

Е. К. МОШКИН

ЭКЗ. №

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ ОСНОВНЫХ
ПРОЦЕССОВ, ПРОТЕКАЮЩИХ
В ДВИГАТЕЛЕ**

МОСКВА — 1960

*Военная ордена Ленина и ордена Суворова
Артиллерийская инженерная академия
имени Ф. Э. Дзержинского*

Е. К. МОШКИН

ЭКЗ. № . . .

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ ОСНОВНЫХ
ПРОЦЕССОВ, ПРОТЕКАЮЩИХ
В ДВИГАТЕЛЕ

В книге изложен вывод уравнений, описывающих процессы в камере, гидравлических цепях и агрегатах системы питания. Приведены решения для некоторых упрощенных случаев. Рассмотрены режимы работы двигателя в окрестности расчетного режима. Предложены графический метод и последовательность анализа внутрикамерных процессов.

Книга предназначена для инженеров, специализирующихся в области исследования двигателей, и может быть использована как учебник по курсу, читаемому факультативно.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория двигателя и возникшие на ее основе математические методы исследования расширяют наши представления о процессах, позволяют организовать научный эксперимент, обработать и проанализировать опытные данные.

Математические методы давно и широко используются на практике; отечественная и иностранная литература, особенно за последнее десятилетие, обогатилась итогами всесторонних исследований.

С целью приближения теоретического материала к решению задач практического характера, излагая математические вопросы, мы имели в виду реальные двигатели, описанные в журналах «Вопросы ракетной техники», «Jet Propulsion» и др.

Первые три главы книги посвящены выводу и анализу уравнений, описывающих отдельные процессы. В последующих главах рассматриваются вопросы взаимосвязи. Разнообразие применяемых в отдельных главах подходов к решению и анализу иллюстрирует широкие возможности математического метода исследования. По методическим соображениям материал излагается в упрощенном виде.

Автор благодарит Г. М. Третьякова, Е. Б. Волкова, А. Н. Иванову, Б. Г. Климова, В. И. Пухова, Я. М. Шапиро и Д. Н. Шеверова за советы и большую помощь, оказанную в период работы над затронутыми в книге проблемами.

Глава I

ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРИКАМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

В данной главе рассматривается вывод уравнений, описывающих процессы, протекающие во внутренней полости камеры сгорания. С целью получения наиболее точного математического представления о процессе выбрана цилиндрическая система координат, и все процессы рассматриваются протекающими во времени и в пространстве.

Обозначениям и пояснениям к ним посвящен девятый параграф данной главы. Глава заканчивается составлением замкнутой системы уравнений.

Уравнения, выводимые в первой главе, методами современного математического анализа решены быть не могут. При решении этих уравнений на машинах дискретного счета возникают исключительные трудности, связанные, в частности, с программированием. В упрощенном виде уравнения решаются с привлечением общеизвестных методов и могут быть проанализированы качественно.

Перечисленные трудности не должны задерживать дальнейшего совершенствования и уточнения уравнений. Большое количество опытного материала, анализ статистического материала, результаты частных исследований позволяют сейчас многое предпринять в отношении совершенствования математических представлений.

Подобное направление нам кажется актуальным, поскольку практика предъявляет все новые, с каждым разом все более сложные требования к результатам теоретических исследований, которые пока слишком скромны в отношении практических рекомендаций.

Это обстоятельство объясняется тем, что исключительно сложные внутрикамерные процессы изучаются в большинстве

случаев при помощи упрощенных уравнений. В результате выхолащивания многих процессов, кажущихся, на первый взгляд, второстепенными, принимаемые для исследования уравнения не отражают истинной картины, и исследование, организуемое при их помощи, не может, естественно, привести к желаемым результатам. Упрощения, о которых шла речь, проводились в целях получения возможности решить уравнения одним из традиционных математических методов.

Совершенствование, а не упрощение уравнений, должно сочетаться с разработкой новых методов математического анализа.

Публикуемые уравнения, несмотря на их сложность, отражают лишь ограниченный круг явлений, ибо при написании их автор представлял себе определенную обстановку и ставил перед собой вполне ограниченный круг вопросов.

При организации исследования нельзя использовать их без должного критического анализа. Только после глубокого качественного изучения всех абстракций и связей между подлежащими исследованию процессами следует самостоятельно написать требуемую систему дифференциальных и алгебраических уравнений.

Процессы, протекающие в агрегатах двигателя и в других новых машинах, настолько сложны и во многих случаях своеобразны, что применение универсальных, общеизвестных уравнений при организации современных исследований должно быть решительно отвергнуто. В § 3 данной главы в качестве примера показана принципиальная разница между достаточно точно написанным уравнением закона сохранения энергии и уравнением адиабаты. В § 2 также в качестве примера отмечена принципиальная разница, обнаруживаемая между классическим уравнением Эйлера и написанным для горящего потока уравнением второго закона Ньютона.

При организации исследования рекомендуется ориентироваться на фундаментальные объективные законы, глубоко изучать и многие второстепенные факторы, характерные для конкретной задачи.

Рассматриваемые в первой главе уравнения содержат все же целый ряд ограничений: уравнения не учитывают всех возможных форм теплообмена, в них не рассмотрены вихревые и циркуляционные явления, не достаточно конкретизировано действие сил трения, далеко не исчерпаны возможности в отношении определения начальных и граничных условий.

Перед изучением публикуемых материалов рекомендуется возобновить в памяти содержание соответствующих курсов, а во время чтения привлекать обширный материал по результатам исследований в смежных областях.

§ 1. УРАВНЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МАССЫ
(УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ)

Рассмотрим элемент горящего во внутренней полости камеры потока топлива (рис. 1). В элементе $abfjhd$ часть объема занимает газ — продукт испарения и горения топлива, другую часть объема — топливо, находящееся в жидкой фазе.

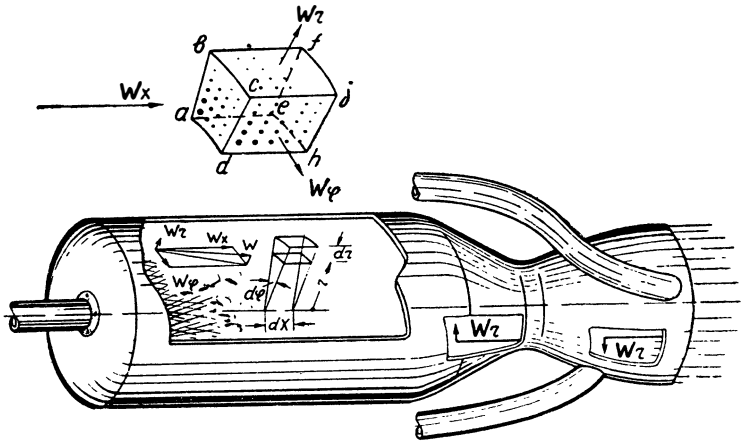


Рис. 1.

Рассмотрим грань $abcd$. Площадь $abcd$ равна

$$rd\varphi dr. \quad (1,1)$$

Пусть жидкость, проходящая через грань $abcd$, занимает площадь S_x . Следовательно, живое сечение грани $abcd$, т. е. площадь, через которую проходит газ, составит

$$rd\varphi dr - S_x. \quad (1,2)$$

Временной (секундный) массовый расход газа будет

$$\rho W_x (rd\varphi dr - S_x).$$

На элементе пути dx изменение массы газа, движущегося в элементе в направлении W_x , составит

$$\frac{\partial [\rho W_x (rd\varphi dr - S_x)]}{\partial x} dx. \quad (1,3)$$

Величина $rd\varphi dr$ не является функцией x , площадь S_x , занимаемая топливом (жидкостью), вследствие **выгорания** топлива в направлении W_x уменьшается. Площадь, занимаемая жидкостью на грани $efjh$, отличается от площади S_x на грани $abcd$ на величину $\frac{\partial S_x}{\partial x} dx$.

Таким образом, вместо (1,3) можно написать

$$\left[\frac{\partial (\rho W_x)}{\partial x} r d\varphi dr - \frac{\partial (\rho W_x S_x)}{\partial x} \right] dx. \quad (1,4)$$

Первый член выражения (1,4) характеризует изменение массового расхода газа, протекающего через элемент постоянной площади. Второй член характеризует уменьшение рассматриваемой разности (изменения) массового расхода газа, обусловливаемое стеснением проходного сечения элемента. Стеснение жидкостью не одинаково по оси x . В сечении $abcd$ оно определяется величиной S_x , а в сечении $efjh$ — величиной

$$S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx. \quad (1,5)$$

Если бы выгорания топлива по длине элемента не было, то вместо второго члена следовало бы писать

$$S_x \frac{\partial (\rho W_x)}{\partial x} dx. \quad (1,6)$$

Таким образом, за счет увеличения живого сечения, возникающего вследствие горения топлива, рассматриваемая разность увеличивается на

$$\rho W_x \frac{\partial S_x}{\partial x} dx. \quad (1,7)$$

Следует иметь в виду, что

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} < 0. \quad (1,8)$$

Направление W_x является основным; скорость W_x непрерывно возрастает по длине камеры и сопла, хотя возможны пульсации скорости и даже отрицательные значения W_x , обусловленные местными противотоками.

Если рассматривают движение газа только в направлении W_x , то задачу называют одномерной. При проведении точных исследований учитывают и составляющие W_r и W_φ скорости газа W .

Радиальная составляющая W_r возникает под действием геометрических факторов, вследствие радиальных составляющих скорости топлива, истекающего из форсунки, в силу турбулентности потока, в результате взаимодействия отдельных частиц топлива и газа и по ряду других причин. Если бы перечисленных возмущающих факторов не было, то в центральной части камеры составляющая скорости $W_r = 0$; во входном конусе сопла она была бы меньше нуля, т. е. была бы направлена к оси камеры (рис. 1), а в выходной части — больше нуля. Возмущающие факторы не меняют знака составляющей в сопловой части, но приводят к пульсации как в сопловой, так и в центральной части камеры.

Пусть в рассматриваемый момент времени $W_r > 0$. Массовый расход газа через грань $aehd$ будет

$$\rho W_r (rd\varphi dx - S_r). \quad (1,9)$$

На элементе пути dr изменение массы газа, движущегося в элементе в направлении W_r , составит

$$\frac{\partial(\rho W_r r)}{\partial r} dr d\varphi dx - \frac{\partial(\rho W_r S_r)}{\partial r} dr. \quad (1,10)$$

Тангенциальная составляющая W_φ возникает по тем же причинам, что и W_r , за исключением геометрических факторов, не влияющих, как правило, на W_φ . Составляющая W_φ может возникнуть также за внутрикамерной турбиной или при вращении камеры. Массовый расход газа через грань $abfe$

$$\rho W_\varphi (dr dx - S_\varphi).$$

На элементе пути $rd\varphi$ изменение массы газа, движущегося в элементе в направлении W_φ , составит

$$\frac{\partial(\rho W_\varphi)}{\partial \varphi} d\varphi dr dx - \frac{\partial(\rho W_\varphi S_\varphi)}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (1,11)$$

Теперь можно написать выражение для определения изменения массы газа в элементе

$$\left[\frac{\partial(\rho W_x)}{\partial x} r + \frac{\partial(\rho W_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho W_\varphi)}{\partial \varphi} \right] d\varphi dr dx - \left[\frac{\partial(\rho W_x S_x)}{\partial x} dx + \frac{\partial(\rho W_r S_r)}{\partial r} dr + \frac{\partial(\rho W_\varphi S_\varphi)}{\partial \varphi} d\varphi \right]. \quad (1,12)$$

Учтем подвод газа внутри элемента, возникающий вследствие выгорания движущегося топлива.

Пусть через плоскость, совпадающую с гранью $abcd$, протекает в направлении W_x топливо с массовым расходом $\frac{G_x}{g}$.

Определим массовый поток топлива через элементарное кольцо dr .

По результатам испытания головки вычислим временную (секундную) высоту жидкости в сборнике топлива (рис. 2). Эта высота является, как правило, функцией r и φ , т. е. $H(r, \varphi)$.

Опыт следует проводить так, чтобы высота H определялась без учета выгорания. Однако вследствие сложного характера движения жидкости $H = H(x, r, \varphi)$.

Временной объем жидкости

$$Q = \int 2\pi r H(x, r, \varphi) dr.$$

Временной массовый расход

$$\frac{G}{g} = 2\pi \int \rho_{ж} r H(x, r, \varphi) dr. \quad (1,13)$$

Следовательно,

$$d \frac{G}{g} = 2\pi \rho_{ж} r H(x, r, \varphi) dr.$$

Теперь имеем

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dG}{dr} = 2\pi \rho_{ж} r H(x, r, \varphi).$$

Если перейти от одномерного потока к трехмерному, то следует писать

$$2\pi \rho_{ж} r H(x, r, \varphi) = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial G_x}{\partial r}. \quad (1,14)$$

Подставляя (1,14) в (1,13), находим

$$\frac{G_x}{g} = \frac{1}{g} \int \frac{\partial G_x}{\partial r} dr.$$

Для определения массового потока через кольцо dr имеем

$$\frac{1}{g} \int_r^{r+dr} \frac{\partial G_x}{\partial r} dr.$$

Для дуги dr частную производную $\frac{\partial G_x}{\partial r}$ можно вынести за знак интеграла; получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \int_r^{r+dr} \frac{\partial G_x}{\partial r} dr &= \frac{1}{g} \int_0^{dr} \frac{\partial G_x}{\partial r} dr = \\ &= \frac{1}{g} \frac{\partial G_x}{\partial r} \int_0^{dr} dr = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial G_x}{\partial r} dr. \end{aligned}$$

Только на дуге $d\varphi$, т. е. через грань $abcd$, пройдет массовый поток

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial G_x}{\partial r} \right) d\varphi dr = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{\partial \varphi \partial r} d\varphi dr. \quad (1,15)$$

В результате выгорания топлива в элементе внутри элемента образуются газообразные продукты. Массовое газообразование внутри элемента составит

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 G_x}{\partial \varphi \partial r} \right) d\varphi dr dx = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{\partial \varphi \partial r \partial x} d\varphi dr dx. \quad (1,16)$$

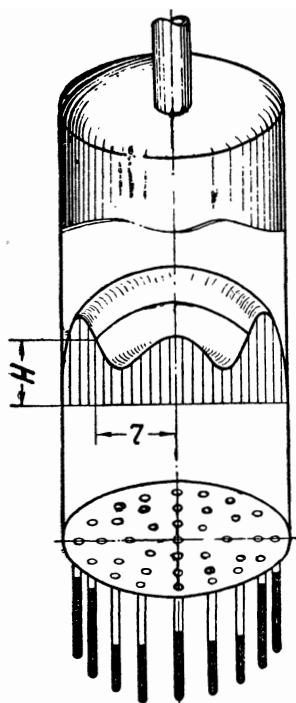


Рис. 2.

Для определения (1,16) необходимо, конечно, знать закон выгорания топлива по направлению оси x .

Аналогично (1,16) находим массовые потоки продуктов сгорания в элементе, возникающие в направлениях W_r и W_φ :

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_r}{\partial \varphi \partial r \partial x} d\varphi dr dx; \quad (1,17)$$

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_\varphi}{\partial \varphi \partial r \partial x} d\varphi dr dx. \quad (1,18)$$

Полный подвод в элемент будет

$$\frac{1}{g} \left[\frac{\partial^3 G_x}{\partial \varphi \partial r \partial x} + \frac{\partial^3 G_r}{\partial \varphi \partial r \partial x} + \frac{\partial^3 G_\varphi}{\partial \varphi \partial r \partial x} \right] d\varphi dr dx. \quad (1,19)$$

Определим площади S_x , S_r и S_φ . Поскольку массовый поток в направлении W_x определяется выражением (1,15), то

$$S_x = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{\partial \varphi \partial r} d\varphi dr \frac{1}{\rho_{ж} C_x}, \quad (1,20)$$

где $\rho_{ж}$ — плотность топлива;

C_x — составляющая скорости топлива.

Очевидно, что

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} dx = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{\partial \varphi \partial r \partial x} d\varphi dr dx \frac{1}{\rho_{ж} C_x}. \quad (1,21)$$

Аналогично (1,20) находим

$$S_r = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 G_r}{\partial \varphi \partial x} d\varphi dx \frac{1}{\rho_{ж} C_r}, \quad (1,22)$$

$$S_\varphi = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r \partial x} dr dx \frac{1}{\rho_{ж} C_\varphi}. \quad (1,23)$$

Учитывая (1,20), (1,22) и (1,23), перепишем (1,12) так:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial (\rho W_x)}{\partial x} r + \frac{\partial (\rho W_r r)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho W_\varphi)}{\partial \varphi} \right] d\varphi dr dx - \\ & - \frac{1}{g \rho_{ж}} \left[\frac{\partial \left(\rho \frac{W_x}{C_x} \right)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\partial \left(\rho \frac{W_r}{C_r} \right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 G_r}{\partial \varphi \partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \left(\rho \frac{W_\varphi}{C_\varphi} \right)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r \partial x} \right] d\varphi dr dx - \frac{1}{g \rho_{ж}} \left[\rho \frac{W_x}{C_x} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{\partial \varphi \partial r \partial x} + \right. \\ & \left. + \rho \frac{W_r}{C_r} \cdot \frac{\partial^3 G_r}{\partial \varphi \partial r \partial x} + \rho \frac{W_\varphi}{C_\varphi} \cdot \frac{\partial^3 G_\varphi}{\partial \varphi \partial r \partial x} \right] d\varphi dr dx. \quad (1,24) \end{aligned}$$

Выражение в первой квадратной скобке характеризует изменение в элементе протекающей через элемент массы газа без учета стеснения канала элемента жидкостью (топливом). Выражение во второй квадратной скобке отражает уменьшение изменения массы, возникающее за счет неизменного по длине элемента стеснения. В третьей квадратной скобке записано выражение, отражающее роль снижения эффекта стеснения по длине элемента.

Следует иметь в виду, что в силу специфики рассматриваемого процесса (уменьшения жидкой фазы):

$$\frac{\partial (\partial^2 G_x)}{\partial \varphi \partial r \partial x} < 0; \quad (1,25)$$

$$\frac{\partial (\partial^2 G_r)}{\partial \varphi \partial r \partial x} < 0; \quad (1,26)$$

$$\frac{\partial (\partial^2 G_\varphi)}{\partial \varphi \partial r \partial x} < 0. \quad (1,27)$$

Мы определили изменение массы, протекающей по элементу (1,24), и образующейся в элементе (1,19) массы продуктов сгорания. В результате изменения массы будет наблюдаться изменение плотности газа в элементе. В самом деле, выражение (1,24) показывает, сколько в единицу времени подведено в элемент (или отведено из элемента) газа. Выражение (1,19) показывает, сколько в тот же промежуток времени подведено в элемент газа (продуктов сгорания и испарения) за счет выгорания топлива, находящегося в элементе.

По закону сохранения массы полное изменение массы газа в элементе определится разностью рассмотренных масс газа. Это локальное временное изменение массы можно представить через изменение плотности в единицу времени

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1,28)$$

В рассматриваемом свободном объеме элемента оно составит

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} (r d\varphi dr dx - V_{ж}), \quad (1,29)$$

где $V_{ж}$ — объем жидкости в элементе. Этот объем можно определить для случая переменных значений площадей жидкости на гранях

$$= \sqrt{\left(S_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S_x}{\partial x} dx \right) \left(S_r - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S_r}{\partial r} dr \right) \left(S_\varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right)}. \quad (1,30)$$

Подставим значения площадей и их производных, получим

$$V_{\text{ж}} = (g\rho_{\text{ж}})^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{C_x} \left(\frac{\partial^2 G_x}{r \partial \varphi \partial r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{r \partial \varphi \partial r} dx \right)} \times \\ \times \sqrt{\frac{1}{C_r} \left(\frac{\partial^2 G_r}{r \partial \varphi \partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 G_r}{r \partial \varphi \partial x} dr \right)} \times \\ \times \sqrt{\frac{1}{C_\varphi} \left(\frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r \partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r \partial x} d\varphi \right)} rd\varphi dr dx. \quad (1,31)$$

Если изменением текущих площадей жидкости в элементе можно пренебречь, то (1,31) упрощается и принимает вид

$$V_{\text{ж}} = (g\rho_{\text{ж}})^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{C_x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{r \partial \varphi \partial r} \cdot \frac{1}{C_r} \cdot \frac{\partial^2 G_r}{r \partial \varphi \partial x} \cdot \frac{1}{C_\varphi} \cdot \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r \partial x}} \times \\ \times rd\varphi dr dx. \quad (1,32)$$

Уравнение (1,32) показывает, что площади граней и объем жидкости в элементе зависят от отношений расходов через элемент к соответствующей скорости. Если расход и скорость равны нулю, то объем жидкости в элементе может быть отличным от нуля (рис. 3).

Определим значение

$$\left| \frac{1}{C_x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{r \partial \varphi \partial r} \right|_{\substack{G_x \rightarrow 0 \\ C_x \rightarrow 0}}. \quad (1,33)$$

Используя (1,20), находим

$$\left| \frac{1}{C_x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{r \partial \varphi \partial r} \right|_{\substack{G_x \rightarrow 0 \\ C_x \rightarrow 0}} = g^{\varepsilon_{x0}} \rho_{\text{ж}}, \quad (1,34)$$

где гравиметрический коэффициент

$$\varepsilon_{x0} = \frac{S_{x0}}{rd\varphi dr}; \quad (1,35)$$

S_{x0} — площадь жидкости на грани $abcd$ при $G_x \rightarrow 0$ и $C_x \rightarrow 0$.

В любых других условиях

$$\varepsilon_x = \frac{S_x}{rd\varphi dr}; \quad \varepsilon_r = \frac{S_r}{rd\varphi dx}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{S_\varphi}{dr dx}. \quad (1,35')$$

Теперь выражение (1,29) перепишем так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} r \left[1 - (g_{\rho, ж})^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{C_x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{r \partial \varphi \partial r}} \sqrt{\frac{1}{C_r} \cdot \frac{\partial^2 G_r}{r \partial \varphi \partial x}} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{1}{C_\varphi} \cdot \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r \partial x}} \right] d\varphi dr dx. \quad (1,36)$$




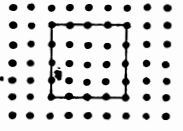
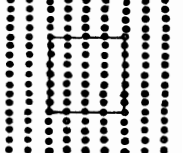
$G_r = 0;$ $C_r = 0;$	$\frac{G_r}{C_r} = a$		$G_x \neq 0;$ $C_x \neq 0;$	$\frac{G_x}{C_x} = a;$ $V = A.$
$G_r = 0;$ $C_r = 0;$	$\frac{G_r}{C_r} = a$		$G_x = 0;$ $C_x = 0;$	$\frac{G_x}{C_x} = a;$ $V = A.$
$G_r = 0;$ $C_r = 0;$	$\frac{G_r}{C_r} = a$		$G_x \neq 0;$ $C_x \neq 0;$	$\frac{G_x}{C_x} = 2a;$ $V = 2A.$
$G_r \neq 0;$ $C_r \neq 0;$	$\frac{G_r}{C_r} = a$		$G_x \neq 0;$ $C_x \neq 0;$	$\frac{G_x}{C_x} = a;$ $V = A.$
$G_r \neq 0;$ $C_r \neq 0;$	$\frac{G_r}{C_r} = 2a$		$G_x \neq 0;$ $C_x \neq 0;$	$\frac{G_x}{C_x} = a;$ $V = 2A.$

Рис. 3.

В наиболее общем случае, когда необходимо учесть изменение текущих площадей жидкости в элементе, при описании (1,36) следует ориентироваться не на (1,32), а на (1,31). Выражение под знаком корня в (1,31) и в (1,32) обозначим

$$\Pi \left(\frac{G_i}{C_i} \right). \quad (1,37)$$

Вместо (1,36) напишем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} r \left[1 - (g_{\rho, ж})^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\Pi \left(\frac{G_i}{C_i} \right)} \right] d\varphi dr dx. \quad (1,38)$$

Используя (1,24), (1,19) и (1,38), напомним уравнение закона сохранения массы для газа в элементе горящего потока, формулируя его так: изменение плотности газа в элементе за единицу времени равно изменению массы газа, движущегося через элемент, и массе газа, образующегося в течение той же единицы времени за счет выгорания находящегося в элементе топлива

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} \left[1 - (g\rho_{ж})^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\prod \left(\frac{G_i}{C_i} \right)} \right] + \\
 & + \left[\frac{\partial(\rho W_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho W_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho W_\varphi)}{\partial \varphi} \right] - \\
 & - \frac{1}{g\rho_{ж}} \left[\frac{\partial \left(\rho \frac{W_x}{C_x} \right)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{r \partial \varphi \partial r} + \frac{\partial \left(\rho \frac{W_r}{C_r} \right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 G_r}{r \partial \varphi \partial x} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \left(\rho \frac{W_\varphi}{C_\varphi} \right)}{r \partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r \partial x} \right] - \frac{\rho}{g\rho_{ж}} \left[\frac{W_x}{C_x} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} + \frac{W_r}{C_r} \frac{\partial^3 G_r}{r \partial \varphi \partial r \partial x} + \right. \\
 & \left. + \frac{W_\varphi}{C_\varphi} \cdot \frac{\partial^3 G_\varphi}{r \partial \varphi \partial r \partial x} \right] - \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{\partial \varphi \partial r \partial x} = 0. \quad (1,39)
 \end{aligned}$$

Анализ уравнения закона сохранения массы

1. Особенности полученного уравнения

Особенностью уравнения закона сохранения массы для горящего потока, отличающей его от уравнения того же закона для газового потока, является наличие функций, характеризующих и отражающих стеснение, и функции, определяющей подвод газа за счет выгорания топлива. Напишем (1,39)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} \Phi_1 + \left[\frac{\partial(\rho W_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho W_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho W_\varphi)}{\partial \varphi} \right] - \\
 & - \Phi_2 - \Phi_3 - \Omega = 0, \quad (1,40)
 \end{aligned}$$

где первая функция характеризует стеснение:

$$\Phi_1 = 1 - (g\rho_{ж})^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\prod \left(\frac{G_i}{C_i} \right)}; \quad (1,41)$$

вторая и третья функции характеризуют и отражают влияющие стеснения на поток:

$$\Phi_2 = \frac{1}{g\rho_{ж}} \left[\frac{\partial \left(\rho \frac{W_x}{C_x} \right)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\partial \left(\rho \frac{W_r}{C_r} \right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 G_r}{\partial \varphi \partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \left(\rho \frac{W_\varphi}{C_\varphi} \right)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r \partial x} \right] \frac{1}{r}; \quad (1,42)$$

$$\Phi_3 = \frac{\rho}{g\rho_{ж}} \left[\frac{W_x}{C_x} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{\partial \varphi \partial r \partial x} + \frac{W_r}{C_r} \cdot \frac{\partial^3 G_r}{\partial \varphi \partial r \partial x} + \right. \\ \left. + \frac{W_\varphi}{C_\varphi} \cdot \frac{\partial^3 G_\varphi}{\partial \varphi \partial r \partial x} \right] \frac{1}{r}; \quad (1,43)$$

четвертая функция, являющаяся полной характеристикой выгорания, определяет подвод газа в элемент за счет выгорания топлива в элементе:

$$\Omega = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{\partial \varphi \partial r \partial x}. \quad (1,44)$$

2. Факторы, характеризующие и отражающие стеснение потока

Стеснение потока обусловлено наличием в потоке газа жидкой фазы. Поэтому необходимо отметить массовый поток жидкости, который определяется производными:

$$\frac{\partial^2 G_x}{\partial \varphi \partial r}; \quad \frac{\partial^2 G_r}{\partial \varphi \partial x}; \quad \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r \partial x}. \quad (1,45)$$

Поскольку величина массового потока изменяется в процессе движения жидкости, то вторым важным фактором является интенсивность выгорания, характеризующая производными:

$$\frac{\partial^3 G_x}{\partial \varphi \partial r \partial x}; \quad \frac{\partial^3 G_r}{\partial \varphi \partial r \partial x}; \quad \frac{\partial^3 G_\varphi}{\partial \varphi \partial r \partial x}. \quad (1,46)$$

Третьим фактором является скорость потока жидкости, которая характеризуется составляющими:

$$C_x; C_r; C_\varphi. \quad (1,47)$$

Следующим фактором считают плотность жидкости $\rho_{ж}$.

Перечисленные факторы определяют гравиметрическую плотность, которая и характеризует стеснение. В результате стеснения обнаруживается изменение массы газа в элементе.

На изменение массы газа влияет, во-первых, относительная скорость, представленная составляющими:

$$\frac{W_x}{C_x}; \quad \frac{W_r}{C_r}; \quad \frac{W_\varphi}{C_\varphi} \quad (1,48)$$

и, во-вторых, относительная плотность

$$\frac{\rho}{\rho_{ж}} \quad (1,49)$$

и ее изменение

$$d\left(\frac{\rho}{\rho_{ж}}\right). \quad (1,50)$$

3. Поток без учета стеснения

Если количество жидкой фазы в элементе несоизмеримо мало по сравнению с количеством газа в том же элементе, то уравнение (1,39) упрощается. Роль членов, характеризующих и отражающих стеснение, уменьшается по мере уменьшения ряда параметров, в том числе:

$$\frac{\rho}{\rho_{ж}}; \quad \frac{W_x}{C_x}; \quad \frac{W_r}{C_r}; \quad \frac{W_\varphi}{C_\varphi}; \quad \frac{\partial^2 G_x}{\partial \varphi \partial r}; \quad \frac{\partial^2 G_r}{\partial \varphi \partial x}; \quad \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r \partial x}. \quad (1,51)$$

Без учета стеснения уравнение закона сохранения массы примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho W_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho W_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho W_\varphi)}{\partial \varphi} \right] - \Omega = 0. \quad (1,52)$$

Этим уравнением следует пользоваться при расчете тех сечений, в которых испарение капель уже не наблюдается.

Рассмотрим некоторые иные формы записи (1,52). Частные производные будем писать в виде функций с соответствующим индексом в скобках, например:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho(t); \quad \frac{\partial W_x}{\partial x} = W_{x(x)} \quad \text{и т. д.}$$

Уравнение (1,52) запишется так:

$$\rho(t) + \left[(\rho W_x)_{(x)} + \frac{1}{r} (\rho W_r r)_{(r)} + \frac{1}{r} (\rho W_\varphi)_{(\varphi)} \right] - \Omega = 0. \quad (1,53)$$

Как известно,

$$\rho_{(x)} W_x + \rho_{(r)} W_r + \rho_{(\varphi)} W_\varphi \frac{1}{r} = \text{grad } \rho \cdot \bar{W}; \quad (1,54)$$

$$W_{x(x)} + W_{r(r)} + W_{\varphi(\varphi)} \frac{1}{r} + \frac{W_r}{r} = \text{div} \cdot \bar{W}. \quad (1,55)$$

Таким образом, вместо (1,53) можем написать

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \bar{W} - \Omega = 0, \quad (1,56)$$

где

$$\dot{\rho} = \rho_{(t)} + \operatorname{grad} \rho \cdot \bar{W}. \quad (1,57)$$

4. Некоторые частные случаи использования уравнения закона сохранения массы, написанного без учета стеснения

Трехмерный, но установившийся поток. При этом локальная производная $\rho_{(t)} = 0$. Уравнение закона сохранения массы примет вид

$$\operatorname{grad} \rho \cdot \bar{W} + \rho \operatorname{div} \bar{W} - \Omega = 0. \quad (1,58)$$

Трехмерный, установившийся поток, но без подвода газа за счет выгорания топлива. Теперь не только $\rho_{(t)} = 0$, но и $\Omega = 0$; в этом случае

$$\operatorname{grad} \rho \cdot \bar{W} + \rho \operatorname{div} \bar{W} = 0. \quad (1,59)$$

Одномерный неустановившийся поток. Здесь $W_r = W_\varphi = 0$. Уравнение запишется так:

$$\dot{\rho} + \rho W_{(x)} - \Omega = 0, \quad (1,60)$$

но теперь

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} W; \quad \Omega = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi \partial r \partial x}.$$

Одномерный и установившийся поток. Теперь еще $\rho_{(t)} = 0$. Учитывая, что необходимость в понятии о частной производной отпала, уравнение запишется так:

$$d(\rho W) - \Omega dx = 0. \quad (1,61)$$

Одномерный, установившийся, и без подвода газа за счет выгорания топлива:

$$d(\rho W) = 0 \quad (1,62)$$

или

$$\rho W = \text{const}. \quad (1,63)$$

В случае движения несжимаемой жидкости $\dot{\rho} = 0$.

Уравнение закона сохранения массы запишется так:

$$\operatorname{div} \bar{W} = 0. \quad (1,64)$$

В одномерном потоке для несжимаемой жидкости

$$dW = 0. \quad (1,65)$$

5. Уравнение закона сохранения массы, выраженное через параметры состояния

Напишем уравнение закона сохранения массы, используя для замены ρ и ее производных уравнение состояния. Считая, что газовая постоянная изменяется вследствие изменения состава газа, получим:

$$\rho(t) = \frac{P}{gRT} \left[\frac{P(r)}{P} - \frac{R(t)}{R} - \frac{T(t)}{T} \right]; \quad (1,66)$$

$$\rho(x) = \frac{P}{gRT} \left[\frac{P(x)}{P} - \frac{R(x)}{R} - \frac{T(x)}{T} \right]. \quad (1,67)$$

Аналогично пишем выражения для $\rho(r)$ и $\rho(\varphi)$. Теперь уравнение закона сохранения массы запишем так:

$$\begin{aligned} & \frac{P(t)}{P} \Phi_1 + \frac{1}{P} \left[P(x) W_x + P(r) W_r + \frac{1}{r} P(\varphi) W_\varphi \right] - \\ & - \frac{R(t)}{R} \Phi_1 - \frac{1}{R} \left[R(x) W_x + R(r) W_r + \frac{1}{r} R(\varphi) W_\varphi \right] - \\ & - \frac{T(t)}{T} \Phi_1 - \frac{1}{T} \left[T(x) W_x + T(r) W_r + \frac{1}{r} T(\varphi) W_\varphi \right] + \\ & + \operatorname{div} W + \frac{W_r}{r} - \frac{RT}{P} (\Phi_2 + \Phi_3 + \Omega) = 0. \end{aligned} \quad (1,68)$$

6. Приближенное уравнение для верхней части напряженной камеры

В отличие от задач газодинамического порядка в верхней части камеры процесс газообразования является главным, специфичным для камеры, превалирующим над процессом протока. Здесь объем камеры существенно стеснен жидкой фазой. Уравнение закона сохранения массы принимает вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} \Phi_1 - \Omega = 0. \quad (1,69)$$

Это уравнение будет точным при отсутствии движения газа и приближенным при относительно небольших скоростях. Уравнение (1,69) отображает наиболее характерные стороны процесса горения и поэтому может быть названо уравнением газообразования.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ЗАКОНА НЬЮТОНА

Рассмотрим прежний элемент, суммарная масса которого

$$\rho (rd\varphi drdx - V_{ж}) + \rho_{ж} V_{ж}. \quad (1,70)$$

Введем в рассмотрение силовую функцию газа, учитывающую все силы, действующие на поток. Для определения слагаемых конвективного члена имеем:

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = \tau_x \left[x - \frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \mu \nabla^2 W_x \right]; \quad (1,71)$$

$$\nabla^2 W_x = \frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W_x}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_x}{\partial r};$$

$$\frac{\partial P_r}{\partial r} = \tau_r \left[r - \frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \mu \nabla^2 W_r \right]; \quad (1,72)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 W_r = & \frac{\partial^2 W_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial r} - \\ & - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{W_r}{r^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} = \tau_\varphi \left[\varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_\varphi + \mu \nabla^2 W_\varphi \right]; \quad (1,73)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 W_\varphi = & \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_\varphi}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} - \frac{W_\varphi}{r^2}, \end{aligned}$$

где τ_i — коэффициент, учитывающий специфические особенности горящего потока и неточности, возникающие при введении в рассмотрение силовой функции;

x, r, φ — объемные силы, возникающие под действием внешних факторов;

p — давление в потоке;

f_i — баллистические объемные силы, характеризующие воздействие газа на движущиеся в потоке капли компонентов топлива;

μ — коэффициент вязкости газа.

Пусть на грани $abcd$, $aehd$ и $abfe$ (см. рис. 1) действуют составляющие силовой функции P_x , P_r и P_φ . В результате изменения этих составляющих в направлении W_x , W_r и W_φ на выходные грани $efjh$, $bfjc$ и $dcjh$ будут действовать силы:

$$P_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} dx; \quad (1,74)$$

$$P_r - \frac{\partial P_r}{\partial r} dr; \quad (1,75)$$

$$P_\varphi - \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (1,76)$$

Газ и жидкость, находящиеся в элементе, подвержены действию следующих сил:

в направлении W_x

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} dx; \quad (1,77)$$

в направлении W_r ,

$$\frac{\partial P_r}{\partial r} dr; \quad (1,78)$$

в направлении W_φ

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (1,79)$$

Движение газа связано с движением жидкости через баллистические силы, входящие в силовые функции. Поэтому уравнения второго закона можно писать отдельно для газа и отдельно для жидкости. Для газа по направляющим составляющих скоростей:

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} dx (r d\varphi dr - S_x) = \rho \dot{W}_x (r d\varphi dr dx - V_{ж}); \quad (1,80)$$

$$\frac{\partial P_r}{\partial r} dr (r d\varphi dx - S_r) = \rho \dot{W}_r (r d\varphi dr dx - V_{ж}); \quad (1,81)$$

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi (dr dx - S_\varphi) = \rho \dot{W}_\varphi (r d\varphi dr dx - V_{ж}). \quad (1,82)$$

Для дальнейшего изложения важно заметить, что коэффициенты введены так, что для полного дифференциала силовой функции

$$dP = \frac{d(P_x^2 + P_r^2 + P_\varphi^2)}{2P}. \quad (1,83)$$

Далее следует отметить, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) = \dot{W}_x W_x + \dot{W}_r W_r + \dot{W}_\varphi W_\varphi. \quad (1,84)$$

Умножим правые и левые части (1,80), (1,81) и (1,82) на соответствующие составляющие скоростей и сложим их почленно:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} W_\varphi \right) r d\varphi dr dx - \\ & - \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x S_x dx + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r S_r dr + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} W_\varphi S_\varphi r d\varphi \right) = \\ & = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) (r d\varphi dr dx - V_{ж}). \end{aligned} \quad (1,85)$$

Перепишем (1,85) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r + \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} \right) - \\ & - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x \frac{S_x}{\sigma_x} + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r \frac{S_r}{\sigma_r} + \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} \cdot \frac{S_\varphi}{\sigma_\varphi} \right) = \\ & = \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) \left(1 - \frac{V_{ж}}{r d\varphi dr dx} \right). \end{aligned} \quad (1,86)$$

Имея в виду (1,35) вместо (1,30), найдем:

$$\begin{aligned} & V_{ж} = \\ = & \sqrt{\left(\varepsilon_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} dx \right) \left(\varepsilon_r - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} dr \right) \times \left(\varepsilon_\varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right)} \times \\ & \times r d\varphi dr dx. \end{aligned} \quad (1,87)$$

Уравнение (1,86) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r + \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} \right) - \\ & - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x \varepsilon_x + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r \varepsilon_r + \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} \varepsilon_\varphi \right) = \\ = & \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) \left(1 - \sqrt{\Pi \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial i} di \right)} \right) \end{aligned} \quad (1,88)$$

или

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x \xi_x + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r \xi_r + \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} \xi_\varphi \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right), \quad (1,89)$$

где

$$\xi_i = \frac{1 - \varepsilon_i}{1 - \sqrt{\Pi \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial i} di \right)}}. \quad (1,90)$$

Рассмотрим теперь движение жидкости по направлениям составляющих скорости. Уравнения второго закона запишем так:

$$\frac{\partial \pi_x}{\partial x} dx S_x = \dot{C}_{x\rho ж} V_{ж}; \quad (1,91)$$

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial r} dr S_r = \dot{C}_{r\rho ж} V_{ж}; \quad (1,92)$$

$$\frac{\partial \pi_\varphi}{r \partial \varphi} r d\varphi S_\varphi = \dot{C}_{\varphi\rho ж} V_{ж}. \quad (1,93)$$

Силами вязкости, действующими внутри капли, будем пренебрегать, поскольку нас интересует движение потока. Введем

в рассмотрение силовую функцию жидкости π , для частных производных которой имеем:

$$\frac{\partial \pi_x}{\partial x} = \tau_{жx} \left[x_{ж} - f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right]; \quad (1,94)$$

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial r} = \tau_{жr} \left[r_{ж} - f_r - \frac{\partial p}{\partial r} \right]; \quad (1,95)$$

$$\frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} = \tau_{ж\varphi} \left[\varphi_{ж} - f_\varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right], \quad (1,96)$$

где $x_{ж}$, $r_{ж}$ и $\varphi_{ж}$ — внешние объемные силы;

f_x , f_r и f_φ — баллистические объемные силы.

После аналогичных известных нам преобразований с учетом (1,87)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_{ж}} \left[\frac{\partial \pi_x}{\partial x} C_x \varepsilon_x + \frac{\partial \pi_r}{\partial r} C_r \varepsilon_r + \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} C_\varphi \varepsilon_\varphi \right] = \\ & = \frac{d}{dt} \left(\frac{C^2}{r} \right) \sqrt{\Pi \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial i} di \right)}. \end{aligned} \quad (1,97)$$

Сложим почленно (1,88) и (1,97), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r + \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} \right] - \\ & - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x \varepsilon_x + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r \varepsilon_r + \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} \varepsilon_\varphi \right] + \\ & + \frac{1}{\rho_{ж}} \left[\frac{\partial \pi_x}{\partial x} C_x \varepsilon_x + \frac{\partial \pi_r}{\partial r} C_r \varepsilon_r + \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{C_\varphi}{r} \varepsilon_\varphi \right] = \\ & = \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2 - C^2}{2} \right) \sqrt{\Pi \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial i} di \right)}. \end{aligned} \quad (1,98)$$

Вследствие разности скоростей движения жидкости и газа будет наблюдаться диссипация, т. е. переход части кинетической энергии в тепловую.

Определению баллистических объемных сил посвящен четвертый параграф.

Анализ уравнения второго закона Ньютона

1. Факторы, характеризующие и отражающие стеснение потока

Влияние стеснения в уравнении (1,89) учитывается коэффициентами ξ_x , ξ_r , ξ_φ . Для определения этих коэффициентов достаточно знать коэффициенты ε_x , ε_r и ε_φ и их производные [см. формулы (1,35) и (1,90)].

2. Поток без учета стеснения

Если не учитывать стеснения и наличия жидкости, то вместо (1,89) следует написать

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r + \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} \right] - \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) = 0. \quad (1,99)$$

Если горящий поток представить в виде идеальной жидкости и не учитывать действия объемных сил, то вместо (1,99) будем иметь:

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} W_x + \frac{\partial p}{\partial r} W_r + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} \right] - \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) = 0. \quad (1,100)$$

Уравнение (1,100) можно записать и так:

$$\frac{1}{\rho} \dot{p} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) = 0. \quad (1,101)$$

3. Поток без выгорания топлива в элементе

Рассматриваемый процесс характеризуется условием

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (1,102)$$

Если не учитывать объемные силы, то при наличии наших допущений (1,98) запишется в таком виде:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} W_x \xi'_x + \frac{\partial p}{\partial r} W_r \xi'_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} W_\varphi \xi'_\varphi \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{(W \xi')^2}{2} \right], \quad (1,103)$$

где

$$\xi'_x = \frac{1 - \varepsilon_x \left(1 - \frac{C_x}{W_x} \cdot \frac{\rho}{\rho_{ж}} \right)}{1 - \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_r \varepsilon_\varphi} \left(1 - \frac{C^2}{W^2} \right)}; \quad (1,104)$$

$$\xi'_r = \frac{1 - \varepsilon_r \left(1 - \frac{C_r}{W_r} \cdot \frac{\rho}{\rho_{ж}} \right)}{1 - \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_r \varepsilon_\varphi} \left(1 - \frac{C^2}{W^2} \right)}; \quad (1,105)$$

$$\xi'_\varphi = \frac{1 - \varepsilon_\varphi \left(1 - \frac{C_\varphi}{W_\varphi} \cdot \frac{\rho}{\rho_{ж}} \right)}{1 - \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_r \varepsilon_\varphi} \left(1 - \frac{C^2}{W^2} \right)}. \quad (1,106)$$

Если ξ' можно вынести за знак дифференциала некоторым средним значением, то в новых координатах $W_x \xi'_x$, $W_r \xi'_r$ и $W_\varphi \xi'_\varphi$ процесс запишется так:

$$\frac{\xi'_{\text{ср}}}{\rho} \text{grad } p \cdot \bar{W} - \frac{d}{dt} \left[\frac{(W \xi')^2}{2} \right] = 0. \quad (1,107)$$

Если $\frac{\partial W \xi'}{\partial t} = 0$, то

$$\frac{\xi'_{\text{ср}}}{\rho} \text{grad } p \cdot \bar{W} - \text{grad} \left[\frac{(W \xi')^2}{2} \right] (\bar{W} \xi') = 0. \quad (1,108)$$

Для одномерного неустановившегося потока

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} (W \xi') - \frac{d}{dt} \left[\frac{(W \xi')^2}{2} \right] = 0. \quad (1,109)$$

Для одномерного установившегося потока

$$\frac{1}{\rho} dp - d(W \xi') = 0. \quad (1,110)$$

4. Уравнения, написанные по типу уравнений Эйлера

Сложим почленно (1,80), (1,81) и (1,82) с выражениями (1,91), (1,92) и (1,93), после преобразований получим:

$$\frac{1}{\rho_x} \cdot \frac{\partial P_x}{\partial x} = \frac{\partial W'_x}{\partial t} + \frac{\partial W'_x}{\partial x} W_x + \frac{\partial W'_x}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W'_x}{\partial \varphi} W_\varphi; \quad (1,111)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_r} \cdot \frac{\partial P_r}{\partial r} &= \frac{\partial W'_r}{\partial t} + \frac{\partial W'_r}{\partial x} W_x + \frac{\partial W'_r}{\partial r} W_r + \\ &+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W'_r}{\partial \varphi} W_\varphi - \frac{1}{r} (W'_r); \end{aligned} \quad (1,112)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_\varphi} \cdot \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{\partial W'_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial W'_\varphi}{\partial x} W_x + \frac{\partial W'_\varphi}{\partial r} W_r + \\ &+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W'_\varphi}{\partial \varphi} W_\varphi + \frac{1}{r} W'_r W'_\varphi, \end{aligned} \quad (1,113)$$

где составляющие приведенной плотности:

$$\rho_x = \frac{\rho}{1 - \varepsilon_x \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{ж}} \cdot \frac{\frac{\partial \pi_x}{\partial x}}{\frac{\partial P_x}{\partial x}} \right)}; \quad (1,114)$$

$$\rho_r = \frac{\rho}{1 - \varepsilon_r \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{ж}} \cdot \frac{\frac{\partial \pi_r}{\partial r}}{\frac{\partial P_r}{\partial r}} \right)} ; \quad (1,115)$$

$$\rho_\varphi = \frac{\rho}{1 - \varepsilon_\varphi \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{ж}} \cdot \frac{\frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi}}{\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi}} \right)} . \quad (1,116)$$

Для определения приведенных ускорений имеем:

$$\dot{W}'_x = \dot{W}_x \left[1 - \left(1 - \frac{\dot{C}_x}{\dot{W}_x} \right) \sqrt{\Pi \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial i} di \right)} \right]; \quad (1,117)$$

$$\dot{W}'_r = \dot{W}_r \left[1 - \left(1 - \frac{\dot{C}_r}{\dot{W}_r} \right) \sqrt{\Pi \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial i} di \right)} \right]; \quad (1,118)$$

$$\dot{W}'_\varphi = \dot{W}_\varphi \left[1 - \left(1 - \frac{\dot{C}_\varphi}{\dot{W}_\varphi} \right) \sqrt{\Pi \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial i} di \right)} \right]. \quad (1,119)$$

Таким образом, движение горящего потока описывается уравнениями, принципиально отличающимися от классических уравнений Эйлера, характеризующих движение газового потока.

