают рекуррентную систему уравнений для функций  $g^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Уравнения для первых двух из этих функций совпадают с выписанными в § 3.5 уравнениями (3.41) и (3.42), т.е.  $g^{(0)}$  и  $g^{(1)}$  описываются выражениями (3.44). Чтобы получить уравнение для функции  $g^{(2)}$ , надо в правую часть (3.43) добавить член  $\frac{1}{2} \Omega_1^2 (s^3 - 3s) g^{(0)}$ .

Таким образом, уточнение зависимости  $\langle u \rangle_z$  в области больших пульсаций концентрации сказывается на решении, начиная только с третьего члена асимптотического разложения. Функция  $g^{(2)}$  по сравнению с (3.44) имеет дополнительное слагаемое, равное  $\frac{1}{4} \Omega_1^2 s^2 (\frac{1}{2} s^2 - 3) g^{(0)}$ . Теперь ясно, что главный член асимптотики для коэффициента асимметрии по-прежнему описывается формулой (3.45) из § 3.5, т.е.  $A_0 = 0, A_1 = 2(1 - m)$  в (3.78). Выражение для главного члена асимптотики коэффициента эксцесса отличается от (3.45) из-за дополнительного слагаемого в выражении для функции  $g^{(2)}$ , как показывают вычисления, на величину  $\frac{15}{8} \Omega_1^2 h^{-2}$ , т.е.

$$E_0 = E_1 = 0, \quad E_2 = 6(1 - m) + \frac{15}{8} \Omega_1^2. \quad (3.79)$$

В связи с полученным выражением для коэффициента эксцесса необходимо заметить следующее. Как было найдено в § 3.5, при использовании линейной зависимости (3.16) для  $\langle u \rangle_z$  теоретические значения коэффициента эксцесса сильно отличаются от экспериментальных. Не совпадают даже знаки — теория дает  $E < 0$ , а в эксперименте  $E > 0$ . Поэтому обнадеживающим фактом является то обстоятельство, что дополнительный вклад в коэффициент эксцесса, обусловленный уточнением линейной зависимости для  $\langle u \rangle_z$  в области больших пульсаций концентрации, имеет положительный знак. Чтобы определить количественно величину этого вклада, надо знать  $\Omega_1$ , входящую в (3.79).

Значение  $\Omega_1$  находится из рассмотрения равномерной асимптотики решения уравнения (3.74) на всей полуоси  $\xi > 0$ . Забегая несколько вперед, отметим, что одним из результатов исследования этой асимптотики является вывод, что при  $m \geq 1,6$  коэффициенты  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  в асимптотическом ряде (3.77) для функции  $\omega$  принимают весьма большие значения. Так, например,  $\Omega_1 = 5,33, \Omega_3 = 300$  при  $m = 2,6$ . По этой причине равномерная асимптотика, вообще говоря, малопригодна для количественных оценок при  $m \geq 1,6$  и  $h = 4 - 5$ . Это обстоятельство не уменьшает значения равномерной асимптотики как средства исследования качественных особенностей решения. Для получения же количественных результатов в этих случаях необходимо обращаться к численному решению краевой задачи.

Приступим к анализу равномерной асимптотики. При этом, учитывая сделанное замечание, ограничимся изложением главных этапов анализа.

Здесь, как и при рассмотрении неравномерной асимптотики, в коэффициентах уравнения (3.74) можно также положить  $\gamma = 1$ . Разность  $1 - \gamma$  находится с помощью соотношения (3.75), после того как определена асимптотика решения.

Сделаем в (3.74) замену переменных

$$\Pi = f \exp\left(\frac{1}{4m} h^2 \xi^2\right).$$

Уравнения и граничные условия для функции  $\Pi$  имеют вид

$$\Pi'' - h^4 Q \Pi = 0.$$

$$Q = \frac{1}{m} \left( \frac{\xi^2}{4m} - h^{-1} \mu^{-1} V - \frac{1}{2h^2} \right), \quad (3.80)$$

$$V = V_0 + s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2}, \quad s = h(\xi - 1).$$

$$\Pi = 0, \quad \xi = 0, \quad \xi = \infty.$$

В уравнении (3.80) содержится большой параметр, и его решение можно представить в виде асимптотического ряда (см., например, Федорюк [1983]). Далее ищется только главный член этого ряда. Для этой цели достаточно учесть два члена в разложении функции  $Q$ :

$$Q = Q_0 + h^{-2} Q_2,$$

$$Q_0 = \frac{1}{m} \left[ \frac{\xi^2}{4m} - (\xi - 1)d \right], \quad (3.81)$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2m} - \frac{3}{2m} \Omega_1^2 (\xi - 1)d + \frac{1}{m} (\xi - 1)^3 d^3 \Omega_1 \Omega_3,$$

$$d = [1 + \Omega_1^2 (\xi - 1)^2]^{-1/2}.$$

При выводе (3.81) учтены разложения (3.77), (3.78).

Нетрудно видеть, что неотрицательное решение краевой задачи (3.80) при  $h \rightarrow \infty$  существует только в том случае, когда функция  $Q_0$  неотрицательна и касается полуоси  $\xi > 0$  или, другими словами, уравнение (3.80) имеет точку поворота второго порядка. Действительно, если справедливо строгое неравенство  $Q_0 > 0$ ,  $\xi > 0$ , то однородным краевым условиям удовлетворяет лишь тривиальное решение  $\Pi \equiv 0$ . С другой стороны, если имеются области, где  $Q_0 < 0$ , то решение окажется сильно осциллирующей функцией.

Координаты точки поворота  $\xi_n$  и параметр  $\Omega_1$  находятся из уравнений, соответствующих условию касания  $Q_0$  с полуосью  $\xi > 0$ :  $Q_0 = Q_0' = 0$ ,  $\xi = \xi_n$ . Решение этой системы при различных значениях параметра  $m > 1$  показано на рис. 3.14.

Последующая процедура определения главного члена асимптотики решения при наличии точки поворота хорошо известна (см., например, Морс и Фешбах [1953]). Вначале нужно найти внешнее разложение решения. Это разложение является линейной комбинацией двух линейно независимых квазиклассических решений уравнения. Для краткости это разложение здесь не выписано. Оно пригодно вне малой окрестности точки поворота.

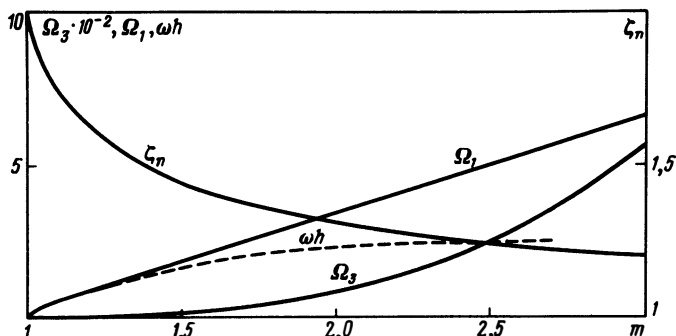


Рис. 3.14. Расчет функции  $\omega$ , фигурирующей в выражении (3.18) для условно осредненной скорости при заданном значении концентрации. Кривые  $\Omega_1$ ,  $\Omega_3$ ,  $\xi_n$  — результат асимптотического решения (3.74). Кривая  $\omega h$  найдена с помощью численного решения (3.74) при  $h = 4,75$

Затем находится внутреннее (локальное) разложение, справедливое в малой окрестности точки поворота. Для точки поворота второго порядка внутреннее разложение выражается через функции параболического цилиндра (Морс и Фешбах [1953]). Анализ показывает, что сшивка двух разложений возможна, если значение  $\Omega_3$  (с точностью до экспоненциально малых членов) равно корню уравнения  $\nu = 0$ , где  $\nu = -\frac{1}{2} - Q_2(\xi_n) [2Q_0''(\xi_n)]^{-1/2}$  — индекс функции параболического цилиндра. Зависимость  $\Omega_3$  от параметра  $m$  показана на рис. 3.14.

Отметим, что внутреннее разложение фактически необходимо только для определения значения  $\Omega_3$ , так как в соответствии с тем, что функция  $g$  незначительно отличается от гауссовской, основное изменение решения при  $h \rightarrow \infty$  происходит в области  $|s| \lesssim 3$ , т.е. в малой окрестности  $|\xi - 1| \lesssim 3/h$  точки  $\xi = 1$ , а расстояние от точки перехода  $\xi_n$  до точки  $\xi = 1$  от  $h$  не зависит. Отсюда заключаем, что все особенности решения можно описать с помощью внешнего разложения в области  $0 \leq \xi < \xi_n$ . Две постоянные в этом разложении можно найти, используя граничное условие  $f = 0$ ,  $\xi = 0$  и условие нормировки (при этом вычисление интеграла производится с помощью метода перевала). Окончательное выражение для главного члена асимптотики решения имеет вид

$$f = C Q_0^{-1/4} [\exp(h^2 J_1 + J_2) - \exp(-h^2 J_1 - J_2)] \exp\left(-\frac{h^2}{4m} \xi^2\right),$$

$$J_1(\xi) = \int_0^\xi Q_0^{1/2} d\xi,$$

$$J_2(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\xi Q_2 Q_0^{-1/2} d\xi, \quad 0 \leq \xi < \xi_n, \quad (3.82)$$

$$C = Q_0^{1/4}(1) \exp\left[-h^2\left(S_1 - \frac{1}{4m}\right) - S_2\right] (2\pi)^{-1/2} h,$$

$$S_1 = J_1(1), \quad S_2 = J_2(1).$$

Второе слагаемое в квадратных скобках в выражении для  $f$  необходимо учитывать только в малой окрестности точки  $\xi = 0$ .

Получим теперь с помощью (3.82) связь между коэффициентом перемежаемости  $\gamma$  и параметром  $h$ . Для этого вычислим производную  $f'$  при  $\xi = 0$  и подставим результат в левую часть соотношения (3.75). Если учесть, что предел правой части (3.75) при  $h \rightarrow \infty$  равен  $h^4 m^{-1} (1 + \Omega_1^2)^{-1/2} (1 - \gamma)$ , то в результате найдем

$$1 - \gamma = \frac{m^{1/4} (1 + \Omega_1^2)^{3/8}}{h \sqrt{\pi}} \exp \left[ -h^2 \left( S_1 - \frac{1}{4m} \right) - S_2 \right]. \quad (3.83)$$

Из формулы (3.83) следует, что разность  $1 - \gamma$  экспоненциально мала. Тем самым предположение, использованное при получении главного члена асимптотического разложения, доказано.

В соответствии с соотношением (3.83) малые значения интенсивности пульсаций концентрации (т.е. большие значения  $h$ ) на оси или плоскости симметрии обусловлены тем обстоятельством, что в этой области роль перемежаемости мала.

В случае, если  $\langle u \rangle_z$  описывается линейной зависимостью (3.16), т.е.  $\Omega_1 = \Omega_3 = 0$ , вычисление дает

$$S_1 = \frac{1}{4m} - \frac{1}{2} + \sqrt{m} - (m - 1) \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{m}} \right),$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{m}} \right).$$

В результате получим формулу (3.46), приведенную в § 3.5.

Обратимся теперь к некоторым из результатов численного интегрирования уравнения (3.74). Они приведены на рис. 3.14 и 3.15. На рис. 3.14 изображена зависимость функции  $\omega$  от параметра  $m$  для случая  $h = 4,75$  (т.е. при  $\sigma/\langle z \rangle = 0,21$  — значения, характерном для струйных течений). При  $m = 2,6$  (след за круговым цилиндром) имеем  $\omega \approx 0,52$ . Это значение можно считать достаточно малым. Действительно, из выражения (3.18) заключаем, что основное отклонение условно осредненной скорости от линейной зависимости (3.16) происходит вне интервала  $|s| \geq 1/\omega \approx 2$ , т.е. практически вне области основного изменения плотности вероятностей.

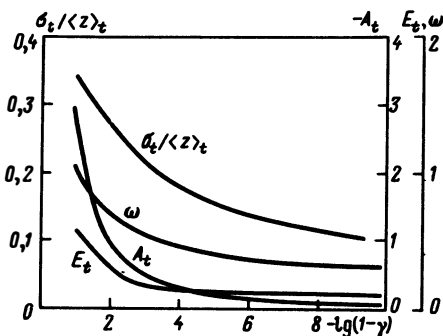


Рис. 3.15. Рассчитанные значения интенсивности пульсаций концентрации, коэффициентов асимметрии и эксцесса в турбулентной жидкости и функции  $\omega$  на плоскости симметрии в следе за круговым цилиндром

С уменьшением параметра  $m$ , как это видно из рис. 3.14, значение  $\omega$  падает и, следовательно, интервал значений концентрации, где для  $\langle u \rangle_z$  применима линейная зависимость, увеличивается. Обсуждение поведения функции  $\omega$  будет продолжено в § 3.7 после численного решения краевой задачи.

На рис. 3.15 представлены рассчитанные зависимости интенсивности пульсаций концентрации  $\sigma_r / \langle z \rangle_r$ , коэффициентов асимметрии  $A_r$  и эксцесса  $E_r$ , а также функции  $\omega$  от коэффициента перемежаемости для случая  $m = 2,6$ , что соответствует течению в следе за круговым цилиндром.

Сравним теоретические и экспериментальные значения коэффициентов асимметрии и эксцесса. Измерения  $A_r$  и  $E_r$  в следе выполнены Ля Рю и Либби [1974]. В этих опытах получены значения  $A_r = -0,4$  и  $E_r = 0,1$ . Интенсивность пульсаций концентрации  $\sigma / \langle z \rangle$  составляла 0,21, т.е.  $h = 4,75$ . Поскольку здесь можно пренебречь различием безусловных и условных средних, то  $\sigma_r / \langle z \rangle_r \approx 0,21$ . Согласно результатам расчета, изображенным на рис. 3.15, при такой интенсивности пульсаций концентрации  $1 - \gamma \approx 10^{-3}$ ,  $A_r = -0,5$ ,  $E_r = 0,13$ . Можно заключить, что рассчитанные значения  $A_r$  и  $E_r$  хорошо согласуются с измеренными Ля Рю и Либби. Напомним здесь, что, как показано в § 3.5, использование линейной зависимости для  $\langle u \rangle_z$  дает для коэффициента эксцесса значение  $E = -0,43$ . Таким образом, уточнение линейной зависимости  $\langle u \rangle_z$  в области больших амплитуд пульсаций концентрации позволяет устранить большое различие между теоретическим и экспериментальными значениями коэффициента эксцесса.

Непосредственное сопоставление рассчитанного и измеренного значений коэффициента перемежаемости произвести не удастся, так как в опытах эта величина пока не измерялась с нужной точностью.

В заключение пункта рассмотрим влияние отклонения функции  $\langle u \rangle_z$  от линейной зависимости (3.16) на положение линии  $\zeta_0(\xi)$ , на которой коэффициент  $A$  при времениподобной координате  $\xi$  в уравнении (3.67) обращается в нуль. Вид этой линии, как установлено в пункте 3, в значительной степени определяет качественные свойства уравнения (3.67). Напомним, что для линейной зависимости (3.16)  $\zeta_0(\xi) = I_2(\xi)$  (см. пункт 3). В рассматриваемом случае уравнение линии  $\zeta_0(\xi)$ , как это видно из выражения для  $A$  в (3.68), можно записать в неявной форме

$$h[V_0 + s(1 + \omega^2 s^2)^{-1/2}] = \mu, \quad s = h \frac{\zeta_0 - \gamma}{\gamma}. \quad (3.84)$$

Найдем асимптотику решения этого уравнения на линии  $\xi = 0$  при  $h \rightarrow \infty$ . Подставим в (3.84) разложения (3.77), (3.78). В результате получим

$$\zeta_0 = 1 + h^{-2} - \frac{1}{2} \Omega_1^2 (3 + A_1) h^{-4} + \dots, \quad \xi = 0, \quad (3.85)$$

$$A_1 = 2(1 - m).$$

Поскольку  $I_2 = 1 + h^{-2}$ , то из (3.85) заключаем, что при  $h \approx 5$  значение  $\zeta_0(0)$  практически совпадает со вторым моментом.

**6. Решение на особой линии  $\xi = \infty$ .** Одно частное решение уравнения (3.67) на особой линии  $\xi = \infty$ , удовлетворяющее предполо-

нию (3.71), с помощью нестроого метода было получено в § 3.5. Функция  $f_\infty(\xi)$ , соответствующая этому решению, имеет вид (3.53).

В этом пункте проведено строгое исследование уравнения (3.67) на линии  $\xi = \infty$ . Такое исследование позволяет, во-первых, выяснить ограничения, при которых справедливо решение, полученное в § 3.5, и, во-вторых, найти другие решения на линии  $\xi = \infty$ . В основе исследования лежит предположение (3.71). Его физическое обоснование содержится в пункте 3 данного параграфа. Полезно рассмотреть указанное предположение и с другой, формальной точки зрения. Согласно ей главный член асимптотического разложения функции  $f(\xi, \xi)$  в окрестности линии  $\xi = \infty$  описывается автомодельной зависимостью, т.е.  $f(\xi, \xi) \rightarrow \xi^{\beta_1} f_\infty(\xi/\xi^{\beta_2})$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — постоянные. Функция  $f$  должна удовлетворять условию нормировки и следствию из определения  $\langle z \rangle_t$ :

$$I_0 = 1, \quad I_1 = 1, \quad I_k = \int_0^\infty f \xi^k d\xi, \quad k = 0, 1.$$

Нетрудно видеть, что это возможно только, если  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ . В результате получаем предположение (3.71).

Приступим к анализу уравнения (3.67) на линии  $\xi = \infty$ . Ясно, что предположение (3.71) выполнено лишь в том случае, когда  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} A \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$  (действительно, если это условие нарушается, то функция  $f$  зависит от  $\xi$  при  $\xi \rightarrow \infty$ ). В этом случае уравнение (3.67) на линии  $\xi = \infty$  приобретает вид

$$f_\infty'' + \alpha_1(\xi) f_\infty' + \alpha_0(\xi) f_\infty = 0, \quad (3.86)$$

$$\alpha_1 = -\lim_{\xi \rightarrow \infty} B, \quad \alpha_0 = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left( C - \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\xi} A \right),$$

штрихом в (3.86) обозначено дифференцирование по  $\xi$ .

Легко установить, что краевая задача  $f_\infty = 0$ ,  $\xi = 0$ ,  $\xi = \infty$  разрешима только тогда, когда  $\alpha_0 \neq 0$ . Действительно, в противном случае из (3.86) следует

$$f_\infty'(\xi) = f_\infty'(0) \exp \left[ \int_0^\xi \alpha_1(t) dt \right],$$

т.е. производная  $f_\infty'$  не меняет знака на полуоси  $\xi > 0$  и тем самым  $f_\infty \neq 0$  при  $\xi = \infty$ .

Отсюда заключаем, что хотя бы одно из слагаемых, фигурирующих в выражении для коэффициента  $\alpha_0$ , должно быть отлично от нуля. Коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  в (3.86) определяются главными членами асимптотических разложений средней концентрации  $Z$ , скалярной диссипации в турбулентной жидкости  $n_t$ , функции  $\Psi$ , функции  $\omega$  и коэффициента перемежаемости  $\gamma$  в окрестности бесконечно удаленной точки  $\xi = \infty$ .

Наиболее просто решается вопрос об асимптотике функции  $\Psi$ . Имеем  $\Psi = \xi$  в следе за круговым цилиндром,  $\Psi \rightarrow \text{const}$  при  $\xi \rightarrow \infty$  — в струях (см., например, Шлихтинг [1960]). Главный член разложения средней концентрации в соответствии с экспериментальными данными представим в следующем, достаточно общем виде:

$$Z \rightarrow Z_0 \exp[-p_1(\xi)], \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (3.87)$$

Предэкспонент  $Z_0$  в этом выражении стремится к нулю или бесконечности

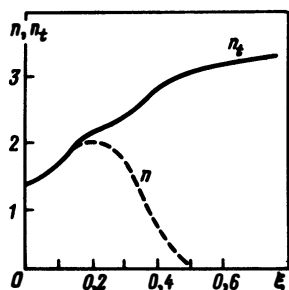


Рис. 3.16. Профиль условно осредненной скалярной диссипации по вполне турбулентной жидкости в следе за круговым цилиндром, вычисленный по данным измерений безусловно осредненной скалярной диссипации Фреймуса и Уберои [1971], и коэффициента перемежаемости — Ля Рю и Либби [1974]. Условия опытов Ля Рю и Либби те же, что и на рис. 1.14. Условия опытов Фреймуса и Уберои:  $x_1/d = 1140$ ,  $Re_d = u_0 d/\nu = 960$ ,  $d = 0,28$  см,  $u_0 = 6,1$  м/с,  $x_{10} = -50d$ ,  $n_t = \langle N \rangle_t (x_1 - x_{10})^2 / u_0 d$ ,  $n = \langle N \rangle (x_1 - x_{10})^2 / u_0 d$ ,  $\langle N \rangle = \gamma \langle N \rangle_t$ ,  $\xi = x_2 / \sqrt{(x_1 - x_{10})d}$

слабее, чем некоторая степень  $\xi$ . Измерения в осесимметричной струе, результаты которых приведены на рис. 1.3, позволяют заключить, что здесь  $p_1(\xi) \sim \xi^2$ . Можно ожидать, что и в других течениях функция  $p_1$  близка к квадратичной.

Определяющее значение в дальнейшем исследовании имеет асимптотика условно осредненной скалярной диссипации в турбулентной жидкости. Зададим эту асимптотику, опираясь на экспериментально установленное свойство слабого изменения условно осредненных величин (см. §§ 1.1, 3.5 и пункт 3 данного параграфа). В соответствии с этим свойством естественно считать, что главный член асимптотики функции  $n_t$  имеет такой же характер, что и предэкспоненциальный множитель  $Z_0$  в асимптотике (3.87) для средней концентрации, т.е.

$$\text{const } \xi^{k_1} < n_t < \text{const } \xi^{k_2}, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (3.88)$$

Здесь  $k_1$  и  $k_2$  — некоторые постоянные, которые могут быть как меньше, так и больше нуля. Принятое предположение не противоречит известным к настоящему времени экспериментальным данным, представленным на рис. 1.7 и 3.16. На рис. 1.7 приведены результаты прямых измерений условно осредненного квадрата производной температуры в следе за круговым цилиндром (Фабрис [1979а, б]), а на рис. 3.16 — профиль скалярной диссипации в следе, найденный косвенным путем с помощью пересчета по формуле  $\langle N \rangle_t = \langle N \rangle / \gamma$  из данных двух экспериментальных работ (измерения  $\langle N \rangle$  проведены Фреймусом и Уберои [1971], измерения  $\gamma$  — Ля Рю и Либби [1974]).

Необходимо, однако, специально подчеркнуть, что предположение (3.88) основано пока на небольшом количестве экспериментальных данных. Поэтому, вообще говоря, нельзя полностью исключить вероятность того, что в ряде случаев асимптотика скалярной диссипации будет описываться

соотношением, отличающимся от (3.88). Соответствующий этим случаям анализ проведен в работах Кузнецова и Сабельникова [1981б] и Сабельникова [1982б].

Условие  $\alpha_0 \neq 0$ , как это видно из соотношения для коэффициента  $A$  в (3.68), выполнено, если

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\xi} \beta \frac{\Psi Z_t^2}{\xi^i n_t} \rightarrow -a, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (3.89)$$

$$\beta = \frac{1+i}{2}, \quad Z_t = \frac{Z}{\gamma}.$$

Здесь  $a$  – некоторая положительная постоянная.

Главный член асимптотики коэффициента перемежаемости находится из (3.89). Если учесть (3.87) и (3.88), то после интегрирования (3.89) получим

$$\gamma \rightarrow \left[ \frac{dp_1}{d\xi} \frac{\Psi\beta}{\xi^i n_t a} \right]^{1/2} Z, \quad \frac{dp_1}{d\xi} > 0. \quad (3.90)$$

Из этой формулы следует, что главный член разложения условно осредненной по турбулентной жидкости концентрации равен

$$Z_t = \frac{Z}{\gamma} \rightarrow \left[ \frac{dp_1}{d\xi} \frac{\beta\Psi}{\xi^i n_t a} \right]^{-1/2}. \quad (3.91)$$

В правую часть (3.91) входят медленно меняющиеся (по предположению) функции. Следовательно, уменьшение условно осредненной концентрации  $Z_t$  с ростом  $\xi$  происходит весьма слабо. Этот результат находится в соответствии с указанным выше свойством слабого отклонения от статистической однородности во вполне турбулентной жидкости. Согласно этому свойству быстрое изменение безусловно осредненных величин полностью определяется коэффициентом перемежаемости.

Отметим, что формула (3.91) и вместе с ней проведенный анализ имеют смысл при некотором ограничении сверху на функцию  $n_t$ . Это ограничение можно получить, если учесть, что должно быть выполнено неравенство  $Z_t < 1$ . Последнее выполняется, если

$$n_t < \frac{\beta\Psi}{\xi^i a} \frac{dp_1}{d\xi}. \quad (3.92)$$

В частности, если  $p_1 \sim \xi^2$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ , то  $n_t < \text{const } \xi^2$  для следа за круговым цилиндром,  $n_t < \text{const } \xi$  для плоской и  $n_t < \text{const}$  для осесимметричной струй. Ограничение (3.92) не является слишком сильным, если принять во внимание исходное допущение (3.88).

Теперь осталось задать главный член асимптотики функции  $\omega$ , входящей в формулу (3.18) для условно осредненной скорости  $\langle u \rangle_z$ . Будем считать, что он описывается следующей зависимостью:

$$\omega^2 \rightarrow \omega_\infty^2 I_2 \gamma. \quad (3.93)$$



Здесь  $\omega_\infty$  — постоянная. Для пояснения (3.93) отметим, что вид главного члена разложения  $\omega$  выбран из условия, что существует конечный предел при  $\xi \rightarrow \infty$  произведения  $\omega^2 s^2$ ,  $s = \frac{z - \langle z \rangle}{\sigma} = h \frac{\xi - \gamma}{\gamma}$ ,  $h^2 = \frac{\langle z \rangle^2}{\sigma^2} = \frac{\gamma}{I_2 - \gamma}$ , фигурирующего в (3.18). Если справедливо (3.93), то  $\omega^2 s^2 \rightarrow \omega_\infty^2 \xi^2$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ .

Подстановка главных членов разложений функций  $\Psi$ ,  $Z$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$  и  $n$ , (3.87), (3.88), (3.90), (3.93) в выражения для коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  в (3.68) дает такой результат:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} B = \lim_{\xi \rightarrow \infty} C = 0,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\xi} A = b \xi (1 + \omega_\infty^2 \xi^2)^{-1/2} - a, \quad (3.94)$$

$$b = \frac{a}{I_2 \mu}, \quad \mu I_2 = \int_0^\infty \xi^2 (1 + \omega_\infty^2 \xi^2)^{-1/2} f d\xi.$$

Отсюда для коэффициентов  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  в уравнении (3.86) получим

$$\alpha_0 = -b \xi (1 + \omega_\infty^2 \xi^2)^{-1/2} + a, \quad \alpha_1 = 0. \quad (3.95)$$

Перед тем как выписать окончательное уравнение для функции  $f_\infty$ , рассмотрим асимптотику коэффициента  $A$  перед производной по времени-подобной координате  $\xi$ . Эта асимптотика позволит установить особый характер линии  $\xi = \infty$ , а также найти предельное значение, к которому стремится уравнение линии, на которой коэффициент  $A$  обращается в нуль. Из (3.94) следует, что главный член асимптотики  $A$  имеет вид

$$\begin{aligned} A &\rightarrow - \left( \frac{dp_1}{d\xi} \right)^{-1} [b \xi (1 + \omega_\infty^2 \xi^2)^{-1/2} - a] = \\ &= Z \left( \frac{dZ}{d\xi} \right)^{-1} [b \xi (1 + \omega_\infty^2 \xi^2)^{-1/2} - a], \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Используя выражение (3.96), получим, что  $f A^{-1} d\xi \sim \ln Z$ . Поскольку  $\ln Z \rightarrow -\infty$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ , то указанный интеграл расходится. Следовательно, особенность на линии  $\xi = \infty$  нельзя устранить с помощью преобразования переменной. Это свойство коэффициента  $A$  было уже затронуто в пункте 3 данного параграфа.

Асимптотика линии  $\xi_0(\xi)$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ , на которой  $A = 0$ , как это видно из (3.96), равна

$$\xi_0^2 \rightarrow \frac{(\mu I_2)^2}{1 - \omega_\infty^2 \mu^2 I_2^2}, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (3.97)$$

Отметим, что это выражение больше нуля, так как из определения  $\mu I_2$

(3.94) вытекает неравенство

$$\mu I_2 = \int_0^{\infty} \zeta^2 (1 + \omega_{\infty}^2 \zeta^2)^{-1/2} f_{\infty} d\zeta < \frac{1}{\omega_{\infty}} \int_0^{\infty} \zeta f_{\infty} d\zeta = \frac{1}{\omega_{\infty}}.$$

На основании (3.85) и (3.97) заключаем, что уточнение зависимости  $\langle u \rangle_z$  в области больших амплитуд пульсаций концентрации не меняет качественно вида линии  $A = 0$ , установленного в пункте 3 при использовании линейной зависимости для  $\langle u \rangle_z$ .

Возвратимся теперь к уравнению (3.86) для  $f_{\infty}$ . Подстановка коэффициентов  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  в это уравнение дает

$$f_{\infty}'' + [a - b\zeta(1 + \omega_{\infty}^2 \zeta^2)^{-1/2}] f_{\infty} = 0, \quad b = \frac{a}{I_2 \mu}, \quad (3.98)$$

$$f_{\infty} = 0, \quad \zeta = 0, \quad \zeta = \infty.$$

Простой анализ показывает, что одно из линейно независимых решений уравнения (3.98) экспоненциально растет при  $\zeta \rightarrow \infty$  и, следовательно, не удовлетворяет граничному условию при  $\zeta = \infty$ . Следовательно, если значение параметра  $\omega_{\infty}$  задано, то решение краевой задачи существует лишь при отдельных значениях постоянной  $a$ . Условию неотрицательности  $f_{\infty}$  можно удовлетворить только при одном из этих значений.

Наиболее быстро функция  $f_{\infty}$  затухает при  $\omega_{\infty} = 0$ . Уравнение для  $f_{\infty}$  в этом случае принимает вид

$$f_{\infty}''' + (a - b\zeta) f_{\infty} = 0. \quad (3.99)$$

Нетрудно проверить, что проанализированное в § 3.5 уравнение (3.51) после преобразования переменных  $b_1 = b/\langle z \rangle_t^3$ ,  $a_1 = a/\langle z \rangle_t^2$ ,  $F = f_{\infty}/\langle z \rangle_t$  переходит в (3.99). Следовательно, решение уравнения (3.99) описывается формулой (3.53). Значение постоянной  $a$  в главном члене разложения коэффициента перемешиваемости (3.90) при  $\omega_{\infty} = 0$  равно  $a = 7,847$ .

Решение краевой задачи (3.98) для случая  $\omega_{\infty} \neq 0$  получено численным методом в работе Сабельникова [1985 б]. Результаты расчетов плотности вероятностей и ряда ее интегральных характеристик при нескольких значениях параметра  $\omega_{\infty}$  приведены на рис. 3.17, 3.18

Из рис. 3.17 видно, что с увеличением  $\omega_{\infty}$  темп падения плотности вероятностей при больших амплитудах пульсаций замедляется. Как следствие, увеличивается интенсивность пульсаций концентрации, асимметрия и эксцесс (см. рис. 3.18). Таким образом, учет влияния крупномасштабного переноса концентрации в зависимости для  $\langle u \rangle_z$  приводит к возрастанию вероятности больших амплитуд пульсаций концентрации.

Вместе с тем надо отметить, что при не слишком больших амплитудах пульсаций концентрации форма плотности вероятностей трансформируется слабо в зависимости от значения параметра  $\omega_{\infty}$  в исследованном диапазоне; очень слабо также меняется и интенсивность пульсаций концентрации. Этот факт и сравнение с экспериментальными данными, проведенное в § 3.5, позволяют заключить, что пока, по-видимому, целесообразно считать, что  $\omega_{\infty} = 0$ .

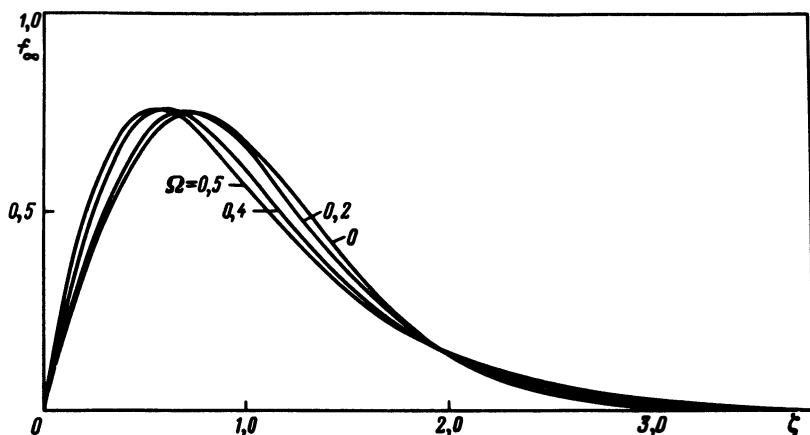


Рис. 3.17. Рассчитанные плотности распределения вероятностей концентрации в турбулентной жидкости на большом расстоянии от оси или плоскости симметрии.  $\Omega = \omega_\infty b^{-1/3}$

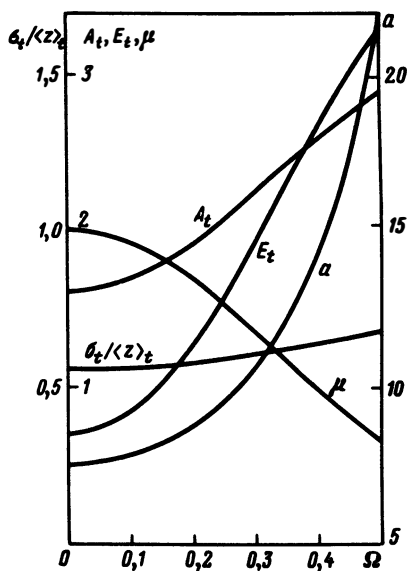


Рис. 3.18. Рассчитанные значения первого собственного значения, интенсивности пульсаций, коэффициентов асимметрии и эксцесса в турбулентной жидкости на большом расстоянии от оси или плоскости симметрии.  $\Omega = \omega_\infty b^{-1/3}$

Важную роль при получении уравнения (3.98) играло условие (3.88). Отсюда можно сделать вывод, что использованный в § 3.5 приближенный метод получения уравнения (3.51) применим только при выполнении этого условия. Строгий анализ решений (3.67) на линии  $\xi = \infty$  позволил также установить физический смысл постоянной  $a$  в уравнении (3.98). Как это видно из (3.90), значение постоянной  $a$  определяет главный член асимптотики коэффициента перемежаемости. Поэтому определение значения  $a$  является необходимым элементом в постановке краевой задачи для уравнения (3.67).

Остановимся еще на одном интересном моменте, вытекающем из сравнения приближенного (см. § 3.5) и строгого способов получения решения на краю турбулентного потока. С точки зрения строгого подхода решение,

описываемое формулой (3.53), справедливо только на линии  $\xi = \infty$ . С другой стороны, приближенный метод, с помощью которого получено то же решение, не содержит в явной форме такого ограничения. Следовательно, можно ожидать, что за исключением области вблизи оси или плоскости симметрии потока, где коэффициент перемежаемости достаточно близок к единице, решение (3.67) весьма незначительно отличается от функции (3.53). Численное решение краевой задачи подтвердит этот вывод (см. § 3.7).

Заметим, наконец, что в условиях применимости приближенного метода не фигурирует предположение об автомодельности. Поэтому функция (3.53) может быть использована в качестве первого приближения для плотности вероятностей во вполне турбулентной жидкости и на краю неавтомодельных турбулентных течений. Сформулированные выводы оправдывают предложенный в § 3.5 приближенный метод определения плотности вероятностей концентрации и коэффициента перемежаемости в турбулентных струях.

### § 3.7. Численное решение краевой задачи

Основное свойство параболического уравнения (3.67), как показано в § 3.6, заключается в том, что оба направления по времениподобной координате  $\xi$  равноправны. Поэтому главное требование к численному методу, предназначенному для решения этого уравнения, состоит в том, чтобы разностная аппроксимация правильно отражала это обстоятельство. Здесь для этой цели применялся достаточно простой конечно-разностный метод, широко используемый для расчета пограничного слоя с локальными зонами обратных токов (Картер [1974], Кляйнберг и Стегер [1974]).

Кратко поясним идею метода. Она заключается в том, что разностная аппроксимация производной по времениподобной координате  $\xi$  изменяется в зависимости от знака коэффициента  $A$ : при  $A > 0$  используются левосторонние разности, а при  $A < 0$  — правосторонние разности (в вычислительной гидродинамике такая разностная аппроксимация обычно называется односторонней или разностями против потока; см. Роуч [1976]). Аналогичным образом в зависимости от знака  $B$  аппроксимировалась и первая производная по переменной  $\zeta$ . Вторая производная по  $\zeta$  аппроксимировалась обычным образом. Из качественных представлений ясно, что описанная конечно-разностная аппроксимация по времениподобной координате  $\xi$  позволяет осуществить достаточно точное соответствие между областями влияния и зависимости дифференциального уравнения (3.67) и разностной схемы. Полученная разностная схема аппроксимирует дифференциальное уравнение (3.67) с первым порядком точности.

В расчетах вместо бесконечной области  $0 \leq \xi < \infty$ ,  $0 \leq \zeta < \infty$  рассматривается прямоугольник  $0 \leq \xi \leq \xi_{\max}$ ,  $0 \leq \zeta \leq \zeta_{\max}$ , т.е. граничные условия при  $\xi = \infty$  и  $\zeta = \infty$  в (3.73) сносились соответственно на линии  $\xi = \xi_{\max}$  и  $\zeta = \zeta_{\max}$ .

Нелинейная система конечно-разностных уравнений решалась методом релаксаций (см., например, Калиткин [1978]). На начальной (нулевой)

итерации плотность вероятностей во всех внутренних узлах разностной сетки  $(\xi_i, \zeta_j)$  задавалась формулой

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \gamma_i Z(0) \Sigma^{-1}(0) (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}s_j^2) + (1 - \gamma_i) f_{\infty}(\zeta_j), \\ s_j &= Z(0) \Sigma^{-1}(0) (\zeta_j - 1), \quad i = 1, \dots, I-1; \quad j = 2, \dots, J-1, \\ \xi_I &= \xi_{\max}, \quad \zeta_J = \zeta_{\max}. \end{aligned}$$

Здесь  $f_{\infty}(\zeta)$  описывается соотношением (3.53), значения  $\gamma, Z$  и  $\Sigma$  на левой границе области интегрирования  $\xi_1 = 0$ , т.е.  $\gamma(0), Z(0)$  и  $\Sigma(0)$ , на начальной итерации брались из экспериментов. Значение коэффициента перемежаемости на правой границе области интегрирования  $\xi_I$ , т.е.  $\gamma_I$ , задавалось асимптотической формулой (3.90). Функция  $\omega$  на начальной итерации считалась равной нулю. Дисперсия и интегралы от функции  $f$ , входящие в величины  $V_0$  и  $\mu$  (3.69), находятся методом трапеций.

Пусть известно распределение  $f_{ij}^{(k)}, \gamma_i^{(k)}$  и  $\omega_i^{(k)}$  на  $k$ -й итерации. Теперь на линиях  $\xi_i = \text{const}$ , начиная с  $i = 1$  и кончая  $i = I - 1$ , с помощью метода линеаризации (см., например, Калиткин [1978]) решается краевая задача на собственные значения для  $\omega_i$ . При переходе на соседнюю линию  $\xi_{i+1} > \xi_i$  используются вновь полученные на  $\xi = \xi_i$  значения  $f^{(k+1)}, \omega^{(k+1)}$ . Значение коэффициента перемежаемости на  $(k + 1)$ -й итерации находится затем из условия нормировки  $I_0 = 1$ . Во всех проведенных расчетах для сходимости процесса использовалась нижняя релаксация с параметром, равным 0,01. Итерации заканчивались, когда значение суммы модулей разностей значений функции  $f$  во всех узлах разностной сетки на проведенной и предыдущей итерации, поделенное на число внутренних узлов разностной сетки (т.е. на  $(I - 1) \cdot (J - 2)$ ), становилось меньше заданного малого числа (равного  $10^{-3}$ ).

Отметим также еще следующие моменты. При численной реализации конечно-разностной схемы условие симметрии (3.73) ставилось в упрощенной форме. Считалось, что на оси или плоскости симметрии течения в нуль обращается лишь первая производная  $f$  по  $\xi$ , т.е. вместо  $\partial^{2l+1} f / \partial \xi^{2l+1} = 0, l = 0, 1, 2, \dots$ , при  $\xi = 0$  полагалось  $\partial f / \partial \xi = 0$ . Для повышения точности численного решения в окрестности линии  $\xi = 0$ , где коэффициент перемежаемости близок к единице, функция  $f(\zeta, \xi)$  представлялась произведением двух функций, одна из которых равнялась  $\exp(-\varphi s^2)$ ,  $s = (z - \langle z \rangle) / \sigma$ . Значение постоянной  $\varphi$  подбирается в процессе расчета из условия слабого изменения второго сомножителя на интервале  $-h \leq z \leq 0$ .

С помощью описанного метода получено численное решение уравнения для дальнего следа за круговым цилиндром, для осесимметричной и плоской затопленных струй, а также для слоя смешения плоскопараллельных потоков. Напомним, что решение последней задачи представляет собой асимптотку решений уравнений (3.58) — (3.60) для струй при  $x \rightarrow 0$ . Уравнения для автомоделльного слоя смешения выписаны в работе Сабельникова [1982в]. Автомоделльной координатой  $\xi$  здесь является отношение  $\xi = y/x$ , а автомоделльная плотность вероятностей описывается выражением

$$F(z, x, y) = \sigma_r^{-1} g(s_r, \xi), \quad s_r = \frac{z - \langle z \rangle_r}{\sigma_r},$$

где  $\sigma_t^2 = \langle z^2 \rangle_t - \langle z \rangle_t^2$  — дисперсия пульсаций концентрации в турбулентной жидкости. В названной работе показано, что уравнение для функции  $g$  вырождается в обыкновенные дифференциальные уравнения на линиях  $\xi = -\infty$  и  $\xi = \infty$ , которые являются особыми, аналогично линиям  $\xi = 0$  (ось или плоскость симметрии) и  $\xi = \infty$  в струях и следах. Функции  $g(s_t, -\infty)$  и  $g(s_t, \infty)$ , как и  $f_\infty(\xi)$  в § 3.5 (см. (3.53)), выражаются через функцию Эйри. Если  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \langle z \rangle = 1$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \langle z \rangle = 0$ , то  $g(s_t, \infty)$  опре-

делена на интервале  $-[I_2(\infty) - 1]^{-1/2} \approx -1,802 \leq s_t < \infty$  и связана с  $f_\infty(\xi)$  следующим соотношением:  $g(s_t, \infty) = [I_2(\infty) - 1]^{1/2} f_\infty(\xi)$ ,  $\xi = 1 + [I_2(\infty) - 1]^{1/2} s_t$ . Функция  $g(s_t, -\infty)$  связана с  $g(s_t, \infty)$  очевидным равенством  $g(s_t, -\infty) = g(-s_t, \infty)$ . Постановка краевой задачи осуществляется так же, как и в течениях с осью или плоскостью симметрии.

На рис. 3.19, 3.20 показаны некоторые из результатов расчетов для следа за круговым цилиндром и слоя смешения двух плоскопараллельных потоков, полученные в статьях Сабельникова [1982б, в]. На этих же рисунках нанесены результаты измерений в следе, выполненных Фреймусом и Уберои [1971], Ля Рю и Либби [1974], и в слое смешения на начальном участке затопленной подогретой плоской струи — Раджагопаланом и Антониа [1980]. Видно, что они весьма удовлетворительно согласуются с вычисленными значениями. В расчетах задавались профили средних скоростей, концентрации и скалярной диссипации, осредненной по турбулентной жидкости. Для этого использовались экспериментальные данные Ля Рю и Либби [1974], Фреймуса и Уберои [1971] (след за цилиндром) и Раджагопалана и Антониа [1980] (слой смешения).

Измерения скалярной диссипации в слое смешения в литературе неизвестны, поэтому функция  $\langle N \rangle_t$  находилась с помощью формулы  $\langle N' \rangle_t = \langle N \rangle / \gamma$ , где  $\langle N \rangle$  описывается посредством эмпирического соотношения  $\langle N \rangle = \chi \sigma^2 \langle \epsilon \rangle / q^2$ ,  $\chi = 2$  (см., например, Бегье, Декейсе и Лондер [1978]). Для пояснения отметим, что это соотношение есть не что иное, как предположение о пропорциональности временного масштаба пульсаций концентрации  $\sigma^2 / \langle N \rangle$  и обычного временного масштаба турбулентности  $q^2 / \langle \epsilon \rangle$ .

Значения дисперсии концентрации  $\sigma^2$  и коэффициента перемежаемости  $\gamma$ , входящих в приведенную формулу для  $\langle N \rangle_t$ , брались из опытов Раджагопалана и Антониа [1980]. Диссипация энергии турбулентности  $\langle \epsilon \rangle$  и дисперсия скорости взяты из опытов Виньянски и Фидлера [1970]\*).

Профиль скалярной диссипации в турбулентной жидкости  $\langle N \rangle_t$  в следе за цилиндром приведен на рис. 3.16. Он получен на основе измерений безусловно осредненной скалярной диссипации  $\langle N \rangle$  Фреймусом и Уберои [1971] и коэффициента перемежаемости  $\gamma$  Ля Рю и Либби [1974] по фор-

\* Отметим, что описанный здесь способ определения скалярной диссипации в слое смешения с привлечением  $\sigma$  из опытов выбран только для упрощения расчетов. При более строгом подходе скалярная диссипация должна также находиться в процессе численного решения по приведенной формуле (при этом  $\langle N \rangle_t$  заново пересчитывается на каждой новой итерации). Хорошее соответствие расчета по упрощенной методике с экспериментальными значениями  $\sigma$  говорит о том, что указанное уточнение не изменит заметно решение.

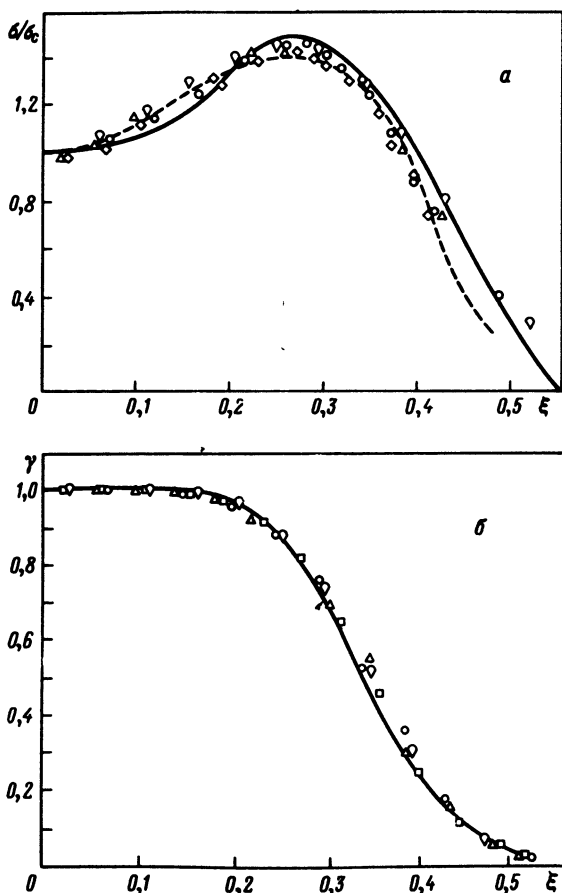


Рис. 3.19. Сравнение результатов расчета среднеквадратической пульсации концентрации и коэффициента перемежаемости в следе за круговым цилиндром с экспериментальными данными Ля Рю и Либби [1974, 1976] и Фреймуса и Уберои [1971]; а) сплошная кривая – расчет  $\sigma/\sigma_c$ ; значки – результаты измерения  $\sigma/\sigma_c$  Ля Рю и Либби [1974] (условия опытов указаны на рис. 1.14); штриховая кривая – результаты измерения  $\sigma/\sigma_c$  Фреймусом и Уберои (условия опытов указаны на рис. 3.16);  $\xi = x_2/\sqrt{(x_1 - x_{10})d}$ ,  $\sigma_c$  – среднеквадратическое значение пульсаций концентрации на плоскости симметрии следа; б) сплошная кривая – расчет  $\gamma$ ; значки – результаты измерения  $\gamma$  Ля Рю и Либби [1976] (условия опытов указаны на рис. 1.14);  $\xi = x_2/\sqrt{(x_1 - x_{10})d}$ . Условия расчетов:  $\xi_I = 1$ ,  $\xi_J = 3$ ,  $I = 51$ ,  $J = 121$

муле  $\langle N \rangle_t = \langle N \rangle / \gamma$ . Заметим, что определенный таким косвенным способом профиль  $\langle N \rangle_t$  аналогичен профилю условно осредненного квадрата производной температуры  $\langle (\partial T / \partial t)^2 \rangle_t$ , прямые измерения которого проведены Фабрисом [1979а, б]. Эти данные приведены на рис. 1.7.

Из расчетов следует, что практически во всей области, где коэффициент перемежаемости близок к единице, плотность вероятностей концентрации

слабо отличается от плотности нормального распределения. Этот вывод согласуется с данными измерений коэффициентов асимметрии и эксцесса, которые в рассматриваемой области получены Ля Рю и Либби [1974], Антониа, Прабху и Стефенсоном [1975], Венкатарамани и Шеврэ [1978], Бэрчем, Брауном, Додсоном и Томасом [1978]. Он подтверждается также прямыми измерениями плотности вероятностей, результаты которых представлены в указанных работах, а также в статьях Кузнецова [1971], Щербины [1982], Голованова и Щербины [1979], Мешкова и Щербины [1979] и ряде других работ.

Результаты расчетов позволяют также сделать вывод о том, что трансформация плотности вероятностей концентрации в предельную зависимость, которая дается формулой (3.53), происходит в довольно узкой области. Так, для следа это происходит в интервале  $0,3 \leq \xi \leq 0,45$  (рис. 3.21). Следовательно, в первом приближении можно выделить две области, в которых качественный вид плотности вероятностей существенно различен. В первой области, где  $\gamma \approx 1$ , плотность вероятностей близка к нормальной, а во второй, где существенна перемежаемость, плотность вероятностей описывается выражением (3.53).

Сформулированный вывод имеет большую практическую ценность, поскольку он оправдывает основные предположения, использованные в § 3.5 при развитии простого приближенного метода описания плотности вероятностей концентрации в турбулентных струях.

Завершая обсуждение численного решения, кратко остановимся на результатах расчета функции  $\omega$ , фигурирующей в выражении (3.18) для

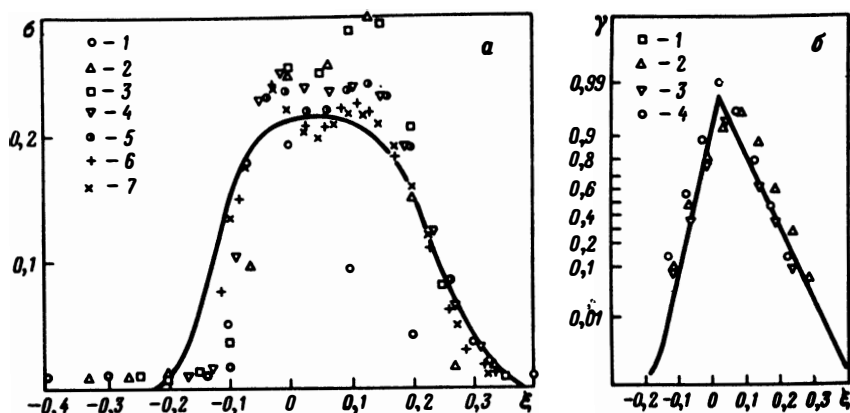


Рис. 3.20. Сравнение результатов расчета среднеквадратической пульсации концентрации и коэффициент перемежаемости в слое смешения с экспериментальными данными Раджагопалана и Антониа [1980], полученными в слое смешения на начальном участке затопленной подогретой плоской струи. Значки — опытные данные. Условия опытов:  $Re_d = u_0 d / \nu = 2,65 \cdot 10^4$ ,  $d = 2,54$  см,  $u_0 = 16,1$  м/с; а) сплошная кривая — расчет  $\sigma$ ; значки — результаты измерения  $\sigma$ ; 1 —  $x/d = 1$ , 2 —  $x/d = 1,5$ , 3 —  $x/d = 2$ , 4 —  $x/d = 2,5$ , 5 —  $x/d = 3$ , 6 —  $x/d = 3,5$ , 7 —  $x/d = 4$ ,  $\xi = y/x$ ; б) сплошная кривая — расчет  $\gamma$ ; значки — результаты измерения  $\gamma$ ; 1 —  $x/d = 1$ , 2 —  $x/d = 2$ , 3 —  $x/d = 3$ , 4 —  $x/d = 4$ ,  $\xi = y/x$ . Условия расчетов:  $\xi_1 = -0,3$ ,  $\xi_2 = 0,4$ ,  $I = 101$ ,  $J = 121$ ; система координат, как на рис. 1:16; масштаб по оси ординат выбран таким образом, чтобы нормальное распределение (функция ошибок) изображалось прямой линией



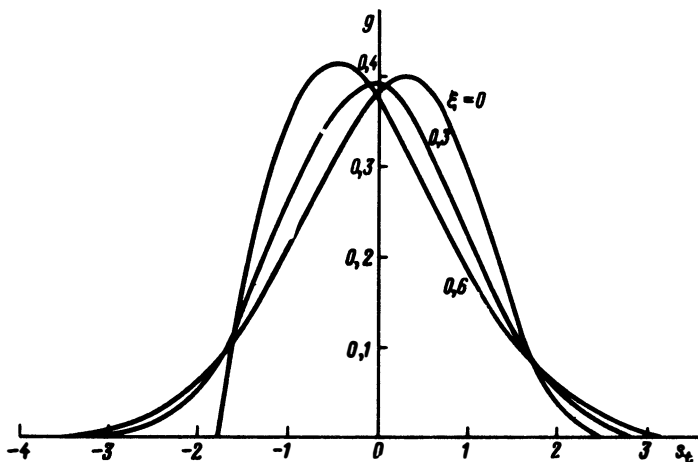


Рис. 3.21. Рассчитанные плотности вероятностей концентрации в турбулентной жидкости на различных расстояниях от плоскости симметрии в автомодельном следе за круговым цилиндром.  $g = \sigma_z P_f = \sigma_z f(\langle z \rangle_f)$ ,  $s_z = (z - \langle z \rangle_f) / \sigma_f$

условно осредненной скорости  $\langle v \rangle_z$ . Характер изменения этой функции оказался одинаковым во всех рассматриваемых течениях. Опишем его на примере течения в следе. Максимальное значение  $\omega$  принимает при  $\xi = 0$ ,  $\omega(0) \approx 0,5$  (в струях и слое смешения максимальные значения  $\omega$  несколько меньше; см. также рис. 3.14). Вблизи плоскости симметрии, где коэффициент перемежаемости близок к единице, функция  $\omega$  медленно падает с увеличением  $\xi$ . Быстрое падение имеет место в области, где происходит перестройка плотности вероятностей к предельному виду (3.53). При больших  $\xi$ , т.е. на краю следа, функция  $\omega$  практически равна нулю.

Ненулевые значения  $\omega$  обуславливают отклонения  $\langle v \rangle_z$  от линейной зависимости (3.16). Из (3.18) видно, что эти отклонения начинают заметно сказываться в диапазоне амплитуд концентрации  $|z - \langle z \rangle| / \sigma \gtrsim 1/\omega$ . Если  $\omega \approx 0,5$ , то линейная зависимость вполне удовлетворительно описывает  $\langle v \rangle_z$  в диапазоне  $|z - \langle z \rangle| / \sigma \lesssim 2$ . Этот диапазон захватывает заметную часть области, в которой происходит основное изменение плотности вероятностей. Таким образом, как и ожидалось (см. § 3.3), отклонение  $\langle v \rangle_z$  от линейной зависимости существенно только при весьма больших амплитудах концентрации. В этом смысле найденные значения  $\omega$  могут считаться достаточно малыми.

### § 3.8. Структура изоскалярных поверхностей в турбулентных потоках

Геометрическая интерпретация плотности вероятностей концентрации, данная в § 1.3, и рассмотренная в § 3.2 гипотеза о статистической независимости полей скалярной диссипации  $N$  и концентрации  $z$  в турбулентной жидкости позволяют выяснить структуру изоскалярных поверхностей в турбулентных потоках. Как было указано во введении к этой главе, ис-

следование указанного вопроса представляет интерес по двум причинам. Во-первых, оно позволит по-новому вывести граничные условия (3.5) и дать им прозрачную физическую интерпретацию. Во-вторых, в результате такого исследования появляется дополнительный взгляд на перемежаемость. Предварительное обсуждение этих вопросов содержалось в конце § 3.1.

Для простоты рассуждений сначала ограничимся случаем статистически однородного поля концентрации, а затем дадим обобщение полученных результатов на неоднородный случай.

**1. Изоскалярные поверхности, расположенные внутри турбулентной жидкости.** Рассмотрим вначале изоскалярные поверхности, расположенные внутри турбулентной жидкости, т.е.  $z \neq 0$  и  $z \neq 1$ . Для краткости эти изоскалярные поверхности далее называются внутренними.

Основной интерес будут представлять следующие две характеристики – средняя площадь  $\langle S_z \rangle$  изоскалярной поверхности  $z(\mathbf{x}, t) = \text{const}$  и среднее расстояние  $d\langle h_z \rangle$  между двумя близкими изоскалярными поверхностями  $z = \text{const}$  и  $z + dz = \text{const}$ . Предполагая статистическую независимость концентрации и модуля градиента концентрации, из формулы (1.26) получим

$$\gamma P_t(z) = \lim_{V \rightarrow \infty} \langle S_z \rangle V^{-1} \left\langle \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_t, \quad 0 < z < 1. \quad (3.100)$$

Легко видеть, что выражение для  $d\langle h_z \rangle$  при этом же предположении имеет следующий вид:

$$d\langle h_z \rangle = dz \left\langle \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_t. \quad (3.101)$$

В соотношениях (3.100) и (3.101), как и в § 1.3,  $n$  – нормаль к изоскалярной поверхности  $z = \text{const}$ , а  $V$  – объем, внутри которого расположена рассматриваемая изоскалярная поверхность.

Найдем зависимость площади  $\langle S_z \rangle$  и расстояния  $d\langle h_z \rangle$  от числа Рейнольдса. С этой целью пренебрежем в (3.100) и (3.101) пульсациями скалярной диссипации. Это вполне оправдано, так как учет этих пульсаций при определении моментов не слишком высокого порядка приводит лишь к малым поправкам (см., например, Монин и Яглом [1967]). Тогда можно записать  $\left\langle \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_t \sim \sqrt{\frac{D}{\langle N \rangle_t}}$  ( $D$  – коэффициент молекулярной диффузии), и, следовательно, из выражений (3.100), (3.101) находим

$$\begin{aligned} \frac{\langle S_z \rangle L}{V} &\sim \gamma P_t(z) L \sqrt{\frac{\langle N \rangle_t}{D}} = \gamma P_t \sqrt{\frac{\langle N \rangle_t L}{q}} \text{Re}^{1/2}, \\ \frac{d\langle h_z \rangle}{L} &\sim \frac{1}{L} \sqrt{\frac{D}{\langle N \rangle_t}} dz = dz \sqrt{\frac{q}{\langle N \rangle_t L}} \text{Re}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Здесь по-прежнему  $L$  – интегральный масштаб турбулентности,  $q$  – среднеквадратическое значение пульсационной скорости. Поскольку функции

$\langle N \rangle_t$ ,  $\gamma$  и  $P_t(z)$  от числа Рейнольдса не зависят (см. главу 1), то из (3.102) получим следующую оценку для внутренних изоскалярных поверхностей:

$$\frac{\langle S_z \rangle L}{V} \sim \text{Re}^{1/2}, \quad \frac{d\langle h_z \rangle}{L} \sim \text{Re}^{-1/2}, \quad 0 < z < 1. \quad (3.103)$$

Здесь предполагается, что  $P_t(z) \neq 0$ ,  $0 < z < 1$ .

Соотношения (3.103) показывают, что с увеличением числа Рейнольдса средняя площадь произвольной внутренней изоскалярной поверхности  $\langle S_z \rangle$  ( $0 < z < 1$ ) неограниченно растет, а среднее расстояние  $d\langle h_z \rangle$  между двумя близкими внутренними изоскалярными поверхностями неограниченно уменьшается. Подчеркнем, что оценка площади в (3.103) неприменима для предельных изоскалярных поверхностей  $z = 0$  и  $z = 1$ , поскольку из (3.102), в силу граничных условий (3.5), формально следует  $\langle S_z \rangle = 0$ . Конечно, равенство нулю здесь надо понимать в том смысле, что рост площади предельных изоскалярных поверхностей при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  происходит слабее, чем по закону  $\sqrt{\text{Re}}$  (см. также § 3.3). Чтобы найти количественную оценку площади этих поверхностей, необходимо привлечь более тонкие соображения. Они рассмотрены в следующем пункте данного параграфа.

Интересно сравнить с формулами (3.103) известные результаты Бэтчелора [1952] и Бэтчелора и Таунсенда [1956], полученные в предположении  $D = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\langle S_z \rangle L}{V} &\sim \exp\left(\frac{tq}{L} \sqrt{\text{Re}}\right), \\ \frac{d\langle h_z \rangle}{L} &\sim \exp\left(-\frac{tq}{L} \sqrt{\text{Re}}\right). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Из формул (3.103), (3.104) видно, что в обоих случаях влияние числа Рейнольдса качественно одинаково. Однако при  $D = 0$  это влияние выражено существенно сильнее, чем при  $D \neq 0$ . Объяснение этого различия основано на следующих соображениях. При  $D = 0$  изоскалярная поверхность состоит из одних и тех же жидких частиц. Если же  $D \neq 0$ , то частицы, принадлежащие изоскалярной поверхности, гибнут, т.е. молекулярная диффузия сглаживает складки, возникающие на такой поверхности.

Соотношения (3.100) и (3.101) совместно с предположением  $\left\langle \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right|^{-1} \right\rangle_t \sim \sqrt{D/\langle N \rangle_t}$  позволяют также установить изменение  $\langle S_z \rangle$  и  $d\langle h_z \rangle$  во времени, если плотность вероятностей концентрации  $P_t(z, t)$  известна. Приведем соответствующие формулы для двух предельных случаев, проанализированных в § 3.4. На начальном этапе вырождения из соотношений (3.32), (3.102) и соотношения (3.31) для скалярной диссипации  $\langle N \rangle_t = a/t$ ,  $a = 1/\pi^2$ , получим

$$\frac{\langle S_z \rangle}{V} \sim \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{t}{D}}, \quad d\langle h_z \rangle \sim \sqrt{Dt} dz. \quad (3.105)$$

Напомним, что здесь  $t_0$  — масштаб времени, определяемый крупными вихрями в слоях смешения на поздней стадии развития процесса.

На заключительном этапе вырождения пульсаций концентрации (не путать с заключительным этапом вырождения турбулентности; см. замечание в § 3.4), в силу (3.27), справедливы соотношения

$$\frac{\langle S_z \rangle}{V} \sim \frac{1}{\sigma} \exp \left[ -\frac{(z - \langle z \rangle)^2}{2\sigma^2} \right] \left( \frac{\langle N \rangle_t}{D} \right)^{1/2},$$

$$d\langle h_z \rangle \sim \sqrt{\frac{D}{\langle N \rangle_t}}. \quad (3.106)$$

Из соотношений (3.105) и (3.106) видно, что среднее расстояние между изоскалярными поверхностями монотонно возрастает. В то же время при  $D = 0$ , согласно выражению в (3.104), это расстояние монотонно убывает. При  $D \neq 0$  на начальном этапе вырождения средняя площадь любой изоскалярной поверхности возрастает. На конечном этапе средние площади всех изоскалярных поверхностей, за исключением поверхности  $z = \langle z \rangle$ , уменьшаются. Средняя площадь поверхности  $z = \langle z \rangle$  всегда со временем увеличивается. При  $D = 0$ , как это следует из (3.104),  $\langle S_z \rangle$  всегда возрастает. Заметим, что формулы (3.104) приближенно справедливы и при  $D \neq 0$  до тех пор, пока эффекты молекулярной диффузии не начнут играть заметной роли, и уже нельзя будет пренебречь процессом гибели отдельных жидких частиц на изоскалярной поверхности.

**2. Предельные изоскалярные поверхности.** Остановимся теперь на оценке средних площадей  $\langle S_0 \rangle$  и  $\langle S_1 \rangle$  предельных изоскалярных поверхностей  $z = 0$  и  $z = 1$ . Необходимо отметить, что формальное определение указанных изоскалярных поверхностей представляет известные трудности. Здесь под поверхностями  $S_0$  и  $S_1$  будут пониматься те поверхности, к которым при  $Re \rightarrow \infty$  стремятся соответственно изоскалярные поверхности  $z_0 = \text{const } z_\nu = \text{const } \sigma Re^{-1/4}$  и  $z_1 = 1 - \text{const } \sigma Re^{-1/4}$ . Такое определение вполне естественно с точки зрения анализа, проведенного в § 1.3, где показано, что в фазовом пространстве эффекты, обусловленные молекулярной диффузией, существенны в узких областях, расположенных вблизи границ фазового пространства  $z = 0$  и  $z = 1$ , а характерный размер этих областей порядка  $\sigma Re^{-1/4} = z_\nu$  (см. формулу (1.36)).

Поскольку обмен между турбулентной и нетурбулентной жидкостями носит односторонний характер (напомним, что жидкие частицы не могут выходить из области завихренного течения, т.е. среда всегда втекает в турбулентную жидкость), то нормальная компонента скорости среды относительно изоскалярных поверхностей  $z = z_0$  и  $z = z_1$  имеет вполне определенный знак. Это обстоятельство резко отличает изоскалярные поверхности  $z = z_0$  и  $z = z_1$  от внутренних изоскалярных поверхностей, расположенных в турбулентной жидкости.

Зависимость  $\langle S_0 \rangle$  и  $\langle S_1 \rangle$  от числа Рейнольдса можно установить с помощью соотношения (2.17), описывающего скорость изменения объема, заключенного между изоскалярными поверхностями. Для этого проинтегрируем (2.17) по  $z$  от некоторого варьируемого в дальнейшем уровня  $z$  до  $\infty$ . Имеем  $dV_z/dt = \int vndS_z$ , где  $V_z$  — объем, в котором concentra-

ция больше или равна  $z$ ,  $n = \nabla z / |\nabla z|$ . Это соотношение можно представить в виде

$$\frac{dV_z}{dt} = v_\Sigma S_z, \quad v_\Sigma = \frac{1}{S_z} \int v n dS_z, \quad (3.107)$$

где  $v_\Sigma$  — осредненное значение нормальной компоненты скорости движения поверхности  $z = \text{const}$  относительно среды (осреднение производится по поверхности  $S_z$ ).

Оценим сначала амплитуду пульсаций скорости движения поверхности  $z = \text{const}$  относительно среды. Для этого обратимся к уравнению (2.18). Как видно из соотношения (1.38), входящие в (2.18) величины  $\nabla z$  и  $\Delta z$  определяются мелкомасштабными пульсациями. Поэтому амплитуды пульсаций рассматриваемых величин можно найти из теории локально однородной турбулентности. Тогда, считая, что  $\nu \sim D$ , и пренебрегая пульсациями скалярной диссипации и диссипации энергии, получаем  $|\nabla z| \sim \sim z_\nu / \eta$ ,  $|\Delta z| \sim z_\nu / \eta^2$ , где  $\eta$  — колмогоровский масштаб. Используя эти оценки, из (2.18) заключаем, что

$$|v_n| \sim [(\epsilon)\nu]^{1/4} \sim q \text{Re}^{-1/4}, \quad v_n = \nu n. \quad (3.108)$$

Приведенное соотношение дает оценку амплитуды пульсаций скорости любой изоскалярной поверхности относительно среды и ничего не говорит о знаке этой скорости.

Из общих соображений можно предположить, что для внутренних изоскалярных поверхностей знак этой скорости случайно мняется. Поэтому величина  $v_\Sigma$ , входящая в (3.107), меньше, чем  $q \text{Re}^{-1/4}$ . Полученные выше результаты указывают на то, что скорость  $v_\Sigma$  даже много меньше, чем  $q \text{Re}^{-1/4}$ . В самом деле, поскольку распределение вероятностей не зависит от числа Рейнольдса, а  $\langle S_z \rangle \sim \text{Re}^{1/2}$  при  $z \neq 0$  или  $z \neq 1$ , то из (3.107) вытекает, что  $v_\Sigma \sim q \text{Re}^{-1/2}$ , т.е. большие положительные значения  $v_n$  компенсируются большими отрицательными значениями.

Предельные изоскалярные поверхности ведут себя отличным от рассмотренного образом. Действительно, поскольку траектории частиц не могут выходить за границы турбулентной жидкости, то знак скорости движения таких поверхностей относительно среды всегда один и тот же. По этой причине формула (3.108) пригодна для оценки величины  $v_\Sigma$ . Тогда из (3.107) и (3.108) получаем

$$\frac{\langle S_z \rangle L}{V} \sim \text{Re}^{1/4}, \quad z = 0, \quad z = 1. \quad (3.109)$$

Обобщение полученных выше результатов на случай неоднородной турбулентности очевидно. Для этого необходимо только в основных соотношениях произвести замену  $\langle S_z \rangle \rightarrow d\langle S_z \rangle$  и  $V \rightarrow dV$ . Тем самым характер изменения величин  $d\langle S_z \rangle$  и  $d\langle h_z \rangle$  при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  остается прежним.

**3. Связь структуры изоскалярных поверхностей с граничными условиями и перемежаемостью.** Из формул (3.100) и (3.109) вытекает, что

$$P_f = 0, \quad z = 0, \quad z = 1, \quad \text{Re} \rightarrow \infty,$$

т.е. имеем граничные условия (3.5), полученные в § 3.1 из уравнения

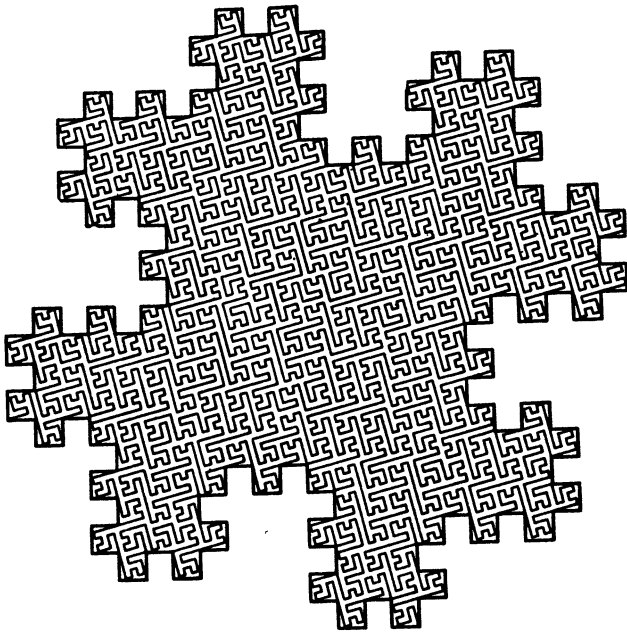


Рис. 3.22. Комбинация из двух многоугольников с очень большим числом сторон (рисунок заимствован из статьи Мандельброта [1977])

для плотности вероятностей концентрации (2.15) с помощью формального математического приема. Приведенный здесь вывод показывает, что эти граничные условия выполнены при конечных числах Рейнольдса с точностью  $Re^{-1/4}$ .

