

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

---

---

ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

О.Н. КАЦКОВА

РАСЧЕТ РАВНОВЕСНЫХ  
ТЕЧЕНИЙ ГАЗА  
В СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЛАХ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР

МОСКВА 1964

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

---

ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

О.Н. КАЦКОВА

РАСЧЕТ РАВНОВЕСНЫХ  
ТЕЧЕНИЙ ГАЗА  
В СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЛАХ



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР

МОСКВА — 1964

**Ответственный редактор**  
**Ю. Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ**

## ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы — дать схему и формулы расчета течений в плоских и осесимметричных соплах. Рассматриваются стационарные равновесные течения несовершенного газа с произвольными термодинамическими свойствами. Как частный случай даны уравнения для адиабатических течений совершенного газа.

При расчете течения в сверхзвуковых соплах приходится решать две различные задачи: расчет течения в трансзвуковой области в окрестности переходной поверхности и расчет течения методом характеристик в сверхзвуковой области.

В данной работе рассматриваются только течения с плоской переходной поверхностью и с изломом образующей у выходного отверстия сопла.

Впервые случай прямой звуковой линии был исследован Ф.И. Франклем [1] и Гертлером [2]. Они установили достаточные условия реализации прямой звуковой линии, а также отметили, что линии тока в точках пересечения с нею обладают нулевой кривизной.

Позже задачам расчета течения в сопле Лавалья в окрестности плоской переходной поверхности были посвящены работы В. Астрова, Л. Левина, Е. Павлова и С. Христиановича [3], Хилла и Пэка [4], Гудерлея [5] и Л.В. Овсянникова [6-7]. В частности, Л.В. Овсянников установил, что в течениях с прямой звуковой линией обязательно должны появляться подвижные особые точки. Этим точкам соответствуют изломы стенок каналов.

В 1957 г. в работе [8] в виде рядов было получено решение точных уравнений осесимметричных течений совершенного газа, в 1961 г. [9] — решение уравнений равновесных течений несовершенного газа. Для плоских течений решение в виде рядов было получено О.И. Рябовой в 1963 г. в дипломной работе.

В настоящей работе рассматриваются также течения в окрестности плоской переходной поверхности в кольцевых соплах. Для течений совершенного газа в соплах с одной угловой точкой решение было получено в 1958 г. [10], для течений совершенного и несовершенного газа в соплах с двумя угловыми точками - в 1962 г. в работе Ван Жу-цюаня [11].

Изучение течений с искривленной звуковой линией в соплах Лавала является значительно более трудной проблемой. В этом случае расчет смешанной области не может быть выполнен раздельно для до- и сверхзвуковых скоростей, обе задачи должны решаться совместно.

Впервые исследование плоскопараллельных течений с искривленной звуковой линией было проведено в 1945 г. Ф.И. Франклем [12] и в 1946 г. С.В. Фальковичем [13], затем оно повторялось в работах многих авторов [14-17]. Течениям с осевой симметрией посвящена работа О.С. Рыжова [18], им же были установлены [19] причины образования ударных волн вблизи критического сечения канала.

Расчет сверхзвуковых равновесных течений газа методом характеристик в настоящее время не представляет особых затруднений. В данной работе использовался метод характеристик, приспособленный для расчета на вычислительных машинах [20-22]. Этот метод в последние годы широко применялся в работах Вычислительного центра АН СССР как наиболее экономичный.

Методу характеристик для расчета неравновесных течений посвящены работы [23-28].

Автор пользуется возможностью выразить глубокую благодарность Ю.Д. Шмыглевскому за постоянную помощь в работе, А.Н. Крайко и О.С. Рыжову за ценные советы и замечания.

## УРАВНЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарные равновесные течения несовершенного газа с произвольными термодинамическими свойствами.

Уравнения неразрывности, движения и энергии установившегося изоэнергетического течения невязкого нетеплопроводного газа можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(r^j \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(r^j \rho v)}{\partial r} &= 0; \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0; \\ \frac{w^2}{2} + h(p, T) &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

для плоских течений  $j = 0$ , для осесимметричных  $j = 1$ .

Здесь  $x, r$  — декартовы координаты (рис. 1), отнесенные к длине отрезка  $OA$  (в осесимметричном случае течение рассматривается в меридиональной плоскости),  $x$  направлено по оси симметрии;  $u$  и  $v$  — компоненты скорости соответственно по осям  $x$  и  $r$ , отнесенные к критической скорости;  $w$  — модуль скорости;  $\rho$  — плотность газа, отнесенная к критическому значению плотности;  $p$  — давление, отнесенное к произведению критической плотности на квадрат критической скорости;  $T$  — абсолютная температура, отнесенная к квадрату критической скорости, деленному на  $R$  ( $R$  — постоянная для данного газа, равная универсальной газовой постоянной, деленной на молекулярный вес данного газа);  $h$  — удельная энтальпия, отнесенная к квадрату критической скорости.

Предположим, что все линии тока выходят из области с постоянными параметрами.

Если в каждой точке потока газ находится в состоянии термодинамического равновесия, то  $\rho$  и  $h$  будут функциями только давления и температуры:

$$\rho = \rho(p, T), \quad h = h(p, T). \quad (2)$$

Конкретный вид этих зависимостей определяется свойствами выбранного газа.

При сделанных предположениях и отсутствии скачков уплотнения во всем течении энтропия  $S$  постоянна. Поэтому ниже везде речь будет идти только об изэнтропических течениях.

В дальнейшем вместо одного из уравнений движения удобнее использовать дифференциальную форму уравнения Бернулли

$$w dw + \frac{1}{\rho} dp = 0.$$

Как известно, тип системы уравнений (1) зависит от значения модуля скорости  $W$ . Обозначим через  $a$  местную скорость звука, определяемую по формуле  $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$ , что при использовании соотношений (2) дает

$$a^{-2} = \rho_p + \frac{\rho_T}{h_T} \left( \frac{1}{\rho} - h_p \right), \quad (3)$$

где

$$\rho_p = \frac{\partial \rho}{\partial p}; \quad \rho_T = \frac{\partial \rho}{\partial T}; \quad h_p = \frac{\partial h}{\partial p}; \quad h_T = \frac{\partial h}{\partial T}.$$

Тогда при  $W < a$  система (1) имеет эллиптический тип, при  $W = a$  — параболический и при  $W > a$  — гиперболический тип. В данной работе рассматриваются трансзвуковые и сверхзвуковые течения в соплах с плоской переходной поверхностью. В этом случае расчет течения при  $W \geq a$  может быть произведен независимо от расчета дозвуковой части течения. На основании разработанных методов такой расчет распадается на две части. Решение задачи для трансзвуковой области предлагается в аналитическом виде. Этому вопросу посвящена первая глава.

В сверхзвуковой области система уравнений (1) при  $S = \text{const}$  имеет два семейства действительных характеристик, и использование метода характеристик не встречает затруднений.

Отметим, что расчет дозвуковой области течения может быть произведен независимо от сверхзвуковой части только тогда, когда звуковая поверхность совпадает с характеристической. В работе О.С.Рыжова и Ю.Д.Шмыглевского [29] показано, что в этом случае переходная поверхность, опирающаяся на некоторый замкнутый контур, обладает минимальной площадью среди всех поверхностей, которые можно натянуть на данный контур.

Расчету течений с неплоскими переходными поверхностями посвящены работы [12–19]. После расчета минимальной области, в которой решение определяется однозначно, оставшаяся часть сверхзвукового течения также может быть рассчитана методом характеристик.

Уравнения характеристик системы (1) можно записать

$$dr = \text{tg}(\vartheta \pm \alpha) dx,$$

здесь  $\vartheta$  — угол наклона скорости к оси  $x$ ,  $\alpha$  — угол Маха ( $\sin \alpha = \frac{a}{W}$ ). Верхний знак относится к характеристикам первого, нижний — к характеристикам второго семейства.

Методу характеристик посвящена вторая глава.

В дальнейшем рассматриваются следующие задачи расчета течения в сверхзвуковых соплах:

1. Заданы форма образующей сопла и условия на звуковой линии. Нужно найти параметры течения внутри сопла и на его образующей (прямая задача).

2. Заданы условия на звуковой линии и на выходе сопла. Найти течение внутри сопла и форму образующей (обратная задача).

Рассматриваются только сопла с изломом образующей у выходного отверстия сопла (на рис. 1 — точка А). Линии тока, полученные при расчете течения, можно рассматривать как образующие сопел с гладкими стенками.

Расчет сверхзвуковой части течения можно, в свою очередь, разделить на две задачи.

1. Расчет течения методом характеристик в разгонном участке  $OAB$  (см. рис. 1). Расчет продолжается до достижения заданной скорости на оси в случае обратной задачи или до получения в точке А угла наклона линии тока, равного заданному на стенке сопла.

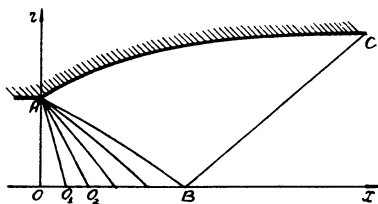


Рис. 1

2. Расчет течения внутри области  $ABC$  по заданному контуру сопла и характеристике  $AB$  (прямая задача) или определение контура  $AC$  и течения внутри области  $ABC$  по характеристике  $AB$  и условиям на линии  $BC$  (обратная задача). Линия  $BC$  может быть характеристикой равномерного течения, или характеристикой, выбранной из условий получения оптимального сопла, или, наконец, любой кривой с заданными на ней параметрами течения, не противоречащими данным на характеристике  $AB$ . В обратной задаче заданная замыкающая линия может начинаться из любой точки характеристики  $AB$ .

Нужно иметь в виду, что при некоторых условиях на выходе или на стенке сопла в области  $ABC$  могут возникать скачки уплотнения.

Так как рассматриваются только сопла с плоской переходной поверхностью, то везде в дальнейшем мы считаем поток на входе равномерным. В этом случае заданные температуры и давления определяют все остальные параметры (величины на переходной поверхности будем обозначать индексом \*).



## Глава первая

### ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРЕХОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

#### § 1. Сопло с центральным входом

Расчет течения в области  $ОАО_1$  (см. рис. 1), примыкающей к звуковой линии  $ОА$ , нельзя непосредственно провести методом характеристик, так как, как уже упоминалось выше, при  $W=d$  система (1) имеет параболический тип и характеристики двух семейств сливаются. В этой области решение находится в виде степенных рядов.

Задача расчета плоского течения в окрестности переходной линии была решена Л.В.Овсянниковым [6-7], но найденное им решение неудобно для практических расчетов. Для продолжения расчета методом характеристик проще вычислять необходимые величины непосредственно на некоторой характеристике второго семейства  $АО_1$ . С этой целью может быть использована специальная система независимых переменных. Решение задачи для осесимметричных течений совершенного газа было дано в работе [8], в случае равновесных течений несовершенного газа - в работе [9], а для плоских равновесных течений решение было получено О.И.Рябовой ("Решение нелинейных уравнений газовой динамики в окрестности линии параболичности". Дипломная работа МГУ, 1963).

В бесконечно малой окрестности точки  $A$  (рис. 1) реализуется решение Праудтля-Майера, соответствующее обтеканию угла, превышающего  $\pi$ . Как известно, из точки  $A$  выходят пучком характеристики второго семейства  $АО_1, АО_2, \dots$ .

Перейдем к переменным  $\chi, z$ , где линии  $z = \text{const}$  являются линиями тока, линии  $\chi = \text{const}$  - характеристиками второго семейства, выходящими из точки  $A$ .

Вдоль линий  $z = \text{const}$  выполняется соотношение

$$\frac{dx}{\cos \vartheta} = \frac{dr}{\sin \vartheta},$$

а вдоль линий  $\chi = \text{const}$  выполняется соотношение

$$\frac{dx}{\cos(\vartheta - \alpha)} = \frac{dr}{\sin(\vartheta - \alpha)}.$$

В новых независимых переменных получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{1}{\rho w^2} \text{ctg} \alpha \frac{\partial p}{\partial z} - j \cdot \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{r \sin(\vartheta - \alpha)} \frac{\partial r}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \chi} + \left(\frac{r}{z}\right)^j \cdot \frac{1}{w \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial r}{\partial \chi} + \frac{1}{\rho w^2} \text{ctg} \alpha \frac{\partial p}{\partial \chi} = 0; \quad (5)$$

$$\rho w dw + dp = 0; \quad (6)$$

$$\frac{w^2}{2} + h(p, T) = H_0.$$

Присоединив к этой системе равенство

$$\frac{dp}{d\rho} = w^2 \sin^2 \alpha, \quad (7)$$

выражения (2) и (3) и уравнения, связывающие старые и новые независимые переменные

$$\frac{\partial r}{\partial z} + \left(\frac{z}{r}\right)^j \cdot \frac{1}{\rho w} \cdot \frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\sin \alpha} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} + \left(\frac{z}{r}\right)^j \frac{1}{\rho w} \cdot \frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{\sin \alpha} = 0,$$

получим полную систему уравнений.

Выберем  $\chi$  так, чтобы при  $z=1$  выполнялось равенство  $\chi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Тогда граничными условиями задачи являются равенства:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = 0, \quad x = 0, \quad p = p_0, \quad \rho = 1, \quad w = 1 && \text{при } \chi = 0; \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} - \chi, \quad r = 1 && \text{при } z = 1; \\ \vartheta &= 0, \quad r = 0 && \text{при } z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Решение в окрестности звуковой линии будем искать в виде степенных рядов, удовлетворяющих граничным условиям (9) при  $\chi = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(z) \chi^i, & p &= p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i(z) \chi^i; \\ \nu &= \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i(z) \chi^i, & \rho &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(z) \chi^i; \\ r &= z + \sum_{i=1}^{\infty} r_i(z) \chi^i, & w &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i(z) \chi^i. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из уравнений (4)–(8) и граничных условий (9) следует, что

$$p_1 = \rho_1 = w_1 = \nu_1 = \nu_2 = r_1 = r_2 = r_3 = 0.$$

Подставляя разложения (10) в уравнение (6) и соотношение (7), получим зависимость между коэффициентами разложений функций  $p, \rho$  и  $w$ :

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= -p_2, \quad w_3 = -p_3, \quad w_4 = -p_4, \quad w_5 = -p_5; \dots \\ \rho_2 &= p_2, \quad \rho_3 = p_3, \quad \rho_4 = p_4 + \frac{1}{2} p_2 \alpha_1^2 + p_2^2; \\ \rho_5 &= p_5 + 2p_2 p_3 + \frac{4}{5} p_2 \alpha_1 \alpha_2 + \frac{3}{5} p_3 \alpha_1^2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из выражения (3) можно получить

$$p_2 = \nu \alpha_1^2. \quad (12)$$

Величина  $\nu$  определяется на линии перехода по формуле

$$\frac{1}{\nu} = \frac{2}{h_T} \left[ -\frac{1}{2} \rho_T - h_T + \frac{1}{2} h_T \rho_{pp} - \frac{1}{2} \rho_T h_{pp} + \right. \\ \left. + \frac{1-\rho_p}{\rho_T} (h_T \rho_{pT} - \rho_T h_{pT}) + \frac{1}{2} \left( \frac{1-\rho_p}{\rho_T} \right)^2 (h_T \rho_{TT} - \rho_T h_{TT}) \right], \quad (13)$$

где

$$\rho_{pp} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}, \quad \rho_{pT} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial p \partial T}, \quad \rho_{TT} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2}, \\ h_{pp} = \frac{\partial^2 h}{\partial p^2}, \quad h_{pT} = \frac{\partial^2 h}{\partial p \partial T}, \quad h_{TT} = \frac{\partial^2 h}{\partial T^2}.$$

Подставим разложения (10) в уравнения (4), (5), (8), используя (11) и (12).

Приравнявая нулю суммы коэффициентов при одинаковых степенях  $\chi$ , получим рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $\alpha_i$ ,  $\nu_i$ ,  $r_i$ .