Если уравнение второго закона для горящего потока представить формально в виде уравнений Эйлера, то они будут содержать: силовую функцию вместо суммы производной от давления и внешней объемной силы; составляющие приведенной плотности вместо плотности газа; приведенные ускорения потока.

5. Полная система уравнений второго закона

Форма записи второго закона в зависимости от цели исследования может быть различной. Если второй закон Ньютона записать с достаточной степенью детализации, то он включит в себя четырнадцать уравнений:

уравнение типа (1,84) для газа;

аналогичное уравнение для жидкости в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{C^2}{2} \right) = \dot{C}_x C_x + \dot{C}_r C_r + \dot{C}_\varphi C_\varphi ; \quad (1,120)$$

три уравнения (1,80) — (1,82) второго закона для газа;
 три уравнения (1,91) — (1,93) второго закона для жидко-
 сти;

три уравнения (1,71) — (1,73) силовой функции для газа;
 три уравнения (1,94) — (1,96) силовой функции для жид-
 кости.

Полная запись второго закона Ньютона будет следующей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) &= \dot{W}_x W_x + \dot{W}_r W_r + \dot{W}_\varphi W_\varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{C^2}{2} \right) &= \dot{C}_x C_x + \dot{C}_r C_r + \dot{C}_\varphi C_\varphi \\ \frac{\partial P_i}{\partial i} \left(1 - \frac{S_i}{\sigma} di \right) &= \rho \dot{W}_i \left(1 - \frac{V_{ж}}{\sigma} \right), \quad i = x, r, \varphi \\ \sigma &= r d\varphi dr dx \\ \frac{\partial \pi_i}{\partial i} S_i di &= \dot{C}_i \rho_{ж} V_{ж} \\ \frac{\partial P_i}{\partial i} &= \tau_i \left[I - \frac{\partial p}{\partial i} + f_i + \mu \nabla^2 W_i \right], \quad I = x, r, \varphi \\ \frac{\partial \pi_i}{\partial i} &= \tau_{жi} \left[I_{ж} - f_i - \frac{\partial p}{\partial i} \right], \quad I_{ж} = x_{ж}, r_{ж}, \varphi_{ж} \end{aligned} \right\} (1,121)$$

Поскольку рассматривается цилиндрическая система коор-
 динат, для определения субстанциональных производных
 имеем:

$$\begin{aligned} \dot{W}_x &= \frac{\partial W_x}{\partial t} + \frac{\partial W_x}{\partial x} W_x + \frac{\partial W_x}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_x}{\partial \varphi} W_\varphi; \\ \dot{W}_r &= \frac{\partial W_r}{\partial t} + \frac{\partial W_r}{\partial x} W_x + \frac{\partial W_r}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} W_\varphi - \frac{1}{r} W_r^2; \\ \dot{W}_\varphi &= \frac{\partial W_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial W_\varphi}{\partial x} W_x + \frac{\partial W_\varphi}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} W_\varphi + \\ &+ \frac{1}{r} W_r W_\varphi. \end{aligned}$$

§ 3. УРАВНЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Количество тепла, подводимое к элементу $abjhd$ в единицу
 времени, расходуется на повышение внутренней энергии газа,
 теплосодержания жидкости, испарения жидкости и работы

расширения, производимой газом за тот же промежуток времени:

$$\dot{Q} = g\rho (r d\varphi dr dx - V_{ж}) \frac{d}{dt} (c_v T) + g\rho_{ж} V_{ж} (c T_{ж}) + \\ + r \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{r \partial\varphi \partial r \partial x} + p \frac{d}{dt} (r d\varphi dr dx - V_{ж}). \quad (1,122)$$

Все слагаемые выражаются одинаково, в тепловых или механических единицах.

Допустим, что общее количество подводимого тепла определяется суммой

$$\dot{Q} = \dot{Q}_\Gamma + \dot{Q}_\lambda + \dot{Q}_\mu. \quad (1,123)$$

В результате сгорания топлива выделится в единицу времени следующее количество тепла:

$$\dot{Q}_\Gamma = gq \Omega r d\varphi dr dx = q \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{r \partial\varphi \partial r \partial x} r d\varphi dr dx, \quad (1,124)$$

где q — количество тепла, выделяющегося при сгорании единицы веса топлива.

Подвод тепла вследствие теплопроводности по закону Фурье

$$\dot{Q}_\lambda = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} S; \quad (1,125)$$

через грани $abcd$ удельный тепловой поток составит

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} r d\varphi dr. \quad (1,126)$$

В направлении W_x в элемент будет подведено тепло

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) r d\varphi dr dx. \quad (1,127)$$

Полный подвод тепла в элемент при рассмотрении окрестности

$$\dot{Q}_\lambda = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \right] r d\varphi dr dx. \quad (1,128)$$

В результате работы сил трения будет наблюдаться следующий подвод тепла:

$$\dot{Q}_\mu = \mu \Phi r d\varphi dr dx, \quad (1,129)$$

где Φ — диссипативная функция, причем

$$\Phi = \Phi_r + \Phi_n; \quad (1,130)$$

Φ_r — диссипативная функция газа, учитывающая переход части механической энергии в тепловую, за

счет работы массовых и поверхностных сил, приложенных к элементу;

Φ_{π} — диссипативная функция потока, учитывающая выделение тепловой энергии, происходящее вследствие того, что при смешении двух газовых потоков закон сохранения механической энергии не соблюдается.

Общее количество тепла, подводимого к элементу, составит

$$\left[q \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_{\varphi})}{r \partial \varphi \partial r \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \mu \Phi \right] r d\varphi dr dx. \quad (1,131)$$

Поделим правую и левую части (1,122) на

$$\sigma = r d\varphi dr dx, \quad (1,132)$$

получим

$$\left[q \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_{\varphi})}{r \partial \varphi \partial r \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \mu \Phi \right] = g\rho \frac{d}{dt} (c_v T) \left(1 - \frac{V_{ж}}{\sigma} \right) + g\rho_{ж} \frac{d}{dt} (c T_{ж}) \frac{V_{ж}}{\sigma} + r \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_{\varphi})}{r \partial \varphi \partial r \partial x} + p \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{V_{ж}}{\sigma} \right). \quad (1,133)$$

Напомним, что согласно (1,87)

$$\frac{V_{ж}}{\sigma} = \sqrt{\Pi} = \sqrt{\left(\varepsilon_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} dx \right)} \sqrt{\left(\varepsilon_r - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} dr \right)} \times \sqrt{\left(\varepsilon_{\varphi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \right)}. \quad (1,134)$$

Объемное относительное расширение в единицу времени равно дивергенции скорости

$$\frac{dz}{\sigma dt} = \text{div } W, \quad (1,135)$$

причем

$$\text{div } \bar{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{W_r}{r}. \quad (1,136)$$

Уравнение закона сохранения энергии запишется окончательно так:

$$\left[q \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{r \partial \varphi \partial r \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \mu \Phi \right] = g \rho \frac{d}{dt} (c_v T) (1 - \sqrt{\Pi}) + g \rho_{ж} \frac{d}{dt} (c T_{ж}) \sqrt{\Pi} + r \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_c)}{r \partial \varphi \partial r \partial x} + p \operatorname{div} W (1 - \sqrt{\Pi}). \quad (1,137)$$

Подобно (1,69) можно рассмотреть процесс газообразования, при котором движение газа отсутствует, но роль стеснения значительна

$$\left[q \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{r \partial \varphi \partial r \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \mu \Phi \right] = g \rho \frac{d}{dt} (c_v T) (1 - \sqrt{\Pi}) + g \rho_{ж} \frac{d}{dt} (c T_{ж}) \sqrt{\Pi} + r \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\psi)}{r \partial \varphi \partial r \partial x}. \quad (1,138)$$

Если факторы второстепенного порядка не учитывать, а тепловые преобразования, наблюдаемые в жидкости, учитывать при определении тепловыделения, то уравнение энергии примет вид

$$q \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{r \partial \varphi \partial r \partial x} = g \rho \frac{d}{dt} (c_v T) (1 - \sqrt{\Pi}). \quad (1,139)$$

Это уравнение может быть названо уравнением газификации.

Анализ уравнения закона сохранения энергии

1. Влияние находящейся в потоке жидкости на тепловой баланс

В результате горения топлива в рассматриваемый элемент подводится тепло

$$q \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 (G_x + G_r + G_\varphi)}{r \partial \varphi \partial r}. \quad (1,140)$$

Здесь вторая производная характеризует распределение топлива по сечению камеры, производная по x определяет выгорание топлива по длине, а q представляет относительное количество выделяющегося тепла. Оно зависит не только от запаса химической энергии в топливе, но и от условий горения. На

величину q оказывает влияние местное значение соотношения между компонентами и давление в данном месте камеры в рассматриваемый момент времени. Для проведения глубокого анализа необходима функция

$$q(x, r, \varphi, t), \quad (1,141)$$

которая может быть найдена по результатам термодинамического расчета с учетом картины газификации и горения отдельных капель топлива.

Изменение энтальпии и массы жидкости характеризуется в уравнении энергии слагаемыми

$$q\rho_{ж} \frac{d}{dt} (cT_{ж}) \sqrt{\Pi} + r \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{r \partial \varphi \partial r \partial x}. \quad (1,142)$$

Температура жидкости повышается от температуры на входе до температуры кипения, которая вследствие непрерывного изменения давления также непрерывно меняется.

2. Уравнение энергии без учета стеснения и изменения тепловых параметров жидкости, но с учетом подвода тепла в результате горения

Дальнейшие преобразования (1,137) связаны с большими техническими трудностями. При решении точных задач рекомендуется рассматривать систему уравнений (1,39), (1,98) и (1,137).

Во многих частных случаях и при проведении качественного анализа можно вести преобразования (1,137) в рамках оговоренных допущений; уравнение энергии после упрощений принимает вид

$$g\rho\Omega = g\rho \frac{d}{dt} (c_v T) + p \operatorname{div} \mathcal{W}. \quad (1,143)$$

Уравнение закона сохранения массы с учетом допущений выглядит так:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathcal{W} = \Omega, \quad (1,144)$$

где, как и прежде,

$$\Omega = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{\partial \varphi \partial r}. \quad (1,145)$$

Разделим (1,144) на ρ и помножим на p

$$p \operatorname{div} \mathcal{W} = - \frac{p}{\rho} \dot{\rho} + \frac{p}{\rho} \Omega. \quad (1,146)$$

Используя правило дифференцирования дроби, находим

$$\frac{p}{\rho} \dot{\rho} = \dot{p} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right). \quad (1,147)$$

Теперь преобразуем правую часть (1,143)

$$g\rho \frac{d}{dt} (c_v T) + p \operatorname{div} W = g\rho \frac{d}{dt} (c_v T) - \dot{p} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \\ + \frac{p}{\rho} \Omega = g\rho \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{1}{g} \cdot \frac{p}{\rho} \right) - \dot{p} + \frac{p}{\rho} \Omega. \quad (1,148)$$

Поскольку по уравнению состояния

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{p}{\rho} = RT, \quad (1,149)$$

учитывая, что

$$c_p - c_v = R, \quad (1,150)$$

получим

$$g\rho \frac{d}{dt} (c_v T) + p \operatorname{div} W = g\rho \frac{d}{dt} (c_p T) - \dot{p}. \quad (1,151)$$

Следует иметь в виду, что

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} W_x + \frac{\partial p}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} W_\varphi. \quad (1,152)$$

Уравнение энергии при наших допущениях примет вид

$$\left[gq\Omega + \sum \frac{\partial}{\partial i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial i} \right) + \mu\Phi \right] = g\rho \frac{d}{dt} (c_p T) - \\ - \frac{\partial p}{\partial t} - \left[\frac{\partial p}{\partial x} W_x + \frac{\partial p}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} W_\varphi \right] + \frac{p}{\varphi} \Omega. \quad (1,153)$$

3. Уравнение энергии, в котором явно выражена кинетическая энергия

Если не учитывать стеснения и кинетической энергии жидкости, то уравнение второго закона можно представить в виде (1,99). Уравнения (1,71)–(1,73) запишем так:

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x = x W_x - \frac{\partial P}{\partial x} W_x + \mu M_x W_x; \quad (1,154)$$

$$\frac{\partial P_r}{\partial r} W_r = r W_r - \frac{\partial P}{\partial r} W_r + \mu M_r W_r; \quad (1,155)$$

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} W_\varphi = \varphi W_\varphi - \frac{\partial P}{\partial \varphi} W_\varphi + \mu M_\varphi W_\varphi. \quad (1,156)$$

В этих уравнениях множители M_i введены так, что они могут учитывать как ламинарное, так и турбулентное трение.

После почленного сложения находим:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial p}{\partial x} W_x + \frac{\partial p}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} W_\varphi \right) = \\ & = - \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} W_\varphi \right) + \\ & \quad + \left(x W_x + r W_r + \frac{1}{r} \varphi W_\varphi \right) + \\ & \quad + \mu \left(M_x W_x + M_r W_r + \frac{1}{r} M_\varphi W_\varphi \right). \end{aligned} \quad (1,157)$$

Введем обозначения:

$$U = x W_x + r W_r + \frac{1}{r} \varphi W_\varphi; \quad (1,158)$$

$$M = M_x W_x + M_r W_r + \frac{1}{r} M_\varphi W_\varphi \quad (1,159)$$

и будем считать, что функции M и U учитывают вместо коэффициентов специфические особенности взаимодействия горящих частиц топлива с газом; теперь (1,157) перепишем так:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial p}{\partial x} W_x + \frac{\partial p}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} W_\varphi \right) = \\ & = - \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} W_x + \frac{\partial P_r}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} W_\varphi \right) + U + \mu M. \end{aligned} \quad (1,160)$$

Уравнение (1,99) примет вид

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial p}{\partial x} W_x + \frac{\partial p}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} W_\varphi \right) = \\ & = \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) + U + \mu M. \end{aligned} \quad (1,161)$$

Используя (1,153), получим окончательно

$$\begin{aligned} & \left(gq\Omega + \sum \frac{\partial}{\partial i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial i} \right) + \mu\Phi \right) \approx \\ & \approx gq \frac{d}{dt} (c_p T) - \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \Omega + \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) + U + \mu M. \end{aligned} \quad (1,162)$$

4. Учет опережения фронта пламени

Движущаяся в газовом потоке капля отстает от фронта пламени на некоторое расстояние, характеризуемое координатами:

$$x_0, r_0, \varphi_0. \quad (1,163)$$

С учетом опережения выделения тепла вместо

$$q \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{\partial \varphi \partial r} - r d\varphi dr dx \quad (1,164)$$

следует писать

$$q \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^3 G_x}{\partial \varphi \partial r \partial x} r d\varphi dr d(x + x_0) + \frac{\partial^3 G_r}{\partial \varphi \partial r \partial x} r d\varphi d(r + r_0) dx + \right. \\ \left. + \frac{\partial^3 G_\varphi}{\partial \varphi \partial r \partial x} r d(\varphi + \varphi_0) dr dx \right). \quad (1,165)$$

Перепишем это выражение так:

$$q \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^3 G_x}{\partial \varphi \partial r \partial x} \left(1 + \frac{dx_0}{dx} \right) + \frac{\partial^3 G_r}{\partial \varphi \partial r \partial x} \left(1 + \frac{dr_0}{dr} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^3 G_\varphi}{\partial \varphi \partial r \partial x} \left(1 + \frac{d\varphi_0}{d\varphi} \right) \right] r d\varphi dr dx. \quad (1,166)$$

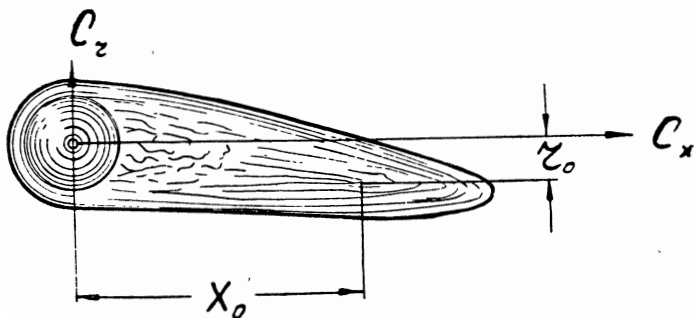


Рис. 4.

Местные пульсационные добавки, содержащие производные от составляющих длины опережения, приводят, очевидно, к возникновению колебательных процессов в области горения частицы топлива.

Опережение фронта пламени является функцией относительной скорости и плотности, так что

$$x_0(\rho; W_x - C_x), \quad (1,167)$$

$$r_0(\rho; W_r - C_r), \quad (1,168)$$

$$\varphi_0(\rho; W_\varphi - C_\varphi). \quad (1,169)$$

С учетом опережения пламени (рис. 4) уравнение (1,153) примет вид

$$q \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^3 G_x}{\partial \varphi \partial r \partial x} \left(1 + \frac{dx_0}{dx} \right) + \frac{\partial^3 G_r}{\partial \varphi \partial r \partial x} \left(1 + \frac{dr_0}{dr} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^3 G_\varphi}{\partial \varphi \partial r \partial x} \left(1 + \frac{d\varphi_0}{d\varphi} \right) \right] + \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial i} \right) + \mu \Phi = \\ = g\rho \frac{d}{dt} (c_p T) - \frac{\partial p}{\partial t} - \\ - \left(\frac{\partial p}{\partial x} W_x + \frac{\partial p}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} W_\varphi \right) + \frac{p}{\tau} \Omega. \quad (1,170)$$

К числу главнейших особенностей, принципиально отличающих уравнения горящего потока от уравнений газовой динамики, относятся: наличие стеснения газового потока, тепловыделение внутри рассматриваемого элемента, опережение фронта пламени, наличие двух диссипативных функций.

5. Вывод уравнения адиабаты

Многие исследователи вместо уравнения энергии пользуются уравнением адиабаты. Однако следует помнить, что при замене уравнения энергии (1,139) уравнением адиабаты исследование будет носить приближенный, поверхностный характер. Чтобы получить уравнение адиабаты, необходимо сделать следующие допущения:

- горения в камере нет;
- теплообмена нет;
- силы вязкости отсутствуют;

не учитываются стеснение потока и наличие в потоке жидкой фазы.

Перечисленные допущения являются достаточно грубыми для тех случаев, когда рассматривается область горения топлива. С учетом перечисленных допущений уравнение энергии запишется

$$g\rho d(c_p T) = dp. \quad (1,171)$$

Примем, что $c_p = \text{const}$, и используем уравнение состояния

$$\rho = \frac{p}{gRT}, \quad (1,172)$$

получим

$$\frac{c_p}{R} \cdot \frac{dT}{T} = \frac{dp}{p}. \quad (1,173)$$

Интегрируя, находим

$$\frac{c_p}{R} \ln \frac{T_1}{T_2} = \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (1,174)$$

Поскольку $c_p - c_v = R$, то $\frac{R}{c_p} = \frac{k-1}{k}$. Искомое уравнение адиабаты запишется теперь так:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (1,175)$$

6. Вывод уравнения энтропии

Приведем вывод уравнения энтропии с сохранением изложенных в предыдущем пункте допущений, но учтем подвод тепла и массы в элемент. Запишем уравнение энергии

$$g\rho dQ = g\rho c_p dT - dp. \quad (1,176)$$

Используя уравнение состояния, находим

$$\frac{dQ}{dT} = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}. \quad (1,177)$$

Поскольку

$$S = \int \frac{dQ}{T} \quad (1,178)$$

учитывает подвод тепла в элемент за счет сгорания топлива, то

$$S = c_p \ln \left| \frac{T_1}{T_2} \right| - R \ln \left| \frac{p_1}{p_2} \right| + S_0. \quad (1,179)$$

Если еще учесть и подвод массы, то следует при написании уравнения энергии иметь в виду последний член уравнения (1,153). Теперь будем иметь

$$S = c_p \ln \left| \frac{T_1}{T_2} \right| - R \ln \left| \frac{p_1}{p_2} \right| + R \int \frac{Q}{p} dt + S_0. \quad (1,180)$$

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ И ВНЕШНИХ СИЛ

В § 2 были введены в рассмотрение баллистические объемные силы, действующие на движущуюся горящую каплю. Баллистические объемные силы и баллистические силы связаны между собой уравнением:

$$\dot{f}_x = \frac{P_x}{m} \rho_{ж}. \quad (1,181)$$

Для сокращения излагаемого материала в данном параграфе рассмотрим только одно координатное направление.

Баллистические силы подсчитывают по формуле

$$P_x = \rho k_x S_x (W_x - C_x)^2, \quad (1,182)$$

где k_x — баллистический коэффициент, являющийся функцией скорости и зависящий от условий сгорания топлива.

Если известно среднее статистическое значение площади поперечного сечения капли s_x и число капель, приходящееся на рассматриваемую грань элемента, то общая площадь поперечного сечения капель

$$S_x = n_x s_x. \quad (1,183)$$

Под действием силовой функции капля топлива будет находиться в ускоренном движении. Для определения составляющих ускорения имеем:

$$\dot{C}_x = \frac{e_x}{m} P_x, \quad (1,184)$$

где e_x — коэффициент, связывающий силовую функцию с объемной баллистической силой.

Напишем

$$\frac{\partial \pi_x}{\partial x} = -e_x f_x \quad (1,185)$$

и сравним это с уравнением (1,94). Решая относительно интересующего нас коэффициента, находим

$$e_x = \tau_{жx} \left(1 - \frac{x_{ж} - \frac{\partial p}{\partial x}}{J_x} \right). \quad (1,186)$$

Рассмотрим некоторые закономерности.

Для шаровой капли

$$\frac{s_x}{m} = \frac{S_x}{n_x m} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{R \rho_{ж}}; \quad (1,187)$$

если форма капли искажена, то с учетом поправочного коэффициента

$$\frac{S_x}{n_x m} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a_x}{R \rho_{ж}}. \quad (1,188)$$

Для определения радиуса капли воспользуемся известным законом

$$\frac{dS_x}{dt} = 4\pi \Psi_x, \quad (1,189)$$

где Ψ_x — сложная функция p , T и других параметров газа, камеры и топлива.

Нетрудно видеть, что

$$d(R^2) = \Psi dt. \quad (1,190)$$

Интегрирование дает

$$R^2 = R_0^2 - \Psi t, \quad (1,191)$$

где R_0 — начальное значение радиуса капли.

Для определения объемных баллистических сил будем иметь уравнения типа

$$f_x = \frac{3}{4} a_x \rho \frac{(W_x - C_x)^2}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}}. \quad (1,192)$$

Второй закон Ньютона примет вид

$$\dot{C}_x = \frac{3}{4} \cdot \frac{e_x}{\rho_{ж}} a_x \rho \frac{(W_x - C_x)^2}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}}. \quad (1,193)$$

Анализ полученных зависимостей

1. Характер изменения скорости капли во времени

Рассматривая одномерное течение и используя (1,193), напишем

$$\frac{dC}{\rho(W-C)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{e}{\rho_{ж}} a \frac{dt}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}}. \quad (1,194)$$

Приближенное представление о характере движения капли можно получить, приняв в качестве допущений $\rho = \text{const}$ и $W = \text{const}$. Интегрируя (1,194), после преобразований получим

$$t = F(C) [2R_0 - \Psi F(C)], \quad (1,195)$$

где

$$F(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho_{ж}}{\rho} \cdot \frac{C}{W} \cdot \frac{1}{a(W-C)}. \quad (1,196)$$

Если $\Psi = 0$, то вместо (1,195) следует рассмотреть

$$C = \frac{W}{1 + \frac{1}{W\tau}}, \quad (1,197)$$

где приведенное время

$$\tau = \frac{3}{4} \cdot \frac{\rho}{\rho_{ж}} \cdot \frac{a}{R_0} t. \quad (1,198)$$

Если $\tau = 0$, то $C = 0$; при $\tau \rightarrow \infty$ скорость $C \rightarrow W$.

Мы видим, что чем меньше начальный радиус капли, тем быстрее происходит увеличение скорости капли. Скорость капли возрастает с увеличением скорости потока газа и его плотности.

2. Силовая функция жидкости

В уравнениях (1,94) — (1,96) учитывались внешние объемные силы. Эти внешние силы обусловлены наличием внешнего ускорения \dot{V} , определяемого по результатам баллистического расчета ракеты.

Если известна масса рассматриваемой капли m , то для определения составляющих внешних сил будем иметь выражения типа

$$m \dot{V}_x. \quad (1,199)$$

Теперь определим фигурирующие в расчетах внешние объемные силы:

$$x_{ж} = \rho_{ж} V_x; \quad x = \rho \dot{V}_x; \quad (1,200)$$

$$r_{ж} = \rho_{ж} \dot{V}_r; \quad r = \rho \dot{V}_r; \quad (1,201)$$

$$\varphi_{ж} = \rho_{ж} \dot{V}_\varphi; \quad \varphi = \rho \dot{V}_\varphi. \quad (1,202)$$

Напишем развернутое выражение для определения силовой функции жидкости

$$\frac{\partial \pi_x}{\partial x} = \tau_{жх} \left[\rho_{ж} \dot{V}_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{3}{4} a_x \rho \frac{(W_x - C_x)^2}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}} \right]. \quad (1,203)$$

Используя уравнение (1,186), можно определить роль внешних сил и сил давления и сравнить их действие с действием основных сил — баллистических объемных.

Для использования в анализе выражение (1,186) удобно записать в развернутом виде

$$\frac{e_x}{\tau_{жх}} = 1 - \frac{4\rho_{ж} \dot{V}_x - \frac{\partial p}{\partial x}}{3a_x \rho (W_x - C_x)^2} \sqrt{R_0^2 - \Psi t}. \quad (1,204)$$

§ 5. УРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПО КАПЛЯМ

Распыл топлива может рассматриваться как процесс, протекающий под действием большого числа различных факторов, многие из которых являются в определенной степени взаимно-независимыми. Для определения секундного массового расхода имеем

$$\frac{G}{g} = \int_0^{\infty} n \, dm, \quad (1,205)$$

где m — масса капли;

n — секундное количество капель.

Допустим, что нам известна функция

$$n = f(m). \quad (1,206)$$

Для определения расхода будем иметь

$$\frac{G}{g} = \int_0^{\infty} f(m) \, dm. \quad (1,207)$$

При ограничении диапазона изменения массы капель интеграл (1,207) следует переписать так:

$$\frac{G}{g} = \int_{m_1}^{m_2} f(m) \, dm. \quad (1,208)$$

Закон распределения массы можно представить в виде

$$f(m) = n_0 e^{-a(m-m_0)^2}. \quad (1,209)$$

Для определения расхода найдем (см. рис. 5)

$$\frac{G}{g} = n_0 \int_{m_1}^{m_2} e^{-a(m-m_0)^2} dm. \quad (1,210)$$

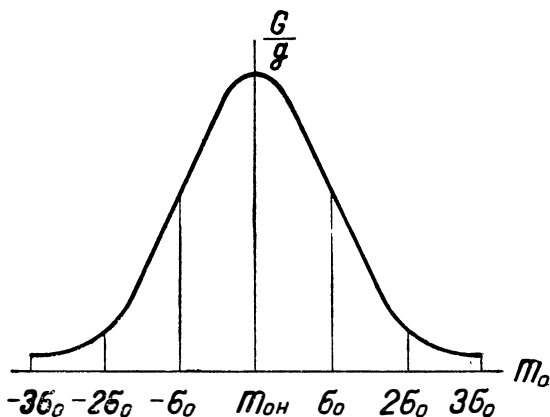


Рис. 5.

В этих условиях распределение капель можно характеризовать нормальным законом, который записывается так:

$$\varphi(m) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(m-\bar{m})^2}{\sigma^2}}, \quad (1,211)$$

где \bar{m} — среднее значение;

σ — среднее квадратическое отклонение.

Поскольку масса капли всегда является величиной положительной, то для характеристики закона распределения удобно пользоваться формулой

$$f(m) = n_0 m e^{-am^2}. \quad (1,212)$$

Теперь расход можно подсчитать так:

$$\frac{G}{g} = n_0 \int_{m_1}^{m_2} m e^{-am^2} dm. \quad (1,213)$$

В рассматриваемых условиях распределение капель удобно исследовать, привлекая закон распределения по кривой Максвелла; при двумерном исходном рассеивании

$$\varphi(m) = \frac{1}{\sigma_0^2} m e^{-\frac{m^2}{2\sigma_0^2}}, \quad (1,214)$$

где σ_0 — среднее квадратическое отклонение кругового гауссова рассеивания.

При трехмерном исходном рассеивании для определения расхода имеем:

$$f(m) = n_0 m^2 e^{-am^2}; \quad (1,215)$$

$$\frac{G}{g} = n_0 \int_{m_1}^{m_2} m^2 e^{-am^2} dm. \quad (1,216)$$

Здесь для исследования нужно пользоваться следующим дифференциальным законом распределения:

$$\varphi(m) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_0^3 \sqrt{\pi}} m^2 e^{-\frac{m^2}{2\sigma_0^2}}. \quad (1,217)$$

Максвелловские законы удобны тем, что они несимметричны, имеют один параметр и теоретически описывают ту область, в которой и распределяется масса по каплям. Однако для окончательного выбора закона необходим учет особенностей работы исследуемой камеры.

На основании выбранной зависимости можно найти решение в виде

$$\bar{m} = \Phi\left(\frac{G}{g}\right) \quad (1,218)$$

и затем среднее значение радиуса капли на выходе из головки выразить через секундный расход

$$R = \psi\left(\frac{G}{g}\right). \quad (1,219)$$

Для капли шаровой формы

$$\bar{R} = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{\Phi\left(\frac{G}{g}\right)}{\pi}}. \quad (1,220)$$

Для определения текущего значения радиуса теперь имеем

$$R = \sqrt[3]{\left[\frac{3}{4} \cdot \frac{\Phi\left(\frac{G}{g}\right)^{3/2}}{\pi}\right] - \Psi t}. \quad (1,221)$$

Напомним, что при обработке опытных данных для определения параметров нормального закона пользуются формулами:

$$\bar{m} = \frac{\sum m_i}{n}; \quad (1,222)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m_i - \bar{m})^2}{n}}. \quad (1,223)$$

§ 6. УРАВНЕНИЯ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

В рассмотренных нами уравнениях предполагалось, что газ движется с некоторой скоростью W . Такое движение возникает в процессе смешения продуктов сгорания, поступающих в элемент из предыдущего элемента, с продуктами испарения, образующимися в рассматриваемом элементе. Возьмем составляющие по оси x . Пусть продукты сгорания обладают скоростью U_x . Их среднее секундное массовое количество в элементе составляет

$$\rho W_x (r d\varphi dr - S_x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [\rho W_x (r d\varphi dr - S_x)]}{\partial x} dx. \quad (1,224)$$

Среднюю скорость движения газообразных продуктов испарения обозначим U_x , а их секундное массовое поступление в элемент нам уже известно, оно равно

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} r d\varphi dr dx. \quad (1,225)$$

Напомним, что при определении третьей производной необходимо иметь в виду знак.

Газовая смесь имеет скорость W_x , однако в расчете коэффициентом ξ_x следует учитывать неполноту выравнивания скоростей. Полное суммарное секундное количество газа будет равно

$$\begin{aligned} \rho W_x (r d\varphi dr - S_x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [\rho W_x (r d\varphi dr - S_x)]}{\partial x} dx + \\ + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} r d\varphi dr dx. \end{aligned} \quad (1,226)$$

Уравнение закона сохранения количества движения в направлении составляющей W_x запишется так:

$$\begin{aligned} \left[\rho W_x (r d\varphi dr - S_x) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta_x \right) \right] U_x + \\ + \left[\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} r d\varphi dr dx \right] C_x = \\ = \left[\rho W_x (r d\varphi dr - S_x) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta_x \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} r d\varphi dr dx \right] \xi_x W_x. \end{aligned} \quad (1,227)$$

Решение в отношении скорости продуктов сгорания имеет вид

$$U_x = (1 + \Theta_x) \xi_x W_x - \Theta_x C_x, \quad (1,228)$$

где

$$\theta_x = \frac{\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} r d\varphi dr dx}{\rho W_x (r d\varphi dr - S_x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [\rho W_x (r d\varphi dr - S_x)]}{\partial x} dx} \quad (1,229)$$

или

$$\theta_x = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{r \partial \varphi \partial r} dx}{g \rho W_x (1 - \epsilon_x) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta_x\right)} \quad (1,230)$$

Закон сохранения механической энергии при движении вязкой жидкости не выполняется; здесь следует применять закон сохранения энергии с учетом перехода части кинетической энергии в теплоту. Это явление называется диссипацией механической энергии вязкой жидкости. Первый тип диссипаций обусловлен деформацией частиц газа и в уравнении (1,130) представлен функцией Φ_r . Второй переход наблюдается в ходе смешения двух газовых потоков, движущихся с разными скоростями. Выделение тепла в этом процессе характеризуется уравнением

$$\begin{aligned} & \left[\rho W_x (r d\varphi dr - S_x) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta_x\right) \right] U_x^2 + \\ & + \left[\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} r d\varphi dr dx \right] C_x^2 = \\ & = \left[\rho W_x (r d\varphi dr - S_x) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta_x\right) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} r d\varphi dr dx \right] (\xi_x W_x)^2 + \\ & + \left[\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} r d\varphi dr dx \right] g q_{nx}, \quad (1,231) \end{aligned}$$

которое перепишем так:

$$g q_{nx} = \frac{1}{\theta_x} U_x^2 + C_x^2 - \left(1 + \frac{1}{\theta_x}\right) (\xi_x W_x)^2. \quad (1,232)$$

Подставляя значение скорости U_x и производя преобразования, находим

$$q_{nx} = (1 + \theta_x) \frac{1}{g} (\xi_x W_x - C_x)^2. \quad (1,233)$$

Складывая скаляры, характеризующие выделение тепла, получим полное тепло

$$\begin{aligned} \dot{Q}_n = & \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} (1 + \Theta_x) (\xi_x W_x - C_x)^2 + \right. \\ & + \frac{\partial^3 G_r}{r \partial \varphi \partial r \partial x} (1 + \Theta_r) (\xi_r W_r - C_r)^2 + \\ & \left. + \frac{\partial^3 G_z}{r \partial \varphi \partial r \partial x} (1 + \Theta_\varphi) (\xi_\varphi W_\varphi - C_\varphi)^2 \right] r d\varphi dr dx, \quad (1,234) \end{aligned}$$

а затем диссипативную функцию потока

$$\Phi_n = \frac{\dot{Q}_n}{\mu r d\varphi dr dx}. \quad (1,235)$$

Если скорость газообразных продуктов окислителя не равна скорости газообразных продуктов горючего, то среднюю скорость следует подсчитывать следующим образом.

Местное соотношение притоков

$$K = \frac{\frac{\partial^3 G_{1x}}{r \partial \varphi \partial r \partial x}}{\frac{\partial^3 G_{2x}}{r \partial \varphi \partial r \partial x}}. \quad (1,236)$$

По закону сохранения импульсов

$$\frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} C_x = \frac{\partial^3 G_{1x}}{r \partial \varphi \partial r \partial x} C_{1x} + \frac{\partial^3 G_{2x}}{r \partial \varphi \partial r \partial x} C_{2x}. \quad (1,237)$$

Таким образом,

$$C_x = \frac{K C_{1x} + C_{2x}}{1 + K}. \quad (1,238)$$

Составляющие C_{1x} и C_{2x} скоростей C_1 и C_2 определяются по скорости движения капель.

При рассмотрении процесса смешения газовых потоков выделяют два крайних случая. Горению неподвижного топлива соответствует условие $C_1 = C_2 = 0$; отношение скоростей здесь будет наименьшим

$$\frac{U_x}{W_x} = 1 + \Theta. \quad (1,239)$$

К концу сгорания топлива $C_x = W_x$ и при этом $U_x = W_x$; следовательно,

$$1 < \frac{U_x}{W_x} < (1 + \Theta). \quad (1,240)$$

Наибольшая диссипация будет наблюдаться при наибольшей разности скоростей, т. е. в верхней части камеры, а ближе

к соплу диссипация потока уменьшится, хотя диссипация газа в силу наличия и изменения поля скоростей может оказывать на поток определенное влияние.

§ 7. УРАВНЕНИЯ ГОРЯЩЕЙ КАПЛИ

В результате теплообмена между каплей и продуктами сгорания происходит подогрев и испарение капли. Продукты испарения диффундируют в продукты сгорания. Между продуктами сгорания и жидкой каплей образуется состоящее из продуктов испарения облако. При движении капли облако растягивается в направлении движения капли, поскольку скорость продуктов сгорания превышает скорость движения капли. На поверхности соприкосновения облака с продуктами сгорания и в передней, так называемой хвостовой части облака наблюдается горение продуктов испарения. Рассмотренный в упрощенной форме процесс можно приблизительно описать тремя уравнениями:

закона сохранения массы для облака;
диффузии продуктов испарения в продукты сгорания;
закона сохранения энергии для жидкой капли.

Уравнение закона сохранения массы и уравнение диффузии

Для любого момента времени можно написать уравнение сохранения массы для облака, обволакивающего каплю, в следующем виде:

$$m_{\text{ж}} + m_D - m_0 = 0, \quad (1,241)$$

где $m_{\text{ж}}$ — масса жидкости в капле в данный момент времени;

m_D — масса продуктов испарения, диффундировавших в продукты сгорания к тому же моменту времени;

m_0 — масса продуктов испарения, накопившаяся в облаке к тому же моменту времени.

Учитывая, что все массы переменны, дифференцирование по t следует выполнить так:

$$\dot{m}_{\text{ж}} + \dot{m}_D - \dot{m}_0 = 0. \quad (1,242)$$

Масса капли шаровой формы

$$m_{\text{ж}} = \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{ж}} R^3. \quad (1,243)$$

Производная по t запишется так:

$$\dot{m}_{\text{ж}} = 4\pi\rho_{\text{ж}} R^2 \dot{R}. \quad (1,244)$$

По закону Фика для определения производной от диффундировавшей массы имеем:

$$\dot{m}_D = -\varkappa D \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} \right), \quad (1,245)$$

где σ — поверхность облака. Знак минус характеризует направление процесса диффузии.

Введем для облака характерный размер l , так что для горячей поверхности можно написать

$$\sigma = \zeta l^2, \quad (1,246)$$

где ζ — коэффициент, характеризующий форму поверхности, по которой происходит диффузия.

Если, например, облако представить в виде цилиндра, длина которого L , радиус l , отношение длины к радиусу z , то для определения ζ получим

$$\zeta = 2\pi z. \quad (1,247)$$

Обозначив

$$\nabla C = \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial l} + \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta}, \quad (1,248)$$

получим

$$\dot{m}_D = -\zeta l^2 D \nabla C. \quad (1,249)$$

В расчет введена новая переменная — концентрация, поэтому для решения необходимо привлечь уравнение диффузии, характеризующее накопление вещества в определенной точке во времени,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C, \quad (1,250)$$

где при рассмотрении окрестности

$$\nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial l^2} + \frac{1}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2}. \quad (1,251)$$

Определим массу продуктов испарения в облаке при помощи уравнения

$$m_0 = \rho_0 \left(\epsilon l^3 - \frac{4}{3} \pi R^3 \right), \quad (1,252)$$

где ϵ — коэффициент, характеризующий форму облака. Для облака, которое можно представить в виде цилиндра,

$$\epsilon = \pi z. \quad (1,253)$$

Принимая плотность продуктов испарения в облаке постоянной, находим для определения производной

$$\dot{m}_0 = \rho_0 (3\epsilon l^2 \dot{l} - 4\pi R^2 \dot{R}). \quad (1,254)$$

Заметим, что в рассмотренных уравнениях коэффициент диффузии D принимался постоянным. Если появится необходимость учесть особенности диффузионных процессов по осям,

то коэффициент диффузии в (1,249) и (1,250) следует ввести за соответствующий знак дифференциала.

Подставляя найденные значения производных в (1,242), приходим к искомому уравнению закона сохранения массы для облака:

$$4\pi (\rho_{\text{ж}} + \rho_0) R^2 \dot{R}_0 - 3\varepsilon \rho_0 l^2 \dot{l} - \zeta l^2 D \nabla C = 0. \quad (1,255)$$

Уравнение закона сохранения энергии для капли

Движущееся вместе с каплей облако нагревается как в результате конвективного теплообмена с продуктами сгорания, так и под действием потока лучистой энергии. Общее количество тепла составит:

$$\dot{Q} = \zeta l^2 [\alpha (T - T_0) + AT^n], \quad (1,256)$$

где T — температура продуктов сгорания;

T_0 — температура продуктов испарения на поверхности облака.

Тепло, полученное облаком, по закону теплопроводности передается капле. Часть потока лучистой энергии проникает через газовый слой облака и достигает поверхности капли. Учитывая роль потока лучистой энергии коэффициентом β , получим:

$$\dot{Q} = \zeta l^2 \beta \frac{\partial T_0}{\partial t} \lambda. \quad (1,257)$$

За тот же рассматриваемый интервал времени с поверхности капли испарится слой dR , на что израсходуется тепло

$$- 4\pi g \rho_{\text{ж}} r_{\text{ж}} R^2 \dot{R}. \quad (1,258)$$

где $r_{\text{ж}}$ — скрытая теплота испарения.

Средняя температура капли может меняться во времени хотя бы потому, что температура кипения зависит от давления окружающей среды, которое непрерывно меняется. С учетом изменения массы капли для определения элементарного изменения энтальпии будем иметь

$$- 4\pi g c_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}} R^2 \left(T_{\text{ж}} \dot{R} + \frac{1}{3} R \dot{T}_{\text{ж}} \right). \quad (1,259)$$

Уравнение закона сохранения энергии запишется так:

$$\frac{\zeta l^2}{4\pi g R^2 \rho_{\text{ж}}} \beta \lambda \frac{\partial T_0}{\partial t} - (r_{\text{ж}} + c_{\text{ж}} T_{\text{ж}}) \dot{R} - \frac{1}{3} c_{\text{ж}} R \dot{T}_{\text{ж}} = 0. \quad (1,260)$$

В свою очередь, теплообмен внутри капли будет описываться системой следующих уравнений:

$$\dot{T}_ж = \frac{\partial T_ж}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T_ж \quad (1,261)$$

$$\frac{\partial T_ж}{\partial t} = a \nabla^2 T_ж; \quad (1,262)$$

$$a = g \frac{\lambda_ж}{c_ж \rho_ж} . \quad (1,263)$$

Анализ уравнений горячей капли

1. Диффузионное изменение размеров облака

Полное представление об изменении размеров облака и капли можно получить, решая совместно хотя бы (1,250), (1,255) и (1,260). Для получения приближенного решения рассмотрим (1,255)

$$4\pi(\rho_ж + \rho_0) \left(\frac{R}{l}\right)^2 \dot{R} - 3\varepsilon\rho_0 \dot{l} - \zeta D \nabla C = 0. \quad (1,264)$$

Примем, что

$$\frac{R}{l} = \kappa \quad (1,265)$$

и наложим условие

$$\kappa = \text{const.} \quad (1,266)$$

При этом вместо (1,264) получим

$$[4\pi(\rho_ж + \rho_0) \kappa^3 - 3\varepsilon\rho_0] \dot{l} - \zeta D \nabla C = 0. \quad (1,267)$$

Приближенно считают, что местная концентрация не меняется во времени.

Далее будем рассматривать одномерный поток. Согласно (1,250), учитывая, что коэффициент диффузии не может быть равен нулю, приходим к выводу, что вторая производная концентрации по x равна нулю. Таким образом, в одномерном потоке первая производная концентрации по x есть постоянное число. Обозначим его ζ . Теперь (1,267) примет вид

$$[4\pi(\rho_ж + \rho_0) \kappa^3 - 3\varepsilon\rho_0] dl = \zeta D \zeta dt. \quad (1,268)$$

После интегрирования

$$l - l_0 = \frac{\zeta D \zeta}{4\pi(\rho_ж + \rho_0) \kappa^3 - 3\varepsilon\rho_0} t. \quad (1,269)$$

Таким образом, знаменатель (1,269) характеризует направление изменения облака, а числитель — интенсивность этого изменения.