Значение формулы (3.109) заключается не только (точнее, не столько) в том, что она позволяет дать другой способ вывода граничных условий. Главная ее ценность состоит в придании ясного физического смысла этим граничным условиям.

Кроме того, формулы (3.103) и (3.109) дают возможность провести определенную аналогию между предельными и внутренними изоскалярными поверхностями, с одной стороны, и внешней и внутренней перемежаемостью — с другой (см. конец § 3.1). Действительно, в соответствии с (3.103) и (3.109) площадь и тем самым степень искривленности предельных изоскалярных поверхностей существенно меньше, чем промежуточных. Следовательно, если внешней перемежаемости поставить в соответ-

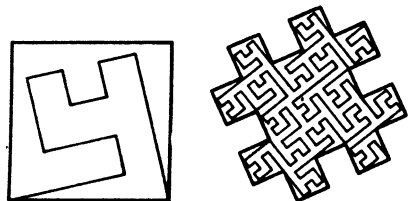


Рис. 3.23. Начальная комбинация (слева) и первый шаг в процедуре (справа), приводящей к картине на рис. 3.22 (рисунок заимствован из статьи Мандельброта [1977])

ствии колебания предельных изоскалярных поверхностей, а внутренней перемежаемости – колебания промежуточных изоскалярных поверхностей, то получится модель перемежаемости, качественно близкая к образу губки, предложенному в § 1.1.

Описанная модель турбулентной жидкости проясняет и смысл процедуры осреднения (рассмотренной в § 1.1) как способа определения границ турбулентной жидкости и выделения внешней перемежаемости. Максимальная гладкость указанной границы и степень искривленности предельных изоскалярных поверхностей тесно взаимосвязаны между собой.

Интересный математический пример, с помощью которого можно проиллюстрировать описанную физическую картину структуры изоскалярных поверхностей в турбулентных потоках при больших числах Рейнольдса, содержится в работе Мандельброта [1977]. Кратко остановимся на обсуждении этого примера. На рис. 3.22, заимствованном из работы Мандельброта, изображена комбинация из двух многоугольников (полигонов) с очень большим числом сторон. Эта комбинация представляет собой некоторый промежуточный шаг в бесконечной процедуре, когда один из полигонов интенсивно искривляется вокруг себя (аналогично тому, как это делается при построении кривой, заполняющей плоскость), а второй окаймляет первый. Такие полигоны можно рассматривать как некоторые образы изоскалярных поверхностей. Один из полигонов (внешний) соответствует границе турбулентной жидкости, внутренний – некоторой изоскалярной поверхности, расположенной в турбулентной жидкости. Искривления полигонов соответствуют гидродинамическим деформациям. Начальная комбинация и первый шаг этой конструкции изображены на рис. 3.23 (также заимствованном из работы Мандельброта). Дальнейшие подробности построения описаны в рассматриваемой работе. Поскольку на каждом шаге конструкции периметры обоих полигонов умножаются на число, большее единицы, то длины соответствующих предельных кривых равны бесконечности. Но оказывается, что степень заполнения плоскости первым многоугольником больше, чем степень изогнутости второго. Вычисления, проведенные Мандельбротом, дают количественную характеристику этого утверждения. Обе предельные кривые являются фракталами, полученными с помощью бесконечного числа преобразований подобия (см. § 1.1). Размерность Хаусдорфа – Безиковича первой кривой равна  $d = 2$ , второй  $d \approx 1,37$ . Рассмотренный пример, естественно, носит частный характер.

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Изучение характеристик мелкомасштабных турбулентных движений представляет значительный интерес по трем причинам. Во-первых, движение мелких вихрей является наиболее простым типом турбулентных движений, и, следовательно, его описание встречает наименьшие трудности. Вместе с тем закономерности, установленные при исследовании мелкомасштабной турбулентности, важны для понимания структуры произвольного турбулентного потока. Во-вторых, изучение характеристик мелкомасштабных флуктуаций может оказаться полезным при создании так называемых подсеточных моделей турбулентности. В этом подходе крупномасштабные движения описываются уравнениями, сходными с уравнениями Навье – Стокса, а мелкомасштабные – характеризуются турбулентной вязкостью, зависящей от энергии и масштаба мелких вихрей. В-третьих, как отмечалось во введении, понимание структуры мелкомасштабных движений важно при изучении химических реакций в турбулентных потоках. Например, при горении химические превращения происходят в очень тонких зонах и, следовательно, структура таких зон в первую очередь определяется мелкомасштабными пульсациями.

Напомним основные идеи теории мелкомасштабной турбулентности. Первый шаг в построении этой теории принадлежит Ричардсону [1922, 1926], в работах которого сформулированы качественные представления о каскадном характере передачи энергии по спектру турбулентности, т.е. о том, что мелкие вихри получают энергию в результате последовательного дробления крупных вихрей. Количественное описание этого процесса дано Колмогоровым [1941] и Обуховым [1941]. Оно основано на использовании структурных функций и их спектров, т.е. величин вида

$$D_{ij}(r) = \langle [u_i(x) - u_i(x+r)] [u_j(x) - u_j(x+r)] \rangle,$$

$$E_{ij}(\vec{k}) = \int D_{ij} \exp(i\vec{k}r) d^3r$$

( $\vec{k}$  – волновое число). Очевидно, что характеристики крупномасштабных движений слабо меняются на расстояниях порядка  $r$ , если  $r$  достаточно мало по сравнению с интегральным масштабом турбулентности. Поэтому разность скоростей в двух близко расположенных точках наиболее подходит для описания мелкомасштабных флуктуаций. Следовательно, изучение структурных функций и их спектров представляет наибольший интерес.

Колмогоровым и Обуховым предполагалось, что при очень большом числе Рейнольдса можно выбрать столь малое значение  $r$ , что цепочка



последовательных дроблений крупных вихрей, приводящая к появлению вихрей с размером  $r$ , окажется очень длинной. Поэтому параметры, описывающие мелкомасштабные флуктуации, достаточно слабо зависят от структуры крупномасштабной турбулентности, в силу чего они должны быть статистически однородны и изотропны. Ими предполагалось также, что одной из важнейших величин, характеризующих последовательное дробление вихрей, является средняя скорость передачи энергии по спектру турбулентности. В равновесных условиях эта скорость равна диссипации энергии  $\langle \epsilon \rangle$ . Другой важной величиной, определяющей структуру мелкомасштабной турбулентности, является коэффициент кинематической вязкости  $\nu$ . Поэтому из соображений размерности и статистической изотропности вытекают следующие формулы:

$$D_{ij} = (\langle \epsilon \rangle r)^{2/3} \left[ f \left( \frac{r}{\eta} \right) \frac{r_i r_j}{r^2} + g \left( \frac{r}{\eta} \right) \delta_{ij} \right], \quad \eta = \frac{\nu^{3/4}}{\langle \epsilon \rangle^{1/4}},$$

где  $\eta$  — так называемый колмогоровский масштаб длины, который характеризует влияние вязких эффектов на структуру мелкомасштабной турбулентности, а  $f$  и  $g$  — произвольные функции одного аргумента  $r/\eta$ . Основываясь на известном принципе автомодельности турбулентных течений по числу Рейнольдса, естественно предположить, что при  $L \gg r \gg \eta \sim L \text{Re}^{-3/4}$ , т.е. в так называемом инерционном интервале, структурная функция не зависит от вязкости. Следовательно,  $f = \text{const}$ ,  $g = \text{const}$  при  $r/\eta \gg 1$ . Отсюда, в частности, была получена формула

$$D_{11} = C (\langle \epsilon \rangle r)^{2/3},$$

где  $C$  — некоторая постоянная, часто называемая постоянной Колмогорова.

Обобщение высказанных соображений на случай структурных функций произвольного порядка не составляет труда. Например, можно получить соотношение

$$\langle v^n \rangle \sim (\langle \epsilon \rangle r)^{n/3}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}).$$

Следующий шаг в развитии теории мелкомасштабной турбулентности сделал Ландау (см. Ландау и Лифшиц [1954]), который заметил, что диссипация энергии распределена в турбулентном потоке случайным образом. Поэтому можно дать оценку  $v^n \sim (\epsilon r)^{n/3}$ , осредняя которую, получим  $\langle v^n \rangle \sim \langle \epsilon^{n/3} \rangle r^{n/3}$ .

Анализ, проведенный в книге Монина и Яглома [1967], показал, что сделанное уточнение несущественно, если распределение вероятностей диссипации не обладает некоторыми аномальными особенностями. Эксперименты, направленные на выяснение этого вопроса, показали, что такие особенности действительно есть (Бэтчелор и Таунсенд [1949], Гурвич и Зубковский [1963], Куо и Корсин [1971], Вингаард и Пао [1975], Гибсон и Масейо [1975], Холмянский [1970, 1972], Шампань, Пао и Виньянски [1976] и др.), на что указывалось в § 1.1. Эти особенности обусловлены внутренней перемежаемостью турбулентных течений, уже обсуждавшейся в главе 1.

Поэтому сформулированные выше представления были уточнены в работах Колмогорова [1962а, б], Обухова [1962]. Уточнения основаны на рассмотрении диссипации энергии  $\epsilon_r$ , осредненной по некоторой области (например, шару) с характерным размером  $r$ . В рассматриваемых работах

высказан ряд соображений, свидетельствующих о том, что случайная величина  $\epsilon_r$  распределена по логарифмически нормальному закону. Этот вывод позволяет вычислить величину  $\langle \epsilon^{n/3} \rangle$  и тем самым найти структурные функции вида  $\langle v^n \rangle$ . Логарифмически нормальный характер распределения вероятностей диссипации энергии вытекает также из гипотезы подобия, выдвинутой Ягломом [1966], Гурвичем и Ягломом [1967]. В рассматриваемом случае имеем  $\langle \epsilon_r^n \rangle \approx \langle \epsilon \rangle^n (r/L)^{-\mu n(n-1)/2}$ , где  $\mu$  — некоторая постоянная. Отсюда вытекает, что зависимость структурных функций типа  $\langle v^n \rangle$  от расстояния между точками, в особенности структурных функций высокого порядка ( $n \gg 1$ ), отличается от зависимости, предсказываемой неутонченной теорией локально однородной турбулентности.

Ограниченный объем книги не позволяет провести детальный анализ всех уточнений теории мелкомасштабной турбулентности. Поэтому укажем лишь основные из полученных результатов. 1) В рамках всех теорий уточнения приводят к малым поправкам к закону "двух третей", т.е. к формуле  $D_{11} = C(\langle \epsilon \rangle r)^{2/3}$ . Этот закон в настоящее время хорошо подтвержден экспериментально в самых разнообразных турбулентных течениях (см., например, обзор литературы, приведенный Мониним и Ягломом [1967]). 2) Уточнения оказываются существенными лишь при рассмотрении структурных функций высокого порядка. В частности, во всех предложенных схемах коэффициент эксцесса пульсаций диссипации стремится к бесконечности при неограниченном увеличении числа Рейнольдса (Яглом [1966], Новиков и Стюарт [1964], Новиков [1971] и др.). Этот вывод подтверждается экспериментально (Гибсон и Масейо [1975], Шампань, Пао и Виньянски [1976] и др.) и обычно объясняется внутренней перемежаемостью турбулентных течений. 3) Хотя экспериментальные данные и свидетельствуют о том, что распределение вероятностей диссипации энергии близко к логнормальному (Гурвич и Зубковский [1963], Чен [1971], Гибсон и Масейо [1975] и др.), в ряде работ справедливость этого закона подвергнута сомнению (Новиков [1971], Крейкнан [1974], Мандельброт [1974, 1975], Гибсон и Масейо [1975]).

Проведенный ниже анализ основан на идеях теории локально однородной турбулентности. Главное внимание уделено анализу тех поправок к этой теории, которые обусловлены перемежаемостью. Рассматриваемое явление понимается в смысле определения, принятого в главе 1, т.е. анализируется внешняя перемежаемость. Введенное предположение основано на результатах исследования главы 3, в которой установлено, что коэффициент перемежаемости  $\gamma$  меньше единицы во всех областях турбулентных течений. Численные расчеты, проведенные в главе 3, показали, что в струях и следах существуют протяженные области, в которых коэффициент перемежаемости настолько мало отличается от единицы, что эти различия невозможно зафиксировать при современном уровне измерительной аппаратуры. Следовательно, такой подход не противоречит известным экспериментальным данным, из которых следует, что в струях, следах, пограничных слоях и т.д. существуют области, в которых, казалось бы,  $\gamma = 1$ . Поэтому представляется, что рассматриваемое явление необходимо учитывать и при анализе локальной структуры турбулентности.

Как указывалось в главе 1, в нетурбулентной жидкости отсутствует каскадный перенос энергии по спектру турбулентности. Отсюда ясно, что

теория Колмогорова [1941] и все ее уточнения, рассмотренные выше, несправедливы при описании явлений в нетурбулентной жидкости. Поэтому сделанные ниже предположения формулируются только для турбулентной жидкости.

Одно из основных предположений исходит из сформулированной Колмогоровым [1962а, б] гипотезы о том, что в инерционном интервале распределение вероятностей величины

$$b_k = \frac{u_k(x) - u_k(x+r)}{u_k(x) - u_k(x+R)}$$

(по  $k$  не суммируется) при  $R \gg r$  зависит лишь от  $r/R$ . Эту гипотезу надо лишь немного уточнить, поскольку  $b_k$  определено так, что не является тензорной величиной.

Для решения проблемы привлекается выведенное в главе 2 уравнение для плотности распределения вероятностей разности скоростей в двух точках, принадлежащих инерционному интервалу. Это уравнение анализируется на основе принятой гипотезы. Основная информация о его решениях получена при анализе слагаемого, описывающего пульсации давления. Установлено, что это слагаемое приводит к появлению особенностей в распределении вероятностей. Выдвинут ряд соображений, указывающих на то, что эти особенности обусловлены перемежаемостью.

Основные результаты, изложенные ниже, опубликованы в работах Кузнецова [1976а, 1977в] и Кузнецова и Сабельникова [1981а].

#### § 4.1. Гипотеза подобия

Чтобы сформулировать основную гипотезу и получить ее главные следствия, рассмотрим точки 1 – 5 с координатами  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}$ , находящиеся в турбулентной жидкости. Пусть  $r = x^{(2)} - x^{(1)}, R = x^{(3)} - x^{(1)}, S = x^{(4)} - x^{(1)}, L = x^{(5)} - x^{(1)}, v = u(x^{(2)}) - u(x^{(1)}), V = u(x^{(3)}) - u(x^{(1)}), U = u(x^{(4)}) - u(x^{(1)}), w = u(x^{(5)}) - u(x^{(1)})$ . Здесь все скорости рассматриваются в один и тот же момент времени. Точки 1 и 5 находятся на расстоянии порядка интегрального масштаба турбулентности, т.е.  $L \sim (\langle u^2 \rangle)^{3/2} / \langle \epsilon \rangle$ , а разность скоростей в них  $w$  порядка пульсационной скорости энергосодержащих вихрей. Точки 1 – 4 расположены на расстоянии, принадлежащем инерционному интервалу спектра, т.е.  $\eta \ll r \ll L, \eta \ll R \ll L, \eta \ll S \ll L$ , где  $\eta = \nu^{3/4} \langle \epsilon \rangle^{-1/4}$ . Пусть также  $P_{rr}(v, r | V, R)$  – условное распределение плотности вероятностей разности скоростей в точках 1 и 2 при условии, что эти точки находятся в турбулентной жидкости, а разность скоростей в точках 1 и 3, также находящихся в турбулентной жидкости, равна  $V$ .

Сформулируем основную гипотезу подобия, а именно предположим, что при  $r \ll R$  величина  $P_{rr}$  зависит только от  $v, r, V, R$ . Тогда из соображений размерности найдем

$$P_{rr} = v^{-3} P_0 \left( \frac{v}{V}, \frac{r}{R}, \varphi \right) \quad \varphi = \frac{vr}{vR}, \quad (4.1)$$

где  $P_0$  – безразмерная функция.

Прежде чем получить формальные следствия принятой гипотезы, поясним ее физический смысл.

Из (4.1) видно, что принятое предположение близко к гипотезе, сформулированной Колмогоровым [1962а, б], так как считается, что статистические характеристики величины  $v/V$  универсально зависят от  $r/R$ . В отличие от использованной Колмогоровым величины  $v_i/V_i$  (по  $i$  не суммируется), здесь рассматривается величина  $v/V$ , которая является вектором. Поэтому сформулированная гипотеза подобия справедлива в любой системе координат. Ее физический смысл очевиден. Параметры  $V$  и  $R$  характеризуют крупномасштабное движение,  $v, r$  — мелкомасштабное. Время "жизни" первого движения порядка  $\tau_1 = R/V$ , а второго — порядка  $\tau_2 = r/v$ . Так как  $r \ll R$ , то  $\tau_1 \gg \tau_2$ . Поэтому предполагается, что мелкомасштабное движение находится в статистическом равновесии с крупномасштабным. Поскольку  $VR/v \gg 1$ , то можно выбрать  $M$  ( $M \gg 1$ ) точек таких, что  $R \gg R^{(1)} \gg \dots \gg r$ . Тогда все сказанное о взаимосвязи движений с масштабами  $R$  и  $r$  относится и к взаимодействию движений с масштабами  $R^{(i)}$  и  $R^{(i+1)}$ , т.е. процесс передачи энергии по спектру турбулентности носит каскадный характер: Поскольку при большом числе Рейнольдса велико и число "звеньев" каскада, то можно предположить, что характеристики мелкомасштабных движений статистически изотропны, т.е. не зависят от ориентации векторов  $V$  и  $R$  и поэтому определяются лишь величинами  $V$  и  $R$ .

Найдем теперь формальные следствия принятой гипотезы, которые вытекают из того, что  $P_{tt}$  есть условная плотность вероятностей. Для этого рассмотрим разности скоростей в трех парах точек: 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4 и воспользуемся теоремой Бейеса

$$P_{tt}(v, r | U, S) = \int P_{tt}(v, r | V, R) P_{tt}(V, R | U, S) d^3 V, \quad (4.2)$$

где  $r \ll R \ll S \ll L$ .

Соотношение (4.2) есть нелинейное интегральное уравнение, для решения которого воспользуемся следующим приемом. Умножим (4.2) на  $2\pi v^{n+2}$  и проинтегрируем по  $v$  от 0 до  $\infty$  при  $\varphi = \text{const}$ , т.е. введем величину

$$F = 2\pi \int_0^\infty v^{n+2} P_{tt} dv = V^n G\left(n, \frac{r}{R}, \varphi\right),$$

где  $G$  — безразмерная функция. Последнее равенство в этой формуле вытекает из (4.1). Далее потребуются также величины

$$P_{tt}^0 = v^2 \int_{-1}^1 P_{tt} d\varphi,$$

$$F^0 = \int_{-1}^1 F d\varphi = V^n G^0\left(n, \frac{r}{R}\right),$$

где  $P_{tt}^0$  — плотность вероятностей модуля разности скоростей. Отметим, что функция  $F$  есть преобразование Меллина от  $P_{tt}$ . Используя свойства такого преобразования (Бейтмен и Эрдейи [1953б]), имеем

$$P_{tt} = \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} v^{-n-3} F dn, \quad P_{tt}^0 = \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} v^{-n-1} F^0 dn. \quad (4.3)$$

Используя введенные обозначения, приводим (4.2) к виду

$$G\left(n, \frac{r}{S}, \varphi\right) = G\left(n, \frac{r}{R}, \varphi\right) G^0\left(n, \frac{R}{S}\right), \quad (4.4)$$

$$G^0 = \int_{-1}^1 G\left(n, \frac{R}{S}, \varphi\right) d\varphi.$$

Соотношение (4.4) есть функциональное уравнение, которое решается проще, чем исходное уравнение (4.2). Действительно, прологарифмируем и продифференцируем (4.4) по  $r$  и  $R$ . Найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial R} \ln G\left(n, \frac{r}{R}, \varphi\right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$G = H(n, \varphi) \left(\frac{r}{R}\right)^{Q(n, \varphi)}, \quad (4.5)$$

где  $H$  и  $Q$  – "постоянные" интегрирования. Прологарифмируем (4.4) и продифференцируем полученный результат по  $R$  и  $S$ . Аналогичным образом получим

$$G^0 = H_1(n) \left(\frac{R}{S}\right)^{q(n)}, \quad (4.6)$$

где  $H_1$  и  $q$  – новые "постоянные" интегрирования.

Подставив (4.5) и (4.6) в (4.4), имеем

$$H_1(n) \left(\frac{R}{S}\right)^{Q(n, \varphi) - q(n)} = 1.$$

Варьируя  $(R/S)$  при  $n = \text{const}$ , заключаем, что это равенство может выполняться только при  $Q = q$ . Учитывая, что  $Q = q$ , получим также  $H_1 = 1$ . Таким образом, получаем окончательный результат

$$F = V^n H(n, \varphi) \left(\frac{r}{R}\right)^{q(n)}, \quad H_1 = \int_{-1}^1 H(n, \varphi) d\varphi = 1. \quad (4.7)$$

Из (4.3) и (4.7) найдем также

$$P_{rr}^0 = \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} v^{-n-1} V^n \left(\frac{r}{R}\right)^{q(n)} dn. \quad (4.8)$$

Сравним (4.1) и (4.7). Видим, что из гипотезы подобия и соображений размерности вытекает, что  $P_{rr}$  зависит от трех переменных. Дополнительное ограничение, основанное на том, что  $P_{rr}$  – условная плотность вероятностей, позволяет снизить число переменных до двух.

Поясним смысл функций  $H$  и  $q$ . Из (4.7) и определения функции  $F$  вытекает, что

$$\langle v_N^{n-m} v_L^m \rangle_{V, r} = V^n \left(\frac{r}{R}\right)^{q(n)} \int_{-1}^1 H(n, \varphi) \varphi^m (1 - \varphi^2)^{(n-m)/2} d\varphi, \quad (4.9)$$

где  $v_L = v\varphi$  – проекция вектора  $v$  на вектор  $r$ ,  $v_N = v\sqrt{1 - \varphi^2}$  – компонента

вектора  $v$ , перпендикулярная вектору  $r$ . Символ  $\langle \rangle_{V,r}$  соответствует осреднению при условии, что точки 1 и 2 находятся в турбулентной жидкости, а разность скоростей в точках 1 и 3, также расположенных в турбулентной жидкости, равна  $V$ . Таким образом,  $q(n)$  характеризует зависимость структурной функции порядка  $n$  от расстояния между точками, а  $H(n, \varphi)$  описывает соотношения между различными структурными функциями одного и того же порядка. Видно также, что поскольку масштабные характеристики процесса определяются плотностью вероятности модуля разности скоростей  $P_{rr}^0$ , то основная информация описывается функцией  $q(n)$  (из (4.8) видно, что  $P_{rr}^0$  полностью определяется этой функцией). Поэтому главная цель дальнейшего исследования — выяснение вида зависимости  $q$  от  $n$ .

Первое ограничение на вид этой зависимости описывается равенствами

$$q(0) = 0, \quad q(3) = 1. \quad (4.10)$$

Условие  $q(0) = 0$  вытекает из того, что  $\int P_{rr} d^3v = 1$ . Условие  $q(3) = 1$  получено Колмогоровым [1941] из уравнения Кармана — Ховарса (структурная функция третьего порядка линейно зависит от расстояния). Это условие подробно обсуждено в книге Момина и Яглома [1967].

Следующее ограничение может быть найдено из неравенства Коши — Буяковского

$$\langle v^{m+n} \rangle_{V,r}^2 \leq \langle v^{2m} \rangle_{V,r} \langle v^{2n} \rangle_{V,r}.$$

Используя (4.7), приводим это неравенство к виду  $2q(m+n) \geq q(2m) + q(2n)$ . Полагая  $m = n + \Delta n$ ,  $\Delta n \rightarrow 0$ , отсюда получим

$$\frac{d^2q}{dn^2} \leq 0. \quad (4.11)$$

Последнее и, как будет видно далее, самое важное ограничение вытекает из определения функции  $F$ . Чтобы сформулировать это ограничение, параметр  $n$  будем считать комплексным числом, т.е. рассмотрим, как зависят от расстояния  $r$  величины вида

$$\langle v^n \rangle_{V,r} = \langle v^\alpha \cos(\beta \ln v) \rangle_{V,r} + i \langle v^\alpha \sin(\beta \ln v) \rangle_{V,r},$$

где  $n = \alpha + i\beta$ .

Введем естественные предположения: 1)  $P_{rr}$  — ограниченная функция; 2) при  $v \rightarrow \infty$  плотность вероятностей  $P_{rr}$  стремится к нулю быстрее, чем любая степень  $v$ , т.е. существуют структурные функции всех порядков. Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 2\pi \int_0^\infty v^{n+2} \ln v P_{rr} dv.$$

Из принятых предположений следует, что этот интеграл равномерно сходится при  $\text{Re } n > -3$ , т.е.  $F$  и, следовательно,  $H$  и  $q$  — аналитические функции в комплексной полуплоскости  $\text{Re } n > -3$ .

## § 4.2. Связь характеристик турбулентной и нетурбулентной жидкостей

Исследование, проведенное в § 4.1, показывает, что одна только гипотеза подобия и формальные ограничения, вытекающие из физического смысла введенных величин, определяют широкий класс распределений вероятностей. Логнормальный закон является частным случаем, в котором  $q$  — квадратичный полином (Монин и Яглом [1967]). Тогда из (4.10) и (4.11) находим

$$q(n) = (1/3 + 3q_2)n - q_2 n^2, \quad q_2 > 0, \quad (4.12)$$

где  $q_2$  — положительное число.

Из физических соображений ясно, что наиболее важные ограничения описываются уравнением движения, которое до сих пор не рассматривалось. Поэтому естественно использовать соотношение (2.31). В таком подходе возникает ряд трудностей, связанных с тем, что в (2.31) фигурирует безусловная плотность вероятностей  $P$ , а гипотеза подобия справедлива только для условной плотности вероятностей  $P_{tt}$ . Следовательно, необходимо получить отдельное уравнение, описывающее свойства турбулентной жидкости.

Математическая процедура вывода уравнения для  $P_{tt}$  непосредственно из уравнений движения связана с перестановкой операций дифференцирования и условного осреднения. Можно показать, что она приводит к появлению в уравнении для  $P_{tt}$  дополнительных слагаемых, характеризующих обмен веществом, импульсом и энергией между турбулентной и нетурбулентной жидкостями. Аппроксимация этих слагаемых вызывает значительные трудности. Аналогичная проблема возникает и при анализе уравнений для условных односточечных моментов (Либби [1975], Допазо [1977], Сабельников [1979, 1980б, 1985в], Допазо и О'Брайен [1979], Бюггстюль и Кольман [1981], Дюамель [1981]). На этом пути без привлечения дополнительных гипотез нельзя получить соотношений, которые принципиально отличаются от уравнения (2.31).

Более плодотворен подход, использованный в главе 3 при выводе уравнения для плотности вероятностей концентрации в турбулентной жидкости. Однако в данном случае возникает другая трудность. Дело в том, что развитый в главе 3 аппарат основан на выделении в уравнении для безусловной плотности вероятностей концентрации регулярных и сингулярных (пропорциональных  $\delta$ -функции) слагаемых. Для решения рассматриваемой проблемы этот аппарат непригоден, так как в выражении для плотности вероятностей разности скоростей сингулярные слагаемые отсутствуют, что обусловлено пульсациями давления, которые генерируют флуктуации скорости в нетурбулентной жидкости. Таким образом, необходимо найти правило, позволяющее из уравнения для безусловной плотности вероятностей  $P$  получить соотношение для условной плотности вероятностей  $P_{tt}$ . Решению поставленной задачи и посвящен данный параграф.

Поясним основную идею на примере уравнения неразрывности  $\partial \langle v_i v_j \rangle / \partial r_j = 0$ , а именно рассмотрим, как из этого уравнения можно получить соотношение для  $\langle v_i v_j \rangle_{w, t}$ . Заметим, что операции дифференцирования и условного осреднения при  $w = \text{const}$  также нельзя менять места-

ми ( $w$  — разность скоростей в двух других точках, находящихся на расстоянии порядка интегрального масштаба  $L$ ). Это затруднение несущественно, так как при анализе мелкомасштабных флуктуаций (т.е. величины  $v$ ) можно считать, что характеристики крупномасштабных возмущений (т.е. величина  $w$ ) играют роль осредненного движения (в противном случае гипотеза подобия несправедлива). Отсюда вытекает, что если  $r \ll L$ , то операции дифференцирования и условного осреднения при  $w = \text{const}$  перестановочны, т.е.  $\partial \langle v_i v_j \rangle_w / \partial r_j = 0$ . Тогда из (1.8) получим

$$\frac{\partial}{\partial r_j} [\gamma \langle v_i v_j \rangle_{w,r} + (1 - \gamma) \langle v_i v_j \rangle_{w,n}] = 0.$$

Из (4.9) вытекает, что первое слагаемое в этом соотношении пропорционально  $r^{q(2)} \approx r^{2/3}$ , а из (1.7) заключаем, что второе слагаемое пропорционально  $r^2$ . Поскольку оба слагаемых по-разному зависят от  $r$ , то они порознь равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \gamma \langle v_i v_j \rangle_{w,r} = 0.$$

Таким образом, в данном случае действует правило: соотношение, справедливое для безусловной структурной функции, пригодно для описания условной структурной функции, если символ  $\langle \ \rangle$  заменить на  $\gamma \langle \ \rangle_{w,r}$ .

С некоторыми ограничениями это правило действует и в общем случае. Действительно, умножим (2.31) на  $2\pi v^{n+2}$  и проинтегрируем по всем  $v$  при  $\varphi = \text{const}$ . В полученное соотношение снова войдут структурные функции, условно осредненные по турбулентной и по нетурбулентной жидкостям, и, как видно из (1.7) и (4.9), в нем будут фигурировать две группы слагаемых, одна из которых пропорциональна  $r^{q(n)}$ , а другая  $r^n$ . Так как  $q(n) \neq n$ , то обе группы слагаемых порознь равны нулю. Следовательно, получим два соотношения, в одно из которых войдут только структурные функции, осредненные по турбулентной жидкости, а в другое — только структурные функции, осредненные по нетурбулентной жидкости. Очевидно, что замена символа  $\langle \ \rangle$  на символ  $\gamma \langle \ \rangle_{w,r}$  соответствует замене безусловной двухточечной плотности вероятности  $P(v, r)$  на величину  $\gamma_{tt} P_{tt} = \gamma P_{tt}$  (здесь учитывается соотношение (1.4), из которого следует, что  $\gamma_{tt} \rightarrow \gamma$  при  $r/L \rightarrow 0$ ). Аналогичным образом безусловную трехточечную плотность вероятностей  $P(v, r, w, L)$  следует заменить величиной  $\gamma_{ttt} P_{ttt}$ .

Заметим, что как в данном случае, так и в случае, рассмотренном в главе 3, процедура разделения характеристик турбулентной и нетурбулентной жидкостей по существу одна и та же, так как уравнение (3.2) для условной плотности вероятностей концентрации  $P_t(z)$  также получается из уравнения (2.15) для безусловной плотности вероятностей  $P(z)$  с помощью замены  $P$  на  $\gamma P_t$  ( $F = P_t$  при  $0 < z < 1$  в (2.15)).

Рассмотрим теперь ограничения, которые необходимо помнить при использовании процедуры разделения характеристик обеих жидкостей. Самое главное ограничение связано с тем, что функция  $q(n)$ , как и всякая аналитическая функция, отличающаяся от постоянной, имеет особые точки на комплексной плоскости  $n$ . Одна из таких точек расположена при  $n \rightarrow \infty$ , так как из определения функции  $F$  вытекает, что  $F \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .



Многочисленные примеры, известные как в физике вообще, так и в гидродинамике в частности, указывают на то, что возникновение особенностей всегда обусловлено нарушением основных предположений теории. Например, возникновение особой точки  $n = \infty$  обусловлено тем, что при  $n \rightarrow \infty$  величина  $\langle v^n \rangle$  определяется флуктуациями, амплитуда которых стремится к бесконечности. Описание таких флуктуаций в рамках несжимаемой жидкости невозможно\*).

Другая причина возникновения особых точек может быть обусловлена неточностью гипотезы подобия. Для пояснения рассмотрим гипотетический случай, когда имеется лишь одна особая точка  $n = \infty$ . В качестве примера приведем формулу (4.12), справедливую для логарифмически нормального закона. Тогда использованная выше процедура разделения характеристик обеих жидкостей справедлива при всех конечных  $n$ . Следовательно, для всех структурных функций, осредненных по турбулентной жидкости, можно получить соотношения, в которые не входят структурные функции, осредненные по нетурбулентной жидкости (и наоборот). Физически это означает, что либо нетурбулентной жидкости вообще нет, либо обе жидкости существуют сами по себе, не взаимодействуя друг с другом. Такая картина явления противоречит экспериментальным данным.

Следовательно, необходимо допустить, что у функции  $q(n)$  есть особые точки, расположенные при конечных  $n$ . В этих точках условно осредненные структурные функции обоих типов принципиально связаны, т.е. такие точки характеризуют взаимодействие турбулентной и нетурбулентной жидкостей. Эти соображения будут уточнены в § 4.3, где будет показано, что 1) существование таких особых точек обязательно вытекает из уравнений движения и гипотезы подобия; 2) в окрестности особых точек несправедливы предположения, принятые при формулировке гипотезы подобия.

Остановимся теперь на менее существенных ограничениях применимости процедуры разделения характеристик турбулентной и нетурбулентной жидкостей. На первый взгляд эта процедура неприменима, если  $q(n) = n$  при некотором  $n = n_0$  (тогда структурные функции обоих типов одинаково зависят от  $r$ ). Однако, если  $n_0$  — не особая точка функции  $q(n)$ , то соотношения, полученные при  $n \neq n_0$ , можно аналитически продолжить в точку  $n = n_0$ , т.е. никаких ограничений не возникает.

Заметим также, что формулы (4.7) справедливы только при  $r \rightarrow 0$ , т.е. дают лишь главные члены асимптотических разложений различных структурных функций. Если же учесть последующие члены, то в рядах для величин  $\langle v^n \rangle_t$  и  $\langle v^n \rangle_n$  могут содержаться слагаемые, одинаково зависящие от  $r$ . Это означает, что операции дифференцирования и условного осреднения перестановочны только при  $r \rightarrow 0$ .

---

\*) Другим примером может служить теория ламинарного пограничного слоя. Даже в том случае, когда нет отрыва (в частности, на тонкой пластине, обтекаемой под нулевым углом атаки), особая точка расположена в начальном сечении пограничного слоя, так как его толщина  $\delta$  изменяется по закону  $\delta \sim \sqrt{x}$ , т.е. в уравнениях пограничного слоя имеется особая точка  $x = 0$ .

### § 4.3. Взаимодействие между турбулентной и нетурбулентной жидкостями

В соотношении (2.31) входят три слагаемых, описывающие силы инерции, перенос энергии по спектру турбулентности и пульсации давления. Лишь первое слагаемое точно выражается через искомую двухточечную плотность вероятностей. Гипотеза подобия позволяет сделать ряд важных выводов о структуре остальных слагаемых и тем самым проанализировать основные черты взаимодействия между турбулентной и нетурбулентной жидкостями.

Рассмотрим сначала перенос энергии по спектру турбулентности, т.е. те слагаемые в (2.31), которые пропорциональны величине

$$e_{ij} = \int \epsilon_{ij}^{(1)} P_{1\epsilon}(\epsilon_{ij}^{(1)} | v, r) d\epsilon_{ij},$$

где  $P_{1\epsilon}$  — условная плотность вероятностей диссипации в точке 1 при условии, что точки 1 и 2 находятся в турбулентной жидкости, а разность скоростей в них равна  $v$ . Таким образом  $e_{ij}$  — условно осредненная диссипация энергии. Величина  $e_{ij}$  определяется наиболее мелкомасштабными пульсациями с размером порядка колмогоровского масштаба. Эти пульсации находятся в равновесии с крупномасштабными флуктуациями, характеристики которых  $v$  и  $r$  считаются заданными. Из гипотезы подобия вытекает, что только две характеристики крупномасштабных движений, а именно  $v$  и  $r$ , могут влиять на мелкомасштабные пульсации. В силу принципа автомодельности турбулентных течений по числу Рейнольдса вязкость  $\nu$  не является определяющим параметром. Следовательно, из соображений размерности получим

$$e_{ij} = k \frac{v^3}{r} \delta_{ij}, \quad (4.13)$$

где  $k$  — некоторая постоянная. Это соотношение аналогично формуле, используемой в полуэмпирической теории турбулентности при замыкании уравнения для энергии пульсаций ( $\langle \epsilon_{ii} \rangle = \text{const } q^3/L$ , где  $q$  — пульсационная скорость,  $L$  — интегральный масштаб турбулентности).

Оценим постоянную  $k$ , связав ее с постоянной  $C$  в законе "двух третей". По определению  $C = r^{-2/3} \langle v_L^2 \rangle \langle \epsilon_{ii} \rangle^{-2/3}$ . Из формул (1.8) получаем  $\langle v_L^2 \rangle = \gamma \langle v_L^2 \rangle_r$ , поскольку  $\langle v^2 \rangle_r \gg \langle v^2 \rangle_n$  при  $r \rightarrow 0$ . Используя уравнение неразрывности и формулу (4.9), находим  $\langle v_L^2 \rangle_r = \langle w^2 \rangle_r \times (r/L)^{q(2)} / [3 + q(2)]$ . Из (4.10), (4.13) получаем

$$\langle \epsilon_{ii} \rangle = \gamma \langle \epsilon_{ii} \rangle_r = 3k\gamma r^{-1} \langle v^3 \rangle_r = \frac{3k\gamma \langle w^3 \rangle_r}{L},$$

т.е.

$$C = (3k)^{-2/3} [3 + q(2)]^{-1} \gamma^{1/3} \left(\frac{r}{L}\right)^{q(2)-2/3} \langle w^2 \rangle_r \langle w^3 \rangle_r^{-2/3} \quad (4.14)$$

Напомним, что  $w$  — скорость энергосодержащих вихрей, и поэтому ее можно интерпретировать как пульсационную скорость в одной точке. Это обстоятельство позволяет в оценках моментов величины  $w$  исполь-

звать одноточечное распределение вероятностей скоростей в турбулентной жидкости.

Из полученной формулы видно, что величину  $C$  лишь условно можно назвать постоянной, так как  $q(2) \neq 2/3$ .

Обработка экспериментальных данных показывает, что разность  $q(2) - 2/3$ , однако, составляет величину порядка нескольких сотых, т.е. весьма мала (Монин и Яглом [1967]). Поэтому зависимость  $C$  от  $r$  — достаточно слабая и далее не учитывается. Используя рекомендованное Мониним и Ягломом [1967] значение  $C = 1,9^*$  и предполагая одноточечное распределение вероятностей скоростей нормальным, из (4.14) имеем  $k \sim 1,5 \cdot 10^{-2} \gamma^{1/2}$ .

Из проведенной оценки видим, что постоянная  $k$  мала. Этот вывод имеет важное значение, что ясно из следующих соображений. Слагаемое  $v_j \partial P / \partial r_j$ , входящее в (2.31) и соответствующее инерционным слагаемым в уравнении движения, зависит лишь от первых производных от плотности вероятностей, а числовые коэффициенты, которые в нем фигурируют, равны единице. Слагаемое  $\partial^2 e_{ij} P / \partial v_i \partial v_j$  описывает перенос энергии по спектру турбулентности. В него входят вторые производные, и, следовательно, оно во многом определяет структуру уравнения (2.31). Поскольку рассматриваемое слагаемое пропорционально малой постоянной  $k$ , то приходим к классической задаче с малым параметром при старшей производной. Физический смысл полученного результата достаточно прозрачен: диссипация энергии является относительно медленным процессом. Отметим, что сходное явление наблюдается и в неоднородных турбулентных течениях. Например, мал угол расширения затопленной струи, и, следовательно, мала в ней диссипация энергии. Этот пример, видимо, указывает на то, что существует глубокая связь между постоянной  $C$  и постоянными, характеризующими скорость расширения неоднородных течений струйного типа, интенсивность турбулентности в этих течениях и т.д.

Проанализируем теперь пульсации диссипации, которые, как известно, играют весьма важную роль в теории локально однородной турбулентности. Используя соображения размерности и формулу (4.9), имеем

$$R_{\epsilon\epsilon} = \langle \epsilon_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} \rangle \sim \langle v^6 \rangle r^{-2} \sim r^{-\mu}, \quad \mu = 2 - q(6). \quad (4.15)$$

Этот результат известен из работ Кузнецова [1976а], Фриша, Сюлема и Нелькина [1978].

Перейдем теперь к выводу уравнения для  $P_{tt}$ . Воспользуемся процедурой разделения характеристик турбулентной и нетурбулентной жидкостей, сформулированной в § 4.2. В соответствии с этой процедурой в (2.31) следует заменить  $P(v, r)$  на  $\gamma_{tt} P_{tt}(v, r | w, L)$ ,  $P(v, r, V, R)$  — на  $\gamma_{ttt} P_{ttt}(v, r, V, R | w, L)$ . Напомним, что  $r = x^{(2)} - x^{(1)}$ ,  $R = x^{(3)} - x^{(1)}$ ,  $L = x^{(5)} - x^{(1)}$ , а  $v, V, w$  — соответственно разности скоростей в точках 1 и 2, 1 и 3, 1 и 5; при этом  $r \ll L$ ,  $R \ll L$ ,  $L$  порядка интеграль-

\* Тем самым считается, что постоянная  $C$  не зависит от  $\gamma$ . Справедливость такого предположения в настоящее время не вполне ясна (см. § 4.5).

ного масштаба турбулентности. Учтем, что  $\gamma_{tt} \rightarrow \gamma$  при  $r/L \rightarrow 0$ . Используя (2.31) и (4.13), получим

$$\gamma v_k \frac{\partial P_{tt}}{\partial r_k} + \frac{2k\gamma}{r} \frac{\partial^2}{\partial v_i^2} v^3 P_{tt} + \frac{\partial \pi_k}{\partial v_k} = 0,$$

$$\pi_k = \frac{1}{4\pi} \int TD_{kij} \gamma_{ttt} V_i V_j P_{ttt} d^3 V d^3 R, \quad (4.16)$$

$$T = \frac{1}{R} - \frac{1}{|R-r|}, \quad D_{kij} = \frac{\partial^3}{\partial R_k \partial R_i \partial R_j}.$$

Здесь первое слагаемое характеризует силы инерции, второе — диссипацию энергии, а третье — пульсации давления. Так как  $\pi_k$  пропорционально интегралу по всем  $R$ , то на движение с масштабом  $r$  влияют пульсации давления, создаваемые вихрями всех размеров.

Отсюда ясно, что пригодность гипотезы подобия, так же как и всей теории мелкомасштабной турбулентности, нуждается в тщательном анализе. Действительно, каскадный характер передачи энергии по спектру турбулентности может осуществляться только, если области  $R \ll r$  и  $R \gg r$  (т.е. очень большие или очень малые вихри) не дают вклада в интеграл, содержащийся в (4.16). Другими словами, необходимо проанализировать сходимость этого интеграла. Рассматриваемый вопрос решается при исследовании поведения подынтегральной функции в областях  $r \ll R$  и  $r \gg R$ .

Чтобы решить поставленную задачу, выделим три области: 1 ( $R > ar$ ), 2 ( $r/a < R < ar$ ), 3 ( $R < r/a$ ), где  $a \gg 1$ . Величину  $\pi_k$  представим в виде

$$\pi_k = \pi_k^{(1)} + \pi_k^{(2)} + \pi_k^{(3)},$$

$$\pi_k^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \int_{R > ar} TD_{kij} \gamma_{ttt} V_i V_j P_{ttt} d^3 V d^3 R,$$

$$\pi_k^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int_{r/a < R < ar} TD_{kij} \gamma_{ttt} V_i V_j P_{ttt} d^3 V d^3 R,$$

$$\pi_k^{(3)} = \frac{1}{4\pi} \int_{R < r/a} TD_{kij} \gamma_{ttt} V_i V_j P_{ttt} d^3 V d^3 R.$$

По определению  $\pi_k^{(1)}$  характеризует пульсации давления, создаваемые вихрями с размером много больше  $r$ ,  $\pi_k^{(2)}$  — пульсации давления, генерируемые вихрями с размером порядка  $r$ ,  $\pi_k^{(3)}$  — пульсации давления, индуцированные вихрями с размером много меньше  $r$ .

Величины  $\pi_k^{(1)}$  и  $\pi_k^{(3)}$ , определяющие сходимость рассматриваемого интеграла, можно выразить через двухточечную плотность вероятностей с помощью гипотезы подобия. Заметим, что в силу теоремы Бейеса  $P_{ttt}$  всегда можно представить в двух эквивалентных формах:

$$P_{ttt}(v, r, V, R | w, L) = P_{tt}(v, r | V, R) P_{tt}(V, R | w, L),$$

или

$$P_{ttt}(v, r, V, R | w, L) = P_{tt}(V, R | v, r) P_{tt}(v, r | w, L).$$

При этом, однако, следует иметь в виду, что если  $r/R$  произвольно, то гипотеза подобия и формулы, полученные в § 4.1, несправедливы при описании  $P_{tt}$  и такая запись не облегчает решение задачи. Если же  $r \gg R$  или  $r \ll R$ , то гипотеза подобия справедлива. Тогда получаем

$$\begin{aligned} P_{ttt} &= P_{tt}(v, r | V, R)P_{tt}(V, R | w, L), \quad L > R \gg r, \\ P_{ttt} &= P_{tt}(V, R | v, r)P_{tt}(v, r | w, L), \quad R \ll r < L, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где преобразование Меллина  $F$  от  $P_{tt}$  ( $F = 2\pi \int_0^\infty v^{n+2} P_{tt} dv$ ) дается формулой (4.7).

Теперь легко видеть, что пульсации давления, создаваемые наиболее мелкими вихрями ( $R \ll r$ ), не влияют на движение крупных вихрей, т.е.

$$\begin{aligned} \pi_k^{(3)} &= \frac{\gamma}{4\pi} \int_{R < r/a} V_i V_j TD_{kij} P_{tt}(V, R | v, r) P_{tt}(v, r | w, L) d^3 V d^3 R = \\ &= \frac{\gamma}{4\pi} P_{tt}(v, r | w, L) \int_{R < r/a} TD_{kij} \langle V_i V_j \rangle_{u,r} d^3 R = 0. \end{aligned}$$

Здесь второе равенство вытекает из второго соотношения в (4.17), а третье — из уравнения неразрывности, которое, как было показано, справедливо и для условных структурных функций. Учтено также равенство  $\gamma_{ttt} = \gamma$  при  $r \gg R$ , которое следует из (1.15).

Анализ слагаемого  $\pi_k^{(1)}$  удобно провести, используя преобразование Меллина от (4.16). Умножим (4.16) на  $2\pi v^{n+1}$  и проинтегрируем по  $v$  от 0 до  $\infty$  при  $\varphi = \text{const}$ . Учитывая (4.7) и только что полученное равенство  $\pi_k^{(3)} = 0$ , находим

$$\begin{aligned} \varphi q(n)H(n, \varphi) + (1 - \varphi^2) \frac{dH(n, \varphi)}{d\varphi} + 2kn(n-1)H(n, \varphi) + \\ + 2k \frac{d}{d\varphi} (1 - \varphi^2) \frac{dH(n, \varphi)}{d\varphi} + J_1 + J_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$J_s = \frac{2\pi r}{\gamma w^n} \left(\frac{L}{r}\right)^{q(n)} \int_0^\infty v^{n+1} \frac{\partial \pi_k^{(s)}}{\partial v_k} dv, \quad s = 1, 2.$$

Здесь первые два слагаемых описывают силы инерции, а следующие два слагаемых, пропорциональные постоянной  $k$ , — перенос энергии по спектру. Слагаемое  $J_2$  характеризует пульсации давления, создаваемые вихрями с размером порядка  $r$ .

Наиболее интересные особенности уравнения (4.18) обусловлены слагаемым  $J_1$ , которое описывает пульсации давления, создаваемые вихрями с размером много больше  $r$ . Его вычисление основано на формуле (4.7), первом соотношении в (4.17) и уравнении (1.12), из которого следует, что  $\gamma_{ttt} = \gamma^2$  при  $r \ll R \sim L$ . Результат приведен в работе Кузнецова [1976а], а подробные выкладки содержатся в работе Кузнецова и Сабельникова [1981а]. В связи с тем, что все преобразования носят громозд-

кий характер, приведем лишь окончательную формулу

$$\begin{aligned}
 J_1 = & -\frac{\gamma}{3} (1 + \delta q) [(\delta q + 3) \int_{-1}^1 H(n, \varphi) \varphi^2 d\varphi - 1] \times \\
 & \times \left\{ (1 - \varphi^2) \frac{dH(n-2, \varphi)}{d\varphi} - (n+1)\varphi H(n-2, \varphi) \right\} \times \\
 & \times r^{2-\delta q} \int_{ar}^{\infty} (\delta q - 2) R^{\delta q - 3} dR, \quad (4.19) \\
 \delta q = & q(n) - q(n-2).
 \end{aligned}$$

Видно, что интеграл в (4.19) сходится только при условии  $\text{Re}(\delta q) \leq 2$ . Тогда  $J_1$  и остальные слагаемые в (4.18) не зависят от  $r$ .

Следовательно, возможны два варианта. В первом функция  $\delta q$  является целой (она не имеет особых точек при  $|n| < \infty$ ). Тогда из принципа максимума следует, что условие  $\text{Re}(\delta q) \leq 2$  выполняется только при  $\delta q = \text{const}$ . Условие  $\delta q = \text{const}$  есть разностное уравнение. Его частным решением является функция  $q = \text{const} \cdot n + \text{const}$ . К этому решению может быть добавлена произвольная периодическая функция с периодом 2. Такие решения при  $\text{Im } n = 0$  не удовлетворяют условию (4.11) и, следовательно, не должны рассматриваться. Поэтому, используя (4.10), получим  $q = \frac{1}{3}n$ , т.е. приходим к неуточненной теории Колмогорова [1941]. Этот вариант, как уже отмечалось в главе 1, не согласуется с экспериментальными данными и, кроме того, обладает следующей особенностью, которая, по-видимому, не может быть характерна для реальных турбулентных течений. Действительно, из второй формулы в (4.3) находим

$$P_{ii}^0 = \delta \left[ v - V \left( \frac{r}{R} \right)^{n/3} \right],$$

т.е. из принятой гипотезы подобия и уравнений движения следует, что модуль разности скоростей — не случайная величина.

Следовательно, функции  $\delta q(n)$  и  $q(n)$  имеют особенности при конечных  $n$ . Таким образом, из уравнений движения следует, что распределение вероятностей разности скоростей не описывается логарифмически нормальным законом (функция (4.12) является целой, а условие  $\text{Re}(\delta q) \leq 2$  нарушается при  $\text{Re } n < \frac{5}{2} - 1/(3q_2)$ ).

Как уже отмечалось в § 4.2, появление особых точек в функции  $q(n)$  обусловлено взаимодействием между турбулентной и нетурбулентной жидкостями. Покажем, что структура решений уравнения (4.18) в окрестности особых точек правильно отражает основные черты этого взаимодействия, которые вытекают непосредственно из уравнений Навье—Стокса. В главе 1 указывалось, что это взаимодействие обладает тремя особенностями. Во-первых, оно обусловлено пульсациями давления. Во-вторых, из (1.7) вытекает, что  $\langle v^2 \rangle_n / \langle v^2 \rangle_t \sim r^{2-q(2)} \approx r^{4/3} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ . Это означает, что интенсивные флуктуации в турбулентной жидкости взаимодействуют с пульсациями в нетурбулентной жидкости, которые имеют малую амплитуду. В-третьих, мелкомасштабные пульсации в нетурбулентной жидкости получают энергию непосредственно от крупно-

масштабных энергосодержащих вихрей (коэффициент  $A_2$  в (1.7) пропорционален градиенту скорости этих вихрей, т.е.  $(v^2)_n \sim A_2$ ).

Все указанные особенности наблюдаются и в рассматриваемом случае. Действительно, появление особых точек у функции  $q(n)$  обусловлено расходимостью интеграла в (4.16), который описывает пульсации давления. Ясно также, что этим точкам соответствуют пульсации с малой амплитудой. Действительно, пусть  $n_1$  — первая особая точка функции  $\delta q(n)$ . Появление такой точки может быть связано только с тем, что интеграл

$$2\pi \int_0^\infty v^{n+2} P_{tt} dv$$
 расходится при  $v \sim 0$  и  $n = n_1$ , т.е. решающее значение

имеет структура пульсаций с малой амплитудой. Наконец, при  $n \leq n_1$  выполняется условие  $\text{Re}(\delta q) \geq 2$ , так как в противном случае никакой особенности нет. Тогда из (4.19) следует, что при  $n \approx n_1$  основной вклад в интеграл дает область  $R \geq r$ , т.е. крупномасштабные, энергосодержащие движения непосредственно влияют на медленные, мелкомасштабные вихри. Отсюда вытекает, что структура решений уравнения (4.18) в окрестности особых точек функции  $q(n)$  отражает взаимодействие между турбулентной и нетурбулентной жидкостями.

Сделанный выше вывод исключительно важен, так как в окрестности особых точек взаимодействие между вихрями разных масштабов носит прямой, а не каскадный характер, и, следовательно, несправедлива не только принятая гипотеза подобия, но и вся теория локально однородной турбулентности. Вопрос о справедливости этой теории вне особых точек остается открытым, что ясно из следующих соображений. Так как  $q(n)$  — аналитическая функция, то ее действительная ( $q_r$ ) и мнимая ( $q_i$ ) части удовлетворяют уравнению Лапласа  $\Delta q_r = \Delta q_i = 0$ , где  $\Delta = \partial^2/\partial n_r^2 + \partial^2/\partial n_i^2$ ,  $n_r = \text{Re } n$ ,  $n_i = \text{Im } n$ . Решения этого уравнения обладают своеобразными нелокальными свойствами, т.е. структура особой точки определяет характер решения на всех расстояниях от нее. Поэтому влияние крупномасштабных пульсаций давления, приводящих к возникновению особых точек, отражается и на структуре мелкомасштабных пульсаций со всеми амплитудами\*). Важно, что это влияние не ослабевает при произвольно малом отношении масштабов мелких и крупных вихрей.

Лишь на большом расстоянии от особых точек остаются только слабые следы такого влияния, т.е., строго говоря, теория локально однородной турбулентности может быть справедливой только при описании структурных функций достаточно высокого порядка.

Проанализируем этот вопрос более детально. Из (4.18) и (4.19) видно, что первые особые точки функций  $H(n, \varphi)$  и  $\delta q(n) = q(n) - q(n-2)$  совпадают. Так как  $H(n, \varphi)$  — аналитическая функция  $n$  в области  $\text{Re } n > -3$ , то  $\text{Re } n_1 < -3$ , где  $n_1$  — первая особая точка функции  $\delta q(n)$ . Поскольку  $\delta q = q(n) - q(n-2)$ , то первая особая точка ( $n = n_2$ ) функции

\*) Здесь рассматривается функция  $q(n)$ , описывающая зависимость от расстояния интеграла  $F = 2\pi \int_0^\infty v^{n+2} P_{tt} dv$ . Очевидно, что значения  $F$  при больших  $|n|$  определяются структурой функции  $P_{tt}$  при больших  $v$  (и наоборот). Таким образом, величина  $|n|$  характеризует амплитуду пульсаций.

$q(n)$  расположена в области  $\text{Re } n < n_1 - 2 = -5$  ( $\text{Re } n_1 < -3$ ). Эта оценка имеет важное практическое и теоретическое значение, так как наибольший интерес представляет исследование поведения функции  $q(n)$  на больших расстояниях  $\delta n = n - n_2$  от особой точки. Например, для структурной функции, описывающей энергию пульсаций, имеем  $n = 2$ ,  $\delta n = 7$ , а для структурной функции, описывающей пульсации диссипации, получаем  $n = 6$ ,  $\delta n = 11$ , т.е.  $|\delta n| \gg 1$ .

Отсюда видно: основные черты мелкомасштабных пульсаций определяются структурой функции  $q(n)$  на больших расстояниях от первой особой точки. Другими словами, детали взаимодействия между турбулентной и нетурбулентной жидкостями не имеют значения. Таким образом, возможно создание достаточно простой теории, описывающей распределение вероятностей разности скоростей. С другой стороны, во многих практических исследованиях приходится оценивать зависимость от расстояния структурных функций, порядок которых изменяется слабо по сравнению с  $|\delta n|$ . Например, в опытах главным образом измеряются структурные функции, для которых  $n$  находится в диапазоне 2 – 6. Для описания таких структурных функций, по-видимому, с достаточной точностью можно считать, что  $q$  – квадратичный полином от  $n$ , т.е. формула (4.12), соответствующая логарифмически нормальному закону, приближенно справедлива.

Легко видеть, что единственная постоянная  $q_2$ , описывающая этот закон, является малой величиной. Действительно, экспериментальные данные, приведенные ниже в § 4.5, указывают на то, что постоянная  $\mu$  в формуле (4.15) не больше, чем 0,5. Тогда из (4.12), (4.15) находим  $q_2 = \mu/18 \leq \leq 0,03$ . Следовательно, приходим к важному выводу: в теории локально однородной турбулентности фигурируют по крайней мере две малые постоянные. Одна из них ( $q_2$ ), как это следует из (4.15) и равенства  $q_2 = \mu/18$ , характеризует пульсации диссипации. Вторая постоянная  $k$  фигурирует в формуле (4.13), описывающей среднее значение диссипации; эта постоянная связана с "константой"  $C$  в законе "двух третей". Как показывают оценки, проведенные в начале данного параграфа, значения  $k$  и  $q_2$  одного порядка. Отмеченное совпадение, по-видимому, не случайно и, скорее всего, связано с тем, что первая особая точка функции  $q(n)$  расположена достаточно далеко. Физически это означает, что турбулентная и нетурбулентная жидкости взаимодействуют слабо.

Заметим теперь, что обе рассматриваемые постоянные входят в уравнение (4.18). Можно ожидать, что это уравнение определяет некоторую связь между  $k$  и  $\mu$  (или  $q_2$ ). Проведенный анализ указывает на некоторые важные черты такой связи. Действительно, из (4.18) и (4.19) видно, что инерционные слагаемые не зависят от коэффициента перемежаемости  $\gamma$ , а одно из слагаемых, описывающее пульсации давления ( $J_1$ ), пропорционально  $\gamma$ . Следовательно, коэффициенты в уравнении (4.18) принципиально зависят от  $\gamma$ . Вообще говоря, это означает, что все рассмотренные выше константы ( $k$ ,  $C$ ,  $\mu$ ,  $q_2$ ) зависят от  $\gamma$ . С физической точки зрения возможная неуниверсальность этих постоянных достаточно естественна, так как характер взаимодействия между турбулентной и нетурбулентной жидкостями должен зависеть от того, насколько плотно турбулентная жидкость заполняет рассматриваемый объем.



#### § 4.4. Влияние вязкости на структуру мелкомасштабных пульсаций

Проанализируем сначала влияние вязкости на мелкомасштабные пульсации в инерционном интервале ( $L \gg r \gg \eta$ ). Из физических соображений ясно, что даже при большом расстоянии между рассматриваемыми точками ( $r \gg \eta$ ) из-за случайности процесса возможны такие ситуации, когда  $\nu$  и, следовательно, локальное число Рейнольдса  $vr/\nu$  малы. Таким образом, влияние вязкости проявляется в окрестности особых точек функции  $q(n)$ .

Сделанное замечание порождает целый комплекс проблем, связанных с необходимостью уточнения уравнения (4.16). Во-первых, следует учесть, что величина  $k$ , характеризующая условно осредненную диссипацию энергии, является постоянной лишь при  $vr/\nu \gg 1$ , т.е.  $k = k(vr/\nu)$ , где  $k \rightarrow \text{const}$  при  $vr/\nu \rightarrow \infty$ . Во-вторых, необходимо уточнить гипотезы, принятые при вычислении величины  $\pi_k^{(1)}$ , которая характеризует пульсации давления, генерируемые крупномасштабным движением. В первом приближении такие уточнения могут основываться на следующих соображениях. Обратимся ко второму соотношению в (4.16), определяющему величину  $\pi_k$ . При  $R \gg L$  ( $L$  – интегральный масштаб турбулентности) трехточечная плотность вероятностей  $P_{iii}$  есть произведение одноточечной и двухточечной плотностей вероятности (пульсации в точке 3 не зависят от разности скоростей в точках 1 и 2). Тогда из уравнения неразрывности можно показать, что область  $R \gg L$  не дает вклада в интеграл, входящий в определение величины  $\pi_k$ . Следовательно, в первом приближении можно считать, что при вычислении  $\pi_k$  интегрирование производится по области  $R \lesssim L$ . Если предположить, что в этой области по-прежнему справедливо первое соотношение в (4.17), то верхний предел интегрирования в (4.19) следует заменить на величину порядка  $L$ . Это означает, что в окрестности особых точек величина  $J_1$  зависит от  $r/L$ .

Таким образом, в уравнение (4.16) войдут два критерия  $vr/\nu$  и  $r/L$  и при анализе статистических характеристик турбулентности в инерционном интервале ее спектра возникает проблема вычисления двойного предела, когда  $vr/\nu \rightarrow \infty$  и  $r/L \rightarrow 0$ . В рассматриваемой области фазового пространства такое вычисление не может быть произведено однозначно, так как функция  $q(n)$  имеет особые точки. Таким образом, возникают те же проблемы, что и были проанализированы в главе 1.

Рассмотрим теперь влияние вязкости на структуру наиболее мелкомасштабных пульсаций ( $r < \eta$ ). Наибольший практический интерес представляют статистические характеристики градиента скорости. Решению этой задачи посвящена остальная часть данного параграфа.

Пусть точки 1, 2, 3 находятся в турбулентной жидкости, а расстояния между точками 1 и 2, 1 и 3 соответственно равны  $r$  и  $R$  и, кроме того, выполняется условие  $\eta \ll r \ll R \ll L$ , т.е. масштабы  $r$  и  $R$  по-прежнему принадлежат иерархическому интервалу. Проанализируем, от каких параметров зависит условно осредненный момент

$$K_n = \left\langle \left[ \sqrt{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} \right]_{v,r}^n \right\rangle.$$

Величина  $K_n$  определяется наиболее мелкомасштабными флуктуациями с размером, сопоставимым с величиной  $\eta$ . Поэтому естественно предположить, что  $K_n$  зависит только от  $v, r, \nu$ . Тогда из соображений размерности найдем

$$K_n = v^n r^{-n} M_n \left( \frac{vr}{\nu} \right),$$

где  $M_n$  – безразмерная функция. Используя теорему Бейеса, получим

$$\begin{aligned} K_n(V, R) &= V^n R^{-n} M_n \left( \frac{VR}{\nu} \right) = \\ &= \int K_n(v, r) P_{r|t}(v, r | V, R) d^3 v, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где  $P_{r|t}$  определяется формулами (4.3), (4.7), которые справедливы в инерционном интервале. Решение ищем в виде

$$M_n = \left( \frac{vr}{\nu} \right)^{x(n)}.$$

Подставив эту формулу в (4.20) и учтя (4.7), найдем

$$q[n + x(n)] + x(n) - n = 0. \quad (4.21)$$

Отсюда видно, что зависимость моментов градиента скорости от числа Рейнольдса определяется функцией  $q(n)$ , характеризующей структурные функции в инерционном интервале.

Как указывалось в § 4.3, при не слишком больших  $n$  формула (4.12) может использоваться как достаточно хорошая аппроксимация. Учтём, что  $q_2 = \mu/18 \ll 1$ . Тогда, пренебрегая слагаемыми порядка  $q_2^2$ , из (4.21) имеем

$$x(n) = \frac{n}{2} + \frac{3}{32} \mu (n^2 - 2n). \quad (4.22)$$

Эта формула соответствует логнормальному закону. В частности, для моментов диссипации из (4.22) следует, что

$$\langle \epsilon^n \rangle_{v,t} = v^{3n} r^{-n} \left( \frac{vr}{\nu} \right)^{3\mu n(n-1)/8}$$

Экстраполируя это соотношение в область  $r \sim L$  ( $L$  – интегральный масштаб), получим

$$\langle \epsilon^n \rangle \sim \langle \epsilon \rangle^n \left( \frac{L}{\eta} \right)^{\mu n(n-1)/2}.$$

$$P(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \epsilon \sigma_\epsilon} \exp \left\{ - \frac{(\ln(\epsilon/\langle \epsilon \rangle) + \sigma_\epsilon^2/2)^2}{2\sigma_\epsilon^2} \right\}, \quad (4.23)$$

$$\sigma_\epsilon^2 = \mu \ln \frac{L}{\eta}.$$

Формула (4.23) часто используется при анализе измерений градиента

скорости (Френкиль и Клебанов [1975] и др.). Она основана на приближенном соотношении (4.22) и поэтому справедлива только при  $q_2 = \mu/18 \ll 1$ . Даже при  $q_2 \ll 1$  она не описывает пульсации величины  $\epsilon$  с очень большой амплитудой, так как (4.23) есть следствие приближенного соотношения (4.12), которое непригодно при больших  $n$ , т.е. при больших амплитудах пульсаций.

Действительно, исследуем характер поведения функции  $q(n)$  при больших положительных  $n$  ( $\text{Im } n = 0$ ). Введя обозначение  $y = n + x$ , из (4.21) получим

$$2n = y + q(y). \quad (4.24)$$

Решение этого уравнения, вообще говоря, неоднозначно, что следует из анализа знаков производной  $dn/dy$  при  $y \sim 1$  и при  $y \rightarrow \infty$ . Действительно, так как  $q_2$  мало, то  $q'(2) \approx 1/3$ . Поэтому из (4.24) получаем  $dn/dy > 0$  при  $y \sim 1$ . Рассмотрим теперь случай, когда  $y \rightarrow \infty$ . Пусть  $\alpha = q(y)/y$ . Возможны, очевидно, два варианта. В первом имеем  $\alpha > -1$  при  $y \rightarrow \infty$ . Тогда  $dn/dy > 0$  как при  $y \sim 1$ , так и при  $y \rightarrow \infty$ . Во втором получаем  $\alpha < -1$  при  $y \rightarrow \infty$ . Тогда  $dn/dy = 1 + \alpha < 0$  при  $y \rightarrow \infty$ , т.е.  $dn/dy$  обращается в нуль при конечном  $y$  и, следовательно, функции  $y(n)$  и  $x(n)$  неоднозначны.

Проиллюстрируем сделанный вывод на примере логарифмически нормального закона ( $\alpha = -\infty$  при  $y = \infty$ ). Из (4.12), (4.24) следует, что  $dn/dy = 0$ ,  $n = n_3 = (\sqrt[4]{3 + 3q_2})^2 / (4q_2)$  при  $y = (\sqrt[4]{3 + 3q_2}) / (2q_2)$ . В малой окрестности рассматриваемой точки получаем  $x = y - n = \text{const} + \text{const} \sqrt{n_3 - n}$ , т.е. функция  $x(n)$  имеет особенность и, следовательно, моменты градиента скорости, порядок которых превышает  $n_3$ , не существуют.

Отсюда вытекает, что все моменты градиента скорости существуют лишь в том случае, когда справедлива следующая асимптотическая зависимость ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$q = \text{const} + \alpha n, \quad \alpha > -1. \quad (4.25)$$

Укажем одну интересную особенность распределений вероятностей, для которых справедлива формула (4.25). Из (4.3), (4.25) можно показать, что существует максимально возможная разность скоростей ( $P_{rr}^0 = 0$  при  $v > v_m$ ) в двух точках, принадлежащих инерционному интервалу спектра. Зависимость  $v_m(r)$  описывается выражением  $v_m \sim r^{-\alpha}$ .

Заметим также, что в рассматриваемом случае ( $\alpha > -1$ ) из существования всех моментов градиента скорости вытекает дифференцируемость неосредненного поля скорости (Монин и Яглом [1967]). В другом случае ( $\alpha < -1$ ) сделать какие-либо выводы о дифференцируемости неосредненного поля скорости невозможно, так как гладкая случайная функция может не иметь некоторых моментов (Монин и Яглом [1967]). Напомним, что дифференцируемость решений уравнений Навье – Стокса не доказана. Высказывается также ряд соображений о том, что такие решения могут быть и недифференцируемыми (Ладыженская [1970]).

#### § 4.5. Экспериментальные исследования структуры мелкомасштабной части спектра турбулентности

Структура мелкомасштабной части спектра турбулентности экспериментально изучалась во многих работах. Полученные данные носят в значительной мере противоречивый характер. В частности, константа  $\mu$  колеблется в диапазоне 0,2–0,5. В связи с этим полезно проанализировать точность проведенных опытов. Результаты выполненных выше теоретических исследований позволяют провести такой анализ достаточно аккуратно.

Прежде всего отметим, что измерение характеристик турбулентности в инерционном и вязком интервалах спектра сопряжено с большими трудностями. Эти трудности обусловлены тем, что диссипация энергии колеблется в очень широком диапазоне значений. Поэтому возникают ошибки, связанные с пространственным осреднением поля скорости. При увеличении амплитуды пульсаций диссипации энергии возрастает и амплитуда колебаний минимального масштаба гидродинамических неоднородностей, и чем выше номер измеряемого момента, тем сильнее выражен этот эффект. Оценим роль указанных факторов (Кузнецов, Прасковский и Сабельников [1984а, б]). Анализ, проведенный в § 4.4, показывает, что при определении моментов диссипации энергии, порядок которых не слишком велик, можно воспользоваться формулой (4.23).

Пусть необходимо измерить величину  $\langle \epsilon^n \rangle$  с точностью  $t$ . Тогда из (4.23) следует, что измерительный прибор должен регистрировать значения диссипации в диапазоне  $(0, \epsilon_1)$ , где

$$\epsilon_1 = \langle \epsilon \rangle \exp [\sigma^2 (n - 1/2) + \sigma h(t)],$$

$$\sigma^2 = \mu \ln \frac{L}{\eta}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{h(t)} \exp \left( -\frac{s^2}{2} \right) ds = t. \quad (4.26)$$

Эта оценка получается, если предположить, что измеряемое значение  $\epsilon$  равно нулю при  $\epsilon > \epsilon_1$ .