Функции  $\alpha_1, \nu_3, r_4$  определяются следующей системой:

$$\left. \begin{aligned} 8\nu r_4 \alpha_1 \alpha_1' - 2\nu \nu_3 \alpha_1^3 + 3\nu_3^2 &= 0; \\ \nu_3' + 2\nu \alpha_1^2 \alpha_1' + j \cdot \frac{\nu_3}{z} &= 0; \\ r_4' + j \frac{r_4}{z} - \alpha_1 \nu_3 + \frac{1}{2} \nu \alpha_1^4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Граничные условия для  $\alpha_1, \nu_3, r_4$  вытекают из равенств (9):

$$\alpha_1(1) = -1, \quad r_4(1) = 0, \quad \nu_3(0) = 0, \quad r_4(0) = 0, \quad (15)$$

причем, как будет видно из дальнейшего, последние два условия связаны между собой.

Введем новую функцию  $\omega = 4 \frac{r_4}{\nu_3}$ ; тогда из системы (14) найдем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \omega'; \\ \nu_2 &= \nu \omega'^2; \\ \nu_3 &= \frac{2}{3} \nu \omega' (\omega'^2 - \omega \omega''); \\ r_4 &= \frac{1}{6} \nu \omega \omega' (\omega'^2 - \omega \omega''). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Для определения функции  $\omega$  получаем дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\omega''' = \frac{1}{\omega \omega'} [\omega'' (5\omega'^2 - \omega \omega'') + j \cdot \frac{\omega'}{z} (\omega'^2 - \omega \omega'')] \quad (17)$$

с граничными условиями

$$\omega'(1) = -1, \quad \omega(1) = 0, \quad \omega(0) \omega''(0) - \omega'^2(0) = 0. \quad (18)$$

Выполнение последнего условия и ведет к одновременному выполнению двух последних условий из (15) в силу равенств (16).

Отметим, что порядок уравнения (17) может быть понижен на единицу подстановкой  $\gamma = \frac{\omega'}{\omega}$ . В плоском случае

при  $j=0$  решение уравнения (17) находится в квадратурах. В этом случае

$$\omega(z) = C_3 \exp \int \gamma dz.$$

Величина  $\gamma$  связана с  $z$  соотношением

$$z = A \cdot E\left(\frac{\gamma^2}{2}, C_1\right) + C_2,$$

где

$$A = -8 \sqrt{\frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{C_1}}{2} (k'^2 - k^2)} / \sqrt{24(1+\sqrt{3}) k' \cdot \sqrt[3]{C_1}};$$

$$k'^2 = \frac{1 - \sqrt{2+\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{2+\sqrt{3}}};$$

$$k^2 = \frac{1 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Функция

$$E\left(\frac{\gamma^2}{2}, C_1\right) = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2 t^2)}}$$

представляет собой эллиптический интеграл первого рода,

$$k_1^2 = \frac{k^2 - k'^2}{k^2},$$

$$t = \frac{1}{k_1} \left[ \frac{k^2 \left( \sqrt[3]{27C_1^2} - \sqrt{\gamma^2 + \sqrt[3]{C_1}} \right)^2}{\left( \sqrt[3]{27C_1^2} + \sqrt{\gamma^2 + \sqrt[3]{C_1}} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$C_1, C_2, C_3$  - постоянные интегрирования<sup>1</sup>.

Однако практически решение уравнения (17) и в этом случае удобнее находить численным интегрированием.

Вид уравнения (17) не зависит от свойств газа, в отличие от системы (14), где величина  $\nu$  выражается через производные от функций  $\rho(p, T), h(p, T)$ . Это позволяет создать универсальные таблицы для функции  $\omega(z)$ .

<sup>1</sup>Рябова О.И. "Решение нелинейных уравнений газовой динамики в окрестности линии параболичности". Дипломная работа МГУ, механико-математический факультет, 1983.

Предположим, что решение краевой задачи (17) - (18) единственно. Кроме того, допустим, что  $\omega'''$  в искомом решении является ограниченной функцией при  $0 \leq z \leq 1$ .

Введем переменные  $\bar{\omega}$  и  $\zeta$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \Omega \bar{\omega}; \\ \zeta &= \frac{\Omega'}{\Omega} z, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $\Omega$  и  $\Omega'$  - постоянные величины. При такой замене вид уравнения (17) не меняется. Найдем численное решение этого уравнения для  $\bar{\omega}(\zeta)$ , удовлетворяющее при  $\zeta = 0$ , например, условиям

$$\bar{\omega} = 1, \quad \frac{d\bar{\omega}}{d\zeta} = 1.$$

Такое решение для осесимметричных течений в окрестности  $\zeta = 0$  представляется рядом

$$\bar{\omega} = 1 + \zeta + \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{5}{12} \zeta^3 + \frac{7}{24} \zeta^4 + \frac{91}{480} \zeta^5 + \frac{47}{360} \zeta^6 + \frac{3767}{40320} \zeta^7 + \dots$$

В плоском случае точка  $\zeta = 0$  не является особой, и в отходе рядами нет необходимости.

В окрестности  $\zeta = \zeta_*$ , где  $\zeta_*$  определяется равенством

$$\bar{\omega}(\zeta_*) = 0,$$

решение с ограниченной третьей производной для осесимметричных течений представляется рядом

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}'_* \zeta_* \left( \Delta - \frac{1}{10} \Delta^2 + \frac{13}{300} \Delta^3 - \frac{239}{9000} \Delta^4 + \frac{1787}{90000} \Delta^5 - \frac{49637}{2700000} \Delta^6 + C \Delta^7 + \dots \right),$$

где

$$\bar{\omega}'_* = \left. \frac{d\bar{\omega}}{d\zeta} \right|_{\zeta = \zeta_*}; \quad \Delta = \frac{\zeta - \zeta_*}{\zeta_*};$$

$C$  - произвольная постоянная.

В плоском случае в окрестности  $\zeta = \zeta_*$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}'_* \Delta + C' \Delta^7 + \dots$$

где  $C'$  - произвольная постоянная.

Наличие произвольной постоянной  $C$  или  $C'$  в разложении для  $\bar{\omega}$  показывает, что при допущении ограниченности функции  $\omega'''$  сохраняется возможность решения краевой задачи (17) - (18).

Из условий (18), (19) находим

$$\frac{d\omega}{dz} \Big|_{z=1} = \Omega' \cdot \frac{d\bar{\omega}}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_*} = -1; \quad \zeta_* = \frac{\Omega'}{\Omega}$$

или

$$\Omega' = -\frac{1}{\frac{d\bar{\omega}}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_*}}, \quad \Omega = \frac{\Omega'}{\zeta_*}.$$

Отсюда вытекает, что функция  $\omega = \Omega\bar{\omega}$ , удовлетворяющая уравнению (17), удовлетворяет также всем поставленным условиям (18).

Таблицы для функций  $\omega, \omega', \omega''$  приводятся в приложении: табл. 1 — для осесимметричных течений и табл. 2 — для плоских течений.

Для определения вторых коэффициентов разложения получаем следующую систему линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$4r_4 p_3' + 5r_5 p_2' + 7v_3 v_4 - 3\alpha_1 v_3 p_3 - 2\alpha_2 v_3 p_2 - 2\alpha_1 v_4 p_2 = 0;$$

$$v_4' + \alpha_1 p_3' + \alpha_2 p_2' + j \frac{v_4}{z} = 0;$$

$$5r_5' + 5j \frac{r_5}{z} + 4p_2 \alpha_1 \alpha_2 + 3p_3 \alpha_1^2 - 5\alpha_2 v_3 - 5\alpha_1 v_4 = 0,$$

где

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\alpha_1} p_3,$$

с однородными граничными условиями

$$r_5(0) = 0, \quad v_4(0) = 0, \quad r_5(1) = 0, \quad p_3(1) = 0, \quad \alpha_2(1) = 0.$$

В предположении единственности решения рассматриваемой задачи получаем

$$\alpha_2 \equiv p_3 \equiv v_4 \equiv r_5 \equiv 0.$$

При помощи рядов (10) по найденным коэффициентам находим при достаточно малом  $\chi$  функции  $r, \rho, w, v, \alpha, p$  на характеристике  $AO_1$ . Величина  $\chi$  на той же характеристике определяется по формуле

$$\chi = -\int_{z=1}^z \left(\frac{z}{r}\right)^j \cdot \frac{1}{\rho w} \cdot \frac{\cos(v - \alpha)}{\sin \alpha} dz.$$

Для совершенного газа соотношения (2) имеют вид:

$$\rho = \frac{p}{T}, \quad h = \frac{\kappa}{\kappa - 1} T,$$

где показатель адиабаты  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$  ( $c_p, c_v$  - удельные теплоемкости). Тогда  $\nu = -\frac{1}{\kappa + 1}$ . Подставив это значение  $\nu$  в равенства (16), по найденным значениям  $\omega$  можно найти коэффициенты разложений (10) для совершенного газа.

## § 2. Кольцевые сопла с одной угловой точкой

Рассматривается истечение из осесимметричного сопла с внутренним телом, образующая которого  $AD$  (рис.2) имеет угловую точку  $A$ , при прямолинейной образующей внешней стенки  $BC$ . Движение газа описывается системой уравнений (1) при  $j=1$  и (2).

Граничными условиями задачи являются:

- 1)  $u=1, v=0, \rho=1, p=p_0$  при  $x=0, r_0 \leq r \leq 1$ ;
- 2) условия для линий тока:  $r=r_0$  в угловой точке  $A$  и  $r=1$  на линии тока, проходящей через точку  $B$  ( $r_0$  - заданная величина);
- 3)  $v=0$  при  $r=1$ .

Эта задача решена в работе [10].

Решение находится методом, аналогичным рассмотренному выше.

В качестве линий  $\chi = \text{const}$  принимаем характеристики первого семейства, выходящие из точки  $A$ . Вдоль них выполняется соотношение

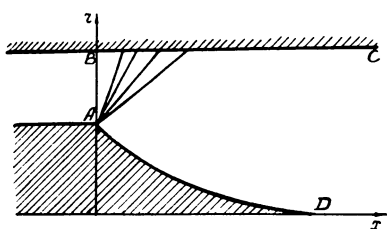


Рис. 2

$$\frac{dx}{\cos(\vartheta + \alpha)} = \frac{dr}{\sin(\vartheta + \alpha)}.$$

Решение ищем в окрестности отрезка  $x=0, r_0 \leq r \leq 1$  при  $x \geq 0$  и  $w^2 \geq 1$ .

Вводится та же вспомогательная функция  $\omega$ ; в этом случае для нее получаем то же уравнение (17) с граничными условиями

$$\omega'(r_0) = 1; \quad \omega(r_0) = 0; \quad \omega(1)\omega''(1) - \omega'^2(1) = 0.$$



В этом случае решение краевой задачи находится численным интегрированием уравнения (17) при указанных краевых условиях.

Решение зависит от величины  $r_0$ .

Таблицы функций  $\omega$  для  $r_0 = 0,85; 0,875; 0,9; 0,925; 0,95$  приводятся в приложении (табл. 3).

### § 3. Кольцевые сопла с двумя угловыми точками

Эта задача была решена Ван Жу-цюанем [11].

В случае сопла с двумя угловыми точками его образующие имеют изломы соответственно в точках А и В (рис. 3) при  $x=0$ .

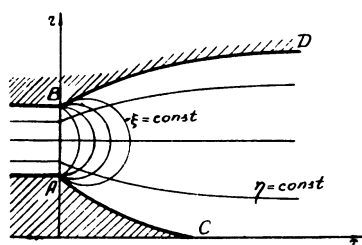


Рис. 3

Движение газа описывается системой уравнений (1) ( $j=1$ ) и (2). Граничными условиями являются  $u=1, v=0, \rho=1, p=p_0$  при  $x=0, r_0 \leq r < 1$  и условия для линий тока:  $r=r_0$  в точке А и  $r=1$  в точке В.

Решение ищем в окрестности отрезка  $x=0, r_0 \leq r \leq 1$  при  $x \geq 0$  и  $\omega^2 \geq 1$ .

В данном случае целесообразно ввести вместо декартовых координат  $x, r$  новые координаты  $\eta, \xi$  связанные с функцией тока  $\psi(x, r)$  и потенциалом скоростей  $\phi(x, r)$  по следующим формулам

$$\eta = \psi; \quad \xi = \frac{\phi}{\psi(b - \psi)}, \quad (20)$$

где  $b = \frac{1-r_0^2}{2}$  — значение функции тока вдоль верхней линии тока BD (см. рис. 3), если считать вдоль нижней линии тока  $\psi=0$ . Функции  $\phi$  и  $\psi$  определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} d\psi &= r\rho(udr - vdx); \\ d\phi &= vdr + udx. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Вместо  $u$  и  $v$  далее везде в этом параграфе вводим функции  $\omega$  и  $\vartheta$

$$\omega = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}. \quad (22)$$

Используя соотношения (20) и (21), найдем формулы связи новых независимых переменных  $\eta, \xi$  с переменными  $x, r$ :

$$\begin{aligned}d\eta &= r\rho w (\cos \vartheta dr - \sin \vartheta dx); \\d\xi &= w[B(\eta)\cos \vartheta - A(\eta)r\rho\xi \sin \vartheta]dx + \\&+ w[B(\eta)\sin \vartheta + A(\eta)r\rho\xi \cos \vartheta]dr,\end{aligned}$$

где

$$A(\eta) = \frac{2\eta - b}{\eta(b-\eta)}; \quad B(\eta) = \frac{1}{\eta(b-\eta)} \quad (0 \leq \eta \leq b).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -r\rho w \sin \vartheta;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = r\rho w \cos \vartheta;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = B(\eta)w \cos \vartheta - A(\eta)r\rho w \xi \sin \vartheta;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = B(\eta)w \sin \vartheta + A(\eta)r\rho w \xi \cos \vartheta.$$

Запишем систему (1) после замены переменных (20) в виде

$$\left. \begin{aligned}r^2 \rho^2 w \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} + A\xi \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + B \frac{\partial (r\rho w)}{\partial \xi} &= 0, \\r \left( \frac{\partial p}{\partial \eta} + A\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + Bw^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} &= 0, \\ \rho w dw + dp &= 0, \\ \frac{dp}{d\rho} = a^2 = \frac{\rho h_T}{\rho(\rho_p h_T - h_p \rho_T) + \rho_T}, \\ wd w + dh &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (23)$$

К этой системе присоединяем уравнения для определения  $r$  и  $x$ :

$$B \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\sin \vartheta}{w}; \quad \frac{\partial r}{\partial \eta} + A\xi \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\cos \vartheta}{r\rho w};$$

$$B \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\cos \vartheta}{w}; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} + A\xi \frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{\sin \vartheta}{r\rho w}.$$

Граничными условиями являются равенства

$$w(\eta, 0) = 1; \quad \nu(\eta, 0) = 0; \quad p(\eta, 0) = p_0; \quad \rho(\eta, 0) = 1;$$

$$r(\eta, 0) = \sqrt{2\eta + r_0^2}; \quad 0 \leq \eta \leq b.$$

Ищем решение системы (23) в окрестности звуковой линии в виде рядов:

$$\left. \begin{aligned} w &= 1 + \sum_{i=2}^{\infty} w_i \xi^i; & \nu &= \sum_{i=3}^{\infty} \nu_i \xi^i; \\ p &= p_0 + \sum_{i=2}^{\infty} p_i \xi^i; & \rho &= 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \rho_i \xi^i; \\ a &= 1 + \sum_{i=2}^{\infty} a_i \xi^i; & r &= \sqrt{2\eta + r_0^2} + \sum_{i=4}^{\infty} r_i \xi^i. \end{aligned} \right\} (24)$$

Подставив ряды в систему (23), из 3-го и 4-го уравнений получим зависимость между коэффициентами разложений:

$$p_2 = -w_2, \quad p_3 = -w_3, \quad p_4 = -w_4, \quad \dots$$

$$p_2 = \rho_2, \quad p_3 = \rho_3, \quad p_4 = \rho_4 + a_2 \rho_2,$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2\nu}\right) w_2,$$

где величина  $\nu$  определяется на звуковой линии по формуле (13).

Для определения коэффициентов  $w_2, \nu_3, r_4$  получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} w_2' + 2Aw_2 - \frac{3B}{\sqrt{2\eta + r_0^2}} \nu_3 &= 0; \\ \nu_3' + \left(3A + \frac{1}{2\eta + r_0^2}\right) \nu_3 - \frac{4B}{\sqrt{2\eta + r_0^2}} (w_2^2 - a_2 w_2) &= 0; \\ r_4 &= \frac{1}{4B} \nu_3. \end{aligned} \right\} (25)$$

Найдем граничные условия для коэффициентов разложений (24) в точках А и В. Для этого удобнее преобразовать

зовать систему (1) к полярным координатам  $t, \gamma$  по формулам

$$x = t \cos \gamma, \quad r = r_0 + t \sin \gamma,$$

где  $r = r_0$  для точки  $A(0, r_0)$  и  $r = 1$  для точки  $B(0, 1)$ .