2. Определение коэффициента поверхностного выгорания

Отбрасывая факторы второстепенного порядка в условиях одномерного потока, уравнение закона сохранения энергии для капли запишем так:

$$\dot{R} = -\kappa \frac{\lambda \frac{dT_0}{dl}}{g\rho_{ж}(r_{ж} + c_{ж}T_{ж})}, \quad (1,270)$$

где κ — коэффициент согласования.

Имея в виду (1,265), найдем

$$dR dR = -\kappa \frac{\kappa\lambda}{g\rho_{ж}(r_{ж} + c_{ж}T_{ж})} dT_0 dt. \quad (1,271)$$

Интегрируя, получаем

$$R^2 \approx -\kappa \frac{\kappa\lambda(T - T_{ж})}{g\rho_{ж}(r_{ж} + c_{ж}T_{ж})} t + C. \quad (1,272)$$

Обозначим

$$\Psi = \kappa\kappa \frac{\lambda(T - T_{ж})}{g\rho_{ж}(r_{ж} + c_{ж}T_{ж})}. \quad (1,273)$$

Приняв при $t=0$ $R=R_0$, для постоянной интегрирования найдем, что $C=R_0^2$; следовательно,

$$R^2 \approx R_0^2 - \Psi t. \quad (1,274)$$

С этим уравнением мы уже встречались в предыдущих параграфах. Поскольку вывод носил приближенный характер, на (1,273) следует смотреть как на уравнение приближенное.

§ 8. УРАВНЕНИЕ ГРАНИЦЫ ГОРЕНИЯ

Период запаздывания зависит от характера смесеобразования и параметров внутрикамерного процесса. Путь, эквивалентный периоду запаздывания, определится не только рассматриваемым периодом, но и скоростью движения капли до границы начала горения.

Путь, на котором завершается подготовка капли к горению

$$l = l_0 + \int C d\tau, \quad (1,275)$$

где l_0 — постоянная составляющая полного пути. Эта постоянная, так же как и скорость C , зависит от места расположения форсунки, следовательно,

$$l_0(r, \varphi); \quad (1,276)$$

$$C(x, r, \varphi). \quad (1,277)$$

Скорость и постоянная l_0 имеют свои составляющие, так что в проекциях на координатные оси

$$x = x_0 + \int C_x d\tau; \quad (1,278)$$

$$r = r_0 + \int C_r d\tau; \quad (1,279)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int C_\varphi d\tau. \quad (1,280)$$

Составляющие пути подготовки, так же как и путь l , являются функциями r и φ .

Строго говоря, для определения скорости C необходимо привлечь уравнения, описывающие движение капли в верхней части камеры. Однако на относительно небольшом участке пути l скорость C будет мало отличаться от скорости C_0 , характерной для момента выхода жидкости из форсунки.

Индуктивный период будем определять по температуре самовоспламенения. Скорость выделения тепла для единицы объема

$$Qk_0C^\nu e^{-\frac{E}{RT}}. \quad (1,281)$$

Скорость изменения энтальпии для того же объема

$$c_v \frac{dT}{d\tau}. \quad (1,282)$$

В соответствии с законом сохранения энергии, приравнявая полученные выражения, после преобразований имеем

$$d\tau = \xi \frac{c_v}{Qk_0C^\nu} e^{\frac{E}{RT}} dT, \quad (1,283)$$

где c_v — теплоемкость;
 Q — тепловой эффект;
 E — энергия активации;
 k_0 — константа;
 C — концентрация;
 ν — количество вторичных реакций в цепи;
 ξ — коэффициент, учитывающий теплообмен.

Будем считать, что концентрация пропорциональна плотности

$$C = ga\rho. \quad (1,284)$$

Используя уравнение состояния, находим

$$C = a \frac{p}{RT}. \quad (1,285)$$

Температура самовоспламенения с давлением связана так:

$$\ln p = \frac{A}{T} + b. \quad (1,286)$$

Следовательно, в (1,283) температуру можно выразить через давление.

Используя (1,286), находим:

$$T = \frac{A}{\ln p - b}; \quad (1,287)$$

$$dT = - \frac{A}{(\ln p - b)^2 p} dp. \quad (1,288)$$

Теперь, используя (1,288), можно написать

$$C_v = a \left[\frac{(\ln p - b) p}{AR} \right]^v. \quad (1,289)$$

Подставляя полученные выражения в (1,283), получим после преобразований:

$$d\tau = \xi \frac{c_v A^{v+1} R^v}{a Q \kappa_0} \cdot \frac{1}{e^{\frac{E}{RT}} b} \cdot \frac{p^{\frac{E}{RT} - v - 1}}{(\ln p - b)^{v+2}} dp. \quad (1,290)$$

Примем в качестве постоянной

$$K = \xi \frac{c_v A^{v+1} R^v}{a Q \kappa_0} e^{-\frac{E}{RT} b}. \quad (1,291)$$

Обозначим

$$f(p) = \frac{p^{\frac{E}{RT} - v - 1}}{(\ln p - b)^{v+2}}. \quad (1,292)$$

Для определения искомого пути будем иметь

$$l = l_0 + KC \int f(p) dp. \quad (1,293)$$

Составляющие по координатным осям определяются по формулам типа

$$x = x_0 + KC_x \int f(p) dp. \quad (1,294)$$

Заметим, что если $f(p)$ представлено в виде (1,292), то интегралы (1,293) и (1,294) будут табличными.

§ 9. СИСТЕМА РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим параметры камеры и методы их определения. Отобрав из общего числа параметров неизвестные, подлежащие определению, подберем уравнения и составим замкнутую систему.

1. Скорость газовой смеси W . Определяется расчетом.
2. Проекция скорости газовой смеси W_x на направление x . Определяется расчетом.
3. Проекция скорости газовой смеси W_r на направление r . Определяется расчетом.
4. Проекция скорости газовой смеси W_φ на направление φ . Определяется расчетом.
5. Скорость капли компонента топлива; скорость облака C . Определяются расчетом.
6. Проекция скорости капли C_x . Определяется расчетом.
7. Проекция скорости капли C_r . Определяется расчетом.
8. Проекция скорости капли C_φ . Определяется расчетом.
9. Скорость продуктов сгорания U . Определяется расчетом.
10. Проекция скорости U_x . Определяется расчетом.
11. Проекция скорости U_r . Определяется расчетом.
12. Проекция скорости U_φ . Определяется расчетом.
13. Давление в камере сгорания p . Определяется расчетом.
14. Плотность газов в камере сгорания ρ . Определяется расчетом.
15. Температура газов в камере T . Определяется расчетом.
16. Газовая постоянная R . Задается по результатам термодинамического расчета. В зависимости от требуемой точности расчета может быть представлена как функция температуры или давления и соотношения между компонентами.
17. Теплоемкость газовой смеси при постоянном объеме c_v . Задается как функция давления или температуры и соотношения между компонентами по результатам термодинамического расчета.
18. Теплоемкость газовой смеси при постоянном давлении c_p . Задается как функция давления или температуры и соотношения между компонентами по результатам термодинамического расчета.
19. Коэффициент вязкости газовой смеси μ . Задается как функция давления или температуры и соотношения между компонентами по результатам термодинамического расчета.
20. Коэффициент теплопроводности газовой смеси λ . Задается по результатам термодинамического расчета как функция давления или температуры и соотношения между компонентами.

Последние четыре параметра относятся к справочным величинам.

21. Силовая функция газа P . В расчете не используется, а представляется в виде слагаемых конвективного члена.

22. Слагаемая, представляющая собой частную производную проекции силовой функции по x , записывается в виде $P_{x(x)}$. Определяется расчетом.

23. Частная производная силовой функции $P_r(r)$. Определяется расчетом.

24. Частная производная силовой функции $P_\varphi(\varphi)$. Определяется расчетом.

25. Коэффициент, учитывающий специфические особенности горящего потока τ_x . Задается по результатам обработки опытных данных или при помощи дополнительных уравнений.

26. Коэффициент τ_r . Задается опытом или дополнительными уравнениями.

27. Коэффициент τ_φ . Задается опытом или дополнительными уравнениями.

28. Силовая функция жидкости π . В расчете не используется.

29. Частная производная $\pi_{x(x)}$. Определяется расчетом.

30. Частная производная $\pi_r(r)$. Определяется расчетом.

31. Частная производная $\pi_\varphi(\varphi)$. Определяется расчетом.

32. Коэффициент $\tau_{жж}$. Задается опытом или дополнительными уравнениями.

33. Коэффициент $\tau_{жг}$. Задается опытом или дополнительными уравнениями.

34. Коэффициент $\tau_{ж\varphi}$. Задается опытом или дополнительными уравнениями.

35. Объемная баллистическая сила f . В расчете не используется.

36. Объемная баллистическая сила, представляющая собой проекцию силы на ось x ; записывается в виде f_x . Определяется в расчете.

37. Объемная баллистическая сила f_r . Определяется в расчете.

38. Объемная баллистическая сила f_φ . Определяется в расчете.

39. Поправочный коэффициент, учитывающий искажение формы капли a_x . Задается по дополнительным соображениям.

40. Поправочный коэффициент, учитывающий искажение формы капли a_r . Задается по дополнительным соображениям.

41. Поправочный коэффициент, учитывающий искажение формы капли a_φ . Задается по дополнительным соображениям.

42. Проекция объемной силы вязкого трения μM_x . Определяется расчетом.

43. Проекция объемной силы вязкого трения μM_r . Определяется расчетом.

44. Проекция объемной силы вязкого трения μM_φ . Определяется расчетом.

45. Секундный весовой расход топлива G . Для определения используются уравнения гидравлических цепей и системы питания.

46. Секундный весовой расход топлива в направлении оси x ; записывается в виде G_x . Задается по результатам расчета или проливки головки камеры.

47. Секундный весовой расход топлива в направлении оси r ; записывается в виде G_r . Задается по результатам расчета или проливки головки камеры.

48. Секундный весовой расход топлива в направлении оси φ ; записывается в виде G_φ . Задается по результатам расчета или проливки головки камеры.

49. Количество тепла, выделяющееся при сгорании единицы веса топлива q . Определяется по результатам термодинамического расчета и зависит от давления или температуры и соотношения между компонентами.

50. Функция Ω , определяющая подвод тепла (массы) в элемент за счет выгорания. Определяется расчетом, но закономерности для частных производных должны быть заданы.

51. Величина, характеризующая опережение фронта пламени по отношению к центру массы капли x_0 . Задается по результатам обработки опытных данных.

52. Опережение фронта пламени r_0 . Задается опытом.

53. Опережение фронта пламени φ_0 . Задается опытом.

54. Ускорение силы тяжести g . Задается по законам гравитации.

55. Ускорение ракеты \dot{V} . Задается по результатам баллистического расчета.

56. Проекция \dot{V}_x . Задается баллистическим расчетом.

57. Проекция \dot{V}_r . Задается баллистическим расчетом.

58. Проекция \dot{V}_φ . Задается баллистическим расчетом.

59. Проекция внешней объемной силы, действующей на газовый поток X . Определяется расчетом.

60. Проекция внешней объемной силы, действующей на газовый поток r . Определяется расчетом.

61. Проекция внешней объемной силы, действующей на газовый поток φ . Определяется расчетом.

62. Проекция внешней объемной силы, действующей на жидкость X_j . Определяется расчетом.

63. Проекция внешней объемной силы, действующей на жидкость $\Gamma_{ж}$. Определяется расчетом.
64. Проекция внешней объемной силы, действующей на жидкость $\Phi_{ж}$. Определяется расчетом.
65. Плотность жидкости $\rho_{ж}$. Задается как величина справочная.
66. Температура жидкости $T_{ж}$. Определяется расчетом.
67. Теплоемкость жидкости $c_{ж}$. Задается как величина справочная.
68. Коэффициент вязкости жидкости $\mu_{ж}$. В расчете не участвует.
69. Коэффициент теплопроводности жидкости $\lambda_{ж}$. Задается как величина справочная.
70. Плотность облака ρ_0 . Принимается равной плотности газов ρ .
71. Температура облака T_0 . В расчете не участвует. Может быть определена по дополнительным уравнениям теплового баланса.
72. Концентрация на границе облака C . Определяется расчетом.
73. Коэффициент диффузии D . Задается как величина справочная.
74. Характерный размер облака l . Определяется расчетом.
75. Диссипативная функция Φ . Определяется расчетом.
76. Диссипативная функция газа Φ_r . Задается по результатам дополнительных расчетов.
77. Диссипативная функция потока Φ_n . Определяется расчетом.
78. Коэффициент закона сохранения импульса Θ_x . Определяется расчетом.
79. Коэффициент закона сохранения импульса Θ_r . Определяется расчетом.
80. Коэффициент закона сохранения импульса Θ_φ . Определяется расчетом.
81. Коэффициент неполноты выравнивания скорости ξ_x . Задается опытом.
82. Коэффициент неполноты выравнивания скорости ξ_r . Задается опытом.
83. Коэффициент неполноты выравнивания скорости ξ_φ . Задается опытом.
84. Масса капли m . Задается опытом.
85. Число капель в единицу времени n . Задается опытом.
86. Средняя арифметическая величина массы капли \bar{m} . Определяется расчетом.
87. Среднее квадратическое отклонение массы капли σ . Определяется расчетом.

88. Начальное значение радиуса капли R_0 . Определяется расчетом.

89. Текущее значение радиуса капли R . Определяется расчетом.

90. Коэффициент поверхностного выгорания Ψ . Определяется расчетом.

91. Функция расхода топлива, по которой, используя нормальный закон, определяют среднее значение начального радиуса капли; записывается в виде $\varphi(G)$. Определяется расчетом.

92. Площадь жидкости на грани $abcd$; записывается в виде S_x . Определяется расчетом.

93. Площадь жидкости S_r . Определяется расчетом.

94. Площадь жидкости S_φ . Определяется расчетом.

95. Гравиметрический коэффициент ϵ_x . Задается опытом.

96. Гравиметрический коэффициент ϵ_r . Задается опытом.

97. Гравиметрический коэффициент ϵ_φ . Задается опытом.

98. Квадрат относительного объема жидкости Π . Определяется расчетом.

99. Коэффициенты согласования, задаваемые по результатам обработки опытных данных.

100. Коэффициенты, подсчитываемые при помощи дополнительных уравнений.

Из общего числа рассмотренных параметров пятьдесят два подлежат определению. Следовательно, замкнутая система должна содержать пятьдесят два уравнения. Отметим, однако, что число неизвестных и уравнений зависит от метода определения того или иного параметра и подготовки предварительных данных. Массу капли, например, можно или принять по результатам обработки опытных данных, или подсчитать как среднюю арифметическую величину, или определить по расходу топлива, используя нормальный закон. Тепловой поток, направленный к капле, можно определить по простым приближенным формулам или подсчитать по достаточно сложным уравнениям.

Число неизвестных следует выбирать в соответствии с целью исследования.

Ориентируясь на рассмотренные условия, подберем необходимые уравнения. В систему войдут:

три формулы для определения гравиметрических коэффициентов (1,35);

уравнение закона сохранения массы для газа в элементе горящего потока (1,39);

уравнение функции, являющейся полной характеристикой выгорания и определяющей подвод газа в элемент (1,44);

уравнение состояния;

три формулы для определения частных производных составляющих силовой функции газа — (1,71), (1,72), (1,73);

три уравнения второго закона для газа — (1,80), (1,81), (1,82);

три формулы для определения частных производных, составляющих силовой функции жидкости, — (1,94), (1,95), (1,96);

уравнение производной механической энергии газа (1,84);

уравнение производной механической энергии жидкости (1,120);

три уравнения второго закона для жидкости—(1,91), (1,92), (1,93);

формула суммирования диссипативной функции;

формула для определения квадрата относительного объема жидкости (1,133);

уравнение для определения проекции объемной силы μM_x ;

уравнение для определения проекции объемной силы μM_r ;

уравнение для определения проекции объемной силы μM_φ ;

уравнение закона сохранения энергии для элемента (1,137);

три формулы для определения объемных баллистических сил типа (1,192);

три формулы для определения внешних объемных сил, действующих на жидкость, — (1,200), (1,201), (1,202);

три формулы для определения внешних объемных сил, действующих на газ;

уравнение нормального закона распределения (1,211);

формула для определения средней арифметической величины массы капли (1,222);

формула для определения среднего квадратического отклонения массы капли от ее средней величины (1,223);

формула для определения значения радиуса капли (1,221);

три уравнения закона сохранения количества движения (1,227);

три уравнения для определения коэффициентов закона сохранения количества движения (1,230);

формула для определения тепла, выделяющегося в результате диссипации (1,234);

уравнение диффузии (1,252);

уравнение закона сохранения массы для облака (1,255);

уравнение закона сохранения энергии для капли (1,260);

уравнение теплообмена для капли (1,262);

формула для определения коэффициента поверхностного выгорания (1,274);

уравнение производной механической энергии продуктов сгорания.

Система уравнений представлена в приложении. Уравнения, входящие в рассмотренную систему, снабжены или ссылкой на номер формулы в тексте или имеют пометку «б/н» (без номера). Такая пометка показывает, что точно такой формулы в тексте нет, но она всегда легко может быть получена по материалам главы I. В приложении для справок приведено еще четырнадцать формул, не входящих в замкнутую систему уравнений.

Автор благодарит Д. А. Шушко за тщательный просмотр главы.

Глава II

ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗЕЙ КАМЕРЫ С ГИДРАВЛИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ

В камере сгорания наблюдаются, как известно, колебания, протекающие с различными частотами. Эти колебания условно подразделяют на низкочастотные и высокочастотные.

Высокочастотные колебания часто называются акустическими и представляют собой колебания газа, заключенного в камере. Вообще говоря, сферические колебания часто рассматриваются в упрощенной схеме как осевые и радиальные. Возбуждаются акустические колебания при сгорании топлива под действием периода запаздывания, в результате взаимодействия местных потоков, отставания массы горячей капли от фронта пламени и по другим причинам. Для изучения их привлекаются уравнения, рассмотренные в главе I.

Низкочастотные колебания обусловлены связью между камерой и гидравлическими цепями. Возбуждаются они под действием периода запаздывания, вследствие упругих деформаций жидкости и трубопроводов, в силу воздействий со стороны элементов системы питания и по другим причинам. Для изучения их, кроме уравнений камеры, необходимы уравнения, описывающие процессы в гидравлических цепях.

Выводу уравнений гидравлических цепей, уравнения камеры в виде, наиболее удобном для анализа, и исследованию некоторых свойств связи камеры с гидравлической цепью и посвящается глава II.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Напишем уравнения движения вязкой жидкости в цилиндрических координатах при условии, что $W_\varphi = 0$:

$$\frac{dW_x}{dt} = -\frac{1}{\rho_{ж}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla W_x; \quad (2,1)$$

$$\frac{dW_r}{dt} = -\frac{1}{\rho_{ж}} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \nabla W_r - \nu \frac{W_r}{r^2}, \quad (2,2)$$

где W_x и W_r — составляющие скорости жидкости;
 $\rho_{ж}$ — плотность жидкости;
 p — давление во внутренней полости трубопровода;
 ν — кинематический коэффициент вязкости;
 ∇ — дифференциальный оператор; в нашем случае

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} . \quad (2,3)$$

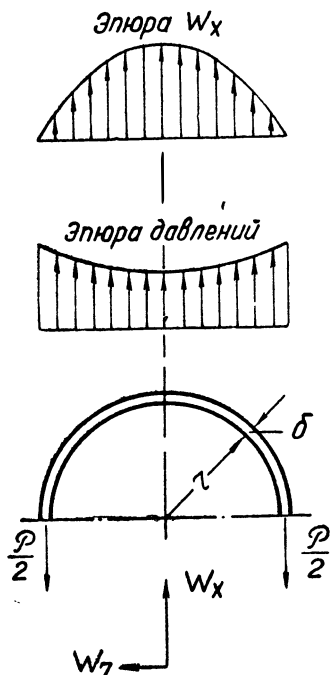


Рис. 6.

Рассмотрим вывод уравнения с учетом радиальной и осевой деформации трубопровода, деформации жидкости, изменения плотности, изменения составляющих скорости. Будем считать, что деформация трубопровода возникает под действием статического и динамического давлений.

Возьмем элемент, объем которого (см. рис. 6)

$$v = \pi r^2 x . \quad (2,4)$$

В единицу времени изменение массы жидкости в элементе, возникающее вследствие деформации трубопровода, составит

$$\rho_{ж} \frac{dv}{dt} = \rho_{ж} (2\pi r_0 x_0 \dot{r} + \pi r_0^2 \dot{x}) . \quad (2,5)$$

Как показано в главе I, изменение массы за счет протока

$$\left[\frac{\partial(\rho_{\text{ж}} W_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho_{\text{ж}} W_r r)}{\partial r} \right] \pi r_0^2 x_0. \quad (2,6)$$

Изменение массы, обусловленное локальным изменением плотности жидкости, будет

$$\frac{\partial \rho_{\text{ж}}}{\partial t} \pi r_0^2 x_0. \quad (2,7)$$

По закону сохранения массы теперь можем написать

$$\dot{\rho}_{\text{ж}} + \rho_{\text{ж}} \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_r}{\partial r} \right) + \rho_{\text{ж}} \frac{2}{r_0} \dot{r} + \rho_{\text{ж}} \frac{1}{x_0} \dot{x} = 0. \quad (2,8)$$

Расстановка знаков в выражении (2,8) зависит от принятой характеристики соответствующих производных.

Если модуль упругости жидкости обозначить ρ_0 , то производные плотности и давления будут связаны зависимостью

$$\dot{\rho}_{\text{ж}} = \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_0} \dot{p}. \quad (2,9)$$

Используем закон упругих деформаций в виде

$$P = E \sigma \frac{\Delta l}{l}. \quad (2,10)$$

Сила, растягивающая кольцевой элемент трубопровода в радиальном направлении,

$$P_r = \left(p + \rho_{\text{ж}} \frac{W_r^2}{2} \right) 2r_0 x_0, \quad (2,11)$$

где p — статическая составляющая;

$\rho \frac{W_r^2}{2}$ — динамическая составляющая.

Растягиваемая площадь

$$\sigma_r = 2x_0 \delta. \quad (2,12)$$

Закон упругих деформаций запишется так:

$$\left(p + \rho_{\text{ж}} \frac{W_r^2}{2} \right) = \frac{E \delta}{r_0^2} (r - r_0). \quad (2,13)$$

Взяв производные, получим

$$\dot{p} + \rho_{\text{ж}} \frac{W_r^2}{2} + \rho_{\text{ж}} W_r \dot{W}_r = \frac{E \delta}{r_0^2} \dot{r}. \quad (2,14)$$

Аналогично можно получить закон упругих деформаций в осевом направлении

$$\left(p + \rho_{\text{ж}} \frac{W_x^2}{2} \right) = \frac{2E \delta}{r_0 x_0} (x - x_0). \quad (2,15)$$

Взяв производные, получим

$$\dot{p} + \rho_{ж} \frac{W_x^2}{2} + \rho_{ж} W_x \dot{W}_x = \frac{2E\delta}{r_0 x_0} \dot{x}. \quad (2,16)$$

После несложных преобразований выражений (2,14) и (2,16) будем иметь:

$$\dot{r} = \frac{r_0^2}{E\delta} \dot{p} + \frac{r_0^2}{E\delta} \cdot \frac{\rho_{ж}}{\rho_0} \cdot \frac{W_r^2}{2} \dot{p} + \frac{r_0^2}{E\delta} \rho_{ж} W_r \dot{W}_r; \quad (2,17)$$

$$\dot{x} = \frac{r_0 x_0}{2E\delta} \dot{p} + \frac{r_0 x_0}{2E\delta} \cdot \frac{\rho_{ж}}{\rho_0} \cdot \frac{W_x^2}{2} \dot{p} + \frac{r_0 x_0}{2E\delta} \rho_{ж} W_x \dot{W}_x. \quad (2,18)$$

Подставляя (2,9), (2,17), (2,18) в уравнение (2,8), получаем

$$\frac{1}{\rho_0} \dot{p} + \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_r}{\partial r} \right) + 2 \frac{r_0}{E\delta} \dot{p} + 2 \frac{r_0}{E\delta} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{W_r^2}{2} \dot{p} +$$

$$+ 2 \frac{r_0}{E\delta} \rho_{ж} W_r \dot{W}_r + \frac{r_0}{2E\delta} \dot{p} + \frac{r_0}{2E\delta} \cdot \frac{\rho_{ж}}{\rho_0} \cdot \frac{W_x^2}{2} \dot{p} + \frac{r_0}{2E\delta} \rho_{ж} W_x \dot{W}_x = 0. \quad (2,19)$$

Обозначим

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho_0} + \frac{5}{2} \cdot \frac{r_0}{E\delta} + \frac{r_0}{E\delta} \cdot \frac{\rho_{ж}}{\rho_0} \left(W_r^2 + \frac{W_x^2}{4} \right)}}. \quad (2,20)$$

Окончательно получим

$$\dot{p} + \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_r}{\partial r} \right) + \rho_{ж} \frac{r_0}{E\delta} \left(2W_r \dot{W}_r + \frac{1}{2} W_x \dot{W}_x \right) \right] = 0. \quad (2,21)$$

Система уравнений, описывающая движение деформируемой жидкости в упругом трубопроводе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho_{ж}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \nabla W \\ \frac{dW_r}{dt} &= -\frac{1}{\rho_{ж}} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + v \nabla W - v \frac{W_r}{r^2} \\ \dot{p} + \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_r}{\partial r} \right) + \rho_{ж} \frac{r_0}{E\delta} \left(2W_r \dot{W}_r + \frac{1}{2} W_x \dot{W}_x \right) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} (2,22)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho_0} + \frac{5}{2} \cdot \frac{r_0}{E\delta} + \frac{r_0}{E\delta} \cdot \frac{\rho_{ж}}{\rho_0} \left(W_r^2 + \frac{1}{4} W_x^2 \right)}}$$

Анализ уравнений гидравлических цепей

1. Неустановившийся одномерный поток

Если не учитывать линейной деформации и динамических нагрузок, то уравнения примут вид:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\rho_{ж}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \nabla W; \quad (2,23)$$

$$\frac{dp}{dt} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial x} = 0; \quad (2,24)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho_0} + \frac{2r_0}{E\delta}}}. \quad (2,25)$$

Если еще не учитывать и деформацию трубопровода, то остается одно уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} W - v \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho_{ж}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2,26)$$

Наиболее часто учитывают деформацию трубопровода в радиальном направлении, но пренебрегают силами вязкого трения. В такой постановке исходные уравнения упрощаются и принимают широко известный вид:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\rho_{ж}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (2,27)$$

$$\frac{dp}{dt} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial x} = 0; \quad (2,28)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho_0} + \frac{2r_0}{E\delta}}}. \quad (2,29)$$

В некоторых случаях представляет интерес определение давления, эквивалентного динамическим нагрузкам, действующим в цепи. Используя (2,22), можно написать

$$\dot{p} = -p_0 \frac{2W_r \dot{W}_r + \frac{1}{2} W_x \dot{W}_x}{W_r^2 + \frac{1}{4} W_x^2}. \quad (2,30)$$

Только осевые динамические нагрузки дадут

$$\dot{p} = -2p_0 \frac{\dot{W}_x}{W_x}. \quad (2,31)$$

Под действием только радиальных нагрузок возникнет эквивалентная производная

$$\dot{p} = -2p_0 \frac{\dot{W}_r}{W_r}. \quad (2,32)$$

Уравнения (2,31) и (2,32) легко интегрируются.

2. Установившийся одномерный поток

Приравнивая локальную производную нулю, получим

$$\frac{dW}{dx} W - \nu \frac{d^2 W}{dx^2} = -\frac{1}{\rho_{ж}} \frac{dp}{dx}. \quad (2,33)$$

Если пренебречь влиянием сил вязкости, то

$$W dW = -\frac{1}{\rho_{ж}} dp. \quad (2,34)$$

Интегрирование (2,34) приводит к уравнению Бернулли.

3. Инженерное решение уравнения гидравлической цепи

С учетом внешних воздействий уравнение (2,23) запишется так:

$$\frac{dW}{dt} = X - \frac{1}{\rho_{ж}} \frac{dp}{dx} + \nu \nabla W. \quad (2,35)$$

Найдем приближенное решение уравнения (2,35). Будем считать, что процесс рассматривается для некоторого участка длиной δx ; при этом вместо (2,35)

$$\frac{dW}{dt} \delta x = X \delta x - \frac{1}{\rho_{ж}} \delta p + \nu \nabla W \delta x. \quad (2,36)$$

При написании (2,36) вместо частной производной давления по координате рассматривали отношение перепада давления на пути к этому же отрезку пути.

Для всей гидравлической цепи длиной

$$L = \sum \delta x \quad (2,37)$$

находим

$$\rho_{ж} \sum \frac{dW}{dt} \delta x = \rho_{ж} \sum X \delta x - (p_1 - p_2) + \rho_{ж} \sum \nu \Delta W \delta x. \quad (2,38)$$

Уравнение (2,38) представляет собой баланс давлений по цепи, причем суммарные гидравлические потери

$$\rho_{ж} \sum \nu \Delta W \delta x = - \sum p h_i = - p h \quad (2,39)$$

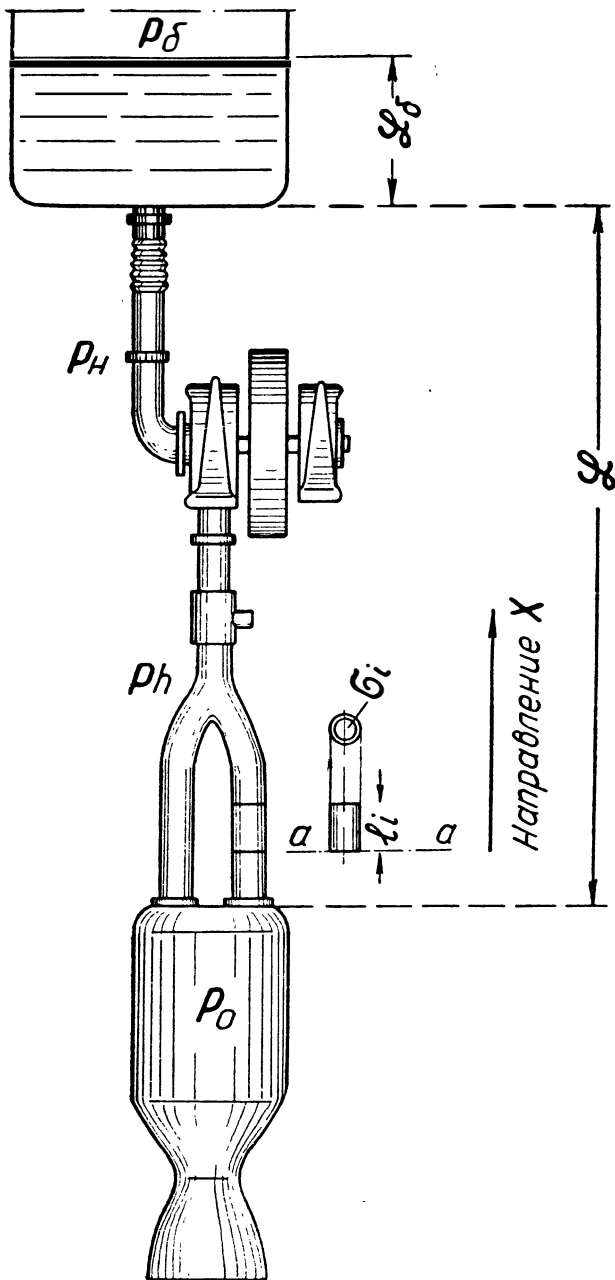


Рис. 7.

могут быть приближенно подсчитаны или определены опытом. Перепад давления на границах определяется с учетом конструкции цепи; если гидравлическая цепь включает в себя насос, бак и камеру сгорания, то

$$-(p_1 - p_2) = p_6 + p_n - p_0, \quad (2,40)$$

где p_6 — давление в баке;

p_n — давление, создаваемое насосом;

p_0 — давление в камере сгорания.

Внешние силы, действующие на систему, образуют в цепи давление внешних сил

$$p_j = \rho_{ж} \sum X \delta x. \quad (2,41)$$

Массовые силы приводят к изменению давления на величину

$$p_w = \rho_{ж} \sum \frac{dW}{dt} \delta x. \quad (2,42)$$

Баланс давлений теперь можно записать так (рис. 7):

$$p_n + p_6 + p_j = p_0 + p_h + p_w. \quad (2,43)$$

Баланс (2,43) показывает, что сумма удельных активных сил равна сумме удельных сил сопротивления.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДАВЛЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Точное определение давлений производится при помощи классических уравнений, некоторые из которых представлены в главе I. Для приближенного инженерного расчета используют относительно несложные, полученные при обоснованных допущениях формулы. В данном параграфе приводится вывод инженерных формул, необходимых для определения составляющих давлений уравнения гидравлической цепи.

1. Избыточное давление, создаваемое насосом

Избыточное давление, создаваемое насосом. (рис. 8)

$$p_n = Dn^2 - D'nG - D''G^2 - D'''n; \quad (2,44)$$

где D — коэффициент, определяющий давление, создаваемое при отсутствии расхода;

D' — коэффициент, определяющий линейный наклон характеристики насоса;

D'' — коэффициент, определяющий отклонение характеристики от линейного закона;

D''' — коэффициент, определяющий падение давления при работе насоса на неустановившемся режиме.

Все коэффициенты являются функцией расхода. В инженерной практике можно вести расчет по участкам (рис. 8). Для каждого из участков следует определить свои значения коэффициентов.

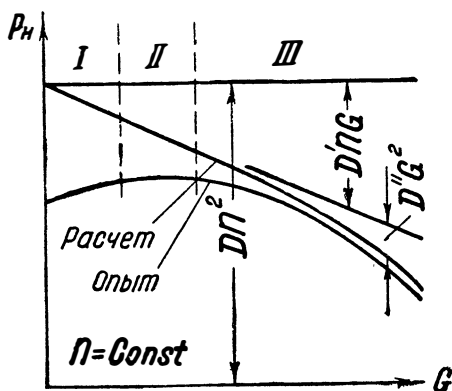


Рис. 8

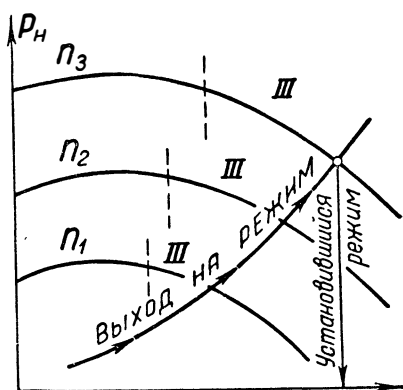


Рис. 9.

Очевидно, что значение коэффициента D на первом участке будет наименьшим, а на третьем — наибольшим

$$D_I < D_{II} < D_{III}. \quad (2,45)$$

Коэффициент D' также будет принимать различные значения, причем

$$D'_I < 0; \quad D'_{II} = 0; \quad D'_{III} > 0. \quad (2,46)$$

При расчете выхода насоса на режим (рис. 9) следует ориентироваться в основном на третий участок и поэтому при проведении приближенных расчетов можно считать все коэффициенты постоянными.

Вывод формулы (2,44) и теоретический метод определения коэффициентов изложены в § 4 главы III.

При исследовании конкретного двигателя, выпускаемого заводом, численные значения коэффициентов следует определять по результатам обработки опытных данных.

2. Давление наддува

Давление p_6 , господствующее в баке, определяется при расчете системы наддува. В зависимости от устройства и степени совершенства органов системы наддува давление либо постоянно, либо меняется по определенному закону. Таким образом, в наиболее общем случае

$$p_6(t); \quad (2,47)$$

в частных или расчетных случаях полагают

$$p_6 = \text{const.} \quad (2,48)$$

Расчету системы наддува посвящена глава III.

3. Давление, создаваемое внешними силами

Если двигатель работает на стенде, то внешние силы обусловлены гравитационным полем. В полете внешние силы определяются произведением

$$m\dot{V}, \quad (2,49)$$

где m — масса жидкости в цепи;

\dot{V} — приведенная скорость полета ракеты в рассматриваемый момент времени.

Допустим, что по результатам баллистических расчетов известна функция

$$V(t), \quad (2,50)$$

по которой построен график функции

$$\dot{V}(t). \quad (2,51)$$

Рассмотрим элемент трубопровода (рис. 7) длиной l_i . Масса жидкости в элементе составит

$$l_i \sigma_i \rho_{ж}. \quad (2,52)$$

Давление в плоскости aa будет

$$p_{ji} = \frac{l_i \sigma_i \rho_{ж} \dot{V}_x(t)}{\sigma_i} = l_i \rho \dot{V}_x(t), \quad (2,53)$$

где $\dot{V}_x(t)$ — составляющая $\dot{V}(t)$, подсчитанная в направлении оси x (рис. 7).

На срезе форсунок давление

$$p_j = \rho \dot{V}_x(t) \sum_1^i l_i = \rho_{ж} \dot{V}_x(t) (L + L_6), \quad (2,54)$$

где L — расстояние от среза форсунок до днища бака;

L_6 — высота жидкости в баке в рассматриваемый момент времени.

Пусть высота жидкости в баке в момент старта будет L_{60} ; в любой момент времени

$$L_6 = L_{60} - \frac{4}{\pi} g \int \frac{G dt}{\rho_{ж} d^3}, \quad (2,55)$$

где $\rho_{ж}$ — плотность жидкости;
 d — диаметр бака.

Если секундный весовой расход жидкости постоянен, то

$$L_6 = L_{60} - cGt, \quad (2,56)$$

где

$$c = \frac{4}{\pi \rho_{ж} d^3} g. \quad (2,57)$$

Начальную (стартовую) высоту жидкости обозначим

$$L_0 = L + L_{60}; \quad (2,58)$$

вместо (2,54), получим

$$p_j = \rho_{ж} (L_0 - cGt) \dot{V}_x(t). \quad (2,59)$$

В момент отрыва ракеты со стартового стола $t = 0$

$$\dot{V}_x(t) = g; \quad (2,60)$$

тогда

$$p_j = \rho_{ж} L_0 g. \quad (2,61)$$

Пусть в конце активного участка масса ракеты будет M и тяга P . Пренебрегая сопротивлением воздуха, получим

$$\dot{V}_x(t) = \frac{P - Mg \sin \theta}{M} + g \sin \theta = \frac{P}{M}. \quad (2,62)$$

Если к этому моменту времени высота остатка топлива в баке l_6 , то

$$p_j = \rho_{ж} (L + l_6) \frac{P}{M}. \quad (2,63)$$

4. Давление в камере сгорания

Для точного определения давления в камере сгорания необходимо решить систему дифференциальных уравнений главы I. В некоторых случаях, однако, допустимо пользоваться упрощенными формулами. Одной из распространенных формул является формула закона сохранения массы для продуктов, находящихся в камере. Пусть к моменту времени в камеру вошло Y кг топлива, а из камеры истекло Y_{κ} кг продуктов сгорания. Количество топлива и газа, находящегося к этому моменту времени в камере, составит

$$Y - Y_{\kappa}. \quad (2,64)$$

Это количество состоит из топлива, еще не начавшего гореть, из горящего топлива и из продуктов сгорания. Таким образом, уравнение закона сохранения массы примет вид

$$Y - Y_{\kappa} = Y_0 + Y_{\Gamma} + Y_{\tau}, \quad (2,65)$$

где Y_0 — количество газов в камере;
 Y_{Γ} — количество горящего жидкого топлива;
 Y_{τ} — количество топлива, еще не начавшего гореть.

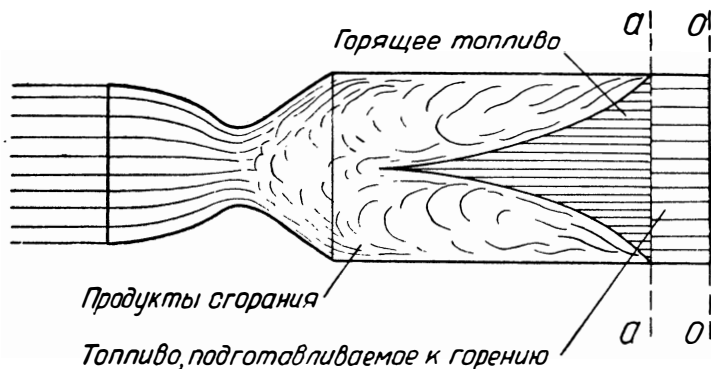


Рис. 10.

Объем камеры, расположенный между сечениями oo и aa , мы можем рассматривать как своеобразный участок гидравлической цепи (рис. 10). На этом участке в течение периода τ , называемого периодом запаздывания сгорания, происходит подготовка топлива к сгоранию. Поскольку топливо, входящее в камеру, начинает гореть с запаздыванием в τ сек, уравнение (2,65) можно записать так:

$$(Y - Y_{\tau}) - Y_{\kappa} = Y_0 + Y_{\Gamma}, \quad (2,66)$$

где $Y - Y_{\tau}$ — количество топлива, подошедшее к сечению aa в момент времени t или же количество топлива, прошедшее сечение oo к моменту времени $t - \tau$. Таким образом, (2,66) можно записать как уравнение с запаздывающим аргументом в следующем символическом виде:

$$Y_{t-\tau} - Y_{\Gamma} - Y_{\kappa} = Y_0. \quad (2,67)$$

Дифференцируя по t , получим

$$\dot{Y}_{t-\tau} - \dot{Y}_{\Gamma} - \dot{Y}_{\kappa} = \dot{Y}_0. \quad (2,68)$$

Поскольку

$$Y = \int_0^t (G_1 + G_2) dt; \quad (2,69)$$

$$Y_\tau = \int_t^\tau (G_1 + G_2) d\tau, \quad (2,70)$$

то

$$Y_{-\tau} = Y - Y_\tau = \int_0^t (G_1 + G_2) dt - \int_0^\tau (G_1 + G_2) d\tau. \quad (2,71)$$

Дифференцируя по t , находим

$$\dot{Y}_{-\tau} = (G_1 + G_2) \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right), \quad (2,72)$$

где G_1 и G_2 — секундные весовые расходы компонентов топлива.

Ориентируясь на закон сгорания

$$\frac{dS}{dt} \approx \text{const}, \quad (2,73)$$

для определения количества горящего в камере топлива имеем

$$Y_\Gamma = \frac{4}{3} \pi g \rho_{\text{ж}} \int n (R_0^2 - \Psi t)^{3/2} dt, \quad (2,74)$$

где $\rho_{\text{ж}}$ — плотность капель;

t_0 — время испарения;

n — секундный расход капель;

R_0 — наиболее вероятное значение радиуса капли.

Заметим, что n , R_0 и Ψ являются сложными функциями некоторых параметров двигателя.

Взяв производную, получим

$$\dot{Y}_\Gamma = \frac{4}{3} \pi g \rho_{\text{ж}} n (R_0^2 - \Psi t)^{3/2} = f(p). \quad (2,75)$$

Далее находим, что

$$\dot{Y}_\kappa = G, \quad (2,76)$$

где G — секундный весовой расход газа из камеры.

Используя уравнения расхода и адиабаты и пренебрегая временем перемещения газа из центральной части камеры до критического сечения сопла, находим

$$G = \frac{\sigma_{\text{кр}} a}{\sqrt{RT}} p, \quad (2,77)$$

где R , T , p — газовая постоянная, температура и давление в центральной части камеры;

$\sigma_{\text{кр}}$ — площадь критического сечения сопла;

$$a = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{2g \frac{k}{k+1}}; \quad (2,78)$$

отсюда удельный импульс давления

$$I_p = \frac{\sqrt{RT}}{\sigma_{\text{кр}} a}. \quad (2,79)$$

Вместо (2,77), находим

$$G = \frac{p}{I_p}. \quad (2,80)$$

Для определения \dot{Y}_0 используем уравнение состояния

$$pV = Y_0 RT. \quad (2,81)$$

Свободный объем камеры

$$V = V_0 - \frac{Y_\tau + Y_\tau}{\rho_{\text{ж}}} g, \quad (2,82)$$

где V_0 — геометрический объем камеры.