Отсюда вытекает, что размер области  $l$ , по которой производится приборное осреднение (например, длина нити термоанемометра), не должен превышать величины  $l = \text{const } \nu^{3/4} \epsilon_1^{-1/4}$ . Эта величина может быть существенно меньше колмогоровского масштаба  $\eta$ , так как в рассматриваемой области значения диссипации могут существенно превышать  $\langle \epsilon \rangle$ . Для проведения конкретных расчетов зададимся некоторым уровнем точности, скажем,  $t = 0,2$ . Рассмотрим сначала измерения средней диссипации энергии. Воспользовавшись экспериментальными данными, которые обобщены Мониным и Ягломом [1967], заключаем, что 80% диссипации энергии сосредоточены в той части спектра, которая удовлетворяет условию  $\kappa \eta > 0,4$  ( $\kappa$  – волновое число). Таким образом, при измерении величины  $\langle \epsilon \rangle$  с точностью 20% длина нити должна быть не более чем  $l = 2,5 \eta$ . Можно предположить, что аналогичное условие должно соблюдаться и при измерениях моментов более высокого порядка. Единственное отличие должно заключаться в том, что среднее значение колмогоровского масштаба  $\eta$  следует заменить на величину  $\nu^{3/4} \epsilon_1^{-1/4}$ , т.е.  $l = 2,5 \nu^{3/4} \epsilon_1^{-1/4}$ .

При  $t = 0,2$  имеем  $h = 0,84$ . Из оценки  $\langle \epsilon \rangle = [1/3 (\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2)]^{3/2} / L = u^3 / L$  и известного равенства  $\langle \epsilon \rangle = 15\nu \langle (\partial u_1 / \partial x_1)^2 \rangle$  получаем  $L/\eta = 15^{-3/4} \text{Re}_\lambda^{3/2}$ , где  $\text{Re}_\lambda = u\lambda/\nu$ ,  $\lambda$  — микромасштаб турбулентности. Теперь легко найти максимальное значение длины нити термоанемометра. Имеем  $l/\eta = 2,5 (\langle \epsilon \rangle / \epsilon_1)^{1/4}$ . Так как  $n = 2$  при измерении спектра диссипации энергии, то из (4.26) имеем  $l/\eta = 0,5$  при  $\text{Re}_\lambda = 300$  и  $\mu = 0,5$ ,  $l/\eta = 0,2$  при  $\text{Re}_\lambda = 5000$  и  $\mu = 0,5$ ,  $l/\eta = 1,2$  при  $\text{Re}_\lambda = 300$  и  $\mu = 0,2$ ,  $l/\eta = 0,8$  при  $\text{Re}_\lambda = 5000$  и  $\mu = 0,2$  (оценки проведены для максимальных значений  $\text{Re}_\lambda$  и  $\mu$  в известных экспериментах). Отсюда видно, что во всех опытах точность измерения спектра диссипации энергии весьма мала, так как  $l/\eta = 1,5$  в наиболее благоприятном случае (Антониа, Фан-Тьен и Сатьяпракаш [1981]).

Имея в виду сделанные замечания, рассмотрим результаты известных экспериментов. При измерениях  $R_{\epsilon\epsilon}$  или спектра диссипации энергии получены следующие данные:  $\mu = 0,47$  (Гибсон и Масейо [1975]),  $\mu = 0,5$  (Вингаард и Пао [1975]),  $\mu = 0,43-0,51$  (Шампань, Пао и Виньянски [1976]),  $\mu = 0,5$  (Гэгне и Хопфингер [1979]),  $\mu = 0,5$  (Фрейе, Ван Атта и Гибсон [1972]),  $\mu = 0,38$  (Гурвич и Зубковский [1963, 1965]),  $\mu = 0,4$  (Понд и Стюарт [1965]),  $\mu = 0,25$  (Холмянский [1972]),  $\mu = 0,2$  (Антониа, Фан-Тьен и Сатьяпракаш [1981], Антониа, Сатьяпракаш и Хуссейн [1982], Антониа, Раджагопалан, Браун и Чамберс [1982], Местейер [1982], Ансельмет, Гэгне, Хопфингер и Антониа [1984]),  $\mu = 0,3-0,45$  (Кузнецов, Прасковский и Сабельников [1984а, б]). Наибольшее значение  $\text{Re}_\lambda$  было в работе Антониа, Фан-Тьена и Сатьяпракаша [1981] ( $\text{Re}_\lambda \sim 7 \cdot 10^3$ ), в которой получены наименьшие значения  $\mu$ . Разрешающая способность аппаратуры в этих и во всех остальных опытах была недостаточна ( $l/\eta > 1,5$ ).

Таким образом, погрешности измерений очень велики, и, следовательно, в настоящее время основное внимание необходимо сосредоточить на опытах, в которых выявляются качественные, а не количественные закономерности.

Отдельные результаты таких опытов приведены в работе Кузнецова, Прасковского и Сабельникова [1984а, б], в которой изучалось течение в следе за круглым цилиндром. Измерения проводились на расстоянии 38 калибров с помощью термоанемометра. Отношение длины нити к измеренному значению  $\eta$  составляло 5–8. Поэтому все сделанные выше замечания, касающиеся точности измерений, относятся и к результатам, полученным в рассматриваемой работе. Сигнал с термоанемометра, соответствующий продольной компоненте скорости, записывался на магнитограф, а затем обрабатывался на цифровой вычислительной машине. Были проведены два опыта, контролирующиеся точность измерений. В первом измерялась величина  $\kappa^2 E_1(\kappa)$ , где  $\kappa$  — волновое число,  $E_1$  — продольная спектральная плотность пульсаций скорости. В инерционном и вязком интервалах результаты измерений сравнивались с экспериментальными данными, обобщенными в книге Монины и Яглома [1967]. Установлено, что данные, полученные в рассматриваемой работе и в других экспериментальных исследованиях, удовлетворительно согласуются при  $\kappa\eta < 0,5$ . Во втором опыте сигнал осреднялся по варьируемому промежутку времени  $\tau$  и по такому сигналу находилась постоянная  $\mu$ . Установлено, что с точностью 10% значение  $\mu$

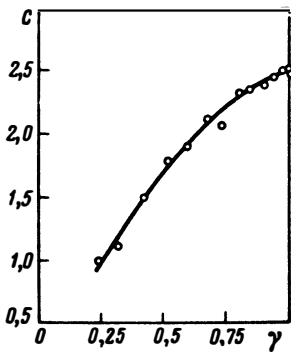


Рис. 4.1

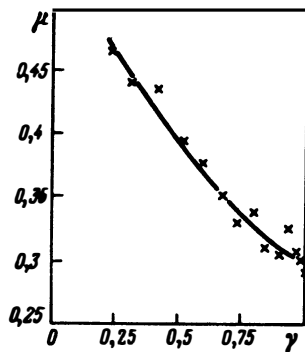


Рис. 4.2

Рис. 4.1. Зависимость колмогоровской постоянной от коэффициента перемежаемости по данным Кузнецова, Прасковского и Сабельникова [1984а, б]. Условия опытов те же, что и на рис. 3.2

Рис. 4.2. Зависимость постоянной  $\mu$  в корреляционной функции диссипации энергии от коэффициента перемежаемости по данным Кузнецова, Прасковского и Сабельникова [1984а, б]. Условия опытов те же, что и на рис. 3.2

Рис. 4.3. Зависимость условно осредненной диссипации энергии от разности скоростей по данным Кузнецова, Прасковского и Сабельникова [1984а, б]. Расстояние между точками  $r/L = 0,023$ ,  $L$  — продольный масштаб турбулентности,  $e^0 = \langle \epsilon_{11} \rangle v_1 / \langle \epsilon_{11} \rangle$ ,  $\epsilon_{11} = v (\partial u_1 / \partial x_1)^2$ ,  $v^0 = v_1 / (v_1^2)^{1/2}$ . Условия опытов те же, что и на рис. 3.2

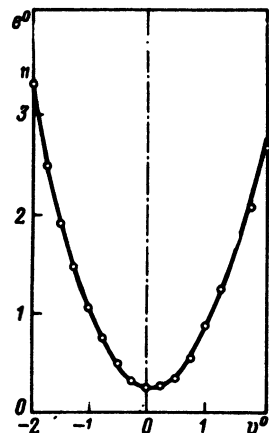


Рис. 4.3

не меняется, если  $vt < 3l^*$ ) ( $v$  — средняя скорость потока,  $l$  — длина нити термоанемометра). Таким образом, можно ожидать, что точность рассматриваемых измерений ненамного хуже, чем в остальных работах.

Одна из целей рассматриваемой работы заключалась в том, чтобы проверить, насколько универсальными являются постоянные  $C$  и  $\mu$ . Такая задача была поставлена в связи со следующими соображениями. Во-первых, имелся ряд теоретических соображений, указанных в § 4.3, из которых следовало, что  $C$  и  $\mu$  могут зависеть от  $\gamma$ . Во-вторых, основные результаты известных измерений получены в тех областях течений, где коэффициент перемежаемости близок к единице. В-третьих, известные из литературы значения постоянной  $C$  заметно различаются. Например, в работе Гибсона и Шварца [1963] (течение за решеткой) установлено, что  $C = 1,7$ , а в работе Антониа, Сатьяпракаша и Хуссейна [1982] (течение вблизи оси круглой струи) измеренное значение  $C$  составляло  $C = 2,5$ . Столь заметная вариация, по-видимому, превышает точность измерений.

\*) При  $vt > 3l$  измеренное значение  $\mu$ , так же как и в опытах Понда и Стюарта [1965], возрастало при увеличении  $\tau$ .

Данные, изображенные на рис. 4.1 и 4.2, дают ответ на поставленный вопрос. Видно, что величины  $C$  и  $\mu$ , традиционно считающиеся постоянными, в действительности заметно варьируются. Тем самым подтверждается один из выводов, сделанных в § 4.3. Следует, однако, отметить, что приведенные на рис. 4.1 и 4.2 зависимости  $C$  и  $\mu$  от  $y$  получены при измерении функций  $C(y)$ ,  $\mu(y)$ ,  $\gamma(y)$ , где  $y$  — поперечная координата. Так как опыты проведены в одном сечении, а тип течения не менялся, то из рис. 4.1 и 4.2 не следует, что коэффициент перемежаемости — единственный определяющий параметр.

Вторая цель состояла в проверке формулы (4.13). Измерялась только величина  $\epsilon_{11} = \nu(\partial u_1/\partial x_1)^2$ , которая условно осреднялась при постоянном значении  $v_1$  (индекс 1 соответствует направлению течения). Из таких опытов можно получить лишь качественное подтверждение соотношения (4.13), так как количественная проверка (4.13) связана с одновременным измерением всех трех компонент скорости. Результаты экспериментов приведены на рис. 4.3, из которого видно, что увеличение  $v_1$  приводит к сильному возрастанию  $\langle \epsilon_{11} \rangle_{v_1}$ . Аналогичный вывод следует из (4.13). Разумеется, ввиду не слишком большой точности измерений изложенные выводы нуждаются в дальнейшей проверке.

Заканчивая обсуждение статистических характеристик мелкокомасштабной турбулентности, остановимся на главных результатах проведенного исследования. Сформулирована гипотеза подобия, обобщающая предположения, которые используются в теории локально однородной турбулентности для описания каскадного характера процесса передачи энергии от крупномасштабных возмущений к мелкокомасштабным. Из этой гипотезы и математических определений величин, которые используются при ее формулировке, установлено, что в инерционном интервале справедливо выражение  $\langle v^n \rangle_{V,t} = V^n (r/R)^{q(n)}$ , где  $v = u(x^{(2)}) - u(x^{(1)})$ ,  $V = u(x^{(3)}) - u(x^{(1)})$ ,  $r = x^{(2)} - x^{(1)}$ ,  $R = x^{(3)} - x^{(1)}$ ,  $\eta \ll r \ll R \ll L$ ,  $L$  — интегральный масштаб турбулентности,  $q$  — аналитическая функция  $n$ , нижние индексы  $V$  и  $t$  соответствуют осреднению по турбулентной жидкости при условии  $V = \text{const}$ .

Из гипотезы подобия и уравнений движения вытекает, что функция  $q(n)$  имеет особые точки, расположенные при конечных значениях  $n$ . В малой окрестности особых точек характер функции  $q(n)$  определяется взаимодействием между турбулентной и нетурбулентной жидкостями. Основная черта этого взаимодействия — непосредственное влияние крупномасштабных, энергосодержащих возмущений на медленные, мелкокомасштабные флуктуации. Гипотеза подобия в окрестности этих точек несправедлива, так как она исходит из представления о том, что взаимодействие возмущений разных масштабов носит каскадный, а не прямой характер. Важно, что изложенные соображения касаются процессов, происходящих во всех областях турбулентных течений, в том числе и в тех областях, где перемежаемость традиционно считается несущественной.

Из уравнения для распределения вероятностей разности скоростей установлено, что постоянные, характеризующие различные характеристики турбулентности в инерционном интервале ее спектра, вследствие влияния перемежаемости неуниверсальны. В частности, этот вывод относится к постоянной  $C$  в законе "двух третей".

Важные выводы вытекают из анализа положения особых точек функции  $q(n)$  (эти точки характеризуют взаимодействие турбулентной и нетурбулентной жидкостей). Установлено, что в пространстве  $n$  эти точки находятся достаточно далеко ( $n < -5$ ) от тех точек, которые определяют энергию пульсаций ( $n = 2$ ) и флуктуации диссипации ( $n = 6$ ). Отсюда можно заключить, что взаимодействие турбулентной и нетурбулентной жидкостей носит слабый характер. Именно по этой причине в теории локально однородной турбулентности содержатся две малые постоянные. Первая постоянная  $k$  содержится в формуле (4.13) для условно осредненной диссипации энергии (она связана с постоянной  $C$  в законе "двух третей"). Вторая постоянная  $q(2) \sim 2/3$  связана с постоянной  $\mu$ , характеризующей пульсации диссипации.

Указанные оценки свидетельствуют о том, что возможно создание достаточно простой теории, в которой для описания функции  $q(n)$  используются асимптотические зависимости, не учитывающие детали взаимодействия между турбулентной и нетурбулентной жидкостями. Высказанные соображения свидетельствуют также о том, что при решении ряда практически важных вопросов, связанных с оценкой структурных функций не слишком высокого порядка (см. главы 5 и 6), можно использовать простые аппроксимации функции  $q(n)$ , например формулу (4.12), справедливую для логнормального закона распределения вероятностей.

Решение вопросов, рассмотренных в данной главе, имеет исключительно важное значение для теории турбулентности. Действительно, хотя главные черты турбулентного потока и определяются наиболее крупномасштабными, энергосодержащими вихрями, теория турбулентности не может ограничиться рассмотрением только таких вихрей, так как их эволюция зависит от диссипации энергии, которая осуществляется в наиболее мелких вихрях. По этой причине объем информации, необходимой для достаточно точного описания течения при больших числах Рейнольдса, оказывается очень велик. Используем полученные выше соотношения для оценки этого объема при решении точных уравнений Навье – Стокса в пространственной области  $\omega$  в течение времени  $T$ .

Для этого в области  $\omega \times T$  выберем  $n$  реперных точек таких, что описание скорости в произвольной точке может быть получено путем линейной интерполяции по значениям скорости в реперных точках. Ввиду того, что флуктуации диссипации энергии велики, реперные точки должны быть расположены сильно неравномерно. Чтобы учесть указанное обстоятельство, введем локальный колмогоровский масштаб длины  $\eta = \nu^{3/4} \epsilon^{-1/4}$  и локальное колмогоровское время  $\tau = \sqrt{\nu/\epsilon}$ . Очевидно,

$$n \sim \int_0^T \int_{\omega} \eta^{-3} \tau^{-1} d^3 x dt = \int_0^T \int_{\omega} \epsilon^{5/4} \nu^{-11/4} d^3 x dt. \quad (4.27)$$

В качестве примера рассмотрим однородную стационарную турбулентность, предполагая, что имеется сила, работа которой компенсирует диссипацию энергии. Тогда из (4.27) получим

$$n \sim VT \nu^{-11/4} \langle \epsilon^{5/4} \rangle, \quad (4.28)$$

где  $V$  – объем области  $\omega$ . Используя результаты, полученные в § 4.3,



находим

$$\langle \epsilon^{5/4} \rangle_{v,t} \sim (v^3/r)^{5/4} (vr/v)^{x(5/2)-5/4} \approx \\ \approx (v^3/r)^{5/4} (vr/v)^{15\mu/128},$$

где последняя оценка получена из приближенной формулы (4.22). Величина  $15\mu/128$  порядка 0,01. Это означает, что при оценке величины  $n$  можно пренебречь флуктуациями диссипации\*) Поэтому, считая, что  $V \sim L^3$ ,  $T \sim (L^2/\langle \epsilon \rangle)^{1/3}$ , из (4.28) найдем

$$n \sim \text{Re}^{11/4}, \quad (4.29)$$

где  $\text{Re}$  — число Рейнольдса, рассчитанное по интегральному масштабу турбулентности  $L$  и среднеквадратической скорости.

Отсюда видно, что объем информации, необходимой для описания турбулентности, неограниченно растет с увеличением числа  $\text{Re}$ , и поэтому следует искать пути приближенного решения проблемы. Один из таких путей может быть основан на принципе автомодельности турбулентных течений по числу  $\text{Re}$ . При таком подходе для описания течения с большим числом Рейнольдса можно использовать результаты решения точных уравнений Навье — Стокса, в которых число Рейнольдса относительно невелико. Очевидно, что при вычислении  $n$  такой прием приводит к ошибке порядка колмогоровской скорости  $(\nu \langle \epsilon \rangle)^{1/4}$ , т.е. относительная ошибка  $\text{Er}$  порядка  $\text{Re}^{-1/4}$ . Используя эту оценку и формулу (4.29), заключаем, что при описании поля скорости с заданной точностью требуется количество чисел, которое по порядку величины равно

$$n \sim \text{Er}^{-11} \quad (4.30)$$

Второй путь связан с рассмотрением поля скорости, частично осредненного по пространственным областям с характерным размером  $l$ , который удовлетворяет условию  $L \gg l \gg \nu^{3/4} \langle \epsilon \rangle^{-1/4}$ . Такой подход используется в подсеточных моделях турбулентности, в которых для описания частично осредненного поля скорости формулируется уравнение, сходное с уравнением Навье — Стокса, и предполагается, что коэффициент микротурбулентной вязкости, входящий в это уравнение, универсально связан с характеристиками вихрей, размеры которых порядка  $l$ . Естественно предположить, что так же, как и в предыдущем случае, для оценки количества чисел  $n$ , необходимых для достаточно точного описания частично осредненного поля скорости, можно пренебречь флуктуациями диссипации энергии. Поскольку пространственный масштаб изменения частично осредненного поля скорости порядка  $l$ , а временной, как ясно из соображений размерности, порядка  $(l^2/\langle \epsilon \rangle)^{1/3}$ , то при  $V \sim L^3$ ,  $T \sim (L^2/\langle \epsilon \rangle)^{1/3}$  получаем  $n \sim (l/L)^{11/3}$ . Так как масштаб  $l$  принадлежит инерционному интервалу, то при вычислении среднеквадратической скорости получается ошибка порядка  $(\langle \epsilon \rangle l)^{1/3}$ , т.е.  $\text{Er} \sim (l/L)^{1/3}$ , и, следовательно, снова приходим к формуле (4.30). Таким образом, оба подхода принципиально не отличаются.

\*) Этот вывод справедлив только при оценке величины  $n$ , а не при отыскании положения реперных точек.

Единственно возможное преимущество второго подхода состоит в том, что частично сглаженное поле скорости  $u(x, l)$ , как это следует из гипотезы подобия, является дифференцируемым. Действительно, пусть точки 1, 2, 3 лежат в турбулентной жидкости, а расстояния между точками 1 и 2, 1 и 3 соответственно равны  $r$  и  $R$  ( $\nu^{3/4} \langle \epsilon \rangle^{-1/4} \ll r \ll R \ll L$ ,  $v = u(x^{(2)}) - u(x^{(1)})$ ,  $V = u(x^{(3)}) - u(x^{(1)})$ ). В соответствии с гипотезой подобия величина

$$K_n^{(l)} = \langle \sqrt{\partial u_i(x, l) / \partial x_k}^2 \rangle_{v, r}$$

зависит только от  $v, r, l$ , т.е.

$$K_n^{(l)} = v^n l^{-n} M_n^{(l)}(l/r).$$

Тогда аналогично формуле (4.20) получим

$$K_n^{(l)}(V, R) = \int K_n^{(l)}(v, r) P_{rt}(v, r, | V, R) d^3 v.$$

Отсюда найдем соотношение, аналогичное (4.21),

$$M_n^{(l)} = (l/r)^{q(n)},$$

где функция  $q(n)$  по-прежнему является характеристикой инерционного интервала спектра турбулентности. Отсюда видно, что все моменты положительных порядков существуют, и поэтому частично осредненное поле скорости дифференцируемо.

Подводя итоги проведенного анализа, отметим, что, как видно из (4.30), объем информации, необходимый для описания турбулентности, резко возрастает с увеличением точности. Поэтому разработка надежной теории инерционного интервала спектра турбулентности имеет исключительно важное значение для создания всей теории турбулентности.

Сжигание предварительно перемешанных газов в турбулентном потоке широко используется в самых разнообразных технических устройствах (промышленные печи, горелки, камеры сгорания газотурбинных двигателей и т.д.). Основы теории этого процесса заложены в работах Бурке и Шумана [1928], Шваба [1948], Зельдовича [1949], Гауссорна, Уиддела и Хоттела [1949]. Одна из главных идей теории выдвинута Бурке и Шуманом. Она основана на предположении о том, что процесс горения лимитируется смешением горючего и окислителя. Критерий пригодности введенного предположения можно получить из работы Зельдовича [1949], результаты которой удобно обсудить позже. В соответствии с принятым предположением можно считать, что скорости всех химических реакций бесконечно велики и, следовательно, состав и температура в диффузионном пламени термодинамически равновесны. Это предположение позволяет свести задачу к описанию поля инертной (не реагирующей) примеси. Действительно, предполагая, что все коэффициенты молекулярного переноса равны<sup>\*</sup>), уравнения диффузии горючего и окислителя можно записать в виде

$$\Lambda(c_f) = -\rho W_f, \quad \Lambda(c_o) = -\rho W_o, \quad (5.1)$$

$$\Lambda = \rho \frac{\partial}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla - \nabla (D \rho \nabla),$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{u}$  — скорость,  $x$  — координата,  $D$  — коэффициент молекулярной диффузии,  $W$  — скорость реакции,  $c$  — концентрация, индексы  $f$  и  $o$  относятся к горючему и окислителю,  $\Lambda$  — дифференциальный оператор, соответствующий уравнению диффузии,  $t$  — время.

Если химическая реакция является одноступенчатой, то между величинами  $W_f$  и  $W_o$  существует следующая связь:  $W_o = St W_f$ , где  $St$  — стехиометрический коэффициент (количество граммов окислителя, необходимое для полного сгорания грамма горючего). В силу линейности оператора  $\Lambda$  скорость реакции можно исключить из формулы (5.1), получив соотношение  $\Lambda(St c_f - c_o) = 0$ . Поскольку  $\Lambda(\text{const} \cdot F) = \text{const} \Lambda(F)$ ,  $\Lambda(\text{const}) = 0$ , то удобно ввести величину

$$z = \frac{St c_f - c_o + 1}{1 + St}, \quad \Lambda(z) = 0, \quad (5.2)$$

<sup>\*</sup> При описании турбулентного горения это ограничение не является сильным вследствие автомодельности турбулентных течений по числу Рейнольдса.

которая равна 1 в потоке чистого горючего и 0 — в потоке чистого окислителя. В отсутствие горения она дает концентрацию горючего, а при горении — восстановленную концентрацию горючего.

Так как обычно термодинамическое равновесие смещено в сторону продуктов сгорания, то концентрации промежуточных веществ малы, а условие термодинамического равновесия приближенно запишется в виде  $c_f c_o = 0$ , т.е. реакция протекает настолько быстро, что в каждой точке потока не могут одновременно присутствовать топливо и окислитель. Тогда из (5.2) находим

$$c_f = 0 \left( z < z_s = \frac{1}{1 + St} \right), \quad c_f = \frac{z - z_s}{1 - z_s} \quad (z > z_s). \quad (5.3)$$

Из соотношения (5.3) видно, что сделанным предположениям соответствует бесконечно тонкая зона химических реакций, расположенная на изоскалярной поверхности  $z = z_s$ , на которой  $c_f = c_o = 0$ . Легко показать, что на рассматриваемой поверхности потоки горючего и окислителя находятся в стехиометрическом соотношении. Таким образом, определение характеристик диффузионного факела сводится к описанию поля концентрации инертной примеси.

Исходя из достаточно общих предположений, можно показать (§ 5.1), что этот вывод справедлив и в том случае, когда число реакций и реагирующих веществ произвольно. При этом формула (5.2) должна быть обобщена, т.е. под концентрацией  $z$  необходимо понимать величину, которая получается в результате следующей операции. Рассмотрим некоторую точку потока и мысленно проведем все химические реакции в обратном направлении. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока все атомы, содержащиеся в топливе, не соберутся в исходную молекулу. Полученная таким образом концентрация топлива и будет равна  $z$ .

Специфические особенности диффузионного горения в турбулентном потоке были впервые исследованы в работе Гауссорна, Уиделла и Хоттела [1949]. Основная проблема, которая возникает в рассматриваемом случае, связана с тем, что, как следует из (5.3), концентрация горючего  $c_f$  нелинейно связана с концентрацией инертной примеси. Поэтому при нахождении полноты сгорания приходится осреднять нелинейную зависимость  $c_f(z)$ , для чего необходимо знать распределение вероятностей концентрации инертной примеси  $z$ . Необходимость такого осреднения ясна из чисто физических соображений. Дело в том, что выводы, сделанные в работе Бурке и Шумана [1928], справедливы и при описании горения в турбулентном потоке, т.е. можно считать, что зона реакции является очень тонкой. Из-за случайных колебаний скорости фронт пламени также случайно колеблется. Следовательно, в каждой точке потока будет наблюдаться то избыток горючего, то избыток окислителя. По этой причине при одном и том же значении  $\langle z \rangle$  с увеличением амплитуды пульсаций концентрации амплитуда пульсаций фронта пламени также возрастает, что приводит к снижению средней полноты сгорания. Отсюда следует, что для описания эффективности процесса горения необходимо иметь информацию о распределении вероятностей концентрации.

Из проведенного выше анализа видно, что исследование характеристик турбулентного диффузионного горения сводится к описанию поля кон-

центрации инертной примеси. Поэтому для решения рассматриваемой проблемы естественно привлечь методы, разработанные в теории турбулентности. Такие методы в настоящее время интенсивно развиваются (Лондер и Сполдинг [1972], Баев, Головичев и Ясаков [1976], Кузнецов, Лебедев, Секундов и Смирнова [1977а, б, 1980], Байуотер [1980], Вулис, Ершин и Ярин [1963], Зимонт и Мещеряков [1974], Зимонт, Мещеряков и Сабельников [1978, 1981, 1983], Олбер и Бэтт [1974, 1976], Борги [1980], Громов, Ларин и Левин [1984], Мещеряков и Сабельников [1984б] и др.). В этих методах используется та или иная полуэмпирическая модель турбулентности, позволяющая рассчитать величины  $\langle z \rangle$  и  $\sigma^2 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle$ . При осреднении различных нелинейных зависимостей предполагается, что плотность вероятностей концентрации  $z$  универсально связана с величинами  $\langle z \rangle$  и  $\sigma$ , т.е.  $P = \sigma^{-1} F[(z - \langle z \rangle)/\sigma]$ . Вид функции  $F$ , как правило, выбирается из более или менее произвольных соображений.

Основные проблемы, которые возникают при использовании рассмотренных выше методов, связаны с описанием специфических газодинамических особенностей диффузионного горения, которые обусловлены сильным уменьшением плотности. Например, известно, что дальнобойность затопленного диффузионного факела существенно выше, чем дальнобойность негорящей струи того же газа (Гауссорн, Уиддел и Хоттел [1949], Кремер [1966]). Расчеты и эксперименты (Кузнецов, Лебедев, Секундов и Смирнова [1977б], Бурико и Лебедев [1980]) показывают, что при диффузионном горении возникают два разных газодинамических эффекта. Первый эффект связан с уменьшением времени пребывания в факеле. Например, при горении в канале увеличивается скорость, а при горении в свободном факеле скорость потока уменьшается слабее, чем в негорящей струе. Этот эффект приводит к замедлению смешения. Второй эффект возникает только при горении в ограниченном пространстве и обусловлен тем, что под воздействием градиента давления тяжелая жидкость (окислитель) и легкая жидкость (продукты сгорания) ускоряются по-разному. Поэтому увеличивается поперечный градиент скорости, что приводит к дополнительной турбулизации потока и улучшению смешения. Поскольку оба эффекта противоположным образом воздействуют на характеристики смешения, то в различных условиях может происходить как уменьшение длины факела (Бурико и Лебедев [1980]), так и ее увеличение (Клячко и Строкин [1969]).

Следующий шаг в развитии теории диффузионного горения сделан Зельдовичем [1949], который учел влияние скорости химических реакций на структуру пламени. Им было установлено, что, как правило, толщина зоны реакций существенно меньше характерных размеров задачи. Это связано с тем, что химические реакции, встречающиеся в процессах горения, идут с большой скоростью только при высоких температурах. Поэтому при удалении от фронта пламени, т.е. от поверхности  $z = z_s$ , скорость реакций сильно уменьшается. Указанное обстоятельство позволяет рассматривать зону реакций как своеобразный пограничный слой, толщина которого много меньше, чем радиус его кривизны. Анализ характеристик такого пограничного слоя показывает, что при большой энергии активации ведущих реакций распределения температуры и концентраций во фронте пламени достаточно слабо отличаются от распределений, которые получают

ся при бесконечно большой скорости реакции. Поэтому поток горючего к фронту пламени  $Q_f$  легко оценивается из решения задачи в предположении о бесконечной скорости реакции, т.е.  $Q_f = (1 - z_s)^{-1} \rho D \left| \frac{dz}{dn} \right|$ , где  $n$  — нормаль к зоне реакции. Приведенная формула вытекает из (5.3).

Этот поток играет решающую роль в теории, так как в работе Зельдовича [1949] установлено, что устойчивое горение возможно лишь, если  $Q_f < Q_{fc}$ , где  $Q_{fc}$  по порядку совпадает с потоком горючего в нормальном фронте пламени. Напомним, что таким фронтом называется плоская зона реакции, распространяющаяся по неподвижной смеси горючего и окислителя. От диффузионного этот фронт отличается тем, что оба горючих компонента находятся по одну сторону зоны реакции. Скорость движения этого фронта  $u_n$  зависит от характерного времени химической реакции  $\tau_c$  и коэффициентов молекулярного переноса, т.е.  $u_n \sim \sqrt{D/\tau_c}$ . Использование величины  $u_n$  очень удобно, так как детальная кинетика часто неизвестна, а скорость,  $u_n$  легко измеряется в опытах. Величина  $u_n$  зависит от состава смеси, начальной температуры и давления. В данном случае следует оценивать  $Q_{fc}$  по значению  $u_n$  в стехиометрической смеси с той же начальной температурой, которая бы наблюдалась при смешении топлива и окислителя без реакции. Отсюда ясно, что  $Q_{fc} = u_n(z_s) z_s \rho(z_s)$ .

Таким образом, условие  $Q_f < Q_{fc}$  приобретает вид

$$\left| D \frac{dz}{dn} \right| < z_s(1 - z_s) u_n(z_s).$$

Из теории Зельдовича [1949] следует, что если это условие выполнено, то процесс горения происходит так же, как и при бесконечно большой скорости реакции. В противном случае происходит срыв пламени.

Предположение о том, что характеристики диффузионного горения слабо зависят от скорости реакций, получило широкое распространение, так как оно позволяет решить ряд практически важных задач, например найти длину факела. Однако в последнее время возник ряд новых проблем, связанных с необходимостью дальнейшей интенсификации процесса горения, повышением его эффективности, снижением выброса токсичных веществ и т.д. и требующих значительного уточнения теории.

Рассмотрим конкретный пример — проблему снижения концентрации окислов азота. Во многих случаях (в частности, в камерах сгорания газотурбинных двигателей) концентрация окислов азота на один-два порядка ниже равновесной. Поэтому их эмиссия существенно зависит от скорости химической реакции. Скорость окисления азота резко меняется при вариации температуры (Зельдович, Садовников и Франк-Каменецкий [1947]). Поэтому даже слабая термодинамическая неравновесность основных реакций и небольшие потери тепла (например, вследствие излучения) могут сильно сказаться на эмиссии окислов азота (Боумен [1973], Сарофим и Поль [1973], Сигал [1977]).

Таким образом, видна общая задача, связанная с анализом влияния турбулентности на протекание химических реакций в условиях, когда главные черты процесса (например, длина факела) не зависят от скорости химических процессов. Решению этой задачи и посвящена данная глава.

Развитые в ней методы носят достаточно общий характер. Однако оказалось удобным изложить их существо на примере решения вполне конкрет-

ной проблемы — описания поля концентрации окислов азота в затопленном диффузионном факеле. Удобство такого способа изложения связано с необходимостью опытной проверки основных предположений и выводов теории, а затопленный свободный факел наиболее хорошо изучен экспериментально. В соответствии с этим ниже рассматривается горение, возникающее при истечении пропана или водорода со скоростью  $u_0$  из круглого сопла диаметром  $d$  вертикально вверх в неподвижный воздух. Давление и температура считаются нормальными. Характерные значения определяющих параметров:  $d = 3-6$  мм,  $u_0 = 10-30$  м/с для пропана;  $d = 0,5-6$  мм,  $u_0 = 100-800$  м/с для водорода.

Принятый в главе план изложения учитывает, что решение можно разбить на отдельные этапы. Сначала (§ 5.1) естественно проанализировать случай, когда все химические реакции, приводящие к окислению топлива, находятся в равновесии. Затем (§ 5.2) рассматривается образование окислов азота в предположениях о том, что их концентрация намного ниже равновесной, а все остальные концентрации равновесны. Здесь возникает общая проблема, связанная с необходимостью осреднения скоростей химических реакций. В § 5.3 анализируются потери тепла излучением, а в § 5.4 — влияние турбулентности на протекание всех химических реакций, в том числе и реакций окисления топлива. Разработанные методы используются в § 5.5 для описания образования окислов азота. Наконец, в § 5.6 предпринята попытка развить более общую теорию, в которой не предполагается, что влияние химических реакций на основные характеристики факела мало.

Связь указанных выше проблем с задачами, рассмотренными в предыдущих главах, просматривается вполне отчетливо. В самом деле, скорость окисления азота чрезвычайно сильно зависит от температуры. Поэтому при нахождении средней скорости реакции необходимо знать распределение вероятностей температуры. Аналогичная проблема возникает и при оценке излучения факела. Наконец, при исследовании влияния турбулентности на отклонения от термодинамического равновесия необходимо в первую очередь знать локальную структуру турбулентности, так как при диффузионном горении толщина зоны химических реакций очень мала, и поэтому внутренняя структура этих зон в основном зависит от характеристик наиболее мелкомасштабных вихрей.

### § 5.1. Газодинамические эффекты при турбулентном диффузионном горении

В данном параграфе рассматривается горение заранее не перемешанных газов в предположении о том, что скорости химических реакций бесконечно велики. В нем, так же как и везде далее, считается, что число Маха мало, число Рейнольдса велико, коэффициенты молекулярного переноса одинаковы, и если есть стенки, то отвод тепла в них пренебрежимо мал. В этом и в следующем параграфе предполагается также, что отсутствуют потери тепла излучением. Еще одно малоограничительное предположение удобно сформулировать позже. Как показано в работах Билджера [1976], Кузнецова, Лебедева, Секундова и Смирновой [1977а], эти предположения позволяют свести расчет характеристик горения к исследованию поля восста-

новленной концентрации горючего  $z$ , т.е. исключить из рассмотрения химические реакции.

Пусть в химических реакциях участвует  $M$  веществ. Тогда уравнения переноса можно записать в виде  $\Lambda(c_l) = W_l \rho$ . Здесь  $c_0$  — энтальпия,  $c_l$  ( $l = 1, \dots, M$ ) — массовые концентрации,  $W_0$  — скорость тепловыделения,  $W_l$  ( $l = 1, \dots, M$ ) — скорость выделения (поглощения) вещества  $l$ . Пусть все вещества состоят из  $n$  различных атомов (или нераспадающихся групп атомов). Очевидно, что общая масса атомов каждого вида (или нераспадающихся групп атомов) сохраняется. Сохраняется также и полная энергия, которая при малом числе Маха равна сумме энтальпии и энергии химических связей. Указанные законы сохранения можно записать в виде

$$\sum_{l=0}^M A_l^i W_l = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Здесь  $A_l^0$  — теплота образования вещества  $l$ ,  $A_l^i$  ( $l \geq 1, i \geq 1$ ) — массовая доля атомов с номером  $i$  в веществе с номером  $l$ . Используя это условие, в силу линейности оператора  $\Lambda$  из уравнений переноса  $\Lambda(c_l) = \rho W_l$  можно исключить  $\rho W_l$ . При этом получится  $n+1$  уравнений вида

$$\Lambda(\varphi_i) = 0, \quad \varphi_i = \sum_{l=0}^M A_l^i c_l.$$

Характеристики термодинамически равновесного состояния полностью определяются величинами  $\varphi_i$ . Введем теперь не слишком обременительное предположение о том, что начальные условия для величин  $\varphi_i$  подобны (в простейшем случае это условие означает, что подобны начальные распределения температуры и концентраций топлива и окислителя). Тогда  $\varphi_i$  — линейные функции  $z$ , что является следствием линейности оператора  $\Lambda$  и подобия начальных и граничных условий. Следовательно, термодинамический расчет позволяет выразить температуру и концентрации всех веществ через  $z$ , где  $\Lambda(z) = 0$ ,  $z = 1$  в потоке топлива,  $z = 0$  в потоке окислителя.

Заметим теперь, что если число Маха мало, то при вычислении плотности давление можно считать постоянным\*). Тогда описанная выше процедура дает возможность выразить плотность  $\rho$  только через  $z$ .

Таким образом, задача сводится к отысканию распределения концентрации инертной примеси. Рассмотрим, как решается эта задача в теории турбулентности. Обычно для этой цели используются осредненные уравнения движения и диффузии. Входящие в них напряжения Рейнольдса и потоки веществ выражаются через градиенты средней скорости и средней концентрации и коэффициенты турбулентного переноса. Различие всех теорий (а таких теорий известно очень много) заключается в методах вычисления коэффициентов турбулентного переноса.

Ниже используется модель, предложенная Секундовым [1971] и уточненная Кузнецовым, Лебедевым, Секундовым и Смирновой [1977а, б, 1980]. Особенности других моделей, так же как и более подробное изложение основных идей полуэмпирической теории турбулентности, можно найти в обзоре Гиневского и др. [1978].

\*) В уравнениях движения давление должно быть учтено при любом числе Маха.



Использованная модель включает в себя уравнения для энергии турбулентности, турбулентной вязкости и пульсаций концентрации. В этой модели, так же как и во всех остальных полуэмпирических теориях, при выводе всех уравнений используется очень много достаточно произвольных предположений. Здесь нецелесообразно на них останавливаться подробно. Укажем лишь, что уравнения, полученные в любой модели, следует рассматривать как гипотезу, справедливость которой можно установить только путем сопоставления результатов расчета с экспериментальными данными. Приведем окончательную систему уравнений, записанную в приближении пограничного слоя для осесимметричного течения:

$$\begin{aligned}
 \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle v_0 \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} &= \\
 = \frac{1}{y} \frac{1}{\partial y} \left[ \langle \rho \rangle v_{t y} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right] - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} - (\langle \rho \rangle - \rho_0) g, \\
 \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \langle \rho \rangle y v_0 &= 0, \quad v_0 = \frac{\langle \rho v \rangle}{\langle \rho \rangle}, \\
 \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial \langle z \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle v_0 \frac{\partial \langle z \rangle}{\partial y} &= \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \langle \rho \rangle \frac{v_t}{Sc} y \frac{\partial \langle z \rangle}{\partial y} \right], \\
 \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial e}{\partial x} + \langle \rho \rangle v_0 \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \langle \rho \rangle \kappa_2 v_t y \frac{\partial e}{\partial y} \right] + \\
 + \langle \rho \rangle v_t \left( \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right)^2 - \beta_2 \left[ 1 + \frac{v_t}{e} \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right| \right] \frac{\langle \rho \rangle e^2}{v_t}, & \quad (5.4) \\
 \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial v_t}{\partial x} + \langle \rho \rangle v_0 \frac{\partial v_t}{\partial y} &= \\
 = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \langle \rho \rangle \kappa_3 v_t y \frac{\partial v_t}{\partial y} \right] + \beta_3 \frac{\langle \rho \rangle v_t^2}{e} \left( \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right)^2 - \beta_4 \langle \rho \rangle v_t \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right|, \\
 \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial \sigma^2}{\partial x} + \langle \rho \rangle v_0 \frac{\partial \sigma^2}{\partial y} &= \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \langle \rho \rangle \kappa_1 v_t \frac{\partial \sigma^2}{\partial y} \right] + \\
 + 2 \langle \rho \rangle v_t Sc^{-1} \left( \frac{\partial \langle z \rangle}{\partial y} \right)^2 - \beta_1 \left[ 1 + \frac{v_t}{e} \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right| \right] \frac{\langle \rho \rangle e \sigma^2}{v_t}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $x$  — продольная координата,  $y$  — радиальная координата,  $u$  — продольная скорость,  $v$  — поперечная скорость,  $v_t$  — коэффициент турбулентной вязкости,  $e = \frac{1}{2} \langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle$  — энергия турбулентности,  $\sigma^2 = \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2$  — дисперсия пульсаций концентрации,  $p$  — давление,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho_0$  — плотность окружающего воздуха (последнее слагаемое в первом из уравнений (5.4) учитывается только при расчете свободной струи или факела). Значения эмпирических постоянных  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, Sc, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  подбираются так, чтобы правильно описать изотерми-

ческое смешение. При описании горения их значения не изменяются. Во всех проведенных ниже расчетах предполагалось, что  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ,  $\kappa_3 = 2.4$ ,  $\beta_1 = \beta_4 = 0.14$ ,  $\beta_2 = 0.07$ ,  $\beta_3 = 0.9$ ,  $Sc = 0.8$ .

Первое соотношение в (5.4) есть уравнение движения, записанное в приближении пограничного слоя. В нем учтены силы плавучести. Здесь, так же как и во всей настоящей главе, рассматриваются факелы, образующиеся при истечении горючего вертикально вверх. Второе соотношение является уравнением неразрывности, а третье — уравнением турбулентной диффузии. Следующие два уравнения для энергии турбулентности и коэффициента турбулентной вязкости описывают принятую модель турбулентности. Эти уравнения, так же как последнее соотношение в (5.4), которое дает дисперсию пульсаций концентрации, построены по известной схеме, отражающей роль процессов конвекции (левые части уравнений), турбулентной диффузии (первые члены в правых частях уравнений), порождения (вторые члены в правых частях уравнений) и диссипации (последние слагаемые в правых частях уравнений). Величина  $\beta_1 [1 + \nu_r \epsilon^{-1} |\partial \langle u \rangle / \partial y|] \epsilon \sigma^2 \nu_r^{-1}$ , фигурирующая в последнем из соотношений в (5.4), равна удвоенному значению скалярной диссипации  $\langle N \rangle = \langle D(\partial z / \partial x_i)^2 \rangle$ , которая далее будет играть очень важную роль

Зависимость  $\rho(z)$  либо осредняется с помощью формул (3.56), (3.57), либо предполагается, что  $\langle \rho \rangle = \rho(\langle z \rangle)$ . Оба метода расчета дают результаты, которые в рассмотренных случаях отличаются не более чем на 5%.

В качестве иллюстрации пригодности системы (5.4) для описания турбулентного диффузионного горения приведем несколько примеров. Первый пример — затопленный свободный диффузионный факел, образующийся при истечении струи топлива из круглого сопла диаметром  $d$  вертикально вверх со скоростью  $u_0$ .

На рис. 5.1 приведена зависимость длины факела водорода  $l$  от числа Фруда  $2u_0^2 / (gd) = Fr$ , которое выбрано в качестве критерия, характеризующего силы плавучести, так как отношение плотностей воздуха  $\rho_0$  и продуктов сгорания  $\rho(z_s)$  в данном случае неизменно. Под длиной факела понимается расстояние от сопла до той точки на оси струи, где выполняется равенство  $\langle z \rangle = z_s = l / (1 + St)$ . Как уже указывалось, результаты расчета очень слабо зависят от того, учитывается или нет влияние пульсаций концентрации  $z$  на среднее значение плотности. Поэтому хорошее совпадение теоретических и экспериментальных данных, видное из рис. 5.1, свидетельствует о том, что для расчета газодинамической структуры течения и геометрической конфигурации факела учет пульсаций концентрации необязателен. В данном случае для проведения таких расчетов необязателен и учет кинетики химических реакций.

Влияние пульсаций концентрации заметно проявляется при вычислении средних концентраций реагирующих веществ, что следует из данных, помещенных на рис. 5.2. Эти данные получены Бурико и Кузнецовым [1978] в измерениях, проведенных на оси затопленного свободного факела пропана. В опытах непосредственно измерялась величина  $c_7^0$  — средняя объемная концентрация  $CO_2$  в "сухой" пробе (т.е. вода, конденсирующаяся при нормальной температуре, удалялась). Поэтому на рис. 5.2 по оси ординат отложена величина  $\langle c_7^0 \rangle$ . Здесь и далее концентрации нумеруются в следующем порядке:  $H_2$ ,  $OH$ ,  $O$ ,  $H$ ,  $O_2$ ,  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $CO$ ,  $N_2$ ,  $NO$ . При вычислении  $c_7(z)$

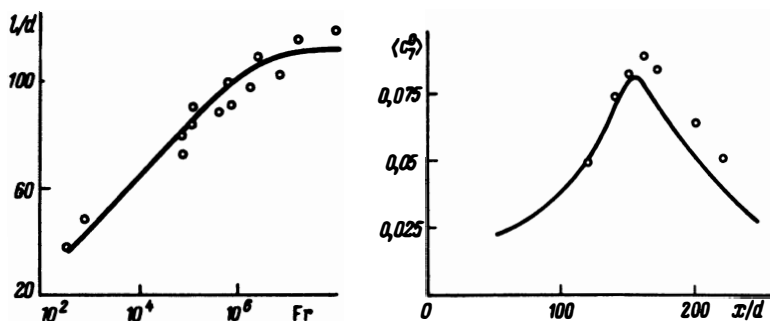


Рис. 5.1. Сравнение рассчитанной длины затопленного диффузионного факела водорода при различных числах Фруда с экспериментальными данными Билджера и Бека [1974].  $d = 1,5 - 6,4$  мм,  $u_0 = 100 - 200$  м/с; значки – опытные данные; кривая – расчет

Рис. 5.2. Сравнение рассчитанной средней объемной концентрации углекислого газа на оси затопленного диффузионного факела пропана с экспериментальными данными Бурико и Кузнецова [1978].  $d = 3$  мм,  $u_0 = 25$  м/с; горячее вытекает вертикально вверх; значки – опытные данные; кривая – расчет

использовались результаты предварительно проведенных термодинамических расчетов, а полученная таким образом зависимость  $c_f^0(z)$  осреднялась с помощью формул (3.56), (3.57).

Отметим, что в опытах отбирались пробы газа, состав которых позже анализировался. Такой способ дает величины, осредненные по Фавру т.е. величины вида  $\langle \rho c_i \rangle / \langle \rho \rangle$ . Поэтому везде далее при вычислении концентраций символ  $\langle \rangle$  соответствует такому осреднению.

Из рис. 5.2 видно, что пульсации величины  $z$  заметно влияют на среднюю концентрацию  $\text{CO}_2$ , так как максимальное значение  $\langle c_f^0 \rangle$  на 60% меньше, чем максимальное значение термодинамически равновесной концентрации  $\text{CO}_2$ .

Следующий график (рис. 5.3) указывает на то, что влияние пульсаций концентрации может быть исключительно сильным. Этот график обобщает результаты измерений концентраций углеводородов в затопленном, свободном факеле химически чистого пропана\*) (содержание примесей 0,03%). Абсолютная погрешность измерений равна  $10^{-4}$ . В пробах обнаружены все углеводороды с числом атомов C от 1 до 4, т.е. помимо окисления происходит и пиролиз углеводородов.

Обработка экспериментальных данных показала, что пиролиз и окисление взаимодействуют весьма слабо. При проведении этой обработки вводилась эквивалентная концентрация пропана

$$c_f = \sum_i \frac{44}{36 + 3n_i} \dot{c}_i,$$

где  $c_i$  – массовые концентрации углеводородов,  $n_i$  – отношение числа атомов H и C в  $i$ -м углеводороде, а суммирование производится по всем

\*) Эти данные получены Ю.Я. Бурико и В.Р. Кузнецовым.

значениям индекса  $i$ , которые соответствуют углеводородам. Эта величина сохраняется во всех реакциях, в которых не участвуют кислородо-содержащие соединения; в отсутствие процессов пиролиза она равна концентрации пропана.

В обработке предполагалось, что окисление происходит только на стехиометрической поверхности  $z = z_s$ , а скорость этого процесса бесконечно велика, т.е. справедлива формула (5.3). Величина  $c_f$ , определяемая этой формулой, осреднялась с помощью соотношений (3.56), (3.57) (сплошная линия на рис. 5.3). По осям графика отложены величины  $\langle c_f \rangle_r = \langle c_f \rangle / \gamma$ ,  $\langle z \rangle_r = \langle z \rangle / \gamma$ , полученные осреднением по турбулентной жидкости ( $\gamma$  – коэффициент перемежаемости, нижний индекс  $r$  соответствует условному осреднению по турбулентной жидкости). Величины  $\langle c_f \rangle$  и  $\langle z \rangle$  измерялись, а коэффициент перемежаемости  $\gamma$  рассчитывался из (3.56), (3.57), (5.4).

Такой расчет показал, что интенсивность пульсаций концентраций  $\sigma / \langle z \rangle$  на оси струи выше 0,55, т.е. больше, чем в изотермической струе. Анализ системы (5.4), проведенный в работах Кузнецова, Лебедева, Секундова и Смирновой [1977а, б, 1980], показывает, что этот эффект обусловлен влиянием сил плавучести (в отсутствие сил плавучести интенсивность пульсаций скорости и концентрации такая же, как и в изотермической

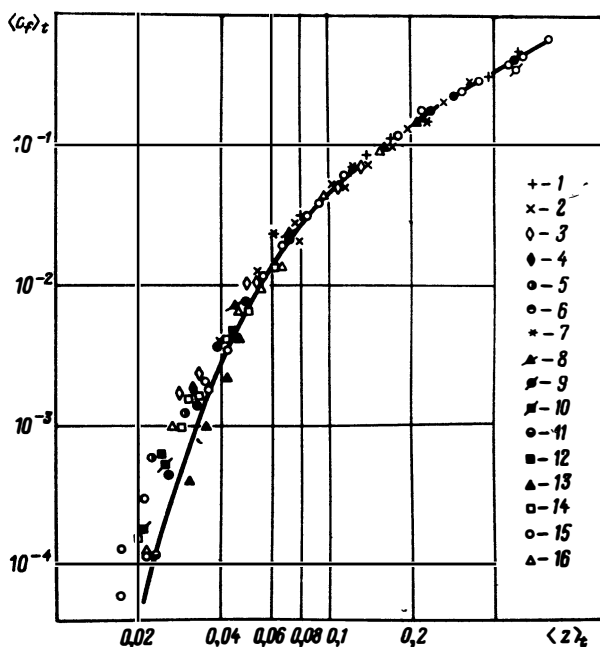


Рис. 5.3. Эквивалентная концентрация пропана в затопленном диффузионном факеле по данным Бурико и Кузнецова. I.  $d = 3$  мм,  $u_0 = 19,8$  м/с. 1 –  $x/d = 40$ ; 2 –  $x/d = 80$ ; 3 –  $x/d = 120$ ; 4 –  $x/d = 160$ ; 5 –  $x/d = 200$ ; 6 –  $x/d = 240$ . II.  $d = 6$  мм,  $u_0 = 10,7$  м/с. 7 –  $x/d = 40$ ; 8 –  $x/d = 80$ ; 9 –  $x/d = 120$ ; 10 –  $x/d = 160$ . III.  $d = 3$  мм. 11 –  $u_0 = 19,8$  м/с; 12 –  $u_0 = 14,2$  м/с; 13 –  $u_0 = 28,2$  м/с. IV.  $d = 6$  мм. 14 –  $u_0 = 7,3$  м/с; 15 –  $u_0 = 10,7$  м/с; 16 –  $u_0 = 14,9$  м/с. Значки 1 – 10 соответствуют радиальным профилям. Значки 11 – 16 соответствуют осевым профилям

струе; учет сил плавучести приводит к значительному возрастанию интенсивности пульсаций концентрации, но не приводит к увеличению интенсивности пульсаций скорости). Указанный эффект наблюдался в опытах Котсовиноса [1977] (плавучая струя без горения) и Женжамбра, Камбрэ, Кармэ и Беллэ [1984] (плавучая струя с горением).

Из проведенного расчета вытекает, что  $\gamma < 1$  во всех точках, в которых производились измерения. Поэтому из (3.56), (3.57) следует, что  $P_t(z)$ , и поэтому  $\langle c_f \rangle_t$ , зависит только от  $\langle z \rangle_t$ . Из графика на рис. 5.3 видно, что теоретические и экспериментальные данные хорошо согласуются. Так как логарифмические координаты не очень удобны при анализе точности расчета, то на рис. 5.4 в обычных координатах приведено одно из радиальных распределений  $\langle c_f \rangle$ .

Полученные данные позволяют косвенно установить точность, с которой развитая в главе 3 теория описывает плотность вероятностей концентрации в турбулентной жидкости  $P_t(z)$ . Сопоставление экспериментальных данных и результатов расчета величины  $\langle c_f \rangle_t$  показывает, что при  $\langle z \rangle_t > 0,03$  погрешность не превышает 12%. Такой же вклад в величину  $\langle c_f \rangle_t$  дают пульсации, амплитуда которых выше  $3\langle z \rangle_t$ . Этот вклад описывается интегралом

$$j = \int_{3\langle z \rangle_t}^{\infty} c_f(z) P_t dz,$$

вычисление которого показывает, что  $j = 0,12 \langle c_f \rangle_t$  при  $\langle z \rangle_t = 0,03$ . Таким образом, при  $z/\langle z \rangle_t < 3$  точность описания  $P_t(z)$  не хуже 12%. В указанном диапазоне  $P_t(z)$  меняется на три порядка, и поэтому ее непосредственное

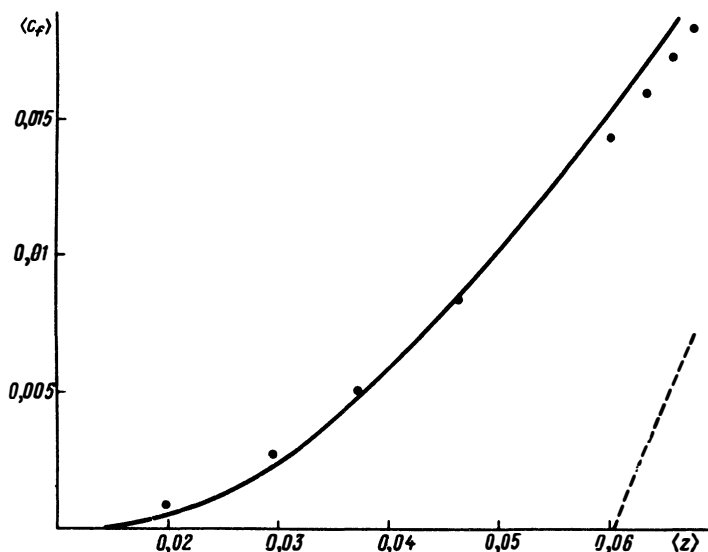


Рис. 5.4. Эквивалентная концентрация пропана в одном из сечений затопленного диффузионного факела.  $x/d = 160$ ,  $d = 3$  мм,  $u_0 = 19,8$  м/с; значки – результаты измерения; сплошная линия – расчет с учетом пульсаций; штрихпунктирная линия – расчет без учета пульсаций

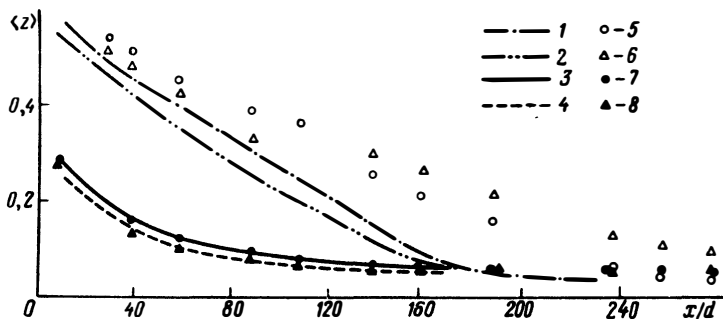


Рис. 5.5. Восстановленная концентрация горючего (пропана) на оси диффузионного факела в канале согласно опытам и расчетам Бурико и Лебедева [1980]. 1 -  $u_1/u_0 = 0,32$ , расчет факела; 2 -  $u_1/u_0 = 0,16$ , расчет факела; 3 -  $u_1/u_0 = 0,32$ , расчет изотермической струи; 4 -  $u_1/u_0 = 0,16$ , расчет изотермической струи; 5 -  $u_1/u_0 = 0,32$ , эксперимент с горением; 6 -  $u_1/u_0 = 0,16$ , эксперимент с горением; 7 -  $u_1/u_0 = 0,32$ , эксперимент без горения; 8 -  $u_1/u_0 = 0,16$ , эксперимент без горения;  $u_0 = 16$  м/с,  $d = 3$  мм

измерение вряд ли возможно в настоящее время. В связи со сделанным замечанием обратимся к рис. 3.10, на котором функция  $P_T$  сопоставляется с результатами непосредственных измерений в более узком диапазоне значений  $z/\langle z \rangle_T$ . Из нее также видно хорошее соответствие теории и эксперимента.

Из рис. 5.4 можно сделать ряд важных выводов. Во-первых, в области  $\langle z \rangle < z_s$  квазиламинарная модель (пульсации отсутствуют) приводит к грубым погрешностям, так  $c_f = 0$  при  $z < z_s$ . Во-вторых, очень важно правильно описать форму распределения плотности вероятностей, так как малые значения  $\langle c_f \rangle_T$  определяются пульсациями с очень большой амплитудой. Например, использование нормального закона с теми же значениями  $\langle z \rangle$  и  $\sigma$  при  $\langle z \rangle_T = 0,03$  занижает  $\langle c_f \rangle$  более чем на порядок. В-третьих, в данном случае сильно возрастают требования к точности модели турбулентности (из рис. 5.3 видно, что  $\langle c_f \rangle_T$  сильно зависит от  $\langle z \rangle_T$  и, следовательно, малые ошибки в расчете  $\langle z \rangle$  сильно сказываются на величине  $\langle c_f \rangle$ ).

В связи с последним выводом напомним, что используемая модель обеспечивает точность расчета поля  $\langle z \rangle$  порядка 30%. Эта точность недостаточна для отыскания  $\langle c_f \rangle$ . Поэтому для ее повышения при анализе экспериментальных данных, полученных в некотором сечении, использовались результаты расчета  $\gamma$  и  $\langle z \rangle$  не в сечении с тем же значением  $x/d$ , а в сечении с тем же значением осевой концентрации  $\langle z \rangle$ . Такой прием, по-видимому, вполне оправдан при анализе точности теории, описывающей распределение вероятностей концентрации. Действительно, на рис. 5.3 помещены данные, полученные при очень сильной вариации  $d, u_0$ , положения точки, в которой проводятся измерения, и самой измеряемой величины. Следовательно, хорошее согласование теоретических и экспериментальных данных на рис. 5.3 не может быть случайным.

Приведем теперь другой пример, заимствованный из работы Бурико и Лебедева [1980]. Изучалось диффузионное горение в цилиндрическом

канале диаметром  $d_1$ , в который поступал воздух со скоростью  $u_1$ . Пропан подавался со скоростью  $u_0$  через центральное сопло диаметром  $d$  ( $d_1/d = 13.3$ ). Результаты измерений и расчетов, основанных на формулах (5.4), помещены на рис. 5.5. Видно, что в самом конце факела смешение при горении ускоряется из-за возникающего дополнительного сдвига скорости (воздух и продукты сгорания по-разному ускоряются из-за разности плотностей и градиента давления). Модель качественно правильно описывает этот эффект, однако ее количественное согласование с экспериментом неудовлетворительно. Расчеты, основанные на широко используемой " $k-\epsilon$ "-модели и на модели (5.4), дали весьма слабо отличающиеся результаты. Это свидетельствует о том, что не учтены какие-то важные эффекты. Подчеркнем, что такие эффекты важны лишь при горении в канале и не существенны в затопленном факеле.

В заключение этого параграфа сделаем ряд общих замечаний. В расчетах часто приходится осреднять различные нелинейные зависимости. Результат такого осреднения зависит от характера нелинейности и величины  $\langle z \rangle$ . Существует целый ряд величин, при расчете которых пульсации можно либо вообще не учитывать (например, плотность), либо учет пульсаций дает не слишком большую поправку (например, концентрация  $\text{CO}_2$ ). В последнем случае, как показывает практика расчетов, пригодна почти любая разумная модель для плотностей вероятностей, т.е. важно лишь учесть, что пульсации существуют. Имеется, однако, и ряд величин, для вычисления которых необходимо точно знать и форму распределения вероятностей, и интенсивность пульсаций (концентрация углеводородов). Важную роль играет и средний состав, при котором рассматривается та или иная величина. Например, при  $\langle z \rangle > z_3$  влияние пульсаций на среднюю концентрацию углеводородов не слишком велико, а уже при  $\langle z \rangle = 0,5 z_3$  оно имеет принципиальное значение (рис. 5.4).

Отметим также, что следует с большой осторожностью пользоваться моделями турбулентности, так как их точность не всегда удовлетворительна.

## § 5.2. Влияние пульсаций температуры и концентрации на среднюю скорость реакций

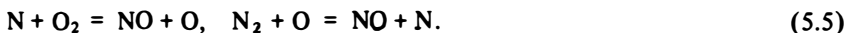
Учет влияния пульсаций температуры и концентрации на среднюю скорость химической реакции представляет большой практический интерес. Этот вывод наглядно иллюстрируется на примере реакции окисления азота, скорость которой чрезвычайно сильно зависит от температуры. Оценки показывают, что при средней температуре 2000 К и относительно низкой интенсивности пульсаций температуры (скажем, 10%) средняя скорость реакции может на порядок отличаться от скорости реакции при средней температуре. Другой пример – воспламенение холодной струи водорода (спутной или пристеночной), подаваемой в горячий поток воздуха. Показано, что пульсации температуры и концентрации приводят к увеличению расстояния, на котором возникает фронт пламени, примерно в 2–3 раза (Кузнецов [19726], Громов, Ларин и Левин [1984]).

Следует отметить, что турбулентность сама по себе не влияет на скорость реакции. Это влияние сказывается лишь весьма косвенным образом вслед

стве изменения условий тепло- и массообмена. Ясно, что пульсации температуры и концентрации обусловлены колебаниями фронта пламени. Вследствие этого в фиксированной точке потока скорость реакции принимает то очень большие, то очень малые значения, что естественно отражается на средней скорости реакции. При этом в системе координат, связанной с фронтом пламени, скорость реакции может оставаться такой же, как и в ламинарном потоке.

Анализируемый вопрос, по-видимому, впервые был затронут Зельдовичем [1949], который отметил, что вследствие сильной зависимости скорости реакции от температуры средняя скорость реакции должна сильно отличаться от скорости реакции при средней температуре. Первая попытка количественного анализа влияния пульсаций на среднюю скорость реакций предпринята Вулисом [1960]. В его работе не учтена зависимость скорости реакции от концентрации, вследствие чего сделан вывод о том, что пульсации температуры всегда приводят к увеличению средней скорости по сравнению со скоростью реакции, рассчитываемой по средним значениям температуры и концентрации. Однако, как правило, пульсации приводят к противоположному эффекту. Дело в том, что во многих случаях поля температуры и концентрации являются подобными, т.е. пульсации этих величин сильно связаны и могут быть выражены через  $z$ . Учет этого обстоятельства приводит к тому, что зависимость скорости реакции от температуры имеет максимум при некотором значении  $z = z_m$ . Ясно, что в тех точках потока, где  $\langle z \rangle = z_m$ , любая пульсация концентрации приводит к снижению скорости реакции (Кузнецов [1969]). Этот эффект проявляется наиболее сильно на краю струи или факела, т.е. в области, где существенна перемежаемость (Кузнецов [1972б]). Отметим также, что в тех точках потока, где  $\langle z \rangle$  сильно отличается от  $z_m$ , пульсации концентрации приводят к увеличению средней скорости реакций. Более детальное обсуждение рассматриваемого вопроса содержится в книге Компанийца, Овсянникова и Полака [1979].

В общем случае осреднение скорости химической реакции представляет весьма трудную задачу, поскольку химические процессы сами по себе могут сильно влиять на распределение вероятностей температуры и концентрации. Один из примеров такого сильного влияния (турбулентное горение однородной горючей смеси) рассмотрен в главе 1. Следовательно, нельзя предполагать, что в турбулентном потоке с химическими реакциями распределения вероятностей температуры и концентрации имеют универсальный вид. В этом смысле счастливым исключением является процесс образования окислов азота. Как уже отмечалось, во многих случаях концентрация окислов азота намного ниже равновесной, и поэтому скорость окисления азота очень слабо зависит от концентрации конечного продукта. Кроме того, рассматриваемая реакция слабо влияет на температуру и концентрацию всех веществ, за исключением NO. В данном параграфе будем считать, что реакции между всеми веществами, за исключением NO, идут настолько быстро, что их концентрации равновесны. Тогда скорость окисления азота зависит только от  $z$ . Действительно, обратимся к схеме окисления азота, установленной Зельдовичем и др. [1947]:





Первая реакция в (5.5) идет намного быстрее, чем вторая. Поэтому, как показано Зельдовичем, Садовниковым и Франк-Каменецким [1947], скорость окисления азота имеет вид

$$W_{10} = 2k_{10}M_{10}M_3^{-1}M_9^{-1}c_3c_9, \quad (5.6)$$

если концентрация NO существенно ниже равновесной. Здесь  $W_{10}$  входит в уравнение диффузии окислов азота в виде

$$\Lambda(c_{10}) = \rho W_{10}, \quad (5.7)$$

где  $c_3, c_9, c_{10}$  – массовые концентрации O, N<sub>2</sub>, NO,  $k_{10}$  – константа скорости второй реакции в (5.5),  $M_\alpha$  ( $\alpha = 1-10$ ) – молекулярные веса веществ, находящихся в смеси. Здесь и далее скорости образования различных веществ имеют индекс, соответствующий их номеру. Величина  $k_{10}$  имеет вид

$$k_{10} = k_{10}^0 \exp(-E/RT), \text{ где } k_{10}^0 = 1,1 \cdot 10^{14} \text{ см}^3/(\text{с} \cdot \text{моль}),$$

$E = 3,1 \cdot 10^5$  Дж/моль,  $R$  – универсальная газовая постоянная. Если предположить, что потери тепла излучением отсутствуют и все реакции (за исключением реакций окисления азота) находятся в равновесии, то величины  $c_3, c_9$  и  $T$  зависят лишь от  $z$ . Тем самым  $W_{10}$  можно найти из термодинамических расчетов, а для ее осреднения достаточно знать только распределение вероятностей концентрации инертной примеси.

Термодинамический расчет показывает, что зависимость  $W_{10}(z)$  имеет острый максимум при  $z = z_s$ , вследствие чего справедлива асимптотическая формула (Кузнецов [1969])

$$\langle \rho W_{10} \rangle = \int \rho W_{10} P(z) dz = wP(z_s), \quad w = \int \rho W_{10} dz. \quad (5.8)$$

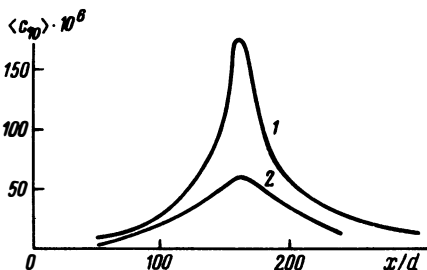
Оценки показывают, что эта формула дает вполне приемлемую точность при  $\sigma \geq \Delta z$ , где  $\Delta z$  – такой интервал значений  $z$ , на котором  $W_{10}$  превышает половину своего максимального значения ( $\Delta z = 10^{-2}$  при горении пропана,  $\Delta z = 5 \cdot 10^{-3}$  при горении водорода). Анализ результатов численных расчетов показал, что сформулированное условие всегда выполнялось.

Формула (5.8) существенно упрощает исследование, так как в ней фигурирует лишь один параметр  $w$ . Физический смысл соотношения (5.8) вполне очевиден, если учесть, что в соответствии с (1.21)  $P(z_s)$  характеризует объем, заключенный между поверхностями  $z = z_s$  и  $z = z_s + \Delta z$ . Расчет показывает, что при горении в нормальных условиях имеем  $w = 2,8 \cdot 10^{-8}$  г/(см<sup>3</sup> с) для пропана,  $w = 4,9 \cdot 10^{-8}$  г/(см<sup>3</sup> с) для водорода.

Полученные результаты позволяют проанализировать, как влияют пульсации концентрации на выход окислов азота. Осредним (5.7) и предположим, что коэффициент турбулентной диффузии окислов азота совпадает с коэффициентом турбулентной диффузии инертной примеси (обсуждение этого допущения дано ниже в § 5.5). Получаем

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial \langle c_{10} \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle v_0 \frac{\partial \langle c_{10} \rangle}{\partial y} = \\ = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{v_t}{Sc} \langle \rho \rangle y \frac{\partial \langle c_{10} \rangle}{\partial y} \right] + \langle \rho W_{10} \rangle. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Рис. 5.6. Влияние пульсаций на среднюю концентрацию NO на оси затопленного диффузионного факела пропана. 1 – расчет без учета пульсаций, 2 – расчет с учетом пульсаций. В расчетах задавались условия, соответствующие опытам Бурико и Кузнецова [1978]



Уравнение (5.9) решалось численно совместно с уравнениями (5.4) в двух предположениях. В первом случае считалось, что пульсации отсутствуют, т.е.  $\langle \rho W_{10} \rangle = \rho(\langle z \rangle) W_{10}(\langle z \rangle)$ , во втором – пульсации учитывались, т.е. при осреднении использовались формулы (3.56), (3.57). Результаты расчетов изображены на рис. 5.6.

Из сравнения кривых 1 и 2 видно, что пульсации концентрации приводят к сильному снижению концентрации окислов азота (почти в три раза).