Составляющие скорости, соответствующие старым и новым координатам, связаны формулами

$$\left. \begin{aligned} u &= w_t \cos \gamma - w_\gamma \sin \gamma; \\ v &= w_t \sin \gamma + w_\gamma \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Решение преобразованной системы будем искать в виде рядов

$$w_t(t, \gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\gamma) t^i; \quad w_\gamma(t, \gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(\gamma) t^i.$$

При  $t=0$  получим для функций  $w_t$  и  $w_\gamma$  следующие выражения

$$\left. \begin{aligned} w_t(\gamma) &= \pm \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right) \mp \frac{1}{6} (1+2\nu) \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right)^3 \pm \dots; \\ w_\gamma(\gamma) &= \mp 1 \pm \frac{1}{2} (1+2\nu) \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right)^2 \mp \dots, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где верхние знаки относятся к точке  $A$ , нижние - к точке  $B$ .

Найдем зависимость  $\gamma$  от  $\xi$ .

Заметим, что вдоль любого радиуса, исходящего из точки  $A$ , имеет место равенство

$$\frac{dr}{dx} = \operatorname{tg} \gamma \quad \text{при } \eta = 0.$$

Вдоль линии  $\xi = \text{const}$ , касающейся данного радиуса (рис. 4),

$$\frac{dr}{dx} = \frac{r_0 b \xi \rho \sin \nu + \cos \nu}{r_0 b \xi \rho \cos \nu - \sin \nu} \quad \text{при } \eta = 0.$$

Пользуясь двумя последними равенствами, можно найти соотношение между  $\gamma$  и  $\xi$ , имеющее место в бесконечно малой окрестности точки  $A(0, r_0)$

$$\xi = \frac{1}{r_0 b} \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right). \quad (28)$$

Совершенно аналогично - в точке  $B(0, 1)$

$$\xi = \frac{1}{b} \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right).$$

Учитывая выражения (22), (24), (26), (27), (28) и приравняв члены при одинаковых степенях  $\xi$ , получим граничные условия в точке А

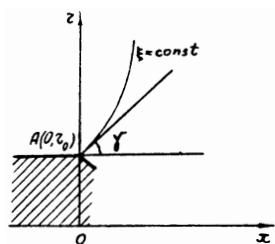


Рис. 4

$$\left. \begin{aligned} w_2(0) &= -\nu r_0^2 b^2; & w_3(0) &= 0; \\ \vartheta_3(0) &= \frac{2}{3} \nu r_0^3 b^3; & \vartheta_4(0) &= 0. \end{aligned} \right\} (29)$$

Аналогично - в точке В

$$\left. \begin{aligned} w_2(b) &= -\nu b^2; & w_3(b) &= 0; \\ \vartheta_3(b) &= -\frac{2}{3} \nu b^3; & \vartheta_4(b) &= 0. \end{aligned} \right\} (30)$$

Обозначим через  $F$  и  $G$  выражения

$$F = -\frac{w_2}{\nu}, \quad G = -\frac{\vartheta_3}{\nu}.$$

Подставив их в систему (25), вместе с граничными условиями (29) и (30) получим следующую краевую задачу для функций  $F$  и  $G$ :

$$\left. \begin{aligned} F' + 2AF - \frac{3B}{\sqrt{2\eta + r_0^2}} G &= 0 \\ G' + \left(3A + \frac{1}{2\eta + r_0^2}\right) G - \frac{2B}{\sqrt{2\eta + r_0^2}} F^2 &= 0 \\ F(0) &= r_0^2 b^2, & G(0) &= -\frac{2}{3} r_0^3 b^3, \\ F(b) &= b^2, & G(b) &= \frac{2}{3} b^2. \end{aligned} \right\} (31)$$

Ни в уравнения, ни в краевые условия не входит величина  $\nu$ , характеризующая свойства газа. Это позволяет построить универсальные таблицы функций  $F$  и  $G$ .

Заметим, что на функции, определяемые двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, наложены четыре крайних условия. Однако вследствие того, что точки  $\eta=0$  и  $\eta=b$  особые, краевая задача (31) имеет решение. Покажем это.

Разложим функции  $F$  и  $G$  в окрестности особых точек в ряды.

В окрестности точки  $\eta = 0$

$$\left. \begin{aligned} F(\eta) &= r_0^2 b^2 + \sum_{j=1}^5 a_j \eta^j + c^* \eta^6 + \dots; \\ G(\eta) &= -\frac{2}{3} a^3 b^3 + \sum_{j=1}^5 b_j \eta^j + e c^* \eta^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

В окрестности точки  $\eta = b$

$$\left. \begin{aligned} F(\eta) &= b^2 + \sum_{j=1}^5 c_j \eta_1^j + c_1^* \eta_1^6 + \dots; \\ G(\eta) &= \frac{2}{3} b^3 + \sum_{j=1}^5 d_j \eta_1^j + e_1 c_1^* \eta_1^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где  $\eta_1 = b - \eta$ .

Вычисление коэффициентов разложений (32) и (33) показывает, что величины  $c^*$  и  $c_1^*$  являются произвольными постоянными. Отсюда следует, что краевая задача (31) имеет решение при четырех краевых условиях.

Коэффициенты этих рядов зависят от значений параметра  $r_0$  и приведены в приложении (табл. 4) для значений  $r_0 = 0,85; 0,875; 0,9; 0,925; 0,95$ . С теми же значениями параметра  $r_0$  было проведено численное интегрирование уравнений (31). Полученные значения функций  $F$  и  $G$  даются в табл. 5. Отметим, что численное решение уравнений (31) в окрестности особых точек "склеивалось" с рядами (32) и (33). Максимальная ошибка таблиц не превышает 0,0005 для функций  $10^2 F$  и  $10^3 G$ .

Для определения коэффициентов  $w_3$  и  $\vartheta_4$  имеем линейные однородные дифференциальные уравнения с граничными условиями

$$w_3(0) = \vartheta_4(0) = w_3(b) = \vartheta_4(b) = 0.$$

В предположении единственности решения получаем

$$w_3(\eta) \equiv \vartheta_4(\eta) \equiv 0.$$

Следовательно,  $r_5(\eta) \equiv 0$ .

Все расчеты проведены Ван Жу-цканем в той же работе [11].

## Глава вторая

### РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В РАЗГОННОМ УЧАСТКЕ СОПЛА

#### § 1. Метод характеристик для равновесных течений несовершенного газа

Сверхзвуковая часть течения в соплах рассчитывается методом характеристик.

Уравнения характеристик системы (1) определяются соотношениями

$$dr = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \alpha) dx;$$

$$d\vartheta \pm \frac{1}{\rho w^2} \operatorname{ctg} \alpha dP \pm j \frac{\sin \alpha \sin \vartheta}{r \cos(\vartheta \pm \alpha)} dx = 0.$$

Здесь верхний (нижний) знак относится к характеристикам первого (второго) семейства.

При использовании электронных вычислительных машин для экономии машинного времени лучше избавиться от тригонометрических функций. С этой целью введем новые переменные [20–22]

$$\zeta = \operatorname{tg} \vartheta;$$

$$\beta = \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{w^2}{a^2} - 1}.$$

В новых переменных уравнения характеристик первого и второго семейств будут иметь вид

$$dr = \frac{\beta \zeta \pm 1}{\beta \mp \zeta} dx; \quad (34)$$

$$d\zeta \pm \frac{\beta(1+\zeta^2)}{\rho w^2} dP \pm j \cdot \frac{\zeta(1+\zeta^2)}{r(\beta \mp \zeta)} dx = 0. \quad (35)$$

В дальнейшем понадобится выражение для функции тока  $\psi$ , которая в новых переменных определяется уравнением

$$d\psi = c_4 \frac{\rho w}{\sqrt{1 + \zeta^2}} r^j (dr - \zeta dx),$$

где  $c_4$  — произвольный постоянный множитель, выбираемый из соображений удобства счета.

Учитывая уравнение (34) найдем, что вдоль характеристик первого и второго семейств

$$d\psi = \pm c_4 \rho w r^j \frac{\sqrt{1 + \zeta^2}}{\beta \mp \zeta} dx \quad (36)$$

или

$$d\psi = \pm c_4 \rho w r^j \frac{\sqrt{1 + \zeta^2}}{\beta \zeta \pm 1} dr.$$

Здесь, как и везде, верхние знаки относятся к характеристикам первого семейства.

Для определения температуры  $T$  в потоке используем условие постоянства энтропии

$$dT = \frac{1}{h_T} \left( \frac{1}{\rho} - h_p \right) d\rho. \quad (37)$$

Функции  $h$ ,  $\rho$ ,  $w$  и  $\beta$  во всем потоке определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} h &= h(p, T); \\ \rho &= \rho(p, T); \\ w &= \{2[H_0 - h(p, T)]\}^{1/2}; \\ \beta &= \left\{ \frac{w^2}{\rho h_T} [\rho(\rho_p h_T - h_p \rho_T) + \rho_T] - 1 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Для получения расчетных формул записываем уравнения (34) и (35) в конечных разностях. Обозначим параметры в известных точках индексами 1 и 2, в искомой точке — индексом 3. Точки 1 и 3 соединяются характеристикой первого, а точки 2 и 3 — характеристикой второго семейства (рис. 5).



Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_1 - \zeta_1}{1 + \beta_1 \zeta_1} + \frac{\beta_3 - \zeta_3}{1 + \beta_3 \zeta_3} \right); \\
 n &= \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_2 \zeta_2 - 1}{\beta_2 + \zeta_2} + \frac{\beta_3 \zeta_3 - 1}{\beta_3 + \zeta_3} \right); \\
 \bar{n} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_2 + \zeta_2}{\beta_2 \zeta_2 - 1} + \frac{\beta_3 + \zeta_3}{\beta_3 \zeta_3 - 1} \right); \\
 L &= j \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\zeta_1 (1 + \zeta_1^2)}{r_1 (1 + \beta_1 \zeta_1)} + \frac{\zeta_3 (1 + \zeta_3^2)}{r_3 (1 + \beta_3 \zeta_3)} \right]; \\
 N &= j \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\zeta_2 (1 + \zeta_2^2)}{r_2 (\beta_2 + \zeta_2)} + \frac{\zeta_3 (1 + \zeta_3^2)}{r_3 (\beta_3 + \zeta_3)} \right]; \\
 \bar{N} &= j \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\zeta_2 (1 + \zeta_2^2)}{r_2 (\beta_2 \zeta_2 - 1)} + \frac{\zeta_3 (1 + \zeta_3^2)}{r_3 (\beta_3 \zeta_3 - 1)} \right]; \\
 K &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_1 (1 + \zeta_1^2)}{\rho_1 w_1^2} + \frac{\beta_3 (1 + \zeta_3^2)}{\rho_3 w_3^2} \right]; \\
 I &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_2 (1 + \zeta_2^2)}{\rho_2 w_2^2} + \frac{\beta_3 (1 + \zeta_3^2)}{\rho_3 w_3^2} \right]; \\
 T' &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \rho_2 h_{p2}}{\rho_2 h_{T2}} + \frac{1 - \rho_3 h_{p3}}{\rho_3 h_{T3}} \right); \\
 U &= -\frac{c_4}{2} \left[ \frac{\rho_2 w_2 r_2^j \sqrt{1 + \zeta_2^2}}{\beta_2 + \zeta_2} + \frac{\rho_3 w_3 r_3^j \sqrt{1 + \zeta_3^2}}{\beta_3 + \zeta_3} \right]; \\
 \bar{U} &= -\frac{c_4}{2} \left[ \frac{\rho_2 w_2 r_2^j \sqrt{1 + \zeta_2^2}}{\beta_2 \zeta_2 - 1} + \frac{\rho_3 w_3 r_3^j \sqrt{1 + \zeta_3^2}}{\beta_3 \zeta_3 - 1} \right].
 \end{aligned} \tag{39}$$

В начале расчета  $\alpha$  близко к  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\nu = 0$ . Поэтому лучше пользоваться расчетными формулами, не содержащими в знаменателе  $\beta + \zeta$ . Пользуясь введенными обозначениями, уравнения (34) и (35) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 x_3 - x_1 &= m(r_3 - r_1); \\
 x_3 - x_2 &= \bar{n}(r_3 - r_2); \\
 \zeta_3 - \zeta_1 + K(\rho_3 - \rho_1) + L(r_3 - r_1) &= 0; \\
 \zeta_3 - \zeta_2 - I(\rho_3 - \rho_2) - \bar{N}(r_3 - r_2) &= 0
 \end{aligned}$$

(в плоском случае  $L = \bar{N} = 0$ ).

Отсюда легко получить формулы для расчета  $x, r, p$  и  $\zeta$ :

$$\left. \begin{aligned} r_3 &= \frac{x_2 - x_1 - \bar{n}r_2 + mr_1}{m - \bar{n}}; \\ p_3 &= p_1 + \frac{1}{I+K} [\zeta_1 - \zeta_2 + I(p_2 - p_1) - L(r_3 - r_1) - \bar{N}(r_3 - r_2)]; \end{aligned} \right\} (40)$$

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_1 + m(r_3 - r_1); \\ \zeta_3 &= \zeta_1 - K(p_3 - p_1) - L(r_3 - r_1); \\ T_3 &= T_2 + T'(p_3 - p_2). \end{aligned} \right\} (41)$$

На больших расстояниях от входа сопла характеристики могут иметь точки с касательной, параллельной оси потока, то есть может быть  $\beta\zeta - 1 \approx 0$ . В этом случае для вычисления  $r_3$  и  $p_3$  нужно пользоваться уравнениями

$$\left. \begin{aligned} r_3 &= \frac{r_2 - mnx_2 + n(x_1 - x_2)}{1 - mn}; \\ p_3 &= p_1 + \frac{1}{I+K} [\zeta_1 - \zeta_2 - L(r_3 - r_1) - N(x_3 - x_2) + I(p_2 - p_1)]. \end{aligned} \right\} (42)$$

Система уравнений (40), (41) (или (41), (42)) решается методом последовательных приближений. В первом приближении в коэффициентах (39) считаем вторые члены равными первым, в следующих приближениях при счете вторых членов коэффициентов используются значения  $r_3, \zeta_3, \beta_3$ , полученные в предыдущем приближении. Значения  $p_3, w_3, \beta_3$  в каждом приближении определяются из формул (38) по найденным  $p_3, T_3$ . Обычно три приближения дают достаточную точность.

Расход вдоль характеристики второго семейства определяется вычислением функций  $\psi$  по формуле

$$\psi_3 = \psi_2 + U(x_3 - x_2) \quad (43)$$

или

$$\psi_3 = \psi_2 + \bar{U}(r_3 - r_2). \quad (44)$$

Множитель  $c_4$  в уравнении (36) удобно выбрать таким, чтобы, например, величина  $\psi$  в потоке менялась от 0 до 1.

Вдоль характеристики первого семейства расход определяется по формуле

$$\psi_3 = \psi_1 + \frac{c_4}{2} \left( \rho_1 w_1 r_1^j \frac{\sqrt{1+\zeta_1^2}}{\beta_1 - \zeta_1} + \rho_3 w_3 r_3^j \frac{\sqrt{1+\zeta_3^2}}{\beta_3 - \zeta_3} \right) (x_3 - x_1) \quad (45)$$

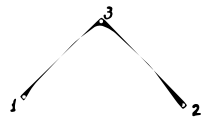


Рис. 5

или

$$\psi_3 = \psi_1 + \frac{c_4}{2} \left( \rho_1 w_1 r_1^j \frac{\sqrt{1+\zeta_1^2}}{\beta_1 \zeta_1 + 1} + \rho_3 w_3 r_3^j \frac{\sqrt{1+\zeta_3^2}}{\beta_3 \zeta_3 + 1} \right) (r_3 - r_1). \quad (46)$$

## § 2. Особенности расчета угловой точки и точек на оси

При обтекании сверхзвуковым потоком газа жесткого контура с изломом образующей в бесконечно малой окрестности точки излома реализуется течение Прандтля-Майера. В точке излома  $x = \text{const}$ ,  $r = \text{const}$ , остальные величины зависят от направления подхода к этой точке. Характеристика одного семейства (первого, если угловая точка на внешней образующей, второго, если на внутреннем теле), проходящая через точку излома, вырождается в точку, а характеристики другого семейства выходят из этой точки пучком.