Взяв производную по времени, находим

$$\dot{V} = - \frac{\dot{Y}_\tau + \dot{Y}_\tau}{\rho_{\text{ж}}} g. \quad (2,83)$$

Согласно (2,70)

$$\dot{Y}_\tau = (G_1 + G_2) \frac{d\tau}{dt}. \quad (2,84)$$

Имея в виду (2,75), находим

$$\dot{V} = \frac{f(p) + (G_1 + G_2) \frac{d\tau}{dt}}{\rho_{\text{ж}}} g. \quad (2,85)$$

Будем считать, что произведение RT есть функция времени. Используя (2,82), получаем

$$\dot{Y}_0 = \frac{V}{RT} \dot{p} + \frac{p}{RT} \dot{V} - \frac{p}{RT} \cdot \frac{V}{RT} \overline{RT}. \quad (2,86)$$

Подставим значения производных в (2,68); после преобразований получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{p} + \left(1 - \varepsilon \frac{\overline{RT}}{RT}\right) p + \varepsilon p \frac{\dot{V}}{V} + I_p \frac{4}{3} \pi g \rho_{\text{ж}} n (R_0^2 - \Psi t)^{3/2} = \\ = I_p (G_1 + G_2) \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right), \end{aligned} \quad (2,87)$$

где приведенное время пребывания газов в камере

$$\varepsilon = \int_0^{l_{\text{кр}}} \frac{I_p \sigma}{RT} dx \approx \frac{I_p V}{RT}; \quad (2,88)$$

объем камеры

$$V = V_0 - \frac{1}{g\rho_{ж}} \int_0^{\tau} (G_1 + G_2) dt - \frac{4}{3} \pi \int_0^{\tau} n (R_0^2 - \Psi t)^3 dt. \quad (2,89)$$

При решении многих инженерных задач принимают $V = \text{const}$; с таким допущением (2,87) примет вид

$$\varepsilon \dot{p} + \left(1 - \varepsilon \frac{\dot{RT}}{RT}\right) p = I_p (G_1 + G_2) \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right). \quad (2,90)$$

В ряде случаев не учитывают изменения работоспособности продуктов сгорания

$$\varepsilon \dot{p} + p = I_p (G_1 + G_2) \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right). \quad (2,91)$$

Если колебательные процессы исследователя не интересуют, то

$$\varepsilon \dot{p} + p = I_p (G_1 + G_2). \quad (2,92)$$

При установившемся режиме, наконец,

$$p = I_p (G_1 + G_2). \quad (2,93)$$

5. Потери давления в элементах гидравлической цепи

Согласно (2,39)

$$ph_i = -\rho_{ж} v \Delta W \delta x. \quad (2,94)$$

Известно, что для любого элемента

$$ph_i = \varepsilon \gamma_{ж} \frac{W^2}{2g}. \quad (2,95)$$

Коэффициент сопротивления

$$\varepsilon = \lambda \frac{l}{d_{\#}}, \quad (2,96)$$

где λ — коэффициент трения;

$d_{\#}$ — характерный диаметр,

$$d_{\#} = \frac{4\sigma}{\Pi}. \quad (2,97)$$

В формуле (2,97) σ — площадь поперечного сечения канала, Π — активный периметр.

Известно, что

$$\lambda = f(\text{Re}); \quad (2,98)$$

для гладких труб в ламинарном потоке

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}; \quad (2,99)$$

для гладких труб в турбулентном потоке

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}. \quad (2,100)$$

В квадратичном потоке коэффициент трения мало зависит от числа Re , но существенно повышается с увеличением относительной шероховатости, причем

$$\lambda = \frac{1}{\left(1,74 + 2 \lg \frac{r}{\Delta}\right)^2}, \quad (2,101)$$

где Δ — средняя высота неровностей проточного тракта.

Законы трения имеют свои сферы действия: (2,99) справедлив до $\lg \text{Re} = 3,3$; (2,100) ограничен $\lg \text{Re} = 3,7$ и $\lg \text{Re} = 4,8$; (2,101) для достаточно чистых труб действует от $\lg \text{Re} = 5,8$.

Используя уравнение неразрывности

$$G = \sigma W \rho_{ж} g, \quad (2,102)$$

получим:

$$\text{Re} = \frac{G d_{\#}}{g \rho_{ж} \nu \sigma}; \quad ph_i = \varepsilon \frac{G^2}{2g \sigma^2 \rho_{ж} g}. \quad (2,103)$$

В ламинарном потоке будем считать

$$\varepsilon = \frac{C_1}{G}, \quad (2,104)$$

а в квадратичном

$$\varepsilon \approx \text{const}. \quad (2,105)$$

Таким образом, в ламинарном потоке

$$ph_i = a_{li} G, \quad (2,106)$$

где

$$a_{li} = \frac{C_1}{2g \sigma^2 \rho_{ж} g}. \quad (2,107)$$

В квадратичном потоке

$$ph_i = a_i G^2, \quad (2,108)$$

где

$$a_i = \frac{\text{const}}{2g \sigma^2 \rho_{ж} g}. \quad (2,109)$$

В наиболее общем виде

$$ph_i = a_i G^n. \quad (2,110)$$

Давление, расходуемое на изменение кинетической энергии жидкости,

$$\Delta p \approx \gamma_{ж} \frac{W_{\Phi}^2}{2g}; \quad (2,111)$$

окончательно находим

$$ph \approx \varepsilon a' G^n + \gamma_{ж} \frac{W_{\Phi}^2}{2g} = a_k G_k^{n_k}, \quad (2,112)$$

где k — номер цепи.

В уравнении (2,112) коэффициент ξ учитывает влияние возмущений, возникающих в местных сопротивлениях, на величину гидравлических потерь. Показатель степени $n \approx 1$ в ламинарном, $n \approx 1,75$ в турбулентном, $n \approx 2$ в квадратичном и $1,8 \leq n \leq 2,2$ в смешанном потоке.

6. Давление, эквивалентное массовым силам

Согласно (2,42)

$$p_{w_i} = \rho_{ж} \frac{dW}{dt} \delta x. \quad (2,113)$$

Пусть для каждого элемента известно

$$\delta x = l_i.$$

По уравнению неразрывности

$$G = \sigma_i W_i \rho_{ж} g; \quad (2,114)$$

следовательно,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\sigma_i \rho_{ж} g} \frac{dG}{dt}. \quad (2,115)$$

Вместо (2,113) имеем

$$p_{w_i} = \frac{1}{g} \cdot \frac{dG}{dt} \cdot \frac{l_i}{\sigma_i}. \quad (2,116)$$

Для всей гидравлической цепи

$$p_w = \frac{1}{g} \sum \frac{dG}{dt} \cdot \frac{l_i}{\sigma_i}. \quad (2,117)$$

Если жидкость можно считать несжимаемой и отбросить из рассмотрения утечки и деформацию трубопроводом, то, вынося производную за знак суммы, получим:

$$p_w = \frac{1}{g} \sum \frac{l_i}{\sigma_i} \cdot \frac{dG}{dt}. \quad (2,118)$$

Для конкретного двигателя всегда можно подсчитать число

$$b = \frac{1}{g} \sum \frac{l_i}{\sigma_i}, \quad (2,119)$$

поэтому окончательно

$$p_w = b \frac{dG}{dt}. \quad (2,120)$$

§ 3. О СВЯЗИ ПАРАМЕТРОВ КАМЕРЫ И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Исследование взаимосвязей между гидравлическими цепями и камерой производится с использованием уравнений, выведенных в главе I и в § 1 и 2 главы II. Решить систему этих уравнений можно с применением машин дискретного счета. Упрощен-

ные системы уравнений просматриваются на моделирующих установках и подвергаются численному интегрированию. Некоторое качественное представление о связях можно получить, применяя несложный математический аппарат к упрощенным допущениями уравнениям.

Рассмотрим возможные допущения, проследим характер изменения соотношений в неустановившемся режиме и исследуем исходный характер движения.

1. Система уравнений гидравлических цепей

Рассмотрим решение в инженерной постановке. Напишем систему уравнений для двухкомпонентного двигателя. Такая система включает в себя два уравнения гидравлических цепей и уравнение камеры:

$$p_{н1} + p_{61} + p_{j1} - p_0 - p h_1 - p_{w1} = 0; \quad (2,121)$$

$$p_{н2} + p_{62} + p_{j2} - p_0 - p h_2 - p_{w2} = 0; \quad (2,122)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{p}_0 + \left(1 - \varepsilon \frac{\dot{RT}}{RT}\right) p + \varepsilon \frac{p}{V} \dot{V} + I_p \Gamma \left(R_0^2 - \Psi \int \frac{dx}{C}\right)^{3/2} - \\ - I_p (G_1 + G_2) \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) = 0. \end{aligned} \quad (2,123)$$

Для определения составляющих балансов давлений имеем:

$$p_{н1} = D_1 n^2 - D_1' n G_1 - D_1'' G_1^2 - D_1''' \dot{n}; \quad (2,124)$$

$$p_{н2} = D_2 n^2 - D_2' n G_2 - D_2'' G_2^2 - D_2''' \dot{n}; \quad (2,125)$$

$$p_{j1} = \rho_1 (L_{10} - c_1 G_1 t) \dot{V}_x(t); \quad (2,126)$$

$$p_{j2} = \rho_2 (L_{20} - c_2 G_2 t) \dot{V}_x(t); \quad (2,127)$$

$$p h_1 = a_1 G_1^{n_1}; \quad (2,128)$$

$$p h_2 = a_2 G_2^{n_2}; \quad (2,129)$$

$$p_{w1} = b_1 \dot{G}_1; \quad (2,130)$$

$$p_{w2} = b_2 \dot{G}_2; \quad (2,131)$$

где

$$b_1 = \frac{1}{g} \sum \frac{l_{1i}}{\sigma_{1i}}; \quad (2,132)$$

$$b_2 = \frac{1}{g} \sum \frac{l_{2i}}{\sigma_{2i}}. \quad (2,133)$$

Во многих случаях уравнения упрощаются. При качественной оценке колебательных процессов, определении времени и характера выхода на режим, оценке соотношения между компонентами в неустановившемся режиме принимают следующие условия:

$$\text{считают } D_1^* = D_2^* = 0;$$

вводят понятия о приведенном давлении в баках:

$$p_{61}^* = p_{61} + p_{j1}; \quad (2,134)$$

$$p_{62}^* = p_{62} + p_{j2}; \quad (2,135)$$

полагают

$$ph_1 = a_1 G_1^2; \quad (2,136)$$

$$ph_2 = a_2 G_2^2; \quad (2,137)$$

вводят понятие о приведенных массовых коэффициентах:

$$b_1^* = b_1 + D_1''' \frac{dn}{dG_1}; \quad (2,138)$$

$$b_2^* = b_2 + D_2''' \frac{dn}{dG_2}; \quad (2,139)$$

в уравнении камеры полагают

$$d(RT) = dV = \Gamma = 0.$$

В расчет вводят θ , представляющую собой отношение расхода топлива в момент времени $t - \tau$ к расходу топлива в момент времени t . Очевидно, что

$$\theta = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) \cdot \frac{(G_1 + G_2)_{-t}}{(G_1 + G_2)}. \quad (2,140)$$

Система уравнений принимает вид

$$b_1^* \dot{G}_1 - D_1 n^2 + D_1' n G_1 - p_{61}^* + a_1 G_1^2 + p_0 = 0; \quad (2,141)$$

$$b_2^* \dot{G}_2 - D_2 n^2 + D_2' n G_2 - p_{62}^* + a_2 G_2^2 + p_0 = 0; \quad (2,142)$$

$$\epsilon \dot{p}_0 + p_0 - I_p (G_1 + G_2) = 0. \quad (2,143)$$

2. О соотношении между компонентами

Обычно задают

$$K_y = \frac{G_1}{G_2}, \quad (2,144)$$

соответствующее установившемуся режиму.

В условиях неустановившегося режима иногда обеспечивают K , отличающееся от K_y , в целях ослабления колебательных процессов во время выхода двигателя на режим. Сле-

довательно, при проектировании двигателя важно знать условия, обеспечивающие $K = \text{const}$.

Допустим, что $K = \text{const}$; поскольку

$$G_1 = KG_2 \quad (2,145)$$

$$\text{и} \quad \dot{G}_1 = K\dot{G}_2, \quad (2,146)$$

уравнения (2,141) и (2,142) примут вид:

$$b_1^* K \dot{G}_2 - D_1 n^2 + D_1' n K G_2 - p_{61}^* + a_1 K^2 G_2^2 + p_0 = 0; \quad (2,147)$$

$$b_2^* G_2 - D_2 n^2 + D_2' n G_2 - p_{62}^* + a_2 G_2^2 + p_0 = 0. \quad (2,148)$$

Условие $K = \text{const}$ обеспечивается, если будут равны коэффициенты в уравнениях (2,147) и (2,148) при членах, содержащих G или его производную в одинаковых степенях.

В условиях установившегося режима первые члены уравнений (2,147) и (2,148) равны нулю; поэтому условиями, обеспечивающими заданное значение K при установившемся режиме, будут:

$$D_1 n^2 + p_{61}^* = D_2 n^2 + p_{62}^*; \quad (2,149)$$

$$D_1' K = D_2'; \quad (2,150)$$

$$a_1 K^2 = a_2. \quad (2,151)$$

Если режим работы является неустановившимся, то появляется четвертое условие

$$b_1^* K = b_2^*. \quad (2,152)$$

Обеспечить требуемое значение K_y в условиях установившегося режима можно и иначе. Положим $\dot{G}_1 = \dot{G}_2 = 0$ и решим квадратные уравнения (2,141) и (2,142). Решения запишутся так:

$$G_1 = \frac{-D_1' n + \sqrt{(D_1' n)^2 + 4a_1(p_{61}^* + D_1 n^2 - p_0)}}{2a_1}; \quad (2,153)$$

$$G_2 = \frac{-D_2' n + \sqrt{(D_2' n)^2 + 4a_2(p_{62}^* + D_2 n^2 - p_0)}}{2a_2}. \quad (2,154)$$

Приравняв между собой левые части (2,153) и (2,154), при помощи (2,145), получим

$$\begin{aligned} & \frac{-D_1' n + \sqrt{(D_1' n)^2 + 4a_1(p_{61}^* + D_1 n^2 - p_0)}}{2Ka_1} = \\ & = \frac{-D_2' n + \sqrt{(D_2' n)^2 + 4a_2(p_{62}^* + D_2 n^2 - p_0)}}{2a_2}. \end{aligned} \quad (2,155)$$

Условие (2,155), обеспечивающее заданное значение K_y , в частном случае может быть сведено к условиям (2,149), (2,150) и (2,151).

Уравнения (2,153) и (2,154) служат для определения расхода по параметрам двигателя.

3. Характер связи параметров камеры и гидравлической цепи

Для оценки некоторых принципиальных и качественных особенностей двигателя рассмотрим случай, когда $K = \text{const}$. При этом, как известно, обеспечивается и $RT = \text{const}$. Для анализа системы из трех уравнений (2,141), (2,142) и (2,143) достаточно воспользоваться двумя:

$$b_2^* \dot{G}_2 - D_2 n^2 + D_2' n G_2 - p_{62}^* + a_2 G_2^2 + p_0 = 0; \quad (2,156)$$

$$\varepsilon p_0 + p_0 - I_p (K + 1) G_2 \theta = 0, \quad (2,157)$$

Для получения одного уравнения второго порядка решим уравнение (2,156) относительно p_0 . Дифференцируя, найдем выражение для \dot{p}_0 , затем \dot{p}_0 и p_0 подставим в (2,157) и преобразуем; тогда получим

$$\begin{aligned} \ddot{G}_2 + \left(2 \frac{a_2}{b_2^*} G_2 + \frac{D_2' n}{b_2^*} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \dot{G}_2 + \\ + \frac{1}{\varepsilon b_2^*} (a_2 G_2 + D_2' n + I_p (K + 1) \theta) G_2 = \\ = \frac{p_{62}^* + D_2 n^2}{\varepsilon b_2^*}. \end{aligned} \quad (2,158)$$

Уравнение показывает, что даже в упрощенном случае движение зависит от всех параметров двигателя.

Обозначим:

$$p_{62}^* + D_2 n^2 = P_n; \quad (2,159)$$

$$K + 1 = m. \quad (2,160)$$

Уравнение (2,158) можно решить на машине непрерывного или дискретного счета. При решении или при просмотре на машине непрерывного счета его удобно записать так:

$$\begin{aligned} \varepsilon b_2^* \ddot{G}_2 + 2a_2 \varepsilon G_2 \dot{G}_2 + b_2^* \dot{G}_2 + a_2 G_2^2 + \\ + (I_p m \theta + D_2' n) G_2 = P_n. \end{aligned} \quad (2,161)$$

Итак, характер движения зависит от:
коэффициента гидравлических потерь a ;
массового коэффициента b ;
времени пребывания горящего топлива в камере ε ;

приведенного (с учетом запаздывания) удельного импульса давления $I_p m\theta$;
нагрузочного давления системы P_n ;
тангенса угла наклона характеристики насоса $D'n$.

Для двигателя с нагруженными баками вместо (2,158) следует писать

$$\ddot{G}_2 + \left(2 \frac{a_2}{b_2} G_2 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \dot{G}_2 + \frac{1}{\varepsilon b_2} (a_2 G_2 + I_p m\theta) G_2 = \frac{p_{62}^*}{\varepsilon b_2}. \quad (2,162)$$

Здесь движение зависит от пяти параметров.

§ 4. АНАЛИЗ ИСХОДНОГО ХАРАКТЕРА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ДВИГАТЕЛЯ С НАГРУЖЕННЫМИ БАКАМИ

Рассмотрим окрестность установившегося режима G_{20} . Отклонение от номинала обозначим

$$x = G_2 - G_{20}. \quad (2,163)$$

Подставляя в выражение (2,162)

$$G_2 = x + G_{20}; \quad (2,164)$$

$$\dot{G}_2 = \dot{x}; \quad (2,165)$$

$$\ddot{G}_2 = \ddot{x}, \quad (2,166)$$

получим

$$\ddot{x} + \left[2 \frac{a_2}{b_2} (x + G_{20}) + \frac{1}{\varepsilon} \right] \dot{x} + \frac{1}{\varepsilon b_2} [a_2 (x + G_{20}) + I_p m\theta] (x + G_{20}) = \frac{p_{62}^*}{\varepsilon b_2}. \quad (2,167)$$

В условиях установившегося режима $\ddot{x} = \dot{x} = x = 0$; уравнение статики примет вид

$$\frac{1}{\varepsilon b_2} [a_2 G_{20} + I_p m\theta] G_{20} = \frac{p_{62}^*}{\varepsilon b_2}. \quad (2,168)$$

Величина x несоизмеримо мала по сравнению с G_{20} ; она не может повлиять на изменение знака и оказать существенное влияние на численное значение коэффициентов. Поэтому при выяснении характера движения вместо $x + G_{20}$ в выражениях, заключенных в квадратные скобки, будем писать G_{20} . Подставим p_{62}^* из уравнения (2,168) в (2,167); после преобразований получим

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0, \quad (2,169)$$

где

$$2h \approx \left[2 \frac{a_2}{b_2} G_{20} + \frac{1}{\varepsilon} \right]; \quad (2,170)$$

$$k^2 \approx \frac{1}{\varepsilon b_2} [a_2 G_{20} + I_D m \theta]. \quad (2,171)$$

Заменяя в (2,169) и в (2,167) переменные $x + G_{20}$ на постоянные G_{20} , мы допускаем определенную ошибку, но получаем удобное для анализа уравнение. На рис. 11 представлены результаты расчетов по точному (1) неоднородному и упрощенному (2), также неоднородному уравнениям. Результаты сравнения подтверждают возможность использования при качественном анализе предложенного упрощения.

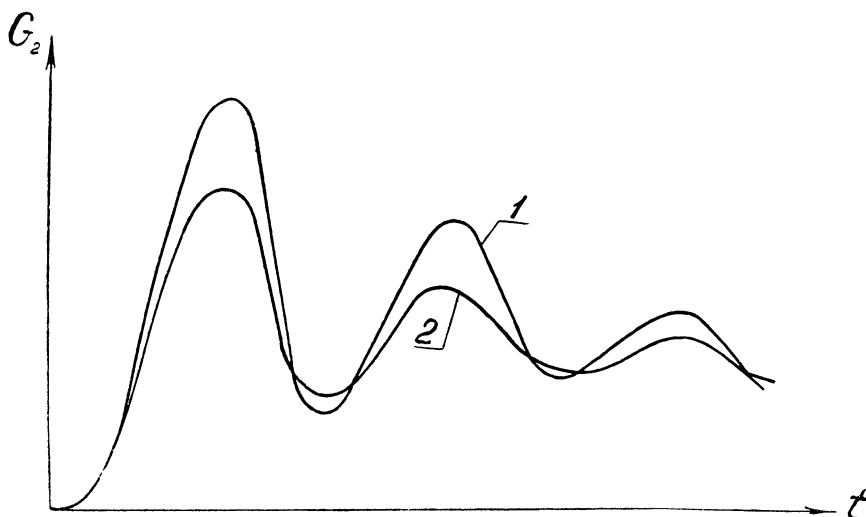


Рис. 11.

Приведенный удельный импульс давления учитывает запаздывание аргумента. Отношение расхода в момент времени $t - \tau$ к расходу в момент времени t (рис. 12) обладает следующими свойствами:

это отношение не может менять знака;

при экспоненциальном изменении расхода во времени численное значение отношения монотонно стремится к единице, поэтому при наличии аperiodического движения воздействия со стороны запаздывающего аргумента не всегда будут приводить к колебаниям;

при синусоидальном изменении рассматриваемое отношение колеблется около единицы, а наибольшее отклонение составляет

$$\left| \frac{G_{20} + A}{G_{20} - A} \right|, \quad (2,172)$$

где A — амплитуда колебаний;

G_{20} — номинальное значение расхода.

Чем меньше b , и больше $a_2 G_{20}$, тем меньше сказывается влияние отклонения θ от единицы на значение k^2 .

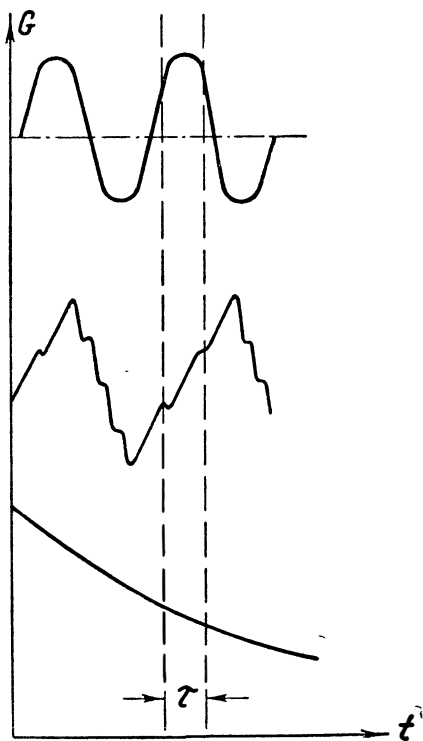


Рис. 12.

Рассмотрим исходный характер движения при следующих допущениях:

запаздывания учитывать не будем, следовательно, примем $\theta = 1$;

вместо $x + G_{20}$ напомним G_{20} , следовательно, h и k^2 будут представлены в виде чисел;

возьмем однородное уравнение, пригодное для исследования окрестности.

Движение будет аperiodическим, если

$$h^2 - k^2 > 0, \quad (2,173)$$

или колебательным, если

$$h^2 - k^2 < 0. \quad (2,174)$$

Критическому переходному режиму соответствует

$$h^2 - k^2 = 0. \quad (2,175)$$

Используя уравнения (2,170) и (2,171) для критического режима, находим

$$\left(\frac{a_2}{b_2} G_{20}\right)^2 + \frac{1}{(2\varepsilon)^2} - \frac{I_p m \theta}{\varepsilon b} = 0. \quad (2,176)$$

Это уравнение может быть решено относительно любого интересующего нас параметра, например:

$$(I_p m \theta)_{кр} = \frac{\varepsilon}{b_2} a_2 p h_2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{b_2}{\varepsilon}; \quad (2,177)$$

$$p_{кр} = \frac{\varepsilon}{b_2} \cdot \frac{p h_2^2}{G_{20}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b_2}{\varepsilon} G_{20}; \quad (2,178)$$

$$p h_{2кр} = \frac{1}{a_2} \left[\frac{I_p m \theta}{\varepsilon} b_2 - \frac{1}{4} \left(\frac{b_2}{\varepsilon} \right)^2 \right]; \quad (2,179)$$

$$\varepsilon_{кр} = \frac{b_2}{2a_2^2} \left[I_p m \theta \pm \sqrt{(I_p m \theta)^2 - a_2 p h_2} \right]. \quad (2,180)$$

При удовлетворении условия (2,174), т. е. при наличии затухающих колебаний, решение (2,169) принимает вид

$$x = A e^{-ht} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2,181)$$

где A — начальная амплитуда;
 φ — начальная фаза.

Частота

$$\omega = \sqrt{k^2 - h^2}, \quad (2,182)$$

а круговая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (2,183)$$

где T — период собственных колебаний.

Если при $t=0$ $\varphi=0$ и известно значение

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad (2,184)$$

то начальная амплитуда

$$A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}. \quad (2,185)$$

Множитель e^{-ht} характеризует быстроту затухания. Если $h=0$, то колебания будут гармоническими с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\kappa}. \quad (2,186)$$

Пусть теперь будет удовлетворено условие (2,173). Если при $t=0$ $x=0$, то решение (2,169) примет вид

$$x = \frac{\dot{x}_0}{2\sqrt{h^2 - \kappa^2}} [e^{(\sqrt{h^2 - \kappa^2} - h)t} - e^{(\sqrt{h^2 - \kappa^2} + h)t}]. \quad (2,187)$$

В системе, имеющей сильное демпфирование $h^2 \gg \kappa^2$, экспоненциальный характер движения описывается уравнением

$$x = \frac{\dot{x}_0}{2h} (1 - e^{-2ht}). \quad (2,188)$$

Исследование исходного характера движения приводит лишь к предварительным представлениям о процессах, характерных для группы «камера—гидравлическая цепь». Запаздывающий аргумент вносит принципиальные изменения в движение параметров, а в наших задачах он не учитывался. Поэтому следующим этапом исследования является учет запаздывающего аргумента.

§ 5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО АРГУМЕНТА

Характерными особенностями решений уравнений с запаздывающим аргументом являются:

- наличие незатухающих колебаний;
- несинусоидальный характер колебаний;
- сложность значительных воздействий на решение.

Уравнения с запаздывающим аргументом удобно решать на машинах непрерывного счета. Осциллограммы показывают, что колебания являются несинусоидальными и называются колебаниями ударного типа. Эти колебания часто бывают очень «жесткими», и для изменения рисунка осциллограммы или амплитуды колебаний приходится порой прибегать к существенным изменениям численных значений коэффициентов уравнения.

В зависимости от параметров двигателя ударные колебания могут быть симметричными, с быстрым нарастанием и медленным спадом или с медленным нарастанием и быстрым спадом. При испытании двигателей часто встречаются осциллограммы, на которых изображены колебания второго типа, т. е. с быстрым нарастанием давления и относительно медленным спадом. На этих осциллограммах наблюдается и вторая гармоника более высокой частоты и обусловленная колебаниями газа в камере; такие колебания обычно называют акусти-

ческими, или высокочастотными. При решении рассматриваемых в данной главе уравнений на осциллографе машины непрерывного счета просматриваются только так называемые низкочастотные колебания, т. е. колебания, обусловленные связью камеры с гидравлическими цепями.

Рассмотрим уравнения с запаздывающим аргументом.

Взяв за основу уравнение (2,161), после упрощения записи получим

$$\varepsilon b \ddot{G} + 2a\varepsilon \dot{G} + b\dot{G} + aG^2 + I_p m \theta G = P_{пр}. \quad (2,189)$$

Для определения периода индукции наиболее часто применяют гиперболический закон

$$\tau = \frac{K}{p^n}, \quad (2,190)$$

где K — число, зависящее от состава топлива;

$$\dot{\tau} = -\frac{Kn}{p^{n+1}} \dot{p}. \quad (2,191)$$

Подставляя (2,191) в уравнение камеры, после преобразований получим

$$G = \frac{\varepsilon \dot{p} + p}{I_p m \left(1 + \frac{Kn}{p^{n+1}} \dot{p} \right)}. \quad (2,192)$$

В качестве второго уравнения привлекается, как и обычно, уравнение гидравлической цепи, которое можно записать так:

$$p = P_{пр} - aG^2 - b\dot{G}. \quad (2,193)$$

Совместно решая уравнения (2,192) и (2,193), получают одно, содержащее давление и соответствующие производные. Однако уравнение, которое при этом получается, сложно и неудобно для исследования на машине.

Поскольку обычно интересуются колебаниями в окрестности установившегося режима, уравнение (2,190) аппроксимируют линейным

$$\tau = \tau_0 - c p. \quad (2,194)$$

Так как в действительности имеет место гиперболический или схожий с ним закон, значения τ_0 и c зависят от выбора параметров окрестности.

Применяя к функции (2,190) разложение в ряд Тейлора и отбрасывая нелинейные остатки для определения коэффициентов уравнения (2,194), находим:

$$\tau_0 = \frac{K(n+1)}{p_0^n}; \quad (2,195)$$

$$c = \frac{Kn}{p_0^{n+1}}. \quad (2,196)$$

Таким образом,

$$\theta = 1 - \dot{\tau} = 1 + c\dot{p}. \quad (2,197)$$

После всех необходимых преобразований приходим к уравнению группы «камера—гидравлическая цепь» с учетом линейного закона изменения запаздывающего аргумента

$$\begin{aligned} \varepsilon b \ddot{G} + 2a\varepsilon \dot{G}G + b\dot{G} + aG^2 + I_p mG - 2I_p mac\dot{G}G^2 - \\ - I_p mbc\ddot{G}G = P_{пр}. \end{aligned} \quad (2,198)$$

Последние два члена левой части этого уравнения и отражают влияние запаздывающего аргумента.

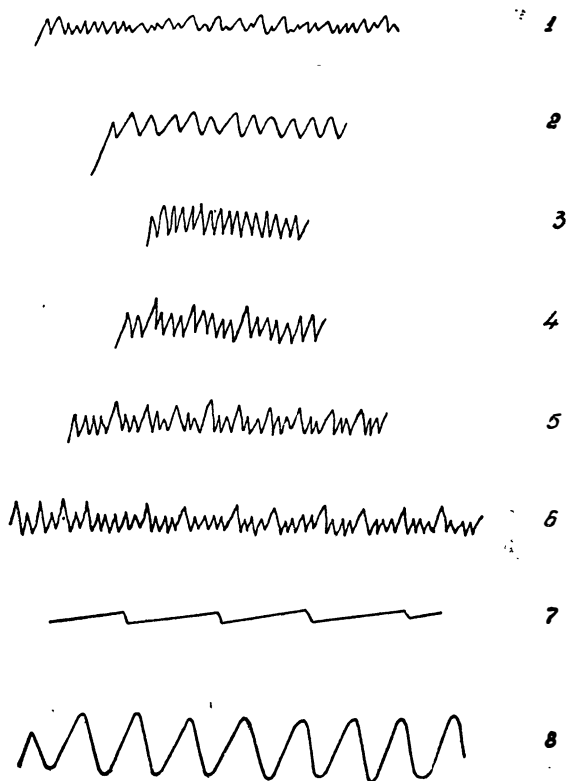


Рис. 13.

Рассмотрим результаты расчетов, проведенных по уравнению (2,198). Вычисления производились на машине непрерывного счета. При принятых за исходные параметрах и без учета запаздывающего аргумента решение носило экспоненциальный характер. Кривая 1 на рис. 13 соответствует исходному уравнению, но уже с учетом запаздывающего аргумента.

Далее расчет производился только с учетом запаздывающего аргумента. Кривая 2 на том же рисунке соответствует несколько уменьшенному значению массового коэффициента и соответственно увеличенному времени пребывания газов в камере. В результате такого воздействия частота колебаний уменьшилась. Кривая 3 соответствует обратному воздействию: здесь массовый коэффициент увеличен по сравнению с номинальным значением в 2,5 раза, а время пребывания в 2,5 раза уменьшено; в результате увеличена частота колебаний.

Дальнейшее изменение параметров в этом же направлении приводит к появлению колебаний с повышенной амплитудой; этот характер движения иллюстрирует кривая 4.

При исходных значениях массового коэффициента и времени пребывания, но при измененных в два раза против номинала гидравлических потерях наблюдалось уменьшение амплитуды, причем за одним импульсом с повышенной амплитудой следовало два импульса с меньшей амплитудой; этот результат представлен кривой 5.

При дальнейшем изменении гидравлических потерь была получена кривая 6. Здесь интервалы между импульсами повышенной амплитуды увеличились.

Характер колебаний резко изменился при отклонении от номинала (кривые 7 и 8) удельного импульса давления.

Просмотр решений уравнения на экране осциллографа машины позволяет быстро и надежно оценить влияние различных воздействий на характер изменения давления в камере или расхода топлива во времени.

В подготовке материалов данного параграфа принимала участие Н. П. Шевченко.

Глава III

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ АГРЕГАТОВ СИСТЕМЫ ПИТАНИЯ

Переходные процессы гидравлических цепей в значительной степени зависят от режимов работы агрегатов системы питания. Данная глава посвящена выводу уравнений и исследованию главных агрегатов питания, к числу которых относятся аккумуляторы давления и насосы. Аккумуляторы предназначены для наддува баков и бывают газовые, пороховые и питаемые двухкомпонентным жидким топливом — жидкостные. Турбины и генераторы, относящиеся к силовому приводу системы питания, в главе III не рассматриваются, хотя многие положения из теории аккумуляторов пригодны и для расчета генераторов.

§ 1. УРАВНЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАДДУВА БАКА

Рассмотрим систему (рис. 14), состоящую из аккумулятора и бака. В аккумуляторе находится газ или же источник тепловой энергии в виде пороховой шашки или непрерывно поступающего топлива. Бак заполнен жидкостью, которая вытесняется газами, поступающими в верхнюю полость бака. По закону сохранения энергии

$$\dot{Q} = \dot{u} + L. \quad (3,1)$$

Если во внутренней полости аккумулятора в результате сгорания топлива и тепловых процессов в газовых смесях выделяется тепло Q_0 , а теплообмен с окружающей средой характеризуется Q_a для аккумулятора и Q_b для бака, то

$$Q = Q_0 + Q_a + Q_b. \quad (3,2)$$

Внутренняя энергия газа определяется суммой

$$u = u_a + u_b, \quad (3,3)$$

где для газа, заключенного в аккумуляторе,

$$u_a = Y_a c_v T_a. \quad (3,4)$$

Считая $c_v = \text{const}$, находим

$$\dot{u}_a = c_v (\dot{Y}_a T_a). \quad (3,5)$$

Для газа, заключенного в баке,

$$\dot{u}_6 = c_v (\dot{Y}_6 T_6). \quad (3,6)$$

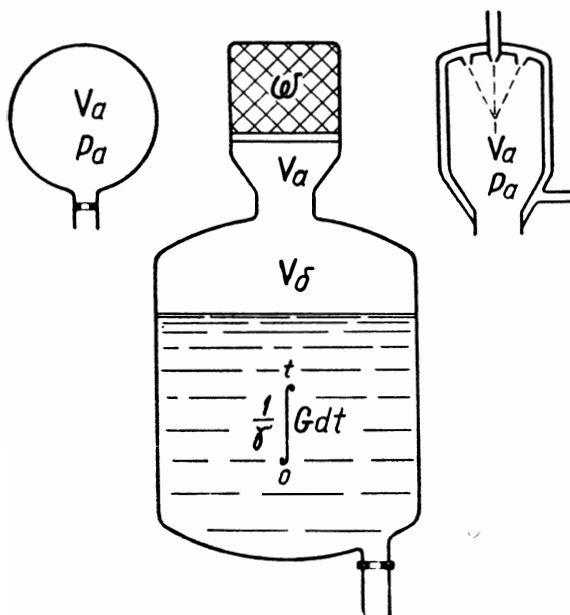


Рис. 14.

Применяя уравнение состояния, получаем

$$\dot{u} = \frac{c_v}{R} (V_a \dot{p}_a + p_a \dot{V}_a + V_6 \dot{p}_6 + p_6 \dot{V}_6). \quad (3,7)$$

Производная работы расширения газа в баке

$$\dot{L} = p_6 \dot{V}_6. \quad (3,8)$$

Напомним, что

$$c_p - c_v = R; \quad (3,9)$$

$$k = \frac{c_p}{c_v}. \quad (3,10)$$

Уравнение закона сохранения энергии может быть теперь записано так:

$$V_a \dot{p}_a + p_a \dot{V}_a + V_b \dot{p}_b + k p_b \dot{V}_b - \frac{R}{c_v} (\dot{Q}_0 + \dot{Q}_a + \dot{Q}_b) = 0. \quad (3,11)$$

Анализ уравнения закона сохранения энергии

1. Уравнение энергии, выраженное через расход компонента

Свободный объем в баке

$$V_b = V_{б.н} + \frac{1}{\gamma_{ж}} \int_0^t G dt, \quad (3,12)$$

где $V_{б.н}$ — начальный свободный объем;

$\gamma_{ж}$ — плотность;

G — весовой расход жидкости.

Очевидно, что

$$\dot{V}_b = \frac{G}{\gamma_{ж}}. \quad (3,13)$$

Уравнение энергии примет вид

$$V_a \dot{p}_a + p_a \dot{V}_a + V_{б.н} \dot{p}_b + \frac{1}{\gamma_{ж}} \int_0^t G dt \dot{p}_b + k \frac{G}{\gamma_{ж}} p_b - \frac{R}{c_v} (\dot{Q}_0 + \dot{Q}_a + \dot{Q}_b) = 0. \quad (3,14)$$

2. Уравнение энергии для газового аккумулятора

Будем ориентироваться на средние значения параметров. Учитывая, что для системы с газовым аккумулятором тепловые потоки направлены из окружающей среды в систему, напишем

$$V_a \dot{p}_a + V_{б.н} \dot{p}_b + \frac{Gt}{\gamma_{ж}} \dot{p}_b + k \frac{G}{\gamma_{ж}} p_b - \frac{R}{c_v} (\dot{Q}_a + \dot{Q}_b) = 0. \quad (3,15)$$

В некоторых случаях уравнение (3,15) удобно записать с показателем политропы:

$$V_a \dot{p}_a + V_{б.н} \dot{p}_b + \frac{Gt}{\gamma_{ж}} \dot{p}_b + n \frac{G}{\gamma_{ж}} p_b = 0, \quad (3,16)$$

причем показатель политропы

$$n = k - \frac{R}{c_v} \cdot \frac{\dot{Q}_a + \dot{Q}_6}{G p_6} \gamma_{ж}. \quad (3,17)$$

Обычно \dot{Q}_a и \dot{Q}_6 являются функциями времени, поэтому и $n=n(t)$. В инженерных расчетах часто ориентируются на некоторое среднее для процесса значение показателя политропы.

Если теплообмен отсутствует, то

$$\dot{Q}_a = \dot{Q}_6 = 0. \quad (3,18)$$

В этом случае

$$n = k. \quad (3,19)$$

Условие (3,19) будет иметь место и при наличии теплообмена, если

$$\dot{Q}_a + \dot{Q}_6 = 0. \quad (3,20)$$

Изотермический процесс наблюдается, если $n=1$; при этом

$$\frac{R}{c_v} \cdot \frac{\dot{Q}_a + \dot{Q}_6}{G p_6} \gamma_{ж} = k - 1. \quad (3,21)$$

Как известно,

$$k - 1 = \frac{R}{c_v}. \quad (3,22)$$

Следовательно,

$$\dot{Q}_a + \dot{Q}_6 = \frac{G}{\gamma_{ж}} p_6. \quad (3,23)$$

Полное количество тепла, которое следует подвести к системе для обеспечения изотермического процесса, составит

$$Q_a + Q_6 = V_{ж} p_6. \quad (3,24)$$

Определим требуемый объем аккумулятора. Пусть процесс характеризуется $G = \text{const}$, $V_{6,н} = 0$ и $p_6 = \text{const}$. Исходное уравнение запишется так:

$$V_a \dot{p}_a + n \frac{G}{\gamma_{ж}} p_6 = 0. \quad (3,25)$$

После несложных преобразований и интегрирования

$$V_a = n \frac{G t}{\gamma_{ж} (p_{a,н} - p_a)} p_6. \quad (3,26)$$

С целью уменьшения объема аккумулятора следует увеличить подогрев, отношение

$$\frac{p_{a,н}}{p_6} \quad (3,27)$$

и уменьшить разность

$$p_a - p_6. \quad (3,28)$$

Начальное значение давления в аккумуляторе определяется характеристикой компрессора, а разность (3,28) зависит от производительности редуктора. Малые значения этой разности можно получить только при использовании редукторов, работающих на глубоком подкритическом режиме. С этой целью целесообразна замена газовых редукторов на системы, включающие в себя клапан и реле давления.

Уравнение энергии не всегда может быть заменено уравнением политропы. Его следует использовать отдельно для аккумулятора или для бака. Если же написать для всей системы

$$\frac{p_{6,н}}{p_6} = \left(\frac{V_6}{V_{6,н}} \right)^m, \quad (3,29)$$

то показатель степени, как это ясно из (3,15), будет

$$m = k - \frac{\frac{R}{c_v} (\dot{Q}_a + \dot{Q}_6) - V_a \dot{p}_a}{G p_6} - \gamma_{ж}. \quad (3,30)$$

Он обращается в показатель политропы при $\dot{p}_a = 0$ и затем в показатель адиабаты, если $\dot{Q}_a + \dot{Q}_6 = 0$.

Таким образом, рассмотренный процесс, описываемый уравнением энергии или уравнением типа (3,29), является более общим, чем процесс политропический, и еще более общим, чем адиабатический.

3. Уравнение энергии для порохового аккумулятора

Согласно (3,11), считая $G = \text{const}$, имеем:

$$V_a \dot{p}_a + p_a \dot{V}_a + V_{6,н} \dot{p}_6 + \frac{Gt}{\gamma_{ж}} \dot{p}_6 + k \frac{G}{\gamma_{ж}} p_6 - \\ - \frac{R}{c_v} (\dot{Q}_6 - \dot{Q}_a - \dot{Q}_6) = 0. \quad (3,31)$$

Здесь \dot{Q}_a и \dot{Q}_6 имеют знак минус, поскольку тепловые потоки в рассматриваемом случае направлены от системы в окружающую среду.

Элементарное количество выделившегося при сгорании пороховой шашки тепла

$$\dot{Q}_6 = c_v T_1 \dot{\omega}, \quad (3,32)$$

где T_1 — температура сгорания;
 ω — вес шашки, причем

$$\dot{\omega} = \gamma_n \int \varphi(l) dl; \quad (3,33)$$

$$\dot{\omega} = \gamma_n \varphi(l) u. \quad (3,34)$$

Для цилиндрической шашки при горении с торца

$$\omega = \gamma_{\text{п}} \frac{\pi D^2}{4} l; \quad (3,35)$$

$$\dot{\omega} = \gamma_{\text{п}} \frac{\pi D^2}{4} u. \quad (3,36)$$

Для скорости горения примем закон

$$u = u_0 + ap^{\nu}. \quad (3,37)$$

Теперь вместо (3,33) и (3,34) имеем:

$$\omega = \gamma_{\text{п}} \int \varphi(l)(u_0 + ap^{\nu}) dt; \quad (3,38)$$

$$\dot{\omega} = \gamma_{\text{п}} \varphi(l)(u_0 + ap^{\nu}). \quad (3,39)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{R}{c_v} \dot{Q}_0 = \frac{R}{c_v} c_v T_1 \dot{\omega}. \quad (3,40)$$

Учитывая, что сила пороха

$$f = RT_1, \quad (3,41)$$

находим вместо (3,40)

$$\frac{R}{c_v} \dot{Q}_0 = f \dot{\omega} = kf_0 \dot{\omega} \quad (3,42)$$

или

$$\frac{R}{c_v} \dot{Q}_0 = kf_0 \gamma_{\text{п}} \varphi(l)(u_0 + ap^{\nu}). \quad (3,43)$$

В (3,42) замена силы пороха f на приведенную силу f_0 произведена по Ланжевену. Однако (3,32) можно записать в виде

$$dQ_0 = c_p T_a d\omega. \quad (3,44)$$

Вместо (3,40) получим

$$\frac{R}{c} c_p T_a \dot{\omega}.$$

Учитывая, что

$$RT_a = f_0,$$

получаем, как и в (3,42),

$$kf_0 d\omega. \quad (3,45)$$

Уравнение энергии принимает вид

$$V_a \dot{p}_a + p_a \dot{V}_a + V_6 \dot{p}_6 + kp_6 \dot{V}_6 - \\ - kf_0 \gamma_{\text{п}} \varphi(l)(u_0 + ap^{\nu}) + \frac{R}{c_v} (\dot{Q}_a + \dot{Q}_6) = 0. \quad (3,46)$$

Если $p_6 = \text{const}$, то (3,46) запишется как

$$p_6 dV_6 = \eta f_0 d\omega, \quad (3,47)$$

где коэффициент η учитывает тепловые потери и изменение параметров аккумулятора:

$$\eta = 1 - \frac{\frac{R}{c_v} (\dot{Q}_a + \dot{Q}_6) + (\overline{V_a p_a})}{k f_0 \omega}. \quad (3,48)$$

Интегрирование (3,47) возможно в случае, если η задано по результатам обработки опытных данных или подсчитано и принято средним значением.

Очевидно, что

$$p_6 = \eta \frac{f_0 \omega}{V_6}. \quad (3,49)$$

4. Уравнение энергии для горячего аккумулятора

Если принять $\dot{p}_a = \dot{V}_a = 0$, то уравнение энергии запишется так:

$$V_6 \dot{p}_6 + k p_6 \dot{V}_6 - \frac{R}{c_v} (\dot{Q}_0 - \dot{Q}_a - \dot{Q}_6) = 0. \quad (3,50)$$

Количество выделившегося тепла

$$\dot{Q}_0 = (G_1 + G_2) c_p T_a,$$

где G_1 и G_2 — весовой расход компонентов, питающих генератор.

При постоянном давлении в баке, считая, что тепловой поток направлен из системы в окружающую среду, будем иметь

$$k p_6 \dot{V}_6 - (G_1 + G_2) R T_a + \frac{R}{c_p} (\dot{Q}_a + \dot{Q}_6) = 0. \quad (3,51)$$

После преобразований при условии, что $\dot{V}_6 = \text{const}$,

$$p_6 = \eta_t \frac{R T_a (G_1 + G_2)}{k V_6} t, \quad (3,52)$$

где коэффициент, учитывающий тепловые потери,

$$\eta_t = 1 - \frac{\dot{Q}_a + \dot{Q}_6}{c_p T_a (G_1 + G_2)}. \quad (3,53)$$

Коэффициент η_t является термическим к. п. д., поскольку представляет собой отношение полезно использованного тепла

$$c_p T_a (G_1 + G_2) - (\dot{Q}_a + \dot{Q}_6)$$

к общему количеству тепла, выделившемуся в горячем аккумуляторе. Отметим, что в инженерной постановке для

порохового и горячего аккумуляторов было принято $p_6 = \text{const}$; допущение $p_a = \dot{V}_a = 0$ приемлемо лишь для горячего аккумулятора, а для порохового аккумулятора это допущение должно обследоваться в каждом отдельном случае.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МАССЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАДДУВА БАКА

Для той же системы (рис. 14) закон сохранения массы для аккумулятора записывается без учета запаздывания таким образом:

$$Y = Y_n + Y_a, \quad (3,54)$$

где Y — весовое количество топлива, вошедшее в аккумулятор к моменту времени t ;

Y_n — весовое количество продуктов, истекших к тому же моменту времени;

Y_a — количество продуктов, накопившихся в аккумуляторе.