### § 5.3. Влияние излучения на характеристики турбулентного диффузионного горения

В условиях лабораторных опытов, которые используются для проверки развиваемой теории, потери тепла излучением могут достигать до 25% (Маркштейн [1975], Бурико и Кузнецов [1978, 1980]). Даже в этом случае основные характеристики факела (разумеется, кроме его температуры) весьма слабо зависят от потерь тепла излучением. Этот вывод ясен из рис. 5.2, на котором сравниваются результаты расчета, в котором излучение не учитывалось, и экспериментальные данные, полученные в условиях, когда потери тепла излучением составляли 20–25% (Бурико и Кузнецов [1978, 1980]).

Рассматриваемый эффект тем не менее играет важную роль при исследовании образования окислов азота (Сигал [1977]), так как скорость окисления азота чрезвычайно сильно зависит от температуры. В частности, оценка показывает, что при увеличении потерь тепла излучением на 1% величина  $w$  уменьшается на 30%. Отсюда следует, что влияние излучения на окисление азота существенно почти во всех практически важных случаях. Цель проведенного ниже исследования состоит не в том, чтобы разработать универсальную методику расчета, а в том, чтобы приближенно оценить влияние излучения на образование окислов азота в условиях лабораторных опытов.

При анализе свободного диффузионного факела есть ряд обстоятельств, значительно упрощающих расчет потерь тепла излучением. Первое связано с отсутствием стенок, т.е. излучаемая энергия теряется безвозвратно. Второе обстоятельство обусловлено тем, что в условиях, характерных для большинства опытов, можно использовать приближение оптически тонкого слоя, т.е. считать, что все молекулы или частицы сажи излучают независимо друг друга, а излучение не поглощается. Пригодность такого приближения можно установить из следующей оценки. При нормальном

давлении длина пробега излучения в продуктах сгорания стехиометрической смеси минимальна и близка к 20 см. Поэтому во всех случаях, когда толщина факела меньше 20 см, приближение оптически тонкого слоя справедливо. Наконец, третье упрощающее обстоятельство связано с тем, что рассматривается малый уровень потерь, и поэтому плотность потока излучения можно оценить по температуре, рассчитываемой для адиабатических условий.

В соответствии с этим исследование проведем в три этапа. На первом рассчитаем потери тепла излучением. На втором найдем влияние этих потерь на температуру пламени. Наконец, на третьем вычислим скорость окисления азота.

Описанная ниже методика развита в работах Бурико и Кузнецова [1983а, б]. Она носит приближенный характер и основана на анализе относительных потерь тепла, определяемых формулой

$$q(x) = \frac{\int_0^x \int_0^\infty \langle I \rangle y dy dx}{Q_0 \int_0^x \int_0^\infty \langle \rho W_f \rangle y dy dx}, \quad (5.10)$$

где  $I$  — плотность потока излучения,  $W_f$  — скорость окисления горючего,  $Q_0$  — количество тепла, выделяющегося при сгорании одного грамма горючего. Числитель в (5.10) дает энергию которую излучает объем факела, заключенный между начальным и текущим сечениями, а знаменатель — энергию, выделившуюся в этом объеме.

Методика основана на следующем приеме. Проведем термодинамический расчет, в котором начальная энтальпия уменьшается на величину  $q(x)Q(z)$ , где  $Q(z) = Q_0 z$  при  $z < z_s$ ,  $Q(z) = Q_0(1 - z)/(1 - z_s)$ , т.е.  $Q(z)$  — количество тепла, выделяющееся при адиабатическом сгорании смеси, в которой концентрация горючего равна  $z$ .

Поясним возможные неточности такого подхода. Из-за случайного характера процесса фронт пламени может наблюдаться в разных точках одного и того же сечения. При этом потери тепла, строго говоря, зависят от того, в какой точке находится фронт пламени. В расчете указанное обстоятельство игнорируется (относительный уровень потерь тепла определен так, что учтена лишь зависимость от одной координаты  $x$ ). Принятое предположение можно косвенно обосновать с помощью экспериментальных данных, изложенных в главах 1 и 3, где указывалось, что статистические характеристики концентрации в турбулентной жидкости слабо меняются по сечению, т.е. внутри колеблющихся границ струи в каждом сечении эти характеристики приблизительно однородны. Так как положение фронта пламени определяется полем  $z$ , а это поле статистически однородно в данном сечении, то колебания фронта пламени можно не учитывать. Другая неточность методики связана с тем, что потери тепла в каждой данной точке носят случайный характер, в силу чего распределения температуры и концентрации на каждой поверхности  $z = \text{const}$  также носят случайный характер. Это обстоятельство не учитывается, так как результаты расчета зависят только от величины  $q(x)Q(z)$ , которая при  $z = \text{const}$  не случайна. Строгое обоснование принятых предположений

невозможно. Поэтому точность методики проконтролирована ниже ко-  
свенным образом с помощью анализа поля средней температуры.

Приступим теперь к первому этапу расчета. Найдем сначала знаменатель  
в (5.10). В диффузионном приближении концентрация горючего  $c_f$  есть  
некоторая функция  $z$ . Подставим эту функцию в (5.1) и воспользуемся  
уравнением диффузии пассивной примеси  $\Lambda(z) = 0$ . Имеем (Билджер  
[1976, 1977], Кузнецов [1979а])

$$\rho W_f = \rho N \frac{d^2 c_f}{dz^2}, \quad N = D(\nabla z)^2. \quad (5.11)$$

Используя (5.3), найдем  $d^2 c_f / dz^2 = (1 - z_s)^{-1} \delta(z - z_s)$ , где  $\delta$  — дельта-  
функция. Подставим это соотношение в (5.11), осредним и воспользу-  
емся обсуждавшейся в главе 3 гипотезой о том, что в турбулентной жид-  
кости пульсации концентрации и скалярной диссипации статистически  
независимы. Тогда получим

$$\begin{aligned} \langle \rho W_f \rangle &= (1 - z_s)^{-1} \langle N \rangle_T \rho(z_s) \gamma P_T(z_s) = \\ &= (1 - z_s)^{-1} \langle N \rangle \rho(z_s) P_T(z_s), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где  $\langle N \rangle_T$  — среднее значение скалярной диссипации в турбулентной жид-  
кости,  $P_T$  — плотность вероятностей концентрации в турбулентной жид-  
кости. Формула (5.12) получена Билджером [1976] (при  $\gamma = 1$ ) в неявно  
принятом предположении о статистической независимости  $z$  и  $N$ .

Оценим теперь поток излучения  $I$ . Рассмотрим сначала горение водорода.  
В этом случае излучение обусловлено парами воды. Воспользуемся экспе-  
риментальными данными, приведенными в книге Михеева [1949], в кото-  
рой представлены результаты исследования лучистого теплообмена между  
полусферой, заполненной парами воды, и центральным элементом ее осно-  
вания. При достаточно малом радиусе сферы, т.е. в приближении опти-  
чески тонкого слоя, эффективная степень черноты паров воды может быть  
аппроксимирована выражением  $\epsilon_6 = \beta_6(T) p_6 l_0$ , где  $l_0$  — радиус сферы,  
 $p_6$  — парциальное давление паров воды,  $T$  — температура, а  $\beta_6$  можно ап-  
проксимировать выражением

$$\beta_6 = b_{61} - b_{62} T, \quad b_{61} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1} \text{ Па}^{-1}, \quad b_{62} = 6,4 \cdot 10^{-11} \text{ см}^{-1} \text{ Па}^{-1} \text{ град}^{-1}$$

Поэтому в соответствии с данными Михеева [1949] получаем

$$I_6 = I = 4\beta_6(T) p_6 \sigma_0 T^4, \quad (5.13)$$

где  $\sigma_0$  — постоянная Стефана — Больцмана. Входящие в (5.13) величины  
 $p_6$  и  $T$  можно найти из термодинамического расчета в предположении,  
что излучение слабо влияет на температуру и состав продуктов сгорания.  
Таким образом, параметр  $q$  можно рассчитать из формул (3.56), (3.57),  
(5.10), (5.12), (5.13).

Рассмотрим теперь горение пропана. В этом случае, помимо паров воды,  
излучают углекислый газ и частицы сажи. Излучение энергии углекисло-  
той можно описать формулой, аналогичной соотношению (5.13)

$$\begin{aligned} I_7 &= 4\beta_7(T) p_7 \sigma_0 T^4, \quad \beta_7 = b_{71} - b_{72} T, \\ b_{71} &= 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1} \text{ Па}^{-1}, \quad b_{72} = 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-1} \text{ Па}^{-1} \text{ град}^{-1}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где индекс 7 соответствует  $\text{CO}_2$ . Эти формулы также получены при обработке экспериментальных данных, приведенных Михеевым [1949]. Суммарное излучение парама воды и углекислым газом находится из формулы  $I = I_6 + I_7$ . Как и следовало ожидать, расчет, в котором не учитывается излучение частицами сажи, дает заниженные значения  $\langle I \rangle$ . В качестве примера приведем результат расчета, проведенного для факела пропана ( $d = 0,3$  см,  $u_0 = 25$  м/с). В этом случае суммарное излучение факела равно  $q(\infty) = 0,15$ , в то время как экспериментальные данные Бурико и Кузнецова [1978] свидетельствуют о том, что  $q(\infty) = 0,25$ , т.е. примерно 40% теряемой энергии излучается частицами сажи.

Поскольку кинетика образования сажи при диффузионном горении пропана практически не изучена, то параметр  $q$  удобно рассчитывать из полуэмпирической формулы

$$I = \mu(I_6 + I_7), \quad (5.15)$$

где коэффициент  $\mu$  подбирается таким образом, чтобы рассчитанное значение  $I$  совпадало с экспериментально измеренным. Этот коэффициент во всех расчетах полагался равным  $\mu = 1,67$ . Температура, концентрации углекислого газа  $c_7$  и воды  $c_6$  находятся в результате термодинамического расчета. Формула (5.15) осредняется с помощью соотношений (3.56), (3.57), параметр  $q$  находится из (5.10), (5.12) и осредненного соотношения (5.15).

Для контроля правильности предлагаемого метода приведем результаты расчета полей средней температуры в диффузионном факеле пропана. Как уже указывалось, для определения температуры необходимо использовать результаты термодинамических расчетов, из которых можно получить зависимость  $T(z, q)$ . Эту зависимость следует осреднить с помощью формул (3.56), (3.57). На рис. 5.7, заимствованном из работы Бурико и Кузнецова [19836], приведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными. Видно, что экспериментальные данные и результаты расчета хорошо согласуются. Аналогичные результаты получены и для факела водорода.

Обращая на себя внимание два обстоятельства. Во-первых, при горении пропана максимальная температура в диффузионном факеле на 750 К ниже теоретической, т.е. ниже температуры адиабатического горения стехиометрической смеси  $T_s = 2260$  К (начальные условия нормальные). Во-вто-

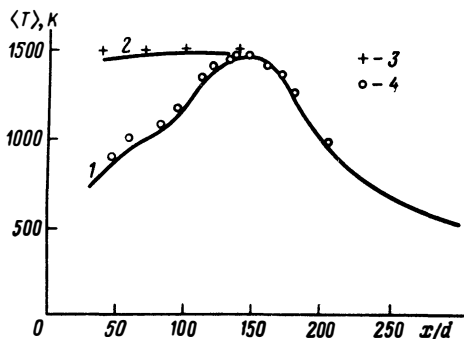


Рис. 5.7. Сравнение рассчитанных значений средней температуры в затопленном диффузионном факеле пропана с экспериментальными данными Бурико и Кузнецова [1980].  $d = 3$  мм,  $u_0 = 25$  м/с; 1 — расчет средней температуры на оси, 2 — расчет максимальной средней температуры в различных сечениях, 3 — измерения максимальной средней температуры в различных сечениях, 4 — измерения средней температуры на оси факела

рых, максимальная в данном сечении факела температура почти не меняется по мере удаления от сопла.

Анализ результатов расчета показывает, что последний эффект обусловлен взаимодействием двух процессов. С одной стороны, по мере удаления от сопла положение осредненной поверхности фронта пламени (т.е. поверхности  $\langle z \rangle = z_s$ ) приближается к оси факела, т.е. перемещается в область, где интенсивность пульсаций концентрации  $\sigma/\langle z \rangle$  мала. Это обстоятельство приводит к повышению средней температуры. С другой стороны, по мере удаления от сопла увеличивается излучение. Такое увеличение связано с тем, что в процессе смещения расстояние между двумя близко расположенными поверхностями  $z = z_1$  и  $z = z_1 + dz$  растет (см. § 3.8), т.е. увеличивается излучающий объем и, следовательно, потери тепла. Оба указанных эффекта взаимно компенсируются. В целом излучение и пульсации концентрации примерно одинаково влияют на среднюю температуру.

Полезно отметить, что пульсации концентрации влияют лишь на среднюю температуру пламени и не воздействуют на истинную температуру фронта пламени, т.е. температуру на поверхности  $z = z_s$ . Поэтому вследствие возрастания излучения при удалении от сопла истинная температура пламени монотонно уменьшается.

Предложенная выше методика позволяет легко учесть влияние излучения пламени на скорость окисления азота. Для этого необходимо провести термодинамический расчет, в котором начальная энтальпия уменьшена на величину  $qQ(z)$ . Такой расчет дает зависимости  $T(z, q)$ ,  $c_3(z, q)$ . Подставив  $T(z, q)$  и  $c_3(z, q)$  в (5.6), найдем  $W_{10}(z, q)$  и, следовательно, вычислим величину  $w(q)$ . После этого интегрируются уравнения (5.4), (5.9), в которых величина  $\langle \rho W_{10} \rangle$  по-прежнему дается формулой (5.8). Входящий в (5.8) параметр  $w$  зависит от величины  $q$ , которая рассчитывается по разработанной выше методике.

Такой расчет показывает, что при горении струи пропана ( $d = 0,3$  см,  $u_0 = 25$  м/с) максимальная концентрация окислов азота на оси факела равна  $9 \cdot 10^{-6}$ . Сравнив эту цифру с результатами, приведенными на рис. 5.6, заключаем, что в данном случае излучение приводит к снижению концентрации NO примерно в шесть раз. Видно также, что рассчитанное значение максимальной концентрации NO на оси факела существенно ниже измеренного Бурико и Кузнецовым [1980]  $\langle c_{10} \rangle = 3,6 \cdot 10^{-5}$ . Этот результат неудивителен, поскольку, как уже указывалось в начале этой главы, концентрация атомарного кислорода может быть больше равновесной, а воздействие турбулентности на кинетику основных химических реакций пока не учитывалось.

#### § 5.4. Влияние скорости химических реакций на турбулентное диффузионное горение

Как известно, кинетика окисления большинства горючих носит цепной характер, т.е. процесс происходит в несколько стадий, на каждой из которых образуется много промежуточных веществ. Исследование кинетики окисления в турбулентных потоках можно значительно упростить, если учесть, что при не слишком больших отклонениях от термодинамического

равновесия химические реакции идут с очень большой скоростью. Поэтому превращения веществ происходят в очень узких пространственных зонах. Особенность турбулентного потока проявляется лишь в том, что такие зоны искривлены и случайным образом перемещаются в пространстве.

Рассматриваемая проблема характеризуется следующими особенностями. Как и большинство сильно нелинейных систем, химические реакции в некотором диапазоне значений определяющих параметров могут быть очень чувствительны к условиям, в которых протекает смешение. Так как процесс носит многостадийный характер, это означает, что в диффузионном пламени может возникать несколько областей, в которых механизмы окисления сильно отличаются. При этом различные области разделены узкими зонами, в которых происходит резкое изменение механизма реакций. Другая особенность состоит в том, что поскольку толщина таких зон мала, то условия смешения в них определяются лишь локальными характеристиками турбулентности, т.е. диссипацией энергии  $\epsilon$ , скалярной диссипацией  $N$  и коэффициентами молекулярного переноса. Как уже отмечалось в главе 4, амплитуда пульсаций величины  $\epsilon$  намного превышает ее среднее значение. Аналогичное утверждение справедливо и для скалярной диссипации.

Полный анализ рассматриваемой проблемы вряд ли возможен в настоящее время. Поэтому далее рассмотрен ряд конкретных примеров, иллюстрирующих указанные выше общие соображения. Ниже будут рассмотрены решения уравнений переноса тепла и вещества в различных областях пламени. Будет показано, что в целом ряде случаев можно найти либо асимптотически точные решения, связывающие концентрации реагирующих веществ с локальными неосредненными характеристиками турбулентности, либо свести решение задачи к интегрированию уравнения диффузии без источников с граничным условием, зависящим от локальных характеристик турбулентности и скорости химических реакций. Так как распределения вероятностей величин  $\epsilon$  и  $N$  зависят от числа Рейнольдса (см. главу 4), то один из важных вопросов состоит в том, чтобы выяснить, как влияют процессы молекулярного переноса на условия протекания химических реакций в развитом турбулентном потоке.

1. Очень малые отклонения от термодинамического равновесия. Как указывалось в § 5.1, при бесконечно большой скорости химических реакций состав и температура в диффузионном пламени могут быть легко рассчитаны из условий термодинамического равновесия. Покажем, что такой подход дает первый член асимптотического разложения решений уравнений переноса в ряд по некоторому большому параметру (числу Дамкелера). В обозначениях, принятых в § 5.1, уравнения переноса запишутся в виде

$$\Lambda(c_m) = \rho W_m, \quad \Lambda = \rho \frac{\partial}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla - \nabla(D\rho\nabla).$$

Приведем эти уравнения к безразмерному виду, отнеся все масштабы длины к масштабу турбулентности  $l$ , все масштабы скорости — к  $\sqrt{\epsilon}$  ( $\epsilon$  — энергия турбулентности), а все скорости реакций — к константе скорости самой быстрой реакции  $K$ . Тогда рассматриваемая система

приобретет вид

$$\Lambda_0(c_m) = G_e \rho W_m^{(0)}, \quad G_e = \frac{KL}{\sqrt{e}}, \quad (5.16)$$

где  $\Lambda_0$  – безразмерный оператор  $\Lambda$ ,  $W_m^{(0)}$  – безразмерные скорости реакции. Очевидно, что при  $G_e \rightarrow \infty$  решение находится из системы  $W_m^{(0)} = 0$ , т.е. имеет место термодинамически равновесное состояние, в котором  $c_m$  зависит только от  $z$ . Обозначим это решение символом  $c_m^{(e)}$  и будем искать малые поправки к нему в виде ряда

$$c_m = c_m^{(e)}(z) + \frac{1}{G_e} c_m^{(1)} + \frac{1}{G_e^2} c_m^{(2)} + \dots$$

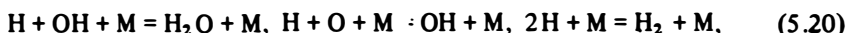
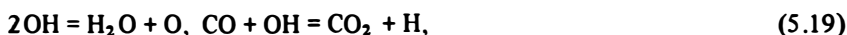
Подставим этот ряд в (5.16) и воспользуемся уравнением диффузии  $\Lambda_0(z) = 0$ . Для наглядности перейдем к первоначальным размерным переменным. Можно показать, что второй член разложения ( $c_m^{(1)}$ ) удовлетворяет линейной системе уравнений

$$N \frac{d^2 c_m^{(e)}}{dz^2} + \frac{\partial W_m}{\partial c_n} c_n^{(1)} = 0, \quad (5.17)$$

где матрица  $\partial W_m / \partial c_n$  вычисляется при  $c_n = c_n^{(e)}$ , т.е. ее элементы – известные из термодинамического расчета функции  $z$ . Отсюда следует, что малые поправки к термодинамическому равновесию зависят только от восстановленной концентрации горючего и скалярной диссипации. Видно также, что  $c_m^{(1)}$  линейно зависит от  $N$ . Поскольку среднее значение скалярной диссипации не зависит от числа Рейнольдса, то и величины ( $c_m^{(1)}$ ) не зависят от процессов молекулярного переноса, что оправдывает принятое выше предположение о равенстве коэффициентов молекулярного переноса. Отметим, что амплитуда пульсаций величин  $c_m^{(1)}$ , вообще говоря, зависит от числа Рейнольдса во всех турбулентных потоках, так как амплитуда пульсаций скалярной диссипации, так же как и амплитуда пульсации диссипации энергии, зависит от числа Рейнольдса (см. главу 4).

К сожалению, область применимости соотношения (5.17) ограничена (число Дамкелера должно быть очень велико), поскольку обычно скорости различных реакций отличаются на несколько порядков. При этом характеристики процесса определяются наиболее медленными реакциями, а  $\det(\partial W_m / \partial c_n)$  – наиболее быстрыми реакциями. Это свойство систем кинетических уравнений хорошо известно (так называемые жесткие дифференциальные системы), поскольку оно создает большие неудобства при численных расчетах (см., например, Баев, Головичев и Ясаков [1976]).

2. Влияние скорости химических реакций на не слишком большие отклонения от термодинамического равновесия. Проанализируем процесс горения водорода или углеводов. Рассмотрим следующую кинетическую схему:



где символ М соответствует молекуле любого вещества, находящегося в



смеси. Следуя работам Каскана [1958] и Рэмшоу [1980], покажем, что эта схема правильно отражает основные кинетические закономерности горения околостехиометрических смесей при не слишком больших отклонениях от термодинамического равновесия (количественную формулировку этих условий удобно дать позже).

Прежде всего отметим, что без завершения реакций (5.20) термодинамическое равновесие не достигается, даже если рассматривается самая общая кинетическая схема. Это обстоятельство играет решающую роль, так как вблизи равновесия реакции (5.18), (5.19) идут со скоростью, намного большей, чем реакции (5.20). Сделанный вывод основан на оценке, в которой скорости прямых реакций в (5.18)–(5.20) рассчитывались по термодинамически равновесным значениям температуры и концентрации. Установлено, что при адиабатическом горении стехиометрической смеси при самой неблагоприятной оценке\*) скорость самой медленной реакции в (5.18), (5.19) на полтора порядка больше, чем скорость самой быстрой реакции в (5.20).

Отсюда вытекает, что превращения вещества лимитируются реакциями (5.20), а реакции (5.18), (5.19) близки к равновесию. Этот вывод справедлив и в том случае, если рассматривается самая общая кинетическая схема. Ниже будет показано, что условия, которые вытекают из равенств скоростей прямых и обратных реакций в (5.18), (5.19), оказываются достаточными для однозначного описания скоростей реакций в (5.20). При этом необходимо предположить, что в химических превращениях не участвуют вещества, которые не перечислены в (5.18)–(5.20). Такое предположение вносит лишь малую неточность, так как термодинамический расчет показывает, что равновесные концентрации веществ, не перечисленных в (5.18)–(5.20), намного меньше, чем наименьшая из концентраций веществ, участвующих в реакциях (5.18)–(5.20). Указанные соображения оправдывают использование сильно упрощенной схемы, которая описывается реакциями (5.18)–(5.20).

Перейдем теперь к изложению следствий проведенного выше анализа. Рассмотрим сначала горение водорода. Из (5.18), (5.20) видно, что процесс описывается семью переменными (шесть концентраций и температура). Закон сохранения энергии и законы сохранения атомов O и H позволяют найти три связи между семью переменными. Как ясно из § 5.1, в эти связи войдет величина  $z$ . В качестве независимых переменных выберем концентрации  $H_2$ , OH, O, H, обозначив их соответственно  $c_1, c_2, c_3, c_4$ .

Условия, вытекающие из детального равновесия реакций (5.18), дают еще три связи, т.е. останется лишь одна независимая переменная. Выбор этой переменной осуществим с помощью приема, хорошо известного в химической кинетике (Каскан [1958], Рэмшоу [1980]). Подберем такую линейную комбинацию из  $c_1$ – $c_4$ , что наиболее быстрые реакции (5.18) не влияют на ее распределение. Для этого уравнения  $\Lambda(c_n) = \rho W_n$  умножаются на произвольные числа, полученные соотношения складываются, а числа подбираются так, чтобы в окончательном соотношении быстрые реакции

---

\*) Неопределенность оценок обусловлена неточными измерениями констант скоростей химических реакций.

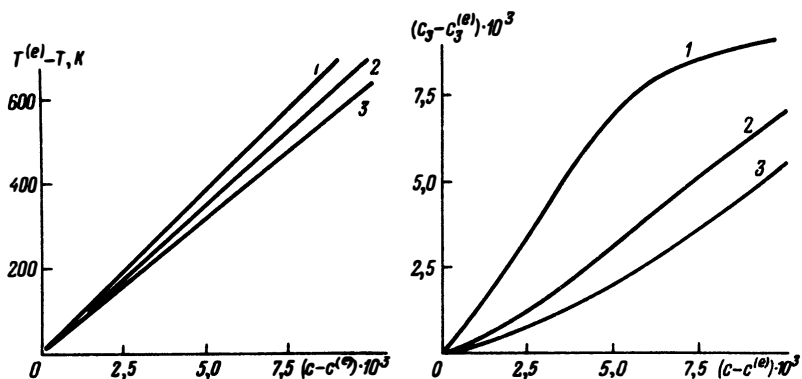


Рис. 5.8. Влияние отклонений от термодинамического равновесия на температуру горения водорода в воздухе. 1 -  $z = 0,02$  (бедная смесь), 2 -  $z = 0,028$  (стехиометрическая смесь), 3 -  $z = 0,036$  (богатая смесь)

Рис. 5.9. Влияние отклонений от термодинамического равновесия на концентрацию атомарного кислорода при горении водорода в воздухе. 1 -  $z = 0,02$  (бедная смесь), 2 -  $z = 0,028$  (стехиометрическая смесь), 3 -  $z = 0,036$  (богатая смесь)

(5.18) отсутствовали. Используя этот прием, получаем

$$\begin{aligned} \Lambda(c) &= \rho W, \quad c = c_1 + \frac{1}{17} c_2 + \frac{1}{8} c_3 + 3c_4, \\ W &= -4(W_1 - W_{-1} + W_2 - W_{-2} + W_3 - W_{-3}), \end{aligned} \quad (5.21)$$

где в символах  $W_n$  индексы 1-3 соответствуют порядковому номеру реакции в (5.20), положительные индексы соответствуют прямым реакциям, а отрицательные - обратным. Скорости этих реакций зависят от  $c_1, \dots, c_4$  и  $z$ . Условия равновесия реакций (5.18) дают три алгебраических соотношения. Эти соотношения позволяют выразить величину  $W$ , которая называется, далее, эффективной скоростью окисления, выразить только через  $c$  и  $z$ . Зависимость температуры и концентраций остальных веществ от  $c$  и  $z$  можно рассчитать заранее.

В качестве примера такого расчета на рис. 5.8, 5.9 приведены зависимости концентрации атомарного кислорода  $c_3$  и температуры от величины  $c$  (условия нормальные). Отметим, что при  $z = z_s$  концентрация атомарного кислорода сильно отличается от равновесной ( $c_3^{(e)} = 2,3 \cdot 10^{-4}$ ).

Таким образом, задача сводится к решению одного уравнения (5.21). Оказывается, что фигурирующий в этом уравнении источник можно аппроксимировать простой формулой (Билджер [1980a])

$$W = k(c - c^{(e)})^2, \quad (5.22)$$

где  $k$  - постоянная. Результаты ее проверки приведены на рис. 5.10. Вертикальные отрезки дают диапазон изменения результатов расчета, в котором использовались константы скоростей химических реакций, приведенные Дженсенем и Джоунзом [1978]. Величина  $k$ , рассчитанная на основе этих данных, равна  $k = 1,4 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$ ; расчет, исходящий из констант скоростей реакций, указанных Дженкинсом, Юмлю и Сполдингом [1966], дает значение, на порядок большее:  $k = 1,4 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$  (Бурико и Кузнецов [1983a]). Для сравнения приведем данные Билджера [1980a]:  $k = 1,6 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$ .

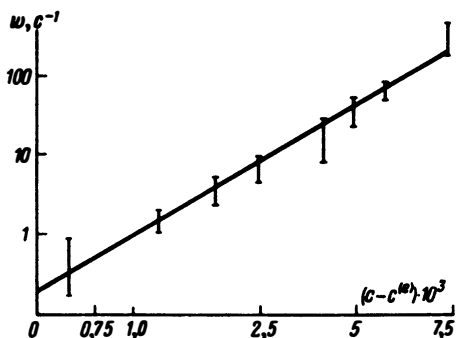


Рис. 5.10. Расчет эффективной скорости окисления водорода в воздухе. Вертикальные отрезки соответствуют диапазону изменения  $W$  при вариации  $z$  в пределах  $z = 0,02-0,036$  и  $q$  в пределах  $q = 0-0,2$

Как будет видно далее, такую точность расчета можно считать удовлетворительной, поскольку отклонения от равновесия окажутся пропорциональными  $k^{-1/3}$ . Отметим, что по мере увеличения отклонений от равновесия, т.е. с возрастанием  $c - c^{(e)}$ , отношение скоростей тримолекулярных реакций в (5.20) и бимолекулярных реакций в (5.18), (5.19) увеличивается, т.е. в конце концов условие пригодности формулы (5.22) нарушается. В стехиометрической смеси скорость самой быстрой реакции в (5.20) сравнивается со скоростью самой медленной реакции в (5.18), (5.19) при  $\Delta c = c - c^{(e)} \approx 10^{-2}$ , т.е. при  $\Delta c > 10^{-2}$  формула (5.22) неприменима. Отметим также, что величина  $k$  слабо зависит от уровня потерь тепла излучением, поскольку  $W$  определяется тримолекулярными реакциями в (5.20), скорость которых мало меняется с температурой.

Остановимся теперь на зависимости  $c^{(e)}(z)$ . Равновесные значения приведенной концентрации  $c^{(e)}$  изображены на рис. 5.11. Видно, что  $c \approx c_1^{(e)}$  ( $c_1$  — концентрация  $H_2$ ) и в первом приближении равновесные значения приведенной концентрации и концентрации  $H_2$  описываются формулой (5.3), которая справедлива для одноступенчатой необратимой реакции. Указанное обстоятельство обусловлено тем, что равновесие брутто-реакции  $H_2 + \frac{1}{2} O_2 = H_2O$  сильно смещено в сторону образования продуктов сгорания (в стехиометрической смеси имеем  $c_6^{(e)} / (c_1^{(e)} \sqrt{c_5^{(e)}}) = 3600$ , где  $c_6, c_5$  — концентрации  $H_2O$  и  $O_2$ ). Поэтому величину  $c^{(e)}$  удобно представить в виде (Кузнецов [1982а])

$$c^{(e)} = \frac{1}{\kappa} \varphi(s), \quad s = \kappa k_0 (z - z_s), \quad (5.23)$$

где  $\varphi \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow -\infty$ ,  $d\varphi/ds \rightarrow 1$  при  $s \rightarrow \infty$ ,  $k_0$  — некоторая постоянная ( $k_0 \approx 1$  для водорода). Видно, что при  $\kappa \rightarrow \infty$  формулы (5.3) и (5.23) совпадают. Далее везде предполагается, что  $\kappa \gg 1$ .

Развитый метод можно использовать и при описании горения углеводородов. Укажем лишь окончательные результаты, полученные для пропана Бурико и Кузнецовым [1983а]. Приведенная концентрация приобретает вид

$$c = c_1 + \frac{1}{17} c_2 + \frac{1}{8} c_3 + 3c_4 + \frac{1}{14} c_8,$$

т.е. в формуле, с помощью которой определяется величина  $c$ , появилось

лишнее слагаемое, пропорциональное  $c_8$  — концентрации CO. Равновесные значения приведенной концентрации изображены на рис. 5.12, из которого видно, что формула (5.23) остается справедливой, если положить  $k_0 = 0,42$ . Формула (5.22) несколько видоизменяется, что ясно из рис. 5.13, который заимствован из работы Бурико и Кузнецова [1983а]. Константы скоростей химических реакций взяты из работы Дженкинса, Юмту и Сполдинга [1966]. Сплошная линия на рис. 5.13 соответствует зависимости

$$W = k(c - c^{(e)})^m, \quad (5.24)$$

где  $m = 2,4$ ,  $k = 6,3 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ . Расчет, основанный на данных Дженсена и Джоунза [1978], показывает, что  $m = 2,4$ ,  $k = 6,3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Приведенные выше аппроксимации справедливы при  $z = 0,045 - 0,08$  и  $\Delta c = c - c^{(e)} < 5 \cdot 10^{-3}$ .

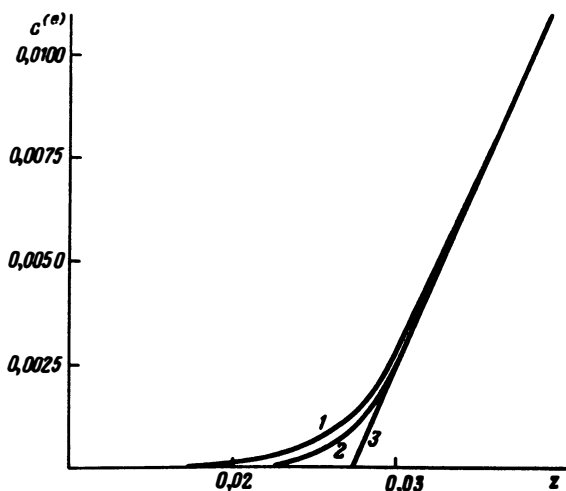


Рис. 5.11. Расчет равновесных значений приведенной концентрации при горении водорода в воздухе. 1 —  $c^{(e)}$ , 2 —  $c_1^{(e)}$ , 3 — зависимость (5.3)

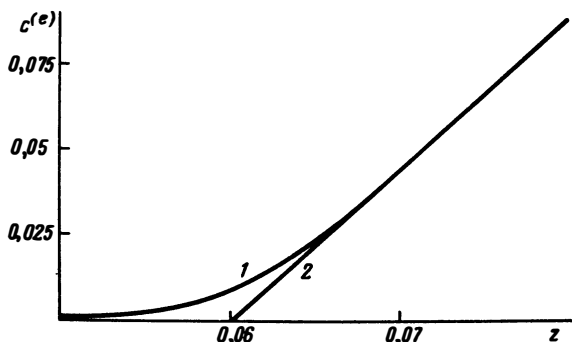


Рис. 5.12. Расчет равновесных значений приведенной концентрации при горении пропана в воздухе. 1 —  $c^{(e)}$ , 2 — кусочно-линейная аппроксимация, соответствующая одноступенчатой необратимой реакции

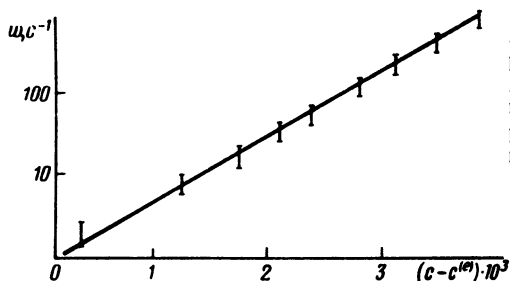


Рис. 5.13. Расчет эффективной скорости окисления пропана в воздухе. Вертикальные линии соответствуют диапазону изменения  $W$  при вариации  $z$  в пределах  $z = 0,045-0,08$  и  $q$  в пределах  $q = 0-0,25$

Приступим теперь к решению уравнения (5.21). Это решение, очевидно, дает распределение  $c(x, t)$ , что позволит из алгебраических соотношений найти температуру и концентрации всех веществ. Воспользуемся следующими соображениями (Кузнецов [1982a]). Будем сначала предполагать, что зона химических реакций имеет очень малую толщину. Из этого предположения получим решение, а затем выведем условие его пригодности.

Пусть зона реакций локализована вблизи искривленной, случайно перемещающейся поверхности  $z = z_s$  и пусть ее толщина  $\delta_c$  много меньше колмогоровского масштаба  $\eta = \nu^{3/4} \langle \epsilon \rangle^{-1/4}$ . Перейдем в систему координат, движущуюся вместе с некоторой точкой на поверхности  $z(x, t) = z_s$ . При  $\delta_c \ll \eta$  радиус кривизны зоны реакций много больше ее толщины, вследствие чего можно пренебречь производными в направлениях касательных к поверхности  $z = z_s$ . Кроме того, в рассматриваемой системе координат гидродинамические характеристики определяются только величинами  $\nu$  и  $\langle \epsilon \rangle$ . Поэтому справедливы оценки  $\partial/\partial n \sim 1/\delta_c$ ,  $\partial/\partial t \sim (\nu/\langle \epsilon \rangle)^{-1/2}$  ( $n$  — нормаль к поверхности  $z = z_s$ ). Следовательно, при  $\delta_c \ll \eta$  уравнение (5.21) приобретает вид (2.18). Левая часть (2.18) много меньше, чем первый член в правой части, если  $\delta_c \ll \eta$ . Учтем также, что поскольку  $\delta_c$  мало, то мало и изменение приведенной концентрации  $c$  в зоне реакций. Поэтому нет смысла учитывать влияние температуры на  $\rho D$ . Таким образом, из (2.18), (5.24) получим

$$D \frac{dc^2}{dn^2} - k [c - c^e]{}^m = 0. \quad (5.25)$$

Это уравнение справедливо при  $\delta_c \ll \eta$ . Указанное условие пока неконструктивно ( $\delta_c$  неизвестно). Поэтому решим уравнение (5.25), найдем  $\delta_c$  и тем самым, получим условие справедливости найденных результатов в явном виде.

Заметим, что поскольку  $\delta_c \ll \eta$ , то в зоне реакций распределение восстановленной концентрации горючего можно приближенно описать выражением  $z = z_s + n dz/dn$  ( $dz/dn = \text{const}$ ). Тогда (5.25) приобретает вид

$$N \frac{d^2c}{dz^2} - k [c - c^e(z)]{}^m = 0. \quad N = D \left( \frac{\partial z}{\partial n} \right)^2 = D \left( \frac{\partial z}{\partial x_k} \right)^2. \quad (5.26)$$

Отсюда вытекает важный вывод: структура зоны реакции определяется единственной гидродинамической характеристикой — скалярной диссипацией  $N$ . Этот вывод был сделан в работе Кузнецова [19776] из анализа

уравнения для распределения вероятностей концентрации реагирующей примеси.

Введем новые переменные и параметры

$$s = \kappa k_0 n \frac{dz}{dn}, \quad \psi = \kappa c, \quad g_0 = \frac{\kappa}{N} k_0^{-2} \kappa^{-m-1},$$

где  $dz/dn$  вычисляется на поверхности  $z = z_s$ . Тогда из (5.23), (5.25) получим

$$\frac{d^2 \psi}{ds^2} - g_0 [\psi - \varphi(s)]^m = 0. \quad (5.27)$$

Иследуем два предельных случая:  $\langle g_0 \rangle \gg 1$  и  $\langle g_0 \rangle \ll 1$ . В первом случае решение ищем в виде асимптотического ряда  $\psi = \varphi + \varphi_1 g_0^{-1/m} + \dots$ . Тогда находим  $\varphi_1 = (\varphi'')^{1/m}$  и т.д. Таким образом,

$$c = c^{(e)}(z) + \left( \frac{1}{G_0} \frac{d^2 c^{(e)}}{dz^2} \right)^{1/m} + \dots, \quad G_0 = \frac{\kappa}{N}.$$

При  $m = 2$  эта формула получена Билджером [1980а] другим методом. Она справедлива, только если  $|c - c^{(e)}| \ll c^{(e)}$ , и, следовательно, ее приложение к рассматриваемым здесь вопросам весьма ограничено.

Рассмотрим другой предельный случай  $\langle g_0 \rangle \ll 1$ , который проанализирован в работах Кузнецова [1982а], Бурико и Кузнецова [1983а]. Этот случай соответствует пределу  $G_0 = \text{const}$ ,  $\kappa \rightarrow \infty$ . Тогда функция  $\varphi$  приобретает вид  $\varphi = s\theta(s)$ , где  $\theta = 0$  при  $s < 0$ ,  $\theta = 1$  при  $s > 0$ . Физически это означает, что толщина зоны реакций много больше, чем ширина зоны, в которой существенны отклонения от зависимости  $\varphi = s\theta(s)$ . В анализируемом случае уравнение (5.27) запишется в виде

$$\frac{d^2 \psi}{ds^2} - g_0 [\psi - s\theta(s)]^m = 0. \quad (5.28)$$

Это уравнение имеет единственное гладкое, ограниченное при всех  $s$  решение

$$c = c^{(e)}(z) + k_0 G^{-1/(1+m)} \left( \frac{2}{m+1} \right)^{1/(1-m)} \times \\ \times \left\{ \frac{m-1}{2} \left[ |z - z_s| G^{1/(1+m)} + 2^{(2m-1)/(m+1)} \frac{(m+1)^{1/(m+1)}}{m-1} \right] \right\}^{2/(1-m)} \\ G = \frac{k_0^{m-1} \kappa}{N}. \quad (5.29)$$

Частный случай этого соотношения ( $m = 2$ ) получен в работе Кузнецова [1982а]. Решение при произвольном  $m$  указано Бурико и Кузнецовым [1983а].

Остановимся на условиях применимости формулы (5.29). Одно из этих условий ( $\langle g_0 \rangle \ll 1$ ) несущественно. Действительно, (5.29) неправильно описывает лишь малые отклонения от равновесия ( $|c - c^{(e)}| \ll c^{(e)}$ ), так

как использован приближенный вид зависимости  $\varphi(s)$ . Однако правильное описание малых отклонений от равновесия особого интереса не представляет. Второе условие есть  $\delta_c \ll \eta$ . На основе формулы (5.29) естественно определить толщину зоны реакций из соотношения  $|z(\delta_c) - z_s| G^{1/(1+m)} = 1$ . Имеем, далее,  $|z(\delta_c) - z_s| = \delta_c |\partial z / \partial n| = \delta_c \sqrt{N/D}$ . Отсюда получаем  $\delta_c = \sqrt{D/N} G^{-1/(1+m)}$ . Сравнивая  $\delta_c$  и  $\eta$ , заключаем, что при  $\nu = D$  условие справедливости формулы (5.29) есть

$$\beta = \frac{\delta_c}{\eta} = \langle \epsilon \rangle^{1/4} \nu^{-1/4} k^{-1/(1+m)} (\langle N \rangle k_0^2)^{(1-m)/2(1+m)} \ll 1. \quad (5.30)$$

Покажем теперь, что при  $\beta \gg 1$  и  $L \gg \delta_c$  формула (5.29) дает правильный порядок величины  $s$ , т.е. условие (5.30) также несущественно. Так как интегральный масштаб турбулентности  $L$  много больше, чем  $\delta_c$ , а колмогоровский масштаб  $\eta$  много меньше, чем  $\delta_c$ , то размер  $\delta_c$  принадлежит инерционному интервалу.

Очевидно, что воздействие вихрей с размером много больше  $\delta_c$  по-прежнему несущественно, а влияние вихрей с меньшими размерами в первом приближении сводится к интенсификации процессов переноса внутри зоны реакции. Чтобы учесть рассматриваемый эффект, воспользуемся приемом, предложенным Колмогоровым [1962а, б] и Обуховым [1962]. Рассмотрим куб со стороной порядка  $\delta_c$  и центром в точке  $x$ . Величины  $u, c, \rho, z$  осредним по этому кубу, а результат частичного осреднения обозначим  $u(x, t, \delta_c), c(x, t, \delta_c), \rho(x, t, \delta_c), z(x, t, \delta_c)$ . Под зоной реакции будем понимать область, расположенную вблизи поверхности  $z(x, t, \delta_c) = z_s$  и имеющую толщину порядка  $\delta_c$ . Поскольку предполагается, что влияние вихрей с размером меньше  $\delta_c$  сводится лишь к интенсификации процессов переноса внутри зоны реакции, то можно считать, что соотношения (5.21), (5.23), (5.24) описывают распределение  $c(x, t, \delta_c)$ , если входящие в них величины  $u, \rho, c, z, D$  заменим частично осредненными величинами, т.е. величинами  $u(x, t, \delta_c), \rho(x, t, \delta_c), c(x, t, \delta_c), z(x, t, \delta_c), D_\delta$ , где  $D_\delta$  — коэффициент турбулентной диффузии, обусловленной вихрями с размером  $\delta_c$  и меньше. Принятое предположение, разумеется, справедливо лишь при оценке порядков величин.

Идея описания интенсификации перемешивания в некоторой выделенной зоне из-за вихрей, масштаб которых не превышает характерный размер этой зоны, с помощью коэффициента диффузии  $D_\delta$  восходит к Ричардсону [1926]. В теории горения эта идея в основном привлекалась для анализа турбулентного горения однородной смеси (Прудников и др. [1971], Зимонт и Сабельников [1975б], Зимонт [1979]; см. также литературу, указанную в начале § 1.4). Напомним также, что идея Ричардсона лежит и в основе различных подсеточных моделей турбулентности, о которых упоминалось во введении и главе 4.

Заметим, что  $\delta_c$  и, следовательно,  $D_\delta$  заранее не известны, и поэтому необходим анализ уравнений для частично осредненных величин. С этой целью перейдем в систему координат, движущуюся вместе с некоторой точкой на поверхности  $z(x, t, \delta_c) = z_s$ , исключив тем самым влияние вихрей с размером много больше  $\delta_c$ . Учтем, что в области с размером порядка  $\delta_c$  все величины зависят лишь от  $\langle N \rangle_\delta, \langle \epsilon \rangle_\delta, \delta_c$ , поскольку размер  $\delta_c$  при-

надлежит инерционному интервалу (см. главу 4). Здесь  $\langle N \rangle_\delta$  и  $\langle \epsilon \rangle_\delta$  — значения скалярной диссипации и диссипации энергии, осредненные по области с характерным размером  $\delta_c$ . Из соображений размерности имеем  $D_\delta \sim \langle \epsilon \rangle_\delta^{1/3} \delta_c^{4/3}$ . Скорость среды в новой системе координат порядка  $(\langle \epsilon \rangle_\delta \delta_c)^{1/3}$ , пространственный масштаб ее изменения по определению равен  $\delta_c$ , а временной порядка  $\langle \epsilon \rangle_\delta^{-1/3} \delta_c^{2/3}$ . Поэтому справедлива оценка

$$u(x, t, \delta_c) = (\langle \epsilon \rangle_\delta \delta_c)^{1/3} v(y, \tau),$$

$$y = \frac{x}{\delta_c}, \quad \tau = t \langle \epsilon \rangle_\delta^{1/3} \delta_c^{-2/3},$$

где  $v$  — случайная функция, зависящая лишь от  $y$  и  $\tau$ .

Аналогичная формула справедлива и для плотности, т.е.  $\rho(x, t, \delta_c) = \rho(y, \tau)$ . Величину  $z(x, t, \delta_c)$  представим в виде

$$z(x, t, \delta) = z_s + \langle N \rangle_\delta^{1/2} \delta_c^{1/3} \langle \epsilon \rangle_\delta^{-1/6} \psi(y, \tau),$$

где  $\psi$  — случайная функция, зависящая лишь от  $y$  и  $\tau$ . Величину  $c$  представим как

$$c = c_\delta \chi(y, \tau).$$

где  $c_\delta$  — некоторый, пока неизвестный масштаб изменения приведенной концентрации. Заменяем в соотношениях (5.21)–(5.24)  $u$ ,  $c$ ,  $\rho$ ,  $z$ ,  $D$  на  $u(x, t, \delta_c)$ ,  $c(x, t, \delta_c)$ ,  $\rho(x, t, \delta_c)$ ,  $z(x, t, \delta_c)$ ,  $D_\delta$ , перейдем к новым переменным  $y$ ,  $\tau$  и воспользуемся полученными выше оценками. В случае  $m = 2$  (горение водорода) имеем

$$\rho \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + \rho v_k \frac{\partial \chi}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \rho \frac{\partial \chi}{\partial y_k} - k^0 [\chi - \chi^0 \psi \theta(\psi)]^2 \rho, \quad (5.31)$$

$$k^0 = k \delta_c^{2/3} \langle \epsilon \rangle_\delta^{-1/3} c_\delta, \quad \chi^0 = N \delta_c^{1/2} \delta_c^{1/3} c_\delta^{-1} \langle \epsilon \rangle_\delta^{-1/6}.$$

По определению величины  $v$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\rho$  зависят лишь от  $y$ ,  $\tau$ , что возможно лишь в том случае, когда оба критерия  $k^0$  и  $\chi^0$ , фигурирующие в полученном соотношении, порядка единицы. Поэтому имеем два условия для нахождения двух неизвестных величин  $c_\delta$  и  $\delta_c$ . Таким образом,

$$c_\delta \sim \left( \frac{\langle N \rangle_\delta}{k} \right)^{1/3}, \quad \delta_c \sim \langle \epsilon \rangle_\delta^{1/2} k^{-1} \langle N \rangle_\delta^{-1/2}.$$

Эти формулы получены в работе Кузнецова [1982a].

Сравнивая первое из этих соотношений с формулой (5.29) ( $z = z_s$ ,  $m = 2$ ), заключаем, что в обоих случаях порядок отклонений от термодинамического равновесия одинаков. Поэтому в первом приближении соотношение (5.29) справедливо и тогда, когда условие (5.30) не выполняется. Здесь следует сделать лишь две оговорки. Во-первых, если условие (5.30) выполнено, то в (5.29) входит истинное, т.е. неосредненное, значение скалярной диссипации  $N$ . Если же  $\beta \gg 1$ , т.е.  $L \gg \delta_c \gg \eta$ , то в (5.29) необходимо подставить скалярную диссипацию, осредненную по области с малым размером порядка  $\delta_c$ . Этот вывод основан на том, что



в уравнение (5.31) входят лишь величины, осредненные по такой области. Во-вторых, оценки величин  $\delta_c$  и  $c_\delta$  справедливы только в том случае, когда  $L \gg \delta_c$ .

Проанализируем формулу (5.29) и проведем ряд оценок. Полученное соотношение позволяет связать температуру и концентрации всех веществ с восстановленной концентрацией горючего. Тем самым задача сводится к описанию поля концентрации инертной примеси. В (5.29) фигурируют неосредненные значения параметров, т.е. в пределах применимости формул для величины  $c$  в первом приближении дано описание влияния всех деталей турбулентности на химические процессы. Видно, что в (5.29) входят два случайных параметра  $z$  и  $N$ . Пульсации первого параметра обусловлены крупномасштабными вихрями и, следовательно, эти пульсации приводят к переносу зоны реакций как целого, без изменения ее внутренней структуры. Флуктуации скалярной диссипации определяются мелкомасштабными вихрями. Эти флуктуации уже приводят к изменению внутренней структуры зоны реакции.

С точки зрения практических приложений наибольший интерес представляет вычисление средних значений от различных функций вида  $F(c)$ . Для этой цели воспользуемся уже обсуждавшейся в главе 3 гипотезой о том, что в турбулентной жидкости пульсации концентрации инертной примеси и скалярной диссипации статистически независимы. Проанализируем сначала, насколько велико влияние пульсаций скалярной диссипации. Из (5.29) следует, что  $c \sim N^{1/3}$  ( $m = 2$ ). Поэтому за количественную характеристику этого влияния можно взять отношение  $I_c = \langle N^{1/3} \rangle / \langle N \rangle^{1/3}$ .

В оценках предположим, что распределения вероятностей скалярной диссипации и диссипации энергии описываются одним и тем же законом. Это предположение подтверждается опытами Шринивасана, Дая и Антониа [1977]. Следовательно, формула (4.23) справедлива и в рассматриваемом случае. Значение  $\mu$  в этой формуле, вообще говоря, должно быть иным. Используя результаты упомянутой работы, имеем  $\mu = 0,36$ . Таким образом, получаем  $\langle N^n \rangle_t \approx \langle N \rangle_t^n (L/\eta)^{\mu n} (n-1)^{1/2} \sim \langle N \rangle_t^n \text{Re}^{3\mu n(n-1)/8}$ , где  $\text{Re} = \sqrt{e} L/\nu$ . Так как вязкость следует рассчитывать по температуре продуктов сгорания, то в обычных условиях величина  $\text{Re}$  редко превышает  $10^3$ . Тогда  $I_c \sim 0,81$ , т.е. пульсациями скалярной диссипации в данном случае можно пренебречь и при вычислении различных средних значений считать, что  $N = \langle N \rangle_t$ , где  $\langle N \rangle_t$  — диссипация, осредненная по турбулентной жидкости (Кузнецов [1982а]).

Из проведенной оценки следует, что отклонения от равновесия определяются критерием  $G = k k_0^{m-1} / \langle N \rangle_t$ , который характеризует отношение времени подвода вещества к фронту пламени к времени химической реакции. Обычно значения этого критерия очень велики. В качестве примера рассмотрим горение струи водорода, вытекающей из сопла диаметром  $d = 0,05$  см со скоростью  $u_0 = 880$  м/с. Расчет, основанный на системе уравнений (5.4), показывает, что при  $\langle z \rangle = z_s$  и  $y = 0$  скалярная диссипация равна  $\langle N \rangle_t = 0,08 \text{ с}^{-1}$ , и, следовательно, при  $k = 1,4 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$  получаем  $G = 1,7 \cdot 10^7$ . Тогда из (5.29) имеем  $\Delta c = c - c^{(\theta)} = 2,7 \cdot 10^{-3}$  и из данных, изображенных на рис. 5.8, 5.9, заключаем, что температура пламени  $T_s$

снижается на 200 К, а концентрация атомарного кислорода в 6 раз превышает равновесное значение (при  $z = z_s$ ).

В заключение еще раз отметим, что формула (5.29) справедлива лишь для ограниченного диапазона значений  $z$  и лишь в том случае, когда  $|c - c^{(e)}|$  не слишком велико. Для водорода она пригодна при  $0,02 < z < 0,036$ , а для пропана — при  $0,045 < z < 0,08$ . Таким образом, если состав значительно отличается от стехиометрического, то решение (5.29) становится непригодным. Кроме того, с увеличением скалярной диссипации  $\langle N \rangle_t$  величина  $|c - c^{(e)}|$  растет, и при некотором значении  $\langle N \rangle_t$  скорость самой медленной реакции в (5.18) или (5.19) становится меньше скорости самой быстрой реакции в (5.20), т.е. нарушается справедливость предположений, в которых получено соотношение (5.24). Для водорода это происходит при  $c - c^{(e)} \approx 10^{-2}$ , а для пропана — при  $c - c^{(e)} \approx 5 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, при очень большой скорости смешения формула (5.29) также непригодна.

Указанные ограничения могут быть ослаблены, так как на основе рассуждений, которые использовались при выводе (5.26), получается система уравнений более общего вида (Петерс [1984]):

$$N \frac{d^2 c_i}{dz^2} - W_i = 0. \quad (5.32)$$

При ее записи считается, что учтены все следствия законов сохранения тепла и вещества, т.е. ряд независимых переменных исключен и, следовательно,  $W_i$  — известные функции  $c_i$  и  $z$ . При выводе (5.32) не предполагается, что реакции (5.18), (5.19) идут со скоростью, много большей, чем реакции (5.20). Главное условие применимости (5.32) имеет прежний вид, т.е. интегральный масштаб турбулентности  $L$  должен быть много больше толщины зоны химических реакций  $\delta_c$ . В общем случае способ вычисления  $\delta_c$  не может быть указан заранее, и, следовательно, систему (5.32) сначала следует проинтегрировать, а затем проанализировать условие ее применимости.

Остановимся на физическом смысле условия  $L \gg \delta_c$ . Из него, очевидно, следует, что градиенты температуры и концентрации меняются в зоне реакций очень резко. Поэтому система (5.32) справедлива только в области резкого изменения градиентов величин  $c_i$ . Вне этой области необходим другой подход к решению уравнений переноса. Этот подход удобно проанализировать в § 5.6.

**3. Условие существования турбулентного диффузионного пламени.** Из физических соображений ясно, что система (5.32) может не иметь решений, описывающих процесс горения. Такие решения получаются при очень больших значениях параметра  $N$ . Тогда в (5.32) можно пренебречь слагаемым  $W_i$ , и решение имеет вид  $c_i = A_i z + B_i$  ( $A_i, B_i$  — постоянные), т.е. поля  $c_i$  и  $z$  подобны (происходит лишь процесс смешения). Таким образом, процесс горения возможен лишь при  $N < N_{cr}$ , где параметр  $N_{cr}$  может быть точно вычислен при решении системы (5.32). Эта задача еще не решена, и поэтому ограничимся грубой оценкой величины  $N_{cr}$ .

Такая оценка может быть получена из теории Зельдовича [1949], Зельдовича и Франк-Каменецкого [1938а, б]. В последней работе установлено, что существует определенная связь между константами скоростей хими-

ческих реакций (эти константы фигурируют в величинах  $W_i$ ) и скоростью нормального распространения пламени  $u_n$ . Такой подход сильно упрощает задачу, так как характеристики химической кинетики могут быть в первом приближении описаны с помощью только одной величины  $u_n$ , значение которой известно из опытов.

Другое упрощение указано в работе Зельдовича [1949], в которой установлено, что процесс диффузионного горения является устойчивым, если поток горючего  $Q_f$  к фронту пламени меньше некоторого критического значения  $Q_{fc}$ , а  $Q_{fc}$  по порядку совпадает с потоком горючего к нормальному фронту пламени, распространяющемуся по стехиометрической смеси. Как будет видно далее, сравнение величин  $Q_f$  и  $Q_{fc}$  позволит оценить параметр  $N_{cr}$ .

Действительно, поток горючего к любому диффузионному пламени при  $z_s \ll 1$  равен

$$Q_f = \rho^{(b)} D^{(b)} \left| \frac{\partial z}{\partial n} \right| = \rho^{(b)} \sqrt{ND^{(b)}}, \quad z_s \ll 1,$$

где индекс  $b$  относится к температуре горения, а употребляемый далее индекс  $0$  — к начальной температуре,  $n$  — нормаль к поверхности пламени. При выводе этого соотношения использована формула (5.3). Поток горючего в нормальном пламени, движущемся по стехиометрической смеси, очевидно, есть  $Q_{fc} = \rho^{(0)} u_{ns} z_s$ , где  $u_{ns}$  — скорость нормального распространения пламени в стехиометрической смеси. Предположив, что  $\rho \sim T^{-1}$ ,  $D \sim T^2$ , условие существования диффузионного пламени  $Q_f < Q_{fc}$  приводим к виду

$$N < N_{cr} = \frac{u_{ns}^2 z_s^2}{D^{(0)}}, \quad (5.33)$$

где индекс  $0$  соответствует начальной температуре.

Аналогичный результат получен также Петерсом и Вильямсом [1981].

Формула (5.33) удобна при анализе турбулентного горения, поскольку скалярная диссипация  $N$  является одной из важнейших величин, определяющих процесс смешения, а ее среднее значение входит практически во все модели турбулентности.

Следует подчеркнуть, что в (5.33) фигурирует неосредненное значение скалярной диссипации. В ряде случаев это обстоятельство, по-видимому, может иметь важное значение, поскольку, как уже указывалось, отсюда следует, что при больших числах Рейнольдса в потоке с достаточно большой вероятностью наблюдаются пульсации величины  $N$ , которые намного превышают среднее значение скалярной диссипации. Такие пульсации носят локальный характер в том смысле, что большие значения  $N$  наблюдаются в областях с малым характерным размером. Поэтому во фронте пламени должны возникать "дырки", т.е. в отдельных областях пламени условие (5.33) не выполняется и горение в них прекращается. Появление этих дырок можно легко наблюдать в прикорневых частях диффузионного пламени.

Оценим теперь величину  $N_{cr}$ . Для этого отметим, что в реальных случаях использованная выше модель дает лишь качественно правильный результат. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, энергии активаций ведущих реакций недостаточно высоки. Это приводит к тому, что в

ряде случаев при вариации состава смеси, т.е. величины  $z$ , нормальная скорость распространения пламени достигает максимума не при  $z = z_s$ , т.е. в стехиометрической смеси, температура горения которой максимальна, а при некотором другом значении  $z = z_m$ . Чтобы учесть это обстоятельство, величину  $Q_{fc}$  естественно оценивать в смесях с максимальным значением  $u_m$ . Поэтому в (5.33) следует заменить  $u_{ns}$  на  $u_{nm}$ , а  $z_s$  на  $z_m$ , где  $u_{nm}$  — максимальное значение скорости нормального распространения пламени.

Во-вторых, в (5.33) содержится некоторая неопределенность, связанная с тем, что коэффициенты диффузии горючего и окислителя различны. Поэтому все проведенные выше рассуждения справедливы не только для горючего, но и для окислителя. В последнем случае также получается соотношение вида (5.33). Однако в нем будет фигурировать не коэффициент диффузии горючего, а коэффициент диффузии окислителя. В оценках из этих коэффициентов естественно выбирать наибольший. Тем самым выбирается наиболее "жесткое" условие существования пламени. Тогда, используя при оценке  $z_m$ ,  $u_{nm}$  и  $D^{(0)}$  экспериментальные данные, приведенные в книгах Льюиса и Эльбе [1961], Бретшнайдера [1966], Дубовкина [1961], заключаем, что в нормальных условиях при горении водорода параметр  $N_{cr}$  равен  $200 \text{ с}^{-1}$ , а при горении пропана  $30 \text{ с}^{-1}$ . С увеличением давления  $p$  или начальной температуры  $T^{(0)}$  значения  $N_{cr}$  растут примерно как  $(T^{(0)})^2 p^{0.7}$ . В заключение отметим, что формула (5.33) дает лишь условие существования стабилизированного диффузионного пламени. Можно показать, что указанное ограничение является весьма важным.

### § 5.5. Образование окислов азота при турбулентном диффузионном горении

Основная цель данного параграфа заключается в проверке развитых выше теоретических представлений при исследовании образования окислов азота. Поэтому обратимся к наиболее хорошо изученному экспериментально случаю — затопленному диффузионному факелу. Теория образования окислов азота в таком факеле развита в работе Бурико и Кузнецова [1983а]. Такое исследование представляет и непосредственный практический интерес.

Вначале остановимся на образовании NO в условиях, когда излучение мало, а температура и концентрация атомарного кислорода термодинамически равновесны. Рассмотрим горение водорода. В этом случае основные исследования проведены при столь больших скоростях истечения, что влияние сил плавучести мало. Тогда параметр  $w$ , определяемый формулой (5.8), не зависит от  $x$ ,  $y$ ,  $d$ ,  $u_0$ , уравнение (5.9), дающее среднюю концентрацию NO ( $\langle c_{10} \rangle$ ), линейно, а коэффициенты в этом уравнении  $\langle u \rangle$ ,  $v_0$ ,  $v_t$ ,  $P(z_s)$  — функции только от  $x$ ,  $y$ ,  $u_0$ ,  $d$ . Следовательно,

$$\langle c_{10} \rangle = w \tau F \left( \frac{x}{d}, \frac{y}{d} \right),$$

где  $F$  — безразмерная функция,  $\tau = d/u_0$  (эта величина условно называется далее временем пребывания).

Сделанный вывод не подтверждается данными, приведенными на рис. 5.14, из которого видно, что величина  $c^0 = \langle c_{10} \rangle^{(m)} / \tau$  ( $\langle c_{10} \rangle^{(m)}$  – максимальная концентрация NO на оси) закономерно уменьшается с увеличением  $\tau$ . Отсюда ясно, что эффекты, рассмотренные в §§ 5.3, 5.4 и не учтенные при выводе соотношения  $\langle c_{10} \rangle = w\tau F$ , имеют принципиальное значение. В рассматриваемом случае справедливо соотношение  $\langle N \rangle = \tau^{-1} F_1(x/d, y/d)$ , т.е. химическая неравновесность определяется параметром  $\tau$ . Влияние излучения характеризуется параметром  $q$ , который,

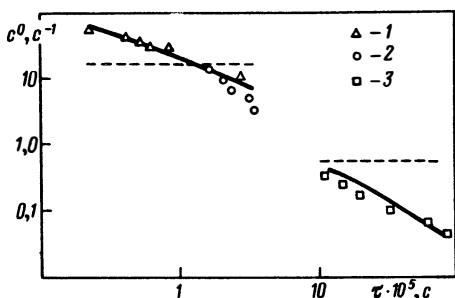


Рис. 5.14. Сравнение рассчитанной максимальной осредненной концентрации NO на оси затопленного диффузионного факела с экспериментальными данными разных авторов. 1 – водород, Лавуа и Шладер [1974]; 2 – водород, Билджер и Бек [1974]; 3 – пропан, Бурико и Кузнецов [1978]. Сплошные линии – расчет, в котором учтено излучение и неравновесность пламени; штриховые линии – расчет для адиабатического, термодинамически равновесного пламени

как это вытекает из (5.10), (5.12)–(5.15), можно записать в виде  $q \sim \tau$ . Отсюда следует, что  $c^0$  – универсальная функция  $\tau$ .

Этот вывод сделан в работе Бурико и Кузнецова [1978] и, как видно из рис. 5.14, хорошо подтверждается опытами. Остановимся на количественной стороне вопроса. Полученные выше формулы дают возможность рассчитать выход окислов азота. На первом этапе расчета система (5.4) не используется и находится только зависимость  $w(G, q)$ . Для этого задаются значения  $z, G, q$  и решается система алгебраических соотношений, вытекающих из законов сохранения энергии, массы атомов H, O и C и условий равновесия реакций (5.18) и (5.19). При этом используется формула (5.29), а роль излучения учитывается тем, что начальная энтальпия уменьшается на величину  $qQ(z)$  ( $Q = Q_0 z/z_s$  при  $z < z_s$ ,  $Q = Q_0(1-z)/(1-z_s)$ , где  $Q_0$  – теплота сгорания одного грамма топлива). Такой расчет позволяет найти из формулы (5.6) зависимость скорости окисления азота как функцию  $z, G, q$ , а из соотношения (5.8) определить функцию  $w(G, q)$ .

Результаты расчетов изображены на рис. 5.15, 5.16, из которых видно, что отклонения от равновесия могут в несколько раз увеличивать скорость окисления азота.

На заключительном этапе численно решается система уравнений (5.4), (5.9). Последнее уравнение в (5.4) описывает распределение пульсаций концентрации. Одно из слагаемых в этом уравнении, а именно то, которое пропорционально постоянной  $\beta_1$ , дает величину  $2\langle N \rangle$ . Чтобы найти коэффициент перемежаемости и, следовательно, величину  $\langle N \rangle_t = \langle N \rangle / \gamma$ , используются формулы (3.56), (3.57). Входящие в эти формулы величины  $\langle z \rangle$  и  $\sigma$  находятся в процессе расчета системы (5.4). По известному значению  $\langle N \rangle_t$  определяется критерий  $G$ . Потери тепла излучением при горении водорода даются формулами (5.10), (5.12), (5.13), а при горении пропана – (5.10), (5.12), (5.14), (5.15). Рассчитанные значения  $G$  и  $q$  позволяют

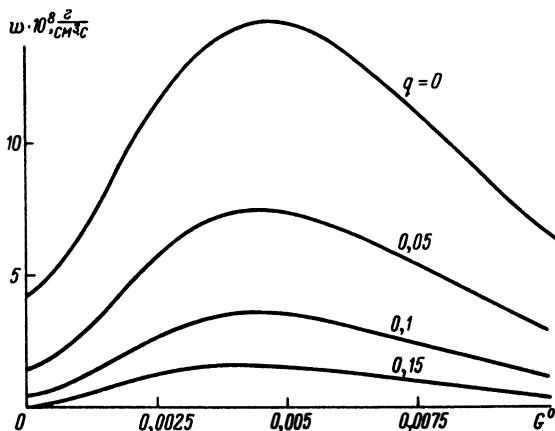


Рис. 5.15. Влияние неравновесности и излучения диффузионного пламени на эффективную скорость окисления азота при горении водорода в воздухе.  $G^0 = G^{-1/(m+1)}$ ,  $m = 2$

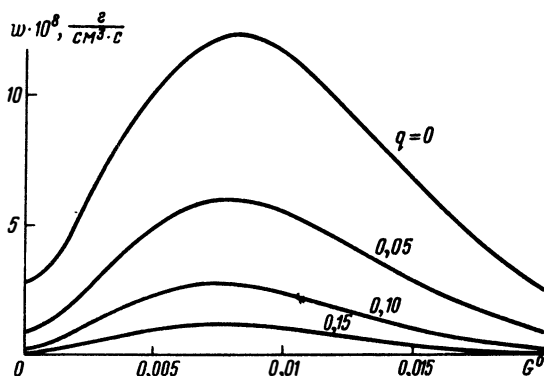


Рис. 5.16. Влияние неравновесности и излучения диффузионного пламени на эффективную скорость окисления азота при горении пропана в воздухе.  $G^0 = G^{-1/(m+1)}$ ,  $m = 2,4$

вычислить  $w$  с помощью данных, приведенных на рис. 5.15, 5.16. Найденное значение  $w$  и формулы (3.56), (3.57) дают возможность вычислить среднюю скорость реакции в уравнении (5.9), при численном интегрировании которого можно легко получить распределение средней концентрации NO.