В угловых точках  $\zeta$  и  $p$  связаны следующими уравнениями, записанными в конечных разностях:

$$\zeta_3 - \zeta_1 + K(p_3 - p_1) = 0 \quad (47)$$

для характеристики первого семейства,

$$\zeta_3 - \zeta_2 - I(p_3 - p_2) = 0 \quad (48)$$

для характеристики второго семейства.

Эти уравнения получены из уравнения (35) при условии, что  $dx = 0$ .

При переходе от одной характеристики пучка к другой, лежащей ниже по течению, можно задавать, например, шаг изменения величины  $\zeta$ . В этом случае  $p$  определяется из уравнения (47) или (48). Все остальные параметры течения находятся из уравнений (37) и (38).

В осесимметричном случае при расчете у оси симметрии некоторые члены выражений (39) содержат неопределенности, которые легко раскрываются. При расчете точки С (рис. 6) вычисления проводятся по обычным формулам, нужно только в формуле для  $L$  найти

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 0}} \frac{\zeta}{r} = \frac{d\zeta}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\rho w^2} \frac{dp}{dr}$$

в точке пересечения характеристики первого семейства с осью. В этом случае  $L$  вычисляется по следующей формуле

$$L = j \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\zeta_3(1+\zeta_3^2)}{r_3(1+\beta_3\zeta_3)} + \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\rho_1 w_1^2} \cdot \frac{p'_3 - p_1}{r'_3} \right], \quad (49)$$

где  $p'_3$  и  $r'_3$  — значения  $p$  и  $r$  в точке  $3'$  на предыдущей характеристике.

В точке оси  $B$  (см. рис. 6)  $r_3=0, \zeta_3=0$ . В случае, если  $\beta+\zeta=0$ , величины  $x_3$  и  $p_3$  находятся из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_2 - \bar{n} r_2; \\ p_3 &= p_2 + \zeta_2 \left( \frac{1+\zeta_2^2}{\beta_2\zeta_2-1} - 2 \right) \left[ \frac{\beta_2(1+\zeta_2^2)}{\rho_2 w_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta_3}{\rho_3 w_3^2} \right]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Если величина  $\beta_2\zeta_2-1$  близка к 0, для расчета точки  $C$  пользуемся уравнениями (41) — (42), в которых  $L$  вычисляется по формуле (49), остальные величины — по формулам (39). В точке на оси  $x_3$  и  $p_3$  в этом случае находятся из уравнений:

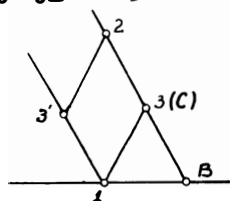


Рис. 6

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{1}{n} r_2; \\ p_3 &= p_2 - \zeta_2 \left[ 2 - \frac{1+\zeta_2^2}{n(\beta_2+\zeta_2)} \right] \cdot \left[ \frac{\beta_2(1+\zeta_2^2)}{\rho_2 w_2^2} + \frac{1}{\rho_3 w_3^2} \left( \beta_3 + \frac{1}{2n} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

### § 3. Выделение адиабаты

Во многих практически интересных случаях, например для расчета течений воздуха, аналитические выражения для  $\rho$  и  $h$  через  $p$  и  $T$  очень сложны. Это приводит к еще более сложным выражениям для их производных и, следовательно, для  $\beta$  и  $T'$ . Так как  $\rho, h, \beta$  и  $T'$  приходится считать по несколько раз в каждой точке характеристической сетки, то расчеты становятся чрезвычайно громоздкими. В таких случаях решению газодинамической задачи должно предшествовать исключение температуры из выражений (2) путем интегрирования уравнения изэнтропичности (37) [30]. На этом этапе для вычисления  $\rho$  и  $h$  нами использовались выражения из работы И.Н.Наумовой [31]. Затем подбираются достаточно простые аналитические выражения, дающие  $\rho, h$  и  $a$  как функции давления. Однако в рассматриваемом случае достаточно полу-

читать аналитическое выражение лишь для одной термодинамической функции.

Выбор аппроксимируемой функции и вида аппроксимации определяется соображениями достижения максимальной точности и простоты. Поэтому за аппроксимируемую величину целесообразно взять такую, чтобы другие получались из нее интегрированием и чтобы она изменялась достаточно плавно.

При изэнтропическом течении имеем

$$\frac{p}{\rho} = \frac{dh}{d \ln p}; \quad \frac{d^2 h}{d \ln p^2} = \frac{p}{\rho} \left( 1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{p}{\rho} \right). \quad (52)$$

Первое уравнение — уравнение адиабатичности, второе получается дифференцированием первого с учетом определения скорости звука  $a^{-2} = \frac{dp}{d\rho}$ .

Непосредственные расчеты, проведенные Хансеном [32] показывают, что при адиабатическом течении  $\frac{d^2 h}{d \ln p^2}$  — плавно меняющаяся положительно определенная функция  $\ln p$ . Таким образом,  $\frac{d^2 h}{d \ln p^2}$  удовлетворяет всем указанным выше условиям и может быть выбрана за аппроксимируемую величину. Остальные величины выражаются из уравнений (52) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \int_{\ln p^*}^{\ln p} \frac{d^2 h}{d \ln p^2} + \frac{p^*}{\rho^*}; \\ h &= \int_{\ln p^*}^{\ln p} \frac{p}{\rho} d \ln p + h^*; \\ a^2 &= \frac{\left(\frac{p}{\rho}\right)^2}{\frac{p}{\rho} - \frac{d^2 h}{d \ln p^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

здесь  $p^*, \rho^*$  — давление и плотность на переходной поверхности.

При расчетах применялся следующий порядок исключения температуры. Задаются начальные значения  $p^*, T^*$  и  $p_{\min}$  — минимальное давление при течении в сопле. Если

рассчитывается сопло на заданное отношение давлений, то  $p_{\min} = p_{\infty}$  (индекс  $\infty$  будем приписывать параметрам на выходе из сопла). Если же, например, рассчитывается сопло на заданное  $M_{\infty}$ , то  $p_{\infty}$  всегда может быть оценено и  $p_{\min}$  следует брать с некоторым запасом. При расчете ряда сопел с одинаковыми  $p^*$  и  $T^*$  минимальное давление определяется по соплу с максимальным расширением. Значения  $p^*$  и  $p_{\min}$  дают интервал по  $p$ , в котором следует проводить исключение температуры. Зависимость последней от давления определится интегрированием на этом интервале уравнения (37), которое удобнее использовать в форме

$$\frac{dT}{d \ln p} = \frac{1}{h_T} \left( \frac{p}{\rho} - p h_p \right), \quad T = T_* \quad \text{при} \quad \ln p = \ln p^*.$$

Одновременно по второму уравнению (52) вычисляется  $\frac{d^2 h}{d \ln p^2}$ . При вычислении  $\rho, h_p, h_T$  и при определении констант  $\rho^*, h^*$  использовались аналитические выражения, полученные И.Н.Наумовой [31]. Эти выражения в диапазоне  $0,001 \text{ атм} \leq p \leq 1000 \text{ атм}$  и  $T \leq 16\,800^\circ \text{К}$  дают отклонения от данных таблиц [33-35], не превышающие 0,8%.

Полученная таким образом зависимость  $\frac{d^2 h}{d \ln p^2}$  от  $p$  затем аппроксимируется. В качестве аппроксимирующих функций брались полиномы наилучшего приближения по  $\ln p$ . Среди всех полиномов данной степени указанные полиномы аппроксимируют заданную функцию на заданном интервале изменения аргумента с наименьшей по абсолютной величине погрешностью. В зависимости от требуемой точности аппроксимации степень полинома могла меняться от 1 до 16. Для рассмотренных интервалов изменения давления  $0 \leq \ln \frac{p^*}{p} \leq 8$  (или  $1 \leq \frac{p^*}{p} \leq 2981$ ) достигалась точность аппроксимации  $\rho$  и  $h$  того же порядка или превышающая точность применявшихся при выделении адиабаты выражений работы И.Н.Наумовой [31]. С уменьшением интервала изменения давления точность аппроксимации растет. Коэффициенты многочленов  $\frac{p}{\rho}$  и  $h$  в соответствии с формулами (53) простым образом выражаются через коэффициенты многочлена  $\frac{d^2 h}{d \ln p^2}$ .

Исключение температуры вносит некоторые изменения в формулы и в порядок расчета. В этом случае  $\rho$  и  $h$  за-

висят только от  $p$ , и нужно получить новое выражение для  $\nu$ . Учитывая значения безразмерных параметров на переходной поверхности, нетрудно получить следующие соотношения:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1-\rho_p}{\rho_T};$$

$$\frac{d^2T}{dp^2} = -\frac{1}{h_T} \left[ 1 + h_{pp} + 2h_{pT} \frac{1-\rho_p}{\rho_T} + h_{TT} \left( \frac{1-\rho_p}{\rho_T} \right)^2 \right];$$

$$\frac{d^2\rho}{dp^2} = \rho_{pp} + 2\rho_{pT} \frac{dT}{dp} + \rho_{TT} \left( \frac{dT}{dp} \right)^2 + \rho_T \frac{d^2T}{dp^2}.$$

Исключая из последнего соотношения  $\frac{dT}{dp}$  и  $\frac{d^2T}{dp^2}$  при помощи двух первых равенств и сравнивая с формулой (13), получим

$$\nu = \left( \frac{d^2\rho}{dp^2} - 2 \right)^{-1}. \quad (54)$$

Все величины аппроксимируются многочленами по  $\ln p$ , поэтому удобнее перейти и к производным по  $\ln p$ . В результате из уравнений (54) и (53) найдем

$$\nu = \left\{ \frac{1}{p^3} \left[ \frac{d^2h}{d \ln p^2} (1-2p) - \frac{d^3h}{d \ln p^3} \right] - 2 \right\}^{-1}. \quad (55)$$

Значения  $\nu$ , определенные по формуле (13) с  $\rho(p, T)$  и  $h(p, T)$ , которые получены по аппроксимациям И.Н.Наумовой, и по формуле (55) с использованием аппроксимации полиномами, отличались на 1,5%. Это обеспечивало совпадение не менее трех цифр в значении газодинамических параметров на характеристике, сосчитанной с помощью рядов (10).

Имеет смысл аппроксимировать не величину  $\frac{d^2h}{\ln p^2 d^2}$  разность между второй производной для некоторого фиктивного совершенного газа и  $h^{(2)}$ , сосчитанной с учетом свойств данного газа. Показатель адиабаты  $\kappa$  для фиктивного газа определяется по формуле

$$\kappa = \frac{\ln p_\infty / p^*}{\ln \rho_\infty / \rho^*},$$

где  $p_\infty$  и  $\rho_\infty$  — давление и плотность на выходе рассчитываемого сопла.

#### § 4. Схема расчета разгонного участка сопла и ее особенности

При расчете течения в разгонном участке сопла счет каждой новой характеристики проводится по следующей схеме:

1. Из уравнений (47), (37), (38) определяются искомые величины в угловой точке  $A$  (рис. 7) на следующей характеристике второго семейства.

2. По найденной угловой точке и точке  $a_1$  на последней сосчитанной характеристике второго семейства из уравнений (40)–(41) или (41)–(42) определяются  $x_3, r_3, p_3, \zeta_3$  в рассчитываемой точке  $a'_1$ , для определения величин  $T_3, \beta_3, \rho_3, w_3$  всегда используются уравнения (37) и (38). Индексы 1, 2 и 3 в этих уравнениях относятся соответственно к точке  $a_1$ , рассчитанной угловой точке и точке  $a'_1$ .

3. Аналогичным образом по точкам  $a'_1$  и  $a_2$  находится точка  $a'_2$  и так далее, пока не дойдем до расчета точки  $C$  у оси симметрии.

4. Переход к счету точек у оси симметрии определяется по величине  $r$  в точке 1 на характеристике первого семейства ( $r=0$  свидетельствует о необходимости перехода к счету точки у оси симметрии).

Точка  $C$  рассчитывается по тем же уравнениям, что и остальные точки в поле течения, только величина  $L$  в этом случае определяется по формуле (49). В точке  $B$  на оси симметрии  $r_3=0, \zeta_3=0$ , значения  $x_3$  и  $p_3$  определяются из уравнений (50) или (51).

Затем снова определяются искомые величины в угловой точке  $A$  для следующей характеристики пучка и рассчитывается новая характеристика; расчет продолжается таким образом до тех пор, пока величина  $\beta$  на оси не достигнет заданного значения.

Каждая новая характеристика второго семейства имеет на одну точку больше, чем предыдущая. Поэтому при счете на машине приходится, начиная с некоторой характеристики, искусственно сохранять число точек на характеристике.

Как показал опыт наших расчетов, целесообразнее всего это делать следующим образом.

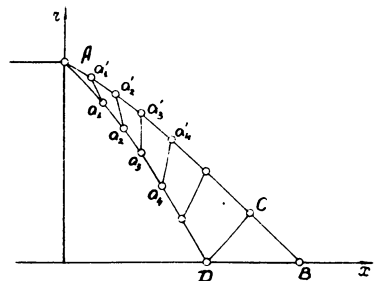


Рис. 7



Вычисляется отношение  $\frac{\Delta\beta_n}{\beta_n}$  для каждой двух соседних точек (за исключением угловой точки и нескольких точек у оси симметрии). Здесь  $\Delta\beta_n$  - разность значений  $\beta$  в этих точках,  $\beta_n$  - значение  $\beta$  в какой-либо из этих точек, например в верхней (ближайшей из двух к угловой точке). Для пары точек, имеющих минимальное значение этого отношения (пусть это будут  $i$ -я и  $(i+1)$ -я точки), дополнительно вычисляются и сравниваются модули разностей  $|\beta_i - \beta_{i-1}|$  и  $|\beta_{i+2} - \beta_{i+1}|$ . Если меньшей оказывается первая из них, выбрасывается  $i$ -я точка, если вторая -  $(i+1)$ -я. "Выбрасывание" осуществляется последовательным сдвигом всего массива чисел, соответствующего данной характеристике: если выбрасывается  $i$ -я точка, то значения параметров в  $(i+1)$ -й точке помещаются в ячейки памяти, соответствующие  $i$ -й точке,  $(i+2)$ -я перемещается на место  $(i+1)$ -й и так далее, до конца характеристики.

При таком способе выбрасывания удается сохранить некоторую равномерность в изменении параметров в точках на характеристике.

При счете каждой новой характеристики  $\Delta\zeta$  в угловой точке выбирается по формуле

$$\Delta\zeta = \frac{\Delta\zeta_{\text{пред}}}{n_i \Delta r}, \quad (56)$$

где  $\Delta\zeta_{\text{пред}}$  - изменение  $\zeta$  в угловой точке при счете последней характеристики пучка;  $\Delta r$  - координата точки  $c$  у оси симметрии на сосчитанной характеристике;  $n_i$  - число точек на этой характеристике. Использование этой формулы позволяет получить равномерное распределение точек характеристики.

Для получения заданного  $\beta$  на оси применялась следующая схема.

При расчете каждой характеристики находится отношение разности значений заданного  $\beta_0$  на оси и последнего полученного  $\beta_{n+1}$  к разности значений функции  $\beta$  в точках пересечения двух последних характеристик второго семейства с осью, то есть  $\frac{\beta_0 - \beta_{n+1}}{\beta_{n+1} - \beta_n}$ . Если это отношение меньше чем  $7/5$ , то последняя рассчитанная характеристика запоминается в какой-либо неиспользуемой части памяти машины. По этой характеристике (будем называть ее "опорной") и найденному по формуле (56)  $\Delta\zeta$  считается следующая характеристика. По значениям функции  $\beta$  в точках пересечения последней и опорной характеристики

с осью находим линейной экстраполяцией на заданное значение  $\beta_0$  такое  $\Delta\zeta$ , чтобы по опорной характеристике и найденному  $\Delta\zeta$  построить характеристику с заданным  $\beta_0$  на оси (в пределах точности). Процесс экстраполяции придется повторять несколько раз, проводя каждый раз вычисления по опорной характеристике и последнему найденному  $\Delta\zeta$ .