Уравнение закона сохранения массы для бака можно написать так:

$$Y_n = Y_6, \quad (3,55)$$

где Y_6 — весовое количество газа в баке к моменту времени t .

Из (3,54) и (3,55) следует уравнение закона для системы

$$\dot{Y} = \dot{Y}_a + \dot{Y}_6. \quad (3,56)$$

Рассмотрим выражение (3,54).

Воспользуемся уравнением состояния и найдем

$$\dot{Y}_a = \frac{1}{R_a T_a} \left(p_a \dot{V}_a + V_a \dot{p}_a - p_a V_a \frac{\dot{T}_a}{T_a} \right). \quad (3,57)$$

Как известно, в случае надкритического истечения

$$\dot{Y}_n = G = \frac{\sigma_{кр} a}{\sqrt{R_a T_a}} p_a; \quad (3,58)$$

$$Y_n = \int_0^t G dt,$$

где

$$a = \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{2g \frac{n}{n+1}}. \quad (3,59)$$

Как известно,

$$\dot{Y} = (G_1 + G_2), \quad (3,60)$$

где G_1 и G_2 — весовой расход компонентов, питающих генератор.

Подставляя полученные значения производных в (3,54), находим:

$$(G_1 + G_2) - \frac{\sigma_{\text{кp}} a}{\sqrt{R_a T_a}} p_a - \frac{1}{R_a T_a} \left(p_a \dot{V}_a + V_a \dot{p}_a - p_a V_a \frac{\dot{T}_a}{T_a} \right) = 0. \quad (3,61)$$

Теперь используем уравнение (3,55) и уравнение состояния для газа, заключенного в баке; находим

$$p_6 = \frac{p_6 V_6}{R_6 T_6}. \quad (3,62)$$

Если расход жидкости из бака меняется во времени, то

$$V_6 = V_{6.н} + \frac{1}{\gamma_{\text{ж}}} \int_0^t G_{\text{ж}} dt. \quad (3,63)$$

Следовательно,

$$p_6 = R_6 T_6 \frac{\gamma_{\text{ж}}}{\varepsilon} \frac{\int_0^t G dt}{\int_0^t G_{\text{ж}} dt}. \quad (3,64)$$

Уравнение (3,64) устанавливает связь между притоком газа в бак и расходом жидкости из бака.

Анализ уравнения закона сохранения массы

1. Уравнение массы для газового аккумулятора

Воспользуемся выражением (3,61). Во время работы аккумулятора газом не пополняется, а поэтому $(G_1 + G_2) = 0$. Объем аккумулятора $V_a = \text{const}$, следовательно,

$$\sigma_{\text{кp}} a \sqrt{R_a T_a} p_a + V_a \left(\dot{p}_a - p_a \frac{\dot{T}_a}{T} \right) = 0. \quad (3,65)$$

Процесс перетекания газа считают политропическим

$$\frac{\dot{T}_a}{T_a} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\dot{p}_a}{p_a}, \quad (3,66)$$

что следует из

$$T_a = T_{a.н} \left(\frac{p_a}{p_{a.н}} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (3,67)$$

После преобразований

$$\dot{p}_a = -Z p_a^{\frac{3n-1}{2n}}, \quad (3,68)$$

где

$$Z = \frac{n\sigma_{кр}a \sqrt{R_a T_{a.н}}}{V_a p_{a.н}^{\frac{n-1}{2n}}}. \quad (3,69)$$

Разделив переменные и интегрируя, находим

$$t = \frac{2V_a \left[\left(\frac{p_{a.н}}{p_a} \right)^{\frac{n-1}{2n}} - 1 \right]}{(n-1)\sigma_{кр}a \sqrt{R_a T_{a.н}}}. \quad (3,70)$$

2. Уравнение массы для порохового аккумулятора

Воспользуемся уравнением (3,61). Учитывая, что

$$f_0 = R_a T_a \quad \text{и} \quad (G_1 + G_2) = \dot{\omega},$$

имея в виду (3,66), получаем

$$f_0 \dot{\omega} - \sqrt{f_0} \sigma_{кр} a p_a - \frac{d}{dt} (p_a V_a) + \frac{n-1}{n} V_a \dot{p}_a = 0. \quad (3,71)$$

Если $\dot{p}_a = \dot{V}_a = 0$, то

$$\dot{\omega} = \frac{\sigma_{кр} a}{\sqrt{f_0}} p_a. \quad (3,72)$$

§ 3. УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ ПИТАНИЯ С НАГРУЖЕННЫМИ БАКАМИ

Количество уравнений замкнутой системы зависит от числа подлежащих определению величин.

Будем считать, что неизвестными являются:

G_1 — секундный весовой расход окислителя аккумулятора;

G_2 — то же горючего;

G — расход газообразных продуктов из аккумулятора в бак;

p_a — давление в аккумуляторе;

p_b — давление в баке;

V_a — объем аккумулятора;

V_b — объем бака;

Q_0 — тепло, выделяющееся в аккумуляторе;

R — газовая постоянная;

Q_a, Q_b — параметры, характеризующие теплообмен;

$G_{ж}$ — расход жидкости из бака.

Для определения G_1, G_2 и $G_{ж}$ привлечем уравнения соответствующих гидравлических цепей; характер изменения

объема аккумулятора во времени найдем по характеристикам выгорания, газовую постоянную — по результатам термодинамического расчета, параметры теплообмена определяются данными теплового расчета.

Поскольку осталось пять неизвестных (p_a , p_6 и их производные, G и ее интеграл, V_6 , Q_0 и их производные), необходимо написать пять уравнений:

$$[(G_1 + G_2) - G] R_a T_a - p_a \dot{V}_a - V_a \dot{p}_a + p_a V_a \frac{\dot{T}_a}{T_a} = 0; \quad (3,73)$$

$$p_6 = R_6 T_6 \frac{\gamma_{ж}}{\varepsilon} \cdot \frac{\int G dt}{\int G_{ж} dt}; \quad (3,74)$$

$$V_a \dot{p}_a + p_a \dot{V}_a + V_6 \dot{p}_6 + k p_6 \dot{V}_6 - \frac{R}{c_p} (Q_0 + Q_a + Q_6) = 0; \quad (3,75)$$

$$V_6 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_{ж}} \int G_{ж} dt; \quad (3,76)$$

$$Q_0 = (G_1 + G_2) c_p T. \quad (3,77)$$

Решение этих уравнений возможно совместно с другими, перечисленными выше.

Анализ системы уравнений

Рассмотрим аккумулятор, питаемый жидкими компонентами (рис. 15), и исследуем процессы, протекающие в окрестности установившегося режима.

1. Вывод уравнений системы наддува с горячим генератором

Допустим, что в системе питания генератора обеспечивается

$$K = \frac{G_1}{G_2} = \text{const}; \quad (3,78)$$

при этом достаточно воспользоваться одним уравнением гидродинамики, например уравнением цепи окислителя

$$p = p_{пр} - aG_1 - b\dot{G}_1. \quad (3,79)$$

Здесь $p_{пр}$ — приведенное давление подачи; при рассмотрении окрестности режима будем считать, что $p_{пр} = \text{const}$, хотя в системе с насосной подачей средств генерации $p_{пр} = f(G_1)$. Поскольку рассматривается окрестность режима, гидравлические потери принимаются как

$$ph = aG_1. \quad (3,80)$$

Будем считать, что перепад давления между камерой генератора p и баком p_6 относительно мал; в таких случаях считают, что

$$p - p_6 = \frac{G^2}{2g\sigma^2}, \quad (3,81)$$

где G — секундный весовой расход газа из камеры генератора в бак;

σ — приведенная площадь, равная $\varphi\sigma\sqrt{\gamma}$.

Уравнение состояния для бака

$$p_6 V_6 = Y_6 RT. \quad (3,82)$$

Объем газа в баке

$$V_6 = V_{6.н} + \frac{1}{\gamma_{ж}} \int_0^t G_{ж} dt, \quad (3,83)$$

где $V_{6.н}$ — начальный объем в баке;
 $\gamma_{ж}$ — плотность компонента, находящегося в баке;

$G_{ж}$ — секундный весовой расход этого компонента.

Уравнение (3,83) запишем так:

$$V_6 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_{ж}} \int_0^t G_{ж} dt, \quad (3,84)$$

где

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{V_{6.н}\gamma_{ж}}{\int_0^t G_{ж} dt}. \quad (3,85)$$

Количество газа в баке

$$Y_6 = Y_{6.н} + \int_0^t G dt \quad (3,86)$$

или

$$Y_6 = \varepsilon_2 \int_0^t G dt, \quad (3,87)$$

где

$$\varepsilon_2 = 1 + \frac{Y_{6.н}}{\int_0^t G dt}. \quad (3,88)$$

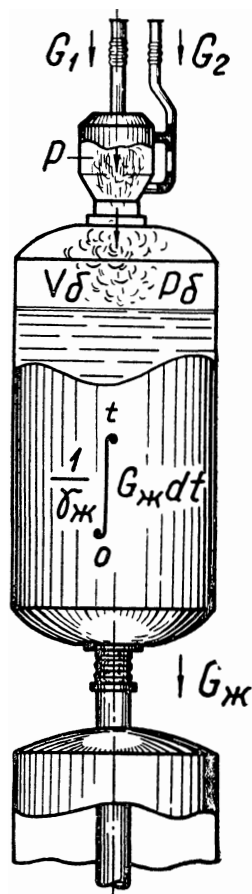


Рис. 15.

Уравнение состояния записывается теперь так:

$$p_6 \frac{\varepsilon_1}{\gamma_{ж0}} \int_0^t G_{ж} dt = \varepsilon_2 RT \int_0^t G dt. \quad (3,89)$$

Расход жидкости из бака $G_{ж}$ будем принимать постоянным; вместо (3,89) получим

$$p_6 = \frac{RT}{G_{ж}t} \cdot \frac{\gamma_{ж}}{\varepsilon} \int_0^t G dt. \quad (3,90)$$

Уравнение материального баланса для камеры генератора имеет вид

$$G = mG_1 - \frac{V}{RT} \dot{p}, \quad (3,91)$$

где

$$m = 1 + \frac{1}{K}.$$

При выводе уравнения (3,91) мы не учитывали запаздывания сгорания, считали, что $K = \text{const}$, а поэтому и $RT = \text{const}$, и полагали, что в окрестности режима можно считать $V = \text{const}$, т. е. пренебрегать влиянием кривой выгорания на свободный объем камеры генератора. Окончательно исходная система будет выглядеть так:

$$\left. \begin{aligned} p &= p_{np} - aG_1 - b\dot{G}_1 \\ p &= p_6 + \frac{G^2}{2g\sigma^2} \\ p_6 &= \frac{RT}{G_{ж}t} \cdot \frac{\gamma_{ж}}{\varepsilon} \int_0^t G dt \\ G &= mG_1 - \frac{V}{RT} \dot{p} \end{aligned} \right\} \quad (3,92)$$

Неизвестными в уравнениях будут G , G_1 , p и p_6 ; следовательно, система является замкнутой.

2. Преобразование уравнений системы

Подставим p_6 из третьего уравнения (3,92) во второе, получим

$$p = \frac{G^2}{2g\sigma^2} + \frac{RT}{G_{ж}t} \frac{\gamma_{ж}}{\varepsilon} \int_0^t G dt. \quad (3,93)$$

Величина $G_{ж}t$ характеризует свободный объем в баке в рассматриваемый момент времени. Если в этот момент времени проверяется стабильность системы, то величина $G_{ж}$, как медленно меняющаяся по сравнению с колебательными процессами, может считаться постоянной. Поэтому, если мы будем брать производную по времени, то получим

$$\dot{p} = \frac{G\dot{G}}{g\sigma^2} + \frac{RT}{G_{ж}t} \frac{\gamma_{ж}}{\varepsilon} G. \quad (3,94)$$

Используя четвертое уравнение системы (3,92), найдем

$$\dot{G} = m\dot{G}_1 - \frac{V}{RT}\ddot{p}. \quad (3,95)$$

Подставим (3,95) и четвертое уравнение (3,92) в (3,94), тогда

$$\begin{aligned} \dot{p} = & \frac{1}{g\sigma^2} \left[\left(m\dot{G}_1 - \frac{V}{RT}\dot{p} \right) \left(m\dot{G}_1 - \frac{V}{RT}\ddot{p} \right) \right] + \\ & + \frac{RT}{G_{ж}t} \frac{\gamma_{ж}}{\varepsilon} \left(m\dot{G}_1 - \frac{V}{RT}\dot{p} \right). \end{aligned} \quad (3,96)$$

Из первого уравнения системы получим:

$$\dot{p} = -a\dot{G}_1 - b\ddot{G}_1; \quad (3,97)$$

$$\ddot{p} = -a\ddot{G}_1 - b\ddot{G}_1. \quad (3,98)$$

Подставляя полученное в (3,96), находим

$$\begin{aligned} a\dot{G}_1 + b\ddot{G}_1 + \frac{1}{g\sigma^2} \left(m\dot{G}_1 + \frac{V}{RT} a\dot{G}_1 + \frac{V}{RT} b\ddot{G}_1 \right) \times \\ \times \left(m\dot{G}_1 + \frac{V}{RT} a\dot{G}_1 + \frac{V}{RT} b\ddot{G}_1 \right) + \\ + \frac{RT\gamma_{ж}}{G_{ж}t\varepsilon} \left(m\dot{G}_1 + \frac{V}{RT} a\dot{G}_1 + \frac{V}{RT} b\ddot{G}_1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (3,99)$$

Движение можно представить зависящим от ряда коэффициентов:

1) коэффициента, характеризующего отношение между компонентами

$$m = 1 + \frac{G_2}{G_1}; \quad (3,100)$$

2) коэффициента гидравлических потерь основной гидравлической цепи

$$a = \xi \sum a_i; \quad (3,101)$$

3) коэффициента, отражающего действие массовых сил

$$b = \frac{1}{g} \sum \frac{l_i}{\sigma_i}; \quad (3,102)$$

4) коэффициента гидравлических потерь на границе между генератором и баком

$$a_1 = \frac{1}{g\tau^2}; \quad (3,103)$$

5) величины, определяемой по удельному импульсу давления газа, заключенного в баке,

$$a_2 = \varepsilon \frac{G_{ж} t}{RT_{ж}} = \varepsilon \frac{V_{ж}}{RT} = \frac{\varepsilon}{I_6}. \quad (3,104)$$

6) величины, определяемой по удельному импульсу давления камеры генератора

$$a_3 = \frac{V}{RT} = \frac{1}{I_a}. \quad (3,105)$$

Теперь, после преобразований (3,99), можно записать так:

$$A_3 \ddot{G}_1 + A_2 \dot{G}_1 + A_1 G_1 + A_0 G_1 = 0, \quad (3,106)$$

где обозначено:

$$b^2 a_1 a_3^2 \ddot{G}_1 + a b a_1 a_3^2 \dot{G}_1 + m b a_1 a_3 G_1 = A_3; \quad (3,107)$$

$$a b a_1 a_3^2 \ddot{G}_1 + a^2 a_1 a_3^2 \dot{G}_1 + m a a_1 a_3 G_1 + b \left(\frac{a_2 + a_3}{a_2} \right) = A_2; \quad (3,108)$$

$$m b a_1 a_3 \ddot{G}_1 + m a a_1 a_3 \dot{G}_1 + m^2 a_1 G_1 + a \left(\frac{a_2 + a_3}{a_2} \right) = A_1; \quad (3,109)$$

$$\frac{m}{a_2} = A_0. \quad (3,110)$$

Характер движения (3,106) будет зависеть от поведения коэффициентов. Для них можно предположить синусоидальный или апериодический характер движения. Если обеспечивается апериодическое движение этих коэффициентов, то при достаточных значениях t на эти коэффициенты можно смотреть как на постоянные числа.

Определим условия апериодического движения.

Уравнение (3,107) запишем так:

$$\ddot{G}_1 + \frac{a}{b} \dot{G}_1 + \frac{m}{b a_3} G_1 = \frac{A_3}{b^2 a_1 a_3^2}. \quad (3,111)$$

Обозначим

$$x = G_1 - G_{10}, \quad (3,112)$$

где G_{10} — значение расхода, соответствующее установившемуся режиму.

В малых отклонениях (3,111) запишется в следующем виде:

$$\ddot{x} + \frac{a}{b} \dot{x} + \frac{m}{b a_3} x = \frac{A_3}{b^2 a_1 a_3^2} - \frac{m}{b a_3} G_{10}. \quad (3,113)$$

Ожидая аperiodическое движение, можем написать, что при $t \rightarrow \infty \ddot{x} = \dot{x} = x = 0$; поэтому уравнением статики будет следующее:

$$\frac{A_3}{b^2 a_1 a_3^2} - \frac{m}{b a_3} G_{10} = 0. \quad (3,114)$$

Совместное решение (3,113) и (3,114) приводит к однородному уравнению

$$\ddot{x} + \frac{a}{b} \dot{x} + \frac{m}{b a_3} x = 0. \quad (3,115)$$

Условие аperiodического движения запишется так:

$$a > 2 \sqrt{\frac{mb}{a_3}} \quad (3,116)$$

или в параметрах двигателя:

$$a > 2 \sqrt{mb \frac{RT}{V}}. \quad (3,117)$$

Итак, характер движения определяется:

- 1) коэффициентом гидравлических потерь a ;
 - 2) коэффициентом b , отражающим действие массовых сил;
 - 3) объемом камеры генератора V ;
 - 4) термодинамической характеристикой генератора mRT .
- Используя (3,114), находим, что в случае удовлетворения условия (3,117)

$$A_3 \rightarrow m b a_1 a_3 G_{10}. \quad (3,118)$$

Исследуя аналогично (3,108), последовательно получаем:

$$\ddot{G}_1 + \frac{a}{b} \dot{G}_1 + \frac{m}{b a_3} G_1 = \frac{A_2}{a b a_1 a_3^2} - \frac{b(a_2 + a_3)}{a b a_1 a_2 a_3^2}; \quad (3,119)$$

$$\ddot{x} + \frac{a}{b} \dot{x} + \frac{m}{b a_3} x = \frac{A_2}{a b a_1 a_3^2} - \frac{b(a_2 + a_3)}{a b a_1 a_2 a_3^2} - \frac{m}{b a_3} G_{10}; \quad (3,120)$$

$$\ddot{x} + \frac{a}{b} \dot{x} + \frac{m}{b a_3} x = 0; \quad (3,121)$$

$$a > 2 \sqrt{mb \frac{RT}{V}}; \quad (3,122)$$

$$A_2 \rightarrow A_3 \frac{a}{b} \left[1 + \frac{b(a_2 + a_3)}{m a a_1 a_2 a_3 G_{10}} \right]; \quad (3,123)$$

$$A_3 \rightarrow A_3 \frac{a}{b} \left[1 + \frac{b R T g \sigma^2}{m a V G_{10}} \left(1 + \frac{V \gamma_{жк}}{\epsilon G_{жк}} \cdot \frac{1}{t} \right) \right]. \quad (3,124)$$

В задачах рассматриваемого типа следует отличать время работы двигателя t от времени процесса t , в течение которого практически завершается движение системы, возникшее после возмущения. Время процесса будем считать малым по сравнению с временем работы двигателя. Общепринятая запись условия в виде $t \rightarrow \infty$ показывает, что через определенный интервал времени параметры процесса практически будут такими, какими они были бы при $t = \infty$. Поскольку время процесса многократно укладывается во время работы двигателя, пробу на устойчивость можно производить в различные моменты работы двигателя.

Наименьшее значение A_2 получает в конце работы двигателя

$$A_2 \rightarrow A_3 \frac{a}{b} \left[1 + \frac{bRTg\sigma^2}{maVG_{10}} \right]. \quad (3,125)$$

Наибольшее значение имеет место в начале работы: $A_2 \rightarrow \infty$.

Отметим, что при рассмотрении (3,108) было получено условие (3,122), не отличающееся от (3,117). Рассматривая аналогично (3,109), последовательно получаем:

$$\ddot{G}_1 + \frac{a}{b} \dot{G}_1 + \frac{m}{ba_3} G_1 = \frac{A_1}{mba_1a_3} - \frac{a(a_2 + a_3)}{mba_1a_2a_3}; \quad (3,126)$$

$$\ddot{x} + \frac{a}{b} \dot{x} + \frac{m}{ba_3} x = \frac{A_1}{mba_1a_3} - \frac{a(a_2 + a_3)}{mba_1a_2a_3} - \frac{m}{ba_3} G_{10}; \quad (3,127)$$

$$\ddot{x} + \frac{a}{b} \dot{x} + \frac{m}{ba_3} x = 0; \quad (3,128)$$

$$a > 2 \sqrt{mb \frac{RT}{V}}; \quad (3,129)$$

$$A_1 \rightarrow A_3 \frac{m}{ba_3} \left[1 + \frac{a(a_2 + a_3)}{m^2a_1a_2G_{10}} \right]. \quad (3,130)$$

В параметрах двигателя

$$A_1 \rightarrow A_3 \frac{m}{b} \cdot \frac{RT}{V} \left[1 + \frac{ag\sigma^2}{m^2G_{10}} \left(1 + \frac{V\gamma_{ж}}{\varepsilon G_{ж}} \cdot \frac{1}{t} \right) \right]. \quad (3,131)$$

В конце работы двигателя

$$A_1 \rightarrow A_3 \frac{m}{b} \cdot \frac{RT}{V} \left[1 + \frac{ag\sigma^2}{m^2G_{10}} \right]; \quad (3,132)$$

в начальный период работы двигателя

$$A_1 \rightarrow \infty. \quad (3,133)$$

И здесь (3,129) не отличается от (3,117).

Если условие (3,117) удовлетворено, то по истечении определенного интервала времени t (математическая запись $t \rightarrow \infty$) в окрестности любого t на все A_i можно смотреть как на числа. Следовательно, условия устойчивости (3,106) запишутся так:

$$A_3 > 0; A_2 > 0; A_1 > 0; A_0 > 0; \quad (3,134)$$

$$A_1 A_2 > A_0 A_3. \quad (3,135)$$

Условия (3,134) безусловно удовлетворяются. Условие (3,135) запишем так:

$$\left[1 + \frac{a(a_2 + a_3)}{m^2 a_1 a_2 G_{10}} \right] \left[\frac{m a a_1 a_2}{b} G_{10} + \frac{a_2 + a_3}{a_3} \right] > 1. \quad (3,136)$$

В параметрах двигателя

$$\psi = \left[\left(1 + \frac{a}{a_1} \cdot \frac{1}{m^2 G_{10}} \right) + \left(\frac{a}{a_1} \cdot \frac{1}{m^2 G_{10}} \cdot \frac{V \gamma_{ж}}{\varepsilon G_{ж}} \right) \frac{1}{t} \right] \times \\ \times \left[\left(m \frac{a a_1}{b} \cdot \frac{\varepsilon G_{ж} G_{10}}{R T \gamma_{ж}} + \frac{\varepsilon G_{ж}}{V \gamma_{ж}} \right) t + 1 \right] > 1. \quad (3,137)$$

В начальный период

$$\psi \rightarrow \infty. \quad (3,138)$$

Условие (3,137) можно переписать, придав формуле большую наглядность

$$\left(C_1 + \frac{C_2}{t} \right) (C_3 t + 1) > 1. \quad (3,139)$$

Устойчивость определяется семью параметрами двигателя: $\frac{\varepsilon G_{ж}}{\gamma_{ж}}$; RT ; G_{10} ; V ; K ; a ; a_1 и, как следует из (3,139), зависит от времени, истекшего с момента начала работы двигателя. Наиболее устойчиво двигатель работает сразу после выхода на режим, затем устойчивость уменьшается. Если время работы двигателя окажется достаточным, то наступит момент наименее устойчивой работы, а возможно, и потери устойчивости. После этого устойчивость будет беспредельно возрастать. Наибольший интерес представляет определение времени наступления наименьшей устойчивости.

Взяв производную от левой части (3,139) по t и приравняв полученное нулю, находим критическое время, соответствующее наименьшей устойчивости или потере устойчивости,

$$t_{кр} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1 C_3}}. \quad (3,140)$$

Условие устойчивости примет вид

$$\left[C_1 + \sqrt{C_1 C_2 C_3} \right] \left[\sqrt{\frac{C_2 C_3}{C_1}} + 1 \right] > 1 \quad (3,141)$$

или после преобразований

$$\left[\sqrt{C_1} + \sqrt{C_2 C_3} \right]^2 > 1. \quad (3,142)$$

Воздействия, которые необходимы для повышения устойчивости в критический период работы системы, легко определить по (3,142). Это же уравнение позволит решить вопрос о степени наименьшей устойчивости.

В формуле (3,142) обозначено:

$$C_1 = 1 + \frac{a}{a_1} \cdot \frac{1}{m^2 G_{10}}; \quad (3,143)$$

$$C_2 = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{1}{m^2 G_{10}} \cdot \frac{V_{\text{ж}}}{\varepsilon G_{\text{ж}}}; \quad (3,144)$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon G_{\text{ж}}}{V_{\text{ж}}} \left(1 + m \frac{a a_1}{b} \cdot \frac{G_{10} V}{RT} \right). \quad (3,145)$$

После подстановки получим

$$\left[\sqrt{1 + \frac{a}{a_1} \cdot \frac{1}{m^2 G_{10}}} + \sqrt{\frac{a}{a_1} \cdot \frac{1}{m^2 G_{10}} \left(1 + m \frac{a a_1}{b} \cdot \frac{G_{10}}{I_a} \right)} \right]^2 > 1. \quad (3,146)$$

Таким образом, для обеспечения устойчивости необходимо удовлетворить условия (3,117) и (3,142).

Отметим, что при использовании рассмотренных уравнений необходимо придерживаться следующей размерности:

$$\begin{aligned} \sigma^2 & [\kappa\text{г} \cdot \text{м}]; & a & \left[\frac{\text{сек}}{\text{м}^2} \right]; & b & \left[\frac{\text{сек}^2}{\text{м}^2} \right]; & a_1 & \left[\frac{\text{сек}^2}{\kappa\text{г} \cdot \text{м}^2} \right]; \\ a_2 & [\text{м}^3]; & a_3 & [\text{м}^3]; & A_3 & \left[\frac{\text{сек}^3}{\text{м}^2} \right]; & A_2 & \left[\frac{\text{сек}^2}{\text{м}^2} \right]; \\ A_1 & \left[\frac{\text{сек}}{\text{м}^2} \right]; & A_0 & \left[\frac{1}{\text{м}^2} \right]; & G_1 & \left[\frac{\kappa\text{г}}{\text{сек}} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим предельный случай, для которого $a=0$. Очевидно, что $C_1=1$, $C_2=0$ и $C_3 > 0$, причем $C_3 \rightarrow 0$. Следовательно, $\psi \rightarrow 1$. Поскольку условие (3,142) удовлетворяется, то решающим является обеспечение условия (3,117).

В уравнениях (3,92) не учтено влияние запаздывающего аргумента. Поскольку в действительности сгорание в камере генератора протекает так же, как в основной камере, кроме проверки на устойчивость, необходимо определить характер

движения и провести полные расчеты с учетом запаздывания сгорания. Область возможного применения рассмотренного приближенного метода определяется путем сравнения приближенного решения с точным. Решения для типичных случаев можно получить на вычислительной машине непрерывного действия.

§ 4. УРАВНЕНИЕ ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАСОСА

Для определения зависимости напора, создаваемого насосом в условиях неустановившегося режима, используем закон сохранения энергии

$$dE = dE_M + dE_L + dE_U + dE_r + dE_c + dE_{hk} + dE_{hc} + dE_y, \quad (3,147)$$

где dE — элементарная энергия, подведенная от привода к валу насоса;

dE_M — приращение энергии жидкости, возникающее вследствие изменения момента по длине проточного тракта;

dE_L — приращение энергии жидкости, наблюдаемое вследствие изменения радиальной составляющей скорости по длине тракта;

$dE_{\text{н}}$ — элементарная энергия, расходуемая на изменение угловой скорости вращения жидкости в проточной части колеса во времени;

dE_r — элементарная энергия, затрачиваемая на изменение радиальной составляющей скорости жидкости во времени;

dE_c — изменение энергии, обусловленной действием массовых сил в спиральной камере;

dE_{hk} — элементарное изменение энергии, расходуемой на преодоление сил вязкости в проточной части колеса;

dE_{hc} — то же в проточной части спиральной камеры;

dE_y — изменение энергии, обусловленное утечками.

1. Напор, создаваемый насосом

Пусть к валу насоса приложен момент M ; если угловая скорость вала ω , то элементарная энергия, переданная насосом

$$dE = M\omega dt. \quad (3,148)$$

Если вся эта энергия трансформируется в энергию жидкости, то

$$dE = H_t G dt, \quad (3,149)$$

где H_t — теоретический напор, создаваемый насосом;

G — секундный весовой расход жидкости.

Следовательно,

$$H_t = \frac{M\omega}{G}. \quad (3,150)$$

Действительный напор

$$H = H_t \eta_n, \quad (3,151)$$

где η_n — к. п. д. насоса.

Для определения мощности находим

$$N = H_t G = M\omega. \quad (3,152)$$

Если учесть (3,151) и представить мощность в лошадиных силах, то

$$N = \frac{HG}{75\eta_n}. \quad (3,153)$$

Напор жидкости складывается из статического и динамического:

статический

$$H_c = \frac{p}{\gamma_{ж}}, \quad (3,154)$$

динамический

$$H_d = \frac{C^2}{2g}. \quad (3,155)$$

Суммарный (полный) напор

$$H = \frac{p}{\gamma_{ж}} + \frac{C^2}{2g}, \quad (3,156)$$

а приращение напора в насосе

$$H_n = \frac{p_2 - p_1}{\gamma_{ж}} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g}, \quad (3,157)$$

где индексы 1 и 2 характеризуют параметры входа и выхода.

2. Приращение энергии жидкости, возникающее в силу изменения момента по длине тракта

Допустим, что напор возникает только в силу рассматриваемой причины; условие (3,150) запишется так:

$$H_M = \frac{(M_2 - M_1)\omega}{G'}. \quad (3,158)$$

На выходе из колеса

$$M_2 = \frac{G'}{g} C_{н2} r_2, \quad (3,159)$$

где G' — расход через колесо;

$C_{н2}$ — тангенциальная составляющая скорости жидкости на выходе из колеса (рис. 16).

На входе в колесо

$$M_1 = \frac{G'}{g} C_{H1} r_1. \quad (3,160)$$

Следовательно,

$$H_M = \frac{1}{g} (C_{H2} r_2 - C_{H1} r_1) \omega. \quad (3,161)$$

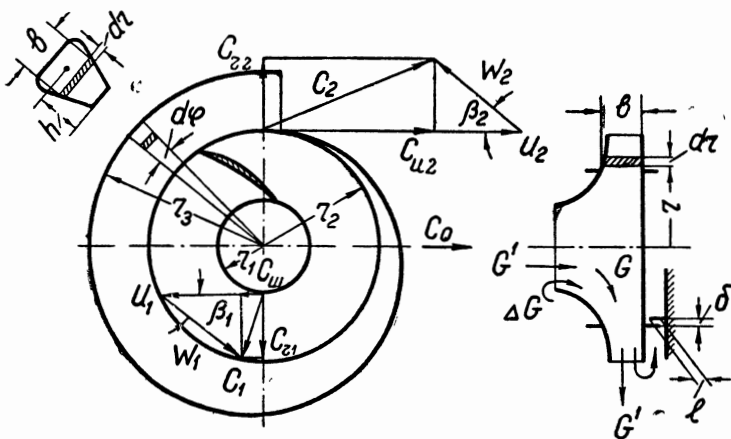


Рис. 16.

По треугольникам скоростей:

$$C_{H2} = U_2 - \frac{C_{r2}}{\operatorname{tg} \beta_2}; \quad (3,162)$$

$$C_{H1} = U_1 - \frac{C_{r1}}{\operatorname{tg} \beta_1}. \quad (3,163)$$

По уравнению неразрывности:

$$C_{r1} = C_{r2} \frac{2r_2 b_2 k_2}{(r_1^2 - r_0^2) k_1}; \quad (3,164)$$

$$C_{r2} = \frac{\varepsilon G}{2\pi r_2 b_2 k_2 \gamma_{ж}}, \quad (3,165)$$

где

$$\varepsilon = \frac{G'}{G}; \quad (3,166)$$

b_2 — ширина проточной части колеса на выходе;

r_0 — радиус ступицы;

k_i — коэффициенты стеснения.

По уравнению моментов

$$U_1 = \frac{r_1}{r_2} U_2. \quad (3,167)$$

Производя подстановки и преобразования, находим:

$$H_M = \frac{r_2^2 - r_1^2}{g} \omega^2 - \frac{\varepsilon}{2\pi g \gamma_{ж}} \left(\frac{1}{b_2 k_2 \operatorname{tg} \beta_2} - \frac{2r_1}{k_1 (r_1^2 - r_0^2) \operatorname{tg} \beta_1} \right) \omega G. \quad (3,168)$$

Если коэффициенты подсчитаны, то (3,168) представляется так:

$$H_M = D_M \omega^2 - D'_M \omega G. \quad (3,169)$$

3. Приращение энергии жидкости, возникающее вследствие изменения радиальной составляющей скорости по длине тракта

В результате изменения радиальной составляющей наблюдается изменение кинетической энергии потока, так что искомое уменьшение напора

$$H_L = \frac{C_{r2}^2 - C_{r1}^2}{2g}. \quad (3,170)$$

Используя уравнение неразрывности, после преобразований получим

$$H_L = \frac{\varepsilon^2}{2g \gamma_{ж}^2 (2\pi r_2 b_2 k_2)^2} \left[1 - \left(\frac{2r_2 b_2}{(r_1^2 - r_0^2)} \frac{k_2}{k_1} \right)^2 \right] G^2, \quad (3,171)$$

или

$$H_L = D_L G^2. \quad (3,172)$$

4. Падение напора в силу расходования энергии на изменение угловой скорости вращения жидкости во времени

В условиях неустановившегося режима элементарная энергия, расходуемая на преодоление массовых сил во вращательном движении:

$$dE = \Delta I_{\omega_{ж}} d\omega_{ж}, \quad (3,173)$$

где ΔI — момент инерции жидкости, заполняющей кольцо, шириной dr (рис. 16). Приращение энергии на этом элементарном пути составит

$$dE = \Delta H_{II} G dt, \quad (3,174)$$

следовательно, ΔH_{II} представляет собой приращение напора. В нашей постановке согласно (3,173) и (3,174) можно написать

$$\Delta H_{II} \rightarrow dH_{II} = \frac{\omega_{ж}}{G} \dot{\omega}_{ж} dI, \quad (3,175)$$

поскольку

$$dl = r^2 dm, \quad (3,176)$$

то

$$H_{\text{н}} = \frac{1}{G} \int \omega_{\text{ж}} \dot{\omega}_{\text{ж}} r^2 dm. \quad (3,177)$$

Элементарная масса

$$dm = 2\pi \frac{bkr\gamma_{\text{ж}}}{g} dr. \quad (3,178)$$

Угловая скорость для жидкости

$$\omega_{\text{ж}} = \frac{C_{\text{н}}}{r}. \quad (3,179)$$

Тангенциальная составляющая

$$C_{\text{н}} = \omega r - \frac{\varepsilon}{2\pi bkr\gamma_{\text{ж}} \operatorname{tg} \beta} G, \quad (3,180)$$

где ω — угловая скорость колеса.

В условиях нашей задачи радиальная составляющая скорости

$$C_r = \frac{dr}{dt} \quad (3,181)$$

не может изменить баланса моментов, поэтому

$$\dot{\omega}_{\text{ж}} = \frac{\dot{C}_{\text{н}}}{r}; \quad (3,182)$$

$$\dot{\omega}_{\text{ж}} = \dot{\omega} - \frac{\varepsilon}{2\pi bkr^2\gamma_{\text{ж}} \operatorname{tg} \beta} \dot{G}. \quad (3,183)$$

Окончательно, вместо (3,175) получаем

$$H_{\text{н}} = \frac{2\pi\gamma_{\text{ж}}}{gG} \int \left(\omega - \frac{\varepsilon G}{2\pi bkr^2\gamma_{\text{ж}} \operatorname{tg} \beta} \right) \left(\dot{\omega} - \frac{\varepsilon \dot{G}}{2\pi bkr^2\gamma_{\text{ж}} \operatorname{tg} \beta} \right) bkr^3 dr. \quad (3,184)$$

Следует иметь в виду, что b , k и $\operatorname{tg} \beta$ являются функцией r . Считая ω , G и их производные не зависящими от r и предполагая наличие решения, (3,184) напомним так:

$$H_{\text{н}} = \left(D_{\text{н}} \frac{\omega}{G} + D'_{\text{н}} \right) \dot{\omega} + \left(D''_{\text{н}} \frac{\omega}{G} + D'''_{\text{н}} \right) \dot{G}. \quad (3,185)$$

5. Падение давления в проточной части колеса вследствие расходования энергии на изменение во времени радиальной составляющей скорости жидкости

Изменение мощности — производной энергии по времени на участке составит

$$\dot{E}_r = G dH_r. \quad (3,186)$$

С другой стороны, это же изменение

$$\dot{E}_r = C_r dP. \quad (3,187)$$

Для элемента массы

$$dP = \dot{C}_r dm. \quad (3,188)$$

Таким образом,

$$dH_r = \frac{C_r \dot{C}_r}{G} dm. \quad (3,189)$$

Поскольку

$$C_r = \frac{\varepsilon G}{2\pi b k r \gamma_{ж}}, \quad (3,190)$$

окончательно

$$H_r = \frac{\varepsilon^2 \dot{G}}{2\pi g \gamma_{ж}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{b k r}. \quad (3,191)$$

Если решение интеграла получено, то (3,191) запишется в следующем виде:

$$H_r = D_r \dot{G}. \quad (3,192)$$

6. Уменьшение давления, обусловленное действием массовых сил в спиральной камере

Аналогично (3,189), но после интегрирования

$$H_c = \int \frac{CC}{G_i} dm. \quad (3,193)$$

Элементарная масса

$$dm = \frac{b r \gamma_{ж} d\varphi dr}{g}. \quad (3,194)$$

Обычно принимают

$$G_i = \frac{\varphi}{2\pi} G; \quad (3,195)$$

$$C = \frac{r_2}{r} C_{н2}. \quad (3,196)$$

Как и прежде,

$$C_{н2} = \omega r_2 - \frac{\varepsilon G}{2\pi b_2 k_2 r_2 \gamma_{ж} \operatorname{tg} \beta_2}. \quad (3,197)$$

Учитывая уже изложенные соображения, находим:

$$\dot{C}_{н2} = \dot{\omega} r_2 - \frac{\varepsilon \dot{G}}{2\pi b_2 k_2 r_2 \gamma_{ж} \operatorname{tg} \beta_2}; \quad (3,198)$$

$$\dot{C} = \frac{r_2}{r} \dot{C}_{н2}. \quad (3,199)$$

Окончательно

$$H_c = \frac{2\pi}{g} \cdot \frac{\gamma_{ж}}{G} \int_{r_0}^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\varphi} \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \left(\omega r_2 - \frac{\varepsilon G}{2\pi b_2 k_2 r_2 \gamma_{ж} \operatorname{tg} \beta_2} \right) \times \\ \times \left(\omega r_2 - \frac{\varepsilon \dot{G}}{2\pi b_2 k_2 r_2 \gamma_{ж} \operatorname{tg} \beta_2} \right) br \, d\varphi \, dr. \quad (3,200)$$

Сначала следует взять внутренний интеграл и, учитывая, что r_2 есть функция угла φ , в подынтегральную функцию перед выполнением второго интегрирования подставить

$$r_2 = \frac{d_{30}}{2\pi} \varphi + r_1, \quad (3,201)$$

где d_{30} — диаметр выходной горловины.

После выполнения интегрирования

$$H_c = \left(D_c \frac{\omega}{G} + D_c' \right) \dot{\omega} + \left(D_c'' \frac{\omega}{G} + D_c''' \right) \dot{G}. \quad (3,202)$$

7. Уменьшение напора вследствие действия сил вязкости в проточной части колеса

Как известно,

$$dH_{нк} = \lambda_{к} \frac{W^3}{2g d_{\mp}} \, dl, \quad (3,203)$$

где W — относительная скорость;

d_{\mp} — приведенный размер;

l — длина тракта, омываемого жидкостью;

$\lambda_{к}$ — коэффициент трения.

Из треугольника скоростей:

$$W = \frac{C_r}{\sin \beta}; \quad (3,204)$$

$$dl = \frac{dr}{\sin \beta}. \quad (3,205)$$

Согласно (3,190)

$$C_r = \frac{\varepsilon G}{2\pi b k r \gamma_{ж}}. \quad (3,206)$$

Поскольку

$$d_{\mp} = \frac{4\sigma}{\Pi}, \quad (3,207)$$

$$d_{\mp} = \frac{4\pi r b k}{2\pi r + Zb} \quad (3,208)$$

Следовательно,

$$H_{hk} = \lambda_k \frac{(\varepsilon G)^2}{32\pi^3 g \gamma_{ж}^2} \int \frac{(2\pi r + Zb) dr}{(bkr)^3 \sin^3 \beta}. \quad (3,209)$$

Как и в предыдущих случаях,

$$H_{hk} = D_{hk} G^2. \quad (3,210)$$

8. Уменьшение напора вследствие действия сил вязкости в проточной части спиральной камеры

Аналогично (3,203) пишем

$$dH_{hc} = \lambda_c \frac{C^2}{2g d_{\#}} dl. \quad (3,211)$$

По уравнению неразрывности

$$C = \frac{G_i}{\sigma_i \gamma_{ж}}, \quad (3,212)$$

причем, если

$$G_i = \frac{\varphi}{2\pi} G; \quad (3,213)$$

$$\sigma_i = \frac{\varphi}{2\pi} \sigma, \quad (3,214)$$

то

$$\frac{G_i}{\sigma_i} = \text{const.} \quad (3,215)$$

Для средней линии спирали

$$r = r_2 + a\varphi. \quad (3,216)$$

Следовательно,

$$dl = 2\pi a d\varphi. \quad (3,217)$$

Если принять

$$\sigma_i = \pi r_c^2 = \frac{\sigma}{2\pi} \varphi, \quad (3,218)$$

то

$$r_c = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{2} \varphi}. \quad (3,219)$$

Принимая

$$\Pi = 2\pi r_c = \sqrt{2\sigma\varphi}, \quad (3,220)$$

получим

$$d_{\#} = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\sigma\varphi}}{\varphi_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\sigma\varphi}, \quad (3,221)$$

где σ — площадь сечения проточной части спиральной камеры, соответствующая $\varphi = 2\pi$.

После интегрирования (3,211) получим

$$H_{hc} = \frac{2\pi^{2,5} \lambda_c}{3 \cdot g} a \frac{G^2}{\sigma^{2,5} \gamma_{ж}^2} . \quad (3,222)$$

Очевидно, что

$$H_{hc} = D_{hc} G^3 . \quad (3,223)$$

9. Уменьшение напора, обусловленное утечками в районе рабочего колеса

Если размеры зазора в уплотняющих кольцах — l и σ , то утечка через одно уплотнение

$$\Delta G_y = \mu \sigma \sqrt{2g\gamma_{ж} H_n} ; \quad (3,224)$$

коэффициент расхода

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{4\delta}{\lambda}} , \quad (3,225)$$

где λ — коэффициент трения для тракта уплотнения;

ε — коэффициент сопротивления тракта, подсчитанный без учета потерь в уплотнении.

В условиях установившегося режима в соответствии с (3,169), (3,172), (3,192), (3,210), (3,223) без учета утечки

$$H_n = D_M \omega^2 - D'_M \omega G + (D_L - D_{hk} - D_{hc}) G^2 . \quad (3,226)$$

Дифференцируя (3,226) и переходя к малым отклонениям для случая $\omega = \text{const}$ и $G = \text{vari}$, получим

$$\Delta H_n = [-D'_M \omega + 2(D_L - D_{hk} - D_{hc})] G \Delta G . \quad (3,227)$$

Учитывая наличие двух трактов утечки для определения уменьшения напора, получим

$$H_y = 2[-D'_M \omega + 2(D_L - D_{hk} - D_{hc})] G \Delta G_y . \quad (3,228)$$

Имея в виду (3,225), получим

$$H_y = 2[-D'_M \omega + 2(D_L - D_{hk} - D_{hc})] G \times \\ \times \mu \sigma \sqrt{2g\gamma [D_M \omega^2 + (D_L - D_{hk} - D_{hc}) G^2 - D'_M \omega G]} . \quad (3,229)$$

Напор H_y несоизмеримо мал по сравнению с полным напором, создаваемым колесом. Поэтому для преобразований (3,229) допустимо применить уравнение статик центробежного насоса

$$G = k_n \omega . \quad (3,230)$$

Теперь получим

$$H_y = 2 \left[-D'_M \omega + 2(D_L - D_{hk} - D_{hc}) \right] \times \\ \times \mu \sqrt{2g\gamma [D_M + (D_L - D_{hk} - D_{hc}) k_n^2 - D'_M k_n]} \cdot \omega^2. \quad (3,231)$$

Вместо (3,231) можно написать

$$H_y = D_y \omega^2 - D'_y \omega^3. \quad (3,232)$$

Анализ полученных уравнений

1. Расчетные формулы

В условиях неустановившегося режима напор, создаваемый насосом, в соответствии с (3,169), (3,172), (3,185), (3,192), (3,202), (3,210), (3,223) и (3,232) будет

$$H_n = (D_M - D_y) \omega^2 - D'_M \omega G - (D_L + D_{hk} + D_{hc}) G^2 + \\ + D'_y \omega^3 - \left[(D_n + D_c) \frac{\omega}{G} + (D'_n + D'_c) \right] \dot{\omega} - \\ - \left[(D''_n + D''_c) \frac{\omega}{G} + (D'''_n + D'''_c) \right] \dot{G} - D_r \dot{G}. \quad (3,233)$$

Установившийся режим характеризуется $\dot{\omega} = \dot{G} = 0$

$$H_n = (D_M - D_y) \omega^2 - D'_M \omega G - (D_L + D_{hk} + D_{hc}) G^2 + D'_y \omega^3. \quad (3,234)$$

Чтобы из (3,233) получить (2,44), следует обозначить:

$$D = \frac{\pi}{30} \gamma_{ж} (D_M - D_y - D'_y \omega_{сп}); \quad (3,235)$$

$$D' = \frac{\pi}{30} \gamma_{ж} D'_M; \quad (3,236)$$

$$D'' = \frac{\pi}{30} \gamma_{ж} (D_L + D_{hk} + D_{hc}); \quad (3,237)$$

$$D''' = \frac{\pi}{30} \gamma_{ж} \left[(D_n + D_c) \frac{\omega}{G} + (D'_n + D'_c) \right] + \\ + (D''_r + D''_c) \frac{\omega}{G} \cdot \frac{\dot{G}}{\omega} + (D'''_n + D'''_c) \frac{\dot{G}}{\omega} - D_r \frac{G}{\omega}. \quad (3,238)$$

Для определения напора дополнительно привлекаются уравнения гидравлических цепей в камеры или, по результатам обработки опытных и расчетных данных, задаются как функции времени ω , G и их производные.