Остановимся теперь на результатах численных расчетов. Все расчеты проведены на основе констант скоростей химических реакций, заимствованных из работы Дженкинса, Юмлу и Сполдинга [1966], т.е.  $k = 1,4 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$  для водорода,  $k = 6,3 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$  для пропана. Результаты расчета максимальной концентрации NO на оси затопленных факелов пропана и водорода изображены на рис. 5.14, где  $c^0 = \langle c_{10} \rangle^{(m)}/\tau, \langle c_{10} \rangle^{(m)}$  — максимальная концентрация NO на оси факела. Из рис. 5.14 видно, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Сравнение рассчитанных распределений  $\text{NO}$  с экспериментальными данными Лавуа и Шладера [1974] приведено на рис. 5.17 – 5.19 (значки – опытные данные, кривые – расчет,  $d = 2,2 \text{ мм}$ ,  $u_0 = 200 \text{ м/с}$ ). На рис. 5.20 представлено сравнение рассчитанного безразмерного потока окислов азота  $Q^0$  от расстояния до сопла. Величина  $Q^0$  определена соотношением

$$Q^0 = \frac{4 \int_0^{\infty} \langle \rho \rangle \langle u \rangle \langle c_{10} \rangle y dy}{\rho_f u_0 d^2}$$

где  $\rho_f$  – плотность топлива. Поскольку профили  $\langle \rho \rangle$ ,  $\langle u \rangle$  в опытах Лавуа и Шладера [1974] не измерялись, то использовались рассчитанные профили  $\langle \rho \rangle$ ,  $\langle u \rangle$  и измеренные Лавуа и Шладером профили  $\langle c_{10} \rangle$ . Из рис. 5.17,

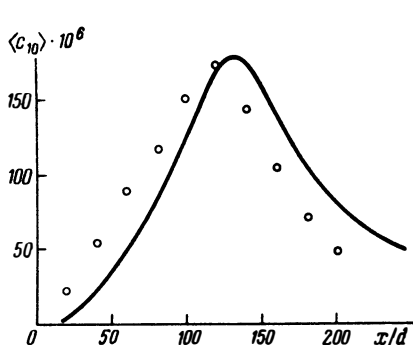


Рис. 5.17. Сравнение рассчитанной средней концентрации  $\text{NO}$  на оси затопленного диффузионного факела водорода с экспериментальными данными Лавуа и Шладера [1974]

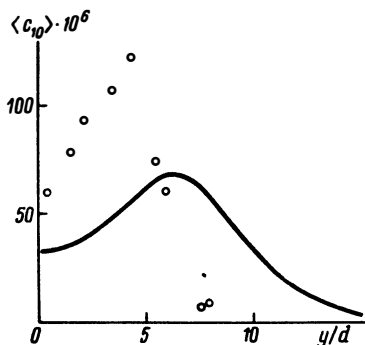


Рис. 5.18. Сравнение рассчитанного профиля средней концентрации  $\text{NO}$  в затопленном диффузионном факеле водорода в сечении  $x/d = 40$  с экспериментальными данными Лавуа и Шладера [1974]

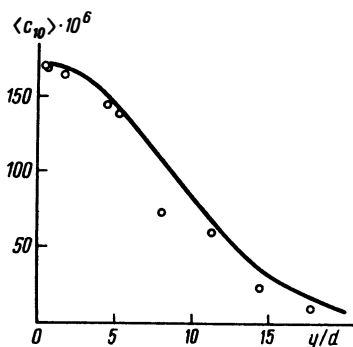


Рис. 5.19. Сравнение рассчитанного профиля средней концентрации  $\text{NO}$  в затопленном диффузионном факеле водорода в сечении  $x/d = 160$  с экспериментальными данными Лавуа и Шладера [1974]

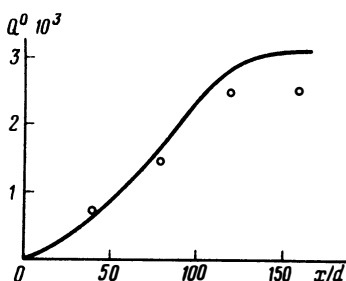


Рис. 5.20. Сравнение рассчитанного потока окислов азота в различных сечениях затопленного диффузионного факела водорода с экспериментальными данными Лавуа и Шладера [1974]

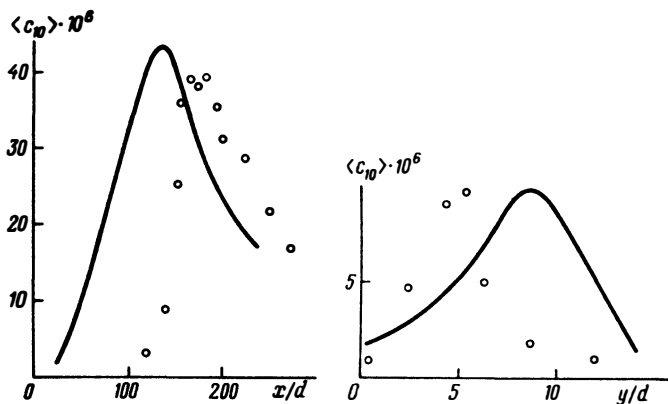


Рис. 5.21. Сравнение рассчитанной средней концентрации NO на оси затопленного диффузионного факела пропана с экспериментальными данными Бурико и Кузнецова [1978].  $d = 3$  мм,  $u_0 = 25$  м/с

Рис. 5.22. Сравнение рассчитанного профиля средней концентрации NO в затопленном диффузионном факеле пропана в сечении  $x/d = 22$  с экспериментальными данными Бурико и Кузнецова [1978]

5.18 видно, что осевое и радиальное распределение  $\langle c_{10} \rangle$  на малых расстояниях от сопла данной теорией описывается неудовлетворительно. На больших расстояниях от сопла согласование теоретических и экспериментальных данных следует признать хорошим. Рис. 5.20 показывает также, что расход окислов азота может быть достаточно точно рассчитан на всех расстояниях от сопла. Более детальный анализ причин, которыми обусловлены указанные выше различия, удобно провести несколько позже. Аналогичные расчеты были выполнены и для затопленного диффузионного факела пропана. Сравнение рассчитанных распределений NO с экспериментальными данными Бурико и Кузнецова [1978] приведено на рис. 5.21 – 5.24 (значки – опытные данные, кривые – расчет).

Видно, что все выводы, сделанные при анализе горения водорода, справедливы и при окислении пропана.

Остановимся теперь на причинах низкой точности расчетов концентрации окислов азота на малых расстояниях до сопла. Прежде всего отметим, что развитая теория во всех случаях дает правильное описание суммарного выхода окислов азота, т.е. величина  $\int_0^{\infty} \langle \rho W_{10} \rangle y dy$  рассчитывается с

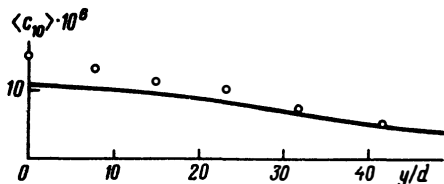


Рис. 5.23. Сравнение рассчитанного профиля средней концентрации NO в затопленном диффузионном факеле пропана в сечении  $x/d = 270$  с экспериментальными данными Бурико и Кузнецова [1978]



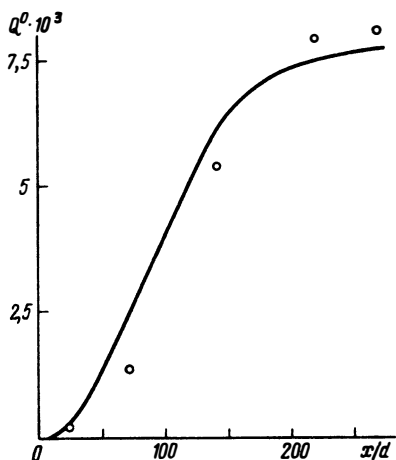


Рис. 5.24. Сравнение рассчитанного потока окислов азота в различных сечениях затопленного диффузионного факела пропана с экспериментальными данными Бурико и Кузнецова [1978]

удовлетворительной точностью. Отсюда следует, что средняя скорость окисления азота  $\langle W_{10} \rangle$  правильно рассчитывается во всех точках факела. Это и неудивительно, так как в анализируемом случае  $W_{10}$  зависит только от характеристик инертной примеси, а они, как отмечалось в начале главы, с хорошей точностью описываются системой (5.4). Следовательно,

причина низкой точности расчета на малых расстояниях от сопла может быть обусловлена лишь предположением о равенстве коэффициентов турбулентного переноса окислов азота и инертной примеси.

Предположение о равенстве коэффициентов турбулентного переноса инертной примеси и примеси, участвующей в химической реакции, было поставлено под сомнение в работах Чанга [1970], Вильюнова и Дика [1976], в которых развиты полуэмпирические методы описания влияния химических реакций на законы турбулентного переноса. Поскольку справедливость предположений, сделанных в этих работах, непосредственно не проверена, то полезно указать на прямое доказательство важности рассматриваемого эффекта. Следуя работе Кузнецова [1979б], рассмотрим турбулентную диффузию горючего. Предположим, что реакция является одноступенчатой и необратимой, а ее скорость бесконечно велика, т.е. справедлива формула (5.3). Тогда поток горючего дается соотношением

$$\langle c_f u \rangle = \int c_f(z) u P(u, z) d^3 u dz = \int c_f(z) \langle u \rangle_z P(z) dz,$$

где  $P(u, z)$  – плотность вероятностей скорости и концентрации, а условно осредненная скорость среды  $\langle u \rangle_z$  определена формулой (3.16), в которую входит поток инертной примеси и дисперсия пульсаций концентрации  $\sigma^2$ . Эта формула позволяет вычислить коэффициент турбулентной диффузии горючего, который по определению равен

$$\frac{\langle c_f v \rangle - \langle c_f \rangle \langle v \rangle}{\partial \langle c_f \rangle / \partial y}.$$

Расчет, основанный на формулах (3.16), (3.56), показывает, что 1) коэффициенты турбулентной диффузии горючего и инертной примеси заметно различаются; 2) эти различия увеличиваются при возрастании пульсаций концентрации (Кузнецов [1979б]). Таким образом, химическая реакция действительно влияет на процесс турбулентного переноса реагирующей примеси.

В рассматриваемом случае это влияние непринципиально, поскольку процессы переноса не меняют общего потока окислов азота, а источник в

уравнении (5.9) не зависит от  $c_{10}$ . Если же такая зависимость становится существенной (что, например, имеет место при больших  $\tau$ , когда значение  $c_{10}$  приближается к равновесному), то и общий расход окислов азота будет зависеть от их коэффициента турбулентной диффузии.

В заключение этого параграфа отметим, что в большинстве рассмотренных выше случаев условие (5.30) не выполнялось, т.е., строго говоря, формула (5.29) дает лишь правильный порядок величин. Тем не менее, учитывая хорошее согласование результатов расчета и экспериментальных данных, можно предположить, что формула (5.29) справедлива и в том случае, когда условие (5.30) не выполняется.

### § 5.6. Турбулентное горение частично перемешанных газов

Одна из особенностей горения заранее не перемешанных газов состоит в том, что скалярная диссипация, определяющая условия протекания химических реакций, сильно варьируется в зависимости от положения рассматриваемой точки. Указанная особенность проиллюстрирована на рис. 5.25, где приведены результаты расчета, основанного на системе (5.4). Эти расчеты проведены для оси затопленного пропанового факела. По оси абсцисс отложено не расстояние  $x/d$ , а средняя концентрация  $\langle z \rangle_t$ . Видно, что величина  $\langle N \rangle_t$  меняется на несколько порядков.

Этот вывод имеет важное значение, так как из-за сильной вариации  $\langle N \rangle_t$  условие существования диффузионного пламени (5.33) может нарушаться. Как уже отмечалось в § 5.4, важную роль играют и флуктуации величины  $N$ , амплитуда которых, как ясно из главы 4, очень велика. Такие флуктуации приводят к появлению "дырок" в пламени, через которые

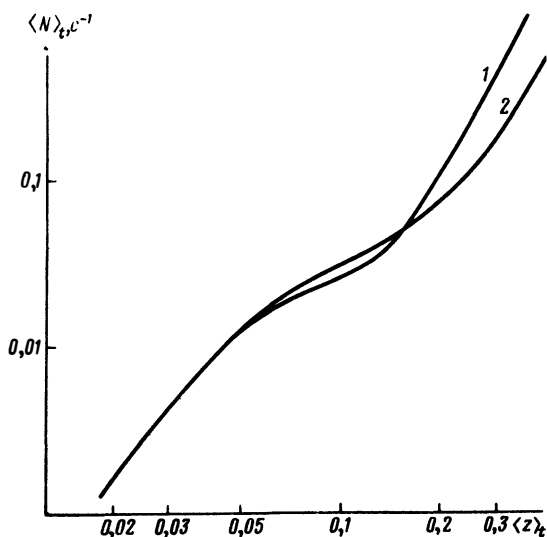


Рис. 5.25. Распределение скалярной диссипации на оси затопленного диффузионного факела пропана. 1 —  $d = 3$  мм,  $u_0 = 19.8$  м/с; 2 —  $d = 6$  мм,  $u_0 = 10.7$  м/с

несгоревшее топливо проникает в бедную часть факела, т.е. в область  $z < z_s$ . Ввиду сильной вариации  $\langle N \rangle$ , этот эффект всегда играет важную роль в начальных сечениях факела и приводит к тому, что диффузионное горение происходит по схеме, которая часто заметно отличается от традиционно рассматриваемой, так как по обе стороны зоны реакции могут находиться и топливо, и окислитель, а горючие компоненты переносятся к фронту пламени параллельно. Аналогичная особенность может быть следствием и самого способа организации процесса горения. Например, при распыливании жидкого топлива в потоке воздуха из-за скопления фаз часть несгоревших капель может проникать в бедные области. Следовательно, воздух и испарившееся топливо будут параллельно диффундировать к зоне реакций. Таким образом, значительный практический интерес представляет исследование горения в потоке с сильно переменным составом при наличии несгоревшего топлива во всем факеле, т.е. горения частично перемешанных газов. Этому вопросу и посвящен данный параграф.

Чтобы пояснить математическую постановку задачи, вернемся к системе (5.32). Как уже указывалось, эта система справедлива только в зоне химических реакций, т.е. там, где градиенты концентрации и температуры меняются очень резко. Указанная особенность обусловлена тем, что скорость химических реакций сильно зависит от температуры и, следовательно, от величины  $z$ , значение которой определяет максимальную температуру. Следствия, вытекающие из этой особенности, проанализированы в работе Кузнецова [1983] на примере реакции окисления CO. Установлено, что поскольку при уменьшении  $z$  скорость химической реакции резко уменьшается, то можно выделить две характерные области. В первой области ( $z \geq z_1(N) < z_s$ ) химические реакции существенны и справедлива система (5.32). Во второй области ( $z < z_1$ ) химические реакции не играют роли. Обе области разделены очень узким пограничным слоем (фронтом замораживания). Показано, что 1) концентрацию CO во фронте замораживания можно найти, интегрируя систему (5.32), и эта концентрация зависит только от  $N$ ; 2) из-за сильной зависимости скорости реакции от  $z$  функция  $z_1(N)$  слабо зависит от  $N$ .

В соответствии с результатами проанализированной работы далее предполагается, что качественные особенности, обнаруженные при исследовании окисления CO, сохраняются и в общем случае. Таким образом, можно считать, что 1) в области  $z < z_1(N) < z_s$  реакции не идут; 2) функция  $z_1(N)$  слабо зависит от  $N$ ; 3) система (5.32) проинтегрирована, т.е. найдено положение фронта замораживания  $z = z_1(N)^*$  и концентрации всех компонентов в этом фронте.

Следовательно, задача сводится к исследованию решения уравнения диффузии без источников для концентрации  $c_f$  какого-нибудь одного стабильного вещества (исходного топлива, продукта пиролиза, окиси углерода и т.д.), которое, далее, для краткости называется горючим. Граничные условия заданы на нестационарной, искривленной поверхности  $z' = z_1 = \text{const}$  в виде  $c_f = \varphi(N)$ . Зависимость  $\varphi(N)$  может быть найдена при интегрировании системы (5.32). Существенно, что в отличие от зависимости

\*) Значения  $z_1$  для разных веществ, вообще говоря, не совпадают.

$z_1(N)$  функция  $\varphi(N)$  может сильно изменяться при вариации  $N$ , т.е. граничные условия для концентраций  $c_f$  и  $z$ , удовлетворяющих одному и тому же уравнению, не подобны. Поэтому при  $z < z_1$  величина  $c_f$  зависит не только от  $z$  и  $N$ , как это следует из (5.32), но и от предыстории процесса. Указанное обстоятельство осталось незамеченным в работе Лью, Брзя и Мосса [1984], в которой получен ряд результатов, основанных на неявно принятом предположении о том, что система (5.32) справедлива при всех  $z$ , т.е. поля  $c_f$  и  $z$  подобны.

Чтобы решить поставленную задачу, проанализируем качественные особенности функции  $\varphi(N)$ , а затем на примере горения в плоском слое смешения выявим те гидродинамические особенности, которые определяют характер процессов переноса горючего в бедной части факела. Результаты этого анализа используем для вывода приближенного уравнения, описывающего среднюю концентрацию горючего в бедной части факела.

Укажем сначала ряд упрощающих обстоятельств. Прежде всего отметим, что при  $\varphi = \text{const}$  поля  $c_f$  и  $z$  подобны, если на начальной стадии процесса в бедной части факела ( $z < z_1$ ) горючее отсутствовало, т.е.

$$c_f = \frac{\varphi z}{z_1}, \quad \varphi = \text{const}. \quad (5.34)$$

Эта формула приближенно справедлива и в ряде других случаев. В самом деле, ясно, что  $\varphi \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow 0$  (уменьшается поток топлива к зоне реакций и процесс приближается к термодинамически равновесному). Ясно также, что по мере удаления от точки слияния потоков топлива и окислителя характерные значения  $N$  уменьшаются ( $z = \text{const}$  при полном смешении). Следовательно, горючее проникает в бедную часть факела в основном на ранних стадиях процесса. Позже оно диффундирует из бедной части факела к зоне реакции, где и сгорает. Если процесс переноса происходит достаточно быстро, то формула (5.34) приближенно справедлива. Таким образом, (5.34) описывает некоторое равновесное состояние, в котором концентрация горючего зависит только от констант, характеризующих химическую кинетику, и локальных характеристик турбулентности  $z$  и  $N$ .

Скорость достижения такого состояния прежде всего определяется знаком скорости среды  $v$  относительно поверхности  $z = z_1$ . Для пояснения рассмотрим простой пример — горение при смешении неограниченных потоков воздуха ( $z = 0$ ) и богатой топливоздушной смеси ( $z = z_0 > z_s$ ). Варьирование параметра  $z_0$  позволит прояснить основные особенности проблемы.

Вследствие перемежаемости имеются три области 1 – 3 (рис. 5.26, а, б), разделенные случайно колеблющимися границами  $F_1$  и  $F_2$ . В области 1 находится чистый воздух, а в области 2 — исходная смесь. Течение в областях 1 и 2 потенциально. В области 3 (турбулентной жидкости) течение завихренно, а концентрация случайно меняется между нулем и  $z_0$ . Поскольку обычно  $St \gg 1$ , то при  $z_0 \sim 1$  поверхность  $z = z_1 < z_s$  расположена вблизи границы  $F_1$  (рис. 5.26, а). Наоборот, при малых  $z_0$  поверхность  $z = z_1$  расположена вблизи границы  $F_2$  (рис. 5.26, б). В этих предельных случаях нормальная компонента скорости среды  $v$  относительно поверхности  $z = z_1$  имеет вполне определенный знак (нормаль направлена в богатую область — рис. 5.26). Действительно, поскольку траектории жидких (в гидродинами-

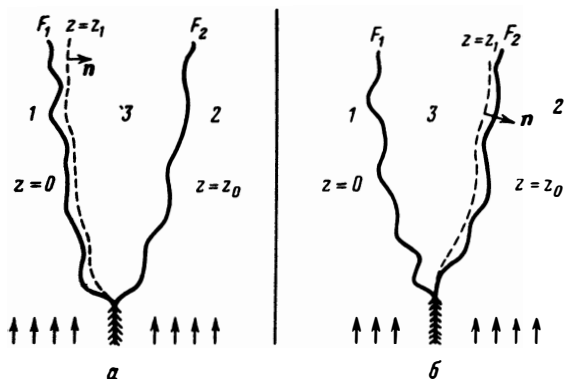


Рис. 5.26. Качественная схема слоя смешения

ческом смысле) частиц не могут выходить из области завихренного течения, то среда всегда втекает в турбулентную жидкость. Поэтому  $v > 0$  в первом случае и  $v < 0$  во втором.

Отсюда ясно, что в первом случае конвективные движения препятствуют переносу горячего от поверхности  $z = z_1$  в бедную часть факела, а во втором — способствуют этому переносу, т.е. состояние, описываемое соотношением (5.34), в первом случае достигается быстрее, чем во втором (в последнем случае оно может вообще не достигаться).

Следовательно, важную роль играет правильное описание величины  $u$ . Эта часть задачи сводится к исследованию эволюции распределения вероятностей величины  $z$ . Для пояснения рассмотрим однородную турбулентность, в которой концентрации всех веществ распределены статистически однородно (см. § 3.4). Только такой случай и будет анализироваться везде ниже.

Так же, как и в § 3.4, перейдем в систему координат, движущуюся со средней скоростью, т.е. вместо эволюции вдоль координаты  $x$  рассмотрим изменение во времени  $t$ , считая течение однородным во всех направлениях, а поток — неограниченным. Как уже отмечалось в § 1.3, относительный объем областей  $z < z_1$  есть вероятность величины  $z$ , а изменение этого объема определяется расходом через поверхность  $z = z_1$ , т.е. величиной  $u$ . Чтобы охарактеризовать этот расход, введем параметр

$$B = \lim_{V \rightarrow \infty} V^{-1} \int_F \rho v dF,$$

где  $V$  — некоторый объем,  $F$  — та часть поверхности  $z = z_1$ , которая заключена внутри этого объема. Предположим, что химическая неравновесность слабо влияет на плотность  $\rho$ , т.е.  $\rho$  единственным образом выражается через  $z$  (см. § 5.1). Интегрируя уравнение неразрывности по области  $z < z_1$ , получим

$$B = - \lim_{V \rightarrow \infty} V^{-1} \int_{z < z_1} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{z_1} \rho P dz. \quad (5.35)$$

Из (2.15), (5.35) получим

$$B = \langle N \rangle_t \left[ \frac{\partial \rho P}{\partial z} \right]_{z=z_1}. \quad (5.36)$$

Здесь учтено, что все производные по пространственным координатам равны нулю. Отсюда вытекают те же качественные результаты, что и были получены выше при анализе знака величины  $v$ . Действительно, обратимся к формулам, приведенным в § 3.4. В рассматриваемом случае они должны быть лишь слегка модифицированы, так как в § 3.4 считалось, что  $\rho = \text{const}$  и максимальная концентрация равна 1, а не  $z_0$ . Используя результаты работы Кузнецова, Лебедева, Секундова и Смирновой [1981] и учитывая линейность уравнения диффузии, заключаем, что в начальном участке смешения ( $t \rightarrow 0$ ) формула (3.26) приобретает вид

$$\rho P = \gamma \rho P_t = \frac{2}{z_0} \rho(\bar{z}) \exp(-\pi^2 \tau) \sin(\pi \bar{z}/z_0) \sin(\pi z/z_0), \quad (5.37)$$

$$\tau = z_0^{-2} \int_t^\infty \langle N \rangle_t dt, \quad \langle N \rangle_t = \frac{az_0^2}{t}, \quad 0 < z < z_0, \quad \rho(\bar{z})\bar{z} = \langle \rho z \rangle,$$

где постоянная  $a$ , как показано в § 3.4, равна  $\pi^{-2}$ .

Из (5.36), (5.37) заключаем, что  $B > 0$  ( $v > 0$ ) при  $z_1 < z_0/2$  и  $B < 0$  ( $v < 0$ ) при  $z_1 > z_0/2$ .

Рассмотрим величину

$$\tilde{c}_f = \lim_{V \rightarrow \infty} V^{-1} \int_{z < z_1} \rho c_f d^3 x,$$

которая характеризует содержание горючего в бедной части факела, и выведем для нее приближенное уравнение. Интегрируя уравнение диффузии по области  $z < z_1$ , получим точное соотношение

$$\frac{\partial \tilde{c}_f}{\partial t} = \xi_1 + \xi_2. \quad \xi_1 = - \lim_{V \rightarrow \infty} V^{-1} \int_F v \rho \varphi dF, \quad (5.38)$$

$$\xi_2 = \lim_{V \rightarrow \infty} V^{-1} \int_F D \rho \frac{\partial c_f}{\partial n} dF.$$

Слагаемое  $\xi_1$  не описывает процессы переноса, так как оно обуславливает изменение  $\tilde{c}_f$  даже в том случае, когда  $c_f = \text{const}$  при  $z < z_1$  (это изменение обусловлено тем, что объем  $z < z_1$  в процессе смешения непостоянен). Второе слагаемое  $\xi_2$  описывает массообмен между поверхностью  $z = z_1$  и окружающей средой.

Основное допущение, которое принимается далее, состоит в том, что  $v$  и  $\varphi$  считаются некоррелированными. Тогда, используя (5.36), получим

$$\xi_1 = \langle \xi_1 \rangle = - \langle \varphi \rangle B = - \langle \varphi \rangle \langle N \rangle_t \left[ \frac{\partial \rho P}{\partial z} \right]_{z=z_1}. \quad (5.39)$$

Предположим также, что второе слагаемое  $\xi_2$  можно аппроксимировать формулой, часто встречающейся в приближенной теории массообмена:

$$\xi_2 = \alpha \tilde{c}_f + \beta \langle \varphi \rangle. \quad (5.40)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — функции  $t$ . Они находятся из следующих соображений. Пусть  $\varphi = \text{const}$  и  $c_f = \varphi$  в турбулентной жидкости. Тогда  $\partial c_f / \partial n = 0$  и, следовательно,

$$\tilde{c}_f = \langle \varphi \rangle \int_{+0}^{z_1} \rho P dz, \quad (5.41)$$

$$\alpha \int_{+0}^{z_1} \rho P dz + \beta = 0.$$

Здесь символ  $+0$  означает, что сингулярные слагаемые, которые содержатся в выражении (1.20) для  $P$ , при интегрировании не учитываются. Рассмотрим другой случай, когда справедливо соотношение (5.34). Тогда

$$\tilde{c}_f = \langle \varphi \rangle z_1^{-1} \int_{+0}^{z_1} z \rho P dz \quad (5.42)$$

есть одно из решений уравнения (5.38). Используя это условие и соотношение (5.41), найдем  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Окончательно получим

$$\frac{d\tilde{c}_f}{dt} = \langle N \rangle_t \left\{ -\langle \varphi \rangle \left[ \frac{\partial \rho P}{\partial z} \right]_{z=z_1} + \xi (\langle \varphi \rangle \int_{+0}^{z_1} \rho P dz - \tilde{c}_f) \right\}, \quad (5.43)$$

$$\xi = \frac{\rho(z_1) P(z_1)}{z_1 \int_{+0}^{z_1} \rho P dz - \int_{+0}^{z_1} z \rho P dz}.$$

Проанализируем решения этого уравнения на начальном участке смешения и горения ( $t \rightarrow 0$ ). Рассмотрим сначала один частный случай граничных условий на поверхности  $z = z_1$ , а именно будем считать, что если условие (5.33) существования диффузионного пламени выполнено, то процесс термодинамически равновесен, т.е.  $\langle \varphi \rangle = 0$  и  $z_1 = z_s$ . В противном случае будем предполагать, что происходит смешение без реакций, вследствие чего часть несгоревшего топлива проникает в область  $z < z_s$ . Как видно из (5.33) и (5.37), приближенно можно считать, что при  $t < t_1$  происходит процесс смешения, а при  $t > t_1$  процесс горения равновесен. Здесь  $t_1$  дается выражением

$$t_1 = \frac{az_0^2}{N_{cr}}.$$

Тогда при  $t > t_1$  уравнение (5.43) приобретает вид

$$\frac{d\tilde{c}_f}{dt} = -\xi \langle N \rangle_t \tilde{c}_f. \quad (5.44)$$

Начальное условие для этого уравнения можно получить, рассматривая процесс смешения при  $t < t_1$ . Оно, однако, далее не потребуется. Из (5.37) (5.44) находим

$$\tilde{c}_f \sim t^{-m}, \quad m = \frac{\pi^2 a \sin s}{s - \sin s}, \quad s = \frac{\pi z_1}{z_0}. \quad (5.45)$$

Оценим величину  $m$  для пропана ( $z_s = 0,06$ ). Считая, что  $z_1 = z_s$ ,  $a = \pi^{-2}$  получим  $m = 108$  при  $z_0 = 1$ , т.е. горючее, проникшее в бедную часть факела

на ранних стадиях процесса, исключительно быстро переносится к зоне реакций.

Таким образом, возможен такой режим горения, в котором концентрации реагирующих веществ существенно зависят от скорости химических реакций, а предыстория процесса не играет роли, так как  $c_f$  зависит только от локальных характеристик турбулентности  $z$  и  $N$ . Этот режим назовем первым.

Существует и второй режим, в котором предыстория процесса существенна. Действительно, постоянная  $m$  очень быстро падает с уменьшением  $z_0$ . Так  $m = 1,8$  при  $z_0 = 0,11$  (коэффициент избытка воздуха в богатой смеси равен 0,5). В этом случае (5.45) описывает достаточно медленное убывание концентрации горючего, проникшего в бедную часть факела на ранних стадиях процесса.

Рассмотрим теперь характер решений уравнения (5.43) при  $t \rightarrow \infty$ . В этом случае, как видно из (3.27), величина  $P$  описывается плотностью нормального распределения вероятностей. Так как  $P \neq 0$  при всех  $z$ , зона реакции наблюдается при всех  $t$ . Можно показать, что тем не менее решение не стремится к нулю (формально это следует из того, что все коэффициенты в (5.43) очень быстро стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ ). Это означает, что все топливо, проникшее в бедную часть факела, сгореть не может. Знак величины  $v$  в этом случае также играет важнейшую роль. Действительно, на заключительном этапе смешения любая область  $z \neq \langle z \rangle$  стягивается в точку, и поэтому при  $z_1 > \langle z \rangle$  скорость среды относительно поверхности  $z = z_1$  всегда направлена в бедную часть факела, т.е. несгоревшее топливо конвективными движениями оттесняется от зоны реакции. Сделанный вывод следует и из формулы (5.36) (в области  $z > \langle z \rangle$  плотность нормального распределения вероятностей — уменьшающаяся функция  $z$ ).

Сопоставление результатов, полученных при анализе начального и заключительного участков смешения и горения, показывает, что при  $z_0 = 1$  по мере роста  $t$  (или с увеличением расстояния от точки слияния потоков горючего и окислителя) происходит постепенный переход от первого ко второму режиму горения. Подробный анализ того, где осуществляется такой переход, пока не выполнен.

Остановимся теперь на результатах опытов, поставленных с целью проверки правильности сформулированных выше теоретических соображений\*). Условия этих опытов обсуждались в § 5.1 при анализе динамики изменения концентраций углеводородов в затопленном пропановом факеле. Помимо концентраций углеводородов, в этих опытах измерялась и концентрация CO ( $c_8$ ). Обработка результатов проведенных опытов показала, что в отличие от эквивалентной концентрации пропана величина  $\langle c_8 \rangle_t$  не универсально зависит от  $\langle z \rangle_t$ , т.е. CO окисляется значительно медленнее и скорость химических реакций влияет на концентрацию CO.

Поэтому возник вопрос о том, возможен ли первый режим горения, т.е. является ли концентрация CO универсальной функцией  $z$  и  $N$ , в котором роль предыстории процесса не существенна. По счастливому стечению обстоятельств оказалось, что при изменении  $d$  и  $u_0$  скалярная

\*) Эти опыты проведены Ю.Я. Бурико и В.Р. Кузнецовым.



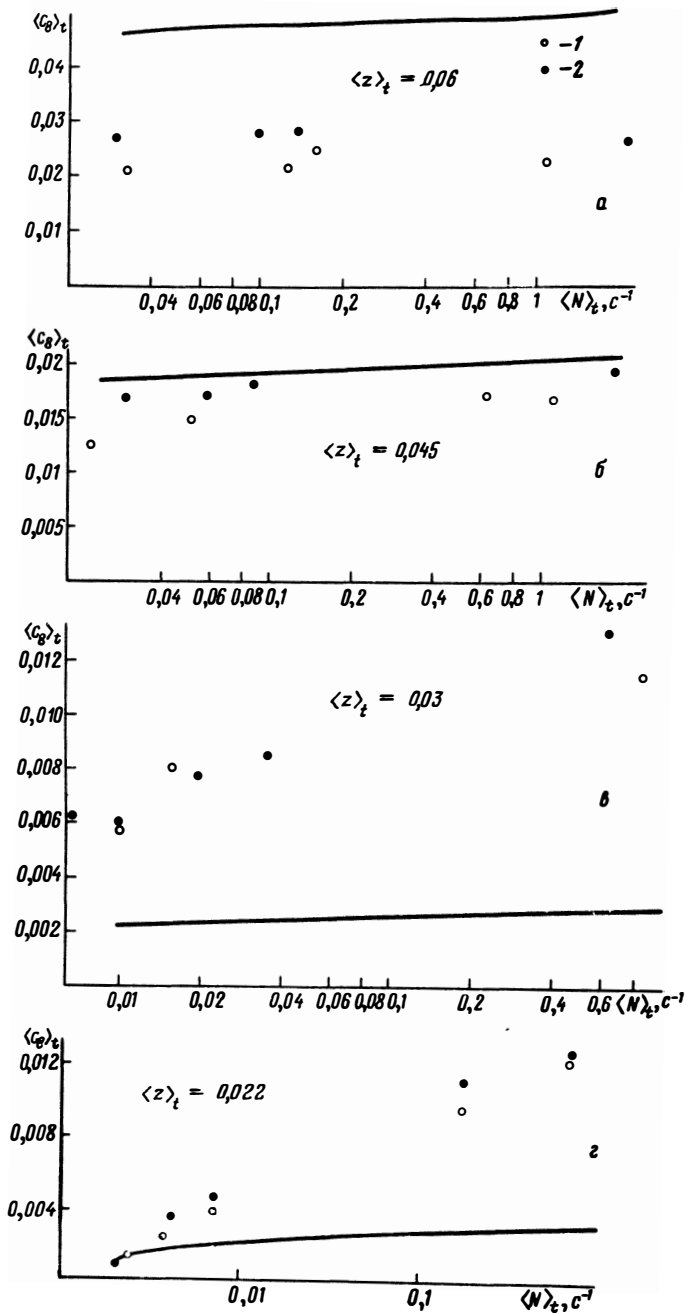


Рис. 5.27. Концентрация окиси углерода в затопленном диффузионном факеле пропана при разных значениях  $\langle z \rangle_t$  по данным Бурико и Кузнецова. 1 -  $d = 3$  мм,  $u_0 = 19,8$  м/с; 2 -  $d = 6$  мм,  $u_0 = 10,7$  м/с; сплошная линия - равновесная концентрация CO

диссипация варьируется лишь в самых начальных сечениях факела (большие значения  $\langle z \rangle_t$ , на рис. 5.25), а в основной части факела (малые значения  $\langle z \rangle_t$ , на рис. 5.25) скалярная диссипация одна и та же. Такое распределение скалярной диссипации обусловлено ролью сил плавучести, несущественных при малых  $x$  и имеющих важное значение при больших  $x$ . Как уже отмечалось в § 5.5,  $\langle N \rangle \sim 1/\tau$  ( $\tau = d/u_0$ ), если сил плавучести нет.

Указанные соображения определили метод обработки экспериментальных данных. По результатам измерений в различных сечениях факела определялось положение линии  $\langle z \rangle_t = \text{const}$  и анализировалось распределение величины  $\langle c_8 \rangle_t$  на этой линии. Величина  $\langle z \rangle_t$  находилась по формуле  $\langle z \rangle_t = \langle z \rangle / \gamma$ , где  $\langle z \rangle$  измерялось, а  $\gamma$  рассчитывалось по методу, изложенному в § 5.1. В качестве параметра, характеризующего положение рассматриваемой точки на линии  $\langle z \rangle_t = \text{const}$ , выбиралось рассчитанное значение скалярной диссипации. Результаты обработки приведены на рис. 5.27,  $a - z$ .

Анализ показывает, что все данные аппроксимируются зависимостью  $\langle c_8 \rangle_t = \xi(\langle z \rangle_t) + \eta \ln \langle N \rangle_t$ , где  $\eta$  не зависит от  $\langle z \rangle_t$ , а  $\xi$  зависит только от  $\langle z \rangle_t$ , т.е. изменение  $\langle N \rangle_t$  одинаково сказывается на результатах измерений при всех  $\langle z \rangle_t$  (кажущееся изменение наклона на рис. 5.27,  $a - z$  обусловлено только разными масштабами по оси ординат). Видно, что влияние скалярной диссипации существенно.

Такое влияние может быть обусловлено двумя причинами — химическими реакциями или изменением равновесной концентрации CO вследствие снижения температуры из-за потерь тепла излучением. Чтобы выяснить, какая из причин важна, проведены расчеты, в которых находилось среднее значение равновесной концентрации CO. В расчетах учтены потери тепла излучением (использовалась методика, описанная в § 5.3). Из рис. 5.27,  $a - z$  видно, что 1) потери тепла излучением очень слабо влияют на среднее значение равновесной концентрации CO ( $\langle c_8^{(e)} \rangle_t$ ); 2) измеренные значения  $\langle c_8 \rangle_t$  могут быть как существенно ниже, так и существенно выше, чем  $\langle c_8^{(e)} \rangle_t$ . Отсюда ясно, что скорость химических реакций в данном случае существенна, а влияние излучения проявляется лишь косвенно через снижение температуры и замедление химических реакций.

Из рис. 5.27,  $a - z$  видно также, что данные, полученные в двух разных режимах, обобщаются единой кривой. При этом время пребывания  $\tau = d/u_0$  менялось в четыре раза, соответственно варьировались значения скалярной диссипации на малых расстояниях до сопла (больших  $\langle z \rangle_t$ ), что видно из рис. 5.25. Таким образом, экспериментально подтверждено существование первого режима горения, в котором концентрации реагирующих веществ существенно зависят от скорости химических реакций, а предыстория процесса не играет роли.

В заключение подведем итоги исследования, проведенного в данной главе. Это исследование основано на том, что толщина зоны химических реакций много меньше интегрального масштаба турбулентности. Наличие малого параметра существенно упрощает исследование, позволяя отдельно рассмотреть крупномасштабные колебания зоны реакции как целого и воздействие мелкомасштабной части спектра турбулентности на ее внутреннюю структуру. В этом случае влияние турбулентности на условия протекания химических реакций, в том числе и сложных цепных реакций, описы-

вается уравнением (5.32). Из него следует, что это влияние характеризуется только двумя случайными параметрами  $z$  и  $N$ , которые находятся из решения уравнения диффузии без реакций. Важно, что распределения концентраций реагирующих веществ в зоне реакций можно рассчитать заранее, а затем результаты расчетов использовать для решения самых разнообразных задач.

При таком подходе остается еще проблема отыскания распределения концентраций стабильных веществ вне зоны реакций. Хотя и эта проблема также описывается уравнением диффузии без реакций, она не всегда сводится к расчету поля  $z$ . Поэтому в общем случае удовлетворительное решение задачи еще не получено.

В целом можно считать, что в рамках теории горения основные трудности преодолены и главные усилия должны быть сосредоточены на создании теории турбулентности и турбулентного смешения без реакций.

## ТУРБУЛЕНТНОЕ ГОРЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ СМЕСИ

Так же, как и горение перемешанных газов, горение однородной смеси широко используется в целом ряде технических устройств (двигатели внутреннего сгорания, форсажные камеры газотурбинных двигателей и т.д.). В отличие от диффузионного, горение однородной смеси изучено гораздо хуже, так как скорость химических реакций существенно влияет на характеристики процесса. Указанное обстоятельство приводит к возникновению целого ряда нетривиальных эффектов, значение которых стало понятным лишь в последнее время. Цель данной главы состоит в том, чтобы выявить эти эффекты путем анализа экспериментальных данных и получить критериальное описание процесса.

## § 6.1. Основные проблемы

Теория турбулентного горения однородной смеси заимствует основные понятия и представления из теории распространения плоского (нормального) фронта пламени по неподвижной смеси горючего и окислителя. Поэтому, прежде чем изложить главные проблемы, возникающие при исследовании турбулентного горения, полезно остановиться на том, как решается задача о распространении нормального пламени (Зельдович и Франк-Каменецкий [1938а, б]).

Предположим, что 1) между топливом и окислителем происходит одноступенчатая реакция, т.е. процесс описывается тремя переменными  $T$ ,  $c_o$ ,  $c_f$  — соответственно температурой и концентрациями окислителя и топлива; 2) коэффициенты молекулярного переноса одинаковы, и, следовательно, из-за подобия уравнений диффузии и теплопроводности концентрации  $c_o$  и  $c_f$  можно выразить через температуру  $T$ . Поэтому описание процесса сводится к решению одного уравнения

$$\rho^{(0)} u_n \frac{dc}{dn} = \frac{d}{dn} a\rho \frac{dc}{dn} + \rho W(c), \quad c = \frac{T - T^{(0)}}{T^{(b)} - T^{(0)}} \quad (6.1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $W$  — скорость тепловыделения,  $a$  — коэффициент температуропроводности,  $c$  — безразмерная температура,  $u_n$  — скорость нормального распространения пламени, верхние индексы 0 и  $b$  относятся к свежей смеси и продуктам сгорания,  $n$  — направление, нормальное фронту пламени. Направление нормали определено так, что  $c = 0$  при  $n = -\infty$  (свежая смесь),  $c = 1$  при  $n = \infty$  (продукты сгорания). Краевая задача для уравнения (6.1), т.е. равенства  $c(-\infty) = 0$ ,  $c(\infty) = 1$ , позволяет определить  $u_n$ .

Метод решения основывается на следующих соображениях. Обычно скорость химической реакции очень сильно зависит от температуры, т.е.  $W \sim \exp(-E/(RT))$ , где критерий  $E/(RT^{(b)})$  много больше единицы ( $E$  – энергия активации,  $R$  – универсальная газовая постоянная). Поэтому в пламени можно выделить две области – тепловую зону, в которой  $0 < c < 1 - \delta c$ , где  $\delta c \sim RT^{(b)}/E \ll 1$ , и зону химических реакций, в которой  $1 - \delta c < c < 1$ . В первой зоне слагаемое в уравнении (6.1), содержащее источник, несущественно, а во второй можно пренебречь конвективным слагаемым, что при сравнении решений, полученных в обеих зонах, позволяет найти  $u_n$  в явном виде.

Детали этой процедуры изложены в книге Зельдовича, Баренблатта, Либровича и Махвиладзе [1980]. Поэтому укажем лишь те результаты, которые потребуются далее. Чтобы упростить окончательные соотношения, предположим, что  $\rho = \rho^{(0)} T^{(0)}/T$ ,  $a = a^{(0)} (T/T^{(0)})^2$  (такое предположение позволяет достаточно точно описать реальные зависимости  $\rho(T)$  и  $a(T)$ ). Первый результат состоит в том, что в пределе  $(E/(RT^{(b)})) \rightarrow \infty$  толщина зоны реакции стремится к нулю. Следовательно, она должна рассматриваться как поверхность, на которой температура непрерывна, а ее производная терпит разрыв, т.е.

$$\left[ \frac{\partial c}{\partial n} \right]_{n=+0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial c}{\partial n} \right]_{n=-0} = \frac{a^{(0)} \beta}{u_n}, \quad \beta = \frac{T^{(b)}}{T^{(0)}}. \quad (6.2)$$

Второй результат – формула

$$u_n = \sqrt{2a^{(0)} \int_0^1 W dc}, \quad \frac{E}{RT^{(b)}} \gg 1. \quad (6.3)$$

т.е. скорость нормального распространения пламени зависит от коэффициента молекулярного переноса и скорости химических реакций.

Формула (6.3) открывает возможность приближенного описания проблемы при произвольной кинетике химических реакций, так как позволяет вместо большого числа неточно известных параметров, характеризующих скорости отдельных реакций, рассмотреть одну величину  $u_n$ , которая легко и достаточно точно измеряется в опытах. Величина  $u_n$  зависит от давления  $p$ , начальной температуры  $T^{(0)}$  и коэффициента избытка воздуха в свежей смеси  $\alpha^{(0)}$ . В качестве примера на рис. 6.1 в виде кривой 1 приведена экспериментальная зависимость  $u_n(\alpha^{(0)})$  для бензино-воздушной

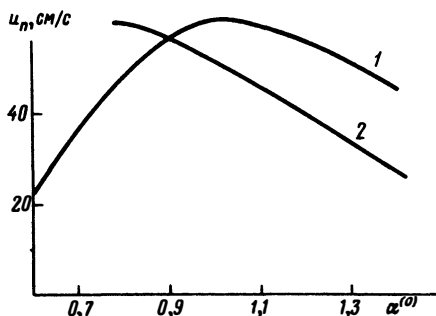


Рис. 6.1. Сравнение скоростей нормального распространения ламинарного пламени, полученных в опытах с плоским пламенем (кривая 1) и рассчитанных по составу в лидирующих точках (кривая 2)

смеси (Талантов [1975]). Данные опытов в первом приближении описываются зависимостью

$$u_n = f(\alpha^{(0)}) (T^{(0)})^2 p^{-0.2}, \quad (6.4)$$

которая аппроксимирует результаты измерений в бензино-воздушных смесях. Функцию  $f(\alpha^{(0)})$  можно найти на рис. 6.1

В соответствии со сделанными выше замечаниями везде далее предполагается, что  $E/(RT^{(b)}) \gg 1$ . Это означает, что формулы (6.2) справедливы не только для плоского, но и для произвольного фронта пламени. Отсюда вытекает, что характеристики процесса описываются уравнением теплопроводности без источников. Важно, что заданы три краевых условия: два фигурируют в формулах (6.2), а одно ставится на бесконечном удалении от зоны реакций ( $c = 0$ ). Лишнее краевое условие определяет положение фронта пламени. Таким образом, помимо гидродинамических характеристик, процесс зависит от  $a^{(0)}$  и  $u_n$ . Следовательно, скорость химических реакций влияет только на величину  $u_n$ . Так как  $u_n$  зависит от скорости химических реакций и от процессов молекулярного переноса, то влияние только химической кинетики описывается лишь одним параметром, а именно  $\tau_c = a^{(0)}/u_n^2$ . Часто удобно рассматривать толщину тепловой зоны нормального фронта пламени  $\delta_n$ , которую, в соответствии с (6.2), естественно определить в виде

$$\delta_n = \frac{a^{(0)} \beta}{u_n}. \quad (6.5)$$

Укажем порядок значений  $u_n$  и  $\delta_n$  при нормальных условиях. Для большинства углеводородо-воздушных смесей (метан, пропан и т.д.) при вариации состава максимальное значение  $u_n$  достигается при  $\alpha = \alpha_{nm}$ , где  $\alpha_{nm}$  близко к единице. В этом случае  $u_n \approx 40$  см/с,  $\delta_n = 0,4$  мм ( $\beta = 7,5, a^{(0)} = 0,2$  см<sup>2</sup>/с). Для водородо-воздушных смесей  $\alpha_{nm} \approx 0,6, u_n(\alpha_{nm}) \approx 250$  см/с,  $\delta_n = 0,09$  мм ( $\beta = 8, a^{(0)} = 0,3$  см<sup>2</sup>/с). Проведенные оценки величин  $u_n$  и  $\alpha_{nm}$  основаны на данных, приведенных в работах Дубовкина [1961], Карпова и Северина [1977]. Расчет величины  $a^{(0)}$  базируется на методике, описанной в книге Бретшнайдера [1966].

Рассмотрим теперь горение в турбулентном потоке. Основная информация об этом процессе получена при измерениях аналогов величин  $u_n$  и  $\delta_n$ , соответственно скорости распространения турбулентного пламени  $u_t$  и протяженности зоны горения  $\delta_t$ . Эти понятия определены, однако, не столь четко, как в теории ламинарного горения. Напомним, что величина  $u_n$  характеризует удельную скорость переработки свежей смеси на поверхности фронта пламени и равна отношению объемного расхода смеси к площади его поверхности. Такую поверхность можно определить равенством  $c = c_0 = \text{const}$ . Как свидетельствуют проведенные выше оценки, толщина фронта пламени  $\delta_n$  мала по сравнению с характерными размерами задачи. Следовательно, площади разных изотерм  $c = c_0$  слабо отличаются друг от друга. В турбулентном потоке величина  $\delta_t$  всегда порядка характерного размера задачи, и поэтому площади осредненных изотерм  $\langle c \rangle = c_0 = \text{const}$  значительно различаются.

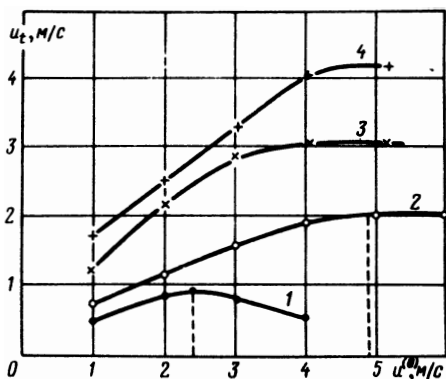


Рис. 6.2. Влияние пульсационной скорости на скорость распространения турбулентного пламени по данным Карпова и Северина [1977],  $T^{(0)} = 293 \text{ К}$ ,  $p = 0,1 \text{ МПа}$ . 1 — пропано-воздушная смесь,  $\alpha = 0,6$ ; 2 — пропано-воздушная смесь,  $\alpha = 0,9$ ; 3 — водородо-воздушная смесь,  $\alpha = 3$ ; 4 — водородо-воздушная смесь,  $\alpha = 2$

Так как нет какой-либо предпочтительной изотермы, то понятие о скорости распространения турбулентного пламени не может быть определено достаточно строго. Несмотря на это, изучение влияния различных параметров на тем или иным способом введенную величину  $u_t$  может оказаться чрезвычайно полезным. Как будет видно далее, такое изучение позволит сравнительно просто обнаружить целый ряд весьма сложных эффектов и качественно описать их взаимодействие. Поэтому в данной главе предполагается, что основная информация о турбулентном горении дается только величиной  $u_t$ .

В дальнейшем главным образом используются две группы экспериментов. Первая группа опытов проведена Талантовым с сотрудниками (Талантов [1975], Янковский и Талантов [1969], Кузин, Янковский, Аполлонов и Талантов [1972], Кузин и Талантов [1977], Голубев, Янковский, Постнов и Талантов [1973]). Исследовалось горение в канале квадратного сечения со стороной  $d$ . Пламя стабилизировалось выемками, расположенными на противоположных стенках канала. В экспериментах варьировался состав бензино-воздушной смеси, ее начальная температура, давление, скорость на входе в канал и величина  $d$ . Скорость распространения турбулентного пламени  $u_t$  определялась из положения передней границы пламени, которая находилась путем фотографирования факела (напомним, что передней границей называется одна из осредненных изотерм  $\langle \epsilon \rangle = \text{const}$ , которая примыкает к свежей смеси; точное значение постоянной в этом равенстве неизвестно).

Вторая группа опытов проведена Карповым и Севериным [1977, 1980]. Использовалась сферическая бомба, на стенках которой располагались лопасти, турбулизирующие смесь. Варьировался состав, вид смеси и пульсационная скорость (температура и давление нормальные). Смесь поджигалась в центре бомбы, после чего регистрировалась зависимость давления от времени, что позволяло определить производную по времени от объема сгоревшей смеси. Эта производная относилась к поверхности сферы, объем которой равен объему продуктов сгорания. Таким образом, в обеих группах опытов использовались несколько различающиеся определения  $u_t$ .

Приступим к анализу этих, а также и некоторых других опытов. Рассмотрим сначала, как влияют на  $u_t$  две наиболее важные характеристики

турбулентности – пульсационная скорость и интегральный масштаб:

$$u^{(0)} = \sqrt{\frac{1}{3} \langle (u^{(0)} - \langle u^{(0)} \rangle)^2 \rangle}, \quad L = \frac{(u^{(0)})^3}{\langle \epsilon \rangle},$$

где  $\langle \epsilon \rangle$  – диссипация энергии. На рис. 6.2 изображены результаты опытов Карпова и Северина [1977]. По оси абсцисс отложена величина  $u^{(0)}$  – пульсационная скорость в бомбе в отсутствие горения. Видно, что при увеличении пульсационной скорости скорость распространения пламени сначала растет, а затем либо не меняется, либо даже уменьшается. Отметим, что в большинстве опытов наблюдается только первый участок приведенных на этом рисунке кривых (участок, на котором  $u_f$  растет с увеличением  $u^{(0)}$ ). В частности, только такие зависимости обнаружены в опытах Талантова с сотрудниками.

Влияние масштаба турбулентности  $L$  иллюстрируется на рис. 6.3, заимствованном из работы Янковского и Талантова [1969]. Видно, что с увеличением  $d$  (и пропорциональной стороне канала  $d$  величине  $L$ ) скорость распространения пламени растет. С другой стороны, в работах Баллала и Лефевра [1975], Баллала [1979] сообщается, что при увеличении  $L$  скорость распространения пламени растет при  $u^{(0)}/u_n < 2$  и уменьшается при  $u^{(0)}/u_n > 3$ . Здесь и далее  $\langle u_1 \rangle$  – среднерасходная скорость.

Приведенные выше графики указывают на то, что обе характеристики турбулентности  $u^{(0)}$  и  $L$  набегающей на пламя смеси влияют на скорость распространения пламени. В зоне горения эти характеристики должны изменяться вследствие уменьшения плотности. Указанный эффект иллюстрируется рис. 6.4, на котором приведены результаты опытов Сузуки, Оба, Хирано и Цуджи [1979]. Исследовалось горение пропано-воздушной

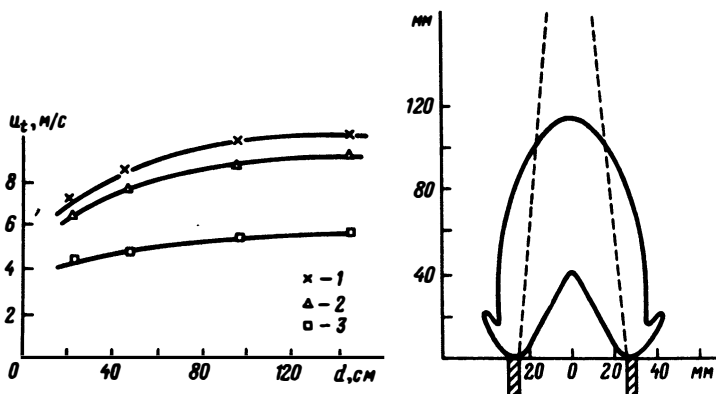


Рис. 6.3. Влияние размера канала на скорость распространения турбулентного пламени по данным Янковского и Талантова [1969]. 1 –  $\alpha = 0,85$ , 2 –  $\alpha = 1$ , 3 –  $\alpha = 1,4$ ;  $p = 0,1$  МПа,  $T^{(0)} = 443$  К,  $\langle u_1 \rangle = 50$  м/с, бензино-воздушная смесь

Рис. 6.4. Контуры пламени при горении пропано-воздушной смеси в бунзеновской горелке по данным Сузуки, Оба, Хирано и Цуджи [1979].  $d = 5,4$  см,  $\langle u_1 \rangle = 4,5$  м/с,  $u^{(0)} = 0,28$  м/с,  $\alpha = 0,9$



смеси ( $\alpha = 0,9$ ). Внутри трубы, из которой в окружающий неподвижный воздух вытекала смесь, становились решетки, позволяющие варьировать энергию турбулентности. На рисунке сплошными линиями изображены линии равной светимости. Штриховой линией показаны границы ядра изотермической струи. Видно, что передняя граница пламени находится значительно ближе к соплу, чем внутренняя граница ядра изотермической струи. Вследствие изменения плотности этот эффект должен приводить к сильной перестройке всего течения

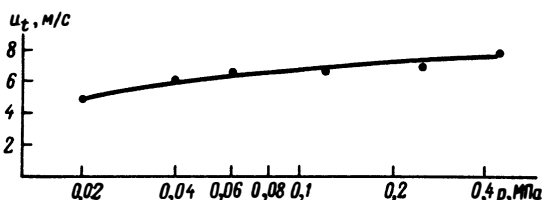


Рис. 6.5. Влияние давления на скорость распространения турбулентного пламени в канале по данным Голубева, Янковского, Постнова и Талантова [1973].  $\alpha = 1$ ,  $T^{(0)} = 523$  К,  $d = 5$  см,  $(u_1) = 50$  м/с, бензино-воздушная смесь

Опыты косвенно свидетельствуют о том, что пульсационная скорость в пламени  $u^{(b)}$  сильно возрастает. В самом деле, из физических соображений ясно, что пламя не может двигаться относительно среды со скоростью, которая много больше пульсационной. Поэтому, оценивая  $u_t$ , можно дать и косвенную оценку пульсационной скорости. Для условий опытов, результаты которых изображены на рис. 6.4, из положения передней границы пламени находим  $u_t = 2,2$  м/с, т.е.  $u_t/u^{(0)} = 8$ . Аналогичные данные, приведенные в рассматриваемой работе, свидетельствуют о том, что  $u_t/u^{(0)} = 14,5$  при  $u^{(0)} = 9$  см/с. Предполагая, что  $u_t \sim u^{(b)}$ , отсюда заключаем, что  $u^{(b)} \gg u^{(0)}$ . Большие значения критерия  $u_t/u^{(0)}$  были зарегистрированы и в работах Талантова с сотрудниками. Оценки показывают, что в этих опытах величина  $u_t/u^{(0)}$  достигала 5 (как и для развитого течения в канале, принято, что в этих опытах интенсивность турбулентности в набегающем потоке составляет 5%). Прямые измерения пульсационной скорости в пламени, проведенные Баллалом [1979], также свидетельствуют о том, что  $u^{(b)} > u^{(0)}$ .

Таким образом, заключаем, что изменение плотности существенно влияет на характеристики горения. Этот эффект описывается критерием  $\beta = T^{(b)}/T^{(0)}$ .

Влияние давления  $p$  на скорость распространения пламени проиллюстрировано на рис. 6.5, где приведены данные Голубева, Янковского, Постнова и Талантова [1973]. Видно, что  $u_t$  растет с увеличением  $p$ . Аналогичные данные получены Дорошенко и Никитским [1960], Храмовым [1960]. В силу принципа автомодельности турбулентных течений по числу Рейнольдса изменение  $p$  не влияет на  $u^{(0)}$  и  $L$ . Поэтому приведенный график указывает на влияние скорости химических реакций. Характерное время реакции  $\tau_c = a^{(0)}/u_n^2$ , как видно из (6.4), уменьшается с ростом давления

( $a^{(0)} \sim p^{-1}$ ,  $u_n \sim p^{-0.2}$ ). Соответственно росту скорости реакции увеличивается и  $u_t$ . Этот эффект, однако, не может быть описан с помощью одной только величины  $u_n$ . Действительно, начиная с Дамкелера [1940] и Щелкина [1943], все теории предсказывают рост  $u_t$  при увеличении  $u_n$ , что не согласуется с данными, приведенными на рис. 6.5, и формулой (6.4) ( $u_n$  уменьшается, а  $u_t$  увеличивается при росте  $p$ ). Поэтому в любой теории, помимо  $u_n$ , должен фигурировать и коэффициент молекулярного переноса. Если предположить, что принцип автомодельности по числу Рейнольдса справедлив и при описании турбулентного горения, то отсюда вытекает, что определяющим параметром является только некоторая комбинация параметров  $u_n$  и  $a^{(0)}$ , т.е. величина  $\tau_c = a^{(0)}/u_n^2$ , которая, как уже отмечалось, не зависит от процессов молекулярного переноса и характеризует только химические реакции. Тогда, учитывая, что определяющими параметрами являются также и величины  $u^{(0)}$ ,  $L$ ,  $\beta$ , приходим к критериальной формуле вида

$$u_t = u^{(0)} \varphi_1(\beta, Mi), \quad Mi = \frac{u^{(0)} a^{(0)}}{L u_n^2}. \quad (6.6)$$

Критерий Михельсона  $Mi$  был введен Дунским при анализе стабилизации пламени плохообтекаемыми телами (изложение результатов этой работы содержится в книгах Раушенбаха и др. [1964] и Щетинкова [1965]). Позже он встречался в работах Климова [1977б], Баева и Третьякова [1968, 1972, 1977]. Во всех этих работах использовалось лишь несколько другое определение величины  $Mi$  ( $u^{(0)}$  заменено на среднюю скорость, а масштаб турбулентности — на характерный геометрический размер).

Отметим, что формулой (6.6) описываются результаты всех расчетов, основанных на полуэмпирических теориях турбулентности, в которых используется принцип автомодельности по числу Рейнольдса. Такой подход к решению задачи часто применяется в настоящее время. Примером могут служить работы Вулиса, Ершина и Ярина [1963], Лондера и Сполдинга [1972], Либровича и Лисицына [1975], Баева, Головичева и Яскова [1976], Вилюнова и Дика [1976], Брзя и Либби [1976], Брзя и Мосса [1977а, б], Брзя [1980] и т.д.

Если отказаться от принципа автомодельности по числу Рейнольдса, т.е. принять, что помимо характерного химического времени  $\tau_c$  влияют и коэффициенты молекулярного переноса, например  $a^{(0)}$ , то обобщение зависимости (6.6) имеет вид

$$u_t = u^{(0)} \varphi_2\left(\beta, Mi, \frac{u^{(0)}}{u_n}\right). \quad (6.7)$$

Частным случаем этой зависимости является формула

$$u_t = u^{(0)} \varphi_3\left(\beta, \frac{u^{(0)}}{u_n}\right), \quad (6.8)$$

которая следует из фронтальной модели горения (Дамкелер [1940], Щелкин [1943]) (см. § 1.4). В этой модели предполагается, что горение происходит в тонком искривленном фронте пламени. Так как его тол-

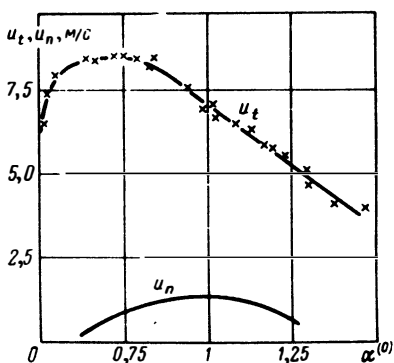


Рис. 6.6 Влияние состава на скорость распространения турбулентного пламени в бензино-воздушных смесях по данным Кузина, Янковского, Аполлонова и Талантова [1972].  $d = 5$  см,  $(u_t) = 50$  м/с,  $p = 0.1$  МПа,  $T(0) = 493$  К

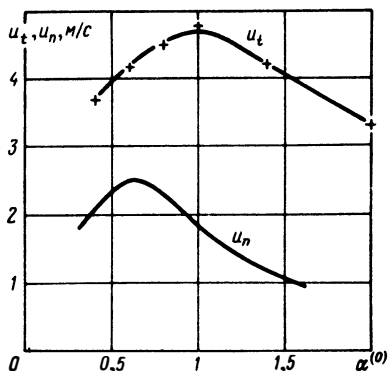


Рис. 6.7. Влияние состава на скорость распространения турбулентного пламени в водородо-воздушных смесях по данным Карпова и Северина [1977].  $L = 1$  см,  $u(0) = 3$  м/с,  $p = 0.1$  МПа,  $T(0) = 293$  К. В оригинале приведены зависимости  $u_t$  от  $u(0)$  при варьируемых значениях  $\alpha$

щина много меньше масштаба гидродинамических неоднородностей, то можно считать, что пламя есть поверхность, каждая точка которой движется относительно среды со скоростью  $u_n$ . Характеристики такой поверхности зависят только от  $u_n$ , т.е.  $\alpha^{(0)}$  не входит в число определяющих параметров и тогда получается формула (6.8).

На первый взгляд формула (6.7) дает самый общий вид зависимости  $u_t$  от определяющих параметров, так как для данного горючего и окислителя отношения различных коэффициентов переноса являются постоянными, а зависимости этих коэффициентов от температуры в первом приближении можно охарактеризовать критерием  $\beta$ . Этот вывод, однако, не подтверждается опытами, результаты которых изображены на рис. 6.6, 6.7.

Для пояснения сделанного вывода отметим, что изменение  $\alpha^{(0)}$  влияет на все три критерия в (6.7). При вариации состава бензино-воздушных смесей все три критерия достигают экстремальных значений, если  $\alpha^{(0)} \approx \alpha_{nm}$ . В то же самое время из рис. 6.6 видно, что в этом случае величина  $u_t$  имеет максимум при  $\alpha^{(0)} = \alpha_{tm}$ , где  $\alpha_{tm} < \alpha_{nm}$  ( $\alpha_{nm}$  — коэффициент избытка воздуха в смеси с максимальным значением  $u_n$ ). При горении водорода наблюдается противоположный эффект:  $\alpha_{tm} > \alpha_{nm}$  (рис. 6.7).

Есть только две возможности объяснения указанных закономерностей: 1) либо величина  $u_n$  — не единственный параметр, характеризующий химическую кинетику; 2) либо из-за различий в коэффициентах молекулярного переноса в пламени меняется состав и, следовательно, величина  $u_n$ , рассчитываемая по исходному коэффициенту избытка воздуха, неправильно отражает роль химических факторов. Есть ряд факторов, указывающих на то, что наиболее вероятно второе объяснение.

Действительно, заметим, что аномальное влияние состава на характеристики горения обнаруживается не только в турбулентном, но и в ламинар-

ном потоке. Например, анализ экспериментальных данных, приведенных в книге Льюиса и Эльбе [1961], показывает, что при изменении состава гасящий диаметр, минимальная энергия искрового воспламенения, критический градиент скорости при проскоке пламени в трубку достигают экстремальных значений при коэффициенте избытка воздуха, близком к  $\alpha_{1m}$ . На основе этих данных Баев и Третьяков [1968, 1977] разработали критерияльное описание процесса турбулентного горения, в котором вместе величины  $u_n$  используются результаты измерений критического градиента скорости при проскоке ламинарного пламени. Аналогичный подход использовался позже Бурико и Кузнецовым [1976], в работе которых для этой же цели привлекались также и данные, полученные при измерениях гасящего диаметра и минимальной энергии искрового воспламенения.

Такой подход позволил значительно точнее обобщать экспериментальные данные и одновременно привел к появлению целого ряда теоретических проблем. Эти проблемы стали ясны уже из работы Бурико и Кузнецова [1976], в которой было показано, что аномальное влияние состава на характеристики турбулентного горения обусловлено тем, что коэффициенты молекулярной диффузии горючего  $D_f$  и окислителя  $D_o$  различаются. В частности,  $D_f < D_o$  для бензино-воздушной смеси и  $D_f > D_o$  для водородо-воздушной смеси. Соответственно,  $\alpha_{1m} < \alpha_{nm}$  в первом случае и  $\alpha_{1m} > \alpha_{nm}$  во втором (рис. 6.6, 6.7).

Таким образом, анализ экспериментальных данных позволяет сформулировать два главных вопроса: 1) почему характеристики турбулентного горения зависят от процессов молекулярного переноса, несмотря на малую толщину фронта пламени, т.е. существуют два независимых определяющих параметра  $a^{(0)}$  и  $u_n$ , 2) почему именно важны различия в коэффициентах молекулярной диффузии (такие различия, как известно, не приводят к изменению среднего состава продуктов сгорания)? Анализ этих вопросов посвящен следующий параграф.

## § 6.2. Механизм турбулентного горения

Как уже отмечалось в § 1.4, имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о том, что турбулентное горение носит фронтальный характер, т.е. свежая смесь и продукты сгорания разделены узким пограничным слоем, в котором происходит резкое нарастание температуры. Этот слой искривлен из-за флуктуаций скорости разных масштабов. Воздействие турбулентности на его внутреннюю структуру определяется критерием, известным из теории растяжения пламени (Коважный [1956], Климов [1963]), в которой рассматривается однородная безвихревая деформация ламинарного пламени.

Чтобы проиллюстрировать роль этого критерия, обратимся к известной задаче (Климов [1963]), в которой рассматриваются две зоны реакций, расположенные в плоскостях  $x_1 = \pm x_0$  (в области  $|x_1| < x_0$  находятся продукты сгорания, а в области  $|x_1| > x_0$  — свежая смесь). Будем считать, что профиль скорости имеет вид  $u_2 = g x_2$  ( $g$  — положительная постоянная, характеризующая градиент скорости),  $u_1 = u_1(x_1)$ , где  $u_1$  находится из

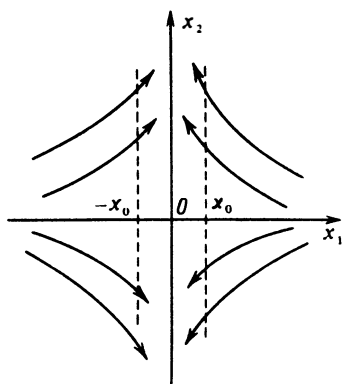


Рис. 6.8. Схема течения и расположения фронтов пламени при однородной деформации

уравнения неразрывности

$$\frac{d\rho u_1}{dx_1} + \rho(x_1) \frac{du_2}{dx_2} = 0. \quad (6.9)$$

Линии тока такого течения схематически указаны стрелками на рис. 6.8, на котором штриховыми линиями показано положение зоны реакции. Решение рассматриваемой задачи, полученное в предположении  $a = D_o = D_f \sim T^2$ ,  $\rho \sim T^{-1}$ , показы-

вает, что важнейшую роль играет критерий Климова–Коважного  $K = a^{(0)} g / u_n^2$ .

При  $K \ll 1$  два фронта пламени расположены далеко друг от друга ( $x_0 \gg \delta_n$ ), а профиль температуры в них слабо отличается от профиля температуры в нормальном пламени. С увеличением  $K$  этот профиль искажается, расстояние между обоими фронтами уменьшается и при  $K > \pi/2$  горение становится невозможным.

Таким образом, критерий  $K$  характеризует влияние гидродинамических деформаций на внутреннюю структуру пламени и, следовательно, может быть использован для анализа влияния мелкомасштабной части спектра турбулентности на процесс горения. Следует лишь учесть, что градиент скорости  $g$  – случайная величина. Поэтому в дальнейших оценках будем считать, что  $g = \sqrt{\langle g^2 \rangle} = \sqrt{\langle \epsilon \rangle} / (15\nu^{(0)})$ . Последнее равенство следует из локальной изотропии турбулентности (Бэтчелор [1953]). Тогда, учитывая определение масштаба турбулентности  $L$ , получим

$$K = \frac{a^{(0)}}{u_n^2} \sqrt{\frac{(u^{(0)})^3}{15\nu^{(0)}L}}, \quad L = \frac{(u^{(0)})^3}{\langle \epsilon \rangle}. \quad (6.10)$$

При  $a^{(0)} = \nu^{(0)}$  этот критерий пропорционален отношению квадратов колмогоровской скорости  $(\nu^{(0)} \langle \epsilon \rangle)^{1/4}$  и скорости нормального распространения пламени или пропорционален отношению квадратов толщины нормального пламени и колмогоровского масштаба  $\eta = (\nu^{(0)})^{3/4} \langle \epsilon \rangle^{-1/4}$ . Видно также, что  $K \sim \sqrt{Mi} u^{(0)} / u_n$ , т.е. величина  $K$  является комбинацией критериев, введенных в § 6.1.

Оценим величину  $K$  в условиях опытов Талантова с сотрудниками, для чего воспользуемся данными, приведенными Таунсендом [1956]:

$$u^{(0)} = 0,05 \langle u_1 \rangle, \quad L = 0,2d, \quad (6.11)$$

где  $\langle u_1 \rangle$  – среднерасходная скорость,  $d$  – диаметр канала. Используя график, приведенный на рис. 6.1, и формулы (6.4), (6.11), заключаем, что наибольшие и наименьшие значения  $K$  в этих опытах невелики:  $K = 10^{-2}$  ( $\alpha^{(0)} = 1$ ,  $T^{(0)} = 793$  К,  $p = 0,1$  МПа,  $\langle u_1 \rangle = 30$  м/с,  $d = 5$  см) и  $K = 0,8$  ( $\alpha^{(0)} = 1,4$ ,  $T^{(0)} = 393$  К,  $p = 0,1$  МПа,  $\langle u_1 \rangle = 100$  м/с,  $d = 5$  см).

Тем не менее из результатов этих опытов видно, что величина  $\alpha_{tm}$  (коэффициент избытка воздуха, при котором  $u_t$  максимально) остается неизменной при вариации всех режимных параметров. Таким образом, влияние различий в коэффициентах молекулярного переноса проявляется даже в том случае, когда можно ожидать, что влияние турбулентности на внутреннюю структуру фронта пламени мало.