Использование иных схем, при которых элементарная клетка у оси, ограниченная характеристиками, чрезмерно отклоняется от равносторонней, может привести к расходимости рекомендованных итераций при расчете точек у оси симметрии.

Вдоль характеристик вычисляется функция тока  $\psi$ . Величина  $\psi$  на оси характеризует погрешность вычислений.

Таблицы значений параметров течения совершенного газа вдоль характеристик в разгонном участке осесимметричных сопел даны в [36]. Таблицы приведены для показателей адиабаты  $\kappa = 1,14; 1,33; 1,4; 1,66667$ .

При расчете течения внутри кольцевого сопла с двумя угловыми точками расчет ведется от верхней угловой точки вдоль характеристик второго семейства до линии  $\zeta=0$  и от нижней угловой точки вдоль характеристики первого семейства до этой же линии.

Результаты расчетов кольцевых сопел с угловыми точками, расположенными в одной плоскости, а со смещенными угловыми точками приводятся в работе У.Г. Пирумова и В.А. Рубцова [37]. Расчеты были проведены для совершенного газа с  $\kappa = 1,4$ . Поток на входе сопла считался равномерным сверхзвуковым с числом Маха  $M = 1,01$ .

---

## Глава третья

### РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В ВЫРАВНИВАЮЩЕМ УЧАСТКЕ СОПЛА

#### § 1. Сопло с заданной образующей

Пусть  $AC$  — образующая сопла, заданная уравнением  $r = f(x)$ ,  $AB$  — последняя рассчитанная характеристика разгонного участка (рис. 8). Нужно рассчитать течение в выравнивающем участке сопла.

Расчет проводится в следующем порядке.

Из точки  $a_1$  (см. рис. 8) на заданной характеристике второго семейства  $AB$  проводим характеристику первого семейства  $a_1c_1$  до пересечения с заданной образующей (точка  $a_1$  — ближайшая к угловой). В точке  $c_1$  величины  $x_3, r_3, \zeta_3, p_3$  и  $T_3$  находятся из следующих уравнений [22]:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{m[f(x_3) - x_3 f'(x_3) - r_1] + x_1}{1 - m f'(x_3)}; \\ r_3 &= f(x_3); \quad \zeta_3 = f'(x_3); \\ p_3 &= p_1 + \frac{1}{K} [\zeta_1 - \zeta_3 - L(r_3 - r_1)]; \\ T_3 &= T_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \rho_1 h_{p1}}{\rho_1 h_{T1}} + \frac{1 - \rho_3 h_{p3}}{\rho_3 h_{T3}} \right) (p_3 - p_1). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Здесь индексы 1 относятся к величинам в известной точке  $a_1$ , индексы 3 — к величинам в рассчитываемой точке  $c_1$  на стенке сопла. В правой части формулы для вычисления  $x_3$  в первом приближении вместо  $x_3$  подставляется значение  $x$  в предыдущей точке на стенке сопла (при расчете первой точки —  $x$  угловой точки  $A$ ). В последующих приближениях, как обычно, подставляется  $x_3$  из предыдущего приближения.

Остальные параметры течения определяются по формулам (38).

По найденной точке на стенке сопла  $c_1$  и точке  $a_2$  характеристики  $AB$  по формулам (38), (40), (41) или (38), (41), (42) рассчитывается точка  $b_1$ , затем по (57) определяется новая точка на контуре ( $c_2$ ), и так далее. Так как расчет обычно проводится с целью определения распределения давления на стенке сопла, то расчет продолжается до характеристики  $A_1C$  (см.рис.8), приходящей в последнюю точку, заданную на образующей.

При расчете этой части течения следует иметь в виду, что в сопле могут возникать скачки уплотнения. Поэтому нужно следить, чтобы характеристики одного семейства не пересекались. Пересечение говорит о возникновении скачка уплотнения. Продолжать расчет методом характеристик в этом случае нельзя - необходимо учитывать соотношения на скачке уплотнения. Пример расчета течения свободно расширяющегося газа с внутренним скачком уплотнения приводится в работе Т.Г.Волконской [38].

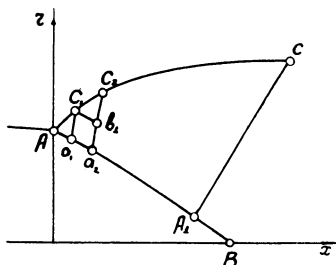


Рис. 8

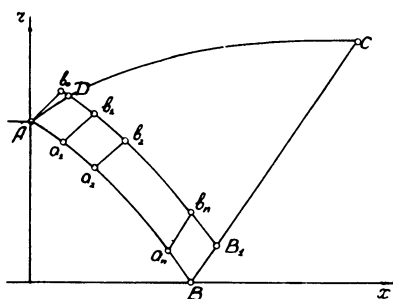


Рис. 9

## § 2. Определение образующей сопла по заданным условиям на выходе

Рассматриваем случай, когда параметры течения на выходе сопла заданы на характеристике первого семейства  $BC$  (рис.9). По этой характеристике и сосчитанной характеристике  $AB$  нужно найти течение внутри треугольника  $ABC$  (задача Гурса) и форму образующей  $AC$ .

Если начальная точка  $B$  заданной характеристике  $BC$  лежит на  $AB$ , но не принадлежит оси течения, то порядок расчета не меняется.

Замыкающая характеристика ВС может задаваться из различных соображений. Например, для получения равномерного потока на выходе эта характеристика должна быть прямолинейной, а ее начальная точка В должна лежать за оси. Для построения контуров сопел, обеспечивающих максимальную тягу при различных ограничениях, замыкающая характеристика ВС строится на основании работ Ю.Д.Шмыглевского [39] и А.Н.Крайко [40].

Расчет течения ведется в обратном направлении: по точкам  $a_n$  и  $B_1$  на известных характеристиках по формулам (38), (40), (41) или (38), (41), (42) определяется точка  $b_n$  характеристики второго семейства, затем точка  $b_{n-1}$  и так далее, пока в какой-то точке  $b_0$  не получим  $\psi > 1$ . После этого интегрированием по контуру  $Aa_1b_1b_0$  и  $Aa_1b_1b_2$  (см. рис. 9) получаем другие значения  $\psi$  в точках  $b_0, b_1, b_2$  (функция  $\psi$  вычисляется по формулам (43) или (44) вдоль характеристик второго семейства и по формулам (45) или (46) вдоль участка  $a_1b_1$  характеристики первого семейства). Разность значений  $\psi$  в точке  $b_1$  характеризует ошибку вычисления.

Затем квадратичной интерполяцией на  $\psi = 1$  по точкам  $b_0, b_1, b_2$  с новыми значениями  $\psi$  находим точку D образующей сопла. Таким образом последовательно получаем весь участок образующей АС до пересечения с характеристикой ВС.

Если нужно получить образующие сопел без точек излома, то расход искомого сопла задается как некоторая часть расхода основного сопла. Образующая сопла получается также квадратичной интерполяцией на заданный расход.

Совершенно аналогичным образом рассчитывается форма внутреннего тела кольцевого сопла. В этом случае расчет производится до  $\psi \leq 0$  и интерполяция ведется на  $\psi = 0$ .

---

## Глава четвертая

### ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

#### § 1. Примеры расчета отдельных точек методом характеристик

Все расчеты этого параграфа приведены для совершенного газа с показателем адиабаты  $\kappa = 1,4$ . В этом случае формулы (38) можно записать в следующем виде:

$$h = \frac{\kappa}{\kappa - 1} T;$$

$$\rho = \frac{p}{T};$$

$$w^2 = 2 \left( H_0 - \frac{\kappa}{\kappa - 1} T \right);$$

$$\beta = \sqrt{\frac{w^2}{\kappa T} - 1}.$$

Значение константы  $H_0$  приводится в каждом примере. Все примеры сосчитаны для осесимметричных течений.

#### 1. Расчет угловой точки

Исходные величины:

$$\begin{array}{lll} \beta_1 = 1,478761; & p_1 = 0,501322; & \Delta\zeta = 0,001; \\ \zeta_1 = 0,236788; & T_1 = 0,523495; & H_0 = 3,00; \\ \zeta_3 = 0,237788. & & \end{array}$$

Результаты расчета по уравнению (47):

Искомые величины	Приближение		
	I	II	III
$\beta_3$	1,479641	1,481021	1,481020
$p_3$	0,499890	0,499891	0,499892
$T_3$	0,523068	0,523068	0,523068

## 2. Расчет точки в поле течения

Исходные данные:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0,634785; & x_2 = 0,620031; \\
 r_1 = 0,771277; & r_2 = 0,793122; \\
 \beta_1 = 1,481021; & \beta_2 = 1,512395; \\
 \zeta_1 = 0,213744; & \zeta_2 = 0,214063; \\
 p_1 = 0,500031; & p_2 = 0,480135; \\
 T_1 = 0,523068; & T_2 = 0,517140; \\
 H_0 = 3,000000. & 
 \end{array}$$

Результаты расчета по формулам (40), (41):

Искомые величины	Приближение		
	I	II	III
$x_3$	0,648015	0,646103	0,646104
$r_3$	0,782944	0,782970	0,782971
$\beta_3$	1,512716	1,512755	1,512756
$\zeta_3$	0,218171	0,218235	0,218235
$p_3$	0,489934	0,489910	0,489909
$T_3$	0,517079	0,517072	0,517072

## 3. Расчет точки перед осью (точка 3(C) на рис.6)

Исходные данные:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0,599704; & x_2 = 0,598623; \\
 r_1 = 0,000000; & r_2 = 0,1607824 \cdot 10^{-1}; \\
 \beta_1 = 0,867919 \cdot 10^{-1}; & \beta_2 = 0,1656991; \\
 \zeta_1 = 0,000000; & \zeta_2 = 0,627895 \cdot 10^{-3}; \\
 p_1 = 0,711157; & p_2 = 0,709031; \\
 T_1 = 0,713391; & T_2 = 0,711032; \\
 H_0 = 3,00000; & p'_3 = 0,711229; \\
 r'_3 = 0,808493 \cdot 10^{-2}. & 
 \end{array}$$

Результаты расчета по формулам (40), (41) (величина  $L$  вычислялась по формуле (49) ):

Искомые величины	Приближение		
	I	II	III
$x_3$	0,600250	0,600478	0,600488
$r_3$	0,006295	0,005636	0,005657
$\beta_3$	0,188544	0,191017	0,195372
$\zeta_3$	0,000489	0,000579	0,000599
$p_3$	0,705704	0,705324	0,704636
$T_3$	0,710079	0,709968	0,709770

#### 4. Расчет точки на оси симметрии

Исходные данные:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0,808679 \cdot 10^{-1}; & \zeta_2 &= 0,322972 \cdot 10^{-5}; \\ r_2 &= 0,799137 \cdot 10^{-2}; & p_2 &= 0,711084; \\ \beta_2 &= 0,877823 \cdot 10^{-1}; & T_2 &= 0,713370; \\ H_0 &= 3,00000; & \zeta_3 &= 0,000000; \\ r_3 &= 0,000000. \end{aligned}$$

Результаты расчетов по формулам (50) и (51) в данном случае совпадают:

Искомые величины	Приближение		
	I	II	III
$x_3$	0,061369	0,061373	0,061373
$\beta_3$	0,088770	0,088766	0,088766
$p_3$	0,711010	0,711010	0,711010
$T_3$	0,713349	0,713349	0,713349

#### 5. Расчет точки на стенке сопла

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,412500; & x_2 &= 0,400000; \\ r_1 &= 1,249340; & r_2 &= 1,250670; \\ \beta_1 &= 1,066610; & \beta_2 &= 1,028908; \\ \zeta_1 &= 0,282800; & \zeta_2 &= 0,280000; \\ p_1 &= 0,686420; & p_2 &= 0,705420; \\ T_1 &= 0,700510; & T_2 &= 0,708350; \\ H_0 &= 3,500000; & f(x) &= 1 + 0,973333x - 0,866667x^2. \end{aligned}$$

Результаты расчетов по формулам (57):

Искомые величины	Приближение		
	I	II	III
$x_3$	0,415996	0,415805	0,415802
$r_3$	1,254924	1,254876	1,254875
$\beta_3$	0,992381	0,991820	0,991834
$\zeta_3$	0,252274	0,252605	0,252609
$p_3$	0,749755	0,751553	0,751602
$T_3$	0,715838	0,715952	0,715949

Величина  $\psi_3 - \psi_1$ , вычисленная по формуле (46) при  $c_4 = 2,00000$ , в этом случае равна 0,016427.



## § 2. Пример расчета сопла

В качестве примера приводится расчет сопла с течением водорода. В расчете использовались следующие выражения для энтальпии и плотности, взятые из работы Хеллера [41]:

$$h = \frac{7+3\mu}{2} \cdot T + 2\mu + (1-\mu) T_v \cdot \frac{e^{-T_v/T}}{1 - e^{-T_v/T}};$$

$$\rho = \frac{p}{(1+\mu)T}; \quad \mu^{-2} = 1 + p T^{-3/2} (1 - e^{-T_v/T})^{-1} e^{2/T},$$

здесь  $\mu$  - степень диссоциации;  $T_v$  - колебательная температура. Температура, давление и плотность отнесены к некоторым константам  $T_D, p_D$  и  $\rho_D$  ( $T_D = 25\,980^\circ\text{K}$ ;  $p_D = 18,52 \cdot 10^6 \text{ атм}$ ;  $\rho_D = p_D / R T_D$ , где  $R = 4,155 \cdot 10^7 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-2} \cdot \text{град}^{-1}$ ). В приведенных формулах  $T_v = 0,230$ .

Указанные формулы описывают равновесное состояние газа до тех пор, пока влияние ионизации на термодинамические параметры несущественно.

На рис. 10-14 сплошными линиями приведены результаты расчетов течений водорода с начальными  $T^* = 5000^\circ\text{K}$ ,  $p^* = 1 \text{ атм}$ . Определялся контур сопла, дающий на выходе равномерный поток с числом Маха  $M_\infty = 5$ . На тех же графиках штриховыми кривыми приведены результаты расчетов течения некоторого совершенного газа с показателем адиабаты  $\kappa = 1,158$ . Показатель адиабаты находился по формуле

$$\kappa = \frac{\ln p_\infty / p^*}{\ln \rho_\infty / \rho^*},$$

где  $p_\infty$  и  $\rho_\infty$  - полученные давление и плотность на выходе сопла, рассчитанного для течения водорода.

На рис. 10 показаны контуры сопел, на рис. 11 - участки тех же сопел вблизи переходной поверхности. На рис. 12 и 13 даны распределение функции  $\beta$  (см. рис. 12) и температуры (см. рис. 13) по образующим сопел, на рис. 14 - значение интеграла сил давления на стенке сопла с угловой точкой.