2. Неустановившийся режим для колеса

Интегрировать (3,184) можно, если заданы в виде функций от r параметры b , k и $\operatorname{tg} \beta$.

Приближенное представление о $H_n(r)$ дает результат интегрирования (3,184), при котором b , k и $\operatorname{tg} \beta$ принимаются постоянными, в виде некоторых средних значений. Будем считать, что ω и G , как и их производные, заданы в виде чисел.

После интегрирования (3,184) получим

$$H_n = \frac{\pi}{gG} \left[\omega \dot{\omega} b k \gamma_{ж} \frac{r_2^4 - r_1^4}{2} - \frac{\varepsilon (\omega \dot{G} + \omega \dot{G})}{2\pi \operatorname{tg} \beta} (r_2^2 - r_1^2) + \frac{\varepsilon^2 G \dot{G}}{2\pi^2 b k \gamma_{ж} (\operatorname{tg} \beta)^2} \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right| \right]. \quad (3,239)$$

Чтобы проследить изменение H_n во времени, следует привлечь уравнение двигателя, характеризующее поведение ω , G и их производных. Известно, что в условиях установившегося режима для насосов имеет место (3,230):

$$k_n = \frac{G}{\omega} = \operatorname{const.}$$

В неустановившемся режиме условие (3,230) не соблюдается. Однако приближенное представление о процессе можно получить, ориентируясь на закономерности статики.

В квазистатической постановке принимают (3,230); следовательно,

$$k_n = \frac{\dot{G}}{\dot{\omega}} = \operatorname{const.} \quad (3,240)$$

Уравнение (3,239) примет вид

$$H_n = D_n^* \dot{\omega}, \quad (3,241)$$

где коэффициент уравнения зависит только от конструктивных параметров, причем

$$D_n^* = \frac{\pi}{2gk_n} \left[b k \gamma_{ж} r_2^4 \left(1 - \left| \frac{r_1}{r_2} \right|^4 \right) - 2 \frac{\varepsilon k_n}{\pi \operatorname{tg} \beta} r_2^2 \left(1 - \left| \frac{r_1}{r_2} \right|^2 \right) + \frac{1}{\pi^2 b k \gamma_{ж}} \left(\frac{\varepsilon k_n}{\operatorname{tg} \beta} \right)^2 \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right| \right]. \quad (3,242)$$

Для ориентировочных расчетов допустимо принимать

$$\frac{r_1}{r_2} = 0,5; \quad (3,243)$$

положив $k = \varepsilon = 1$, получим

$$D_n^* \approx \frac{\pi}{2gk_n} \left[0,95 b \gamma_{ж} r_2^4 - 1,50 \frac{k_n}{\pi \operatorname{tg} \beta} r_2^2 + \frac{0,7}{\pi^2 b \gamma_{ж}} \left(\frac{k_n}{\operatorname{tg} \beta} \right)^2 \right]. \quad (3,244)$$

Рассмотрим с тех же позиций (3,191). Принимая, как и прежде, b и k постоянными, получим:

$$D_r = \frac{\varepsilon^2}{2\pi g b k \gamma_{ж}} \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right|. \quad (3,245)$$

3. Неустановившийся режим для спиральной камеры

Считая все величины, кроме r , постоянными, после выполнения интегрирования по внутреннему интегралу получим

$$H_\varepsilon = \frac{2\pi}{g} \cdot \frac{\gamma_{ж}}{G} C \int_{\varphi_0}^{\varphi - 2\pi} \ln \left| \frac{r_3}{r_2} \right| \frac{d\varphi}{\varphi}, \quad (3,246)$$

где

$$C = r_2^2 b \left(\omega r_2 - \frac{\varepsilon G}{2\pi b_2 k_2 r_2 \gamma_{ж} \operatorname{tg} \beta_2} \right) \times \\ \times \left(\dot{\omega} r_2 - \frac{\varepsilon \dot{G}}{2\pi b_2 k_2 r_2 \gamma_{ж} \operatorname{tg} \beta_2} \right). \quad (3,247)$$

Решить интеграл (3,246) можно, задав зависимость r_3 от φ .

Глава IV

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЯ МЕТОДОМ МАЛЫХ КОНЕЧНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

Процессы, протекающие в двигателе, описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений. Обычно рассматривают установившийся или неустойчивый режим

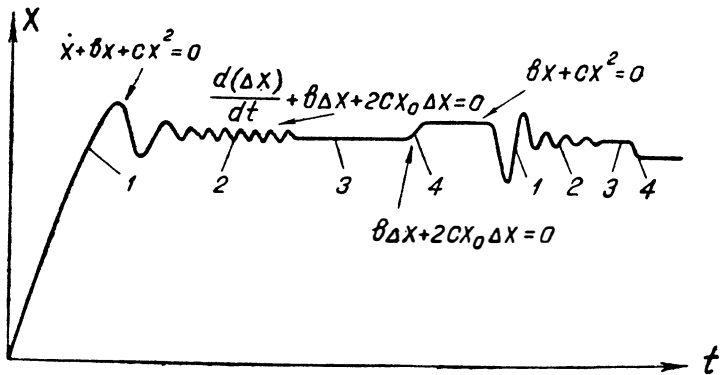


Рис. 17.

(рис. 17). В первом случае используют алгебраические уравнения, во втором ориентируются на дифференциальные. Большое практическое и теоретическое значение имеет изучение процессов, протекающих в окрестности установившегося (3) режима. В работающей машине в силу ее устойчивости и действия внешних факторов установившийся режим характеризуется непрерывными изменениями параметров (2). В отличие от неустойчивого режима (1), где изменение соизмеримо с самим параметром, для процессов, протекающих в окрестности, характерны малые отклонения, несоизмеримые со

значениями самих параметров. В зависимости от требований, предъявляемых к исследованию, рассматривают либо непрерывное изменение, либо результат после скачкообразного изменения (4). В первом случае используют дифференциальные уравнения, во втором — алгебраические. Поскольку отклонения малы по сравнению со значением функции, дифференциальные уравнения могут быть подвергнуты линеаризации, а уравнения, полученные из линейных дифференциальных уравнений, называются алгебраическими уравнениями малых конечных отклонений. Уравнения, описывающие процессы в окрестности, будучи линейными или простыми алгебраическими, легко решаются. Данная глава посвящена выводу и решению уравнений в малых конечных отклонениях.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение первой гидравлической цепи в виде

$$\psi_1 = p_{61} + D_1 n^2 - D'_1 n G_1 - D''_1 G_1^2 - I_p (G_1 + G_2) - a_1 G_1^{n_1} - a_2 G_1^{n_2} - b_1 \dot{G}_1 = 0. \quad (4,1)$$

Выделим три группы параметров. К первой отнесем основные, определяющие режим работы машины: G_1, G_2, n, G_3 . Параметрами второй группы являются те, значения которых меняются под действием внешних факторов: $p_{61}, D, D', D'', I_p, a_1, n_1$. К третьей группе принадлежат такие, значения которых могут быть изменены по нашему усмотрению, например a_{21} в уравнении (4,1).

Основные получают малые отклонения $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots$ в силу отклонения от номинала параметров двух групп. Параметры второй группы могут иметь малые отклонения $\Delta p_{61}, \Delta D_1, \dots$, возникающие под действием внешних факторов. Параметры третьей группы характеризуют органы настройки или регулирования, и их малые отклонения зависят от степени воздействия, направляемого экспериментатором или элементом системы автоматического регулирования.

Малые отклонения основных величин будут зависеть от величины изменения других параметров, но они обязательно изменяются так, что в конечном счете $\psi_1 = 0$. Таким образом, отдельные параметры могут получать отклонения, отличные от нуля, но всегда $\Delta \psi_1 \rightarrow 0$. В наиболее общем виде аналогичные рассуждения следует применять для любой i -й цепи. Внешние воздействия, действующие на параметры второй группы, появляются по причинам производственного порядка, эксплуатационного характера и под действием метеорологических факторов. Производственные воздействия обусловлены наличием допусков и ошибок, возникающих при сбор-

ке. Отклонения эксплуатационного характера объясняются воздействием на элементы конструкции при транспортировке, неточностями, возникающими при подготовке двигателя к работе, включая ошибки контрольных измерений и ошибки, допускаемые при настройке органов регулирования. Воздействия метеорологического порядка обусловлены отклонением температуры и давления окружающей среды от номинала. При изменении давления меняются упругость паров, температура кипения; изменение температуры приводит к изменению физического тепла и физических свойств компонентов: плотности, теплоемкости, вязкости и теплопроводности. Малые отклонения параметров третьей группы обычно назначают так, чтобы обеспечить номинальный режим, при котором малые отклонения основных параметров равны нулю.

При исследовании малых отклонений при помощи уравнений рассматривают одну из трех задач. Если принять, что параметры третьей группы не имеют отклонений от номиналов, и если положить, что $t \rightarrow \infty$, т. е. что $\dot{G}_1 \rightarrow 0$, то система, состоящая из уравнений типа (4,1), может быть использована для определения результатов действия внешних факторов. В этой первой задаче малые отклонения второй группы должны быть заданы, а малые отклонения основных параметров являются искомыми.

Если, сохраняя условие $G_1 = 0$, требуется обеспечить нулевые значения малых отклонений основных параметров, то уравнения типа (4,1) используются для определения малых отклонений третьей группы. Малые отклонения второй группы считаются заданными. Если же нас интересует характерное время изменения основных параметров от некоторых значений до номинальных в пределах малых отклонений, то \dot{G}_1 не принимается равной нулю, а малое отклонение параметров третьей группы представляется в виде функций времени. Отклонения параметров второй группы задаются в виде чисел или в виде функций времени.

Первая задача называется задачей об определении результатов действия внешних факторов. Вторая задача именуется задачей о настройке двигателя на номинальный режим. Третья, наконец, является задачей по определению режима работы двигателя, оснащенного системой автоматического регулирования.

§ 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОНЕЧНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЕРВЫХ ДВУХ ЗАДАЧ

Рассмотрим уравнение (4,1). Как было показано, малые отклонения могут получить все параметры, входящие в функцию. Если эти отклонения бесконечно малы, то выражение полного дифференциала будет являться совершенно точным.

При написании этого выражения сначала запишем члены, содержащие дифференциалы основных параметров, затем — дифференциалы параметров второй группы и, наконец, третьей. Получим

$$\begin{aligned}
 d\psi_1 = & \underbrace{\frac{\partial\psi_1}{\partial G_1} dG_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial G_2} dG_2 + \frac{\partial\psi_1}{\partial n} dn}_{I} + \\
 & + \frac{\partial\psi_1}{\partial p_{61}} dp_{61} + \frac{\partial\psi_1}{\partial D_1} dD_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial D'_1} dD'_1 + \\
 & + \underbrace{\frac{\partial\psi_1}{\partial D''_1} dD''_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial I_p} dI_p + \frac{\partial\psi_1}{\partial a_1} da_1}_{II} + \\
 & + \underbrace{\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{21}} da_{21}}_{III}.
 \end{aligned} \tag{4,2}$$

Переходя к малым конечным отклонениям и помня, что $\Delta\psi_1 \rightarrow 0$, находим

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial\psi_1}{\partial G_1} \Delta G_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial G_2} \Delta G_2 + \frac{\partial\psi_1}{\partial n} \Delta n}_{I} + \\
 & - \underbrace{\frac{\partial\psi_1}{\partial p_{16}} \Delta p_{61} + \dots + \frac{\partial\psi_1}{\partial a_1} \Delta a_1}_{II} + \underbrace{\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{21}} \Delta a_{21}}_{III} = c_1.
 \end{aligned} \tag{4,3}$$

В выражении (4,3) рассматриваются малые отклонения от заданного или установившегося режима. Если текущие значения параметров G_1, G_2, n, \dots , а их заданные или установившиеся значения $G_{10}, G_{20}, n_0, \dots$, то малыми отклонениями будут:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta G_1 &= G_1 - G_{10} \\
 \Delta G_2 &= G_2 - G_{20} \\
 \Delta n &= n - n_0 \\
 \Delta p_{61} &= p_{61} - p_{610} \\
 \Delta D_1 &= D_1 - D_{10} \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\}. \tag{4,4}$$

Уравнение (4,3) отличается от (4,2) тем, что вместо бесконечно малых отклонений фигурируют малые конечные отклонения, причем $\Delta\psi_1 \neq 0$, хотя $d\psi_1 \rightarrow 0$. Чем больше значения малых отклонений, тем больше отличается от нуля правая часть (4,3). Это отличие от нуля равно c_1 . При использовании уравнений типа (4,3) для расчетов в c_1 включают также ошибки, возникающие при подсчете или опытным определении параметров и их отклонений.

Поскольку (4,3) является уравнением окрестности, все частные производные должны подсчитываться по параметрам заданного или установившегося режима, поэтому они будут входить в уравнение в виде чисел.

Обозначим:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial G_1} = a_{11}; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial G_2} = a_{12}; \dots \quad (4,5)$$

Первый индекс соответствует номеру уравнения, второй — номеру параметра. Поскольку все a_{ik} есть заданные числа и поскольку малые отклонения параметров второй группы также должны быть заданы, сумма

$$V_1 = [a_{15} \Delta p_{61} + a_{16} \Delta D_1 + a_{17} \Delta D'_1 + a_{18} \Delta D''_1 + a_{19} \Delta I_p + a_{110} \Delta a_1] \quad (4,6)$$

представляет собой число. Это число характеризует возмущение рассматриваемой функции.

Сумму членов, содержащих малые отклонения параметров регулирования, обозначим P_i . В нашей функции рассматривается одно отклонение, поэтому

$$P_1 = [a_{111} \Delta a_{11}]. \quad (4,7)$$

Окончательно уравнение малых конечных отклонений в общем виде можно записать следующим образом:

$$\sum_1^k a_{ik} \Delta X_k = c_i. \quad (4,8)$$

Оно читается так: сумма произведений частных производных i -й функции по k -м параметрам на малые конечные отклонения соответствующих параметров равна ошибке преобразования, причем численные значения частных производных подсчитываются по параметрам рассматриваемого режима, от которого и отсчитываются малые отклонения.

В расшифрованном виде (4,8) при решении задач об определении действия внешних факторов пишется так:

$$a_{11} \Delta G_1 + a_{12} \Delta G_2 + a_{18} \Delta n + V_1 = c_1; \quad (4,9)$$

$$V_1 = \sum_5^k a_{ik} \Delta X_k. \quad (4,10)$$

При решении задачи о настройке вместо (4,8) будем писать.

$$a_{11} \Delta G_1 + a_{12} \Delta G_2 + a_{18} \Delta n + P_1 = c_1; \quad (4,11)$$

$$P_1 = a_{111} \Delta a_{11}, \quad (4,12)$$

причем целью наладки будет являться обеспечение $\Delta G_1 \rightarrow 0$ и $\Delta G_2 \rightarrow 0$. При решении задачи о действии внешних факторов находят численные значения ΔG_1 и ΔG_2 , соответствующие заданным V_i .

§ 3. УРАВНЕНИЯ ДРУГИХ ЦЕПЕЙ

Количество и тип уравнений зависят от схемы двигателя и поставленной задачи.

Ограничимся рассмотрением четырех основных параметров G_1 , G_2 , G_3 и n . Замкнутая система будет включать в себя четыре уравнения.

В общем случае основными параметрами являются все G_i и n , поэтому в замкнутой системе число уравнений равно $i+1$. В качестве второго принимают уравнение второй гидравлической цепи (первое рассмотрено в § 2).

Поскольку в рассматриваемых задачах массовые силы не учитываются, уравнение второй гидравлической цепи запишется так:

$$\psi_2 = P_{62} + D_2 n^2 - D_2' n G_2 - D_2'' G_2^2 - I_p (G_1 + G_2) - a_{22} G_2^2 - a_{22} G_2^2 = 0. \quad (4,13)$$

Если учитывать и действие внешних воздействий и эффект наладки, уравнение малых отклонений примет вид

$$a_{21} \Delta G_1 + a_{22} \Delta G_2 + a_{23} \Delta n + V_2 + P_2 = c_2; \quad (4,14)$$

$$V_2 = [a_{25} \Delta P_{62} + a_{26} \Delta D_2 + a_{27} \Delta D_2' + a_{28} \Delta D_2'' + a_{29} \Delta I_p + a_{210} \Delta a_2]; \quad (4,15)$$

$$P_2 = a_{211} \Delta a_{22}. \quad (4,16)$$

Третьим уравнением обычно является уравнение турбонасосной установки. В условиях установившегося режима оно пишется следующим образом:

$$M_T - \sum_{i=1}^k M_H = 0. \quad (4,17)$$

Момент, развиваемый турбиной,

$$M_T = \frac{75}{g} m d \eta_T \left(C_1 \cos \alpha_1 \xi_1 - 2 \cdot \frac{\pi}{30} m d \xi_2 n \right) G_3, \quad (4,18)$$

где m — число ступеней;
 d — диаметр средней линии выходных сечений сопел;
 η_T — к.п.д. турбины;
 C_1 — скорость истечения из сопла;
 α_1 — угол наклона оси сопла;
 ξ_1 ; ξ_2 — коэффициенты;
 n — число оборотов вала турбины;
 G_3 — секундный весовой расход парагаза.

Запишем (4,18) так:

$$M_{\tau} = \varepsilon_{\tau} (r - r'n) G_3, \quad (4,19)$$

где коэффициенты, характеризующие режим работы турбины:

$$r = \xi_1 C_1 \cos \alpha_1; \quad (4,20)$$

$$r' = \xi_2 2 \cdot \frac{\pi}{30} md; \quad (4,21)$$

$$\varepsilon_{\tau} = \frac{75}{g} md \eta_{\tau}. \quad (4,22)$$

Момент, потребляемый насосом,

$$M_{\text{ни}} = \varepsilon_{\text{ни}} \left(D_i n_i G_i - D_i' G_i^2 - D_i \frac{G_i^3}{n_i} - D_i'' \frac{G_i}{n_i} \dot{n}_i \right), \quad (4,23)$$

где

$$\varepsilon_{\text{ни}} = \frac{\pi}{30} \cdot \frac{1}{\gamma_i \eta_{\text{ни}}}. \quad (4,24)$$

В условиях поставленной нами задачи $\dot{n}_i = 0$ и $\eta_{\text{н}} = \text{const}$. Уравнение (4,17) для турбонасосной установки, имеющей k насосов, принимает вид:

$$\psi_3 = \varepsilon_{\tau} (r - r'n) G_3 - \sum_1^k \varepsilon_{\text{ни}} \left(D_i n_i G_i - D_i' G_i^2 - D_i \frac{G_i^3}{n_i} \right) = 0. \quad (4,25)$$

Уравнение в малых отклонениях запишется так:

$$a_{31} \Delta G_1 + a_{32} \Delta G_2 + a_{33} \Delta n + a_{34} \Delta G_3 + V_3 + P_3 = c_3; \quad (4,26)$$

$$V_3 = \left[a_{35} \Delta r + a_{36} \Delta r' + \sum_1^k a_{37i} \Delta D_i + \sum_1^k a_{38i} \Delta D_i' + \sum_1^k a_{39i} \Delta D_i'' \right]. \quad (4,27)$$

В качестве четвертого уравнения привлечем уравнение гидравлической цепи генератора. Если подача однокомпонентного средства генерации производится насосом, то

$$\psi_4 = p_{64} + D_4 n_4^2 - D_4' n_4 G_4 - D_4'' G_4^2 - I_{\text{рр}} G_4 - a_{44} G_4^2 - a_{44} G_4^2 = 0, \quad (4,28)$$

где $I_{\text{рр}}$ — удельный импульс давления для реактора генератора;

a_{44} — коэффициент гидравлического сопротивления регулятора генератора.

Если реактор питается **двухкомпонентным топливом**, то в расчет следует привлечь пятое уравнение, аналогичное (4,28), а в (4,28) $I_{pp}G_4$ заменить на

$$p_p = I_{pp}(G_4 + G_5). \quad (4,29)$$

При использовании **однокомпонентного топлива** расход пара газа

$$G_3 = G_4, \quad (4,30)$$

а в случае применения **двухкомпонентного топлива**

$$G_3 = G_4 + G_5.$$

Если используются основные компоненты, то в уравнениях (4,1) и (4,13) до места отбора компонентов в генератор следует писать $(G_1 + G_4)$ и $(G_2 + G_5)$, а после места отбора соответственно G_1 и G_2 .

Уравнение в малых отклонениях для (4,28) запишется так:

$$a_{41}\Delta n + a_{44}\Delta G_4 + V_4 + P_4 = c_4; \quad (4,31)$$

$$V_4 = [a_{45}\Delta p_{64} + a_{46}\Delta D_4 + a_{47}\Delta D'_4 + a_{48}\Delta D''_4 + a_{49}\Delta I_{pp} + a_{410}\Delta a_4]; \quad (4,32)$$

$$P_4 = a_{411}\Delta a_{д4}. \quad (4,33)$$

§ 4. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим несколько схем и напомним для них системы уравнений малых отклонений. При решении задач о действии внешних факторов и при определении ошибок c_i во всех уравнениях следует принимать $P_i = 0$.

1. Двигатель с нагруженными баками и с аккумуляторами

Компоненты топлива вытесняются из баков газом, поступающим в баки из аккумуляторов (рис. 18). Двигатель оснащен органами регулирования, установленными в гидравлические цепи:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\Delta G_1 + a_{12}\Delta G_2 + V_1 + P_1 &= c_1 \\ a_{21}\Delta G_1 + a_{22}\Delta G_2 + V_2 + P_2 &= c_2 \end{aligned} \right\}. \quad (4,34)$$

При наладке двигателя положим $\Delta G_1 = \Delta G_2 = 0$.

2. Двигатель с нагруженными баками и с генераторами

Компоненты топлива вытесняются из баков продуктами сгорания основных компонентов, которые поступают в баки из генераторов (рис. 19). Органы регулирования имеются во всех гидравлических цепях. Система будет содержать два уравнения основных гидравлических цепей, два уравнения гидравлических цепей генератора бака окислителя и два уравнения гидравлических цепей генератора бака горючего:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\Delta G_1 + a_{12}\Delta G_2 + a_{13}\Delta G_{11} + a_{24}\Delta G_{21} + V_1 + P_1 &= c_1 \\ a_{21}\Delta G_1 + a_{22}\Delta G_2 + a_{25}\Delta G_{12} + a_{26}\Delta G_{22} + V_2 + P_2 &= c_2 \\ a_{33}\Delta G_{11} + a_{34}\Delta G_{21} + V_3 + P_3 &= c_3 \\ a_{43}\Delta G_{11} + a_{44}\Delta G_{21} + V_4 + P_4 &= c_4 \\ a_{55}\Delta G_{12} + a_{56}\Delta G_{22} + V_5 + P_5 &= c_5 \\ a_{65}\Delta G_{12} + a_{66}\Delta G_{22} + V_6 + P_6 &= c_6 \end{aligned} \right\} (4,35)$$

где

- G_1 — расход окислителя в камеру;
- G_2 — расход горючего в камеру;
- G_{11} — расход окислителя в бак окислителя;
- G_{21} — расход горючего в бак окислителя;
- G_{12} — расход окислителя в бак горючего;
- G_{22} — расход горючего в бак горючего.

3. Двигатель с разгруженными баками, вариант № 1

Основные компоненты подаются в камеру при помощи насосов. Средство генерации производится из третьего компонента в генераторе с нагруженным баком. Все три гидравлические цепи оснащены органами регулирования (рис. 20):

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\Delta G_1 + a_{12}\Delta G_2 + a_{13}\Delta n &+ V_1 + P_1 = c_1 \\ a_{21}\Delta G_1 + a_{22}\Delta G_2 + a_{23}\Delta n &+ V_2 + P_2 = c_2 \\ a_{31}\Delta G_1 + a_{32}\Delta G_2 + a_{33}\Delta n + a_{34}\Delta G_3 + V_3 &= c_3 \\ a_{44}\Delta G_4 + V_4 + P_4 &= c_4 \end{aligned} \right\} (4,36)$$

При наладке $\Delta G_1 = \Delta G_2 = \Delta G_4 = 0$, четвертое уравнение используют для определения P_4 , третье — для отыскания Δn , а по первому и второму находят P_1 и P_2 . Напомним, что в (4,36) $G_3 = G_4$.

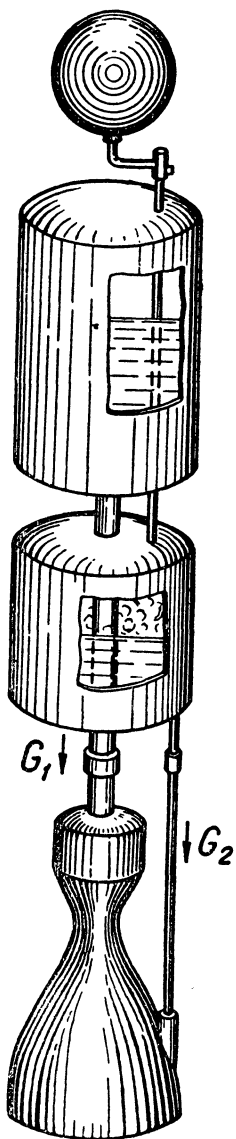


Рис. 18.

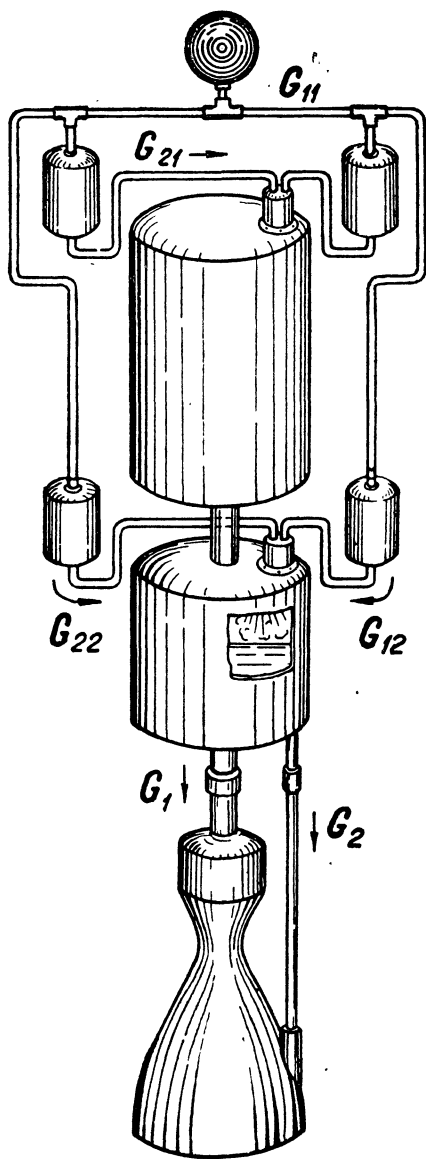


Рис. 19.

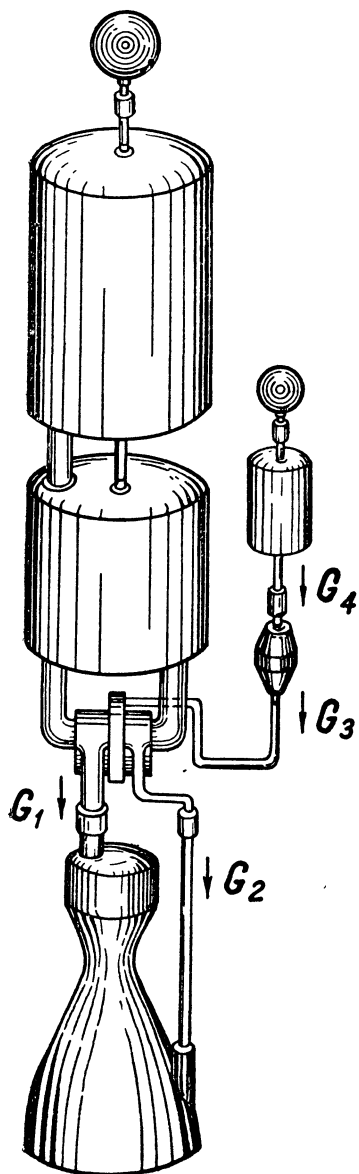


Рис. 20

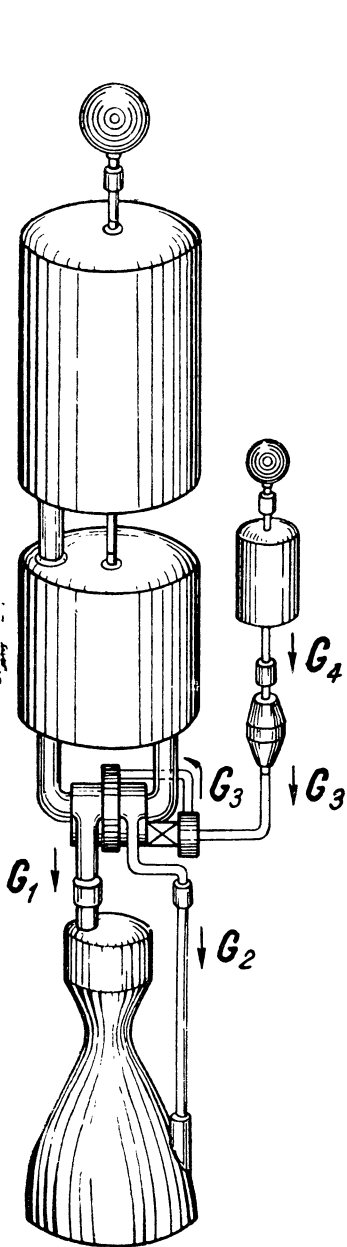


Рис. 21.

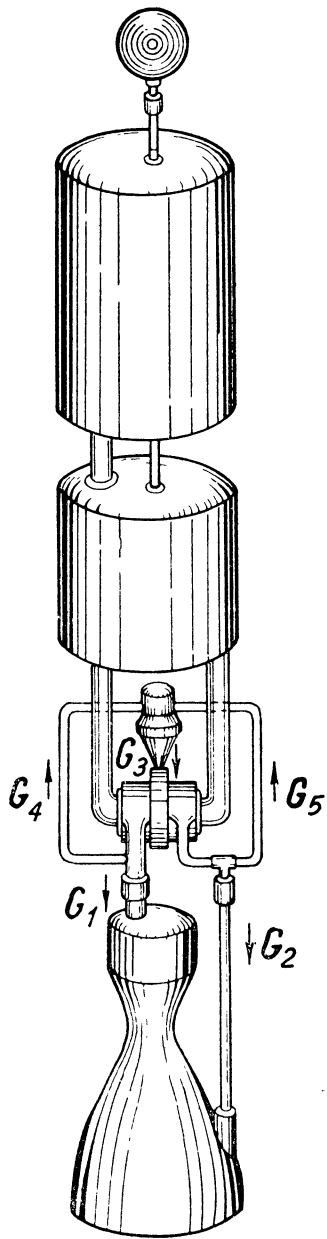


Рис. 22.

4. Двигатель с разгруженными баками, вариант № 2

Отличие от предыдущей схемы заключается в наличии насоса в гидравлической цепи генератора (рис. 21)

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\Delta G_1 + a_{12}\Delta G_2 + a_{13}\Delta n &+ V_1 + P_1 = c_1 \\ a_{21}\Delta G_1 + a_{22}\Delta G_2 + a_{23}\Delta n &+ V_2 + P_2 = c_2 \\ a_{31}\Delta G_1 + a_{32}\Delta G_2 + a_{33}\Delta n + a_{34}\Delta G_3 + V_3 &= c_3 \\ a_{43}\Delta n + a_{44}\Delta G_4 + V_4 + P_4 &= c_4 \end{aligned} \right\} (4,37)$$

Для осуществления наладки принимаем

$$\Delta G_1 = \Delta G_2 = \Delta n = 0.$$

По третьему уравнению находим $\Delta G_3 = \Delta G_4$, по четвертому — значение P_4 , обеспечивающее требуемое ΔG_4 . P_1 и P_2 определяем по первому и второму уравнению.

5. Двигатель с разгруженными баками, вариант № 3

Турбина питается от генератора, работающего на основных компонентах (рис. 22):

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\Delta G_1 + a_{12}\Delta G_2 + a_{13}\Delta n + a_{14}\Delta G_4 &+ V_1 + P_1 = c_1 \\ a_{21}\Delta G_1 + a_{22}\Delta G_2 + a_{23}\Delta n + a_{25}\Delta G_5 + V_2 + P_2 &= c_2 \\ a_{31}\Delta G_1 + a_{33}\Delta n + a_{34}\Delta G_4 + a_{35}\Delta G_5 + V_3 &= c_3 \\ a_{42}\Delta G_2 + a_{43}\Delta n + a_{44}\Delta G_4 + a_{45}\Delta G_5 + V_4 + P_4 &= c_4 \\ a_{51}\Delta G_1 + a_{52}\Delta G_2 + a_{53}\Delta n + a_{54}\Delta G_4 + a_{55}\Delta G_5 + V_5 + P_5 &= c_5 \end{aligned} \right\} (4,38)$$

Наладка сводится к определению Δn по третьему уравнению и затем к определению P_i по остальным. Отметим, что аналогичные системы могут быть легко написаны для любых других схем.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ

Возьмем за основу уравнения (4,1), (4,13), (4,25) и (4,28). Определим коэффициенты по уравнению (4,1), которое перепишем:

$$\psi_1 = p_{61} + D_1 n^2 - D'_1 n G_1 - D''_1 G_1^2 - I_p (G_1 + G_2) - a_1 G_1^n - a_{n1} G_1^n = 0.$$

Напомним, что

$$a_{ik} = \frac{\partial \psi_i}{\partial X_k}, \quad (4,39)$$

например:

$$a_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial G_1}; \quad (4,40)$$

$$a_{12} = \frac{\partial \psi_1}{\partial G_2} \text{ и т. д.} \quad (4,41)$$

При подсчете частных производных все параметры, кроме того, по которому берут производную, считаются постоянными. Производные по основным параметрам будут:

$$a_{11} = [-D'_1 n - 2D'_1 G_1 - I_p - n_1 a_1 G_1^{n_1-1} - n_1 a_{11} G_1^{n_1-1}]_*. \quad (4,42)$$

Звездочка отмечает, что численные значения величин, заключенных в скобки, определяются по установившемуся режиму.

Таким образом, звездочка эквивалентна записи

$$G_1 = G_{10}; G_2 = G_{20}; n = n_0; G_3 = G_{30}; p_{61} = p_{610} \text{ и т. д.} \quad (4,43)$$

Подсчитаем следующие коэффициенты:

$$a_{12} = [-I_p]_*; \quad (4,44)$$

$$a_{13} = [2D_1 n - D'_1 G_1]_*. \quad (4,45)$$

Чтобы определить V_1 , необходимо воспользоваться формулой (4,10). Для рассматриваемого случая она запишется так:

$$V_1 = a_{15} \Delta p_{61} + a_{16} \Delta D_1 + a_{17} \Delta D'_1 + a_{18} \Delta D'_1 + a_{19} \Delta I_p + a_{110} \Delta a_1. \quad (4,46)$$

Малые отклонения подсчитываются по результатам испытаний. Для коэффициентов находим:

$$a_{15} = \frac{\partial \psi_1}{\partial p_{61}} = 1; \quad (4,47)$$

$$a_{16} = \frac{\partial \psi_1}{\partial D_1} = [n^2]_*; \quad (4,48)$$

$$a_{17} = [-nG_1]_*; \quad (4,49)$$

$$a_{18} = [-G_1^2]_*; \quad (4,50)$$

$$a_{19} = [-I_p]_*; \quad (4,51)$$

$$a_{110} = [-G_1^{n_1}]_*. \quad (4,52)$$

Если необходимо учесть отклонение степени n_1 от номинала, то в правую часть (4,46) следует добавить $a_{112} \Delta n_1$, причем

$$a_{112} = \frac{\partial \psi_1}{\partial n_1} = [(a_1 + a_{11}) G_1^{n_1} \ln G_1]. \quad (4,53)$$

Аналогично пишут формулы для a_{ik} других функций по (4,13), (4,25) и (4,28).

Большой интерес представляет изучение влияния температуры и отклонения размеров различных деталей от номинала на режим работы двигателя.

Рассмотрим влияние температуры горючего. Воспользуемся уравнением (4,13)

$$\psi_2 = p_{62} + D_2 n^2 - D_2' n G_2 - D_2'' G_2^2 - I_p (G_1 + G_2) + (a_2 + a_{22}) G_2^2.$$

При изменении температуры изменяется плотность и вязкость жидкости. Следствием этого является изменение коэффициентов, в которые входит плотность или вязкость. В уравнении второй гидравлической цепи от физических свойств горючего зависят:

$$D_2; D_2'; D_2''; a_2; a_{22}.$$

Можно принять, что

$$D_2 = \gamma_2 D_{20}; \quad (4,54)$$

$$D_2' = \gamma_2 D_{20}'; \quad (4,55)$$

$$D_2'' = \gamma_2 D_{20}''; \quad (4,56)$$

Удельный импульс давления зависит от температуры горючего потому, что с изменением температуры меняется физическое тепло и, как следствие, RT . Пусть нам, по результатам обработки опытных данных, известно $I_p(T_2)$. Далее допустим, что в коммуникациях поток квадратичный, а в дросселе — турбулентный.

Для коммуникаций

$$a_2 = \frac{\epsilon}{2g\sigma^2\gamma_2} \quad (4,57)$$

и для дросселя

$$a_{22} = \frac{\epsilon(\nu_2)}{2g\sigma_{12}^2 \gamma_2}. \quad (4,58)$$

В (4,58) предполагается, что ϵ есть функция вязкости горючего, заданная по опытным данным. Для решения задачи привлекаем условия

$$\gamma_2(T_2); \quad (4,59)$$

$$\nu_2(T_2), \quad (4,60)$$

задаваемые таблично или в виде графиков. Теперь легко написать выражение частной производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_2}{\partial T_2} = & \frac{\partial \psi_2}{\partial D_2} \cdot \frac{\partial D_2}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial T_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial D_2'} \cdot \frac{\partial D_2'}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial T_2} + \\ & + \frac{\partial \psi_2}{\partial D_2''} \cdot \frac{\partial D_2''}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial T_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial I_p} \cdot \frac{\partial I_p}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial T_2} + \\ & + \frac{\partial \psi_2}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial T_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial T_2} + \dots \end{aligned} \quad (4,61)$$

Далее находим

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial D_2} = [n^2]_* ; \quad (4,62)$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial \gamma_2} = [D_{20}]_* ; \quad (4,63)$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial T_2} = \left[\frac{\partial \gamma_2(T_2)}{\partial T_2} \right] \text{ и т. д.} \quad (4,64)$$

Метод определения параметров, входящих в выражения a_{ik} , сводится к следующему. При проведении приближенных расчетов все величины, входящие в выражения основных функций, могут быть определены по теоретическим зависимостям.

При исследовании конкретных двигателей используют опытные данные. Коэффициенты D_i и D_i' находят по обработке опытных данных. Зная p_0 ; ph ; G_1 и G_2 по результатам испытаний, находим:

$$I_p = \left[\frac{p_0}{G_1 + G_2} \right]_* ; \quad (4,65)$$

$$a_1 = \left[\frac{ph_1}{G_1^{n_1}} \right]_* \text{ и т. д.} \quad (4,66)$$

§ 6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Будем считать, что все постоянные коэффициенты уравнений могут быть определены опытом.

Различают индивидуальные и средние статистические значения параметров. Индивидуальным называется значение, полученное по результатам обработки опыта, произведенного с одним двигателем или его агрегатом. Индивидуальные значения, или индивидуальные параметры, могут быть вычислены или по результатам цеховых испытаний агрегатов или по результатам огневых испытаний двигателя.

По данным цеховых испытаний можно получить индивидуальные значения следующих параметров: $D_1, D_2, D_3, D'_1, D'_2, D'_3, D''_1, D''_2, D''_3, a_1, a_2, a_3, a_{д1}, a_{д2}, a_{д3}, r$ и r' .

Результатами огневых испытаний можно проверить параметры, значения которых были подсчитаны по цеховым испытаниям, параметры $p_{61}, p_{62}, I_p, I_{pp}$ и основные параметры $G_1, G_2, n, G_3, G_4, G_5$.

Средние статистические значения получаем как средние арифметические. Если число опытов n , индивидуальное значение параметра m , то среднее статистическое значение

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_1^n m. \quad (4,67)$$

В дальнейшем изложении средние статистические значения будем называть сокращенно статистическими.

Число опытов определяется в зависимости от требуемой точности. Решениям задач о действии внешних факторов и о наладке предшествует подсчет статистических \bar{a}_{ik} и \bar{c}_i по результатам обработки опытов, проведенных над партией из n однотипных двигателей.

Для определения \bar{a}_{ik} каждого двигателя по результатам огневых испытаний подсчитывают a_{ik} и затем находят

$$\bar{a}_{ik} = \frac{1}{n} \sum_1^n a_{ik}. \quad (4,68)$$

Следующим этапом расчета является определение статистического значения \bar{V}_i по результатам цеховых и огневых испытаний. Поскольку статистические значения \bar{a}_{ik} подсчитаны, то

$$\bar{V}_i = \frac{1}{n} \sum_1^n \sum_1^n \bar{a}_{ik} \Delta X_k. \quad (4,69)$$

Уравнение (4,69) и показывает, что для каждого двигателя надо подсчитать V_i по статистическим \bar{a}_{ik} и индивидуальным ΔX_k , а затем найти статистическое значение \bar{V}_i ; (4,69) равноценно записи

$$\bar{V}_i = \frac{1}{n} \sum_1^n V_i. \quad (4,70)$$

Теперь можно приступить к подсчету статистических \bar{c}_i по формуле

$$\bar{c}_i = \frac{1}{n} \sum_1^n (\bar{a}_{i1} \Delta G_1 + \bar{a}_{i2} \Delta G_2 + \bar{a}_{i3} \Delta n + \bar{a}_{i4} \Delta G_3) + \bar{V}_i. \quad (4,71)$$

В (4,71) малые отклонения берут по результатам испытания тех двигателей, которые использовались для подсчета \bar{a}_{ik} . Теперь можно написать систему для наладки любого двигателя новой партии

$$\bar{a}_{i1} \Delta G_1 + \bar{a}_{i2} \Delta G_2 + \bar{a}_{i3} \Delta n + \bar{a}_{i4} \Delta G_3 + \bar{V}_i + P_i = \bar{c}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \dots \quad (4,72)$$

В уравнениях (4,72) \bar{a}_{ik} , \bar{V}_i , \bar{c}_i подсчитаны по результатам обработки испытаний ранее рассматриваемой (старой) партии. Для наладки нового двигателя надо положить вначале

$$\Delta G_1 = \Delta G_2 = \Delta n = \Delta G_3 = 0, \quad (4,73)$$

поскольку обеспечены условия (4,73) и есть цель наладки.

Таким образом, для определения P_i имеем

$$\bar{V}_i + P_i = \bar{c}_i. \quad (4,74)$$

Чтобы учесть специфические особенности налаживаемого двигателя, \bar{V}_i надо подсчитать по (4,69), положив \bar{a}_{ik} по данным для старой партии и подставив ΔX_k , характерные для рассматриваемого двигателя. Эти малые отклонения получаем по обработке цеховых испытаний. После проведения огневого испытания обнаруживаем малые отклонения основных параметров, отличные от нуля. Для нахождения более точного значения P_i во втором приближении пользуемся выражением (4,72), причем \bar{a}_{ik} , \bar{V}_i и \bar{c}_i по результатам огневого испытания не уточняются.

Ожидаемые значения малых отклонений основных параметров подсчитываем при условии, что $P_i = 0$. Подсчет этих чисел и называется решением задачи о действии внешних факторов. Расчетная система имеет вид

$$\bar{a}_{i1} \Delta G_1 + \bar{a}_{i2} \Delta G_2 + \bar{a}_{i3} \Delta n + \bar{a}_{i4} \Delta G_3 = \bar{c}_i - \bar{V}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \dots \quad (4,75)$$

Во многих случаях систему можно представить тремя уравнениями. Это удастся для (4,36) путем решения четвертого уравнения относительно ΔG_4 и замены ΔG_3 в третьем уравнении полученным, поскольку $\Delta G_3 = \Delta G_4$.