Здесь следует, однако, отметить, что оценки основывались на характеристиках турбулентности в набегающем потоке. В пламени эти характеристики могут меняться, о чем свидетельствуют следующие соображения. При  $K \ll 1$  минимальный масштаб пульсаций скорости в свежей смеси много больше толщины фронта пламени  $\delta_n$ . Это означает, что пламя можно рассматривать как локально плоское. В газодинамическом приближении ( $a \rightarrow 0$ ) такое пламя неустойчиво относительно возмущений с любой длиной волны (Ландау [1944]). Учет эффектов, обусловленных вязкостью и теплопроводностью, проведен в книге "Нестационарное распространение пламени" под редакцией Маркштейна [1968], Истратовым и Либровичем [1966а, б]. В этих работах показано, что гармонические возмущения с длиной волны  $l > l_{cr} \sim \delta_n$  неустойчивы, а возмущения с длиной волны  $l < l_{cr}$  устойчивы. Эти выводы подтверждены экспериментально Петерсоном и Эммонсом [1961], которые исследовали устойчивость пламени стабилизированного колеблющейся проволокой. Обработка этих данных показывает, что

$$l_{cr} = c_1 \delta_n, \quad c_1 \approx 2. \quad (6.12)$$

Неустойчивость пламени приводит к возникновению турбулентности (Ландау и Лифшиц [1954]). Важно, что в первую очередь появляются наиболее мелкомасштабные возмущения. Действительно, как показано Ландау [1944], для бесконечно тонкого фронта пламени амплитуда  $A$  возмущения с длиной волны  $l$  растет во времени  $t$  по закону

$$A = A_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_i}\right), \quad \tau_i = \frac{l}{u_n} \psi(\beta), \quad \psi = \frac{\beta}{\beta + 1} \left[ \sqrt{\beta + 1} - \frac{1}{\beta} - 1 \right], \quad (6.13)$$

т.е. амплитуда растет тем быстрее, чем меньше длина волны. Для фронта пламени конечной толщины появляется еще один определяющий параметр  $l_{cr}$ , и, следовательно, из соображений размерности получим

$$\tau_i = \frac{l}{u_n} \varphi_4\left(\beta, \frac{l}{l_{cr}}\right),$$

где  $\varphi_4 > 0$  при  $l/l_{cr} > 1$  и  $\varphi_4 < 0$  при  $l/l_{cr} < 1$ . Из этих неравенств следует, что величина  $\tau_i$  минимальна при  $l = l_{cr} \varphi_5(\beta)$ . Так как  $l_{cr} \sim \delta_n$ , то быстрее всего растут возмущения, сопоставимые с толщиной нормальной пламени.

Такие возмущения приводят к сильным искривлениям пламени, в силу чего становятся важными эффекты, обусловленные различиями в коэффициентах температуропроводности  $a$ , диффузии горючего  $D_f$  и окислителя  $D_o$  (Зельдович [1944], Льюис и Эльбе [1961], Экхауз [1961]). Заметим, что на большом расстоянии от зоны горения в свежей смеси и в продуктах сгорания потоки тепла и вещества определяются исключи-

тельно конвекцией. Поэтому для плоского в среднем пламени из законов сохранения энергии и массы следует, что в зоне реакции в среднем неизменны состав и температура. Поэтому систематическое влияние различий в коэффициентах молекулярного переноса на процесс горения возможно только в том случае, когда распространение пламени определяется некоторыми избранными точками, в окрестности которых структура зоны реакции (например, ее кривизна) неизменна. Следуя книге Зельдовича и Франк-Каменецкого [1947], в качестве таких точек естественно рассмотреть

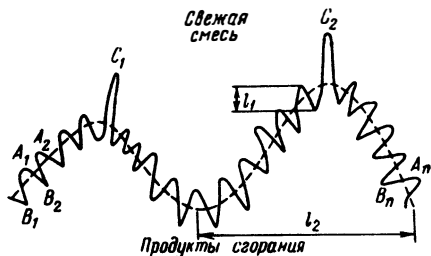


Рис. 6.9. Качественная структура турбулентного пламени

лидирующие точки, т.е. те точки, которые наиболее далеко продвинуты в свежую смесь (точки  $A_1, A_2, \dots, C_1, C_2, \dots$  на рис. 6.9).

Из рис. 6.9 видно, что в окрестности лидирующих точек кривизна пламени имеет один и тот же знак. Поэтому при  $D_o \neq D_f$  в окрестности этих точек состав смеси систематически изменяется, что в свою очередь приводит к систематическому изменению  $u_n$ . В окрестности рассматриваемых точек можно провести аналогию с горением в сферическом пламени, внутри которого находятся продукты сгорания. На основе указанной аналогии показано, что при горении бензина ( $D_o > D_f$ ) состав в зоне реакции обедняется (Бурико и Кузнецов [1976], Кузин и Талантов [1977]). При горении водорода ( $D_o < D_f$ ) состав в зоне реакции обогащается (Бурико и Кузнецов [1976]). Поэтому максимальные значения  $u_r$  и  $u_n$  достигаются при разных коэффициентах избытка воздуха  $\alpha_{tm}$  и  $\alpha_{nm}$ . В частности, при горении бензина коэффициент избытка воздуха в зоне реакции будет равен  $\alpha_{n,n}$ , если в исходной смеси коэффициент избытка воздуха меньше  $\alpha_{nm}$ . Следовательно,  $\alpha_{tm} < \alpha_{nm}$  при горении бензина. При горении водорода, наоборот, должно выполняться неравенство  $\alpha_{tm} > \alpha_{nm}$ .

Чтобы закончить качественный анализ закономерностей распространения пламени, необходимо указать на еще один, подробно не рассмотренный ранее эффект. Анализ экспериментальных данных (например, упомянутых ранее опытов Талантова с сотрудниками) показывает, что  $\alpha_{tm}$  весьма слабо изменяется при вариации режимных параметров в широком диапазоне значений. Отсюда можно предположить, что в окрестности лидирующих точек структура фронта пламени универсальна (например, его кривизна одна и та же). Эта гипотеза впервые сформулирована в работах Баева и Третьякова [1968, 1977] на основе представления о том, что наиболее интенсивные пульсации скорости выбрасывают отдельные языки пламени далеко в свежую смесь, а движение вперед таких языков продолжается до тех пор, пока в окрестности лидирующих точек не возникнет критический для распространения пламени режим.

Для пояснения обратимся к рис. 6.9. В окрестности точек  $C_1, C_2, \dots$  структура языка пламени аналогична структуре плоского слоя продуктов сгорания, с обеих сторон окруженного свежей смесью. Проведенный выше анализ показал, что такой слой существует лишь при  $K < \pi/2$ , т.е. достаточно сильные гидродинамические деформации приводят к тому, что распространение пламени прекращается. Аналогичный эффект возникает и при искривлении пламени. Например, в окрестностях точек  $A_1, A_2, \dots$  на рис. 6.9 можно провести аналогию между структурой языка пламени и структурой стационарного сферического пламени, внутри которого расположен сток продуктов сгорания. В работе Бурико и Кузнецова [1976] показано, что радиус такого пламени  $r$  не может быть меньше толщины нормального пламени  $\delta_n$ . В обоих случаях критическим называется режим, в котором  $K = \pi/2$  или  $r = \delta_n$ , т.е. распространение пламени становится невозможным.

Суммируя результаты проведенного анализа, заключаем, что распространение турбулентного пламени определяется следующими процессами: 1) движением лидирующих точек; 2) неустойчивостью пламени; 3) возникновением в окрестности лидирующих точек критического для распространения пламени режима; 4) изменением состава и температуры в лидирующих точках вследствие различий в коэффициентах молекулярного переноса. Эта схема сформулирована в работе Кузнецова [1982б].

Следуя указанной работе, исследуем более детально отдельные "элементарные" процессы, влияющие на горение, и проанализируем их взаимодействие. Прежде всего заметим, что помимо трех указанных ранее критериев следует рассмотреть еще по крайней мере два новых:  $D_o/D_f$  и  $a/D_o$ . Хотя для одного и того же горючего и окислителя эти критерии и постоянны, анализ их влияния на скорость распространения пламени необходим. Поскольку предполагается, что  $u_f$  определяется движением лидирующих точек, а в окрестности этих точек структура пламени универсальна, то влияние различий в коэффициентах молекулярного переноса в первом приближении можно учесть с помощью следующего приема.

Будем считать, что в окрестности лидирующих точек зависимость состава и температура горения от коэффициента избытка воздуха в исходной смеси  $\alpha^{(0)}$  можно рассчитывать, рассматривая критические режимы, которые возникают либо при искривлении сферического пламени, либо при однородной деформации плоского слоя продуктов сгорания. Такой расчет проведен в § 6.3. Его результат — формулы, связывающие коэффициент избытка воздуха в лидирующей точке  $\alpha^{(b)}$  с исходным коэффициентом избытка воздуха  $\alpha^{(0)}$ . В эти формулы войдут коэффициенты молекулярного переноса. Затем предполагается, что величина  $u_n$ , которая войдет во все выведенные далее соотношения, должна рассчитываться не по исходному составу, а по составу в лидирующих точках.

Такая процедура позволяет ограничиться лишь анализом зависимости (6.7), в которую входят только три критерия. Следующий шаг — исследование двух предельных случаев:  $K \ll 1$  и  $K \gg 1$ . Первый рассмотрен в § 6.5, 6.6, а второй — в § 6.7. В первом случае вместо величин  $\beta, Mi, u^{(0)}/u_n$  удобно рассмотреть эквивалентную систему критериев  $\beta, K, a^{(0)}/(u_n L)$ . Значения двух последних критериев малы. Однако из рассмотрения может быть исключен лишь один из них ( $K$ ).



Чтобы пояснить сделанный вывод, напомним, что критерий  $K$  описывает влияние гидродинамических деформаций на внутреннюю структуру пламени, и в соответствии с формулой (6.10) он рассчитывается по градиенту пульсационной скорости в исходной свежей смеси. Поскольку в пламени рождается дополнительная мелкомасштабная турбулентность, то определение величины  $K$  следует пересмотреть. В соответствии с этим введем величину  $K^{(b)} = g^{(b)} a^{(0)} / u_n^2$ , где  $g^{(b)}$  — характерное значение градиента скорости в пламени. При этом символ  $K$  по-прежнему соответствует величине, определяемой формулой (6.10). Характеристики генерированной пламенем турбулентности зависят от  $u_n$ ,  $\beta$  и  $l_{cr}$ . При  $K \ll 1$  минимальный масштаб возмущений в набегающем на пламя потоке много больше  $l_{cr}$  и, следовательно, характеристики турбулентности в свежей смеси не могут входить в число определяющих параметров. Следовательно,  $g^{(b)} = u_n F(\beta) / l_{cr}$ , т.е.  $K^{(b)}$  зависит только от  $\beta$ . Это означает, что если  $K \ll 1$ , то при вариации  $K$  степень деформации и искривления пламени не меняется, т.е. критерий  $K$  не является определяющим.

Критерий  $a^{(0)} / (u_n L)$  не может быть исключен из рассмотрения, так как в противном случае нельзя объяснить зависимость  $u_f$  от масштаба и давления (рис. 6.3, 6.5).

Таким образом, остаются два определяющих критерия:  $\beta$  и  $a^{(0)} / (u_n L)$ . Анализ характеристик генерированной пламенем турбулентности (§§ 6.5, 6.6) позволит объединить оба критерия в один. Этот критерий используется в § 6.6 для обработки экспериментальных данных.

### § 6.3. Влияние различий в коэффициентах молекулярного переноса на структуру пламени в лидирующих точках

Следуя программе, сформулированной в конце § 6.2, для нахождения  $u_n$  в лидирующих точках рассмотрим две модельные задачи, в одной из которых анализируется критическая деформация плоского слоя продуктов сгорания, а в другой — критический режим распространения сферического пламени. Постановка первой задачи принадлежит Климову [1963, 1977а], в работах которого дано решение при  $a = D_o = D_f$ . Несколько более общий случай ( $a \neq D_o$ ,  $D_o = D_f$ ) рассмотрен Гремячкиным и Истратовым [1972]. Ниже дается решение первой задачи, полученное Кузнецовым и Сабельниковым [1977] при  $a \neq D_o \neq D_f$ .

Предположим, что теплоемкость постоянна, плотность  $\rho$  и коэффициенты переноса зависят только от температуры и давления,  $\rho \sim 1/T$ ,  $a \sim T^2$ ,  $D_o \sim T^2$ ,  $D_f \sim T^2$ . Будем также считать, что справедливо приближение Зельдовича—Франк-Каменецкого, т.е. зона химических реакций есть поверхность, на которой производные от температуры  $T$ , концентраций топлива  $c_f$  и окислителя  $c_o$  имеют разрыв (это предположение обсуждалось в начале § 6.1). Схема течения проиллюстрирована на рис. 6.8, на котором штриховыми линиями изображены две зоны реакции (свежая смесь находится в области  $|x_1| > x_0$ ). Компонента скорости среды, параллельная зонам реакции, имеет вид  $u_2 = g x_2$  ( $g > 0$ ), а нормальная компонента зависит только от  $x_1$  и определяется уравнением (6.9). Вне зоны реакции

основные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u_1 \frac{dT}{dx_1} &= \frac{d}{dx_1} a \rho \frac{dT}{dx_1}, \\ \rho u_1 \frac{dc_f}{dx_1} &= \frac{d}{dx_1} D_f \rho \frac{dc_f}{dx_1}, \\ \rho u_1 \frac{dc_o}{dx_1} &= \frac{d}{dx_1} D_o \rho \frac{dc_o}{dx_1}, \quad |x_1| > x_0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Введем переменную Дородницына (см., например, Шлихтинг [1960])

$$\xi = \frac{\int_0^{x_1} \rho x_1 dx_1}{\rho^{(0)}}.$$

Учитывая, что  $\rho \sim 1/T$ ,  $D_o \sim D_f \sim a \sim T^2$ , из (6.9), (6.14) получим

$$\begin{aligned} -g\xi \frac{dT}{d\xi} &= a^{(0)} \frac{d^2 T}{d\xi^2}, \\ -g\xi \frac{dc_f}{d\xi} &= D_f^{(0)} \frac{d^2 c_f}{d\xi^2}, \\ -g\xi \frac{dc_o}{d\xi} &= D_o^{(0)} \frac{d^2 c_o}{d\xi^2}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Здесь верхний индекс 0 и далее употребляемый индекс  $b$  по-прежнему соответствуют состояниям в исходной свежей смеси и в зоне реакций.

Пусть для определенности в зоне реакции выгорает все горючее. Тогда граничные условия приобретают вид

$$\begin{aligned} c_o &= c_o^{(0)}, \quad c_f = c_f^{(0)}, \quad T = T^{(0)}, \quad |x_1| = |\xi| = \infty, \\ c_f &= 0, \quad \text{St } D_f^{(0)} \left| \frac{dc_f}{d\xi} \right| = D_o^{(0)} \left| \frac{dc_o}{d\xi} \right|, \\ Q D_f^{(0)} \left| \frac{dc_f}{d\xi} \right| &= a^{(0)} \left| \frac{dT}{d\xi} \right|, \quad |\xi| = \xi_0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Здесь  $\pm \xi_0$  — координаты зон реакций. St — стехиометрический коэффициент,  $Q = (1 + \text{St}) T_s$  — теплотворная способность топлива, поделенная на теплоемкость,  $T_s$  — температура адиабатического горения стехиометрической смеси. Первые три условия в (6.16) дают характеристики в свежей смеси, а последние два вытекают из законов сохранения массы и энергии. Координату  $\xi_0$  можно найти из дополнительного условия (6.2), связывающего поток тепла из зоны реакции, подвергающейся деформации, с потоком тепла в нормальном фронте пламени. В данном случае это условие должно связать величины  $\xi_0$  и  $g$ . Эта связь, однако, не представляет особого интереса, поскольку исследуется критический режим, в котором  $\xi_0 \rightarrow 0$ . Таким образом, ищется такое решение задачи (6.15), (6.16), когда вели-

чина  $g$  настолько велика, что обе зоны реакции сливаются в одну. Эта задача легко решается. Имеем

$$T^{(b)} = T^{(0)} + T_s(1 + St)c_f^{(0)}\sqrt{\frac{D_f^{(0)}}{a^{(0)}}},$$

$$c_o^{(b)} = c_o^{(0)} - St c_f^{(0)}\sqrt{\frac{D_f^{(0)}}{D_o^{(0)}}}, \quad \alpha^{(b)} > 1, \quad (6.17)$$

где  $\alpha^{(b)}$  – коэффициент избытка воздуха в зоне реакции.

Если в зоне реакции выгорает весь окислитель, то аналогичным образом получаем

$$T^{(b)} = T^{(0)} + T_s\left(1 + \frac{1}{St}\right)c_o^{(0)}\sqrt{\frac{D_o^{(0)}}{a^{(0)}}},$$

$$c_f^{(b)} = c_f^{(0)} - \frac{1}{St} c_o^{(0)}\sqrt{\frac{D_o^{(0)}}{D_f^{(0)}}}, \quad \alpha^{(b)} < 1. \quad (6.18)$$

Последние соотношения в (6.17), (6.18) определяют коэффициент избытка воздуха в зоне реакции. Пусть  $\alpha^{(b)} > 1$ . Вторая формула в (6.17) определяет концентрацию окислителя после завершения реакции. Эта концентрация, очевидно, равна  $St(\alpha^{(b)} - 1)/(1 + \alpha^{(b)}St)$ . Аналогичное соотношение можно найти из (6.18) при  $\alpha^{(b)} < 1$ . Учитывая, что обычно  $St \gg 1$ , имеем

$$\alpha^{(b)} = \alpha^{(0)}\sqrt{\frac{D_o^{(0)}}{D_f^{(0)}}}, \quad \alpha^{(b)} > 1;$$

$$\alpha^{(b)} = \frac{\alpha^{(0)}\sqrt{D_f^{(0)}/D_o^{(0)}}}{\alpha^{(0)}(\sqrt{D_o^{(0)}/D_f^{(0)}} - 1) + \sqrt{D_o^{(0)}/D_f^{(0)}}}, \quad \alpha^{(b)} < 1.$$

Отсюда видно, что при  $D_o^{(0)} > D_f^{(0)}$  состав в зоне реакции обедняется по сравнению с составом в свежей смеси. Этот случай соответствует горению большинства углеводородов (пропан, бензин и т.д.). При горении водорода и метана имеем  $D_o^{(0)} < D_f^{(0)}$ , т.е. состав в зоне реакции, наоборот, обогащается.

Из первых соотношений в (6.17), (6.18) следует, что, вообще говоря, температура горения в зоне реакции не совпадает с температурой адиабатического горения смеси с таким же составом, как и в зоне реакции. В частности, для водорода имеем  $a^{(0)} > D_o^{(0)}$ , и температура в зоне реакции ниже, чем температура адиабатического горения смеси с коэффициентом избытка воздуха, равным  $\alpha^{(b)}$ . Для большинства углеводородов с приемлемой точностью можно считать, что  $a^{(0)} = D_o^{(0)}$  и, следовательно, температура в зоне реакции совпадает с температурой в нормальном пламени, распространяющемся по смеси, в которой коэффициент избытка воздуха равен  $\alpha^{(b)}$ . Поэтому для определения  $u_n$  можно воспользоваться опытами, в которых исследовалось плоское пламя в потоке без деформации. При этом следует

лишь пересчитать состав по формулам (6.19). Указанная процедура незаконна для водорода. Однако и в рассматриваемом случае формулы (6.19) пригодны для оценок, поскольку различия между  $D_o$  и  $D_f$  больше, чем различия между  $D_o$  и  $a$ .

Проанализируем теперь количественную сторону вопроса. Так как распространение пламени определяется лидирующими точками, а эти точки находятся в критическом режиме, то при вариации  $\alpha^{(0)}$  максимальное значение  $u_f$  достигается при  $\alpha^{(0)} = \alpha_{tm}$ , т.е. когда величина  $u_n(\alpha^{(b)})$  станет максимальной. Используя (6.19), заключаем, что связь между  $\alpha_{tm}$  и  $\alpha_{nm}$  описывается выражением  $\alpha_{tm} = \alpha_{nm} \sqrt{D_f^{(0)}/D_o^{(0)}}$ . Для бензино-воздушной смеси имеем  $\alpha_{nm} = 1$  (Талантов [1975]),  $D_o^{(0)} = 0,19 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $D_f^{(0)} = 0,09 \text{ см}^2/\text{с}$  (Дубовкин [1961]), т.е.  $\alpha_{tm} = 0,7$ , что хорошо согласуется с экспериментальными данными Кузина, Янковского, Аполлонова и Талантова [1972], Голубева, Янковского, Постнова и Талантова [1973], Янковского и Талантова [1969]. Для водорода-воздушных смесей имеем  $\alpha_{nm} = 0,6$  (Карпов и Северин [1977]),  $D_f^{(0)} = 0,6 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $D_o^{(0)} = 0,2 \text{ см}^2/\text{с}$  (Бретшнайдер [1966]), т.е.  $\alpha_{tm} = 1$ , что хорошо согласуется с экспериментальными данными Карпова и Северина [1977]. Найденное соотношение между  $\alpha_{nm}$  и  $\alpha_{tm}$  качественно согласуется с данными, полученными при исследовании горения этана ( $D_o > D_f$ ) и метана ( $D_o < D_f$ ). Как установлено Карповым и Севериным [1980],  $\alpha_{tm} < \alpha_{nm}$  в первом и  $\alpha_{tm} > \alpha_{nm}$  во втором случаях. Однако для этих горючих различия между  $D_o$  и  $D_f$  и соответственно между  $\alpha_{tm}$  и  $\alpha_{nm}$  невелики, что затрудняет количественные сопоставления.

Влияние различий в коэффициентах диффузии горючего и окислителя на скорость нормального распространения пламени проиллюстрировано на рис. 6.1. Кривая 1 соответствует опытным данным с плоским пламенем, которые приведены Талантовым [1975]. Кривая 2 получена путем трансформации кривой 1, т.е. состав в лидирующих точках пересчитывался по формулам (6.19). Видно, что влияние различий в коэффициентах молекулярного переноса весьма значительно.

Проведенный выше анализ относится к случаю, когда возникновение критического режима обусловлено растяжением пламени. Совершенно аналогично можно исследовать и другой случай, когда возникновение критического режима обусловлено искривлением пламени. Как уже указывалось, при этом можно провести аналогию между горением в окрестности лидирующих точек и горением в стационарном сферическом пламени, внутри которого расположен сток продуктов сгорания. Эта задача рассмотрена в работе Бурико и Кузнецова [1976]. Показано, что в критическом режиме (мощность стока равна нулю, радиус зоны реакции минимален) формулы (6.19) сохраняются, если входящие в них величины  $D_o$ ,  $D_f$ ,  $a$  заменить на  $D_o^2$ ,  $D_f^2$ ,  $a^2$ , т.е. рассматриваемый эффект выражен еще более сильно. Поскольку формулы (6.19) дают согласующиеся с опытом значения  $\alpha_{tm}$ , то можно предположить, что именно растяжение пламени — главная причина возникновения критических условий.

## § 6.4. Спектральное представление скорости распространения пламени

Как уже неоднократно указывалось, турбулентность и, следовательно, турбулентное горение являются существенно многомасштабными процессами. Для описания этой особенности в теории турбулентности вводится структурная функция и ее преобразование Фурье, называемое спектральной плотностью энергии. При анализе процесса горения также полезно ввести аналогичную величину, которая характеризовала бы роль искривлений пламени с различным масштабом.

Первая такая попытка, по-видимому, принадлежит Повинелли и Фуксу [1962], в работе которых предполагалось, что поверхность фронта пламени  $x_1(x_2, x_3, t)$  является однозначной и односвязной, а величина  $x_1$  есть стационарная случайная функция  $x_2$  и  $x_3$ . Это предположение позволило использовать для описания процесса математический аппарат, развитый в теории турбулентности. Однако в общем случае такой подход принципиально непригоден, поскольку фронт пламени не является односвязной и однозначной поверхностью. Интуитивные представления о спектральном представлении скорости распространения пламени использовались в работах Кузнецова [1977а], Климова [1977а], Зимонта и Сабельникова [1975б], Зимонта [1979] для создания различных моделей турбулентного пламени.

Строгое определение дано Кузнецовым [1980]. Оно основано на введенной Колмогоровым [1962а, б] и Обуховым [1962] процедуре осреднения случайных величин по областям с конечным объемом. Такая процедура уже использовалась в § 5.4. Она позволяет сгладить достаточно мелкомасштабные детали процесса. Следуя указанным работам, введем величину

$$U(l) = \max[\bar{W}(l)], \quad \bar{W} = \frac{1}{4\rho^{(0)}l^2} \int_{\omega} \rho W d^3x, \quad (6.20)$$

где  $W$  — скорость тепловыделения, а  $\omega$  — куб с центром в точке  $x$  и стороной  $2l$ . Поскольку размер куба конечен, то  $\bar{W}$  — случайная функция, зависящая от  $t, x, l$ . Величина  $U$  есть максимальное значение  $\bar{W}$  во всех реализациях процесса. Поэтому  $U$  — не случайная функция.

Поясним смысл введенных величин. Ясно, что при интегрировании скорости тепловыделения по области с размером  $l$  из рассмотрения исключаются все детали процесса, зависящие от возмущений, масштаб которых много меньше  $l$ . Например, если в пламени существуют только два возмущения с сильно отличающимися масштабами  $l_2 \gg l_1$ , то структура зоны реакций имеет вид, схематически изображенный на рис. 6.9. Если  $l_2 \gg l \gg l_1$ , то величина  $\bar{W}$ , рассматриваемая как функция координат, отлична от нуля лишь в узкой области с характерным размером  $l$ . Эта область находится вблизи поверхности  $\bar{W}(x, t) = U(x, l)$ , которая на рис. 6.9 изображена штриховой линией. Рассматриваемую поверхность назовем частично сглаженной поверхностью пламени. В силу (6.2) из (6.20) получаем

$$W = \frac{u_n S^{(b)}(l)}{4l^2}, \quad (6.21)$$

где  $S^{(b)}(l)$  — площадь той части зоны реакций, которая заключена в кубе  $\omega$

(количество тепла, выделившееся в кубе  $\omega$ , равно площади зоны реакции, умноженной на поток тепла из этой зоны).

Рассмотрим два предельных случая:  $l \rightarrow 0$  и  $l \rightarrow \infty$ . В первом случае зону реакции можно рассматривать как плоскость. Поэтому  $\bar{W}$  максимально, если зона реакции является диагональной плоскостью куба. Следовательно, из (6.21) находим

$$U(l) = u_n \sqrt{2}, \quad l \rightarrow 0. \quad (6.22)$$

Пусть теперь  $l \rightarrow \infty$ . Рассмотрим в среднем плоское, стационарное пламя, движущееся в направлении 1. Поскольку процесс статистически однороден в направлениях 2 и 3, то

$$\langle W\rho \rangle = \lim_{l \rightarrow \infty} (2l)^{-2} \int_{-l}^l \int_{-l}^l \rho W dx_2 dx_3, \quad (6.23)$$

$$\bar{W} = \frac{1}{\rho(0)} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l \langle W\rho \rangle dx_1.$$

Осредним уравнение (2.1) и полученное соотношение проинтегрируем по всем  $x_1$ . Учитывая, что  $c = 1$ ,  $\langle u \rangle = \beta u_t$  в области, занятой продуктами сгорания, из (6.23) получим

$$U(\infty) = u_t. \quad (6.24)$$

Заметим теперь, что для в среднем плоского пламени интеграл  $\int_{\omega} \rho W d^3x$

при увеличении  $l$  возрастает не медленнее, чем  $l^2$  (это вытекает из статистической однородности в направлениях 2 и 3). Следовательно,  $U$  — неубывающая функция  $l$ . Таким образом, из (6.22), (6.24) видим, что при увеличении  $l$  функция  $U(l)$  монотонно возрастает от величины порядка  $u_n$  до  $u_t$ . Следовательно,  $U(l)$  описывает тот вклад, который вносят в скорость распространения пламени все возмущения, размер которых по порядку не превышает  $l$ . Эта функция характеризует также то количество вещества, которое перерабатывается в единицу времени единичной площадью поверхности частично сглаженного пламени. Производная  $\partial U / \partial l$ , очевидно, неотрицательна. Она описывает тот вклад, который вносят в скорость горения возмущения с размером порядка  $l$ . Эту величину естественно назвать спектральным представлением скорости распространения пламени.

Введенные выше определения можно использовать в произвольном, в том числе и неоднородном, турбулентном потоке. В этом случае величина  $U(l)$  будет зависеть от  $l$  и  $x$ . Следует лишь учесть, что при анализе горения в ограниченном потоке существует некоторый максимально возможный масштаб возмущений пламени  $L_m$ . Например, при горении в трубе диаметром  $d$  имеем  $L_m = d/2$ . Аналогично, в бунзеновской горелке получаем  $L_m = d/2$ ,  $d$  — диаметр горелки (пламя не может проникнуть за границы струи горючей смеси, а характерный размер этой струи порядка  $d$ ). Поэтому формула (6.24) приобретает вид  $u_t = U(L_m)$ . Отметим также, что если  $K \ll 1$ , то на фронте пламени нет искривлений с масштабом меньше  $l_{cr}$ , и поэтому из формулы (6.22) получаем оценку  $U(l_{cr}) \sim u_n$ . Таким образом, из (6.22), (6.24) имеем

$$U(l_{cr}) \sim u_n, \quad U(L_m) \sim u_t. \quad (6.25)$$

## § 6.5. Влияние неустойчивости пламени на турбулентное горение однородной смеси

Как уже указывалось, плоский фронт пламени неустойчив. Возможны два механизма неустойчивости. Первый обусловлен только уменьшением плотности при горении (Ландау [1944]). Второй связан с различиями в коэффициентах температуропроводности и диффузии (Зельдович и Баренблатт [1959], Баренблатт, Зельдович и Истратов [1962]). При  $a < D$  этот механизм обуславливает неустойчивость пламени, даже если  $\beta = 1$ . В данной книге рассматривается лишь гидродинамическая (тепловая) неустойчивость пламени, поскольку такое упрощение позволит описать основные особенности проблемы.

В настоящее время поведение пламени в рамках линейной теории устойчивости изучено достаточно хорошо. Основные результаты этой теории изложены в книге "Нестационарное распространение пламени" под редакцией Маркштейна [1968] и обзоре Истратова и Либровича [1966б].

Установлено, что плоское пламя неустойчиво относительно гармонических возмущений с периодом (масштабом)  $l$ , который удовлетворяет условию  $l > l_{cr}$ . Существенно, что величина  $l_{cr}$  весьма мала. В опытах, однако, часто наблюдается устойчивый ламинарный факел, характерный размер которого значительно больше  $l_{cr}$ . Устойчивость такого факела, по видимому, связана с двумя обстоятельствами. Во-первых, важную роль может играть глобальная конфигурация пламени. Например, сферическое пламя более устойчиво, чем плоское (Истратов и Либрович [1966в]). Во-вторых, развитие неустойчивости пламени может существенно зависеть от амплитуды начальных возмущений. Сильное влияние амплитуды начальных возмущений вполне отчетливо прослеживается при анализе возникновения турбулентности в несжимаемой жидкости. Например, в трубе с гладкими стенками можно наблюдать ламинарное течение вплоть до числа Рейнольдса  $2 \cdot 10^5$ , т.е. на два порядка больше критического значения (см., например, Шлихтинг [1960]). При горении влияние начальных возмущений на развитие неустойчивости, по-видимому, выражено еще более сильно. В качестве примера приведем уже упоминавшиеся опыты Сузуки, Оба, Хирано и Цуджи [1979]. Оценки, проведенные в § 6.1, показали, что в этом случае пульсационная скорость в свежей смеси меньше  $u_n$  и много меньше  $u_t$  ( $u_t = 1,4$  м/с при  $u^{(0)} = 9$  см/с,  $u_t = 2,2$  м/с при  $u^{(0)} = 28$  см/с,  $u_n = 40$  см/с). Из таких оценок видно, что малое по сравнению с  $u_t$  изменение пульсационной скорости приводит к сильному изменению положения передней границы пламени.

Возникает естественный вопрос о том, каков характер течения и горения после потери устойчивости фронта пламени. Хорошо известно, что в течениях несжимаемой жидкости после потери устойчивости турбулентность возникает далеко не сразу. При увеличении числа Рейнольдса появляется целый ряд упорядоченных стационарных или нестационарных режимов и, лишь после того как число Рейнольдса станет достаточно большим, появляются стохастические колебания скорости. Аналогичным образом после потери устойчивости в пламени также могут образовываться упорядоченные режимы течения и горения, например ячеистые пламена (см. книгу "Нестационарное распространение пламени" под ред. Маркштейна [1968]).

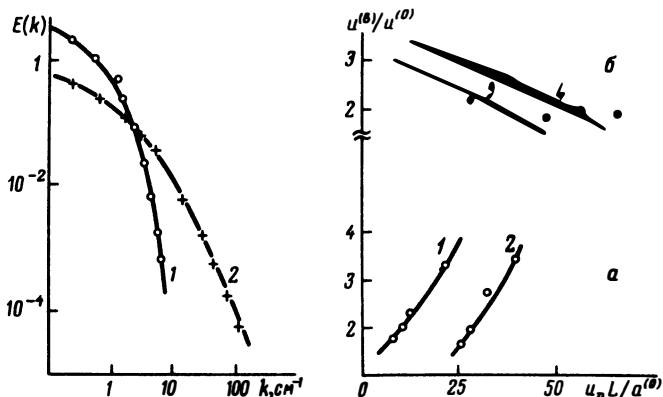


Рис. 6.10. Спектральная плотность энергии турбулентности в потоке за турбулизирующей решеткой по данным Баллала [1979]. Единицы измерений по оси ординат произвольны.  $p = 0,02$  МПа,  $T^{(0)} = 293$  К; 1 – при горении, 2 – без горения

Рис. 6.11. Влияние масштаба начальной турбулентности в набегающем на пламя потоке на энергию генерированной пламенем турбулентности по данным Баллала [1979]. а) 1 –  $u^{(0)}/u_n = 0,6$ , 2 –  $u^{(0)}/u_n = 1,5$ ; б) 3 –  $u^{(0)}/u_n = 3,3$ , 4 –  $u^{(0)}/u_n = 7,6$

Можно предположить, что и в этом случае амплитуда и характер начальных возмущений также играют важную роль. Для пояснения обратимся к опытам Баллала [1979], в которых изучалось горение пропано-воздушной смеси в канале, на входе в который располагалась решетка. В этих опытах влияние ускорения потока при горении исключено, так как стенки канала расширялись. Смесь поджигалась пилотным пламенем. На оси пламени с помощью лазерного доплеровского анемометра измерялась энергия турбулентности и ее спектр.

Начальные возмущения носили случайный характер, так как поток за решеткой был турбулентным. Из приведенных в работе экспериментальных данных следует, что течение в пламени турбулентно, а энергия турбулентности в пламени больше, чем в набегающем потоке. Первый вывод ясен из рис. 6.10, на котором изображена зависимость спектральной плотности энергии  $E$  от волнового числа  $k$ . Видно, что спектр пульсаций скорости сплошной, т.е. в пламени нет дискретных возмущений. Можно выделить две области – коротковолновую и длинноволновую. В длинноволновой области ( $k < k_{cr}$ ) спектральная плотность энергии турбулентности в пламени больше, чем в набегающем потоке ( $k_{cr}$  определяется как абсцисса пересечения кривых 1 и 2 на рис. 6.10). В коротковолновой области ( $k > k_{cr}$ ) наблюдается противоположная картина, что связано с сильным увеличением вязкости продуктов сгорания. Несложная оценка показывает, что значения величин  $k_{cr}$  и  $1/l_{cr}$  практически совпадают (использована формула (6.12)). На основе этой оценки можно предположить, что увеличение спектральной плотности энергии в длинноволновой области связано с неустойчивостью пламени. На рис. 6.11, а проиллюстрировано влияние масштаба турбулентности  $L$  на отношение пульсационных скоростей в пламени и в набегающем потоке. Видно, что  $u^{(b)} > u^{(0)}$ , а при увеличении



масштаба  $L$  энергия турбулентности в пламени растет\*), как и следовало ожидать из предварительного анализа, проведенного в § 6.2.

Таким образом, можно предположить, что при воздействии на пламя малых случайных возмущений возникает турбулентный режим течения и горения. На основе аналогии с возникновением турбулентности в течениях несжимаемой жидкости предположим также, что характеристики генерированной пламенем турбулентности не зависят от амплитуды начальных возмущений, если  $L_m/l_{cr} \rightarrow \infty$ . Ниже будет показано, что энергия генерированной пламенем турбулентности неограниченно растет при  $L_m/l_{cr} \rightarrow \infty$ . Темп этого роста, однако, весьма мал. Поэтому принятое предположение не противоречит сделанным ранее замечаниям, касающимся влияния начальных возмущений на развитие неустойчивости пламени.

Поясним ход дальнейших рассуждений. Рассмотрим сначала в среднем плоский фронт пламени, распространяющийся в неограниченном потоке ( $L_m = \infty$ ). Пусть коэффициенты молекулярного переноса равны, а энергия турбулентности в свежей смеси очень мала ( $u^{(0)} \ll u_n$ ). Для анализа нелинейной стадии развития неустойчивости пламени используем спектральное представление скорости распространения пламени, введенное в § 6.4. Сформулируем гипотезу подобия для этого представления, а затем укажем, каким образом полученные результаты можно использовать при описании общего случая.

Рассматриваемый процесс нестационарен. Действительно, предположим обратное, т.е. допустим, что скорость распространения пламени  $u_t$  и толщина зоны горения  $\delta_t$  стремятся к постоянным значениям при  $t \rightarrow \infty$ . Рассмотрим устойчивость пламени по отношению к возмущениям с очень большим масштабом  $l \gg \delta_t$ . Тогда пламя можно считать скачком плотности, и, следовательно, справедливы все выводы линейной теории устойчивости, развитой Ландау [1944]. При этом во всех формулах этой теории лишь следует заменить  $u_n$  на  $u_t$ . Поэтому амплитуда рассматриваемых возмущений растет со временем, что приводит к увеличению  $u_t$  и  $\delta_t$ . Однако нестационарность процесса сказывается лишь на характеристиках крупномасштабных возмущений, амплитуда которых в соответствии с линейной теорией устойчивости возрастает тем медленнее, чем больше длина возмущения. С увеличением времени амплитуда возмущения с фиксированной длиной волны (масштабом) вследствие нелинейных эффектов должна выходить на стационарный уровень.

Изложенные выше соображения позволяют выявить параметры, от которых зависит введенная в предыдущем параграфе функция  $U(l)$ . Очевидно, что среди этих параметров должны быть величины  $u_n$ ,  $a^{(0)}$ ,  $l$ ,  $\beta$ ,  $x_1$  ( $x_1$  отсчитывается от изотермы  $\langle c \rangle = 1/2$ ). При  $t \rightarrow \infty$  в число этих параметров не входит время, поскольку по определению  $U(l)$  не зависит от нестационарных крупномасштабных возмущений. При малой начальной энергии возмущений процесс полностью определяется генерированной пламенем турбулентностью. Характеристики этой турбулентности должны зависеть

---

\*) В рассматриваемой работе установлено также, что при достаточно больших значениях  $u^{(0)}/u_n$  с увеличением  $L$  энергия турбулентности в пламени падает (см. рис. 6.11, б). Результаты этих опытов удобно объяснить в § 6.7.

только от рассматриваемой функции  $U(l)$ . Следовательно, перечисленными выше параметрами исчерпывается список величин, от которых зависит функция  $U(l)$ . Поэтому из соображений размерности получаем

$$U = u_n V\left(\beta, \frac{u_n x_1}{a^{(0)}}, \frac{u_n l}{a^{(0)}}\right), \quad t \rightarrow \infty, \quad |x_1| \leq \delta_t, \quad l \leq \delta_t,$$

где  $V$  — некоторая безразмерная функция.

Так как  $\delta_t \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , то всегда можно выделить возмущения с таким масштабом, что  $l_{cr} \ll l \ll \delta_t$ . Эта область масштабов будет играть ту же роль, что и логарифмический пограничный слой в теории пограничного слоя или инерционный интервал в теории локально однородной турбулентности. Так же, как и в этих теориях, в данном случае можно предположить, что характеристики возмущений с масштабами  $l \gg l_{cr}$  непосредственно не зависят от процессов молекулярного переноса. Это предположение позволяет найти спектральное представление скорости горения с точностью до двух произвольных функций от  $\beta$ . Отыскание этих функций основано на идеях теории логарифмического пограничного слоя (см., например, Монин и Яглом [1965]), т.е. предполагается, что спектральное представление скорости горения, полученное в области промежуточных масштабов, плавно "стыкуется" со спектральным представлением в области больших ( $l \sim \delta_t$ ) и малых ( $l \sim l_{cr}$ ) масштабов. Для определения формы  $U(l)$  в этих областях используются результаты линейной теории устойчивости.

Итак, рассмотрим область  $l_{cr} \ll l \ll \delta_t$ . Величина  $\Delta U = U(L) - U(l)$  характеризует вклад в скорость горения возмущений, масштаб которых изменяется от  $l$  до  $L$ .

Предположим, что основную роль играет взаимодействие возмущений с не слишком сильно отличающимися масштабами. Отсюда вытекает, что  $\Delta U$  не зависит от  $a^{(0)}$ .

Поскольку  $\Delta U$  не зависит от  $a^{(0)}$ , то

$$V\left(\beta, \frac{u_n x_1}{a^{(0)}}, \frac{u_n L}{a^{(0)}}\right) - V\left(\beta, \frac{u_n x_1}{a^{(0)}}, \frac{u_n l}{a^{(0)}}\right) = G\left(\beta, \frac{x_1}{L}, \frac{l}{L}\right), \quad (6.26)$$

где  $G$  — некоторая безразмерная функция. Дважды продифференцируем это соотношение по  $L$  и по  $l$ . Получаем

$$\xi \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial G}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial^2 G}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \xi = \frac{l}{L}, \quad \eta = \frac{x_1}{L}. \quad (6.27)$$

Решения этого уравнения имеют вид  $G = \eta^n f_n(\xi)$ . Если  $n \neq 0$ , то  $|G| = \infty$  либо при  $x_1 = 0$ , либо при  $|x_1| = \infty$ , что не имеет физического смысла. Поэтому  $n = 0$ , т.е.  $G$  не зависит от  $\eta$ , и, следовательно, в (6.27) следует положить  $\partial G / \partial \eta = 0$ . Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$G = -\Phi \ln \xi + B,$$

где  $\Phi$  и  $B$  зависят только от  $\beta$ . Продифференцируем (6.26) по  $l$ . Получим

$$\frac{\partial}{\partial l} V\left(\beta, \frac{u_n x_1}{a^{(0)}}, \frac{u_n l}{a^{(0)}}\right) = \frac{\Phi(\beta)}{l}.$$

Интегрируя это соотношение, найдем

$$V = \Phi(\beta) \ln \left( \frac{u_n l}{a(0)} \right) + C \left( \beta, \frac{u_n x_1}{a(0)} \right), \quad (6.28)$$

где  $C$  – "постоянная" интегрирования. Предположим, что полученное распределение плавно "стыкуется" со спектральным представлением скорости горения в области  $l \sim l_{cr}$ . Это означает, что формула (6.28) дает правильный порядок и при  $l \sim l_{cr}$ . Поскольку все возмущения с масштабами  $l \lesssim l_{cr}$  устойчивы, то в кубе  $\omega$  с размером порядка  $l_{cr}$  зону реакции можно считать плоскостью. Тогда из первой оценки в (6.25) и формул (6.12), (6.28) получаем

$$U(l) = u_n \Phi(\beta) \ln \frac{u_n l}{c_1 a(0) \beta} + c_2 u_n t. \quad (6.29)$$

где  $c_2$  – некоторая постоянная.

Из (6.29) видно, что  $U$  не зависит от  $x_1$ , т.е. локальная структура зоны реакции и, следовательно, локальная структура генерированной пламенем турбулентности статистически однородны.

Чтобы найти функцию  $\Phi(\beta)$ , рассмотрим нестационарные крупномасштабные возмущения с масштабами порядка  $\delta_t$  и более. Как уже указывалось, при описании таких возмущений пламя допустимо считать тонким. Поэтому можно воспользоваться линейной теорией устойчивости, предполагая, что нелинейные эффекты дают малую поправку. Используем также ряд феноменологических соображений, развитых Зельдовичем [1966], в работе которого получено уравнение, описывающее развитие дискретного возмущения на фронте пламени. В данном случае предстоит только учесть, что существует непрерывный спектр возмущений. Напомним, что вклад в скорость горения возмущений с масштабом порядка  $l$  описывается величиной  $\partial U(l) / \partial l$ . Чтобы из этой величины получить геометрические характеристики пламени, ее следует разделить на  $u_n$ , т.е. необходимо рассмотреть величину  $\kappa = u_n^{-1} \partial U / \partial l$ , которая, очевидно, характеризует амплитуду возмущений с размером  $l$ . Выведем теперь феноменологическое уравнение для величины  $\kappa$ .

Очевидно, что при  $t = \text{const}$  и  $l \rightarrow \infty$  величина  $\kappa$  описывается линейной теорией устойчивости. В рамках этой теории амплитуда возмущения растет по закону (6.13). Следовательно, можно предположить, что уравнение для  $\kappa$  в линейном приближении имеет вид

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = c_4 \psi(\beta) \frac{u_n \kappa}{l}, \quad (6.30)$$

где  $c_4$  – постоянная порядка единицы. В этом приближении (6.30) в точности совпадает с соотношением, полученным Зельдовичем [1966].

Заметим теперь, что при  $l \rightarrow \infty$  пламя можно считать скачком плотности. Скорость движения этого скачка относительно среды, однако, не равна  $u_n$ , так как развившиеся к рассматриваемому моменту времени мелкомасштабные возмущения изменили его внутреннюю структуру. Следовательно, при  $l \rightarrow \infty$  в (6.30) следует заменить  $u_n$  на  $u_t$ . Аналогично, можно предположить, что при  $l \sim \delta_t$  в (6.30) следует заменить  $u_n$  на  $U(l)$ . Тогда в линейном

приближении (6.30) приобретает вид

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = c_4 \psi(\beta) \frac{U(l)\kappa}{l}.$$

Учтем теперь малые нелинейные поправки, предполагая, что они пропорциональны  $\kappa^2$ . Тогда получим

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = c_4 \psi(\beta) \frac{U(l)\kappa}{l} - \lambda \kappa^2, \quad (6.31)$$

где  $\lambda$  не зависит от  $\kappa$ .

Чтобы выяснить, от каких параметров зависит величина  $\lambda$ , рассмотрим механизм, стабилизирующий рост амплитуды возмущений. Один из возможных механизмов, связанный с образованием угловых точек, указан Зельдовичем [1966]. Эти точки ( $B_1, B_2, \dots$  на рис. 6.9) образуются в той части зоны горения, которая примыкает к продуктам сгорания. Существование таких точек (линий излома в трехмерном случае) отчетливо видно на теневых фотографиях пламени, приведенных Палм-Лейсом и Стреловым [1969]. Проиллюстрируем важную роль этого механизма на примере распространения в среднем плоского пламени в среде, которая все время остается неподвижной. Будем предполагать, что 1) первоначальное положение пламени описывается однозначной, гладкой функцией; 2) каждая точка пламени движется по нормали к его поверхности с одной и той же скоростью.

Эта задача анализировалась Кузнецовым [1975], Вилюновым и Диком [1975]. В первой работе из точного решения показано, что есть два периода эволюции пламени. В течение первого периода его поверхность остается гладкой, а средняя площадь пламени неизменна. Во втором периоде появляются угловые точки, а средняя поверхность пламени начинает уменьшаться.

Рассматриваемый механизм носит чисто геометрический характер, и, следовательно, можно предположить, что скорость уменьшения поверхности пламени, определяемая величиной  $\lambda$ , не зависит от  $\beta$ . При  $l \gg l_{cr}$  в число определяющих параметров не входит и коэффициент молекулярного переноса (величина  $a$  характеризует мелкомасштабные возмущения, которые слабо взаимодействуют с крупномасштабными флуктуациями). Следовательно,  $\lambda$  зависит лишь от  $l$  и  $U(l)$ . Тогда из соображений размерности заключаем, что  $\lambda \sim U(l)$ , т.е. (6.31) приобретает вид

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = c_4 \psi(\beta) \frac{U(l)\kappa}{l} - c_5 U(l)\kappa^2,$$

где  $c_5$  — некоторая постоянная. Стационарное решение этого уравнения есть  $\kappa = c_3 \psi/l$  ( $c_3 = c_4/c_5$ ), и поскольку  $\kappa = u_n^{-1} \partial U/\partial l$ , то  $U = c_3 \psi u_n \ln l + \text{const}$ . Сравнивая эту формулу с соотношением (6.29), заключаем, что  $\Phi = \psi$ , т.е.

$$U(l) = c_3 \psi(\beta) \ln \frac{u_n l}{c_1 a^{(0)} \beta} + c_2 u_n. \quad (6.32)$$

Формула (6.32), выведенная для в среднем плоского фронта пламени, справедлива и в общем случае, если  $l \ll L_m$ , а энергия турбулентности

в свежей смеси достаточно мала. Отсюда можно предположить, что соотношение (6.32) дает правильный порядок величины  $U(l)$  и при  $l \sim L_m$ . Тогда из второй формулы в (6.25) получаем оценку

$$u_l \sim c_3 \psi(\beta) u_n \ln \frac{u_n L_m}{c_1 a^{(0)} \beta}, \quad (6.33)$$

где  $L_m$  — максимальный масштаб возмущений (см. § 6.4). Поскольку соотношение (6.32) справедливо при  $l \gg l_{cr}$ , то здесь и далее не учитывается малое слагаемое  $c_2 u_n$ .

Рассмотрим теперь характеристики генерированной пламенем турбулентности. Введем условно осредненную структурную функцию

$$D_{uu}^{(b)}(l) = 1/3 \langle [u(x) - u(x+l)]^2 \rangle_b,$$

где нижний индекс  $b$  означает, что осреднение производится при условии, что  $\bar{W} = U$ , т.е. рассматриваются лишь те случаи, когда фронты пламени максимально плотно "упакованы" внутри куба  $\omega$ . Функция  $D_{uu}^{(b)}$  характеризует тот вклад, который вносят в энергию турбулентности пульсации скорости, масштаб которых не превышает  $l$ . Легко видеть, что  $D_{uu}^{(b)}(\infty) \sim (u^{(b)})^2$ , поскольку флуктуации скорости в двух бесконечно удаленных точках статистически независимы. Ввиду отсутствия других параметров с размерностью скорости \*) можно предположить, что  $D_{uu}^{(b)} \sim U^2$  при  $l \gg l_{cr}$ , т.е.

$$D_{uu}^{(b)} = c_6 u_n^2 \psi^2(\beta) \ln^2 \frac{u_n l}{c_1 a^{(0)} \beta}. \quad (6.34)$$

Так же, как и формула (6.33), соотношение (6.34) справедливо при  $l_{cr} \ll l \ll L_m$ , а при  $l_{cr} < l < L_m$  оно дает правильный порядок значений структурной функции (здесь, разумеется, предполагается, что в свежей смеси энергия турбулентности достаточно мала). Из (6.34) видно, что при  $l \ll L_m$  структура генерированной пламенем турбулентности статистически однородна и изотропна.

Формулы (6.32) — (6.34) получены Кузнецовым [1980]. Следуя этой работе, рассмотрим теперь, как влияет неустойчивость пламени на горение в потоке с произвольной начальной энергией турбулентности. С этой целью сравним величину  $D_{uu}^{(b)}$  со структурной функцией пульсаций скорости в набегающем на пламя потоке  $D_{uu}^{(0)} = 1/3 \langle [u(x) - u(x+l)]^2 \rangle$ . Ясно, что если при некотором  $l$  выполняется условие  $D_{uu}^{(b)}(l) \gg D_{uu}^{(0)}(l)$ , то неустойчивость пламени существенно влияет на возмущения с рассматриваемым масштабом.

Сравнивая обе структурные функции, следует иметь в виду, что горение обычно происходит в ограниченном объеме, в силу чего масштаб возмущений пламени всегда ограничен. Например, при горении в трубе этот масштаб не может быть больше ее диаметра. Отметим также, что в турбулентных течениях интегральный масштаб турбулентности всегда порядка характерного

\*) Величина  $u_n$  не может быть определяющим параметром, поскольку она характеризует лишь те возмущения пламени и, следовательно, те возмущения скорости, масштаб которых сопоставим с  $l_{cr}$ .

размера системы, т.е.  $L \sim L_m$ . Поэтому из определения структурной функции вытекают оценки  $D_{uu}^{(b)}(L_m) \sim (u^{(b)})^2$ ,  $D_{uu}^{(b)}(L_m) \sim (u^{(0)})^2$  \*) ( $u^{(0)}$  — пульсационная скорость в набегающем на пламя потоке).

Из сравнения величин  $u^{(b)}$  и  $u^{(0)}$  вытекает критерий

$$\mu = \frac{u^{(b)}}{u^{(0)}} = \frac{u_n}{u^{(0)}} \psi(\beta) \ln \frac{u_n L_m}{c_1 a^{(0)} \beta}. \quad (6.35)$$

Как отмечалось в конце § 6.2, процесс горения описывается критериями  $\beta$ ,  $K$ ,  $a^{(0)}/(u_n L)$ , где  $K$  дается формулой (6.10). Обычно  $\beta$  меняется не слишком сильно ( $\beta = 5 - 8$ ), и поэтому будем считать  $\beta = \text{const}$ . Учтем также, что  $L \sim L_m$ . Тогда из (6.10), (6.35) следует, что вместо величин  $a^{(0)}/(u_n L)$  и  $K$  можно выбрать другую систему независимых критериев:  $\mu$  и  $K$ . Наибольший практический интерес представляет исследование лишь такой независимой вариации  $\mu$  и  $K$ , при которой критерии  $u^{(0)}/u_n$  и  $u^{(0)}L/a^{(0)}$  остаются много больше единицы (разумеется, эти критерии зависят от  $\mu$  от  $K$ ). Можно показать, что при такой вариации величин  $\mu$  и  $K$  всегда выполняются условия:  $\mu \ll 1$ , если  $K \geq 1$ , и  $K \ll 1$ , если  $\mu \geq 1$ . Следовательно, необходимо изучить только три случая: 1)  $\mu \geq 1$ ,  $K \ll 1$ ; 2)  $\mu \ll 1$ ,  $K \ll 1$ ; 3)  $\mu \ll 1$ ,  $K > 1$ . Поставленная задача решается путем сопоставления зависимостей  $D_{uu}^{(0)}(l)$  и  $D_{uu}^{(b)}(l)$ , где формула (6.34) по-прежнему считается справедливой.

Рассмотрим первый случай. По определению величины  $\mu$  справедливо условие  $D_{uu}^{(0)}(L_m) \ll D_{uu}^{(b)}(L_m)$ . Аналогичное условие  $D_{uu}^{(0)}(l) \ll D_{uu}^{(b)}(l)$  выполняется при  $l < L_m$ , так как при вариации  $l$  функция  $D_{uu}^{(b)}(l)$  изменяется гораздо слабее, чем  $D_{uu}^{(0)}(l)$ . Например, из (6.34) имеем  $D_{uu}^{(b)} \sim \ln^2 l$ , а из теории Колмогорова [1941] заключаем, что  $D_{uu}^{(0)} \sim l^{2/3}$  (рис. 6.12, а). Отсюда вытекает, что неустойчивость пламени существенно влияет на весь спектр турбулентности в зоне горения, а турбулентность в набегающем потоке не существенна, т.е. справедливы все результаты проведенного выше анализа.

Рассмотрим другой крайний случай ( $\mu \ll 1$ ,  $K > 1$ ). Из определения критерия  $K$  следует, что при  $K > 1$  справедливы следующие оценки:  $\eta < \delta_n$ ,  $v^2 \sim D_{uu}^{(0)}(\eta) > u_n^2 (\delta_n - \text{толщина нормального фронта пламени, } \eta - \text{колмогоровский масштаб, } v - \text{колмогоровская скорость})$ . С увеличением  $K$  эти оценки усиливаются. С другой стороны, из (6.34) вытекает, что  $D_{uu}^{(b)}(l) \sim u_n^2$ , если  $l \sim l_{cr}$  (но  $l > l_{cr}$ ). Так как  $l_{cr} \sim \delta_n$ , то  $D_{uu}^{(b)}(l) < D_{uu}^{(0)}(l)$  при  $l \sim l_{cr}$  (но  $l > l_{cr}$ ). Как видно из рис. 6.12, в, эта оценка усиливается с увеличением  $l$  ( $D_{uu}^{(b)}$  растет медленнее, чем  $D_{uu}^{(0)}$ ). Таким образом, неустойчивость пламени не играет роли во всем спектре турбулентности.

Наконец, в промежуточном случае ( $\mu \ll 1$ ,  $K \ll 1$ ) из определения критерия  $\mu$  видим, что неустойчивость пламени не играет роли в крупномасштабной части спектра ( $l \sim L_m$ ). В мелкомасштабной части спектра эта роль

\*) Напомним, что если в двух точках пульсации скорости статистически независимы, то  $D_{uu}^{(0)} = 2(u^{(0)})^2$ . Это равенство, строго справедливое при  $L \rightarrow \infty$ , можно использовать для приближенной оценки  $u^{(0)}$ , если расстояние между точками порядка интегрального масштаба.

может быть велика, так как при  $l \rightarrow l_{cr}$  функция  $D_{uu}^{(b)}$  уменьшается медленнее, чем  $D_{uu}^{(0)}$  (рис. 6.12, б). Граница между обеими областями определяется условием  $l = l_m$ , где  $l_m$  – корень уравнения  $D_{uu}^{(0)}(l_m) = D_{uu}^{(b)}(l_m)$ .

Таким образом, при  $K \leq 1$  неустойчивость пламени может играть важную роль. Существенно, что в этом случае характеристики процесса зависят от линейного масштаба системы. Действительно, из (6.35) вытекает,

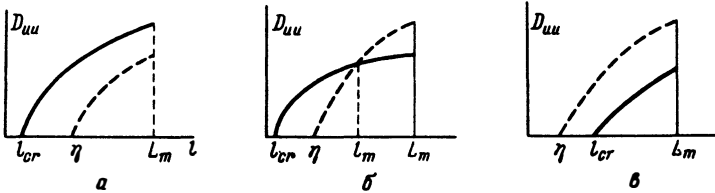


Рис. 6.12. Качественный характер зависимостей структурных функций от расстояния. а)  $\mu \gg 1$ ,  $K \ll 1$ ; б)  $\mu \sim 1$ ,  $K \ll 1$ ; в)  $\mu \ll 1$ ,  $K \geq 1$ : во всех трех случаях сплошная линия –  $D_{uu}^{(b)}$ , штриховая линия –  $D_{uu}^{(0)}$

что энергия турбулентности в зоне горения стремится к бесконечности, если величина  $L_m/\delta_n$ , фигурирующая под знаком логарифма в (6.35), неограниченно растет. Темп такого увеличения, однако, очень слабый, и поэтому рассматриваемый эффект долгое время не учитывался в теории турбулентного горения и в известных теориях автотурбуликации пламени. Например, в работах Карловица, Деннистона и Уэллса [1951], Козаченко [1960], Кузина и Талантова [1977] получены соотношения, из которых вытекает, что отношение энергий турбулентности в зоне горения и в набегающем потоке есть величина, которая зависит только от  $\beta$  и не зависит от масштаба системы.

### § 6.6. Критериальное описание турбулентного горения однородной смеси

Как показали оценки, проведенные в § 6.2, основная часть экспериментальных исследований (например, Талантова с сотрудниками) проведена при  $K < 1$ , т.е. когда неустойчивость пламени может играть важную роль. Именно эта часть исследований рассматривается в данном параграфе. Отметим, что помимо неустойчивости пламени важное значение могут иметь и другие газодинамические эффекты. Поэтому, прежде чем приступить к анализу опытных данных, полезно рассмотреть уравнение для энергии турбулентности в потоке с переменной плотностью (Монин и Яглом [1965]). В стационарном потоке в отсутствие массовых сил при больших числах Рейнольдса это уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ e \langle u_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \rho u'_k u_s'^2 \rangle + \langle p' u'_k \rangle \right] = - \langle \rho \rangle \langle \epsilon \rangle + \left\langle p' \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right\rangle - \langle \rho u'_k u'_s \rangle \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_s} + \langle \rho u'_k \rangle \langle u_s \rangle \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_s}, \quad (6.36)$$

где  $e = \frac{1}{2} \langle \rho u_k'^2 \rangle$  – энергия турбулентности,  $p' = p - \langle p \rangle$ ,  $u' = u - \langle u \rangle$ .

Три слагаемых, которые фигурируют в левой части (6.36), характеризуют конвекцию и турбулентную диффузию; они лишь перераспределяют энергию турбулентности внутри зоны горения, не меняя полной энергии пульсационного движения. Первое слагаемое в правой части описывает вязкую диссипацию, второе — дает работу, которую совершают пульсации давления при расширении или сжатии среды. Третье и четвертое слагаемые характеризуют взаимодействие пульсационного и осредненного движения.

Для в среднем плоского пламени в неограниченном потоке третье и четвертое слагаемое обуславливают уменьшение энергии турбулентности в пламени (Либрович и Лисицын [1975], Брэй и Либби [1976], Либби и Брэй [1981]). Этот вывод качественно ясен из теории быстрой безвихревой деформации сжимаемой жидкости (Рибнер и Таккер [1953]; см. также Иевлев [1975], Сабельников [1975]). Приведенные в этих работах соотношения показывают, что при быстром расширении среды энергия пульсаций уменьшается. Если же рассматривается горение однородной смеси в трубе, то возникает еще один эффект, обусловленный тем, что из-за градиента давления жидкости с разной плотностью (свежая смесь и продукты сгорания) ускоряются по-разному. Это обстоятельство приводит к увеличению сдвига средней скорости, что обуславливает возрастание энергии турбулентности (см. главу 5).

Таким образом, если рассмотреть в среднем плоское пламя, которое распространяется в неограниченном потоке, то лишь корреляция пульсаций давления и дивергенции скорости может обуславливать увеличение энергии турбулентности при горении. Следовательно, из теории, развитой в § 6.5, вытекает, что именно эта корреляция характеризует роль неустойчивости пламени.

Величина  $\langle p' \operatorname{div} u' \rangle$  играет особую роль в уравнении энергии, что вытекает из следующих соображений. Во-первых, в дозвуковых течениях она существенна лишь при горении однородной смеси. Этот вывод получен в работе Кузнецова [1979а], в которой показано, что 1)  $\langle p' \operatorname{div} u' \rangle = 0$  при неизотермическом смешении в отсутствие реакции; 2)  $\langle p' \operatorname{div} u' \rangle / (\langle \rho \rangle \langle \epsilon \rangle) \sim 10^{-2}$  при диффузионном горении; 3)  $\langle p' \operatorname{div} u' \rangle / (\langle \rho \rangle \langle \epsilon \rangle) \sim 1$  при горении однородной смеси. Во-вторых, из сравнения (6.35) и (6.36) можно предположить, что именно из-за коррелированности пульсаций давления и дивергенции скорости энергия турбулентности в зоне горения стремится к бесконечности, если  $L/l_{cr} \rightarrow \infty$ .

Имея в виду указанные соображения, перейдем к анализу экспериментальных данных. Рассмотрим сначала опыты, в которых с помощью лазерного доплеровского анемометра непосредственно измерялись характеристики турбулентности в зоне горения. В уже обсуждавшейся работе Баллала [1979] установлено, что во всех исследованных режимах энергия турбулентности в зоне горения выше, чем в набегающем потоке (рис. 6.11, а, б). Как уже отмечалось, в этих опытах влияние среднего градиента давления исключалось, и поэтому дополнительный сдвиг средней скорости не возникал. Из рис. 6.11, а видно, что если энергия возмущений в свежей смеси мала ( $u^{(0)} < 2u_n$ ), то возрастание их масштаба приводит к увеличению пульсационной скорости в зоне горения. Этот вывод согласуется с формулой (6.35). Уменьшение энергии турбулент-



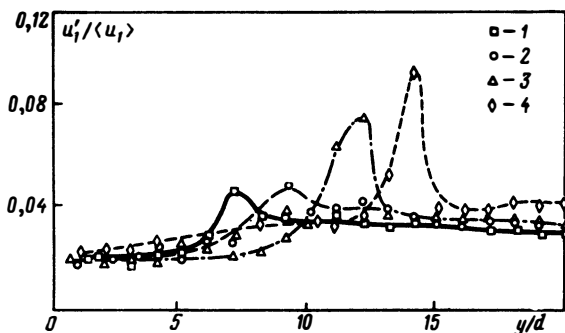


Рис. 6.13. Профили среднеквадратических пульсаций продольной скорости при горении однородной смеси этилена с воздухом за турбулизирующей решеткой в канале по данным Билла, Неймера и Талбота [1981]. Условия опытов те же, что и на рис. 1.23.  $l - x_1 = 7$  см,  $2 - x_1 = 7,5$  см,  $3 - x_1 = 8$  см,  $4 - x_1 = 8,5$  см,  $x_1$  — расстояние от решетки вниз по потоку,  $u'_1 = \sqrt{\langle (u_1 - \langle u_1 \rangle)^2 \rangle}$ ,  $\langle u_1 \rangle$  — скорость потока за решеткой

ности, видное из рис. 6.11,  $b(u^{(0)} > 2u_n)$ , как будет показано в § 6.8, не противоречит развитой теории. Количественное сопоставление теории и эксперимента в данном случае, к сожалению, невозможно, так как максимальное значение масштаба турбулентности  $L$  лишь в три раза превышало величину  $l_{cr}$ , а условие применимости формулы (6.35) имеет вид  $\ln(L/l_{cr}) \geq 1$ .

Увеличение энергии турбулентности в зоне горения зарегистрировано также в работах Билла, Неймера и Талбота [1981], Ченга и Нг [1983]. В обоих опытах начальные условия примерно одинаковы (в однородном турбулентном потоке располагается тонкая проволочка, стабилизирующая пламя). Результаты, полученные в первой работе, изображены на рис. 6.13. Видно, что энергия турбулентности в пламени увеличивается.

Во второй работе вне зоны горения интенсивность турбулентности составляла 5%. При этом максимальная зарегистрированная интенсивность пульсаций в зоне горения составляла: для поперечной компоненты скорости 16%, для продольной 10%, т.е. энергия турбулентности возрастала почти на порядок. Еще более интересные результаты получены при измерении напряжений Рейнольдса, а именно установлено, что турбулентная вязкость в каждой точке отрицательна, т.е. энергия пульсаций переходит в осредненное движение (и, следовательно, возрастание энергии может быть обусловлено только неустойчивостью пламени, т.е. корреляцией  $\langle p' \operatorname{div} u' \rangle$ ). Если эти результаты будут подтверждены дальнейшими экспериментальными исследованиями, то необходимо кардинальное изменение принципов построения полуэмпирических теорий турбулентности, которые используются при описании горения однородной смеси.

Рассмотрим теперь результаты измерений скорости распространения турбулентного пламени. В ряде экспериментов установлено, что  $u_t$  намного превышает  $u^{(0)}$ . Примером могут служить уже упоминавшиеся опыты Сузуки, Оба, Хирано и Суджи [1979] (рис. 6.4). Формула (6.33) позволяет правильно оценить порядок значений  $u_t$  в этих опытах. Заметим, что в (6.33) входят две эмпирические постоянные  $c_1$  и  $c_3$ . Первая определяется

формулой (6.12), а значение второй неизвестно. В теории, построенной с привлечением соображений размерности, значения эмпирических постоянных должны быть порядка единицы (при условии, что теория построена правильно). Поэтому естественно предположить, что  $c_3 = 1$ . Тогда в условиях анализируемых опытов ( $u_n = 40$  см/с,  $\beta = 7,6$ ,  $a^{(0)} = 0,2$  см<sup>2</sup>/с,  $L_m = d/2$ , где  $d$  – диаметр горелки) из (6.33) получаем  $u_r = 2,3$  м/с, что хорошо согласуется с результатами измерений ( $u_r = 2,2$  м/с при  $u^{(0)} = 28$  см/с).

Чтобы проанализировать результаты других опытов, в которых измерялась скорость распространения турбулентного пламени  $u_r$ , напомним, что, как установлено в § 6.5, развитие возмущений с размером  $l \leq l_m$  определяется неустойчивостью пламени и при  $l \ll l_m$  вклад этих возмущений в скорость распространения пламени дается формулой (6.32) ( $l_m$  – корень уравнения  $D_{uu}^{(b)}(l_m) = D_{uu}^{(0)}(l_m)$ , где  $D_{uu}^{(b)}$  дается формулой (6.34), а  $D_{uu}^{(0)}$  – структурная функция пульсаций скорости в набегающем потоке). Неустойчивость пламени не влияет на крупномасштабные ( $l > l_m$ ) возмущения пламени.

Отсюда можно сравнительно просто оценить влияние неустойчивости пламени на процесс горения при  $K \lesssim 1$ . Для этого воспользуемся процедурой, описанной в § 6.3, а именно на поверхности пламени сгладим все возмущения с масштабом  $l_m$  и меньше. Очевидно, что удельная скорость переработки вещества на частично сглаженной поверхности пламени равна  $U(l_m)$ , где  $U(l_m)$  дается формулой (6.32). Ясно, что характеристики частично сглаженной поверхности пламени не могут непосредственно зависеть ни от  $u_n$ , ни от толщины нормального фронта пламени. По определению этой поверхности неустойчивость пламени также не может непосредственно воздействовать на ее характеристики. Влияние перечисленных выше факторов описывается единственной величиной  $U(l_m)$ .

Таким образом, анализируя влияние крупномасштабных возмущений ( $l > l_m$ ) на движение частично сглаженной поверхности пламени, приходим к постановке задачи, известной из теории фронтального горения. Единственное различие состоит в том, что скорость нормального распространения пламени  $u_n$  следует заменить на существенно большую величину  $U(l_m)$ , а из спектра турбулентности необходимо исключить все возмущения с масштабами меньше  $l_m$ . При  $l_m \ll L$  энергия таких возмущений много меньше энергии турбулентности  $(u^{(0)})^2$ . Поэтому так же, как и в теории фронтального горения, величина  $u_r$  зависит лишь от  $\beta$  и двух параметров  $u^{(0)}$  и  $U(l_m)$ , т.е. получим формулу  $u_r = u^{(0)} \varphi[\beta, u^{(0)}/U(l_m)]$ , аналогичную формуле (6.8). С практической точки зрения критерий  $u^{(0)}/U(l_m)$  неудобен. Поэтому целесообразно использовать эквивалентный критерий  $\mu$ . Можно предположить, что при  $K \lesssim 1$  и скорость распространения турбулентного пламени описывается формулой (Кузнецов [19826])

$$u_r = u^{(0)} F(\mu), \quad \mu = \frac{u_n}{u^{(0)}} \psi(\beta) \ln \frac{u_n L_m}{c_1 a^{(0)} \beta}, \quad (6.37)$$

где  $L_m$  – максимальный масштаб возмущений.

Найдем вид этой функции в двух предельных случаях:  $\mu \gg 1$  и  $\mu \ll 1$ . В первом случае неустойчивость пламени играет определяющую роль во

всех областях спектра турбулентности. Поэтому величина  $u_t$  дается формулой (6.33), из которой следует, что  $F = \text{const} \cdot \mu$  при  $\mu \gg 1$ . Проанализируем теперь другой случай  $\mu \ll 1$ , т.е. когда неустойчивость пламени не влияет на энергию турбулентности. Чтобы выяснить вид функции  $F(\mu)$ , рассмотрим конкретный пример — горение однородной смеси в следе за стабилизатором пламени. Как уже отмечалось в главе 1, одной из наиболее характерных черт такого течения является перемежаемость, т.е. колебания границ между турбулентной и нетурбулентной жидкостями. В нетурбулентной жидкости энергия турбулентности мала, а обмен между обеими жидкостями носит односторонний характер (жидкие частицы не могут выходить из турбулентной жидкости). Поскольку вне границ турбулентной жидкости пульсационная скорость быстро затухает, то пламя не может выйти за эти границы.