Подчеркнем, что при сравнении результатов расчетов требуется аккуратность. Например, в случае приведения к безразмерному виду используется произведение квадрата критической скорости на критическую плотность. Эта величина при фиксированных температуре и давлении на пе-

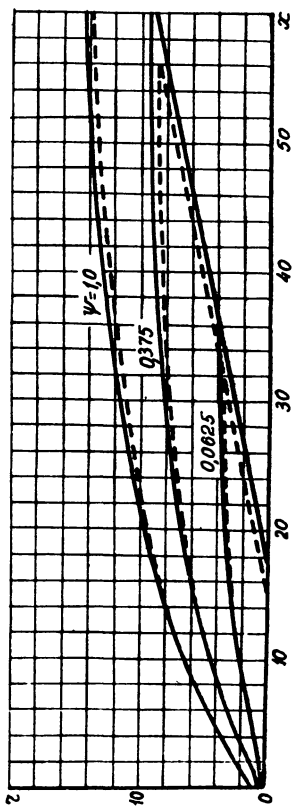


Рис. 10

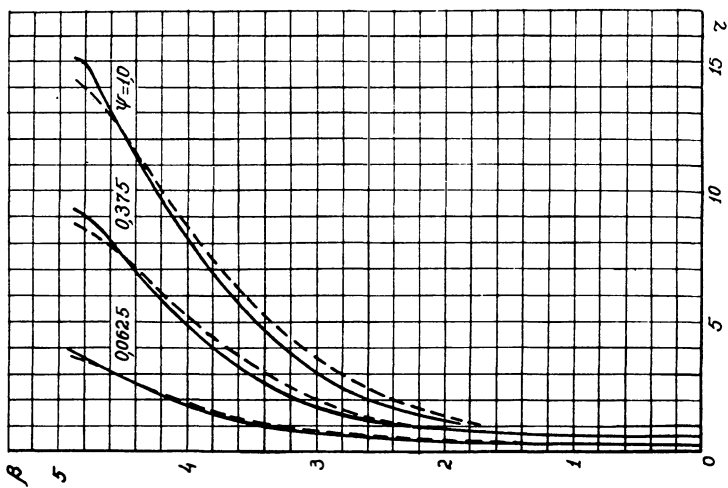


Рис. 12

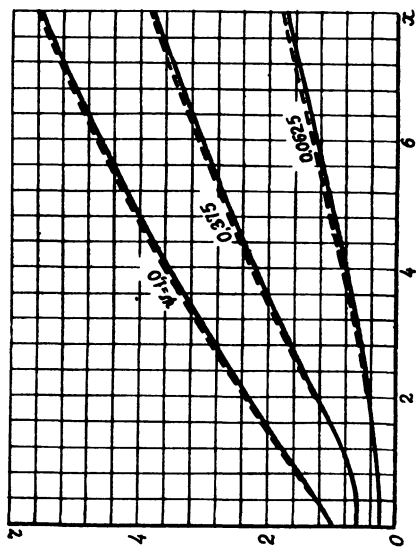


Рис. 11

реходной поверхности различна для совершенного газа и газа с произвольными термодинамическими свойствами. Так как сравнение должно производиться при одинаковых характерных параметрах, то для некоторых величин следует производить пересчет. Например, интеграл сил давления для течения совершенного газа определится соотношением

$$\bar{P} = p^* \kappa \bar{P}_\kappa,$$

где  $p^*$  - безразмерное давление на переходной поверхности для несовершенного газа;  $\bar{P}_\kappa$  - интеграл сил давления, определенный для совершенного газа с данным показателем адиабаты.

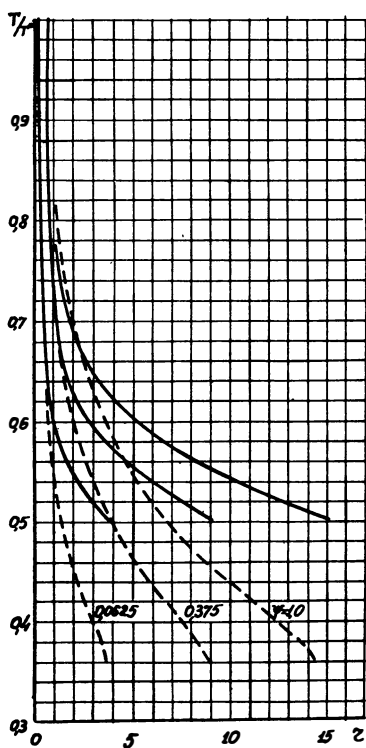


Рис. 13

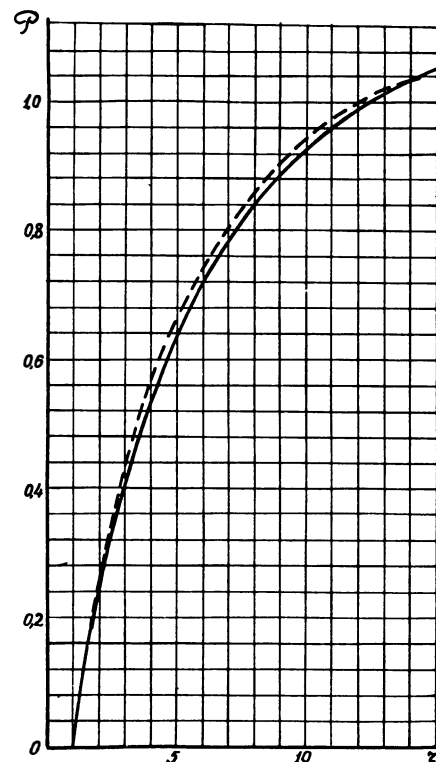


Рис. 14

Расчеты были проведены на электронной вычислительной машине БЭСМ-2 и опубликованы ранее [30].

## **ПРИЛОЖЕНИЕ**

**ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ  $\omega(z)$ ,  $\omega'(z)$ ,  $\omega''(z)$   
ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$	$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$
0.000	1.2254	-1.7732	2.5658	0.240	0.8566	-1.3571	1.1216
0.005	1.2166	-1.7605	2.5198	0.245	0.8498	-1.3515	1.1034
0.010	1.2078	-1.7480	2.4748	0.250	0.8431	-1.3460	1.0855
0.015	1.1991	-1.7357	2.4307	0.255	0.8364	-1.3406	1.0680
0.020	1.1904	-1.7236	2.3874	0.260	0.8297	-1.3353	1.0508
0.025	1.1818	-1.7118	2.3450	0.265	0.8230	-1.3301	1.0340
0.030	1.1733	-1.7002	2.3035	0.270	0.8164	-1.3250	1.0174
0.035	1.1648	-1.6888	2.2627	0.275	0.8098	-1.3200	1.0011
0.040	1.1564	-1.6776	2.2228	0.280	0.8032	-1.3150	0.9852
0.045	1.1481	-1.6665	2.1837	0.285	0.7966	-1.3101	0.9696
0.050	1.1398	-1.6557	2.1453	0.290	0.7901	-1.3053	0.9543
0.055	1.1315	-1.6451	2.1076	0.295	0.7836	-1.3006	0.9392
0.060	1.1233	-1.6346	2.0707	0.300	0.7771	-1.2959	0.9244
0.065	1.1152	-1.6244	2.0345	0.305	0.7706	-1.2913	0.9099
0.070	1.1071	-1.6143	1.9990	0.310	0.7641	-1.2868	0.8957
0.075	1.0990	-1.6044	1.9642	0.315	0.7577	-1.2824	0.8818
0.080	1.0910	-1.5947	1.9301	0.320	0.7513	-1.2780	0.8681
0.085	1.0831	-1.5851	1.8966	0.325	0.7449	-1.2737	0.8546
0.090	1.0752	-1.5757	1.8638	0.330	0.7385	-1.2694	0.8414
0.095	1.0673	-1.5665	1.8316	0.335	0.7322	-1.2653	0.8285
0.100	1.0595	-1.5574	1.8000	0.340	0.7259	-1.2612	0.8158
0.105	1.0517	-1.5485	1.7690	0.345	0.7196	-1.2571	0.8034
0.110	1.0440	-1.5397	1.7386	0.350	0.7134	-1.2531	0.7912
0.115	1.0363	-1.5311	1.7088	0.355	0.7071	-1.2492	0.7792
0.120	1.0287	-1.5226	1.6796	0.360	0.7009	-1.2453	0.7674
0.125	1.0211	-1.5143	1.6509	0.365	0.6947	-1.2415	0.7558
0.130	1.0136	-1.5061	1.6227	0.370	0.6885	-1.2378	0.7445
0.135	1.0061	-1.4980	1.5951	0.375	0.6823	-1.2341	0.7334
0.140	0.9986	-1.4901	1.5680	0.380	0.6761	-1.2304	0.7225
0.145	0.9911	-1.4823	1.5414	0.385	0.6700	-1.2268	0.7118
0.150	0.9837	-1.4747	1.5154	0.390	0.6638	-1.2233	0.7014
0.155	0.9764	-1.4672	1.4898	0.395	0.6577	-1.2198	0.6911
0.160	0.9691	-1.4598	1.4647	0.400	0.6516	-1.2164	0.6810
0.165	0.9618	-1.4526	1.4401	0.405	0.6456	-1.2130	0.6711
0.170	0.9546	-1.4454	1.4159	0.410	0.6395	-1.2097	0.6613
0.175	0.9474	-1.4384	1.3922	0.415	0.6335	-1.2064	0.6518
0.180	0.9402	-1.4315	1.3689	0.420	0.6274	-1.2032	0.6424
0.185	0.9330	-1.4247	1.3461	0.425	0.6214	-1.2000	0.6333
0.190	0.9259	-1.4180	1.3237	0.430	0.6155	-1.1968	0.6243
0.195	0.9188	-1.4115	1.3017	0.435	0.6095	-1.1937	0.6154
0.200	0.9118	-1.4050	1.2802	0.440	0.6035	-1.1907	0.6068
0.205	0.9048	-1.3987	1.2590	0.445	0.5976	-1.1877	0.5983
0.210	0.8978	-1.3924	1.2382	0.450	0.5916	-1.1847	0.5899
0.215	0.8909	-1.3863	1.2179	0.455	0.5857	-1.1818	0.5817
0.220	0.8840	-1.3802	1.1979	0.460	0.5798	-1.1789	0.5737
0.225	0.8771	-1.3743	1.1782	0.465	0.5739	-1.1760	0.5658
0.230	0.8702	-1.3685	1.1590	0.470	0.5681	-1.1732	0.5581
0.235	0.8634	-1.3627	1.1401	0.475	0.5622	-1.1704	0.5505

z	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$	z	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$
0.480	0.5564	-1.1677	0.5431	0.745	0.2624	-1.0618	0.2967
0.485	0.5505	-1.1650	0.5358	0.750	0.2571	-1.0603	0.2940
0.490	0.5447	-1.1624	0.5287	0.755	0.2518	-1.0588	0.2913
0.495	0.5389	-1.1597	0.5217	0.760	0.2465	-1.0574	0.2886
0.500	0.5331	-1.1571	0.5148	0.765	0.2412	-1.0559	0.2860
0.505	0.5273	-1.1546	0.5080	0.770	0.2359	-1.0545	0.2835
0.510	0.5216	-1.1521	0.5014	0.775	0.2306	-1.0531	0.2810
0.515	0.5158	-1.1496	0.4949	0.780	0.2254	-1.0517	0.2785
0.520	0.5101	-1.1471	0.4885	0.785	0.2201	-1.0503	0.2761
0.525	0.5043	-1.1447	0.4822	0.790	0.2149	-1.0489	0.2737
0.530	0.4986	-1.1423	0.4761	0.795	0.2096	-1.0476	0.2713
0.535	0.4929	-1.1399	0.4701	0.800	0.2044	-1.0462	0.2690
0.540	0.4872	-1.1376	0.4642	0.805	0.1992	-1.0449	0.2667
0.545	0.4815	-1.1353	0.4584	0.810	0.1940	-1.0436	0.2645
0.550	0.4759	-1.1330	0.4527	0.815	0.1887	-1.0422	0.2623
0.555	0.4702	-1.1308	0.4471	0.820	0.1835	-1.0409	0.2601
0.560	0.4646	-1.1285	0.4416	0.825	0.1783	-1.0396	0.2580
0.565	0.4589	-1.1263	0.4363	0.830	0.1731	-1.0383	0.2559
0.570	0.4533	-1.1242	0.4310	0.835	0.1679	-1.0371	0.2538
0.575	0.4477	-1.1220	0.4259	0.840	0.1628	-1.0358	0.2518
0.580	0.4421	-1.1199	0.4208	0.845	0.1576	-1.0346	0.2498
0.585	0.4365	-1.1178	0.4158	0.850	0.1524	-1.0333	0.2478
0.590	0.4309	-1.1158	0.4109	0.855	0.1473	-1.0321	0.2459
0.595	0.4253	-1.1137	0.4061	0.860	0.1421	-1.0309	0.2440
0.600	0.4198	-1.1117	0.4014	0.865	0.1369	-1.0296	0.2421
0.605	0.4142	-1.1097	0.3968	0.870	0.1318	-1.0284	0.2402
0.610	0.4087	-1.1077	0.3923	0.875	0.1267	-1.0272	0.2384
0.615	0.4031	-1.1058	0.3878	0.880	0.1215	-1.0260	0.2366
0.620	0.3976	-1.1039	0.3834	0.885	0.1164	-1.0249	0.2348
0.625	0.3921	-1.1019	0.3791	0.890	0.1113	-1.0237	0.2330
0.630	0.3866	-1.1000	0.3749	0.895	0.1062	-1.0225	0.2313
0.635	0.3811	-1.0982	0.3708	0.900	0.1011	-1.0214	0.2296
0.640	0.3756	-1.0964	0.3668	0.905	0.0960	-1.0202	0.2280
0.645	0.3701	-1.0945	0.3628	0.910	0.0909	-1.0191	0.2263
0.650	0.3647	-1.0927	0.3589	0.915	0.0858	-1.0180	0.2247
0.655	0.3592	-1.0909	0.3550	0.920	0.0807	-1.0169	0.2231
0.660	0.3537	-1.0892	0.3513	0.925	0.0756	-1.0157	0.2215
0.665	0.3483	-1.0874	0.3476	0.930	0.0705	-1.0146	0.2199
0.670	0.3429	-1.0857	0.3440	0.935	0.0654	-1.0135	0.2183
0.675	0.3374	-1.0840	0.3404	0.940	0.0604	-1.0125	0.2168
0.680	0.3320	-1.0823	0.3369	0.945	0.0553	-1.0114	0.2153
0.685	0.3266	-1.0806	0.3335	0.950	0.0503	-1.0103	0.2138
0.690	0.3212	-1.0790	0.3301	0.955	0.0452	-1.0092	0.2123
0.695	0.3158	-1.0773	0.3268	0.960	0.0402	-1.0082	0.2109
0.700	0.3105	-1.0757	0.3235	0.965	0.0351	-1.0071	0.2095
0.705	0.3051	-1.0741	0.3203	0.970	0.0301	-1.0061	0.2081
0.710	0.2997	-1.0725	0.3172	0.975	0.0251	-1.0051	0.2067
0.715	0.2944	-1.0709	0.3141	0.980	0.0201	-1.0040	0.2053
0.720	0.2890	-1.0693	0.3111	0.985	0.0150	-1.0030	0.2040
0.725	0.2837	-1.0678	0.3081	0.990	0.0100	-1.0020	0.2026
0.730	0.2783	-1.0663	0.3052	0.995	0.0050	-1.0010	0.2013
0.735	0.2730	-1.0647	0.3023	1.000	0.0000	-1.0000	0.2000
0.740	0.2677	-1.0632	0.2995				

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ  $\omega(z)$ ,  $\omega'(z)$ ,  $\omega''(z)$   
 ДЛЯ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ

$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$	$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$
0.000	1.0375	-1.2599	1.5300	0.240	0.7656	-1.0512	0.4011
0.005	1.0313	-1.2524	1.4932	0.245	0.7603	-1.0492	0.3883
0.010	1.0250	-1.2450	1.4571	0.250	0.7551	-1.0473	0.3757
0.015	1.0188	-1.2378	1.4217	0.255	0.7498	-1.0454	0.3635
0.020	1.0126	-1.2308	1.3870	0.260	0.7446	-1.0436	0.3517
0.025	1.0065	-1.2239	1.3530	0.265	0.7394	-1.0419	0.3401
0.030	1.0004	-1.2172	1.3197	0.270	0.7342	-1.0402	0.3288
0.035	0.9943	-1.2107	1.2871	0.275	0.7290	-1.0386	0.3178
0.040	0.9883	-1.2044	1.2551	0.280	0.7238	-1.0370	0.3071
0.045	0.9823	-1.1982	1.2237	0.285	0.7186	-1.0355	0.2967
0.050	0.9763	-1.1921	1.1929	0.290	0.7135	-1.0341	0.2866
0.055	0.9704	-1.1862	1.1628	0.295	0.7083	-1.0327	0.2768
0.060	0.9645	-1.1805	1.1332	0.300	0.7031	-1.0313	0.2672
0.065	0.9586	-1.1749	1.1043	0.305	0.6980	-1.0300	0.2579
0.070	0.9527	-1.1695	1.0759	0.310	0.6928	-1.0287	0.2488
0.075	0.9469	-1.1641	1.0482	0.315	0.6877	-1.0275	0.2400
0.080	0.9411	-1.1590	1.0209	0.320	0.6826	-1.0263	0.2314
0.085	0.9353	-1.1539	0.9943	0.325	0.6774	-1.0252	0.2231
0.090	0.9295	-1.1490	0.9682	0.330	0.6723	-1.0241	0.2150
0.095	0.9238	-1.1443	0.9426	0.335	0.6672	-1.0230	0.2072
0.100	0.9181	-1.1396	0.9176	0.340	0.6621	-1.0220	0.1996
0.105	0.9124	-1.1351	0.8930	0.345	0.6570	-1.0210	0.1922
0.110	0.9067	-1.1307	0.8690	0.350	0.6519	-1.0201	0.1850
0.115	0.9011	-1.1264	0.8455	0.355	0.6468	-1.0192	0.1780
0.120	0.8955	-1.1222	0.8225	0.360	0.6417	-1.0183	0.1713
0.125	0.8899	-1.1182	0.8000	0.365	0.6366	-1.0175	0.1647
0.130	0.8843	-1.1142	0.7780	0.370	0.6315	-1.0167	0.1584
0.135	0.8787	-1.1104	0.7564	0.375	0.6264	-1.0159	0.1522
0.140	0.8732	-1.1066	0.7353	0.380	0.6213	-1.0151	0.1463
0.145	0.8677	-1.1030	0.7147	0.385	0.6163	-1.0144	0.1405
0.150	0.8622	-1.0995	0.6945	0.390	0.6112	-1.0137	0.1349
0.155	0.8567	-1.0961	0.6748	0.395	0.6061	-1.0131	0.1295
0.160	0.8512	-1.0928	0.6555	0.400	0.6011	-1.0124	0.1242
0.165	0.8457	-1.0895	0.6367	0.405	0.5960	-1.0118	0.1192
0.170	0.8403	-1.0864	0.6182	0.410	0.5909	-1.0113	0.1143
0.175	0.8349	-1.0833	0.6002	0.415	0.5859	-1.0107	0.1095
0.180	0.8295	-1.0804	0.5826	0.420	0.5808	-1.0102	0.1049
0.185	0.8241	-1.0775	0.5654	0.425	0.5758	-1.0097	0.1005
0.190	0.8187	-1.0747	0.5486	0.430	0.5707	-1.0092	0.0962
0.195	0.8133	-1.0720	0.5322	0.435	0.5657	-1.0087	0.0921
0.200	0.8080	-1.0694	0.5162	0.440	0.5607	-1.0082	0.0881
0.205	0.8026	-1.0669	0.5005	0.445	0.5556	-1.0078	0.0842
0.210	0.7973	-1.0644	0.4853	0.450	0.5506	-1.0074	0.0805
0.215	0.7920	-1.0620	0.4704	0.455	0.5455	-1.0070	0.0769
0.220	0.7867	-1.0597	0.4558	0.460	0.5405	-1.0066	0.0735
0.225	0.7814	-1.0575	0.4416	0.465	0.5355	-1.0063	0.0701
0.230	0.7761	-1.0553	0.4278	0.470	0.5304	-1.0059	0.0669
0.235	0.7708	-1.0532	0.4143	0.475	0.5254	-1.0056	0.0638

$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$	$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$
0.480	0.5204	-1.0053	0.0609	0.745	0.2550	-1.0001	0.0017
0.485	0.5154	-1.0050	0.0580	0.750	0.2500	-1.0001	0.0016
0.490	0.5103	-1.0047	0.0552	0.755	0.2450	-1.0001	0.0014
0.495	0.5053	-1.0044	0.0526	0.760	0.2400	-1.0001	0.0013
0.500	0.5003	-1.0042	0.0500	0.765	0.2350	-1.0000	0.0011
0.505	0.4953	-1.0039	0.0476	0.770	0.2300	-1.0000	0.0010
0.510	0.4903	-1.0037	0.0452	0.775	0.2250	-1.0000	0.0009
0.515	0.4852	-1.0035	0.0430	0.780	0.2200	-1.0000	0.0008
0.520	0.4802	-1.0033	0.0408	0.785	0.2150	-1.0000	0.0007
0.525	0.4752	-1.0031	0.0387	0.790	0.2100	-1.0000	0.0007
0.530	0.4702	-1.0029	0.0367	0.795	0.2050	-1.0000	0.0006
0.535	0.4652	-1.0027	0.0348	0.800	0.2000	-1.0000	0.0005
0.540	0.4602	-1.0025	0.0330	0.805	0.1950	-1.0000	0.0005
0.545	0.4552	-1.0024	0.0312	0.810	0.1900	-1.0000	0.0004
0.550	0.4501	-1.0022	0.0296	0.815	0.1850	-1.0000	0.0003
0.555	0.4451	-1.0021	0.0280	0.820	0.1800	-1.0000	0.0003
0.560	0.4401	-1.0019	0.0264	0.825	0.1750	-1.0000	0.0003
0.565	0.4351	-1.0018	0.0250	0.830	0.1700	-1.0000	0.0002
0.570	0.4301	-1.0017	0.0236	0.835	0.1650	-1.0000	0.0002
0.575	0.4251	-1.0016	0.0222	0.840	0.1600	-1.0000	0.0002
0.580	0.4201	-1.0015	0.0209	0.845	0.1550	-1.0000	0.0001
0.585	0.4151	-1.0014	0.0197	0.850	0.1500	-1.0000	0.0001
0.590	0.4101	-1.0013	0.0186	0.855	0.1450	-1.0000	0.0001
0.595	0.4051	-1.0012	0.0175	0.860	0.1400	-1.0000	0.0001
0.600	0.4001	-1.0011	0.0164	0.865	0.1350	-1.0000	0.0001
0.605	0.3951	-1.0010	0.0154	0.870	0.1300	-1.0000	0.0001
0.610	0.3901	-1.0009	0.0145	0.875	0.1250	-1.0000	0.0000
0.615	0.3850	-1.0009	0.0136	0.880	0.1200	-1.0000	0.0000
0.620	0.3800	-1.0008	0.0127	0.885	0.1150	-1.0000	0.0000
0.625	0.3750	-1.0007	0.0119	0.890	0.1100	-1.0000	0.0000
0.630	0.3700	-1.0007	0.0111	0.895	0.1050	-1.0000	0.0000
0.635	0.3650	-1.0006	0.0104	0.900	0.1000	-1.0000	0.0000
0.640	0.3600	-1.0006	0.0097	0.905	0.0950	-1.0000	0.0000
0.645	0.3550	-1.0005	0.0090	0.910	0.0900	-1.0000	0.0000
0.650	0.3500	-1.0005	0.0084	0.915	0.0850	-1.0000	0.0000
0.655	0.3450	-1.0005	0.0078	0.920	0.0800	-1.0000	0.0000
0.660	0.3400	-1.0004	0.0073	0.925	0.0750	-1.0000	0.0000
0.665	0.3350	-1.0004	0.0068	0.930	0.0700	-1.0000	0.0000
0.670	0.3300	-1.0003	0.0063	0.935	0.0650	-1.0000	0.0000
0.675	0.3250	-1.0003	0.0058	0.940	0.0600	-1.0000	0.0000
0.680	0.3200	-1.0003	0.0054	0.945	0.0550	-1.0000	0.0000
0.685	0.3150	-1.0003	0.0050	0.950	0.0500	-1.0000	0.0000
0.690	0.3100	-1.0002	0.0046	0.955	0.0450	-1.0000	0.0000
0.695	0.3050	-1.0002	0.0042	0.960	0.0400	-1.0000	0.0000
0.700	0.3000	-1.0002	0.0039	0.965	0.0350	-1.0000	0.0000
0.705	0.2950	-1.0002	0.0036	0.970	0.0300	-1.0000	0.0000
0.710	0.2900	-1.0002	0.0033	0.975	0.0250	-1.0000	0.0000
0.715	0.2850	-1.0001	0.0030	0.980	0.0200	-1.0000	0.0000
0.720	0.2800	-1.0001	0.0028	0.985	0.0150	-1.0000	0.0000
0.725	0.2750	-1.0001	0.0025	0.990	0.0100	-1.0000	0.0000
0.730	0.2700	-1.0001	0.0023	0.995	0.0050	-1.0000	0.0000
0.735	0.2650	-1.0001	0.0021	1.000	0.0000	-1.0000	0.0000
0.740	0.2600	-1.0001	0.0019				



ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ  $\omega(z)$ ,  $\omega'(z)$ ,  $\omega''(z)$  ДЛЯ КОЛЬЦЕВЫХ  
СОПЕЛ С ОДНОЙ УГЛОВОЙ ТОЧКОЙ

 $r_0 = 0.850$ 

$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$	$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$
0.850	0.0000	1.0000	-0.2353	0.897	0.0467	0.9896	-0.1841
0.851	0.0010	0.9998	-0.2349	0.898	0.0477	0.9894	-0.1799
0.852	0.0020	0.9995	-0.2346	0.899	0.0487	0.9892	-0.1754
0.853	0.0030	0.9993	-0.2342	0.900	0.0497	0.9891	-0.1705
0.854	0.0040	0.9991	-0.2339	0.901	0.0507	0.9889	-0.1653
0.855	0.0050	0.9988	-0.2335	0.902	0.0517	0.9887	-0.1596
0.856	0.0060	0.9986	-0.2332	0.903	0.0527	0.9886	-0.1536
0.857	0.0070	0.9984	-0.2328	0.904	0.0537	0.9884	-0.1471
0.858	0.0080	0.9981	-0.2324	0.905	0.0547	0.9883	-0.1401
0.859	0.0090	0.9979	-0.2321	0.906	0.0556	0.9882	-0.1326
0.860	0.0100	0.9977	-0.2317	0.907	0.0566	0.9880	-0.1246
0.861	0.0110	0.9974	-0.2314	0.908	0.0576	0.9879	-0.1161
0.862	0.0120	0.9972	-0.2310	0.909	0.0586	0.9878	-0.1070
0.863	0.0130	0.9970	-0.2306	0.910	0.0596	0.9877	-0.0973
0.864	0.0140	0.9967	-0.2303	0.911	0.0606	0.9876	-0.0869
0.865	0.0150	0.9965	-0.2299	0.912	0.0616	0.9875	-0.0759
0.866	0.0160	0.9963	-0.2295	0.913	0.0626	0.9874	-0.0642
0.867	0.0170	0.9961	-0.2291	0.914	0.0635	0.9874	-0.0518
0.868	0.0180	0.9958	-0.2287	0.915	0.0645	0.9873	-0.0386
0.869	0.0190	0.9956	-0.2282	0.916	0.0655	0.9873	-0.0246
0.870	0.0200	0.9954	-0.2278	0.917	0.0665	0.9873	-0.0097
0.871	0.0209	0.9951	-0.2273	0.918	0.0675	0.9873	+0.0060
0.872	0.0219	0.9949	-0.2268	0.919	0.0685	0.9873	0.0226
0.873	0.0229	0.9947	-0.2263	0.920	0.0695	0.9873	0.0402
0.874	0.0239	0.9945	-0.2257	0.921	0.0705	0.9874	0.0588
0.875	0.0249	0.9942	-0.2251	0.922	0.0714	0.9875	0.0784
0.876	0.0259	0.9940	-0.2244	0.923	0.0724	0.9876	0.0990
0.877	0.0269	0.9938	-0.2237	0.924	0.0734	0.9877	0.1208
0.878	0.0279	0.9936	-0.2229	0.925	0.0744	0.9878	0.1438
0.879	0.0289	0.9933	-0.2221	0.926	0.0754	0.9879	0.1679
0.880	0.0299	0.9931	-0.2211	0.927	0.0764	0.9881	0.1933
0.881	0.0309	0.9929	-0.2201	0.928	0.0774	0.9883	0.2200
0.882	0.0319	0.9927	-0.2190	0.929	0.0784	0.9886	0.2481
0.883	0.0329	0.9925	-0.2178	0.930	0.0793	0.9888	0.2775
0.884	0.0339	0.9922	-0.2165	0.931	0.0803	0.9891	0.3084
0.885	0.0349	0.9920	-0.2151	0.932	0.0813	0.9894	0.3408
0.886	0.0358	0.9918	-0.2136	0.933	0.0823	0.9898	0.3748
0.887	0.0368	0.9916	-0.2119	0.934	0.0833	0.9902	0.4104
0.888	0.0378	0.9914	-0.2100	0.935	0.0843	0.9906	0.4476
0.889	0.0388	0.9912	-0.2080	0.936	0.0853	0.9911	0.4865
0.890	0.0398	0.9910	-0.2058	0.937	0.0863	0.9916	0.5272
0.891	0.0408	0.9908	-0.2034	0.938	0.0873	0.9921	0.5697
0.892	0.0418	0.9906	-0.2008	0.939	0.0883	0.9927	0.6141
0.893	0.0428	0.9904	-0.1980	0.940	0.0893	0.9934	0.6605
0.894	0.0438	0.9902	-0.1949	0.941	0.0903	0.9941	0.7089
0.895	0.0448	0.9900	-0.1916	0.942	0.0912	0.9948	0.7594
0.896	0.0458	0.9898	-0.1880	0.943	0.0922	0.9956	0.8120

$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$	$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$
0.944	0.0932	0.9964	0.8668	0.973	0.1228	1.0564	3.7352
0.945	0.0942	0.9973	0.9238	0.974	0.1239	1.0602	3.8905
0.946	0.0952	0.9983	0.9832	0.975	0.1249	1.0642	4.0504
0.947	0.0962	0.9993	1.0450	0.976	0.1260	1.0683	4.2150
0.948	0.0972	1.0004	1.1093	0.977	0.1271	1.0726	4.3844
0.949	0.0982	1.0015	1.1761	0.978	0.1281	1.0771	4.5588
0.950	0.0992	1.0027	1.2455	0.979	0.1292	1.0817	4.7382
0.951	0.1002	1.0040	1.3176	0.980	0.1303	1.0865	4.9228
0.952	0.1012	1.0053	1.3924	0.981	0.1314	1.0915	5.1126
0.953	0.1022	1.0068	1.4701	0.982	0.1325	1.0968	5.3078
0.954	0.1033	1.0083	1.5506	0.983	0.1336	1.1022	5.5084
0.955	0.1043	1.0099	1.6341	0.984	0.1347	1.1078	5.7146
0.956	0.1053	1.0116	1.7207	0.985	0.1358	1.1136	5.9264
0.957	0.1063	1.0133	1.8104	0.986	0.1369	1.1196	6.1440
0.958	0.1073	1.0152	1.9033	0.987	0.1380	1.1259	6.3675
0.959	0.1083	1.0171	1.9994	0.988	0.1392	1.1324	6.5971
0.960	0.1093	1.0192	2.0989	0.989	0.1403	1.1391	6.8328
0.961	0.1104	1.0213	2.2018	0.990	0.1414	1.1460	7.0748
0.962	0.1114	1.0236	2.3083	0.991	0.1426	1.1532	7.3232
0.963	0.1124	1.0259	2.4184	0.992	0.1438	1.1607	7.5781
0.964	0.1134	1.0284	2.5321	0.993	0.1449	1.1684	7.8398
0.965	0.1145	1.0310	2.6496	0.994	0.1461	1.1764	8.1082
0.966	0.1155	1.0337	2.7709	0.995	0.1473	1.1846	8.3837
0.967	0.1165	1.0366	2.8962	0.996	0.1485	1.1931	8.6663
0.968	0.1176	1.0395	3.0255	0.997	0.1497	1.2019	8.9562
0.969	0.1186	1.0426	3.1588	0.998	0.1509	1.2111	9.2536
0.970	0.1197	1.0458	3.2964	0.999	0.1521	1.2205	9.5586
0.971	0.1207	1.0492	3.4383	1.000	0.1533	1.2302	9.8715
0.972	0.1217	1.0527	3.5845				