Для системы (4,37) ΔG_3 также заменяем на ΔG_4 , полученное из четвертого уравнения, причем у Δn появляется новое \bar{a}_{ik} , равное $\bar{a}_{33} + \bar{a}_{43}$. Правые части уравнений, со-

держашие \bar{V}_i и \bar{c}_i , обозначим k_i . Окончательно расчетная система запишется так:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{11}\Delta G_1 + \bar{a}_{12}\Delta G_2 + \bar{a}_{13}\Delta n &= \bar{k}_1 \\ \bar{a}_{21}\Delta G_1 + \bar{a}_{22}\Delta G_2 + \bar{a}_{23}\Delta n &= \bar{k}_2 \\ \bar{a}_{31}\Delta G_1 + \bar{a}_{32}\Delta G_2 + \bar{a}_{33}\Delta n &= \bar{k}_3 \end{aligned} \right\}. \quad (4,76)$$

Решения, как известно, имеют вид

$$\Delta G_1 = \frac{D_1}{D}; \quad \Delta G_2 = \frac{D_2}{D}; \quad \Delta n = \frac{D_3}{D}. \quad (4,77)$$

Главный определитель:

$$D = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix}. \quad (4,78)$$

Дополнительные определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \bar{k}_1 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{k}_2 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{k}_3 & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix}; \quad (4,79)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{k}_1 & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{k}_2 & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{k}_3 & \bar{a}_{33} \end{vmatrix}; \quad (4,80)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{k}_1 \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{k}_2 \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{k}_3 \end{vmatrix}. \quad (4,81)$$

В подготовке и разработке материалов данного параграфа принимал участие В. Д. Харьков.

§ 7. УТОЧНЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Решения (4,77) не являются точными по ряду причин; рассмотрим две из них:

коэффициенты a_{ik} приняты в виде чисел, хотя, как это следует, например, из (4,42), они есть функции основных параметров;

переход от бесконечно малых к малым конечным отклонениям по сути преобразований является процессом линеаризации, и ошибка возникает вследствие неучета нелинейных остатков.

Попытаемся исключить ошибки, возникающие по первой причине. Возьмем систему:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 &= K_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 &= K_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 &= K_3 \end{aligned} \right\}. \quad (4,82)$$

Рассмотрим решения:

$$X_1 = \frac{D_1}{D_0}; \quad (4,83)$$

$$X_2 = \frac{D_2}{D_0}, \quad (4,84)$$

из которых следует

$$D_2 X_1 = D_1 X_2. \quad (4,85)$$

Уменьшая значения X_1 и X_2 , в пределе получим:

$$X_1 \rightarrow dX_1; \quad (4,86)$$

$$X_2 \rightarrow dX_2. \quad (4,87)$$

Следовательно, вместо (4,85) имеем

$$D_2 dX_1 = D_1 dX_2. \quad (4,88)$$

Если нас интересует не бесконечно малое изменение, а конечное изменение, то вместо (4,88) следует писать

$$\int_0^{X_1} D_2 dX_1 = \int_0^{X_2} D_1 dX_2 \quad (4,89)$$

в случае, если

$$D_2 = f_2(X_1); \quad D_1 = f_1(X_2). \quad (4,90)$$

При более сложной функциональной зависимости следует решать (4,88).

Для удовлетворения (4,90) можно использовать уравнения статики

$$K = \frac{G_1}{G_2}; \quad K_1 = \frac{G_1}{n}; \quad K_2 = \frac{G_2}{n}, \quad (4,91)$$

где K_1 и K_2 — постоянные коэффициенты, зависящие от конструкции и параметров насосов. Ориентируясь на (4,82), напишем:

$$D_1 = \begin{vmatrix} K_1 & a_{12} & a_{13} \\ K_2 & a_{22} & a_{23} \\ K_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad (4,92)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & K_1 & a_{13} \\ a_{21} & K_2 & a_{23} \\ a_{31} & K_3 & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (4,93)$$

Чтобы удовлетворить (4,90), функциями от X_2 должны быть a_{12}, a_{22}, a_{23} , а функциями от X_1 — коэффициенты a_{11}, a_{21}, a_{31} . Коэффициенты a_{13}, a_{23}, a_{33} должны быть или постоянными или же при помощи (4,91) представлены как функции от X_2 при подстановке в (4,92) и как функции от X_1 при подстановке в (4,93). Коэффициенты K_i в рассматриваемых задачах заданы в виде чисел.

Рассмотрим преобразование (4,42). Используя (4,91), необходимо привести (4,42) к виду

$$a_{11} = f(X_1). \quad (4,94)$$

Очевидно, что

$$a_{11} = -D'_1 \frac{G_1}{K_1} - 2D''_1 G_1 - I_p - n_1 a_1 G_1^{n_1-1} - n_1 a_{11} G_1^{n_1-1}. \quad (4,95)$$

Нетрудно убедиться, что при $n_1 = n_2 = 2$ для любого коэффициента можно получить

$$a_{ik} = b_{ik} + b'_{ik} X_k. \quad (4,96)$$

Поскольку K_i есть число, то определители можно представить в виде:

$$D_1 = A_1 + B_1 X_2 + C_1 X_2^2; \quad (4,97)$$

$$D_2 = A_2 + B_2 X_1 + C_2 X_1^2. \quad (4,98)$$

Таким образом, задача сводится к решению табличных интегралов (4,89) с подынтегральными функциями (4,97) и (4,98).

Вторая причина ошибок заключается, как отмечалось, в неучете нелинейных остатков. Пусть функция содержит члены второй степени. В наших уравнениях ими будут:

$$Dn^2; aG^2; D''G^2. \quad (4,99)$$

Рассмотрим функцию

$$\psi = aX^2. \quad (4,100)$$

При использовании метода полного дифференциала мы имели

$$2aX\Delta X = 0. \quad (4,101)$$

Применяя разложение в ряд Тейлора, получим

$$2aX\Delta X + a(\Delta X)^2 = 0, \quad (4,102)$$

где $a(\Delta X)^2$ — нелинейный остаток. С учетом его выражение (4,101) следует записать так:

$$\xi 2aX\Delta X = 0. \quad (4,103)$$

Сравнивая (4,102) с (4,103), находим

$$\xi = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta X}{X}. \quad (4,104)$$

Таким образом, чем меньше относительное значение малого отклонения, тем меньше ошибка, возникающая вследствие неучета нелинейных остатков. Если $\Delta X \rightarrow dX$, то $\xi \rightarrow 1$.

Для того чтобы исключить ошибки, следует уравнения малых конечных отклонений писать так, чтобы слагаемые, полученные из функций типа (4,100), содержали множитель ξ .

Для первой гидравлической цепи, например, получим

$$a_{11} = -D_1' n - I_p - \xi 2a_1 G_1; \quad (4,105)$$

$$a_{13} = \xi 2D_1 n - D_1' G_1. \quad (4,106)$$

Учитывая, что введение ξ уточняет расчет, можно ξ принять некоторым средним значением. Для этого по аналогичным расчетам следует оценить

$$\frac{\Delta G_1}{G_1}; \quad \frac{\Delta G_2}{G_2}; \quad \frac{\Delta n}{n} \quad (4,107)$$

и принять в проводимом расчете их характерные значения.

Глава V

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМА РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЯ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

§ 1. ОСОБЕННОСТИ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА

Графический метод расчета жидкостного реактивного двигателя является прекрасным дополнением к аналитическому методу. Обеспечивая достаточно высокую точность расчета, он позволяет:

- использовать без каких бы то ни было искажений результаты обработки опытных данных;

- произвести расчет в короткие сроки;

- наглядно представить поведение двигателя в окрестности рабочего режима;

- качественно оценить устойчивость режима работы;

- оценить режимы работы двигателя при значительных отклонениях параметров от их номинальных значений;

- проследить характер выхода двигателя на режим;

- исследовать влияние различных параметров на режим работы двигателя;

- оценить влияние внешних факторов;

- использовать результаты расчета для настройки двигателя;

- проследить действие регулирующих устройств.

Уравнения двигателя не являются линейными, поэтому при решении многих задач их приходится упрощать. Графический же метод не требует линеаризации уравнений.

Многие коэффициенты, входящие в уравнения двигателя, зависят от параметров двигателя. Для того чтобы найти решение уравнений двигателя, некоторые коэффициенты приходится принимать постоянными или упрощать характер их зависимости. Такие допущения часто приводят к заметным искажениям качественной картины процесса. Графический метод не требует использования подобных допущений.

Режим работы двигателя в целом зависит от работы его отдельных агрегатов, в первую очередь от режимов работы камеры сгорания, турбонасосной установки и генератора. Чтобы оценить характер выхода двигателя на режим, устойчивость, интенсивность действия внешних факторов, возможность регулировки и настройки, необходимо решить подобные задачи для отдельных агрегатов двигателя и исследовать связи между процессами, протекающими в этих агрегатах.

Процессы, протекающие в одних агрегатах, могут являться внешними по отношению к другим, могут возмущать, искажать их или, наоборот, способствовать их стабилизации. Графический метод расчета позволяет проследить эту связь и качественно установить интенсивность возмущений.

В рамках нашего курса ограничимся рассмотрением установившегося режима работы двигателя.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ И РАСЧЕТ

1. Гидравлические цепи

На рис. 23 представлены балансы давлений основных гидравлических цепей двигателя: цепи окислителя и цепи горючего. Секундный весовой расход окислителя обозначен G_1 , а

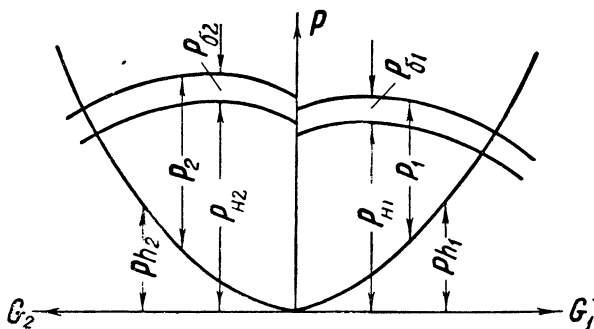


Рис. 23.

секундный весовой расход горючего — G_2 . На рисунке представлена зависимость гидравлических потерь в коммуникациях от расхода компонентов топлива в виде кривых $ph_1(G_1)$ и $ph_2(G_2)$. Эти кривые могут быть построены по расчетным данным или на основании обработки результатов гидравлических проливов. На тот же рисунок нанесены характеристики насосов, представляющие собой зависимость избыточного давления, создаваемого насосами, от расхода компонентов $p_{H1}(G_1)$, $p_{H2}(G_2)$ и соответствующие некоторому постоянному значе-

нию числа оборотов вала турбонасосной установки. Таким образом, расчет соответствует одному заданному значению числа оборотов. Для получения полного представления о работе двигателя необходимо провести ряд аналогичных расчетов для нескольких значений скорости вращения.

Баки рассматриваемого нами двигателя имеют наддув p_{61} и p_{62} , создаваемый специальной системой наддува. Давление в баках не зависит от расхода топлива, поэтому на нашем рисунке кривые $(p_{н1} + p_{62})(G_1)$ и $(p_{н2} + p_{62})(G_2)$ соответственно эквидистантны кривым $p_{н1}(G_1)$ и $p_{н2}(G_2)$. На рисунке отмечены отрезки p_1 и p_2 . Если воспользоваться балансами давлений, то можно написать:

$$p_1 = p_{н1} + p_{61} - ph_1; \quad (5,1)$$

$$p_2 = p_{н2} + p_{62} - ph_2. \quad (5,2)$$

Очевидно, что при установившемся режиме работы двигателя p_1 и p_2 представляют собой не что иное, как давление в камере сгорания, поскольку обе гидравлические цепи работают на одну общую камеру. Следовательно, давления p_1 и p_2 обязательно должны быть равны между собой.

Легко заметить, что каждому заданному или выбранному значению G_1 будет соответствовать вполне определенное значение G_2 . Давление в камере p_0 зависит не только от прихода топлива в камеру сгорания $(G_1 + G_2)$, но и от удельного импульса давления

$$I_p = \frac{\sqrt{RT}}{\sigma_{кр} a}. \quad (5,3)$$

Можно считать, что удельный импульс давления не зависит от давления в камере, а зависит только от площади критического сечения сопла $\sigma_{кр}$ и от термодинамического параметра

$$B = \frac{\sqrt{RT}}{a}, \quad (5,4)$$

являющегося функцией соотношения между расходами компонентов

$$K = \frac{G_1}{G_2}. \quad (5,5)$$

При установившемся режиме приход топлива в камеру сгорания $(G_1 + G_2)$ равен расходу газов G , проходящих через критическое сечение сопла.

Приход топлива в камеру зависит от параметров гидравлической цепи и величины сопротивления, оказываемого камерой сгорания, а расход газов G — от давления в камере p_0 и удельного импульса I_p . Эти параметры камеры на рис. 23 не представлены; в нашем расчете они еще не фигурировали.

Поскольку величина удельного импульса может изменяться в широких пределах, то использование данных, представленных на рис. 23, еще не дает возможности определить однозначно $(G_1 + G_2)$.

2. Камера сгорания

Воспользуемся рис. 23 для того, чтобы установить связь между давлением в камере p_0 и притоком в камеру $(G_1 + G_2)$. Приступим к построению графика, представленного на рис. 24. Возьмем правую часть графика, представленного на рис. 23, и для ряда произвольно выбранных значений G_1 определим значения p_1 .

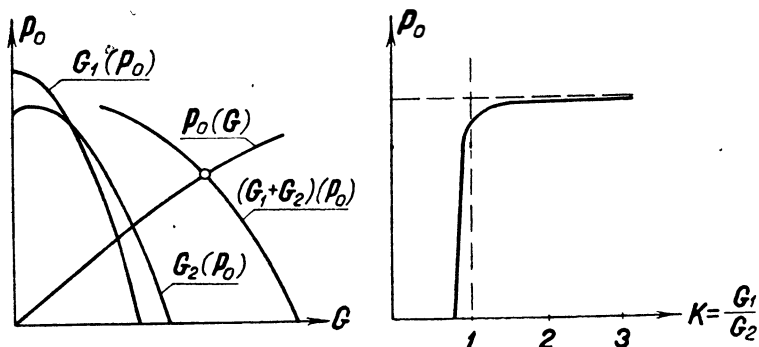


Рис. 24.

Поскольку мы рассматриваем установившийся режим, следует считать, что p_1 есть p_0 . Откладывая на рис. 24 значение G_1 и им соответствующие p_0 , получим кривую $G_1(p_0)$. Совершенно аналогично, но ориентируясь на левую часть графика (см. рис. 23), строим кривую $G_2(p_0)$, показанную на рис. 24 и представляющую собой зависимость притока второго компонента в камеру от давления в этой камере. Теперь можно взять любое давление и определить, каковы будут притоки компонентов в камеру. Выберем ряд произвольных значений p_0 .

На рис. 24 следует взять несколько произвольно выбранных значений p_0 . Для каждого из выбранных значений p_0 можно определить сумму $(G_1 + G_2)$ и построить кривую $(G_1 + G_2)(p_0)$, которая будет представлять собой зависимость притока топлива в камеру от давления в ней.

Следующий этап расчета сводится к определению отношения K для всего диапазона давлений. Для любого произвольного значения p_0 мы знаем G_1 и G_2 ; этого достаточно для построения представленного на рис. 24 графика функции $K(p_0)$.

Теперь для любого значения p_0 имеется значение K . Для построения кривой зависимости расхода газов, истекающих из камеры, воспользуемся уже известной формулой

$$G = \sigma_{кр} \frac{p_0}{B}. \quad (5,6)$$

Задаемся рядом произвольных значений p_0 и для каждого значения p_0 находим величину K . Здесь необходимо воспользоваться или результатами термодинамического расчета, или результатами обработки опытных данных и для каждого полученного K определить величину термодинамического параметра B . Остается выбрать, задаться или определить обмером площадь критического сечения сопла. Теперь для выбранных значений p_0 известна величина расхода газа, истекающего из камеры.

Результаты расчета представлены на рис. 24 в виде кривой $p_0 = I_p G$. В точке a пересечения кривых $(G_1 + G_2)(p_0)$ и $p_0(G)$ приход топлива в камеру равен расходу газов (продуктов сгорания топлива) из камеры. Поэтому точка a соответствует установившемуся режиму работы двигателя при выбранных для расчета числах оборотов вала турбонасосной установки. В заключение расчета, используя рис. 24, находим значения p_0 , G_1 , G_2 , $(G_1 + G_2)$ и K .

Поскольку G_1 и G_2 известны, используя график, представленный на рис. 23, найдем соответствующие выбранным числам оборотов гидравлические потери и избыточное давление, создаваемое насосами. Выполнив аналогичные расчеты для других значений числа оборотов, можно построить графики зависимости найденных параметров от числа оборотов вала турбонасосной установки. Для того чтобы определить, какие обороты вала являются рабочими (паспортными), необходимо провести расчет турбонасосной установки и генератора.

3. Турбонасосная установка

Известно, что мощность, потребляемая насосом,

$$N_n = \frac{p_n G}{75 \gamma \eta_n}. \quad (5,7)$$

В результате расчета гидравлических цепей мы определили для выбранных оборотов как избыточное давление, создаваемое насосами, так и расход компонентов.

Если принять $\eta_n = \text{const}$ или если известна зависимость η_n от параметров насоса, то можно для каждого выбранного значения числа оборотов подсчитать мощность, потребляемую каждым насосом. Если имеется возможность, то график функции $N_n(n)$ должен быть получен опытным путем.

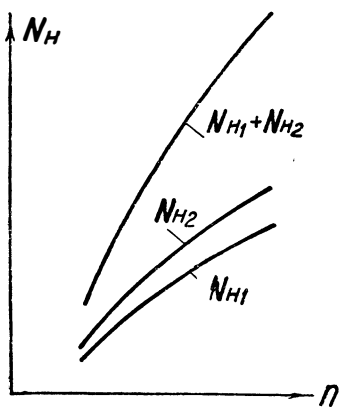


Рис. 25.

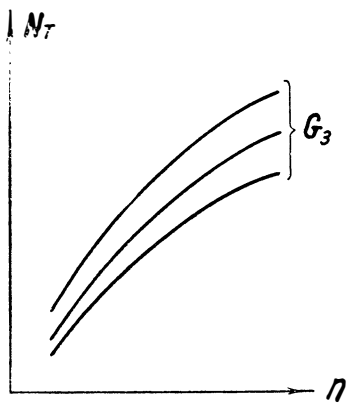


Рис. 26.

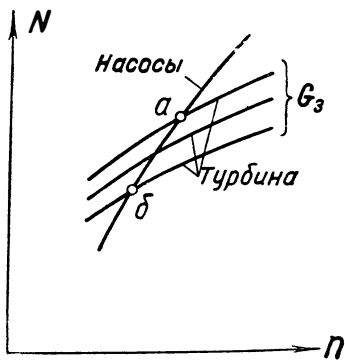


Рис. 27.

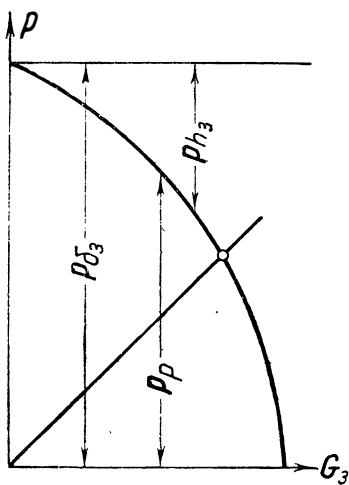


Рис. 28.

Суммируя значения мощностей всех насосов, строим график зависимости мощности, потребляемой этими насосами, от числа оборотов вала турбонасосной установки (рис. 25).

На основании дополнительного расчета или используя результаты обработки опытных данных, строим семейство кривых, представляющее зависимость мощности, развиваемой турбиной, от расхода пара газа и числа оборотов вала установки (рис. 26).

Известно, что в первом приближении мощность, развиваемая турбиной,

$$N_T = (rn - r'n^2) G_3, \quad (5,8)$$

где r и r' — констуктивные параметры.

Каждая кривая, представленная на рис. 26, соответствует определенному расходу средства генерации G_3 .

Располагая рассмотренными графиками $N_H(n)$ и $N_T(n, G_3)$, строим график баланса мощностей, для чего совмещаем оба графика на одном листе (рис. 27). Если задан расход средства генерации, то по точке пересечения кривых $N_H(n)$ и $N_T(n)$ находим параметры установившегося режима.

4. Генератор

В современных жидкостных реактивных двигателях применяют самые различные типы генераторов. Если генератор питается двумя компонентами топлива, то расчет его аналогичен расчету основной камеры. Перекисный генератор рассчитывается несколько проще. Характер расчета остается примерно одинаковым, будет ли перекись водорода (или другое унитарное топливо) подаваться под давлением сжатого газа или насосом. Рассмотрим расчет перекисного генератора с баллонной подачей перекиси (рис. 28). Отложим на графике давление в баке с перекисью водорода p_{63} . Если из значения давления p_{63} вычесть величину гидравлических потерь ph_3 , то для любого заданного расхода средства генерации легко найти давление в реакторе p_p .

Можно решить и обратную задачу. По уравнению

$$p_p = \frac{\sqrt{RT}}{a \sum \sigma_{кр}} G_3 \quad (5,9)$$

проводим прямую. При относительно низких температурах разложения перекиси водорода

$$\frac{\sqrt{RT}}{a} = \text{const.} \quad (5,10)$$

Точка пересечения рассмотренных линий определит рабочие параметры генератора.

1. Устойчивость процессов, протекающих в камере сгорания

Пусть точка a (рис. 29) определяет параметры установившегося режима. Рассмотрим окрестность этой точки и оценим устойчивость системы.

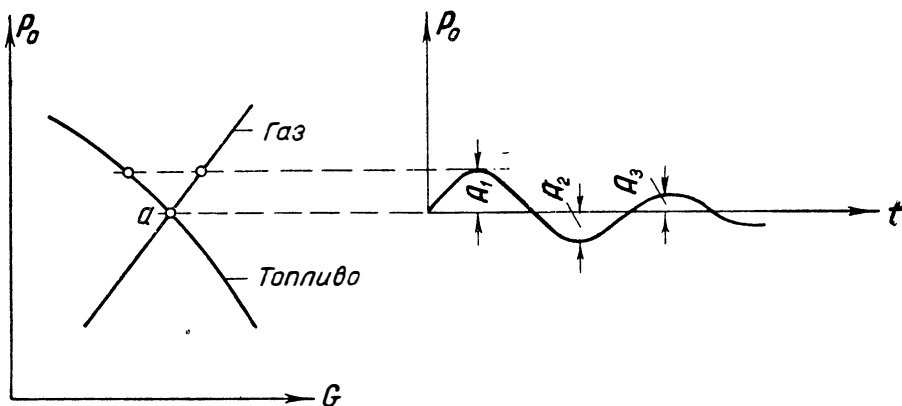


Рис. 29.

Допустим, что в какой-то момент времени под действием тех или иных факторов в камеру сгорания поступило некоторое избыточное количество топлива. В результате сгорания этой порции топлива произойдет повышение давления в камере и как следствие этого—уменьшение притока топлива в камеру. Однако при повышенном давлении в камере расход газа из камеры будет больше расчетного. Таким образом, при повышении давления в камере за счет сгорания дополнительной порции топлива произойдет одновременно и уменьшение притока топлива, и увеличение расхода газа. Это будет способствовать уменьшению давления в камере до расчетного значения. Таким образом, точка a является устойчивой.

К совершенно аналогичным выводам мы придем, если проследим процесс, вызванный не увеличением, а уменьшением притока топлива в камеру.

Рассмотрим теперь тот же процесс, но с учетом массовых сил и сил трения, действующих в системе. Пусть под действием возмущения давление в камере увеличилось на величину A_1 (см. рис. 29). В результате такого увеличения произойдет, как уже отмечалось, уменьшение притока топлива в камеру и увеличение расхода газа из сопла, а вследствие этого — уменьшение давления в камере.

При изменении давления в камере меняются как скорость топлива, поступающего в камеру, так и скорость газа, истекающего из камеры. В силу инерции движущихся жидкостей и газа величина давления в камере к некоторому моменту времени Δt окажется меньше номинальной на величину A_2 . Если бы в системе отсутствовали силы трения, то амплитуды A_1 , A_2 , A_3 и т. д. были бы равны между собой и наблюдались бы колебания давления, протекающие с постоянной амплитудой. Благодаря действию сил трения, возникших между жидкостями и стенками элементов коммуникаций, величина амплитуды каждой последующей полуволны будет меньше предыдущей; в системе имеют место собственные затухающие колебания.

Итак, если система «камера — гидравлическая цепь» получит возмущение, в результате которого давление в камере отклонится от своего номинального значения, то в окрестности точки a возникнут собственные затухающие колебания.

2. Устойчивость турбонасосной установки

Если отбросить из рассмотрения аномальные случаи, то система «камера — гидравлические цепи» (точка a на рис. 29) всегда устойчива. Неустойчивая работа этой системы возможна только при весьма глубоких отклонениях отношения K от номинала.

Несколько сложнее обстоит дело с турбонасосной установкой, которая в зависимости от характеристик ее агрегатов может быть как устойчива, так и неустойчива. Отметим, однако, что в подавляющем большинстве случаев система «турбина — насосы» является устойчивой и исследование сводится к определению степени устойчивости.

Рассмотрим баланс мощностей турбонасосной установки, турбина которой питается генератором с баллонной подачей перекиси водорода. При установившемся режиме параметры установки определяются точкой пересечения a (рис. 30). Допустим, что в силу тех или иных возмущений обороты вала турбонасосной установки увеличились до значения n_2 (см. правый график рисунка). При этом мощность, потребляемая насосами, окажется больше мощности, развиваемой турбиной. Поскольку мощность, потребляемая насосами, больше подводимой, то число оборотов вала турбонасосной установки уменьшится до номинального значения. Следовательно, установка устойчива.

Математически условия устойчивости турбонасосной установки в окрестности точки a можно записать так:

$$\left(\frac{\partial N_n}{\partial n} \right)_a > \left(\frac{\partial N_T}{\partial n} \right)_a . \quad (5,11)$$

Если

$$\left(\frac{\partial N_n}{\partial n}\right)_a < \left(\frac{\partial N_\tau}{\partial n}\right)_a, \quad (5,12)$$

что представлено на левом графике того же рисунка, то система неустойчива.

В самом деле, возмутим систему так, чтобы расчетные обороты n_1 увеличились до n_2 . При оборотах n_2 мощность, развиваемая турбиной, больше мощности, потребляемой насосами. Наличие свободной мощности приведет к дальнейшему увеличению числа оборотов вала турбонасосной установки.

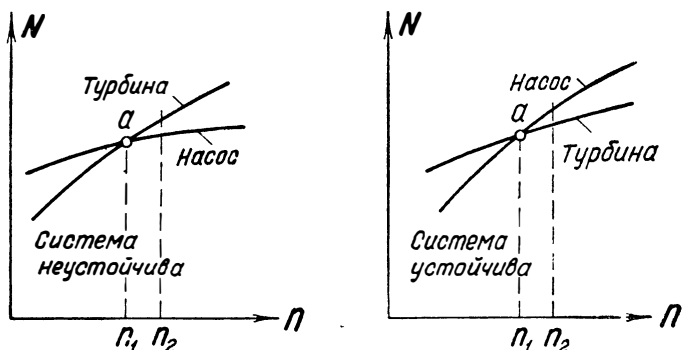


Рис. 30.

Если в результате нашего воздействия число оборотов будет уменьшено по сравнению с расчетным, то вследствие превышения мощности, потребляемой насосами, произойдет дальнейшее уменьшение числа оборотов вала установки.

Таким образом, рассмотренная система является неустойчивой.

Сравним устойчивость двух турбонасосных установок. Пусть турбина первой установки питается парогазом, получаемым в генераторе с баллонной подачей перекиси водорода, а турбина второй установки — парогазом, получаемым в генераторе с насосной подачей перекиси водорода. Баланс мощностей представлен на рис. 31. При баллонной подаче перекиси линия 1—1 представляет собой зависимость мощности, потребляемой насосами, от оборотов, а линии, отмеченные цифрами 3 — характеристики турбины. Каждая линия соответствует определенному расходу средства генерации. Если характеристика турбины представлена линией 3—IV, то устойчивость установки определится углом α . Рассмотрим теперь

насосную подачу перекиси. Мощность, потребляемая насосами, будет больше, чем в предыдущем случае, за счет мощности, потребляемой третьим, дополнительным насосом.

Теперь вместо линии 1—1 зависимость мощности, потребляемой тремя насосами, от оборотов вала установки, представится линией 2—2. Специальным расчетом генератора можно установить зависимость между числом оборотов насоса, подающего перекись, и расходом перекиси. Допустим, что при этом зависимость мощности турбины от оборотов будет представлена линией 4—4; тогда устойчивость установки определится углом β . Наклон линии 4—4 можно изменить, если гидравлическую цепь генератора снабдить регулятором, выполненным, например, в виде дроссельной заслонки, приводимой в

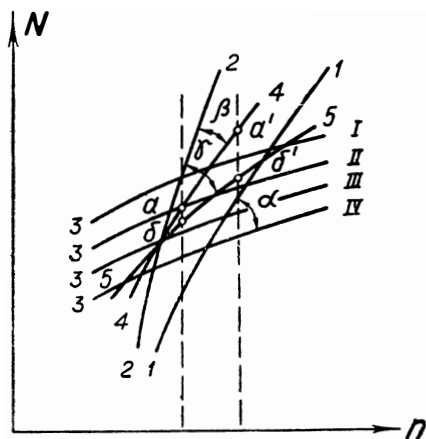


Рис. 31.

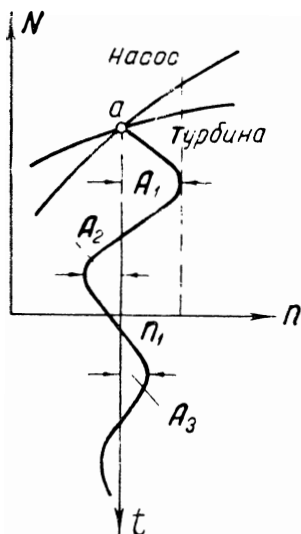


Рис. 32.

действие центральным регулятором. Линия 5—5 представляет собой зависимость мощности турбины от числа оборотов при насосной подаче в случае действия регулятора.

Возьмем точку a , соответствующую работе без регулятора. Если произвести дросселирование гидравлической цепи генератора путем поворота дросселя на некоторый угол, то расход перекиси водорода уменьшится; вместо точки a мощность турбины определится точкой b .

Если при больших оборотах без регулятора мощность турбины определится точкой a' , то вследствие еще большего поворота дросселя вместо точки a' мощность турбины определится точкой b' . Таким образом, угол β может быть увеличен до значения γ , что соответствует повышению устойчивости установки.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости турбонасосной установки с учетом массовых (инерционных) сил и сил трения (рис. 32). Под действием внешних факторов система выходит из состояния равновесия и расчетные обороты увеличиваются (или уменьшаются) на величину начальной амплитуды A_1 . Здесь $N_n - N_r$ есть величина положительная; число оборотов вала установки уменьшается. Поскольку рабочие колеса турбины и насосов обладают инерцией, обороты вала уменьшаются до величины, которая меньше расчетных значений оборотов.

Под действием сил трения (трение жидкостей и пара в прочной части, о диск в корпусе; трение механическое в уплотняющих устройствах и др.) происходит уменьшение амплитуды до величины A_2 . При оборотах, меньших, чем расчетные, вследствие превышения мощности турбины над мощностью насосов наблюдается разгон системы, который, в силу наличия маховых масс, заканчивается при оборотах $n > n_1$. Амплитуда A_3 , вследствие действия сил трения, меньше амплитуды A_2 .

Возможен и другой характер движения. Увеличим интенсивность сил трения. Пусть под действием внешних сил равновесие нарушается и начальная амплитуда A_1 будет такой же, как в предыдущем случае.

Если факторы, демпфирующие систему, действуют достаточно интенсивно, то вместо рассмотренных выше собственных затухающих колебаний будем наблюдать аperiodическое движение.

Таким образом, устойчивая точка a обуславливает затухающие колебания или аperiodическое движение в случае, если под действием тех или иных факторов система выводится из состояния равновесия.

Глава VI

ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРИКАМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ОТКЛОНЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Изучение двигателя при помощи современных измерительных приборов расширяет наши познания в отношении процессов, в нем протекающих. Чем разностороннее и обширнее ставится эксперимент, чем разнообразнее измерительная аппаратура, чем вдумчивее ведется обработка опыта, тем больше нового познает исследователь. Результаты своих исследований он может представить в математическом виде, совершенствуя уже имеющиеся фотографии представлений. Дифференциальные уравнения вследствие непрерывного уточнения усложняются, а это приводит к необходимости отыскивать новые методы анализа. Современные методы математического анализа позволяют решать любые задачи, но чем они сложнее, тем труднее достичь результата требуемой точности. Даже использование машинной техники не всегда обеспечивает достаточную быстроту или необходимую точность решения. Глубокое исследование сложных систем дифференциальных уравнений включает анализ частных случаев, решение отдельных математических и логических задач на машинах, использование метода численного интегрирования, изучение поведения параметров в окрестностях, качественный анализ, изучение начальных и граничных условий и т. д.

Таким образом, излагаемый в данной главе метод является одним из многих возможных; применение его должно сочетаться с использованием других методов, хорошо известных читателю.

§ 1. ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. ОТКЛОНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Исходной предпосылкой первого параграфа является следующая. Любое количество зависимых переменных можно представить в виде такого же количества независимых пере-

менных, если имеется возможность получить отклонения коэффициентов, число которых не меньше числа переменных.

Для пояснения метода рассмотрим сначала следующее алгебраическое уравнение:

$$y = ax + c. \quad (6,1)$$

График функции (6,1) показан на рис. 33. Пусть зависимые переменные x и y могут иметь отклонения $\Delta x \rightarrow dx$ и $\Delta y \rightarrow dy$. Допустим, что a и c также могут получить отклонения Δa и Δc , причем $\Delta a \rightarrow da$ и $\Delta c \rightarrow dc$.

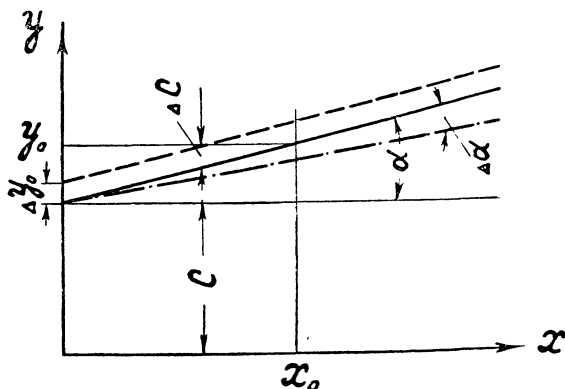


Рис. 33.

В малых отклонениях (6,1) запишется так:

$$\Delta y = a \Delta x + x \Delta a + \Delta c. \quad (6,2)$$

Пусть будет выбрано некоторое фиксированное значение $x = x_0$. Если a и c заданы (см. рис. 33), то x_0 соответствует одно значение y_0 . Если же a и c могут принимать различные значения, иначе говоря, если для a и c возможны отклонения Δa и Δc , то для Δy будем иметь

$$\Delta y = x_0 \Delta a + \Delta c, \quad (6,3)$$

поскольку при фиксированном x_0 отклонение Δx равно нулю.

Очевидно, что x_0 может быть выбран любым, не зависящим от y_0 , поскольку путем подбора Δa и Δc всегда можно обеспечить любое Δy , а следовательно, и любое y_0 ; x и Δy являются независимыми переменными. Для изменения Δy достаточно изменить a или c . Если принять фиксированное значение y_0 , то можно будет показать, что v и Δx являются независимыми переменными. Для измене-

вия Δx достаточно изменить или a или c . Изложенное иллюстрируем схемой

$$\left. \begin{array}{l} x - - - \Delta x (\Delta a, \Delta c) \\ | \qquad \qquad | \\ y - - - \Delta y (\Delta c, \Delta a), \end{array} \right\} \quad (6,4)$$

которая читается следующим образом.

Пусть даны зависимые переменные x и y . Отклонения Δx и Δy будут независимыми переменными, если теперь новым независимым переменным (отклонениям) соответствуют коэффициенты (a и c), которые могут получать отклонения (Δa и Δc). Поскольку можно выбирать дельту любого коэффициента, число вариантов решений равно числу коэффициентов, получающих отклонения. Следовательно, в рассматриваемом случае имеется два решения.

В первом решении независимость Δx обеспечивается изменением a , а независимость Δy — изменением c ; во втором случае независимость Δx достигается изменением c , а независимость Δy — изменением a . В более общем виде: задано N зависимых переменных. Переходя к отклонениям, получаем систему с $n = N$ независимыми переменными, если имеется возможность получить $m = n$ отклонений $M = N$ коэффициентов; общее число решений $K = m$.

Изложенное иллюстрирует схема:

$$\left. \begin{array}{l} x - - - \Delta x (\Delta a, \Delta b, \Delta c) \\ | \qquad \qquad | \\ y - - - \Delta y (\Delta b, \Delta c, \Delta a) \\ | \qquad \qquad | \\ z - - - \Delta z (\Delta c, \Delta a, \Delta b) \end{array} \right\} \quad (6,5)$$

Таким образом, при переходе от заданных уравнений к уравнениям в отклонениях зависимые переменные заменяются независимыми, поскольку вместо прежней непрерывной функциональной связи рассматриваются новые закономерности окрестности выбранных значений координат и момента времени.

Пусть теперь вместо алгебраического уравнения (6,1) предложено дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = ax + c. \quad (6,6)$$

Покажем, что отклонения

$$\Delta x \rightarrow dx \quad \text{и} \quad \dot{\Delta x} \rightarrow dx$$

независимы, если для коэффициентов a и c возможны отклонения

$$\Delta a \rightarrow da \text{ и } \Delta c \rightarrow dc.$$

График функции (6,6) представлен на рис. 34.

В отклонениях дифференциальное уравнение (6,6) запишется так:

$$\Delta \dot{x} = a \Delta x + x \Delta a + \Delta c. \quad (6,7)$$

Если задано фиксированное значение x_0 , то уравнение (6,7) примет вид

$$\Delta \dot{x} = x_0 \Delta a + \Delta c. \quad (6,8)$$

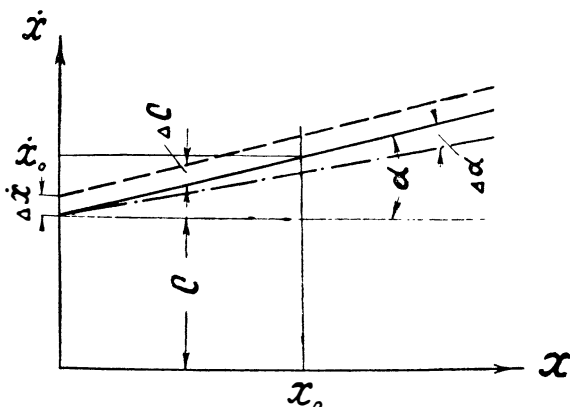


Рис. 34.

Схема запишется следующим образом:

$$\begin{array}{l} \dot{x} - - - \Delta \dot{x} (\Delta a, \Delta c) \\ | \\ x - - - \Delta x (\Delta c, \Delta a). \end{array} \quad (6,9)$$

Очевидно, что отклонение функции Δx не будет зависеть от отклонения производной $\Delta \dot{x}$, если имеется возможность ввести отклонения Δa и Δc для коэффициентов a и c .

Формулы типа (6,7) назовем аналитическими формулами для заданной функциональной зависимости типа (6,6). Аналитические формулы целесообразно использовать в тех случаях, когда для заданной функциональной зависимости трудно или невозможно получить решение в удобном для анализа виде или когда имеется решение для некоторого режима и требуется обследовать поведение параметров в окрестности.

Пусть будет, например, задано уравнение

$$\dot{x} + ax - c = 0. \quad (6,10)$$

Решение имеет вид

$$x = \frac{c}{a} (1 - e^{-at}). \quad (6,11)$$

Взяв производную, получим

$$\dot{x} = ce^{-at}. \quad (6,12)$$

Используя (6,11) и (6,12), легко установить связь между отклонением функции и отклонением производной. Однако эту задачу легче решить прямо по аналитической формуле

$$\Delta x = \frac{-\Delta \dot{x} - x \Delta a + \Delta c}{a}. \quad (6,13)$$

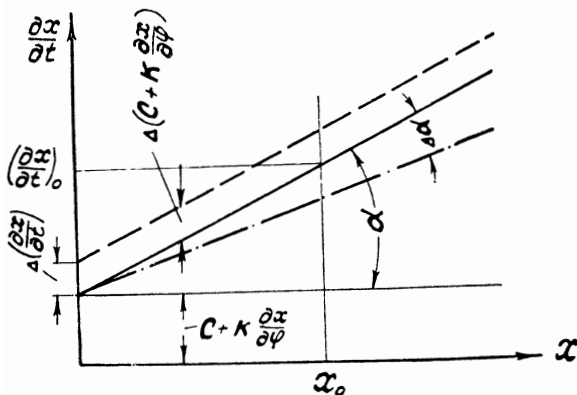


Рис. 35.

Если же взять уравнение

$$\dot{x} + ax - c = a^x, \quad (6,14)$$

то подобного рода анализ первым методом, т. е. по решению, провести трудно, а наличие аналитической формулы

$$\Delta x = \frac{-\Delta \dot{x} - x(1 - a^{x-1}) \Delta a + \Delta c}{a - a^x \ln a} \quad (6,15)$$

быстро приводит к решению.

Перейдем к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных. Возьмем для примера такое уравнение:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = ax + \left(c + k \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right). \quad (6,16)$$

В отклонениях (рис. 35) будем иметь

$$\Delta \frac{\partial x}{\partial t} = a \Delta x + x \Delta a + \Delta \left(c + k \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right). \quad (6,17)$$

В окрестности x_0 уравнение (6,17) запишется так:

$$\Delta \frac{\partial x}{\partial t} = x_0 \Delta a + \Delta \left(c + k \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right). \quad (6,18)$$

Дополнительно к прежним условиям вводится следующая связь между отклонениями:

$$\Delta \left(c + k \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = \Delta c + k \Delta \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta k. \quad (6,19)$$

Отклонение $\Delta \left(c + k \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)$ достигается, как следует из (6,19), одним из трех способов; однако в отношении $\frac{\partial x}{\partial t}$ все три способа воздействия эквивалентны.

Приведем некоторые примеры анализа уравнения в частных производных. Допустим, что заданное уравнение записывается так:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} W + ax - c = 0. \quad (6,20)$$

Аналитическая формула примет вид

$$\Delta \frac{\partial x}{\partial t} + W \Delta \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta W + a \Delta x + x \Delta a - \Delta c = 0. \quad (6,21)$$

Далее будем писать

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x_t; \quad (6,22)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = x_\varphi. \quad (6,23)$$

Для определения влияния различных отклонений на отклонение функции аналитическую формулу запишем

$$\Delta x = \frac{-\Delta x_t - W \Delta x_\varphi - x_\varphi \Delta W - x \Delta a + \Delta c}{a}. \quad (6,24)$$

Если коэффициенты уравнений отклонений не получают, то

$$\Delta x = \frac{-\Delta x_t - W \Delta x_\varphi - x_\varphi \Delta W}{a}. \quad (6,25)$$

При помощи формулы (6,25) сразу находим, что отклонение функции в a раз меньше отклонения производной по t

$$\Delta x = - \frac{\Delta x_t}{a}; \quad (6,26)$$

далее находим связь между отклонением функции и ее производной по φ

$$\Delta x = - \frac{W}{a} \Delta x_\varphi. \quad (6,27)$$

Если на отклонение функции влияет только отклонение скорости, то

$$\Delta x = - \frac{x_{\varphi}}{a} \Delta W. \quad (6,28)$$

Пусть теперь для коэффициентов a и c возможны отклонения. Задачу можно рассматривать или для заданного момента времени, или для заданных значений координат.

Рассмотрим заданный момент времени. Здесь x_t должно быть задано и может быть отлично от нуля, но $\Delta x_t = 0$. Вместо (6,24) для таких задач, именуемых задачами первого рода, будем иметь

$$\Delta x = \frac{-W \Delta x_{\varphi} - x_{\varphi} \Delta W - x \Delta a + \Delta c}{a}. \quad (6,29)$$

В любой момент времени, но для заданного сечения, т. е. в задачах, которые будем называть задачами второго рода,

$$\Delta x = \frac{-\Delta x_t - x_{\varphi} \Delta W - x \Delta a + \Delta c}{a}. \quad (6,30)$$

Пусть необходимо, не изменяя значения функции и скорости, изменить производную по времени. Это можно сделать путем изменения коэффициента a или c . Задача относится к задачам второго рода. Воспользовавшись выражением (6,30), получим

$$\frac{\Delta x_t + x \Delta a - \Delta c}{a} = 0. \quad (6,31)$$

Если на производную воздействовать только через коэффициент a , то

$$\Delta x_t = -x \Delta a. \quad (6,32)$$

Воздействие только через c приводит к результату

$$\Delta x_t = \Delta c. \quad (6,33)$$

При постоянных значениях a и c

$$\Delta x_t = 0. \quad (6,34)$$

Производная остается прежней и в случае

$$x \Delta a = \Delta c. \quad (6,35)$$

Теперь проследим, как изменится функция, если производные не будут иметь отклонений. В таких задачах, именуемых задачами третьего рода, исходная формула примет вид

$$\Delta x = \frac{-x_{\varphi} \Delta W - x \Delta a + \Delta c}{a}. \quad (6,36)$$

Используя формулу (6,36), находим три эквивалентных воздействия:

$$x_{\varphi} \Delta W = x \Delta a = -\Delta c. \quad (6,37)$$

Если изменение скорости является следствием воздействия на функцию, то отклонения коэффициентов влияют на отклонение комплекса

$$a\Delta x + x_{\varphi} \Delta W. \quad (6,38)$$

В рассматриваемом случае отклонение комплекса определяется отклонением коэффициентов:

$$-x \Delta a + \Delta c. \quad (6,39)$$

Если $x \Delta a = \Delta c$, то имеет место или нулевое решение, или действует соотношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta W} = -\frac{x_{\varphi}}{a}. \quad (6,40)$$

§ 2. ОТКЛОНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. УМЕНЬШЕНИЕ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ

Метод отклонений позволяет проводить качественный анализ систем дифференциальных уравнений в частных производных. При рассмотрении процессов в окрестности вместо переменных и их производных рассматриваются отклонения, которые являются независимыми переменными, если имеется возможность получить отклонения коэффициентов. Систему с независимыми переменными всегда можно разбить на ряд систем, включающих в себя меньшее число уравнений. Такие упрощенные системы будут соответствовать системе дифференциальных уравнений, порядок которой окажется меньше порядка первоначальной, исходной системы.