Легко также видеть, что при  $K \leq 1$  пламя стремится приблизиться к границе турбулентной жидкости. Действительно, из (3.108) вытекает, что скорость среды относительно границы порядка  $(\langle \epsilon \rangle \nu)^{1/4}$ . Если  $K \leq 1$ , то эта скорость меньше скорости движения пламени относительно среды  $u_n$ . Отсюда и следует сделанное утверждение. Таким образом, при  $K \leq 1$  граница турбулентной жидкости одновременно является и фронтом пламени (Кузнецов [19826]).

Отсюда ясно, что при  $K \leq 1$  и  $\mu \ll 1$  все вещество, поступившее в след, сгорает. Поскольку скорость расширения следа порядка пульсационной скорости, то  $u_t \sim u^{(0)}$ , т.е.  $F$  не зависит от  $\mu$  при  $\mu \ll 1$  и  $K \leq 1$ .

Этот вывод, разумеется, справедлив и при  $\mu \gg 1$ , когда неустойчивость пламени существенна. Но в этом случае пульсационная скорость неизвестна.

Сделанные выводы подтверждаются при обработке экспериментальных данных Талантова с сотрудниками (условия этих опытов и соответствующая литература указаны в § 6.1). В рассматриваемых опытах режимные параметры варьировались в очень широком диапазоне значений:  $\alpha^{(0)} = 0,8-1,4$ ,  $T^{(0)} = 393-793$  К,  $p = 0,04-0,45$  МПа,  $d = 2,5-15$  см,  $\langle u_1 \rangle = 30-140$  м/с. При обработке предполагалось, что  $L_m = d/2$ ,  $a^{(0)} = 0,2$  см<sup>2</sup>/с при  $T^{(0)} = 300$  К и  $p = 0,1$  МПа,  $a^{(0)} \sim [T^{(0)}]^2/p$ . При расчете  $u^{(0)}$  использовалась формула (6.11). Учитывалось изменение состава в лидирующих точках, т.е. в соответствии с формулой (6.19) считалось, что  $\alpha^{(b)} = 1,4\alpha^{(0)}$  ( $\alpha^{(b)} > 1$ ). Результаты расчета  $u_n(\alpha^{(b)})$  для одного из режимов изображены на рис. 6.1 в виде кривой 2. Для режимов, в которых варьировались  $T^{(0)}$  и  $p$ , при расчете  $u_n$  использовалась формула (6.4).

Результаты обработки экспериментальных данных изображены на рис. 6.14. Видно, что экспериментальные точки группируются вокруг единой кривой, которая соответствует интерполяционной формуле  $u_t = u^{(0)}(c_7 + c_3\mu)$ , правильно описывающей зависимость  $u_t$  от  $\mu$  в двух предельных случаях:  $\mu \gg 1$  и  $\mu \ll 1$ . Эмпирические постоянные  $c_7$  и  $c_3$  порядка единицы ( $c_3 = 1$ ,  $c_7 = 1,4$ ). Таким образом, критерий  $\mu$  позволяет обобщать экспериментальные данные, полученные при сильной вариации определяющих параметров, а теория правильно описывает вид критериальной зависимости в предельных случаях.

Проанализируем теперь коротко влияние различных параметров на величину  $u_t$ . Влияние энергии турбулентности в свежей смеси и начальной

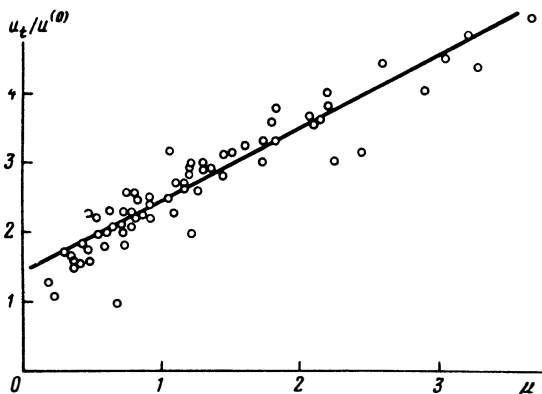


Рис. 6.14. Кривая серийная обработка результатов измерений скорости распространения турбулентного пламени в опытах, описанных в книге Талантова [1975].  $\mu = (u_n/u^{(0)}) \Psi(\beta) \ln((u_n L_m)/(c, a^{(0)} \beta))$

температуры совершенно очевидно и не требует специальных комментариев. Ясно также, что особенности влияния состава на  $u_t$  обусловлены различиями в коэффициентах молекулярного переноса. Результаты, полученные в § 6.3, позволяют найти коэффициент избытка воздуха, при котором  $u_t$  максимально. Увеличение масштаба турбулентности обуславливает возрастание  $u_t$ , что связано с усилением роли неустойчивости пламени и турбулизацией потока. Весьма нетривиальным оказывается влияние давления. Легко видеть, что величина  $U(L_m)$  при увеличении давления сначала возрастает, а затем уменьшается. Такая зависимость обусловлена взаимодействием двух конкурирующих факторов. С одной стороны, с ростом давления увеличивается роль неустойчивости пламени ( $l_{cr}$  уменьшается), что приводит к увеличению его поверхности. С другой – с ростом давления уменьшается  $u_n$ , т.е. уменьшается удельная скорость переработки вещества на этой поверхности. Оценки показывают, что максимум достигается при весьма значительных давлениях. Так, например, при  $\alpha^{(0)} = 1$ ,  $T^{(0)} = 373$  К, в трубе диаметром 5 см для бензино-воздушной смеси максимальное значение  $U(L_m)$  и, следовательно,  $u_t$  достигается при давлении 0,6 МПа. Результаты опытов при столь больших давлениях неизвестны. Поэтому во всех экспериментах с увеличением давления скорость распространения пламени растет.

### § 6.7. Предельно возможная интенсивность процесса турбулентного горения однородной смеси

В данном параграфе рассматривается горение однородной смеси, характеризующееся условием  $K \geq 1$  (см. формулу (6.10)), т.е. предполагается, что толщина нормального пламени  $\delta_n$  больше, чем наименьший (колмогоровский) масштаб турбулентности  $\eta = \nu^{3/4} \langle \epsilon \rangle^{-1/4}$ . С практической точки зрения интерес представляет изучение горения в устройствах достаточно большого размера, в которых интегральный масштаб турбулентности много

больше  $\delta_n$ . Поскольку числа Рейнольдса обычно очень велики, то это означает, что рассматриваемый случай реализуется в таких устройствах, в которых энергия турбулентности принимает большие значения. Так как интенсивность турбулентности  $u^{(0)} / \langle u_1 \rangle$ , как правило, меняется в не слишком широких пределах, то тем самым рассматривается горение при больших расходах свежей смеси. Анализ такого режима представляет значительный практический интерес в связи с вопросом о предельно возможной теплонапряженности процесса горения.

Напомним, что при  $K \geq 1$  неустойчивость пламени практически не влияет на спектр турбулентности. Поэтому указанная в § 6.2 система трех определяющих критериев должна быть пересмотрена. Строго говоря, зависимость от критерия  $\beta$  сохраняется и в рассматриваемом случае, так как, помимо неустойчивости пламени, важную роль могут играть и другие газодинамические эффекты, указанные в § 6.6. Эти эффекты существуют и в диффузионном пламени, и, как ясно из § 5.1, их влияние описывается только величиной  $\beta$ . Таким образом, они не зависят от масштабных факторов, т.е. от величины  $L_m / \delta_n$ , фигурирующей в определении критерия  $\mu$  (6.35). Следовательно, при  $L_m / \delta_n \rightarrow \infty$  и  $K > 1$  энергия турбулентности в зоне горения не может стремиться к бесконечности, т.е. при  $K > 1$  газодинамические эффекты не меняют гидродинамическую структуру потока принципиальным образом. Таким образом, в рамках приближенной теории зависимость от критерия  $\beta$  может не учитываться. В соответствии с этим далее не делается различий между пульсационной скоростью в свежей смеси и в продуктах сгорания, а величины  $u^{(0)}$  и  $u^{(b)}$  обозначаются единым символом  $u$ . Следовательно, существенны два критерия  $M_i$  и  $K$ , определения которых даны соответственно в (6.6) и (6.10).

Чтобы проиллюстрировать особенности режимов, в которых  $K > 1$ , вернемся к анализу горения в следе за стабилизатором. В § 6.6 было показано, что при  $K \lesssim 1$  фронт пламени находится вблизи границы турбулентной жидкости. При  $K > 1$  скорость движения этой границы относительно среды, т.е. колмогоровская скорость, становится больше  $u_n$  (критерий  $K$  пропорционален отношению квадратов этих скоростей). Поэтому несгоревшая смесь "вторгается" в след. Такое вторжение происходит не повсеместно, так как скорость движения границы турбулентной жидкости — случайная величина. Тем не менее угол наклона осредненной изотермы становится меньше угла расширения следа.

Рассмотрим, что произойдет при увеличении критерия  $K$ . Очевидно, угол расширения следа останется неизменным. Среднее значение скорости движения границы турбулентной жидкости будет увеличиваться по сравнению с  $u_n$ . Следовательно, расход несгоревшей свежей смеси, проникающей через эти границы, увеличится, а угол наклона осредненной изотермы уменьшится. Это означает, что с увеличением  $u$  скорость распространения турбулентного пламени уже не может изменяться пропорционально пульсационной скорости, т.е.  $u_1 / u \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \infty$ .

Можно предположить, что эта особенность носит общий характер. В самом деле, как уже указывалось в главе 1, перемежаемость является общим свойством всех турбулентных потоков, т.е. турбулентность всегда

состоит из отдельных "кусков" завихренной и потенциальной жидкостей. Поэтому соображения, использованные при анализе горения в следе за стабилизатором, справедливы и при анализе горения в каждом "куске" завихренной жидкости. Следовательно, можно предположить, что если смесь подождена внутри отдельного "куска" завихренной жидкости, то при  $K \leq 1$  фронт пламени приближается к границам этого "куска". Если же  $K \geq 1$ , то пламя будет оттесняться от этих границ в глубь турбулентной жидкости. Это обстоятельство должно препятствовать распространению пламени.

Сделанный вывод наглядно иллюстрируется опытами Карпова и Северина [1977]. Из рис. 6.2 видно, что существуют два режима горения. В первом ( $u < u_{cr}$ ) скорость горения пропорциональна  $u$ . Во втором ( $u > u_{cr}$ ) с увеличением пульсационной скорости скорость горения либо не меняется, либо даже уменьшается с увеличением  $u$ . Граница между обоими режимами прослеживается вполне четко (на рис. 6.2 ординаты точек  $u = u_{cr}$  обозначены вертикальными штриховыми линиями). Несложные оценки показывают, что смена режимов горения в этих опытах с точностью 20% происходит при  $K \approx 1$ . В таких оценках считалось, что  $\langle \epsilon \rangle = u^3/L$ ,  $\nu^{(0)} = a^{(0)}$ , учитывались различия между коэффициентами молекулярного переноса, т.е. использовались формулы (6.19), а величина  $\langle \epsilon \rangle$ , входящая в определение критерия  $K$ , рассчитывалась по величине  $u_{cr}$ . Использовалось указанное в рассматриваемой работе значение масштаба турбулентности ( $L = 1$  см).

Таким образом, при  $K \geq 1$  с увеличением пульсационной скорости теплонапряженность процесса горения не возрастает. Опыты Карпова и Северина [1977] вместе с тем показывают, что в рассматриваемом режиме процесс горения устойчив и срыва пламени не происходит (см. рис. 6.2).

Как станет ясно ниже, чтобы объяснить эту особенность горения, необходимо учесть процессы двух типов. Во-первых, следует проанализировать макроструктуру пламени (т.е. его глобальную геометрическую конфигурацию). Во-вторых, необходимо рассмотреть микроструктуру потока. В последнем случае большую роль играет внутренняя перемежаемость турбулентности. Важная роль внутренней перемежаемости турбулентности в процессе турбулентного горения, по-видимому, впервые подчеркивалась в работах Хомяка [1970, 1979].

Для иллюстрации роли конфигурации пламени рассмотрим сначала в среднем плоскую зону горения, распространяющуюся в неограниченном потоке с произвольными характеристиками турбулентности. Следуя работе Кузнецова и Сабельникова [1977], покажем, что зона реакции, вообще говоря, является непрерывной поверхностью.

Согласно традиционной для теории горения постановке задачи примем, что  $a = D_o = D_f$ . В этом случае скорость тепловыделения  $W$  зависит лишь от безразмерной температуры. Эта зависимость, очевидно, непрерывна, и величина  $W$  достигает максимума при некотором значении  $c$ , скажем при  $c = c_m$ . Выберем произвольную непрерывную линию, начинающуюся в свежей смеси, т.е. в области, где  $c = 0$ , и заканчивающуюся в продуктах сгорания, т.е. в области, где  $c = 1$ . Решение уравнения теплопроводности

(2.1) – непрерывная функция координат. Поэтому вдоль рассматриваемой линии безразмерная температура непрерывно меняется от  $c = 0$  до  $c = 1$ . Следовательно, на этой линии, по крайней мере один раз, достигается значение  $c = c_m$ . В этой точке максимальная скорость тепловыделения такая же, как и в нормальном фронте пламени. Поскольку выбрана произвольная линия, то отсюда вытекает, что “дырок” в пламени нет.

Следует, однако, отметить, что, строго говоря, проведенное выше рассуждение справедливо, только если  $a = D_o = D_f$ . В противном случае  $W$  зависит от нескольких переменных. При этом температура и концентрации могут изменяться так, что вследствие теплототеря достигаются пределы распространения пламени. При горении смесей с составом, близким к стехиометрическому, эти пределы, однако, не достигаются, поскольку из формулы (6.19) вытекает, что изменение состава в зоне реакций не слишком велико. Таким образом, в среднем плоское пламя существует при любых характеристиках турбулентности, а его поверхность описывается непрерывной функцией.

Сделанные выводы опровергают точку зрения, высказанную Баллалом и Лефевром [1975]. Эндрюсом, Брэдли и Лвакавамбой [1975]. согласно которой в пламени могут образовываться “дырки”.

Заметим, что “дырки” в пламени не могут образовываться только при горении однородной смеси. При диффузионном горении скорость реакции – функция нескольких переменных и проведенный выше анализ не может быть использован.

Рассмотрим теперь случай, когда характерный размер области, занятой продуктами сгорания, ограничен. В качестве примеров приведем горение в следе за плохообтекаемым телом или уже рассмотренную в §§ 6.2. 6.3 однородную деформацию плоского слоя продуктов сгорания. Из проведенных выше рассуждений следует, что поверхность пламени также описывается непрерывной функцией. Однако само пламя существует не при всех условиях. Например, при достаточно большой скорости набегающего потока пламя срывается с плохообтекаемого тела, а при достаточно большом градиенте скорости плоский слой продуктов сгорания не существует.

Проанализируем теперь влияние мелкомасштабных пульсаций на процесс горения. В этом случае необходимо учесть, что вследствие внутренней перемежаемости энергия мелкомасштабной части спектра турбулентности в пространстве распределена крайне неоднородно (см. главы 1, 4). Отмеченные особенности указывают на то, что определение критерия (6.10) должно быть пересмотрено.

Для этой цели снова рассмотрим куб  $\omega$  с центром в точке  $x$  и стороной  $2l$ . Введем величину

$$K(l) = \frac{a^{(0)}}{u_n^2} \left[ \frac{1}{8l^3} \left( \int_{\omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d^3x \int_{\omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d^3x \right)^{1/2} \right], \quad (6.38)$$

т.е. критерий  $K$  рассчитывается по градиенту скорости, осредненному по кубу  $\omega$ . Определенная таким образом величина  $K(l)$  является случайной функцией координат и времени. Для критерия, определяемого формулой (6.10), оставим старый символ  $K$ , не указывая размер области  $\omega$ .

Выберем теперь размер  $l$ , который удовлетворяет условию  $L \gg l \gg a, u_n$ , и выделим в потоке области двух типов такие, что  $K(l) < 1$  в областях первого типа и  $K(l) > 1$  в областях второго типа. Если бы статистические характеристики мелкомасштабной части спектра турбулентности обладали обычными свойствами (например, распределение вероятностей градиента скорости близко к нормальному), то при  $K \gg 1$  области первого типа практически отсутствовали бы. Этот случай, однако, нехарактерен для турбулентности при очень больших числах Рейнольдса. Как указывалось в главах 1 и 4, распределение вероятностей модуля разности скоростей близко к логарифмически нормальному, т.е. в потоке весьма вероятны мелкомасштабные пульсации с очень большой и очень малой амплитудой. Следовательно, даже при  $K \gg 1$  в потоке найдутся достаточно протяженные области, в которых энергия турбулентности мала, т.е.  $K(l) < 1$ .

Ясно, что горение в таких областях происходит в соответствии с фронтальным механизмом, рассмотренным в предыдущих параграфах.

Проанализируем теперь, что происходит с пламенем в тех областях, в которых градиенты скорости очень велики. В приближении Зельдовича – Франк-Каменецкого зона химической реакции остается поверхностью, на которой температура постоянна (различия в коэффициентах молекулярного переноса здесь для простоты не учитываются). Очевидно, что градиент температуры на поверхности зоны реакции можно найти из решения уравнения теплопроводности, если известен закон движения этой зоны (заданы оба граничных условия – на бесконечности и на известной поверхности). Этот закон находится из дополнительного условия (6.2), которое всегда справедливо в приближении Зельдовича – Франк-Каменецкого.

Проанализируем следствие, вытекающее из такой постановки задачи. Для этого временно не будем учитывать условие (6.2). В рассматриваемой области при  $K(l) \gg 1$  на поверхности зоны реакции возникнут искривления с масштабом много больше, чем  $\delta_n \sim a/u_n$ . Это означает, что градиент температуры в зоне реакции, вообще говоря, много больше, чем значение, предсказываемое формулой (6.2), т.е. кондуктивный отвод тепла очень велик. Так как условие (6.2) выполняется, то кондуктивные потери тепла должны компенсироваться конвективным подводом. Отсюда вытекает, что зона реакции начинает двигаться относительно среды со скоростью, много большей, чем  $u_n$ . Поскольку дырки в пламени не образуются, то оно быстро вытесняется из области второго типа в область первого типа (Кузнецов [1982 б])

Существование рассматриваемого эффекта, по-видимому, продемонстрировано в опытах Хомяка и Ярославского [1982], в которых изучалось горение в вертикальной трубе. Труба заполнялась смесью, а в ее верхней части с помощью вентилятора создавалась сильно турбулированная область. Смесью поджигалась в нижней части трубы, где пульсации скорости малы. Установлено, что горение прекращается, когда пламя доходит до сильно турбулированной области.

Из проведенного анализа следует, что при  $K \gg 1$  вследствие внутренней перемежаемости фронт пламени почти все время находится в областях



первого типа, т.е. там, где  $K(l) \ll 1$ . Таким образом, горение всегда носит фронтальный характер.

Сделанный вывод косвенно подтверждается опытами, в которых исследовались условия срыва пламени в следе за плохообтекаемыми телами. Прежде чем проанализировать результаты таких опытов, найдем критерий срыва пламени. Хорошо известно, что стабилизация пламени определяется процессами, происходящими в зоне обратных токов. Характерный линейный масштаб этой зоны пропорционален поперечному размеру плохообтекаемого тела  $d$ . Тогда из проведенных выше рассуждений следует, что в зоне обратных токов пламя может существовать лишь при условии  $K(d) \ll 1$ . Поскольку интегральный масштаб турбулентности  $L$  пропорционален  $d$ , то

$$\frac{1}{d^3} \left( \int_{\omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d^3x \int_{\omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d^3x \right)^{1/2} \sim \frac{u}{L}, \quad L \sim d,$$

где  $\omega$  – куб со стороной  $d/2$ . Тогда из (6.38) получаем, что  $K(d) \sim Mi$ , где критерий  $Mi$  дается формулой (6.6). Таким образом, условие срыва пламени имеет вид  $Mi \sim 1^*$ .

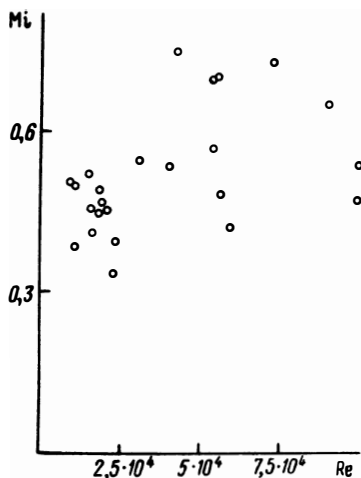
Это условие впервые получено Дунским при обработке экспериментальных данных (изложение результатов его работы содержится в книгах Щетинкова [1965], Раушенбаха и др. [1964]). Оно также использовалось в работах Баева и Третьякова [1977] и Климова [1977б] для описания срыва пламени в следе за плохообтекаемыми телами. Во всех этих работах в определение критерия  $Mi$  входили не пульсационная скорость  $u$  и масштаб турбулентности  $L$ , а соответственно величины  $\langle u_1 \rangle$  и  $d$  ( $\langle u_1 \rangle$  – скорость набегающей смеси). Так как  $u \sim \langle u_1 \rangle$ ,  $L \sim d$ , то указанное различие принципиально.

Дунским было установлено, что при срыве пламени значения критерия  $Mi$  могут сильно различаться, в особенности, если сравниваются режимы, в которых исследуется горение богатых и бедных смесей с одинаковыми  $u_n$ . Отмеченный недостаток был устранен в работах Баева и Третьякова [1968, 1972, 1977]. В этих работах комплекс  $a/u_n^2 = \tau_c$ , входящий в определение критерия  $Mi$  (6.6), находился из опытов, в которых измерялся критический градиент скорости при проскоке ламинарного пламени в трубку. Как уже отмечалось в § 6.2, в таких опытах проявляются эффекты, обусловленные различиями в коэффициентах молекулярного переноса. Баевым и Третьяковым [1972, 1977] показано, что использование  $\tau_c$  позволяет значительно лучше обобщать экспериментальные данные. Отсюда ясно, что влияние различий в коэффициентах молекулярного переноса проявляется и при срыве пламени. Существенное влияние этого эффекта на стабилизацию пламени, по-видимому, впервые было указано в работе Зукоского и Марбла [1955].

Для иллюстрации рассмотрим два значения коэффициента избытка воздуха в исходной смеси  $\alpha_1^{(0)} < \alpha_2^{(0)}$  такие, что  $u_n(\alpha_1^{(0)}) = u_n(\alpha_2^{(0)})$ , и сравним средние скорости свежей смеси  $u_0(\alpha_1^{(0)})$  и  $u_0(\alpha_2^{(0)})$  при срыве пламени в следе за стабилизатором. Известно, что  $u_0(\alpha_1^{(0)}) > u_0(\alpha_2^{(0)})$

\* Напомним, что  $K > 1$  при  $Mi \sim 1$  и большом числе Рейнольдса.

Рис. 6.15. Критериальная обработка результатов измерений процесса стабилизации пламени за плохообтекаемыми телами, проведенных Дунским (эти результаты приведены в книгах Раушенбаха и др [1974] и Щетинкова [1965]).  $Mi = ua^{(0)}/(du_n^{(0)})$ ,  $Re = \langle u_1 \rangle d/\nu^{(0)}$



при горении пропано-воздушных смесей ( $D_f < D_o$ ) (Щетинков [1965]). При горении метано-воздушных смесей ( $D_f > D_o$ ) наблюдается противоположный эффект (Володина и Андреев [1958]).

Для подтверждения правильности сделанного вывода на рис. 6.15 в виде зависимости  $Mi$  от  $Re$  приведены результаты обработки уже упоминавшихся опытов Дунского. В этих опытах коэффициент избытка воздуха изменялся в пределах  $\alpha^{(0)} = 0,6 - 1,4$ , диаметр стабилизатора варьировался от  $d = 5$  мм до  $d = 11$  мм, а скорость набегающего потока пропано-воздушной смеси составляла  $\langle u_1 \rangle = 20 - 140$  м/с. В расчетах принято, что  $L = d$ ,  $u = 0,3 \langle u_1 \rangle$ . Учтено влияние различий в коэффициентах молекулярного переноса, т.е. величина  $u_n$  рассчитывалась по составу, который дается формулой (6.19).

Из рис. 6.15 видно, что при срыве пламени критерий  $Mi$  порядка единицы. При этом максимальное значение  $Mi$  отличается от минимального не более чем в два раза. Столь малый "разброс" значений критерия  $Mi$  обусловлен тем, что учтены различия в коэффициентах молекулярного переноса. Обработка этих же данных, сделанная Дунским без учета указанных различий, приводит к тому, что максимальное значение критерия  $Mi$  отличается от минимального более чем на порядок.

Таким образом, различия в коэффициентах молекулярного переноса влияют на процесс горения даже в самом теплонапряженном режиме. Действительно, в противном случае (характерный масштаб изменения неосредненного температурного поля порядка интегрального масштаба турбулентности) из принципа автономности турбулентных течений по числу Рейнольдса следовало бы, что различия в коэффициентах молекулярного переноса не влияют на процесс стабилизации пламени. Отсюда вытекает, что даже в наиболее напряженном режиме процесс горения происходит в соответствии с фронтальной моделью.

Изложенные соображения позволяют объяснить результаты уже обсуждавшихся опытов Баллала и Лефевра [1975] и Баллала [1979]. В этих опытах установлены закономерности, которые на первый взгляд не согласуются с соображениями, развитыми в §§ 6.5, 6.6, а именно было показано, что при  $u \geq 3u_n$  с увеличением масштаба турбулентности скорость распространения пламени и энергия турбулентности в зоне горения уменьшаются. Рассматриваемые эксперименты обладают двумя особенностями. Во-первых, в них исследовалось горение в потоке за решеткой, т.е. в потоке, в котором турбулентность вырождается. Во-вторых, в них изучалось

влияние лишь достаточно мелкомасштабной турбулентности ( $L/\delta_n = L u_n / (a^{(0)} \beta) < 6$ ). Оценки, представленные в работе Балласта и Лефевра [1975], свидетельствуют о том, что в условиях рассматриваемых опытов  $\eta < \delta_n$  при  $u \geq 3u_n$ . Отсюда ясно, что в тех точках, в которых проводились измерения, выполняется условие  $K \geq 1$ . Это условие, однако, не может выполняться для всего пламени, так как турбулентность за решеткой вырождается. Поскольку  $\langle \epsilon \rangle \sim 1/L$ , то с увеличением масштаба турбулентности темп этого вырождения уменьшается. Следовательно, характерный размер области, в которой выполняется условие  $K \geq 1$ , увеличивается с ростом масштаба турбулентности.

Поэтому с ростом масштаба значения критерия  $K(l)$  и энергии турбулентности, осредненные по всей зоне горения, увеличиваются, что может приводить к уменьшению  $u_t$ .

Аналогичные соображения справедливы и при анализе влияния масштаба турбулентности на энергию возмущений в зоне горения. Очевидно, что с увеличением  $L$  относительный объем областей, в которых  $K(l) \leq 1$ , уменьшается. Как уже отмечалось, в этих областях важна неустойчивость пламени. Поскольку относительный объем таких областей падает, то происходит уменьшение энергии возмущений, генерированных пламенем, что и обуславливает падение полной энергии турбулентности в пламени при увеличении  $L$ .

Определим теперь максимальную теплонапряженность процесса турбулентного горения однородной смеси. Оценим сначала среднюю скорость химической реакции при  $K \leq 1$ ,  $\mu \ll 1$ . Как было показано в § 6.6, в этом режиме имеем  $u_t \sim u$ . Отсюда получаем  $\langle W \rangle \sim u_t / \delta_t \leq u/L$  (последнее неравенство вытекает из того, что толщина турбулентного пламени  $\delta_t$  не может быть меньше масштаба турбулентности  $L$ ). Эта оценка в первом приближении справедлива и при  $K \sim 1$ , что ясно из проведенного выше анализа опытов Карпова и Северина [1977]. Поскольку  $\langle \epsilon \rangle \sim u^3/L$ , то  $u \sim L^{1/3} u_n^{4/3} (a^{(0)})^{-1/3}$  при  $K \sim 1$ , т.е.  $\langle W \rangle \sim u_n^{4/3} L^{-2/3} (a^{(0)})^{-1/3}$  при  $K \sim 1$ . Так как при  $K \sim 1$  достигается предельная теплонапряженность процесса горения, то получаем

$$\langle W \rangle \leq W_m = u_n^{4/3} L^{-2/3} (a^{(0)})^{-1/3}. \quad (6.39)$$

Отсюда следует, что отношение средней скорости реакции в турбулентном пламени к скорости реакции, осредненной по толщине нормального пламени, т.е. к величине  $u_n^2/a^{(0)}$ , не больше, чем  $(u_n L/a^{(0)})^{-2/3}$ . Это отношение обычно очень мало (порядка нескольких процентов).

Суммируя результаты проведенного анализа, заключаем, что в потоке с очень большой энергией турбулентности процесс горения однородной смеси обладает рядом особенностей. 1) При  $K \geq 1$  и  $Mi < 1$  увеличение энергии турбулентности не приводит ни к интенсификации процесса горения, ни к срыву пламени. 2) Существует предельная теплонапряженность процесса горения, определяемая скоростью реакции, коэффициентами молекулярного переноса и масштабом турбулентности. Обычно эта теплонапряженность намного ниже, чем теплонапряженность нормального пламени. 3) Срыв пламени происходит при  $Mi \sim 1$ . 4) Даже в наиболее напряженных режимах горение происходит в соответствии с фронтальной моделью.

## § 6.8. Перспективы дальнейшего развития теории турбулентного горения однородной смеси

Проведенное исследование показывает, что свежая смесь и продукты сгорания, по-видимому, всегда разделены узкой зоной (фронтом пламени), толщина которой много меньше интегрального масштаба турбулентности. Это означает, что качественная структура полей реагирующей и инертной примеси принципиально различна. Такие различия, в частности, проявляются в том, что при горении существенную роль могут играть процессы молекулярного переноса и тепловая неустойчивость пламени. Отсюда можно предположить, что описание турбулентного горения однородной смеси не может основываться только на традиционных методах, развиваемых в полуэмпирической теории турбулентности.

Чтобы выяснить, чем должны быть дополнены эти методы, рассмотрим, какие проблемы возникают при исследовании каждого из трех обнаруженных выше режимов горения. Напомним, что существенную роль играют значения двух критериев  $\mu$  и  $K$ . Первый характеризует отношение энергии турбулентности, генерированной пламенем, к энергии турбулентности в набегающем потоке. Второй дает отношение толщины нормального пламени к колмогоровскому масштабу турбулентности в набегающем потоке.

В настоящее время удовлетворительное описание проблемы возможно лишь в одном режиме ( $\mu \ll 1$ ,  $K < 1$ ), в котором неустойчивость пламени несущественна, а колмогоровский масштаб меньше толщины нормального пламени. Как было установлено в § 6.6, при указанных условиях фронт пламени расположен вблизи границы турбулентной жидкости, и поскольку эта жидкость целиком заполнена продуктами сгорания, то расчет безразмерной температуры  $\zeta$  сводится к отысканию коэффициента перемежаемости  $\gamma$ , т.е.  $\langle \zeta \rangle = \gamma$ . Поэтому сочетание методов, развитых в полуэмпирической теории турбулентности, и методов, разработанных в главе 3, позволяет решить задачу.

При таком подходе становятся ненужными уравнения для средней температуры и концентраций реагирующих компонентов (а также и для высших моментов этих величин), так как проблема полностью сводится к описанию поля концентрации инертной примеси.

Несомненно, что такой прием будет полезен и при исследовании другого режима ( $K < 1$ ,  $\mu \sim 1$  или  $\mu \gg 1$ ), т.е. когда колмогоровский масштаб по-прежнему велик, а неустойчивость пламени начинает играть заметную роль. В этом случае фронт пламени также находится вблизи границы турбулентной жидкости, т.е. задача опять сводится к изучению поля концентрации инертной примеси. Однако количественное описание характеристик горения в рассматриваемом режиме возможно лишь при решении двух проблем.

Первая – влияние неустойчивости пламени на энергию турбулентности. Как было установлено в § 6.6, этот процесс характеризуется корреляцией между пульсациями давления и дивергенцией скорости. По-видимому, решение указанной проблемы может основываться на анализе уравнения для энергии турбулентности, в котором для описания рассматриваемой корреляции используется некоторая аппроксимация. Эта аппроксимация должна быть такой, чтобы в предельном случае ( $\mu \gg 1$ ) из теории следовали

формулы, полученные в § 6.5. В частности, ясно, что корреляция между пульсациями давления и дивергенцией скорости зависит от линейного масштаба системы, коэффициентов молекулярного переноса и скорости химических реакций.

Вторая проблема – описание эффектов, обусловленных различиями в коэффициентах молекулярного переноса. Метод, разработанный в § 6.3, исходит из гипотезы о том, что минимальный масштаб неустойчивых возмущений можно вычислить по составу в критических для распространения пламени условиях. Однако его конкретная реализация основана на анализе лишь одного типа воздействия, а именно растяжения пламени. Остается также неясным, как влияет изменение состава вне лидирующих точек на характеристики горения. Поэтому необходим дальнейший анализ роли различий в коэффициентах молекулярного переноса.

Наиболее серьезные трудности возникают при исследовании третьего режима горения ( $K > 1$ ), когда неустойчивость пламени несущественна, а колмогоровский масштаб меньше толщины нормального пламени. В этом случае пламя оттесняется в глубь турбулентной жидкости и задача не сводится к описанию поля инертной примеси. Найден, однако, ряд полезных упрощений. В частности, установлено, что фронт пламени остается непрерывной поверхностью и что он не проникает в сильно турбулизованные области, возникающие из-за внутренней перемежаемости. В слабо турбулизованных областях следует рассмотреть внутреннюю структуру зоны реакций и ее крупномасштабные колебания. При этом химическая кинетика и характеристики молекулярного переноса, существенно влияющие на процесс горения и в этом режиме, войдут только в решение внутренней задачи. Конкретные пути реализации этой программы в настоящее время неясны.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в данной книге исследование основано на уравнениях для плотностей распределений вероятностей различных характеристик турбулентности. По существу такой подход означает, что любой гидродинамический процесс изучается не в лабораторной, а в некоторой специальной системе координат, связанной с поверхностями, на которых значение той или иной характеристики течения (концентрации, разности скоростей и т.д.) постоянно (изоповерхности). При этом уравнение для плотности распределения вероятностей описывает некоторые общие свойства преобразования одной системы координат в другую.

Естественно, изменение системы координат не облегчает трудностей построения теории, а увеличение информативности описания дается ценой сильного математического усложнения (увеличения числа независимых переменных)\*). Поэтому развиваемый подход может быть плодотворным, лишь если есть надежда на получение некоторых универсальных распределений вероятностей (например, подобных максвелловскому распределению), либо если получаемые результаты позволяют по-новому взглянуть на более простые методы (например, на методы, развиваемые в так называемых полуэмпирических теориях для одноточечных моментов).

Представляется, что оба указанных условия выполнены, во всяком случае в задачах, которые рассмотрены в данной книге. По-видимому, универсальность статистических характеристик мелкомасштабной турбулентности не требует специальных комментариев. Поэтому рассмотрим, в какой степени универсально распределение вероятностей концентрации, полученное в главе 3. Из исследования, проведенного в главе 5, видно, что формулы (3.56), (3.57) позволяют решить ряд практических задач, например, рассчитать концентрации окислов азота и углеводородов в диффузионном факеле. Важно, что формула (3.57) правильно описывает не только часто, но и редко встречающиеся события. Этот вывод ясен из сопоставления рассчитанных и измеренных значений эквивалентной концентрации пропана, которая на заключительном этапе горения определяется чрезвычайно редким появлением областей с составом, сильно отличающимся от среднего.

Однако главный результат проведенного исследования — новый взгляд на проблему создания замкнутой теории турбулентности и турбулентного

---

\* ) Трудности как и обычные физические величины, подчиняются законам сохранения.

горения. Этот взгляд выработан в результате анализа уравнений для различных распределений вероятностей, которые отражают два явления — крупномасштабные колебания изоповерхностей (конвективные члены в уравнениях) и мелкомасштабные, диссипативные явления, происходящие в объеме, заключенном между двумя близкими изоповерхностями (слагаемые пропорциональные скалярной диссипации и диссипации энергии). Последние явления можно представить как перенос импульса и вещества между противоположными стенками искривленного плоского канала.

Преимущества такого подхода легко видны при анализе поля концентрации. Рассмотрим сначала перенос инертной примеси. В этом случае достаточно высокая точность описания может быть достигнута, если число Рейнольдса считается бесконечным, т.е. колмогоровский масштаб равен нулю. Следовательно, перенос вещества между любыми двумя близкими изоскалярными поверхностями обусловлен турбулентной диффузией, т.е. требуется статистическое описание. Важно, что характеристики рассматриваемого процесса универсальны во всех потоках, так как они определяются вихрями, размеры которых принадлежат инерционному интервалу.

Совершенно иная картина наблюдается при анализе поля концентрации реагирующей примеси, когда колмогоровский масштаб может быть как больше, так и меньше толщины зоны реакции. В этом случае характеристики переноса между двумя близкими изоскалярными поверхностями не универсальны и зависят от типа химической кинетики. Таким образом, химические реакции непосредственно воздействуют на диссипативные процессы. В свою очередь диссипативные процессы влияют на крупномасштабную статистику. В частности, такое влияние отражается на турбулентной диффузии реагирующей примеси. Указанный вывод наглядно подтвержден в главе 5, где показано, что коэффициенты турбулентной диффузии окислов азота и инертной примеси не совпадают.

Таким образом, при создании чисто статистической теории возникают значительные трудности независимо от того, рассматривается ли распределение вероятностей или же его первые моменты. Они обусловлены тем, что качественный характер всех замыкающих соотношений определяется типом химической кинетики, т.е. теория носит существенно неуниверсальный характер \*).

Выход из положения основан на сочетании статистического и детерминированного методов описания. Такой подход основан на переходе в систему координат, связанную с изоскалярной поверхностью, вблизи которой расположена зона реакции. Зона реакций рассматривается как очень тонкий плоский пограничный слой, что позволяет детерминированным образом связать между собой параметры, описывающие гидродинамические и химические процессы. Характеристики изоскалярной поверхности описываются статистическим образом.

Оказывается, что во многих случаях свойства изоскалярной поверхности, вблизи которой расположена зона реакций, имеют универсальный, не-

---

\*) Наличие таких трудностей весьма образно описано в обзорной статье Сполдинга [1976]. Оценивая одну из своих работ, он писал: "Результаты . . . не подтвердили ожиданий: при моделировании турбулентности не в первый раз за утром надежд последовал день сомнений".

посредственно не зависящий от химической кинетики вид. Например, при диффузионном горении зона реакции расположена вблизи поверхности, на которой постоянна концентрация инертной примеси. При горении однородной смеси, как правило, фронт пламени расположен вблизи границы турбулентной жидкости. Во всех таких случаях может быть развита достаточно общая теория турбулентного горения. Примером является исследование, проведенное в главах 5 и 6.

Основной вывод главы 5 состоит в том, что при диффузионном горении структура зоны реакции зависит только от одного гидродинамического параметра (скалярной диссипации). Этот вывод лежит в основе количественной теории образования окислов азота. В главе 6 на основе сформулированного подхода выделены три главных режима горения однородной смеси; дано количественное описание влияния неустойчивости пламени и различий в коэффициентах молекулярного переноса на процесс горения; разработано критериальное описание скорости распространения турбулентного пламени.

По-видимому, дальнейшее совершенствование методов, развитых в главах 5 и 6, позволит свести изучение горения к исследованию характеристик турбулентности в отсутствие химических реакций.

Рассмотрим, в чем ценность исследования уравнений для плотностей распределения вероятностей при решении последней задачи. Для этого сравним развитую выше теорию с широкораспространенными полуэмпирическими теориями для одноточечных моментов. Основой для таких моделей является предположение о том, что все связи между известными и неизвестными величинами носят локальный характер. Например, в " $k - \epsilon$ "-модели принимается, что напряжение Рейнольдса в данной точке зависит только от энергии турбулентности, диссипации и градиента средней скорости в той же точке. Теория Колмогорова – Обухова в этих моделях никак не используется. Отсюда видно, что модели для моментов и уравнения для плотностей распределений вероятностей построены на разных основах, так как в последнем случае теория Колмогорова – Обухова используется существенным образом.

В результате получаются уравнения совершенно разной структуры: модели для моментов не нуждаются во введении перемежаемости, а уравнения для распределений вероятностей без рассмотрения перемежаемости становятся бессмысленными. Например, из уравнения для плотности вероятностей концентрации вытекает, что в отсутствие перемежаемости концентрация принимает все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Важно, что перемежаемость определяет структуру решений во всех областях потока, в том числе и в тех, где она традиционно считалась несущественной. Например, вблизи оси или плоскости симметрии течений струйного типа установлено, что чем слабее отличается коэффициент перемежаемости от единицы, тем меньше интенсивность пульсаций концентрации. Важная роль перемежаемости была установлена и при анализе уравнения для плотности вероятностей разности скоростей.

Проведенное сопоставление еще не свидетельствует о каком-либо дефекте полуэмпирических теорий для одноточечных моментов. Например, как видно из (3.57), характеристики перемежаемости могут быть универсально связаны с двумя первыми моментами поля концентрации, и



поэтому введение перемежаемости не добавляет новой информации. Тем не менее такой дефект действительно существует, так как проведенное исследование показало, что характеристики перемежаемости определяются крупномасштабными, нелокальными процессами. Здесь под нелокальным процессом понимается такой процесс, характеристики которого не могут быть описаны дифференциальными уравнениями с наперед заданными коэффициентами.

В качестве примера приведем уравнение (3.67) для плотности распределения вероятностей концентрации. Коэффициенты в этом уравнении находятся из решения краевой задачи. Не решив эту задачу, т.е. не приняв во внимание особенности всего поля течения в данном сечении, нельзя сделать никаких заключений о распределении коэффициента перемежаемости в малой окрестности точки, расположенной в этом же сечении.

Аналогичную структуру имеет и уравнение (4.16) для плотности распределения вероятностей разности скоростей  $v$  в двух близких точках, находящихся на расстоянии  $r$ , принадлежащем инерционному интервалу.

Было установлено, что  $\langle v^n \rangle \sim r^q(n)$ , а функция  $q(n)$  имеет особые точки. Структура функции  $q(n)$  в окрестности особых точек отражает взаимодействие турбулентной и нетурбулентной жидкостей. Его характеристики определяются вихрями с размером порядка интегрального масштаба турбулентности, т.е. опять крупномасштабные процессы играют важную роль. Так как  $q(n)$  — аналитическая функция, то структура особой точки (и, следовательно, влияние крупномасштабных процессов) сказывается на поведении функции  $q$  при всех  $n$ .

Таким образом, перемежаемость оказывается некоторым признаком нелокального, крупномасштабного взаимодействия. Такое взаимодействие не учитывается в полумпирических теориях для одноточечных моментов. Поэтому значения эмпирических постоянных в этих теориях определяются типом течения\*), а сами теории не нуждаются во введении перемежаемости.

Очевидно, что описание нелокального взаимодействия является весьма сложной задачей и в этом смысле теория, основанная на уравнениях для распределений вероятностей, ничуть не проще теории, в которой ограничиваются анализом нескольких первых моментов поля скорости. Причина всех затруднений ясна из главы 4, где показано, что перемежаемость возникает в результате прямого, а не каскадного взаимодействия вихрей с сильно отличающимися масштабами. Следовательно, теория Колмогорова — Обухова дает лишь приближенное описание мелкомасштабных пульсаций и это описание не становится асимптотически точным, если число Рейнольдса стремится к бесконечности, а масштаб рассматриваемых пульсаций — к нулю (для этого необходимо дополнительно предположить, что порядок структурной функции стремится к бесконечности, т.е. теория является асимптотически точной лишь для флуктуаций с большой амплитудой и малым масштабом).

Отмеченное обстоятельство не свидетельствует о каком-либо дефекте теории Колмогорова — Обухова, так как любая достаточно глубокая фи-

---

\*) Известно, что для наилучшего описания различных течений значения эмпирических постоянных следует варьировать.

зическая теория не может быть лишена противоречий и поэтому является лишь основой для разработки более точного и универсального описания\*). Проведенное исследование показывает, что теория Колмогорова – Обухова является такой основой по крайней мере по двум причинам.

Во-первых, важная роль перемежаемости и, следовательно, непосредственного взаимодействия между вихрями с сильно отличающимися масштабами вытекает из уравнений для плотностей вероятностей, замкнутых на основе теории Колмогорова – Обухова, т.е. эта теория способна предсказать эффекты, которые не учтены при ее создании. Во-вторых, в каком-то смысле роль нелокальных процессов не слишком велика.

Чтобы пояснить последнее утверждение, напомним, что развитая в данной книге теория позволила либо вычислить, либо оценить ряд констант, связанных с теми или иными характеристиками турбулентности. Сам по себе этот факт ничем не примечателен, так как задачей любой теории является разработка по возможности наиболее точного и универсального метода описания, а не вычисление уже измеренных постоянных. Поэтому здесь заслуживает внимание лишь одно обстоятельство: все константы, определяющие скорость диссипативных процессов, малы. Например, в формулах (3.31), (4.13) для условно осредненных значений скалярной диссипации и диссипации энергии фигурируют две малые постоянные:  $a = 1/\pi^2$  и  $k \sim 10^{-2}$ . Аналогично, в формуле (4.15), описывающей пульсации диссипации, содержится константа  $\mu$ , с которой связана малая величина  $q_2 = \mu/18$ , определяющая небольшие поправки к закону "двух третей".

Малое значение последней постоянной обусловлено тем, что в пространстве номеров  $n$  структурных функций  $\langle v^n \rangle$  первая особая точка функции  $q(n)$  ( $\langle v^n \rangle \sim r^{q(n)}$ ) находится в области  $n < -5$ , т.е. расположена на большом расстоянии от тех значений  $n$ , которые определяют энергию пульсаций ( $n = 2$ ) и флуктуации диссипации ( $n = 6$ ). Так как характер особой точки функции  $q(n)$  определяется перемежаемостью, то отсюда вытекает, что турбулентная и нетурбулентная жидкости взаимодействуют слабо. Следовательно, нелокальные, крупномасштабные процессы, приводящие к возникновению перемежаемости, достаточно слабо сказываются на характеристиках мелкомасштабной турбулентности.

Аналогичная картина наблюдается и при анализе крупномасштабной турбулентности в течениях струйного типа. Здесь взаимодействие турбулентной и нетурбулентной жидкостей определяет скорость расширения течения, а эта скорость, как легко показать из интегральных соотношений, следующих из уравнений Навье – Стокса, характеризует относительную роль диссипативных процессов. Известно, что скорость расширения течений рассматриваемого типа мала, и поэтому неудивительно, что малы все константы, связанные с диссипативными процессами\*\*).

Отсюда ясно, что, как правило, роль крупномасштабных, нелокальных процессов не слишком велика. Именно по этой причине модели для момен-

\*) Напомним о теореме Геделя.

\*\*\*) В пристеночных течениях относительная роль диссипативных процессов, по-видимому, еще меньше (очень мал угол расширения пограничного слоя, малы коэффициенты сопротивления в каналах и т.д.). Заметим также, что и однородная турбулентность вырождается очень медленно.

тов дают правильный порядок значений основных характеристик турбулентности.

Указанное обстоятельство позволяет надеяться на то, что возможно создание достаточно простой и универсальной теории турбулентности. Чтобы проанализировать, каким должно быть математическое оформление этой теории, рассмотрим несколько известных из физики примеров. Первый пример – уравнения Навье – Стокса. В этом случае нелокальный характер процессов переноса совсем не учитывается, а течение описывается дифференциальными уравнениями с заданными коэффициентами. Уравнения моделей для моментов имеют точно такую же структуру. Поскольку они не обеспечивают достаточной точности, то такое математическое оформление непригодно.

Второй пример – перенос тепла излучением. В этом случае процесс теплообмена описывается сложными соотношениями, в которые входят интегралы по всему пространству от различных характеристик среды, т.е. учитывается, что энергия, излученная в одном месте, может рассеиваться и поглощаться в других местах. В приближении оптически тонкого слоя излучающий объем и стенка обмениваются теплом, как бы далеко друг от друга они ни находились, т.е. процесс сильно нелокален. С математической точки зрения аналогичный подход развивался и в теории турбулентности. Примером могут служить работы Крейкнана [1959, 1974], в которых спектральная плотность энергии турбулентности находится из решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Представляется, что и это математическое оформление непригодно для описания турбулентности, так как роль нелокальных процессов сильно преувеличивается.

Третий пример заимствован из квантовой механики. Здесь роль нелокальных процессов не слишком велика и не слишком мала (де-бройлевская длина волны сопоставима с размерами атома). Процесс описывается дифференциальным уравнением (уравнением Шредингера), но коэффициенты в этом уравнении (энергетические уровни) находятся из решения краевой задачи, т.е. заранее не заданы. Аналогичное описание проблемы получено и в данной книге: плотность распределения вероятностей концентрации удовлетворяет дифференциальному уравнению, в котором коэффициенты (точнее функции) также находятся из решения краевой задачи. Указанная аналогия не случайна, так как в обоих случаях масштаб статистической связи (де-бройлевская длина волны или интегральный масштаб турбулентности) сопоставим с характерным размером задачи. Поэтому можно предположить, что все уравнения теории турбулентности должны иметь такой же характер, как уравнение Шредингера или уравнение для плотности распределения вероятностей концентрации.

Конкретная реализация такого подхода может быть совершенно различной в зависимости от того, какой участок спектра турбулентности рассматривается. Например, в мелкомасштабной части несколько первых структурных функций не дают достаточной информации о локальных характеристиках турбулентности, так как амплитуда пульсаций диссипации значительно превышает ее среднее значение. Следовательно, необходимо использовать уравнение для плотности вероятностей разности скоростей.

Как видно из (4.16), теория Колмогорова – Обухова определяет тип этого уравнения: оно похоже на уравнение теплопроводности, т.е. в него входят лишь первая производная по времениподобной координате  $\tau$  и вторые производные по пространственноподобной координате  $v$ . Главная особенность этого уравнения состоит в том, что коэффициент при производной по времениподобной координате меняет знак. Поэтому краевая задача ставится не только по пространственноподобной, но и по времениподобной координате. Совершенно аналогичную структуру имеет и уравнение (3.67) для плотности распределения вероятностей концентрации  $P(z)$ . Краевая задача по времениподобной координате является переопределенной (в обоих случаях в уравнения входит лишь первая производная по этой координате). Условия разрешимости такой задачи должны определять заранее не известные функции, входящие в уравнения. В частности, в уравнении для  $P(z)$  именно таким образом была найдена интенсивность пульсаций концентрации в турбулентной жидкости. Аналогично, можно предположить, что условия разрешимости краевой задачи в уравнении для плотности вероятностей разности скоростей позволяет вычислить постоянную  $k$  и связанную с ней колмогоровскую константу  $C$ .

Использование плотностей вероятностей для описания структуры крупномасштабной турбулентности, по-видимому, является неоправданным усложнением задачи, так как возможен более простой подход, приводящий к уравнениям той же структуры. Для пояснения рассмотрим течения струйного типа. Проанализируем их эволюцию, начиная с сечения, в котором образовалась развитая турбулентность. Будем следить за амплитудой возмущения с фиксированным масштабом, значение которого существенно больше начальной ширины течения. Очевидно, что вначале амплитуда очень мала и, следовательно, характеристики такого возмущения описываются линейной теорией. Важно, что в течениях такого типа мала интенсивность турбулентности (интенсивность турбулентности связана со скоростью расширения течения, т.е. определяется слабо нелокальным взаимодействием турбулентной и нетурбулентной жидкостей). Поэтому рост амплитуды наиболее крупномасштабных возмущений описывается линейной теорией устойчивости профиля средней скорости (Таунсенд [1956]).

В настоящее время известны многочисленные теоретические и экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что линейная теория устойчивости предсказывает многие особенности струйных течений (Борисов, Кузнецов и Секундов [1985])\*). Легко видеть, что в этой теории также возникают уравнения, имеющие необходимую структуру. Действительно, уравнения Рэлея или Орра – Зоммерфельда являются дифференциальными уравнениями, в которых один из коэффициентов (инкремент нарастания) находится из решения краевой задачи. Это, в частности, означает, что напряжения Рейнольдса, потоки тепла и вещества в данной точке определяются всем полем средней скорости, а не только градиентом средней скорости в

\* ) Попытки использования линейной теории устойчивости как исходного пункта для создания теории развитой турбулентности, безусловно, не новы. Достаточно напомнить о работах Малкуса [1956], Гольдштика и Штерна [1977], в которых при анализе пристеночных течений выдвинуты взаимоисключающие принципы нейтральной и максимальной устойчивости.

рассматриваемой точке. Таким образом, в данном случае возможны упрощения, в которых не используются уравнения для распределений вероятностей.

Такой подход, однако, не может дать полностью замкнутого описания задачи, так как эволюция крупномасштабных колебаний зависит от диссипации энергии, которая определяется крупномасштабными флуктуациями. Поэтому требуется его объединение с гораздо более сложными методами изучения мелкомасштабной структуры турбулентности.

В настоящее время конкретные пути такого объединения неизвестны и ясно лишь, что поскольку основной объем информации о состоянии турбулентного потока определяется характеристиками мелких вихрей, то успешная реализация намеченной программы исследования зависит от того, насколько точно и универсально удастся описать характеристики турбулентности в инерционном и вязком интервале ее спектра.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Абдель-Гайед, Брэдли* (Abdel-Gayed R.G., Bradley D.)

1981. A two-eddy theory of premixed turbulent flame propagation. — *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, A301, No. 1457, p. 1–25.

*Абрамовиц, Стиган* (Abramowitz M., Stegun I.A.)

1964. Handbook of mathematical functions. Applied Mathematics Series. v. 55. — National Bureau of Standards (перевод: *Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.* — М.: Наука, 1979).

*Адриан* (Adrian R.J.)

1977. On the role of conditional averages in turbulence theory. — In: *Turbulence in liquids/Ed. by G.K. Patterson and J.L. Zakin.* — Science Press, Princeton, New Jersey, p. 323–332.

1979. Conditional eddies in isotropic turbulence. — *Phys. Fluids*, v. 22, No. 11, p. 2065–2070.

*Азад, Гуммель* (Azad R.S., Hummel R.H.)

1981. Structure functions of turbulence in an adverse pressure gradient. — *Phys. Fluids*, v. 24, No. 10, p. 1774–1779.

*Алексеев Б.В., Иевлев В.М., Киселев В.И.*

1976. Применение уравнений для распределений вероятностей пульсирующих величин для решения модельной задачи Бюргерса. — В кн.: *Исследования по теоретической и прикладной физике. Труды МАИ, вып. 380, с. 43–52.*

*Андерсон, Ля Рю, Либби* (Anderson P., La Rue J.S., Libby P.A.)

1979. Preferential entrainment in a two-dimensional turbulent jet in a moving stream. — *Phys. Fluids*, v. 22, No. 10, p. 1857–1861.

*Ансельмет, Гэгне, Хопфингер, Антониа* (Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E.J., Antonia R.A.)

1984. High order velocity structure functions in turbulent shear flows. — *J. Fluid Mech.*, v. 140, p. 63–89.

*Антониа* (Antonia R.A.)

1973. Some small properties of boundary layer turbulence. — *Phys. Fluids*, v. 16, No. 8, p. 1198–1206.

1981. Conditional sampling in turbulence measurements. — *Annual Review of Fluid Mech.*, v. 13, p. 131–151.

*Антониа, Билджер* (Antonia R.A., Bilger R.W.)

1976. The heated round jet in a coflowing stream. — *AIAA J.*, v. 14, No. 11, p. 1541–1547.

*Антониа, Дань* (Antonia R.A., Danh H.Q.)

1977. Structure of temperature fluctuation in a turbulent boundary layer. — *Phys. Fluids*, v. 20, No. 7, p. 1050–1057.

*Антониа, Дань, Прабху* (Antonia R.A., Danh H.Q., Prabhu A.)

1976. Bursts in turbulent shear flow. — *Phys. Fluids*, v. 19, No. 11, p. 1680–1686.

*Антониа, Прабху, Стефенсон* (Antonia R.A., Prabhu A., Stephenson S.E.)

1975. Conditionally sampled measurements in a heated turbulent jet. — *J. Fluid Mech.*, v. 72, pt. 3, p. 455–480.

*Антониа, Раджагопалан, Браун, Чамберс* (Antonia R.A., Rajagopalan S., Browne L.W.B., Chambers A.J.) 1982. Correlation of squared velocity and temperature derivatives in a turbulent plane jet. — *Phys. Fluids*, v. 25, No. 7, p. 1156–1158.

- Антониа, Сатьяпракаш, Хуссейн* (Antonia R.A., Satyaprakash B.R., Hussain A.K.M.F.)  
1982. Statistics of fine-scale velocity in turbulent plane and circular jets. — *J. Fluid Mech.*, v. 119, p. 55–89.
- Антониа, Сатьяпракаш, Чамберс* (Antonia R.A., Satyaprakash B.R., Chambers A.J.)  
1982. Reynolds number dependence of velocity structure functions in turbulent shear flows. — *Phys. Fluids*, v. 25, No. 1, p. 29–37.
- Антониа, Фан-Тьен, Сатьяпракаш* (Antonia R.A., Phan-Thien N., Satyaprakash B.R.)  
1981. Autocorrelation and spectrum of dissipation fluctuation in a turbulent jet. — *Phys. Fluids*, v. 24, No. 3, p. 554–555.
- Антониа, Шринивасан* (Antonia R.A., Sreenivasan K.R.)  
1977. Log-normality of temperature dissipation in a turbulent boundary layer. — *Phys. Fluids*, v. 20, No. 11, p. 1800–1804.
- Баев В.К., Головичев В.И., Ясаков В.А.*  
1976. Двумерные турбулентные течения реагирующих газов. — Новосибирск: Наука.
- Баев В.К., Третьяков П.К.*  
1968. Характерные времена горения топливно-воздушных смесей. — *Физика горения и взрыва*, т. 4, № 3, с. 367–376.
1972. Критериальное описание устойчивости горения в турбулентном потоке однородной смеси. — *Физика горения и взрыва*, т. 8, № 1, с. 46–51.
1977. Применение интегральных характеристик ламинарного пламени для критериального описания турбулентных пламен. — В кн.: *Исследование горения газообразных топлив*. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, с. 4–20.
- Байуотер* (Bywater R.J.)  
1980. The calculation of a turbulent diffusion flame in a free shear flow with a statistical turbulent model. — AIAA Paper, No. 139.
- Балеску* (Balescu R.)  
1975. Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics. — New York; London; Sydney; Toronto: J. Wiley and Sons (перевод: Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая физика. — М.: Мир, 1978).
- Баллал* (Ballal D.R.)  
1979. The structure of premixed turbulent flame. — *Proc. Roy. Soc.*, A 367, No. 1730, p. 353–380.
- Баллал, Лефевр* (Ballal D.R., Lefebvre A.H.)  
1975. The structure and propagation of turbulent flames. — *Proc. Roy. Soc.*, A 344, No. 1637, p. 217–234.
- Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б., Истратов А.Г.*  
1962. О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени. — *ЖПМТФ*, № 4, с. 21–26.
- Барсоум, Кавалл, Кеффер* (Barsoum M.L., Kawall J.G., Keffer J.F.)  
1978. Spanwise structure of the plane turbulent wake. — *Phys. Fluids*, v. 21, No. 2, p. 157–161.
- Башир, Уберои* (Bashir J., Uberoi M.S.)  
1975. Experiments on turbulent structure and heat transfer in a two-dimensional jet. — *Phys. Fluids*, v. 18, No. 4, p. 764–769.
- Бегье, Декейсе, Лондер* (Beguier C., Dekeyser I., Launder B.E.)  
1978. Ratio of scalar and velocity dissipation time scales in shear flow turbulence. — *Phys. Fluids*, v. 21, No. 3, p. 307–310.
- Бейтмен, Эрдейи* (Bateman H., Erdelyi A.)  
1953a. Higher transcendental functions, v. 2. — New York: Mc Graw Hill (перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т. 2. — М.: Наука, 1966).  
1953b. Integral transfers. — New York: Mc Graw Hill (перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. т. 1. — М.: Наука, 1967).
- Безуглов В.А.*  
1974. Измерение скорости переноса концентрации. — В кн.: *Тр. 20-й науч. конф. МФТИ. Аэрофизика и прикладная математика. Ч. 1.* — Долгопрудный: МФТИ, с. 147–151.
- Беккер, Розенцвейг, Гвоздь* (Becker H.A., Rosensweig R.E., Gwozdz J.R.)  
1966. Turbulent dispersion in a pipe flow. — *AIChE J.*, v. 12, No. 5, p. 964–972.

**Беккер, Хоттел, Вильямс** (Becker H.A., Hottel H.S., Williams G.S.)

1967. The nozzle-fluid concentration field of the round, turbulent, free jet. - J. Fluid Mech., v. 30, pt. 2, p. 285-303.

**Бетхов** (Betchov R.)

1974. Non-gaussian and irreversible event in isotropic turbulence. - Phys. Fluids, v. 17, No. 8, p. 1509-1512.

1975. Numerical simulation of isotropic turbulence. - Phys. Fluids, v. 18, No. 10, p. 1230-1236.

1976. On the non-gaussian aspects of turbulence. - Archives of Mechanics (Archiwum Mechaniki Stosowanej), v. 28, No. 5-6, p. 837-845.

**Бетхов, Ларсен** (Betchov R., Larsen P.S.)

1981. A non-gaussian model of turbulence (soccer-ball integrals). - Phys. Fluids, v. 24, No. 9, p. 1602-1604.

**Бетхов, Лоренцен** (Betchov R., Lorenzen C.)

1974. Phase relations in isotropic turbulence. - Phys. Fluids, v. 17, No. 8, p. 1503-1508.

**Билджер** (Bilger R.W.)

1976. Turbulent jet diffusion flames. - Progr. Energy and Combust. Sci., v. 1, No. 1, p. 87-109.

1977. Reaction rates in diffusion flames. - Combustion and Flame, v. 30, No. 3, p. 277-284.

1978. Reply to comments of P. Bradshaw. - Phys. Fluids, v. 21, No. 2, p. 304.

1980a. Perturbation analysis of turbulent non-premixed combustion. - Combust. Sci. and Tech., v. 22, p. 251-261.

1980b. Turbulent flows with nonpremixed reactants. - In: Turbulent Reacting Flows/Ed. by P.A. Libby, F.A. Williams. Topics in Appl. Phys., v. 44. - Berlin; Heidelberg; Springer-Verlag, p. 65-113. (перевод: Турбулентные течения предварительно перемешанных газов. - В кн.: Турбулентные течения реагирующих газов/Под ред. П. Либби и Ф. Вильямса. - М.: Мир, 1983, с. 100-165).

1982. Molecular transport effects in turbulent diffusion flames at moderate Reynolds number. - AIAA J., v. 20, No. 7, p. 962-970.

**Билджер, Антониа, Шринивасан** (Bilger R.W., Antonia R.A., Sreenivasan K.R.)

1976. Determination of intermittency from the probability density function of a passive scalar. - Phys. Fluids, v. 19, No. 10, p. 1471-1474.

**Билджер, Бек** (Bilger R.W., Beck R.F.)

1974. Further experiments on turbulent jet diffusion flame. - Techn. Note F-67, The Univ. of Sydney.

**Билл, Неймер, Талбот** (Bill R.G., Namer I., Talbot L.)

1981. Flame propagation in grid-induced turbulence. - Combustion and Flame, v. 43, No. 3, p. 229-242.

**Борги** (Borghesi R.)

1980. Models of turbulent combustion for numerical prediction. - In: Prediction methods for turbulent flows/Ed. by W. Kollman. - A von Karman Institute Book Hemisphere. Publishing Corporation, p. 423-458 (перевод: Модели для численных расчетов турбулентного горения. - В кн.: Методы расчета турбулентных течений/Под ред. В. Колмана. - М.: Мир, 1983, с. 399-455).

1984. Моделирование турбулентного гомогенного горения. - В кн.: Структура газофазных пламен. Ч. 1 - Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, с. 138-160.

**Борисов А.Г., Кузнецов В.Р., Секундов А.Н.**

1985. Крупномасштабные движения в сдвиговых турбулентных потоках. - В сб.: Турбулентные струйные течения. Тезисы докладов пятого Всесоюзного научного совещания по теоретическим и прикладным аспектам турбулентных течений. Ч. 1. - Таллин: Изд-во АН ЭССР, ИТЭФ, с. 63-68.

**Боуман** (Bowman C.T.)

1973. Kinetics of nitric oxide formation in combustion processes. - In: Fourteenth Int. Sympos. on Combustion. Pittsburgh: The Combust. Inst., p. 729-738.

**Брайденталь** (Bridenthal R.F.)

1981. Structure in turbulent mixing layers and wakes using a chemical reaction - J. Fluid Mech., v. 109, p. 1-24.



*Бретшнайдер С.*

1966. Свойства газов и жидкостей. — М.: Химия.

*Бречит, Мейрон, Оржег, Никель, Морф, Фриш* (Brachet M.E., Meiron D.I., Orszag S.A., Nickel B.G., Morf R.H., Frisch U.)

1983. Small scale structure of the Taylor–Green vortex. — *J. Fluid Mech.*, v. 130, p. 411–452.

*Бродвел, Брайденталь* (Broadwell J.E., Breidenthal R.E.)

1982. A simple model of mixing and chemical reaction in a turbulent shear layer. — *J. Fluid Mech.*, v. 125, p. 397–410.

*Брэдли* (Bradley D.)

1984. Проблемы математического моделирования турбулентных пламен. — В кн.: Структура газофазных пламен. Ч. 1. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, с. 15–42.

*Брэдшоу* (Bradshaw P.)

1978. Comments on "Determination of intermittency from the probability density function of a passive scalar". — *Phys. Fluids*, v. 21, No. 2, p. 303.

*Брэй* (Bray K.N.C.)

1980. Turbulent flows with premixed reactants. — In: *Turbulent Reacting. Flows/Ed. by P.A. Libby, F.A. Williams. Topics in Applied Physics*, v. 44. — Berlin, Heidelberg: Springer – Verlag, p. 115–183 (перевод: В кн.: Турбулентные течения реагирующих газов/Под ред. П. Либби и Ф. Вильямса. — М.: Мир, 1983, с. 166–251).

*Брэй, Либби* (Bray K.N.C., Libby P.A.)

1976. Interactions effect in turbulent premixed flames. — *Phys. Fluids*, v. 19, No. 11, p. 1687–1701.

*Брэй, Мосс* (Bray K.N.C., Moss J.B.)

1977a. A closure model for turbulent premixed flame with sequential chemistry. — *Combustion and Flame*, v. 30, No. 2, p. 125–131.

1977b. A unified statistical model for the premixed turbulent flame. — *Acta Astronautica*, v. 4, No. 3–4, p. 291–319.

*Бурико Ю.Я., Кузнецов В.Р.*

1976. Влияние диффузионного расслоения на процесс горения однородной смеси в ламинарном и турбулентном потоке. — *Физика горения и взрыва*, т. 12, № 3, с. 390–397.

1978. О возможном механизме образования окислов азота при турбулентном диффузионном горении. — *Физика горения и взрыва*, 1978. т. 14, № 3 с. 32–42.

1980. Влияние подмешивания воздуха к горючему газу на образование окислов азота в турбулентном диффузионном факеле. — *Физика горения и взрыва*, т. 16, № 4, с. 60–67.

1983a. Образование окислов азота в неравновесном диффузионном пламени. — *Физика горения и взрыва*, т. 19, № 2, с. 71–81.

1983b. Влияние турбулентности на образование окислов азота в диффузионном факеле. — В кн.: Тр. пятых научных чтений по космонавтике. Теоретические проблемы двигателестроения. — М.: ИИЕТ АН СССР, с. 124–133.

*Бурико Ю.Я., Лебедев А.Б.*

1980. Исследование турбулентного смешения и диффузионного горения струи в канале. — *Изв. АН СССР, МЖТ*, № 4, с. 25–33.

*Бурке, Шуман* (Burke S.P., Schumann T.E.W.)

1928. Diffusion flames. — *Ind. Eng. Chem.*, v. 20, No. 10, p. 988–1004.

*Бэтчелор* (Batchelor G.K.)

1952. The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces. — *Proc. Roy. Soc.*, A 213, No. 1114, p. 349–366.

1953. The theory of homogeneous turbulence. — Cambridge Univ. Press. (перевод: Бэтчелор Дж.К. Теория однородной турбулентности. — М.: ИЛ, 1955).

1967. An introduction to fluid dynamics. — Cambridge Univ. Press (перевод: Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1974).

*Бэтчелор, Таунсенд* (Batchelor G.K., Townsend A.A.)

1949. The nature of turbulent motion at large wave numbers. — *Proc. Roy. Soc.*, A 199, No. 1057, p. 238–255.

1956. Turbulent diffusion. — In: *Surveys in mechanics/Ed. by G.K. Batchelor and R.M. Davies.* — Cambridge Univ. Press, p. 352–399.

*Бэрч, Браун, Додсон, Томас* (Birch A.D., Brown D.R., Dodson M.G., Thomas G.R.)  
1978. The turbulent concentration field of a methane jet. — J. Fluid Mech., v. 88, pt. 3, p. 431–450.

*Бэтт* (Batt R.G.)

1977. Turbulent mixing of passive and chemically reacting species in a low speed shear layer. — J. Fluid Mech., v. 82, pt. 1, p. 59–95.

*Бюггстоль, Кольман* (Buggstoyl S., Kollman W.)

1981. Closure model for intermittent turbulent flows. — Int. J. Heat and Mass transfer, v. 24, No. 11, p. 1811–1822.

*Ван Атта, Антониа* (Van Atta C.W., Antonia R.A.)

1980. Reynolds number dependence of skewness and flatness factors of turbulent velocity derivatives. — Phys. Fluids, v. 23, No. 2, p. 252–257.

*Варма, Беддини* (Varma A.K., Beddini R.A.)

1976. Second-order closure analysis of turbulent reacting flows. — In: Proc. 1976 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst., Davis, Calif.; Stanford, Calif., p. 229–240.

*Вейцзеккер* (Weizsäcker C.F. von)

1948. Das spectrum der Turbulenz bei grossen Reynolds'schen Zahlen. — Zs. Phys., Bd. 124, H. 7–12, S. 614–627.

*Венкатарамани, Туту, Шеврэ* (Venkataramani K.S., Tutu N.K., Chevray R.)

1975. Probability distributions in a round heated jet. — Phys. Fluids, v. 18, No. 11, p. 1413–1420.

*Венкатарамани, Шеврэ* (Venkataramani K.S., Chevray R.)

1978. Statistical features of heat transfer in grid generated turbulence: constant-gradient case. — J. Fluid Mech., v. 86, pt. 3, p. 513–544.

*Вентцель А.Д.*

1975. Курс теории случайных процессов. — М.: Наука.

*Вильямс* (Williams F.A.)