Пусть задана система i уравнений, содержащая k независимых переменных в отклонениях (Δx_k) и столько же коэффициентов, представленных также в отклонениях (Δa_{ik}) :

$$\sum_1^k a_{ik} \Delta x_k = \sum_1^k A_{ik} \Delta a_{ik}, \quad i = k. \quad (6,41)$$

Допустим, что, используя систему (6,41), требуется определить n переменных, причем $n < k$. Для решения задачи систему (6,41) разделим на две части, на две системы.

Левые части n уравнений первой системы должны содержать n переменных, а $k-n$ переменных, входящих в эти n уравнений, должны быть переписаны в правые части с обратными знаками:

$$\sum_1^n a_{ik} \Delta x_k = \sum_1^k A_{ik} \Delta a_{ik} - \sum_{n+1}^k a_{ik} \Delta x_k, \quad i = n; \quad n < k. \quad (6,42)$$

Считаем, что коэффициенты a_{ik} и A_{ik} известны.

Ориентируясь на условия исследования, задаемся всеми Δa_{ik} и теми Δx_k , в количестве $k-n$, которые входят в пра-

вые части (6,42). Решая систему, находим те Δx_k в количестве n , которые входят в левые части уравнений системы (6,42). Найденное решение является частным и соответствует наложенным на систему условиям. Чтобы эти условия были оправданы, необходимо удовлетворить и остальные $k - n$ уравнений исходной системы (6,41). Вторая система запишется так:

$$\sum_1^k a_{ik} \Delta x_k = \sum_1^k A_{ik} \Delta a_{ik}, \quad i = k - n \quad (6,43)$$

или

$$\sum_1^n a_{ik} \Delta x_k + \sum_{n+1}^k a_{ik} \Delta x_k = \sum_1^k A_{ik} \Delta a_{ik}, \quad i = k - n. \quad (6,44)$$

Отклонения Δx_k , входящие под знак первой суммы, определены по системе (6,42), а отклонения Δx_k , входящие под знак второй суммы, были нами назначены при подсчете правых частей уравнений (6,42). Таким образом, каждое уравнение (6,44) используем для определения Δa_{ik} так, чтобы под каждым знаком суммы правых частей (6,44) было хотя бы по одному искомому отклонению Δa_{ik} . Эта операция должна решаться с учетом конкретной специфики исследования.

Если теперь вернуться к исходной системе (6,41), то окажется, что она решена, но только для частного случая, который соответствует принятым в (6,42) и полученным при решении (6,44) значениям Δa_{ik} .

Для иллюстрации изложенного рассмотрим систему пяти уравнений в отклонениях, которую запишем так:

$$\sum_1^k a_{ik} \Delta x_k = \sum_1^k A_{ik} \Delta a_{ik}, \quad i = k = 5. \quad (6,45)$$

Разобьем систему (6,45) на две: первая будет включать в себя два уравнения и предназначаться для определения Δx_1 и Δx_2 , а вторая, содержащая три уравнения, позволит оправдать условия, накладываемые на первую систему.

Первую систему запишем так:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \Delta x_1 + a_{12} \Delta x_2 &= \sum A_{1k} \Delta a_{1k} - a_{13} \Delta x_3 - a_{14} \Delta x_4 - a_{15} \Delta x_5 \\ a_{21} \Delta x_1 + a_{22} \Delta x_2 &= \sum A_{2k} \Delta a_{2k} - a_{23} \Delta x_3 - a_{24} \Delta x_4 - a_{25} \Delta x_5 \end{aligned} \right\} \quad (6,46)$$

Чтобы определить Δx_1 и Δx_2 , задаемся численными значениями правых частей. Для этого, ориентируясь на условия конкретной задачи, следует назначить в виде численных

значений отклонения $\Delta x_3, \Delta x_4, \Delta x_5$. Также с учетом конкретных возможностей суммы $\sum A_{1k} \Delta a_{1k}$ и $\sum A_{2k} \Delta a_{2k}$ задаются в виде чисел. Теперь правые части (6,46) суть числа, и определить Δx_1 и Δx_2 не представляет труда.

Вторую систему запишем так:

$$\left. \begin{aligned} a_{31} \Delta x_1 + a_{32} \Delta x_2 + a_{33} \Delta x_3 + a_{34} \Delta x_4 + a_{35} \Delta x_5 &= \sum A_{3k} \Delta a_{3k} \\ a_{41} \Delta x_1 + a_{42} \Delta x_2 + a_{43} \Delta x_3 + a_{44} \Delta x_4 + a_{45} \Delta x_5 &= \sum A_{4k} \Delta a_{4k} \\ a_{51} \Delta x_1 + a_{52} \Delta x_2 + a_{53} \Delta x_3 + a_{54} \Delta x_4 + a_{55} \Delta x_5 &= \sum A_{5k} \Delta a_{5k} \end{aligned} \right\} (6,47)$$

В левых частях уравнений этой системы все Δx_k известны, поэтому подсчитываем требуемые значения правых частей. Учитывая имеющиеся возможности для каждого уравнения, выбираем по одному или по несколько Δa_{ik} , а по найденным требуемым значениям определяем их. Теперь исходная система (6,45) решена.

При решении некоторых задач часто оказывается удобным ряд Δx_k назначать равными нулю. Полученное решение носит, как уже отмечалось, частный характер и устанавливает связь между отклонениями коэффициентов и отклонениями независимых переменных.

Рассмотренная методика применима для исследования процессов во многих случаях, в том числе и в тех, для которых формулируется примерно следующая целевая установка.

Из общего числа параметров (независимых переменных) отбираются некоторые, отклонения которых должны быть вполне определенными ($\Delta x > 0$; $\Delta x < 0$; $\Delta x = 0$). Требуется найти необходимые воздействия на коэффициенты и определить поведение остальных параметров.

Рассмотрим применение метода для анализа дифференциальных уравнений в частных производных.

В § 1 было показано, что отклонение функции и отклонения ее производных являются независимыми переменными, если имеется возможность получить отклонения коэффициентов.

Если в исходной замкнутой системе i уравнений было k неизвестных (функций), для каждой из которых имелись производные по s аргументам, то система в отклонениях будет содержать $m = k(1 + s)$ независимых переменных.

Исходная система в отклонениях запишется так:

$$\sum_1^k a_{ik} \Delta x_k + \sum_1^{ks} a_{is} \Delta \frac{\partial x_k}{\partial \varphi_s} = \sum_1^k A_{ik} \Delta a_{ik}, \quad i = k. \quad (6,48)$$

С точки зрения решения системы (6,48) отклонения функций и отклонения производных равноценны; обозначая их общим символом Δx_m , получим вместо (6,48) .

$$\sum_1^m a_{im} \Delta x_m = \sum_1^k A_{ik} \Delta a_{ik}, \quad i = k; \quad m > k. \quad (6,49)$$

Поскольку $m > k = i$, т. е. поскольку число неизвестных больше числа уравнений, решается система (6,49) только тогда, когда $m - k = s$ неизвестными можно задаться.

Собирая подлежащие определению неизвестные под знак первой суммы, а неизвестные, значениями которых следует задаться, под знак другой суммы и перенося их в правые части уравнений с обратными знаками, получим

$$\sum_1^k a_{im} \Delta x_m = \sum_1^k A_{ik} \Delta a_{ik} - \sum_{k+1}^m a_{im} \Delta x_m, \quad i = k; \quad m > k. \quad (6,50)$$

Если требуется определить $n < k$ отклонений, то рекомендуется придерживаться метода, изложенного применительно к системам алгебраических уравнений.

Для иллюстрации рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений в частных производных. Рассматривая процессы в окрестности, ограничиваются одним аргументом. Пусть в нашем примере частные производные по координатам будут приняты равными нулю. Систему уравнений в отклонениях будем писать по схеме (6,50). Если отклонения производных заданы и требуется определить отклонения функций, то (6,50) удобно записать так:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \Delta x_1 + a_{12} \Delta x_2 &= \sum_1^4 A_{1k} \Delta a_{1k} - a_{13} \Delta \frac{\partial x_1}{\partial t} - a_{14} \Delta \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ a_{21} \Delta x_1 + a_{22} \Delta x_2 &= \sum_1^4 A_{2k} \Delta a_{2k} - a_{23} \Delta \frac{\partial x_1}{\partial t} - a_{24} \Delta \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{aligned} \right\}, \quad (6,51)$$

где

$$\sum_1^4 A_{1k} \Delta a_{1k} = A_{11} \Delta a_{11} + A_{12} \Delta a_{12} + A_{13} \Delta a_{13} + A_{14} \Delta a_{14}; \quad (6,52)$$

$$\sum_1^4 A_{2k} \Delta a_{2k} = A_{21} \Delta a_{21} + A_{22} \Delta a_{22} + A_{23} \Delta a_{23} + A_{24} \Delta a_{24}. \quad (6,53)$$

Решение (6,51) зависит от численных значений (6,52) и (6,53). В качественном анализе может быть оговорен только знак, отношение или другие особенности сумм.

В других случаях могут быть заданы отклонения функций; для определения отклонений производных вместо (6,51) следует написать

$$\left. \begin{aligned} a_{13}\Delta \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{14}\Delta \frac{\partial x_2}{\partial t} &= \sum_1^4 A_{1k}\Delta a_{1k} - a_{11}\Delta x_1 - a_{12}\Delta x_2 \\ a_{23}\Delta \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{24}\Delta \frac{\partial x_2}{\partial t} &= \sum_1^4 A_{2k}\Delta a_{2k} - a_{21}\Delta x_1 - a_{22}\Delta x_2 \end{aligned} \right\} \quad (6,54)$$

Определение отклонений одной функции и ее производной по отклонениям другой функции и ее производной производится по уравнениям, записанным так:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\Delta x_1 + a_{13}\Delta \frac{\partial x_1}{\partial t} &= \sum_1^4 A_{1k}\Delta a_{1k} - a_{12}\Delta x_2 - a_{14}\Delta \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ a_{21}\Delta x_1 + a_{23}\Delta \frac{\partial x_1}{\partial t} &= \sum_1^4 A_{2k}\Delta a_{2k} - a_{22}\Delta x_2 - a_{24}\Delta \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (6,55)$$

Решение систем (6,51), (6,54) и (6,55) производится при помощи определителей. Рассмотрим уравнение (6,55). Поскольку правые части уравнений заданы, то (6,55) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\Delta x_1 + a_{13}\Delta \frac{\partial x_1}{\partial t} &= C_1 \\ a_{21}\Delta x_1 + a_{23}\Delta \frac{\partial x_1}{\partial t} &= C_2 \end{aligned} \right\} \quad (6,56)$$

Очевидно, что

$$\Delta x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad (6,57)$$

$$\Delta \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{D_2}{D}. \quad (6,58)$$

Главный определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}. \quad (6,59)$$

Дополнительные определители

$$D_1 = \begin{vmatrix} C_1 & a_{13} \\ C_2 & a_{23} \end{vmatrix}; \quad (6,60)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & C_1 \\ a_{21} & C_2 \end{vmatrix}. \quad (6,61)$$

§ 3. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕССЫ В КАМЕРЕ СГОРАНИЯ

В главе I были рассмотрены уравнения, описывающие процессы, протекающие в камере сгорания. Эти уравнения могут быть исследованы при помощи метода, изложенного в предыдущих параграфах данной главы. Если позволяют условия исследования, то уравнения упрощаются и число их сокращается.

При определенных условиях в одномерном потоке процессы в камере описываются системой трех уравнений. В качестве первого уравнения привлекается уравнение закона сохранения массы в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \left(1 - \sqrt{\Pi}\right) + \frac{\partial (\rho W)}{\partial x} - \frac{1}{g\rho_{ж}} \cdot \frac{\partial \left(\rho \frac{W}{C}\right)}{\partial x} K - \frac{\rho}{g\rho_{ж}} \cdot \frac{W}{C} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} - \Omega = 0. \quad (6,62)$$

Вторым уравнением является уравнение закона сохранения энергии

$$g\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} W\right) - gRT \frac{\partial \rho}{\partial t} - gR\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho W \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} W\right) - g \left(RT + q \frac{\rho}{1 - \sqrt{\Pi}}\right) \Omega - \frac{g\rho}{1 - \sqrt{\Pi}} \left(\Sigma \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \mu \Phi\right) + xW + \mu MW = 0. \quad (6,63)$$

Третье — уравнение второго закона Ньютона — записывается так:

$$\tau \left[\rho \dot{V} - gR \frac{\partial (\rho T)}{\partial x} + \frac{3}{4} a\rho \frac{(W-C)^2}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}} + \mu M \right] \times \times (1 - \epsilon_x) - \rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} W\right) (1 - \sqrt{\Pi}) = 0. \quad (6,64)$$

В этих уравнениях обозначено:

$$\Omega = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial K}{\partial x}; \quad (6,65)$$

$$K = \frac{G}{\sigma}; \quad (6,66)$$

$$\Pi = \left(\epsilon_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} dx\right) \epsilon_r \epsilon_\varphi, \quad (6,67)$$

где σ — площадь сечения камеры.

Будем рассматривать отклонения следующих параметров:

$$W, \frac{\partial W}{\partial t}, \frac{\partial W}{\partial x}, \rho, \frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial x}, \varepsilon, \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, C, \\ \frac{\partial C}{\partial x}, G, \frac{\partial G}{\partial x}, \Omega.$$

Поскольку задана система трех уравнений, то, используя ее, можно определить влияние любых отклонений на три любых параметра. В качестве неизвестных можно выбирать:

$$\Delta W, \Delta \rho, \Delta T,$$

или

$$\Delta \frac{\partial W}{\partial t}, \Delta \frac{\partial \rho}{\partial t}, \Delta \frac{\partial T}{\partial t},$$

или

$$\Delta \frac{\partial W}{\partial x}, \Delta \frac{\partial \rho}{\partial x}, \Delta \frac{\partial T}{\partial x},$$

или другие неизвестные.

Из общего числа отклонений, не вошедших в число трех неизвестных, выбираем любые, которые представляют воздействия на систему. Задача решается относительно любой из трех неизвестных. Если, например, неизвестными являются

$$\Delta W, \Delta \rho \text{ и } \Delta T,$$

а в качестве воздействия выбрано ΔC , то можно найти:

$$\Delta W = f_W(\Delta C),$$

или

$$\Delta \rho = f_\rho(\Delta C),$$

или

$$\Delta T = f_T(\Delta C).$$

Если уравнения (6,62), (6,63) и (6,64) записать в отклонениях, то получим

$$\sum a_{im} \Delta x_m = 0, \quad i=3. \quad (6,68)$$

Если число неизвестных $k = i$, а $m > k$, то

$$\sum a_{ik} \Delta x_k + \sum a_{im} \Delta x_m = 0, \quad i = k; \quad m > k. \quad (6,69)$$

Для (6,62), (6,63) и (6,64) уравнения в отклонениях по типу (6,68) запишутся так:

$$a_{i1} \Delta W + a_{i2} \Delta \frac{\partial W}{\partial x} + a_{i3} \Delta \frac{\partial W}{\partial t} + a_{i4} \Delta \rho + a_{i5} \Delta \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\ + a_{i6} \Delta \frac{\partial \rho}{\partial t} + a_{i7} \Delta T + a_{i8} \Delta \frac{\partial T}{\partial x} + a_{i9} \Delta \frac{\partial T}{\partial t} + a_{i10} \Delta \varepsilon_x + \\ + a_{i11} \Delta C + a_{i12} \Delta G + a_{i13} \Delta \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + a_{i14} \Delta \frac{\partial C}{\partial x} + \\ + (a_{i15} \Delta \frac{\partial G}{\partial x} + a_{i16} \Delta \Omega) = 0, \quad (6,70)$$

где $i=1$ соответствует (6,62); $i=2$ — (6,63) и $i=3$ — (6,64).

Если в качестве неизвестных выбрать ΔW , $\Delta \rho$, ΔT , то вместо (6,70) систему по типу (6,69) запишем так:

$$a_{i1}\Delta W + a_{i2}\Delta \rho + a_{i3}\Delta T = V_i, \quad i=1, 2, 3, \quad (6,71)$$

где

$$V_i = - \sum a_{im} \Delta x_m = - a_{i4} \Delta \frac{\partial W}{\partial x} - a_{i5} \Delta \frac{\partial \rho}{\partial x} - \dots \quad (6,72)$$

Чтобы решить систему (6,71), следует найти главный и дополнительные определители. Очевидно, что:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad (6,73)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -V_1 & a_{12} & a_{13} \\ -V_2 & a_{22} & a_{23} \\ -V_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad (6,74)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -V_1 & a_{13} \\ a_{21} & -V_2 & a_{23} \\ a_{31} & -V_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad (6,75)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -V_1 \\ a_{21} & a_{22} & -V_2 \\ a_{31} & a_{32} & -V_3 \end{vmatrix}. \quad (6,76)$$

Решения запишутся так:

$$\Delta W = \frac{D_1}{D}; \quad (6,77)$$

$$\Delta \rho = \frac{D_2}{D}; \quad (6,78)$$

$$\Delta T = \frac{D_3}{D}. \quad (6,79)$$

Ориентируясь на исходные уравнения (6,62), (6,63) и (6,64), для определения коэффициентов будем иметь:

$$a_{11} = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{K}{g\rho_{ж}C} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{K\rho}{g\rho_{ж}C^2} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\rho}{g\rho_{ж}C} \cdot \frac{\partial K}{\partial x}; \quad (6,80)$$

$$a_{12} = \rho \left(1 - \frac{K}{g\rho_{ж}C} \right); \quad (6,81)$$

$$a_{13} = 0; \quad (6,82)$$

$$a_{14} = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{K}{g\rho_{ж}C} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{KW}{g\rho_{ж}C^2} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{W}{g\rho_{ж}C} \cdot \frac{\partial K}{\partial x}; \quad (6,83)$$

$$a_{15} = W \left(1 - \frac{K}{g\rho_{ж}C} \right); \quad (6,84)$$

$$a_{16} = 1 - \gamma \overline{\Pi}; \quad (6,85)$$

$$a_{17} = 0; \quad (6,86)$$

$$a_{18} = 0; \quad (6,87)$$

$$a_{19} = 0; \quad (6,88)$$

$$a_{110} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \frac{\varepsilon_r \varepsilon_\varphi}{2 \sqrt{\Pi}}; \quad (6,89)$$

$$a_{111} = \frac{1}{g\rho_{ж}C^2} \left[K \frac{\partial (\rho W)}{\partial x} - W \rho \left(2 \frac{K}{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} \right) \right]; \quad (6,90)$$

$$a_{112} = - \frac{1}{g\rho_{ж}^2} \cdot \frac{\partial \left(\rho \frac{W}{C} \right)}{\partial x}; \quad (6,91)$$

$$a_{113} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \frac{\varepsilon_r \varepsilon_\varphi}{4 \sqrt{\Pi}} \Delta x; \quad (6,92)$$

$$a_{114} = \frac{\rho W}{g\rho_{ж}C^2} K; \quad (6,93)$$

$$a_{115} = - \frac{\rho}{g\rho_{ж}^2} \cdot \frac{W}{C} - \frac{1}{g\sigma}; \quad (6,94)$$

$$a_{116} = -1; \quad (6,95)$$

$$a_{21} = g\rho c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} + 2W \frac{\partial W}{\partial x} \right) + x + \mu M; \quad (6,96)$$

$$a_{22} = \rho W^2; \quad (6,97)$$

$$a_{23} = \rho W; \quad (6,98)$$

$$a_{24} = g \left[\frac{\partial T}{\partial t} (c_p - R) + c_p W \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\lambda}{1 - \sqrt{\Pi}} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - q \frac{1}{1 - \sqrt{\Pi}} \Omega - \frac{\mu \Phi}{1 - \sqrt{\Pi}} \right] + W \left(\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial x} \right); \quad (6,99)$$

$$a_{25} = 0; \quad (6,100)$$

$$a_{26} = -gRT; \quad (6,101)$$

$$a_{27} = -gR \frac{\partial \rho}{\partial t} - R \frac{\partial K}{\partial x}; \quad (6,102)$$

$$a_{28} = g\rho c_p W; \quad (6,103)$$

$$a_{29} = g\rho (c_p - R); \quad (6,104)$$

$$a_{210} = \frac{-g\rho \left(q^\Omega + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu \Phi \right) \varepsilon_r \varepsilon_z}{2 \sqrt{\bar{\Pi}} (1 - \sqrt{\bar{\Pi}})^2}; \quad (6,105)$$

$$a_{211} = 0; \quad (6,106)$$

$$a_{212} = 0; \quad (6,107)$$

$$a_{213} = \frac{g\rho \left(q^\Omega + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu \Phi \right) \varepsilon_r \varepsilon_\varphi}{4 \sqrt{\bar{\Pi}} (1 - \sqrt{\bar{\Pi}})^2} \Delta x; \quad (6,108)$$

$$a_{214} = 0; \quad (6,109)$$

$$a_{215} = \frac{1}{\sigma} \left(RT + \frac{q\rho}{1 - \sqrt{\bar{\Pi}}} \right); \quad (6,110)$$

$$a_{216} = -g \left(RT + q \frac{\rho}{1 - \sqrt{\bar{\Pi}}} \right); \quad (6,111)$$

$$a_{31} = \frac{3}{2} \tau (1 - \varepsilon_x) \frac{a\rho}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}} (W - C) - \rho \frac{\partial W}{\partial x} (1 - \sqrt{\bar{\Pi}}); \quad (6,112)$$

$$a_{32} = -\rho W (1 - \sqrt{\bar{\Pi}}); \quad (6,113)$$

$$a_{33} = -\rho (1 - \sqrt{\bar{\Pi}}); \quad (6,114)$$

$$a_{34} = \tau \dot{V} (1 - \varepsilon_x) + \frac{3}{4} \tau (1 - \varepsilon_x) \frac{a(W - C)^2}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}} - \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} W \right) (1 - \sqrt{\bar{\Pi}}) - \tau (1 - \varepsilon_x) gR \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (6,115)$$

$$a_{35} = -\tau gRT (1 - \varepsilon_x); \quad (6,116)$$

$$a_{36} = 0; \quad (6,117)$$

$$a_{37} = -\tau (1 - \varepsilon_x) gR \frac{\partial \rho}{\partial x}; \quad (6,118)$$

$$a_{38} = -\tau (1 - \varepsilon_x) g\rho R; \quad (6,119)$$

$$a_{39} = 0; \quad (6,120)$$

$$a_{310} = \tau \left[gR \frac{\partial(\rho T)}{\partial x} - \frac{3}{4} a\rho \frac{(W - C)^2}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}} - \rho \dot{V} - \mu M \right] - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} W \right) \frac{\varepsilon_r \varepsilon_\varphi}{\sqrt{\bar{\Pi}}}; \quad (6,121)$$

$$a_{311} = -\frac{3}{2} a\rho \frac{\tau(1 - \varepsilon_x)}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}} (W - C); \quad (6,122)$$

$$a_{312} = 0; \quad (6,123)$$

$$a_{313} = \frac{1}{4} \rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} W \right) \frac{\varepsilon_r \varepsilon_z}{V \Pi} \Delta x; \quad (6,124)$$

$$a_{314} = 0; \quad (6,125)$$

$$a_{315} = 0; \quad (6,126)$$

$$a_{316} = 0. \quad (6,127)$$

После преобразований для одномерного потока в предположении, что локальная производная принимается равной нулю, получим:

$$\Delta W = \left[\frac{W}{C} \cdot \frac{E_0}{A_0} \right]_* \Delta C; \quad (6,128)$$

$$\Delta W' = \left[\frac{W}{C} \cdot \frac{1}{A_0} \right]_* \Delta C'; \quad (6,129)$$

$$\Delta W = \left[\frac{W}{G} \cdot \frac{1}{A_0} \left(\frac{C'}{C} - \frac{W'}{W} - \frac{\rho'}{\rho} \right) \right]_* \Delta G. \quad (6,130)$$

Штрихом обозначена производная по x . Звездочка означает окрестность. Аналогично рассматриваемым могут быть получены и другие решения. Коэффициенты, входящие в решения:

$$A_0 = [A_1 - A_2 B_0]_*; \quad (6,131)$$

$$B_0 = \left[\frac{W}{\rho} \left(\frac{B_1 - D_1}{B_2 - D_2} \right) \right]_*; \quad (6,132)$$

$$E_0 = \left[A_3 + \frac{A_2 D_3}{D_2 - B_2} \right]_*. \quad (6,133)$$

Коэффициенты A_i характеризуют связь относительных значений производных параметров, входящих в уравнение неразрывности:

$$A_1 = \left[\frac{1}{\varepsilon_c} \cdot \frac{\rho'}{\rho} - \frac{\rho'_r}{\rho_r} \right]_*; \quad (6,134)$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{\varepsilon_c} \cdot \frac{W'}{W} - \frac{\rho'_r}{\rho_r} \right]_*; \quad (6,135)$$

$$A_3 = \left[\frac{W'}{W} - \frac{C'}{C} + \frac{\rho'}{\rho} + \frac{\rho'_r}{\rho_r} \right]_*. \quad (6,136)$$

Коэффициент совершенства, характеризующий расходонапряженность камеры,

$$\varepsilon_c = \frac{G}{G_{\max} - G} = \frac{1}{\frac{g \rho_{ж} C \sigma}{G} - 1}. \quad (6,137)$$

В бесконечно совершенной камере в верхней ее части все сечение предполагается заполненным жидкостью. Гра-
виметрическая плотность для жидкости

$$\rho_r = \rho_{ж} \frac{\sigma_{ж}}{\sigma}. \quad (6,138)$$

Если сечение σ заполнено только газом, то $\rho_r = 0$. При заполнении камеры только жидкостью $\rho_r = \rho_{ж}$.

Коэффициенты, учитывающие тепловыделение

$$B_1 = \left[g (\rho W)^2 \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{Q'}{Q} \left(\frac{1}{2\tau_{lt}} + 1 \right) (1 - \varepsilon) \right]_* ; \quad (6,139)$$

$$B_2 = 2g^2 [\rho' W' Q (\tau_{lt} + 1) (1 - \varepsilon)]_* . \quad (6,140)$$

Если в рассматриваемом сечении находится только жидкость, то $\varepsilon = 1$ и $B_1 = B_2 = 0$. В сечениях, пересекаемых только газом, $\varepsilon = 0$, а Q и Q' определяются процессами горения газообразных продуктов.

Следующие коэффициенты учитывают изменение относительного расхода жидкого топлива по x :

$$D_1 = \left[\frac{\rho}{1 - \varepsilon} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{(W - C)}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}} - W' \xi \right) K' \right]_* ; \quad (6,141)$$

$$D_2 = \left[\frac{1}{1 - \varepsilon} \left(\frac{3}{4} \frac{(W - C)^2}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}} - W' \xi \right) K'_* + \rho' \frac{gq}{\xi} K' \right]_* \quad (6,142)$$

$$D_3 = \left[(1 - \varepsilon) \frac{3}{2} \rho \frac{C(W - C)}{\sqrt{R_0^2 - \Psi t}} K' \right]_* , \quad (6,143)$$

где $K = \frac{iG}{\sigma}$. Здесь количественная характеристика жидкой фазы в сечении в условиях одномерного потока

$$\xi = \left[\frac{1 - \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{1 - \varepsilon} \right]_* . \quad (6,144)$$

Если возможно принять $K' = 0$, то исходные уравнения (6,128) — (6,130) значительно упрощаются.

В коэффициенты, учитывающие тепловыделение, входит термический коэффициент, характеризующий роль сечения в общем преобразовании тепловой энергии в кинетическую, причем

$$\tau_{lt} = \left[\frac{W^2}{2gQ} \right]_* . \quad (6,145)$$

Рассмотренные решения и входящие в них коэффициенты отображают процессы, протекающие в окрестностях назначаемых сечений камеры при условии соблюдения принятых ограничений.

В подготовке и разработке материалов данного параграфа принимали участие В. М. Гарин и К. Г. Ефименко.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СИСТЕМА РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} \left[1 - \sqrt{\Pi} \right] + \left[\frac{\partial (\rho W_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (\rho W_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (\rho W_\varphi)}{\partial \varphi} \right] - \\ & - \frac{1}{g \rho_{ж}} \left[\frac{\partial \left(\rho \frac{W_x}{C_x} \right)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{r \partial \varphi \partial r} + \frac{\partial \left(\rho \frac{W_r}{C_r} \right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 G_r}{r \partial \varphi \partial x} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \left(\rho \frac{W_\varphi}{C_\varphi} \right)}{r \partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 G_\varphi}{r \partial x} \right] - \\ & - \frac{1}{g \rho_{ж}} \left[\frac{W_x}{C_x} \cdot \frac{\partial^3 G_x}{r \partial \varphi \partial r \partial x} - \frac{W_r}{C_r} \cdot \frac{\partial^3 G_r}{r \partial \varphi \partial r \partial x} - \frac{W_\varphi}{C_\varphi} \cdot \frac{\partial^3 G_\varphi}{r \partial \varphi \partial r \partial x} \right] - \Omega = 0. \end{aligned} \quad (1,39)$$

$$\Omega = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_\varphi)}{\partial \varphi \partial r \partial x}. \quad (1,44)$$

$$p = g \rho R T \quad (6/н)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \left[\frac{V_{ж}}{r \partial \varphi \partial r \partial x} \right]^2 = \left(\varepsilon_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} dx \right) \left(\varepsilon_r - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} dr \right) \times \\ & \times \left(\varepsilon_\varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right). \end{aligned} \quad (6/н)$$

2. ВТОРОЙ ЗАКОН ДЛЯ ГАЗА

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} (1 - \varepsilon_x) = \rho W_x (1 - \sqrt{\Pi}); \quad (1,80)$$

$$\dot{W}_x = \frac{\partial W_x}{\partial t} - \frac{\partial W_x}{\partial x} W_x + \frac{\partial W_x}{\partial r} W_r + \frac{\partial W_x}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r}; \quad (6/н)$$

$$\frac{\partial P_r}{\partial r} (1 - \varepsilon_r) = \rho W_r (1 - \sqrt{\Pi}); \quad (1,81)$$

$$\dot{W}_r = \frac{\partial W_r}{\partial t} + \frac{\partial W_r}{\partial x} W_x + \frac{\partial W_r}{\partial r} W_r + \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} - \frac{1}{r} W_r^2; \quad (6/н)$$

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} (1 - \varepsilon_\varphi) = \rho W_\varphi (1 - \sqrt{\Pi}) \quad (1,82)$$

$$\dot{W}_\varphi = \frac{\partial W_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial W_\varphi}{\partial x} W_x + \frac{\partial W_\varphi}{\partial r} W_r + \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{W_\varphi}{r} + \frac{1}{r} W_r W_\varphi. \quad (6/н)$$

Гравиметрические коэффициенты

$$\varepsilon_x = \frac{S_x}{rd\varphi dr}; \quad \varepsilon_r = \frac{S_r}{rd\varphi dx}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{S_\varphi}{\partial r \partial x}. \quad (1,35)$$

3. ПРОИЗВОДНЫЕ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = \tau_x \left[x - \frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \mu M_x \right]; \quad (1,71)$$

$$\frac{\partial P_r}{\partial r} = \tau_r \left[r - \frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \mu M_r \right]; \quad (1,72)$$

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} = \tau_\varphi \left[\varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_\varphi + \mu M_\varphi \right]; \quad (1,73)$$

Объемные силы вязкого ламинарного трения

$$\mu M_x = \mu \left[\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W_x}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_x}{\partial r} \right]; \quad (6/н)$$

$$\begin{aligned} \mu M_r = \mu \left[\frac{\partial^2 W_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial r} - \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} - \frac{W_r}{r^2} \right]; \quad (6/н) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu M_\varphi = \mu \left[\frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_\varphi}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2} \frac{W_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{W_\varphi}{r^2} \right]. \quad (6/н) \end{aligned}$$

4. ВТОРОЙ ЗАКОН ДЛЯ ЖИДКОСТИ

$$\frac{\partial \pi_x}{\partial x} = \rho_{ж} \dot{C}_x U_x; \quad (1,91)$$

$$C_x = \frac{\partial C_x}{\partial t} + \frac{\partial C_x}{\partial x} C_x + \frac{\partial C_x}{\partial r} C_r + \frac{\partial C_x}{\partial \varphi} \cdot \frac{C_\varphi}{r}; \quad (6/н)$$

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial r} = \rho_{ж} \dot{C}_r U_r; \quad (1,32)$$

$$C_r = \frac{\partial C_r}{\partial t} + \frac{\partial C_r}{\partial x} C_x + \frac{\partial C_r}{\partial r} C_r + \frac{\partial C_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{C_\varphi}{r} - \frac{1}{r} C_r^2; \quad (6/н)$$

$$\frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} = \rho_{ж} \dot{C}_\varphi U_\varphi; \quad (1,33)$$

$$C_\varphi = \frac{\partial C_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial C_\varphi}{\partial x} C_x + \frac{\partial C_\varphi}{\partial r} C_r + \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{C_\varphi}{r} + \frac{1}{r} C_r C_\varphi. \quad (6/н)$$

Относительные объемы

$$U_x = \frac{V_{жx}}{S_x dx}; \quad (6/н)$$

$$U_r = \frac{V_{жr}}{S_r dr}; \quad (6/н)$$

$$U_\varphi = \frac{V_{ж\varphi}}{S_\varphi d\varphi}. \quad (6/н)$$

5. ПРОИЗВОДНЫЕ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

$$\frac{\partial \pi_x}{\partial x} = \tau_{жx} \left[x_{жx} - \frac{\partial p}{\partial x} - f_x \right]; \quad (1,94)$$

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial r} = \tau_{жr} \left[r_{жr} - \frac{\partial p}{\partial r} + f_r \right]; \quad (1,95)$$

$$\frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} = \tau_{ж\varphi} \left[\varphi_{ж\varphi} - \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_\varphi \right]. \quad (1,96)$$

6. БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ОБЪЕМНЫЕ СИЛЫ

$$f_x = \frac{3}{4} a_x \rho \frac{(W_x - C_x)^2}{\sqrt{R_0^2 - \psi t}}; \quad (1,192)$$

$$f_r = \frac{3}{4} a_r \rho \frac{(W_r - C_r)^2}{\sqrt{R_0^2 - \psi t}}; \quad (6/н)$$

$$f_\varphi = \frac{3}{4} a_\varphi \rho \frac{(W_\varphi - C_\varphi)^2}{\sqrt{R_0^2 - \psi t}}. \quad (6/н)$$

7. ПРОИЗВОДНЫЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

$$\dot{W}_x W_x + \dot{W}_r W_r + \dot{W}_\varphi W_\varphi = \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} \right); \quad (1,84)$$

$$\dot{C}_x C_x + \dot{C}_r C_r + \dot{C}_\varphi C_\varphi = \frac{d}{dt} \left(\frac{C^2}{2} \right); \quad (1,120)$$

$$\dot{U}_x U_x + \dot{U}_r U_r + \dot{U}_\varphi U_\varphi = \frac{d}{dt} \left(\frac{U^2}{2} \right). \quad (6/н)$$

8. ВНЕШНИЕ ОБЪЕМНЫЕ СИЛЫ

$$X_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}} \dot{V}_x; \quad (1,200)$$

$$X = \rho \dot{V}_x; \quad (6/\text{H})$$

$$r_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}} \dot{V}_r; \quad (1,201)$$

$$r = \rho \dot{V}_r; \quad (6/\text{H})$$

$$\varphi_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}} \dot{V}; \quad (1,202)$$

$$\varphi = \rho \dot{V}. \quad (6/\text{H})$$

9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

$$\begin{aligned} & q \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{\partial \varphi \partial r} \left(1 + \frac{dx_0}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 G_r}{\partial \varphi \partial x} \left(1 + \frac{dr_0}{dr} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 G_z}{\partial r \partial x} \left(1 + \frac{d\varphi_0}{d\varphi} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \right] + \mu (\Phi_r + \Phi_a) = \\ & = g\rho \frac{d}{dt} (c_v T) (1 - \sqrt{\bar{\Pi}}) + p \operatorname{div} W (1 - \sqrt{\bar{\Pi}}) + \\ & \quad + g\rho_{\text{ж}} \frac{d}{dt} (c_{\text{ж}} T_{\text{ж}}) \sqrt{\bar{\Pi}} + r_{\text{ж}} \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_z)}{r \partial \varphi \partial r \partial x} = \\ & = g\rho \frac{d}{dt} (c_p T) - \frac{\partial p}{\partial t} - \left(\frac{\partial p}{\partial x} W_x + \frac{\partial p}{\partial r} W_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} W_\varphi \right) \left] \times \right. \\ & \quad \times (1 - \sqrt{\bar{\Pi}}) + g\rho_{\text{ж}} \frac{d}{dt} (c_{\text{ж}} T_{\text{ж}}) \sqrt{\bar{\Pi}} + \\ & \quad \left. + r_{\text{ж}} \frac{\partial^3 (G_x + G_r + G_z)}{r \partial \varphi \partial r \partial x} \right]. \quad (1,137) \end{aligned}$$

10. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

$$\Theta_x = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 G_x}{r \partial \varphi \partial r} dx}{g\rho W_x (1 - \varepsilon_x) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta_x \right)}; \quad (1,230)$$

$$\Theta_r = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 G_r}{r \partial \varphi \partial x} dr}{g\rho W_r (1 - \varepsilon_r) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta_r \right)}; \quad (6/\text{H})$$

$$\Theta_{\varphi} = \frac{\frac{\partial}{r \partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 G_z}{\partial r \partial x} d\varphi}{g_{\varphi}^2 W_{\varphi} (1 - \varepsilon_{\varphi}) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta_{\varphi}\right)} \quad (6/н)$$

Закон сохранения импульса

$$U_x = (1 + \Theta_x) \xi_x W_x - \Theta_x C_x; \quad (1,228)$$

$$U_r = (1 + \Theta_r) \xi_r W_r - \Theta_r C_r; \quad (6/н)$$

$$U_z = (1 + \Theta_{\varphi}) \xi_{\varphi} W_{\varphi} - \Theta_{\varphi} C_{\varphi}. \quad (6/н)$$

11. ЗАКОН ВЫГОРАНИЯ

$$R^2 = R_0^2 - \Psi t; \quad (1,274)$$

$$R_0^2 = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{\varphi(G)}{\pi \rho_{ж}} \right]^2; \quad (6/н)$$

$$\Psi = \kappa \frac{\lambda (T_0 - T_{ж})}{g \rho_{ж} (r_{ж} + c_{ж} T_{ж})}. \quad (1,273)$$

12. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ КАПЛИ

$$\frac{\xi l^2}{4\pi g \rho_{ж}} \beta \frac{\lambda}{R^2} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial t} - (r_{ж} + c_{ж} T_{ж}) \dot{R} - \frac{1}{3} c_{ж} R \dot{T}_{ж} = 0. \quad (1,260)$$

Уравнения теплообмена капли

$$\dot{T}_{ж} = \frac{\partial T_{ж}}{\partial t} + \frac{g r_{ж}}{c_{ж} \rho_{ж}} T_{ж} \dot{V} \quad (1,261)$$

$$\frac{\partial T_{ж}}{\partial t} = a \nabla^2 T_{ж}; \quad (1,262)$$

$$a = g \frac{\lambda_{ж}}{c_{ж} \rho_{ж}}. \quad (1,263)$$

13. ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ ПОТОКА

$$\begin{aligned} \mu \Phi_{\square} = & \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^3 G_x}{\partial \varphi \partial r \partial x} (1 + \Theta_x) (\xi_x W_x - C_x)^2 + \right. \\ & + \frac{\partial^3 G_r}{\partial \varphi \partial r \partial x} (1 + \Theta_r) (\xi_r W_r - C_r)^2 + \\ & \left. + \frac{\partial^3 G_z}{\partial \varphi \partial r \partial x} (1 + \Theta_{\varphi}) (\xi_z W_{\varphi} - C_{\varphi})^2 \right]. \quad (1,234) \end{aligned}$$

Дивергенция

$$\operatorname{div} \mathbb{W} = \frac{\partial \mathbb{W}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbb{W}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mathbb{W}_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (6/в)$$

Сумма функций

$$\Phi = \Phi_r + \Phi_\varphi. \quad (6/в)$$

14. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\varphi(m) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m - \bar{m}}{\sigma} \right)^2}; \quad (1,211)$$

$$\bar{m} = \frac{\sum m}{n}; \quad (1,222)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m - \bar{m})^2}{n(n-1)}}. \quad (1,223)$$

15. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ ОБЛАКА

$$4\pi(\rho_{ж} - \rho_0) R^2 \dot{R} - 3\varepsilon \rho_0 l^2 \dot{l} - \xi_0 l D \nabla C = 0. \quad (1,255)$$

Уравнение диффузий облака

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C; \quad (1,250)$$

$$\nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial l^2} + \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2}.$$

Рекомендуемая литература

- Длин А. М. Математическая статистика в технике. Изд-во «Советская наука», 1958
- Зенгер Е. К механике фотонных ракет. ИЛ, 1958.
- Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. ИЛ, 1959.
- Кондратьев В. Н. Кинетика химических газовых реакций. Изд-во АН СССР, 1958.
- Крокко Л. и Чжен Синь-и. Теория неустойчивости горения в жидкостных реактивных двигателях. ИЛ, 1958.
- Лавров Н. В. Физико-химические основы горения и газификации топлива. Гос научн.-техн. изд-во по черн. и цветн. мет., 1947.
- Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. ИЛ, 1958.
- Лукомский Я. И. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. Гос. стат. изд-во, 1958.
- Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, 1956.
- Морс Ф. М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики. ИЛ, 1958.
- Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1957.
- Скучик Е. Основы акустики. ИЛ, 1958.
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. ИЛ, 1956.
- Исследование оптимальных режимов движения ракет. Сборник. Гос. изд-во оборон. пром., 1959.
- Основы проектирования управляемых снарядов. ИЛ, 1959
- Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Изд-во АН СССР, 1958.
- Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. Москва, 1959.
- Экспресс-информация Всесоюзного института научной и технической информации.
- Журнал Американского ракетного общества.
- Экспресс-информация. Астронавтика и ракетодинамика. Москва, 1960.
- Вопросы ракетной техники. ИЛ, 1960.
- Мирное использование атомной энергии. Доклады советских ученых. Москва, 1959.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

Глава I. ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРИКАМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Уравнение закона сохранения массы (уравнение неразрывности)	7
§ 2. Уравнение второго закона Ньютона	19
§ 3. Уравнение закона сохранения энергии	27
§ 4. Определение баллистических и внешних сил	36
§ 5. Уравнения распределения жидкости по каплям	39
§ 6. Уравнение закона сохранения количества движения газа	42
§ 7. Уравнения горячей капли	45
§ 8. Уравнение границы горения	49
§ 9. Система расчетных уравнений	52

Глава II. ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗЕЙ КАМЕРЫ С ГИДРАВЛИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ

§ 1. Уравнения гидравлических цепей	59
§ 2. Определение составляющих давлений уравнения гидравлической цепи	65
§ 3. О связи параметров камеры и гидравлических цепей	75
§ 4. Анализ исходного характера движения для двигателя с нагруженными баками	80
§ 5. Решение уравнений с учетом запаздывающего аргумента	84

Глава III. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ АГРЕГАТОВ СИСТЕМЫ ПИТАНИЯ

§ 1. Уравнение закона сохранения энергии для системы наддува бака	88
§ 2. Уравнение закона сохранения массы для системы наддува бака	95
§ 3. Уравнения системы питания с нагруженными баками	98
§ 4. Уравнение центробежного насоса	107

Глава IV. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЯ МЕТОДОМ МАЛЫХ КОНЕЧНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

§ 1. Постановка задачи	120
§ 2. Вывод уравнения малых конечных отклонений для решения первых двух задач	121
§ 3. Уравнения других цепей	124
§ 4. Системы уравнений	126
§ 5. Определение коэффициентов уравнений	131
§ 6. Последовательность решения задач	134
§ 7. Уточнения решений	137

Глава V. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМА РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЯ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

§ 1. Особенности графического метода	142
§ 2. Построение графиков и расчет	143
§ 3. Анализ процессов, проводимый с использованием графического метода	149

Глава VI. ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРИКАМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ОТКЛОНЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Зависимые и независимые переменные. Отклонения параметров одного уравнения	154
§ 2. Отклонения параметров системы уравнений. Уменьшение порядка уравнения	161
§ 3. Анализ уравнений, описывающих процессы в камере сгорания	166

Литературный редактор **Н. Г. Меркулова**

Технический редактор **И. В. Квасницкая**

Корректор **Р. В. Филатова**

Сдано в набор 9.1.60. Подписано к печати 20.4.60.

Объем 11¹/₄ п. л. Форм. 60 × 90/16

Замеченные ошибки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
32	16-я сверху	$\frac{p}{\varphi} \Omega$	$\frac{p}{\rho} \Omega$	РИО
36	2-я сверху	$\frac{dQ}{dT}$	$\frac{dQ}{T}$	Автора
40	3-я свер- ху (ось)	$\frac{G}{g}$	$f(m)$	Автора
77	8-я снизу	$-I_p (G_1 + G_2)$	$-I_p (G_1 + G_2) \theta$	Автора