1965. Combustion theory. — Palo Alto; London: Addison-Wesley Publishing company, Reading, Massachusetts (перевод: Вильямс Ф.А. Теория горения. — М.: Наука, 1971).

*Вилонов В.Н., Дик И.Г.*

1975. О фронтальном горении в слабоинтенсивном крупномасштабном турбулентном потоке. — Физика горения и взрыва, т. 11, № 2, с. 223–229.

1976. О статистико-феноменологическом подходе в описании турбулентных пламен. — ЖПМТФ, № 5, с. 61–68.

*Вингаард, Пао* (Wingard J.C., Pao Y.H.)

1975. Some measurements of fine structure at large Reynolds number turbulence. — In: Proc. of Sympos. held at the Univ. of Calif., San Diego, 1971. — Berlin: Springer-Verlag, p. 384–400.

*Вингаард, Пао, Виньянски* (Wingard J.C., Pao I.H., Wagnanski G.)

1976. On the two-dimensional mixing region. — J. Fluid Mech., v. 79, No. 2, p. 209–250.

*Вингаард, Теннекес* (Wingard J.C., Tennekes H.)

1970. Measurements of the small-scale structure of turbulence at moderate Reynolds numbers. — Phys. Fluids, v. 13, No. 8, p. 1962–1969.

*Виньянски, Фидлер* (Wagnanski I., Fiedler H.E.)

1970. The two-dimensional mixing region. — J. Fluid Mech., v. 41, pt. 2, p. 327–361.

*Вишик М.И., Фурсиков А.В.*

1980. Математические задачи статистической гидромеханики. — М.: Наука.

*Володина Л.И., Андреев М.А.*

1958. Влияние подогрева воздуха на процесс стабилизации пламени телами плохо-обтекаемой формы в открытом потоке. — В кн.: Исследование процессов горения. — М.: Изд-во АН СССР, с. 36–39.

*Вуд, Брэдшоу* (Wood H.W., Bradshaw P.)

1982. A turbulent mixing layer constrained by a solid surface. Part 1. Measurements before reaching the surface. — J. Fluid Mech., v. 122, p. 57–89.

*Вулис Л.А.*

1960. К вопросу о роли пульсаций температуры в турбулентном горении. — В кн.: Труды третьего Всесоюзного совещания по теории горения. — М.: Изд-во АН СССР, с. 86–90.

*Вулис Л.А., Ершин Ш.А., Ярин Л.П.*

1963. Основы теории газового факела. — Л.: Энергия.

*Гад-Эль-Хак, Мортон (Gad-el-Hak M., Morton J.B.)*

1979. Experiments on the diffusion of smoke in isotropic turbulent flow. — AIAA J., v. 17, No. 6, p. 558–562.

*Гауссори, Уиддел, Хоттел (Hawthorne W.R., Wedell D.S., Hottel H.S.)*

1949. Mixing and combustion in turbulent gas jets. — In: Third Int. Sympos. on combustion, flame and explosion phenomena. — Baltimore: The Williams and Wilkins Co., p. 267–300 (перевод: Смешивание и горение в турбулентных газовых струях. В кн.: Вопросы горения. Ч. 1 — М.: ИЛ. 1953, с. 146–193).

*Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.*

1959. Обобщенные функции и действия над ними ("Обобщенные функции". вып. 1). — 2-е изд. — М.: Наука.

*Гибсон (Gibson C.H.)*

1968. Fine structure of scalar fields mixed by turbulence. I. Zero-gradient points and minimal gradient surfaces. — Phys. Fluids, v. 11, No. 11, p. 2305–2315.

*Гибсон, Масейо (Gibson C.H., Masiello P.J.)*

1975. Observations of the variability of dissipation rates of turbulent velocity and temperature fields. — In: Proc. of Sympos. held at the Univ. of Calif., San Diego, 1971. — Berlin: Springer — Verlag, p. 428–452.

*Гибсон, Стеген, Вильямс (Gibson C.H., Stegen G.R., Williams R.B.)*

1970. Statistics of the fine structure of turbulent velocity and temperature fields measured at high Reynolds number. — J. Fluid Mech., v. 41, pt. 1, p. 153–167.

*Гибсон, Стеген, Мак-Коннел (Gibson C.H., Stegen G.R., McConnell S.)*

1970. Measurements of the universal constant in Kolmogoroff's third hypothesis for high Reynolds Number. — Phys. Fluids, v. 13, No. 10, p. 2448–2451.

*Гибсон, Шварц (Gibson C.H., Schwarz W.H.)*

1963. The universal equilibrium spectra of turbulent velocity and scalar fields. — J. Fluid Mech., v. 16, pt. 3, p. 365–384.

*Гиневский А.С., Иселевич В.А., Колесников А.В., Латин Ю.В., Пилипенко В.Н., Секундов А.Н.*

1978. Методы расчета турбулентного пограничного слоя. — Серия: Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа, 11. — М.: ВИНТИ, с. 155–304.

*Глэз (Glaz M.)*

1981. Statistical behaviour and coherent structures in two-dimensional inviscid turbulence. — SIAM J. Appl. Math., v. 41, No. 3, p. 459–479.

*Голованов Ю.В.*

1977. Экспериментальное исследование статистических характеристик турбулентных пульсаций концентрации примеси в затопленной струе. — Дис. на соис. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. — Долгопрудный: МФТИ.

*Голованов Ю.В., Шербина Ю.А.*

1979. Функции распределения вероятности концентрации в затопленных струях с различной начальной турбулентностью. — Депонировано в ВИНТИ, № 4061–79, 24 с.

*Голубев В.В., Янковский В.М., Постнов В.Ф., Талантов А.В.*

1973. Влияние давления на скорость распространения пламени в турбулентном потоке. — Изв. вузов, Авиац. техника, № 2, с. 77–86.

*Гольдштик М.А., Штерн В.Н.*

1977. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — Новосибирск: Наука. *Гремячкин В.М., Истратов А.Г.*

1972. Об устойчивости плоского пламени в потоке с градиентом скорости. — В кн.: Горение и взрыв. — М.: Наука, с. 305–308.

*Громов В.Г., Ларин О.Б., Левин В.А.*

1984. Применение модели "несмешанности" для расчета турбулентной пристенной струи водорода в спутном сверхзвуковом потоке воздуха. — Химическая физика, т. 3, № 8, 1190–1195.

*Гурвич А.С.*

1966. О распределении вероятностей квадрата разности скоростей в турбулентном потоке. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, т. 2, № 10, с. 1095–1098.

1967. О распределении вероятностей квадрата разности температур в двух точках турбулентного потока. — Докл. АН СССР, т. 172, № 3, с. 554–557.

*Гурвич А.С., Зубковский С.Л.*

1963. Об экспериментальной оценке флуктуаций диссипации энергии турбулентности. — Изв. АН СССР. Сер. геофиз., № 2, с. 1856–1858.

1965. Измерение четвертых и шестых моментов градиента скорости. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, т. 2, № 8, с. 797–802.

*Гурвич А.С., Яглом А.М.*

1967. Breakdown of eddies and probability distributions for small-scale turbulence. — Phys. Fluids, Supplement, v. 10, No. 9 (Part II), p. 59–65.

*Гэне, Хопфингер (Gagne Y., Hopfinger E.J.)*

1979. High order dissipation correlations and structure functions in an axisymmetric jet and plane channel flow. — In: Second Symposium on turbulent shear flows. London: Imperial College, p. 11.7–11.15.

*Гюнтер (Günther R.)*

1979. Strömungsturbulenz und Verbrennung. — Chemic. Ing. Techn., Bd. 51, H. 9, S. 858–866.

*Дамкелер (Damköhler G.)*

1940. Der Einfluss der Turbulenz auf die Flammgeschwindigkeit in Gasgemischen. — Zs. Electrochemie, Bd. 6, H. 11, S. 601–626.

*Дженкинс, Гольдшмидт (Genkins P.E., Goldschmidt W.W.)*

1976. Conditional (point averaged) temperature and velocity in a heated plane jet. — Phys. Fluids, v. 19, No. 5, p. 613–617.

*Дженкинс, Юмлу, Сполдинг (Jenkins D.R., Yumlu V.S., Spalding D.B.)*

1966. Combustion of hydrogen and oxygen in steady-flow adiabatic stirred reactor. — In: Eleventh Int. Sympos. on combustion. Pittsburgh: The Combustion Inst., p. 779–787.

*Дженсен, Джоунз (Jensen D.E., Jones G.A.)*

1978. Reaction rate coefficients for flame calculations. — Combustion and Flame, v. 32, No. 1, p. 1–33.

*Допазо (Dopazo C.)*

1975. Probability density function approach for a heated turbulent axisymmetric jet. Centerline evolution. — Phys. Fluids, v. 18, No. 4, p. 397–404.

1976. A probabilistic approach to turbulent flame theory. — Acta Astronaut., v. 3, No. 9–10, p. 853–878.

1977. On conditioned averages for intermittent turbulent flows. — J. Fluid Mech., v. 81, pt. 3, p. 433–438.

1979. Relaxation of initial probability density functions in the turbulent convection of scalar fields. — Phys. Fluids, v. 22, No. 1, p. 20–30.

*Допазо, О'Брайен (Dopazo C., O'Brien E.E.)*

1976. Statistical treatment of nonisothermal chemical reactions in turbulence. — Combustion Sci. and Technology, v. 13, p. 99–122.

1979. Intermittency in free turbulent shear flows. — In: Turbulent shear flows. 1/Ed. by Durst F., Launder B.E., Schmidt F.W., Whitelaw J.H. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer — Verlag, p. 6–23 (перевод: Переменяемость в свободных турбулентных сдвиговых течениях. — В кн.: Турбулентные сдвиговые течения. 1. — М.: Машиностроение, 1982, с. 10–27).

*Дорошенко В.Е., Никитский А.И.*

1960. Исследование влияния параметров смеси на характеристики процесса турбулентного горения. — В кн.: Горение при пониженных давлениях и некоторые вопросы стабилизации пламени в однофазных и двухфазных смесях. — М.: Изд-во АН СССР, с. 3–23.

*Дрейк, Питц, Лэпп (Drake M.C., Pitz R.W., Lapp M.)*

1984. Laser measurements of nonpremixed hydrogen-air flames for assesment of turbulent combustion models. — AIAA Paper, No 544.

*Дубовкин Н.Ф.*

1961. Справочник по углеводородным топливам и их продуктам сгорания. — М.; Л.: Госэнергоиздат.

*Дюамель (Duhamel P.)*

1981. A detailed derivation of conditioned equations for intermittent turbulent flows. — Letters in Heat and Mass Transfer, v. 8, p. 491–502.

- Женжамбр, Камбрэ, Кармэ, Беллэ* (Gengembre E., Cambray P., Karmed D., Bellet J.C.)  
1984. Turbulence diffusion flames with large buoyancy effects. – Combust. Sci. and Technol., v. 41, No. 1–2, p. 55–67.
- Зельдович Я.Б.*  
1944. Теория горения и детонации газов. – М.: Изд-во АН СССР.  
1949. К теории горения неперемешанных газов. – ЖТФ, т. 19, № 10, с. 1199–1210.  
1966. Об одном эффекте, стабилизирующем искривленный фронт пламени. – ЖПМТФ, № 1, с. 102–104.
- Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И.*  
1959. Theory of flame propagation. – Combustion and Flame, v. 3, No. 1, p. 61–74.
- Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М.*  
1980. Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука.
- Зельдович Я.Б., Садовников П.Я., Франк-Каменецкий Д.А.*  
1947. Окисление азота при горении. – М.: Изд-во АН СССР.
- Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А.*  
1938а. К теории равномерного распространения пламени. – Докл. АН СССР, т. 19, № 9, с. 693–695.  
1938б. Теория теплового распространения пламени. – ЖФХ, т. 12, № 1, с. 100–105.  
1947. Турбулентное и гетерогенное горение. – М.: ММИ.
- Зимонт В.Л.*  
1977. К расчету турбулентного горения частично перемешанных газов. – В кн.: Горение гетерогенных и газовых систем. – Черноголовка: ОИХФ АН СССР, с. 76–80.  
1979. К теории турбулентного горения однородной горючей смеси газов при больших числах Рейнольдса. – Физика горения и взрыва, т. 15, № 3, с. 23–32.
- Зимонт В.Л., Мещеряков Е.А.*  
1974. Расчет диффузионного турбулентного горения затопленной и спутной струи с учетом пульсаций концентраций в рамках интегрального метода. – Физика горения и взрыва, т. 10, № 2, с. 220–230.
- Зимонт В.Л., Мещеряков Е.А., Сабельников В.А.*  
1978. Простая модель для учета молекулярного смешения при турбулентном горении неперемешанных газов. – Физика горения и взрыва, т. 14, № 3, с. 55–62.  
1981. К расчету турбулентного диффузионного горения неперемешанных газов с учетом пульсаций концентрации и влияния турбулентности спутных потоков. – В кн.: Теория и практика сжигания газов, вып. 7. – Л.: Недра, с. 91–97.  
1983. Особенности сверхзвукового горения неперемешанных газов в каналах. – Физика горения и взрыва, т. 19, № 4, с. 75–78.
- Зимонт В.Л., Сабельников В.А.*  
1975а. Об уравнении турбулентного переноса при наличии молекулярной диффузии. – Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, т. 11, № 6, с. 627–629.  
1975б. Критериальное описание скорости сгорания в турбулентном потоке горючей смеси. – В кн.: Тезисы докладов второй Всесоюзной школы-конференции по теории горения. – М.: ИПМ АН СССР, с. 52–54.
- Зукоски, Марбл* (Zukoski E.E., Marble F.E.)  
1955. The role of wake transition in the process of flame stabilization on bluff bodies. Combustion researches and reviews. – In: Butterworth scientific publications, London, p. 167–180.
- Ибрагимов М.Х., Петрищева Г.А., Таранов Г.С.*  
1968. Исследование турбулентных характеристик свободной круглой струи несжимаемого газа. – Инж.-физ. журнал, т. 14, № 3, с. 415–422.
- Иевлев В.М.*  
1970. Приближенные уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. – Изв. АН СССР. МЖГ, № 1, с. 91–103.  
1972. Уравнения для конечномерных распределений вероятностей пульсирующих величин в турбулентном потоке. – Докл. АН СССР, т. 208, № 5, с. 1036–1038.  
1975. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. – М.: Наука.
- Ильяшенко С.М., Талантов А.В.*  
1964. Теория и расчет прямооточных камер сгорания. – М.: Машиностроение.
- Иошида, Гюнтер* (Yoshida A., Günther R.)

1980. Temperature and ionization measurements in turbulent premixed flames. — AIAA Paper, No. 207.

*Истратов А.Г., Либрович В.Б.*

1966 а. О влиянии процессов переноса на устойчивость плоского фронта пламени. — ПММ, т. 30, № 3, с. 451–466.

1966б. Устойчивость пламен. Итоги науки. — М.: Изд-во АН СССР.

1966в. Об устойчивости распространения сферического пламени. — ЖПМТФ, № 1, с. 67–78.

*Кавалл, Кеффер (Kawall J.G., Keffer J.E.)*

1979. Interface statistics of a uniformly distorted turbulent wake. — Phys. Fluids, v. 22, No. 1, p. 31–39.

*Калгатги, Мосс (Kalghatgi G.T., Moss J.B.)*

1979. Quantitative schlieren measurements in a confined turbulent premixed flame. — In: Second Symposium on turbulent shear flows, London: Imperial College, p. 5.9–5.14.

*Калиткин Н.Н.*

1978. Численные методы. — М.: Наука.

*Карловиц, Деннистон, Уэлс (Karlowitz B., Denniston D., Wells F.)*

1951. Investigation of turbulent flames. — J. Chem. Phys., v. 19, No. 4, p. 541–552.

*Карпов В.П., Северин Е.С.*

1977. Турбулентные скорости выгорания газовых смесей для описания сгорания в двигателях. — В кн.: Горение гетерогенных и газовых систем. — Черногоровка: ОИХФ АН СССР, 1977, с. 74–76.

1980. Влияние коэффициентов молекулярного переноса на турбулентную скорость выгорания. — Физика горения и взрыва, т. 16, № 1, с. 45–51.

*Картер (Carter J.E.)*

1974. Solutions for laminar boundary layers with separation and reattachment. — AIAA Paper, No. 583.

*Каскан (Kaskan W.E.)*

1958. The concentration of hydroxyl and of oxygen atoms in gases from lean hydrogen-air flames. — Combust. and Flame, v. 3, No. 2, p. 286.

*Кел (Curl R.L.)*

1963. Dispersed phase mixing: I. Theory and effects in simple reactors. — Amer. Inst. Chem. Eng. J., v. 9, No. 2, p. 175–181.

*Келлер Л.В., Фридман А.А. (Keller L.B., Fridman A.A.)*

1924. Differentialgleichung für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit. — In: Proc. First Intern. Congr. Appl. Mech., Delft, p. 395–405.

*Кент, Билджер (Kent J.H., Bilger R.W.)*

1977. The prediction of turbulent diffusion flame fields and nitric oxide formation. — In: Sixteenth Int. Sympos. on combustion. — Baltimore: The Williams and Wilkins Co., p. 1643–1656.

*Кеффер, Ольсен, Кавалл (Keffer J.F., Olsen G.J., Kawall J.G.)*

1977. Intermittency in a thermal mixing layer. — J. Fluid Mech., v. 79, pt. 3, p. 595–607.

*Киселев В.П.*

1977. Мелкомасштабная однородная турбулентность в задаче Бюргерса. — В кн.: Тр. 20-й науч. конф. МФТИ. Аэродинамика и прикладная математика. — Долгопрудный: МФТИ, с. 29–32.

*Кислов Н.В.*

1980. Краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. — Докл. АН СССР, т. 255, № 1, с. 26–30.

*Климов А.М.*

1963. Ламинарное пламя в турбулентном потоке. — ЖПМТФ, № 3, с. 49–58.

1972. К теории произвольного фронта ламинарного пламени. — В кн.: Горение и взрыв. — М.: Наука, с. 299–304.

1975. Распространение пламени при сильной турбулентности. — Докл. АН СССР, т. 221, № 1, с. 56–59.

1977а. О моделях турбулентного горения. — В кн.: Горение и взрыв. — М.: Наука, с. 349–356.

1977б. О стабилизации пламени рециркуляционными зонами. — В кн.: Горение гетерогенных и газовых систем. — Черногоровка: ОИХФ АН СССР, с. 81–84.

- Кляйнберг, Стегер* (Kleinberg J.M., Steger J.L.)  
1974. On laminar boundary-layer separation. – J. Fluid Mech., v. 53, pt. 1, p. 177–191.
- Клячко Л.А., Строкин В.Н.*  
1969. Турбулентное диффузионное горение в цилиндрической трубе. – Инж.-физ. журн., т. 17, № 3, с. 447–454.
- Коважний* (Kovaszny L.S.G.)  
1956. Combustion in turbulent flow. – Jet Propulsion, v. 26, p. 485–497.
- Коважний, Кибенс, Блэквелдер* (Kovaszny L.S.G., Kibens V., Blackwelder R.F.)  
1970. Large scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer. – J. Fluid Mech., v. 41, pt. 2, p. 283–325.
- Козаченко Л.С.*  
1960. Горение бензино-воздушных смесей в турбулентном потоке. – В кн.: Труды третьего Всесоюзного совещания по теории горения. – М.: Изд-во АН СССР, с. 126–137.
- Кокушкин Н.В.*  
1958. Исследование сгорания гомогенной смеси в турбулентном потоке посредством записи пульсирующей температур. – Изв. АН СССР, ОТН, № 8, с. 3–11.
1960. Исследование структуры турбулентного факела. – В кн.: Труды третьего Всесоюзного совещания по теории горения. – М.: Изд-во АН СССР, с. 109–113.
- Колмогоров А.Н.*  
1935. La transformation de Laplace dans les espaces linéaires. – Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), t. 200, p. 1717–1718.
1941. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. – Докл. АН СССР, т. 30, № 4, с. 299–303.
- 1962a. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса (на русск. и франц. языках) – Mécanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS à Marseille), Paris Éd., CNRS, p. 447–458.
- 1962b. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. – J. Fluid Mech., v. 13, pt. 1, p. 82–85.
- Кольман, Яничка* (Kollman W., Janicka J.)  
1982. The probability density functions of a passive scalar in turbulent shear flows. – Phys. Fluids, v. 25, No. 10, p. 1755–1769.
- Компаниец В.З., Овсянников А.А. и Полак Л.С.*  
1979. Химические реакции в турбулентных потоках газа и плазмы. – М.: Наука.
- Корсин* (Corrsin S.)  
1943. Investigation of flow in a axially symmetric heated jet of air. – Nat. Adv. Com. Aeronaut. Wartime Report, W – 94.
1951. The decay of isotropic temperature fluctuation in an isotropic turbulence. – J. Aeronaut. Sci., v. 18, No 6, p. 417–423.
- Корсин, Кистлер* (Corrsin S., Kistler A.L.)  
1955. The free-stream boundaries of turbulent flows. – Nat. Adv. Com. Aeronaut. Report, No. 1244.
- Котсовинос* (Kotsovinos N.E.)  
1977. Plane turbulent buoyant jets. Part II. Turbulent structure. – J. Fluid Mech., v. 81, pt. 1, p. 46–52.
- Красицкий В.П., Филимонов М.Л., Фрост В.А.*  
1970. Математическое описание турбулентного горения. – В кн.: Вопросы теории горения. – М.: Наука, с. 7–16.
- Крейчнан* (Kraichnan R.H.)  
1959. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds number. – J. Fluid Mech., v. 5, pt. 4, p. 497–543.
1974. On Kolmogorov's inertial-range theories. – J. Fluid Mech., v. 62, pt. 2, p. 305–330.
1975. Remarks on the turbulence theory. – Adv. in Math., v. 16, p. 305–331.
- Кремер* (Kremer H.)  
1966. Strömung und Mischung in frei brennenden diffusion Flammen. – VDI – Bericht, H. 95, S. 55–69.
- Кузин А.Ф., Талантов А.В.*  
1977. К вопросу о механизме и характеристиках горения в турбулентном потоке однородной смеси. – В кн.: Горение и взрыв. – М.: Наука, с. 356–360.

*Кузин А.Ф., Янковский В.М., Апполонов В.Л., Талантов А.В.*

1972. Влияние начальной температуры на основные характеристики горения в турбулентном потоке однородной смеси. – В кн.: Горение и взрыв. – М.: Наука, с. 337–341. *Кузнецов В.Р.*

1967. О плотности вероятностей разности скоростей в двух точках однородного, изотропного турбулентного потока. – ПММ, г. 31, № 6, с. 1069–1972.

1969. Влияние флуктуаций температуры и концентрации на среднюю скорость реакции в турбулентном потоке. – В кн.: Труды второго Всесоюзного симпозиума по горению и взрыву. – Черногоровка: ОИХФ АН СССР, с. 99–104.

1971. Распределение вероятностей концентрации пассивной примеси в затопленной осесимметричной струе. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, с. 161–164.

1972а. Вероятность концентрации пассивной примеси в турбулентных потоках с поперечным сдвигом. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, с. 86–91.

1972б. Влияние пульсаций температуры и концентраций на задержку воспламенения в турбулентном потоке – В кн.: Горение и взрыв. – М.: Наука, с. 342–346.

1975. Некоторые особенности движения фронта пламени в турбулентном потоке однородной горючей смеси. – Физика горения и взрыва, т. 11, № 4, с. 574–581.

1976а. Распределение вероятностей разности скоростей в инерционном интервале спектра турбулентности. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, с. 32–41.

1976б. Распространение пламени в турбулентном потоке горючей смеси. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, с. 3–15.

1977а. Скорость распространения пламени в турбулентном потоке гомогенной горючей смеси. – В кн.: Горение и взрыв. – М.: Наука, с. 366–372.

1977б. Смещение до молекулярного уровня и развитие химической реакции в турбулентном потоке. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, с. 32–41.

1977в. Статистические характеристики турбулентности в инерционном интервале спектра. – В кн.: Турбулентные течения. – М.: Наука, с. 123–129.

1979а. Оценка корреляции между пульсациями давления и дивергенции скорости в дозвуковых потоках переменной плотности. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, с. 4–11.

1979б. Влияние турбулентности на процессы горения. – В кн.: Труды пятых чтений, посвященных разработке научного наследия и развития идей А.Ф. Цандера. Теория и конструирование двигателей летательных аппаратов. – М.: ИИЕТ АН СССР, с. 66–75.

1980. Влияние неустойчивости пламени на турбулентное горение гомогенной смеси – В кн.: Горение газов и натуральных топлив. – Черногоровка: ОИХФ АН СССР, с. 32–37.

1982а. Влияние турбулентности на образование больших сверхравновесных концентраций атомов и свободных радикалов в диффузионных пламенах. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, с. 3–9.

1982б. Предельные законы распространения турбулентного пламени. – Физика горения и взрыва, т. 18, № 2, с. 52–60.

1983. Образование окиси углерода при турбулентном диффузионном горении. – Физика горения и взрыва, г. 19, № 4, с. 42–45.

*Кузнецов В.Р., Лебедев А.Б., Секундов А.Н., Смирнова И.П.*

1977а. Расчет турбулентного диффузионного факела горения с учетом пульсаций концентрации и архимедовых сил. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 1, с. 30–40.

1977б. Влияние пульсаций концентрации на диффузионное горение. – В кн.: Горение гетерогенных и газовых систем. – Черногоровка: ОИХФ АН СССР, с. 57–60.

1980. Анализ возможностей применения различных моделей турбулентности для описания диффузионного горения в струях. – В кн.: Горение газов и натуральных топлив. – Черногоровка: ОИХФ АН СССР, с. 29–32.

1981. Исследование квазиодномерного турбулентного горения с использованием уравнения для функции распределения плотности вероятностей концентрации – Изв. АН СССР, МЖГ, № 4, с. 3–11.

*Кузнецов В.Р., Прасковский А.А., Сабельников В.А.*

1984а. Перемежаемость и локальная структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. – Депонировано в ВИНТИ, № 4706–84, 130 с.

1984б. Экспериментальное исследование перемежаемости и локальной структуры турбулентного потока с поперечным сдвигом. – В кн.: Структура газозфазных пламен. Ч. II. – Новосибирск: ИГПМ СО АН СССР, с. 21–38.



*Кузнецов В.Р., Расщупкин В.И.*

1977. Распределение вероятностей и условное осреднение в турбулентных потоках. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, с. 31–37.

*Кузнецов В.Р., Сабельников В.А.*

1977. Особенности горения перемешанных газов в сильно турбулентном потоке. – Физика горения и взрыва, т. 13, № 4, с. 499–511.

1981а. Перемежаемость и распределения вероятностей скорости в турбулентных потоках. – Успехи механики, т. 4, вып. 3, с. 81–134.

1981б. Перемежаемость и распределения вероятностей концентрации в турбулентных потоках. – Успехи механики, т. 4, вып. 2, с. 123–166.

*Кузнецов В.Р., Фрост В.А.*

1973. Распределение вероятностей концентрации и перемежаемость в турбулентных струях. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, с. 58–64.

*Куо, О'Брайен (Kuo Ying-Yan, O'Brien E.E.)*

1981. Two-point probability density function closure applied to a diffusive-reactive system. – Phys. Fluids, v. 24, No. 2, p. 194–201.

*Куо, Корсин (Kuo A.Y.S., Corrsin S.)*

1971. Experiments on internal intermittency and fine structure distribution functions in fully developed turbulent fluid. – J. Fluid Mech., v. 50, pt. 2, p. 285–319.

*Лавуа, Шладер (Lavoie G.A., Schlader A.F.)*

1974. A scaling study of NO formation in turbulent diffusion flames of hydrogen burning in air. – Combust. Sci. and Techn., v. 8, p. 215–224.

*Ладыженская О.А.*

1970. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука.

1972. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса. – Докл. АН СССР, т. 205, № 2, с. 318–320.

*Ландау Л.Д.*

1944. К теории медленного горения. – ЖЭТФ, т. 14, № 6, с. 240–244.

*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.*

1954. Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат.

*Ландгрен (Lundgren T.S.)*

1967. Distribution functions in the statistical theory of turbulence. – Phys. Fluids, v. 10, No. 5, p. 968–975.

1969. Model equation for non-homogeneous turbulence. – Phys. Fluids, v. 12, No. 3, p. 485–497.

1975. A closure hypothesis for hierarchy of equations for turbulent probability distribution functions. – Lect. Notes Phys., v. 12, p. 70–100.

*Лерэ Ж. (Leray J.)*

1934. Sur le mouvement d'un liquide visqueux exsplant l'espace. – Acta Math., v. 63, p. 198–248.

*Либби (Libby P.A.)*

1975. On the prediction of the intermittent turbulent flows. – J. Fluid Mech., v. 68, pt. 2, p. 273–295.

1976. Prediction of the intermittent turbulent wake of a heated cylinder. – Phys. Fluids, v. 19, No. 4, p. 494–501.

*Либби, Брэй (Libby P.A., Bray K.N.C.)*

1981. Countergradient diffusion in premixed turbulent flames. – AIAA J., v. 19, No. 2, p. 205–213.

*Либби, Вильямс (Libby P.A., Williams F.A.)*

1976. Turbulent flows involving chemical reactions. – Annual Rev. Fluid Mech., v. 8, p. 351–376.

1981. Some implications of recent theoretical studies in turbulent combustion. – AIAA J., v. 19, No. 3, p. 261–274.

*Либрович В.Б., Лисицын В.И.*

1975. Взаимодействие пульсаций потока с химической реакцией турбулентного пламени. – М.: ИПМ, препринт № 57.

*Локеуд, Шэх (Lockwood F.C., Shah N.G.)*

1982. New method for the computation of probability density functions in turbulent flows. – AIAA J., v. 20, No. 6, p. 860–862.

- Лондер, Сполдинг** (Lauder B.E., Spalding D.B.)  
1972. *Mathematical models of turbulence*. – London; New York: Academic Press.
- Лонг, Чу** (Long M.B., Chu B.T.)  
1981. *Mixing mechanism and structure of an axisymmetric turbulent mixing layer*. – AIAA J., v. 19, No. 9, p. 1158–1163.
- Лонг, Чу, Ченг** (Long M.B., Chu B.T., Chang R.K.)  
1981. *Instantaneous two-dimensional gas concentration measurements by light scattering*. – AIAA J., v. 19, No. 9, p. 1151–1157.
- Лью, Брай, Мосс** (Liew S.K., Bray K.N.C., Moss J.B.)  
1984. *A stretched laminar flamelet model of turbulent non-premixed combustion*. – Combust. and Flame, v. 56, No. 2, p. 199–213.
- Льюис, Эльбе** (Lewis B., Elbe G. von)  
1961. *Combustion, flames and explosions of gases*. – New York; London: Academic Press (перевод: Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и детонация в газах. – М.: Мир, 1968).
- Льюис Б.Я.**  
1969. *Лагранжево описание динамики турбулентного движения*. – Докл. АН СССР, т. 184, № 5, с. 1069–1071.
- Любимов Б.Я., Улинич Ф.Р.**  
1970. *Статистические уравнения турбулентного движения в лагранжеских переменных*. – ПММ, т. 34, № 1, с. 24–31.
- Ля Рю** (La Rue J.C.)  
1974. *Detection of the turbulent-nonturbulent interface in slightly heated turbulent shear flows*. – Phys. Fluids, v. 17, No. 8, p. 1513–1517.
- Ля Рю, Либби** (La Rue J.C., Libby P.A.)  
1974. *Temperature fluctuations in the plane turbulent wake*. – Phys. Fluids, v. 17, No. 11, p. 1956–1967.
1976. *Statistical properties of the interface in the turbulent wake of a heated cylinder*. – Phys. Fluids, v. 19, No. 12, p. 1864–1875.
1978. *Detailed similarity in the turbulent wake of a heated cylinder*. – Phys. Fluids, v. 21, No. 6, p. 891–897.
1981. *Thermal mixing layer downstream of half-heated turbulent grid*. – Phys. Fluids, v. 24, No. 4, p. 597–603.
- Ля Рю, Либби, Сешадри** (La Rue J.C., Libby P.A., Seshadri D.V.R.)  
1981. *Further results on the thermal mixing layer downstream of a turbulent grid*. – Phys. Fluids, v. 24, No. 11, p. 1927–1933.
- Малкус** (Malkus W.V.)  
1956. *Outline of a theory of turbulent shear flow*. – J. Fluid Mech., v. 1, pt. 3, p. 521–539.
- Мандельброт** (Mandelbrot B.B.)  
1974. *Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier*. – J. Fluid Mech., v. 62, pt. 2, p. 331–358.
1975. *On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars*. – J. Fluid Mech., v. 72, pt. 2, p. 401–416.
1976. *Intermittent turbulence and fractal dimension: kurtosis and the spectral exponent  $5/3 + \nu$* . – In: *Turbulence and Navier-Stokes Equations*/Ed. by R. Temam. Lecture Notes in Math., v. 565. – New York: Springer, p. 121–145.
1977. *Fractals and turbulence: attractors and dispersion*. – Lecture Notes in Math., v. 615. – New York: Springer-Verlag, p. 83–93 (перевод: Мандельброт Б. Фракталы и турбулентность: аттракторы и разброс. – В кн.: Странные аттракторы/Сб. пер. под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. – М.: Мир, 1981, с. 47–57).
- Маркштейн** (Markstein G.H.)  
1975. *Radiative energy transfer from turbulent diffusion flame*. – ASME Paper, No. 75-HT-7.
- Марсден, Мак-Кракен** (Marsden J.E., McCracken M.)  
1976. *The Hopf bifurcation and its applications*. – New York: Springer-Verlag (перевод: Марсден Дж. и Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980).
- Мейрон, Бэйкер, Оржег** (Meiron D.L., Baker G.R., Orszag S.A.)  
1982. *Analytical structure of vortex sheet dynamics. Part 1. Kelvin–Helmholtz instability*. – J. Fluid Mech., v. 114, p. 283–298.

*Мерлис, Зай, Брэдшоу* (Murlis J., Tsai H.M., Bradshaw P.)

1982. The structure of turbulent boundary layers at low Reynolds numbers. — *J. Fluid Mech.*, v. 122, p. 13–56.

*Местейер* (Mestayer P.)

1982. Local isotropy and anisotropy in a high Reynolds number turbulent boundary layer. — *J. Fluid Mech.*, v. 119, p. 55–89.

Методы расчета турбулентных течений/Под ред. В. Кольмана. — М.: Мир, 1984 (Prediction methods for turbulent flows/Ed. by W. Kollman. A von Karman Institute Book Hemisphere Publishing Corporation, 1980).

*Мешков М.А.*

1976. Экспериментальное исследование структуры пульсаций концентрации в спутных струях. — В кн.: Труды 21-й научн. конф. МФТИ. Аэрофизика и прикл. матем. — Долгопрудный: МФТИ, с. 22–24.

*Мешков М.А., Щербина Ю.А.*

1979. Экспериментальное исследование статистических характеристик поля смешения соосных струй с различными начальными условиями. — Депонировано в ВИНТИ, № 4059-79, 59 с.

1981. Развитие плоского турбулентного слоя смешения. — В кн.: Пятый Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. — Алма-Ата: Наука, с. 254–255.

*Мещеряков Е.А.*

1974. О соотношении коэффициентов турбулентной диффузии среднего значения скалярной величины и ее пульсаций в свободных струях. — Ученые записки ЦАГИ, т. 5, № 1, с. 113–118.

*Мещеряков Е.А., Сабельников В.А.*

1984а. Полуэмпирическая модель и расчет коэффициента перемежаемости в турбулентных струйных течениях. — Физ. горения и взрыва, т. 20, № 4, с. 45–52.

1984б. Определение коэффициента перемежаемости в турбулентных струях. — В кн.: Структура газозаженных пламен. Ч. II. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, с. 3–20.

*Мирабель А.П., Монин А.С.*

1979. Двумерная турбулентность. — Успехи механики, т. 2, вып. 3, с. 47–95.

*Михеев А.А.*

1949. Основы теплопередачи. — М.: Госэнергоиздат.

*Мияваки, Цуджикава, Урагучи* (Miyawaki O., Tsujikawa H., Uruguchi Y.)

1974. Turbulent mixing in multi-nozzle injection tubular mixer. — *J. Chem. Eng. Japan*, v. 7, No. 1, p. 52–56.

*Мобс* (Mobbs F.R.)

1968. Spreading and contraction of the boundaries of free turbulent flows. — *J. Fluid Mech.*, v. 33, pt. 2, p. 227–240.

*Монин А.С.*

1967а. Уравнения для конечномерных распределений вероятности поля турбулентности. — Докл. АН СССР, т. 177, № 5, с. 1036–1038.

1967б. Уравнения турбулентного движения. — ПММ, т. 31, № 6, с. 1057–1068.

1978. О природе турбулентности. — УФН, т. 125, вып. 1, с. 97–122.

*Монин А.С., Яглом А.М.*

1963. О законах мелкомасштабных турбулентных движений жидкостей и газов. — УМН, т. 18, вып. 5 (113), с. 93–114.

1965. Статистическая гидромеханика. Ч. I. — М.: Наука.

1967. Статистическая гидромеханика. Ч. II. — М.: Наука.

*Морс, Фешбах* (Mors P.M., Feshbach H.)

1953. Methods of theoretical physics, Part II. — New York; Toronto; London: McGraw-Hill (перевод: Морс Ф.М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. II. — М.: ИЛ, 1960).

*Мосс* (Moss J.B.)

1980. Simultaneous measurements of concentration and velocity in an open premixed turbulent flame. — *Combustion Sci. and Technol.*, v. 22, No. 3–4, p. 119–129.

*Морф, Оржег, Фриш* (Morf R.H., Orzag S.A., Frisch U.)

1980. Spontaneous singularity in three-dimensional, inviscid incompressible flow. — *Phys. Rev. Lett.*, v. 44, p. 572.

*Моум, Кавалл, Кеффер* (Moum J.N., Kawall J.G., Keffer J.F.)

1979. Structural features of the plane turbulent jet. – *Phys. Fluids*, v. 22, No. 7, p. 1240–1244.

*Мур* (Moore D.W.)

1979. The spontaneous appearance of a singularity in the shape of a evolving vortex sheet. – *Proc. Roy. Soc., A* 365, No. 1720, p. 105–119.

*Недоруб С.А., Шербина Ю.А.*

1979. Аналитические решения уравнения для одноточечной функции распределения вероятностей концентрации в турбулентных течениях. – Депонировано в ВИНТИ, № 3406–79, 34 с.

*Недоруб С.А., Фрост В.А., Шербина Ю.А.*

1979. Расчет турбулентной диффузии и гомогенного турбулентного факела на основе статистической модели. – Депонировано в ВИНТИ, № 3405–79, 57 с.

*Нейланд В.Я.*

1971. Течение за точкой отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. – *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3, с. 19–25.

*Нелькин* (Nelkin M.)

1974. Turbulence, critical phenomena and intermittency. – *Phys. Rev., A* 9, No. 1, p. 388–395.

1975. Scaling theory of hydrodynamic turbulence. – *Phys. Rev., A* 11, No. 5, p. 1737–1743.

1981. Do the dissipation fluctuations in high Reynolds number turbulence define a universal exponent. – *Phys. Fluids*, v. 24, No. 3, p. 556–557.

Нестационарное распространение пламени/Под ред. Дж. Г. Маркштейна. – М.: Мир, 1968. (Nonsteady flame propagation/Ed. by G.H. Markstein. – Pergamon Press, 1964).

*Новиков Е.А.*

1965. О корреляционных связях высокого порядка в турбулентном потоке. – *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, т. 1, № 8, с. 788–796.

1966. Математическая модель перемежаемости турбулентного потока. – *Докл. АН СССР*, т. 168, № 6, с. 1279–1282.

1967. Кинетическое уравнение для поля вихря. – *Докл. АН СССР*, т. 177, № 2, с. 299–301.

1969. Масштабное подобие для случайных полей. – *Докл. АН СССР*, т. 184, № 5, с. 1072–1075.

1971. Перемежаемость и масштабное подобие в структуре турбулентного потока. – *ПММ*, т. 35, № 2, с. 266–277.

*Новиков Е.А., Стюарт Р.У.*

1964. Перемежаемость турбулентности и спектр флуктуаций диссипации энергии. – *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.*, № 3, с. 408–413.

*О'Брайен* (O'Brien E.E.)

1978. Advection of scalars by a nonbuoyant plume. – *J. Fluid Mech.*, v. 89, No. 2, p. 209–222.

1980a. Statistical methods in reacting turbulent flows. – *AIAA Paper*, No. 137.

1980b. The probability density function (pdf) approach to reacting turbulent flows. – In: *Turbulent Reacting Flows. Topics in Applied Phys.*, v. 44/Ed. by P.A. Libby and F.A. Williams. – New York; Heidelberg: Springer-Verlag, Chap III (перевод: Метод функции плотности вероятности (ФПВ) в теории турбулентных течений с химическими реакциями. – В кн.: Турбулентные течения реагирующих газов/Под ред. П. Либби. Ф. Вильямса. – М.: Наука, 1983, с. 252–296).

*О'Брайен, Допазо* (O'Brien E.E., Dopazo C.)

1978. Behaviour of conditioned variables in free turbulent shear flows. – In: *Structure and mechanisms of turbulence. II* – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, p. 124–133.

*Обухов А.М.*

1941. О распределении энергии в спектре турбулентного потока. – *Докл. АН СССР*, т. 32, № 1, с. 22–24.

1949. Структура температурного поля в турбулентном потоке. – *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.*, т. 13, № 13, с. 58–69.

1962. Some specific features of atmospheric turbulence. — J. Fluid Mech., v. 13, pt. 1, p. 77–81.

*Олер, Дженкинс, Гольдшмидт* (Oler J.W., Jenkins P.E., Goldschmidt V.W.)

1981. Interface related velocities in turbulent plane jets. — Phys. Fluids, v. 24, No. 7, p. 1235–1237.

*Олбер, Бэтт* (Alber I.E., Batt R.G.)

1974. An analysis of diffusion limited first and second order chemical reactions in a turbulent shear layer. — AIAA Paper, No. 593.

1976. Diffusion-limited chemical reactions in a turbulent shear layer. — AIAA J., v. 14, No. 1, p. 70–77.

*Онзагер* (Onsager L.)

1945. The distribution of energy in turbulence (abstr.) — Phys. Rev., v. 68, No. 11–12, p. 286.

1949. Statistical hydrodynamics. — Nuovo cimento, (9), 6, Suppl. No. 2, p. 279–287.

*Онуфриев А.Т.*

1977. О модельном уравнении для плотности вероятностей в полуэмпирической теории турбулентного переноса. — В кн.: Турбулентные течения. — М.: Наука, с. 110–116.

*Оттино* (Ottino J.M.)

1982. Description of mixing with diffusion and reaction in terms of the concept of material surfaces. — J. Fluid Mech., v. 114, p. 83–103.

*Пайзис, Шварц* (Paizis S.T., Schwarz W.H.)

1974. An investigation of the topography and motion of the turbulent interface. — J. Fluid Mech., v. 63, pt. 2, p. 315–343.

1975. Entrainment rates in turbulent shear flows. — J. Fluid Mech., v. 68, pt. 2, pt. 297–308.

*Палм-Лейс, Стрелов* (Palm-Leis A., Strehlow R.A.)

1969. On the propagation of turbulent flames. — Combustion and Flame, v. 13, No. 2, p. 111–129.

*Петерс* (Peters N.)

1984. Laminar diffusion flamelet models in non-premixed turbulent combustion. — Progr. Energy and Combust. Sci., v. 10, No. 3, p. 319–340.

*Петерс, Вильямс* (Peters N., Williams F.A.)

1981. Coherent structures in turbulent combustion. — Lect. Not. Phys., v. 136, p. 364–393.

*Петерсон, Эммонс* (Petersen R.E., Emmons H.W.)

1961. Stability of laminar flames. — Phys. Fluids, v. 1, No. 4, p. 456–464.

*Повинелли, Фукс* (Povinelli L.A., Fuchs A.E.)

1962. The spectral theory of turbulent flame propagation. — In: Eighth Int. Sympos. on combustion, Baltimore: The Williams and Wilkins Co., p. 554–559.

*Понд, Стюарт* (Pond S., Stewart R.W.)

1965. Измерения статистических характеристик мелкомасштабных турбулентных движений. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, т. 1, № 9, с. 914–919.

*Поуп* (Pope S.B.)

1976. The probability approach to the modelling of turbulent reacting flows. — Combustion and Flame, v. 27, No. 3, p. 299–312.

1979a. The statistical theory of turbulent flames, Phil. Trans. Roy. Soc., A 291, p. 529–568.

1979b. A rational method of determining probability distributions in turbulent reacting flows. — J. Non-Equil. Thermodyn., v. 4, p. 309.

1980. Probability distributions of scalars in turbulent shear flow. — In: Turbulent shear flows II, Second Int. Sympos., London, 1979. — Berlin e.a., p. 7–16 (перевод: Распределения вероятностей скалярных величин в турбулентном сдвиговом потоке. — В кн.: Турбулентные сдвиговые течения 2. — М.: Машиностроение, 1983, с. 11–22).

1981a. A monte-carlo method for the pdf equations of turbulent reactive flow. — Combustion Sci. and Technology, v. 25, p. 159–174.

1981b. Transport equation for the joint probability density function of velocity and scalars in turbulent flow. — Phys. Fluids, v. 24, No. 4, p. 588–596.

1982. The application of pdf transport equations to turbulent reactive flows. – J. Non-Equilib. Thermodyn., v. 7, p. 1–14.
1983. A Lagrangian two-time probability density function equation for inhomogeneous turbulent flows. – Phys. Fluids, v. 26, No. 12, p. 3448–2450.
- Прасковский А.А.*
1982. Выбросы турбулентных пульсаций. – Депонировано в ВИНТИ, № 4831–82, 81 с.
1983. Измерение условно осредненных характеристик турбулентности в плоском следе за цилиндром. – ЖПМТФ, № 6, с. 87–94.
- Прудников А.Г., Волинский М.С., Сагалович В.Н.* и др.
1971. Процессы смешения и горения в воздушно-реактивных двигателях. – М.: Машиностроение.
- Пуллин (Pullin D.I.)*
1981. The nonlinear behaviour of a constant vorticity layer at a wall. – J. Fluid Mech., v. 108, p. 401–422.
- Рабинович М.И.*
1978. Стохастические автоколебания и турбулентность. – УФН, т. 125, вып. 1. с. 123–168.
- Раджагопалан, Антониа (Rajagopalan S., Antonia R.A.)*
1980. Characteristics of a mixing layer of a two-dimensional turbulent jet. – AIAA J., v. 18, No. 9, p. 1052–1058.
- Расцупкин В.И., Секундов А.Н.*
1978. Экспериментальное и теоретическое исследование пульсаций температуры в следе за линейным тепловым источником. – Изв. АН СССР, МЖГ, № 4, с. 39–45.
- Раушенбах Б.В., Белый С.А., Беспалов И.В., Бородачев В.Я., Волинский М.С., Прудников А.Г.*
1964. Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей. – М.: Машиностроение.
- Рейнольдс (Reynolds W.S.)*
1976. Computation of turbulent flows. – Annual Review of Fluid Mech., v. 8, p. 183–208.
- Рибнер, Таккер (Ribner H.S., Tucker M.)*
1953. Spectrum of turbulence in a contracting stream. – Nat. Adv. Com. Aeronaut. Report, No. 1113.
- Ричардсон (Richardson L.F.)*
1922. Weather prediction by numerical process. – Cambridge Univ. Press.
1926. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. – Proc. Roy. Soc., A 110, No. 756, p. 709–737.
- Роди (Rodi W.)*
1980. Turbulence models for environmental problems. – In: Prediction Methods for turbulent flows/Ed. by W. Kollman. – A von Karman Institute Book Hemisphere Publishing corporation, p. 259–350 (перевод: Модели окружающей среды. – В кн.: Методы расчета турбулентных течений/Под ред. В. Кольмана. – М.: Мир, 1983, с. 227–322).
- Роуз, Сулем (Rose H.A., Sulem P.L.)*
1978. Fully developed turbulence and statistical mechanics. – J. Phys., v. 39, p. 441–484.
- Роуч (Roache P.J.)*
1976. Computational fluid dynamics, Revised Printing. – Hermosa Publishers. Albuquerque (перевод: Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980).
- Рошко (Rochko A.)*
1976. Structure of turbulent shear flows: a new look. – AIAA Paper, No. 78
- Рэмшоу (Ramshaw J.D.)*
1980. Partial chemical equilibrium in fluid dynamics. – Phys. Fluids, v. 23, No. 4, p. 675–681.
- Сабельников В.А.*
1975. Некоторые линейные задачи теории деформации однородной турбулентности. – Труды ЦАГИ, вып. 1702.
1979. К вопросу об описании свободных турбулентных течений с учетом явления перемежаемости. Уравнения для условно осредненных характеристик турбулентности. – Труды ЦАГИ, вып. 1998.

1980а. Распределение вероятностей концентрации в турбулентном диффузионном факеле. — В кн.: Горение газов и натуральных топлив. — Черноголовка: ОИХФ АН СССР, с. 40—44.

1980б. Уравнения для распределений вероятностей скорости и концентрации в турбулентной и нетурбулентной областях свободных течений. — Ученые записки ЦАГИ, т. 11, № 6, с. 25—30.

1981. Описание турбулентного диффузионного горения с помощью совместного распределения вероятностей скорости и концентрации. — В кн.: Тезисы докладов на семинаре "Механика и физика плазмы и газовых потоков (аэродинамика горения газов)". — Рига: ИМП АН СССР и ИМП Латв. ССР, с. 42—43.

1982а. Об использовании одноточечного распределения вероятностей скорости для описания турбулентных течений. — ЖПМТФ, № 5, с. 66—74.

1982б. Теоретическое и численное исследование распределения вероятностей концентрации в свободных турбулентных течениях. — Физика горения и взрыва, т. 18, № 2, с. 77—88.

1982в. Распределение вероятностей концентрации пассивной примеси в слое смешения. — Ученые записки ЦАГИ, т. 13, № 5, с. 49—57.

1982г. Расчет плоской турбулентной струи с использованием уравнения для распределения вероятностей скорости. — В кн.: Турбулентные струйные течения. Тезисы докладов четвертого Всесоюзного научного совещания по теоретическим и прикладным аспектам турбулентных течений. Ч. II. — Таллин: Изд-во АН ЭССР, ИТЭФ, с. 27—31.

1983. Модельное уравнение для распределения вероятностей скорости и концентрации при турбулентном смешении и диффузионном горении газов. — Физика горения и взрыва, т. 19, № 2, с. 37—46.

1985а. Анализ полумпирических гипотез, используемых при замыкании уравнения для плотности вероятностей концентрации. — Депонировано в ВИНТИ, № 7212—85, 48 с.

1985б. О поведении плотности вероятностей концентрации в области больших амплитуд пульсаций в струйных турбулентных потоках. — В кн.: Турбулентные струйные течения. Тезисы докладов пятого Всесоюзного научного совещания по теоретическим и прикладным аспектам турбулентных течений. Ч. I. — Таллин: Изд-во АН ЭССР, ИТЭФ, с. 75—79.

1985в. Полумпирическая модель для расчета коэффициента перемежаемости, основанная на средних скоростях и вторых моментах в турбулентных потоках. — Ученые записки ЦАГИ, т. 16, № 5, с. 48—59.

1986. Анализ моделей для плотности вероятностей концентрации в теории турбулентного смешения и горения. — В сб.: Труды международной школы-семинара "Процессы турбулентного переноса в реагирующих системах". — Минск: ИТМО АН БССР, с. 19—29.

*Сарофим, Поль* (Sarofim A.F., Pohl J.H.)

1973. Kinetics of nitric oxide formation in premixed laminar flames. — In: Fourteenth Int. Sympos. on Combustion. Pittsburgh: The Combustion Inst., p. 739—753.

*Саффмен* (Saffman P.G.)

1978. Problems and progress in the theory of turbulence. — Lecture Notes Phys., v. 76, p. 279—306.

1981. Dynamics of vorticity. — J. Fluid Mech., v. 106, p. 49—58.

*Саффмен, Бэйкер* (Saffman P.G., Baker G.R.)

1979. Vortex interactions. — Annual Review of Fluid Mech., v. 11, p. 95—122.

*Седов Л.И.*

1977. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука.

*Секундов А.Н.*

1971. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтомоделных течений. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, с. 119—127.

*Сиггал И.Л.*

1977. Защита воздушного бассейна при сжигании топлива. — М.: Недра.

*Сиггиа* (Siggia E.D.)

1981. Numerical study of small-scale intermittency in three-dimensional turbulence. — J. Fluid Mech., v. 107, p. 375—406.

*Сиггиа, Петтерсон* (Siggia E.D., Patterson G.S.)

1978. Intermittency effects in a numerical simulation of stationary three-dimensional turbulence. — *J. Fluid Mech.*, v. 86, pt. 3, p. 567–592.

*Сосинович В.А.*

1973. Конечномерные функции распределения в статистической теории турбулентности. — *ТМФ*, т. 17, № 1, с. 131–141.

1974. Кинетические уравнения для однородной турбулентности. — *Изв. АН СССР, МЖТ*, № 5, с. 150–152.

1981а. Замкнутое уравнение для структурной функции изотропного турбулентного поля скорости. — *Инж.-физ. журн.*, т. 40, № 6, с. 980–992.

1981б. Уравнение для структурной функции турбулентного стационарного изотропного поля скорости и его решение в инерционном интервале масштабов. — *Инж.-физ. журн.*, т. 41, № 5, с. 796–808.

*Сполдинг* (Spalding D.B.)

1971. Mixing and chemical reaction in steady confined turbulent flame. — In: Thirteenth Int. Sympos. on Combustion. Pittsburgh: The Combustion Inst., p. 649–657.

1976. Mathematical models of turbulent flames: a review. — *Combust. Sci. and Technol.*, v. 13, p. 3–25.

Странные аттракторы: Сб. пер. с англ./Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. — М.: Мир, 1981.

*Стэрнер, Билджер* (Starner S.H., Bilger R.W.)

1980а. LDA measurements in a turbulent diffusion flame with axial pressure gradient. — *Comb. Sci. and Technology*, v. 21, p. 259–276.

1980б. Measurements of velocity and concentration in turbulent diffusion flames with pressure gradients. — *AIAA Paper*, No. 25.

*Стойарт, Вильсон, Берлинг* (Stewart R.W., Wilson J.R., Burling R.W.)

1970. Some statistical properties of small scale turbulence in an atmospheric boundary layer. — *J. Fluid Mech.*, v. 41, pt. 1, p. 141–152.

*Стойартсон* (Stewartson C.)

1951. The impulsive motion of a flat plate in a viscous fluid. — *J. of Mech. and Appl. Math.*, v. 4, No. 2, p. 182–198.

1974. Multistructural boundary layers on flat plates and related bodies. — *Adv. Appl. Mech.*, v. 14, p. 145–239.

*Сузуки, Оба, Хирано, Цуджи* (Suzuki T., Oba M., Hirano T., Tsuji H.)

1979. An experimental study of turbulent premixed flame. — *Bulletin JSME*, v. 22, No. 167, p. 848–856.

*Сулем, Сулем* (Sulem C., Sulem Pl.)

1983. The well-posedness of two-dimensional ideal flow. — *Journal de Mécanique théorique et appliquée Numéro spécial*, p. 217–242.

*Сычев В.В.*

1972. О ламинарном отрыве. — *Изв. АН СССР, МЖТ*, № 3, с. 47–59.

*Такаги, Шин, Ишио* (Takagi T., Shin H.-D., Ishio A.)

1981а. Properties of turbulence in turbulent diffusion flames. — *Combustion and Flame*, v. 40, No. 2, p. 121–140.

1981б. A study on the structure of turbulent diffusion flame: properties of fluctuations of velocity, temperature and ion concentration. — *Combustion and Flame*, v. 41, No. 3, p. 261–271.

*Талантов А.В.*

1975. Основы теории горения. — Казань: КАИ.

*Танг, Адриан* (Tung T.S., Adrian R.J.)

1980. Higher-order estimates of conditional eddies in isotropic turbulence. — *Phys. Fluids*, v. 23, No 7, p. 1469–1470.

*Таунсенд* (Townsend A.A.)

1949. The fully developed turbulent wake of a circular cylinder. — *Aust. J. Sci. Res.*, v. 2, p. 451–468.

1951. On the fine-scale structure of turbulence. — *Proc. Roy. Soc.*, A 208, No. 1098, p. 534–542.

1956. The structure of turbulent shear flow. — Cambridge Univ. Press (перевод: Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. — М.: ИЛ, 1959).



*Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.*

1974. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука.

*Томас (Thomas R.M.)*

1973. Conditional sampling and other measurements in a plane turbulent wake. — J. Fluid Mech., v. 57, pt. 3, p. 549–582.

Турбулентные течения реагирующих газов/Под ред. П.А. Либби и Ф.А. Вильямса. — М.: Мир, 1983. (Turbulent Reacting flows/Ed. by P.A. Libby and F.A. Williams. Topics in Applied Physics, v. 44. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980).

*Тэвуларис, Корсин (Tavoularis S., Corrsin S.)*

1981a. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with uniform mean temperature gradient. Part 1. — J. Fluid Mech., v. 104, p. 311–347.

1981b. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with uniform mean temperature gradient. Part 2. The fine structure. — J. Fluid Mech., v. 104, p. 349–367. *Тейлор, Грин (Taylor G.L., Green A.E.)*

1937. Mechanism of the production of small eddies from large ones. — Proc. Roy. Soc., A 158, No. 895, p. 499–521.

*Уберои, Сингх (Uberoi M.S., Singh P.I.)*

1975. Turbulent mixing in a two-dimensional jet. — Phys. Fluids, v. 18, No 7, p. 764–770.

*Улинич Ф.Р.*

1968. Статистическая динамика турбулентной несжимаемой жидкости. — Докл. АН СССР, т. 183, № 3, с. 535–537.

*Улинич Ф.Р., Любимов Б.Я.*

1968. К статистической теории турбулентности при больших числах Рейнольдса. — ЖЭТФ, т. 55, № 3, с. 951–965.

*Уонг (Wang J.C.T.)*

1983. On the numerical methods for the singular parabolic equations in fluid dynamics. — J. Comput. Phys., v. 52, No. 3, p. 464–479.

*Фабрис (Fabris G.)*

1979a. Turbulent temperature and thermal flux characteristics in the wake of a cylinder. — In: Turbulent shear flows. I/Ed. by F. Durst, B.E. Launder, F.W. Schmidt, J.H. Whitelaw. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, p. 55–70 (перевод: Турбулентная температура и характеристики теплового потока в следе за цилиндром. — В кн.: Турбулентные сдвиговые течения I. — М.: Машиностроение, 1982, с. 59–72).

1979b. Conditional sampling study of the turbulent wake of cylinder. Part 1. — J. Fluid Mech., v. 94, pt. 4, p. 673–710.

1983a. Third order conditional transport correlations in the two-dimensional turbulent wake. — Phys. Fluids, v. 26, No. 2, p. 422–427.

1983b. Higher-order statistics of turbulent fluctuations in the plane wake. — Phys. Fluids, v. 26, No 6, p. 1437–1445.

*Федорюк М.В.*

1983. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука.

*Фидлер (Fiedler H.E.)*

1974. Transport of heat across a plane turbulent mixing layer. — Adv. Geophysics, v. 18A, p. 93–109.

*Филлипс (Phillips O.M.)*

1955. The irrotational motion outside a free turbulent boundary. — Proc. Camb. Phil. Soc., v. 51, No. 1, p. 220–229.

1972. The entrainment interface. — J. Fluid Mech., v. 51, pt. 1, p. 97–118.

*Фокс (Fox R.L.)*

1971. Solution for turbulent correlations using multipoint distribution functions. — Phys. Fluids, v. 14, No. 8, p. 1806–1808.

1975. Multipoint distribution functions hierarchy for compressible turbulent flow. — Phys. Fluids, v. 18, No. 10, p. 1245–1248.

*Франк-Каменецкий Д.А.*

1967. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука.

*Фрейе, Ван Атта, Гибсон (Freihe C.O., Van Atta C.W., Gibson C.H.)*

1972. Jet turbulence dissipation rate measurements and correlations. — In: AGARD Conference proceedings No. 93 on turbulent shear flows. — London: Techn. Ed. Reproduction.

*Фреймус, Уберои* (Freymuth P., Uberoi M.S.)

1971. Structure of temperature fluctuations in the turbulent wake behind heated cylinder. — *Phys. Fluids*, v. 14, No. 12, p. 2574–2580.

*Френкиль, Клебанов* (Frenkiel F.N., Klebanoff P.S.)

1975. On the log-normality of the small-scale structure of turbulence. — *Bound. Layer Meteorol.*, v. 8, No. 2, p. 173–200.

1979. Grid turbulence in air and water. — *Phys. Fluids*, v. 22, No 9, p. 1606–1617.

*Фридман* (Friedman A.)

1964. Partial differential equations of parabolic type. — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hill (перевод: Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968).

*Фриш, Солям, Нелькин* (Frisch U., Sulem Ph.L., Nelkin M.)

1978. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. — *J. Fluid Mech.*, v. 87, pt. 4, p. 719–737.

*Фрост В.А.*

1960. Математическая модель турбулентного горения. — В кн.: Труды третьего Всесоюзного совещания по теории горения. — М.: Изд-во АН СССР, с. 121–125.

1967. Ускорение процессов молекулярного переноса в турбулентных потоках. — Докл. АН СССР, т. 176, № 4, с. 794–796.

1973. Модель турбулентного диффузионного фронта пламени. — Изв. АН СССР. Энергетика и трансп., № 6, с. 108–116.

1977. Модель гомогенного турбулентного факела пламени. — В кн.: Горение и взрыв. — М.: Наука, с. 361–365.

*Хедли, Кеффер* (Hedley T.B., Keffer J.F.)

1974a. Turbulent/non-turbulent decisions in an intermittent flow. — *J. Fluid Mech.*, v. 64, pt. 4, p. 625–644.

1974b. Some turbulent/non-turbulent properties of the outer intermittent region of a boundary layer. — *J. Fluid Mech.*, v. 64, pt. 4, p. 645–678.

*Хилл* (Hill J.)

1976. Homogeneous turbulent mixing with chemical reaction. — *Annual Review of Fluid Mech.*, v. 8, p. 135–161.

*Хинце* (Hinze J.O.)

1959. Turbulence. An introduction to its mechanism and theory. — New-York: Mc Graw Hill (перевод: Хинце И.О. Турбулентность. — М.: Наука, 1963).

*Холл* (Hall H.G.)

1965. The boundary layer over an impulsively started flat plate. — *Proc. Roy Soc.*, A310, No. 1502, p. 401–414.

*Холмянский М.З.*

1970. Исследование микропульсаций производной скорости ветра в приземном слое атмосферы. — Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 6, № 4, с. 423–430.

1972. Измерения микротурбулентных пульсаций производной скорости ветра в приземном слое. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, т. 8, № 8, с. 818–828.

*Хомяк* (Chomiak J.)

1970. A possible propagation mechanism of turbulent flames at high Reynolds numbers. — *Combustion and Flame*, v. 15, No. 3, p. 319–321.

1979. Basic considerations in the turbulent flame propagation in premixed gases. — *Progr. Energy Combustion Sci.*, v. 5, p. 207–221.

*Хомяк, Ярославски* (Chomiak J., Jarosinski J.)

1982. Flame quenching by turbulence. — *Combustion and Flame*, v. 48, No. 3, p. 241–249.

*Хопф* (Hopf E.)

1952. Statistical hydromechanics and functional calculus. — *J. Rat. Mech. Anal.*, v. 1, No. 1, p. 87–123.

*Храмцов В.А.*

1960. Экспериментальное исследование горения однородной топливо-воздушной смеси при низких давлениях. — В кн.: Горение при пониженных давлениях и некоторые вопросы стабилизации пламени в однофазных и двухфазных смесях. — М.: Изд-во АН СССР, с. 43–53.

*Чанг* (Chang P.M.)

1969. A simplified statistical model of turbulent chemically reacting shear flows. — *AIAA J.*, v. 7, No. 10, p. 1982–1991.

1970. Chemical reaction in turbulent flow field with uniform velocity gradient. — *Phys. Fluids*, v. 13, No. 10, p. 1153–1165.

1972. Diffusion flame in homologous turbulent shear flows. — *Phys. Fluids*, v. 15, No. 10, p. 1735–1746.

1976. A kinetic-theory approach to turbulent chemically reacting flows. — *Combustion Sci. and Technology*, v. 13, p. 123–153.

*Чен* (Chen W.Y.)

1971. Lognormality of small-scale structure of turbulence. — *Phys. Fluids*, v. 14, No. 8, p. 1639–1642.

*Чен, Блэкуелдер* (Chen C.-H., Blackwelder R.F.)

1978. Large-scale motion in a turbulent boundary layer: a study using temperature contamination. — *J. Fluid Mech.*, v. 89, pt. 1, p. 1–32.

*Ченг, Нг* (Cheng R.K., Ng T.T.)

1983. Velocity statistics in premixed turbulent flames. — *Combustion and Flame*, v. 52, No. 2, p. 185–202.

*Черчиньяни* (Cercignani C.)

1975. Theory and application of the Boltzman equation. — Edinburgh and London: Scottish Academic Press (перевод: Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. — М.: Мир. 1978).

*Чорин* (Chorin A.J.)

1981. Estimates of intermittency, spectra and blow-up in developed turbulence. — *Comm. Pure and Appl. Math.*, v. 34, No. 6, p. 853–866.

*Шампань, Пао, Виньянски* (Champagne F.H., Pao J.H., Wygnanski I.J.)

1976. On the two-dimensional mixing region. — *J. Fluid Mech.*, v. 74, pt. 2, p. 209–250.

*Шаб В.А.*

1948. Связь между температурными и скоростными полями газового факела. — В кн.: Исследование процессов горения натурального топлива. — М.: Госэнергоиздат, с. 231–248.

*Шеврэ, Туту* (Chevray R., Tutu N.K.)

1978. Intermittency and preferential transport of heat in a round jet. — *J. Fluid Mech.*, v. 88, pt. 1, p. 133–160.

*Шейх, Теннекес, Ламли* (Sheih C.M., Tennekes H., Lumley J.L.)

1971. Airborne hot-wire measurements of the small-scale structure of atmospheric turbulence. — *Phys. Fluids*, v. 14, No. 2, p. 201–215.

*Шлихтинг* (Schlichting H.)

1960. Boundary layer theory: 4-th edition. — New York: McGraw-Hill (перевод: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974).

*Шон, Шарне* (Schon J.P., Charney C.)

1977. Conditional sampling. — In: Measurements of unsteady fluid phenomena/Ed. by В.Е. Richards — New York a.o.: McGraw-Hill, p. 291–325.

*Шринивасан* (Sreenivasan K.R.)

1981. Evolution of the center-line probability density function of temperature in a plane turbulent wake. — *Phys. Fluids*, v. 24, No. 7, p. 1232–1234.

*Шринивасан, Антониа* (Sreenivasan K.R., Antonia R.A.)

1978. Joint probability densities and quadrant contributions in a heated turbulent round jet. — *AIAA J.*, v. 16, No 9, p. 867–868.

*Шринивасан, Антониа, Бритц* (Sreenivasan K.R., Antonia R.A., Britz D.)

1979. Local isotropy and large structures in a heated turbulent jet. — *J. Fluid Mech.*, v. 94, pt. 4, p. 745–776.

*Шринивасан, Антониа, Стефенсон* (Sreenivasan K.R., Antonia R.A., Stephenson S.E.)

1978. Conditional measurements in a heated axi-symmetric turbulent mixing layer. — *AIAA J.*, v. 16, No. 9, p. 869–870.

*Шринивасан, Дань, Антониа* (Sreenivasan K.R., Danh H.Q., Antonia R.A.)

1977. Temperature dissipation fluctuations in turbulent boundary layer. — *Phys. Fluids*, v. 20, No. 10, p. 1050–1057.

*Шелкин К.И.*

1943. О сгорании в турбулентном потоке. — *ЖТФ*, т. 13, № 9–10, с. 520–530.

*Шелкин К.И., Трошин Я.К.*

1965. Газодинамика горения. — М.: Изд-во АН СССР

*Шербина Ю.А.*

1982. Статистические характеристики турбулентного переноса. – Долгопрудный: МФТИ.

*Шербина Ю.А., Мозилко В.А.*

1985. Статистические характеристики конвективного переноса примеси в свободной струе. – В кн.: Турбулентные струйные течения. Тезисы докладов пятого Всесоюзного научного совещания по теоретическим и прикладным аспектам турбулентных течений. Часть II. – Таллин: Изд-во АН ЭССР, ИТЭФ, с. 69–74.

*Шетинкос Ы.С.*

1965. Физика горения газов. – М.: Наука.

*Шеферд, Мосс* (Shepherd I.G., Moss J.B.)

1981. Measurements of conditioned velocities in a turbulent premixed flame. – AIAA Paper. No. 181.

*Эбрахими, Гюнтер, Хаберда* (Ibrahimi I., Günther R., Haberda F.)

1977. Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der Konzentration in isothermen Luft–Freistrahlen. – Forsch. Ing. – Wes., Bd. 43, H. 2, S. 47–52.

*Экхауз* (Eckhaus W.)

1961. Theory of flame front stability. – J. Fluid Mech., v. 10, pt. 1, p. 80–100.

*Эндрус, Брэдли, Лвакавамба* (Andrews G.E., Bradley D., Lwakawamba S.B.)

1975. Turbulence and turbulent flame propagation. – Combustion and Flame, v. 24, No. 3, p. 285–304.

*Яглом А.М.*

1966. О влиянии флуктуаций диссипации энергии на форму характеристик турбулентности в инерционном интервале. – Докл. АН СССР, т. 166, № 1, с. 49–52.

*Яничка, Кольбе, Кольман* (Janicka J., Kolbe W., Kollman W.)

1979. Closure of the transport equation for the probability density function of turbulent scalar fields. – J. Non–Equilib. Thermodyn., v. 4, p. 47–66.

*Яничка, Кольман* (Janicka J., Kollman W.)

1979. Prediction model for pdf of turbulent flows. – In: Second symposium on turbulent shear flows. – London: Imperial College.

*Янковский В.М., Талантов А.В.*

1969. Влияние размера системы на основные характеристики горения в турбулентном потоке однородной смеси. – В кн.: Тр. второго Всесоюзного симпозиума по горению и взрыву. – Черноголовка: ОИХФ АН СССР, с. 117–123.

**Вадим Ростиславович Кузнецов**  
**Владимир Анатольевич Сабельников**

### **ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ГОРЕНИЕ**

Редакторы *А.Н. Секундов, А.Г. Мордвинцев*  
Технические редакторы *С.В. Геворкян, В.Н. Никитина*  
Корректоры *Г.В. Барбашина, Т.В. Обод*

Набор осуществлен в издательстве  
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 12622

Сдано в набор 31.01.86. Подписано к печати 20.05.86  
Т-11520. Формат 60 X 90 1/16. Бумага офсетная  
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная. Усл.печ.л. 18,0  
Усл.кр.-отт. 18,0. Уч.-изд.л. 21,22. Тираж 2780 экз.  
Тип. зак. 46 Цена 3 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство "Наука"  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"  
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