 $r_0 = 0.875$ 

0.875	0.0000	1.0000	-0.2286	0.896	0.0210	0.9953	-0.2198
0.876	0.0010	0.9998	-0.2282	0.897	0.0219	0.9951	-0.2189
0.877	0.0020	0.9995	-0.2279	0.898	0.0229	0.9948	-0.2180
0.878	0.0030	0.9993	-0.2276	0.899	0.0239	0.9946	-0.2170
0.879	0.0040	0.9991	-0.2272	0.900	0.0249	0.9944	-0.2159
0.880	0.0050	0.9989	-0.2269	0.901	0.0259	0.9942	-0.2146
0.881	0.0060	0.9986	-0.2265	0.902	0.0269	0.9940	-0.2131
0.882	0.0070	0.9984	-0.2262	0.903	0.0279	0.9938	-0.2115
0.883	0.0080	0.9982	-0.2259	0.904	0.0289	0.9936	-0.2097
0.884	0.0090	0.9980	-0.2255	0.905	0.0299	0.9933	-0.2077
0.885	0.0100	0.9977	-0.2252	0.906	0.0309	0.9931	-0.2054
0.886	0.0110	0.9975	-0.2248	0.907	0.0319	0.9929	-0.2029
0.887	0.0120	0.9973	-0.2244	0.908	0.0329	0.9927	-0.2000
0.888	0.0130	0.9971	-0.2241	0.909	0.0339	0.9925	-0.1968
0.889	0.0140	0.9968	-0.2237	0.910	0.0349	0.9923	-0.1933
0.890	0.0150	0.9966	-0.2232	0.911	0.0359	0.9922	-0.1895
0.891	0.0160	0.9964	-0.2228	0.912	0.0368	0.9920	-0.1852
0.892	0.0170	0.9962	-0.2223	0.913	0.0378	0.9918	-0.1804
0.893	0.0180	0.9959	-0.2217	0.914	0.0388	0.9916	-0.1751
0.894	0.0190	0.9957	-0.2211	0.915	0.0398	0.9914	-0.1693
0.895	0.0200	0.9955	-0.2205	0.916	0.0408	0.9913	-0.1630

$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$	$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$
0.917	0.0418	0.9911	-0.1561	0.959	0.0835	1.0075	1.5947
0.918	0.0428	0.9910	-0.1485	0.960	0.0845	1.0091	1.7018
0.919	0.0438	0.9908	-0.1402	0.961	0.0856	1.0109	1.8137
0.920	0.0448	0.9907	-0.1311	0.962	0.0866	1.0128	1.9307
0.921	0.0458	0.9905	-0.1213	0.963	0.0876	1.0148	2.0529
0.922	0.0468	0.9904	-0.1106	0.964	0.0886	1.0169	2.1805
0.923	0.0478	0.9903	-0.0990	0.965	0.0896	1.0191	2.3135
0.924	0.0487	0.9902	-0.0864	0.966	0.0906	1.0215	2.4523
0.925	0.0497	0.9902	-0.0728	0.967	0.0917	1.0240	2.5970
0.926	0.0507	0.9901	-0.0581	0.968	0.0927	1.0267	2.7476
0.927	0.0517	0.9900	-0.0422	0.969	0.0937	1.0295	2.9045
0.928	0.0527	0.9900	-0.0251	0.970	0.0947	1.0325	3.0678
0.929	0.0537	0.9900	-0.0068	0.971	0.0958	1.0357	3.2374
0.930	0.0547	0.9900	+0.0129	0.972	0.0968	1.0390	3.4140
0.931	0.0557	0.9900	0.0341	0.973	0.0979	1.0425	3.5975
0.932	0.0567	0.9901	0.0568	0.974	0.0989	1.0462	3.7879
0.933	0.0577	0.9901	0.0810	0.975	0.0999	1.0501	3.9857
0.934	0.0586	0.9902	0.1070	0.976	0.1010	1.0541	4.1910
0.935	0.0596	0.9903	0.1347	0.977	0.1021	1.0584	4.4039
0.936	0.0606	0.9905	0.1642	0.978	0.1031	1.0630	4.6246
0.937	0.0616	0.9907	0.1957	0.979	0.1042	1.0677	4.8534
0.938	0.0626	0.9909	0.2292	0.980	0.1053	1.0727	5.0904
0.939	0.0636	0.9911	0.2649	0.981	0.1063	1.0779	5.3358
0.940	0.0646	0.9914	0.3028	0.982	0.1074	1.0833	5.5899
0.941	0.0656	0.9917	0.3430	0.983	0.1085	1.0890	5.8529
0.942	0.0666	0.9921	0.3856	0.984	0.1096	1.0950	6.1249
0.943	0.0676	0.9925	0.4307	0.985	0.1107	1.1013	6.4063
0.944	0.0686	0.9930	0.4785	0.986	0.1118	1.1079	6.6972
0.945	0.0695	0.9935	0.5291	0.987	0.1129	1.1147	6.9978
0.946	0.0705	0.9940	0.5825	0.988	0.1140	1.1219	7.3084
0.947	0.0715	0.9946	0.6389	0.989	0.1151	1.1293	7.6293
0.948	0.0725	0.9953	0.6984	0.990	0.1163	1.1371	7.9607
0.949	0.0735	0.9960	0.7611	0.991	0.1174	1.1453	8.3029
0.950	0.0745	0.9968	0.8272	0.992	0.1186	1.1538	8.6560
0.951	0.0755	0.9977	0.8968	0.993	0.1197	1.1626	9.0205
0.952	0.0765	0.9986	0.9700	0.994	0.1209	1.1718	9.3967
0.953	0.0775	0.9996	1.0469	0.995	0.1221	1.1814	9.7847
0.954	0.0785	1.0007	1.1277	0.996	0.1233	1.1914	10.1850
0.955	0.0795	1.0019	1.2125	0.997	0.1245	1.2017	10.5978
0.956	0.0805	1.0031	1.3015	0.998	0.1257	1.2125	11.0235
0.957	0.0815	1.0045	1.3947	0.999	0.1269	1.2238	11.4626
0.958	0.0825	1.0059	1.4924	1.000	0.1281	1.2355	11.9153

$r_0 = 0.900$

0.900	0.0000	1.0000	-0.2222	0.908	0.0080	0.9982	-0.2196
0.901	0.0010	0.9998	-0.2219	0.909	0.0090	0.9980	-0.2193
0.902	0.0020	0.9996	-0.2216	0.910	0.0100	0.9978	-0.2189
0.903	0.0030	0.9993	-0.2213	0.911	0.0110	0.9976	-0.2185
0.904	0.0040	0.9991	-0.2209	0.912	0.0120	0.9974	-0.2180
0.905	0.0050	0.9989	-0.2206	0.913	0.0130	0.9971	-0.2175
0.906	0.0060	0.9987	-0.2203	0.914	0.0140	0.9969	-0.2169
0.907	0.0070	0.9985	-0.2200	0.915	0.0150	0.9967	-0.2162

$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$	$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$
0.916	0.0160	0.9965	-0.2154	0.959	0.0587	0.9991	0.9747
0.917	0.0170	0.9963	-0.2144	0.960	0.0597	1.0002	1.0767
0.918	0.0180	0.9961	-0.2133	0.961	0.0607	1.0013	1.1855
0.919	0.0190	0.9958	-0.2120	0.962	0.0617	1.0025	1.3014
0.920	0.0200	0.9956	-0.2104	0.963	0.0627	1.0039	1.4247
0.921	0.0210	0.9954	-0.2086	0.964	0.0637	1.0054	1.5558
0.922	0.0219	0.9952	-0.2065	0.965	0.0647	1.0070	1.6951
0.923	0.0229	0.9950	-0.2040	0.966	0.0657	1.0088	1.8429
0.924	0.0239	0.9948	-0.2011	0.967	0.0668	1.0107	1.9995
0.925	0.0249	0.9946	-0.1977	0.968	0.0678	1.0128	2.1653
0.926	0.0259	0.9944	-0.1938	0.969	0.0688	1.0150	2.3407
0.927	0.0269	0.9942	-0.1893	0.970	0.0698	1.0175	2.5261
0.928	0.0279	0.9940	-0.1842	0.971	0.0708	1.0201	2.7219
0.929	0.0289	0.9939	-0.1783	0.972	0.0718	1.0229	2.9285
0.930	0.0299	0.9937	-0.1716	0.973	0.0729	1.0259	3.1463
0.931	0.0309	0.9935	-0.1640	0.974	0.0739	1.0292	3.3756
0.932	0.0319	0.9934	-0.1553	0.975	0.0749	1.0327	3.6169
0.933	0.0329	0.9932	-0.1456	0.976	0.0760	1.0364	3.8707
0.934	0.0339	0.9931	-0.1347	0.977	0.0770	1.0404	4.1374
0.935	0.0349	0.9929	-0.1225	0.978	0.0780	1.0447	4.4174
0.936	0.0359	0.9928	-0.1088	0.979	0.0791	1.0493	4.7111
0.937	0.0369	0.9927	-0.0936	0.980	0.0801	1.0542	5.0191
0.938	0.0378	0.9926	-0.0768	0.981	0.0812	1.0593	5.3418
0.939	0.0388	0.9926	-0.0581	0.982	0.0823	1.0648	5.6796
0.940	0.0398	0.9925	-0.0374	0.983	0.0833	1.0707	6.0331
0.941	0.0408	0.9925	-0.0146	0.984	0.0844	1.0769	6.4028
0.942	0.0418	0.9925	+0.0104	0.985	0.0855	1.0835	6.7891
0.943	0.0428	0.9925	0.0378	0.986	0.0866	1.0905	7.1926
0.944	0.0438	0.9926	0.0680	0.987	0.0877	1.0979	7.6138
0.945	0.0448	0.9926	0.1009	0.988	0.0888	1.1057	8.0532
0.946	0.0458	0.9928	0.1367	0.989	0.0899	1.1140	8.5114
0.947	0.0468	0.9929	0.1757	0.990	0.0910	1.1228	8.9891
0.948	0.0478	0.9931	0.2182	0.991	0.0921	1.1320	9.4868
0.949	0.0488	0.9934	0.2643	0.992	0.0933	1.1417	10.0051
0.950	0.0498	0.9937	0.3141	0.993	0.0944	1.1520	10.5446
0.951	0.0508	0.9940	0.3679	0.994	0.0956	1.1628	11.1062
0.952	0.0517	0.9944	0.4260	0.995	0.0967	1.1742	11.6904
0.953	0.0527	0.9948	0.4887	0.996	0.0979	1.1862	12.2980
0.954	0.0537	0.9954	0.5562	0.997	0.0991	1.1988	12.9299
0.955	0.0547	0.9960	0.6287	0.998	0.1003	1.2121	13.5868
0.956	0.0557	0.9966	0.7065	0.999	0.1015	1.2260	14.2696
0.957	0.0567	0.9974	0.7899	1.000	0.1028	1.2406	14.9792
0.958	0.0577	0.9982	0.8792				

$r_0 = 0.925$

0.925	0.0000	1.0000	-0.2162	0.932	0.0070	0.9985	-0.2139
0.926	0.0010	0.9998	-0.2159	0.933	0.0080	0.9983	-0.2135
0.927	0.0020	0.9996	-0.2156	0.934	0.0090	0.9981	-0.2129
0.928	0.0030	0.9994	-0.2153	0.935	0.0100	0.9979	-0.2123
0.929	0.0040	0.9991	-0.2150	0.936	0.0110	0.9976	-0.2114
0.930	0.0050	0.9989	-0.2147	0.937	0.0120	0.9974	-0.2103
0.931	0.0060	0.9987	-0.2143	0.938	0.0130	0.9972	-0.2088

$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$	$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$
0.939	0.0140	0.9970	-0.2069	0.970	0.0449	1.0034	1.4918
0.940	0.0150	0.9968	-0.2045	0.971	0.0459	1.0050	1.6862
0.941	0.0160	0.9966	-0.2015	0.972	0.0469	1.0068	1.8977
0.942	0.0170	0.9964	-0.1977	0.973	0.0479	1.0088	2.1275
0.943	0.0180	0.9962	-0.1930	0.974	0.0489	1.0110	2.3766
0.944	0.0190	0.9960	-0.1872	0.975	0.0499	1.0135	2.6462
0.945	0.0200	0.9958	-0.1801	0.976	0.0509	1.0163	2.9374
0.946	0.0210	0.9957	-0.1714	0.977	0.0519	1.0194	3.2514
0.947	0.0219	0.9955	-0.1611	0.978	0.0530	1.0228	3.5895
0.948	0.0229	0.9953	-0.1488	0.979	0.0540	1.0266	3.9530
0.949	0.0239	0.9952	-0.1342	0.980	0.0550	1.0307	4.3431
0.950	0.0249	0.9951	-0.1170	0.981	0.0560	1.0353	4.7611
0.951	0.0259	0.9950	-0.0970	0.982	0.0571	1.0403	5.2084
0.952	0.0269	0.9949	-0.0737	0.983	0.0581	1.0457	5.6865
0.953	0.0279	0.9948	-0.0467	0.984	0.0592	1.0516	6.1968
0.954	0.0289	0.9948	-0.0157	0.985	0.0602	1.0581	6.7406
0.955	0.0299	0.9948	+0.0198	0.986	0.0613	1.0652	7.3196
0.956	0.0309	0.9948	0.0603	0.987	0.0624	1.0728	7.9353
0.957	0.0319	0.9949	0.1062	0.988	0.0634	1.0811	8.5892
0.958	0.0329	0.9950	0.1582	0.989	0.0645	1.0900	9.2829
0.959	0.0339	0.9952	0.2168	0.990	0.0656	1.0996	10.0181
0.960	0.0349	0.9955	0.2825	0.991	0.0667	1.1100	10.7967
0.961	0.0359	0.9958	0.3560	0.992	0.0678	1.1212	11.6204
0.962	0.0369	0.9962	0.4381	0.993	0.0690	1.1333	12.4910
0.963	0.0379	0.9967	0.5293	0.994	0.0701	1.1462	13.4106
0.964	0.0389	0.9973	0.6304	0.995	0.0713	1.1601	14.3813
0.965	0.0399	0.9979	0.7422	0.996	0.0724	1.1750	15.4052
0.966	0.0409	0.9987	0.8656	0.997	0.0736	1.1909	16.4847
0.967	0.0419	0.9997	1.0013	0.998	0.0748	1.2080	17.6224
0.968	0.0429	1.0008	1.1503	0.999	0.0760	1.2262	18.8209
0.969	0.0439	1.0020	1.3135	1.000	0.0773	1.2457	20.0831

 $r_0 = 0.950$ 

0.950	0.0000	1.0000	-0.2105	0.969	0.0190	0.9969	+0.0555
0.951	0.0010	0.9998	-0.2102	0.970	0.0200	0.9970	0.1317
0.952	0.0020	0.9996	-0.2099	0.971	0.0210	0.9971	0.2245
0.953	0.0030	0.9994	-0.2096	0.972	0.0220	0.9974	0.3365
0.954	0.0040	0.9992	-0.2093	0.973	0.0230	0.9978	0.4707
0.955	0.0050	0.9990	-0.2088	0.974	0.0240	0.9984	0.6300
0.956	0.0060	0.9987	-0.2080	0.975	0.0250	0.9991	0.8178
0.957	0.0070	0.9985	-0.2067	0.976	0.0260	1.0000	1.0377
0.958	0.0080	0.9983	-0.2048	0.977	0.0270	1.0011	1.2937
0.959	0.0090	0.9981	-0.2017	0.978	0.0280	1.0026	1.5899
0.960	0.0100	0.9979	-0.1971	0.979	0.0290	1.0044	1.9308
0.961	0.0110	0.9977	-0.1903	0.980	0.0300	1.0065	2.3210
0.962	0.0120	0.9975	-0.1807	0.981	0.0310	1.0090	2.7658
0.963	0.0130	0.9974	-0.1675	0.982	0.0320	1.0120	3.2702
0.964	0.0140	0.9972	-0.1496	0.983	0.0330	1.0156	3.8400
0.965	0.0150	0.9971	-0.1260	0.984	0.0340	1.0198	4.4810
0.966	0.0160	0.9970	-0.0953	0.985	0.0350	1.0246	5.1993
0.967	0.0170	0.9969	-0.0559	0.986	0.0361	1.0302	6.0013
0.968	0.0180	0.9969	-0.0063	0.987	0.0371	1.0366	6.8937

$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$	$z$	$\omega$	$\omega'$	$\omega''$
0.988	0.0381	1.0440	7.8832	0.995	0.0457	1.1314	18.1686
0.989	0.0392	1.0524	8.9771	0.996	0.0468	1.1506	20.2190
0.990	0.0402	1.0620	10.1828	0.997	0.0480	1.1719	22.4437
0.991	0.0413	1.0729	11.5080	0.998	0.0492	1.1955	24.8544
0.992	0.0424	1.0851	12.9606	0.999	0.0504	1.2217	27.4638
0.993	0.0435	1.0988	14.5490	1.000	0.0516	1.2505	30.2861
0.994	0.0446	1.1142	16.2819				

Таблица 4

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ В РАЗЛОЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ  $F, G$   
ДЛЯ КОЛЬЦЕВЫХ СОПЕЛ С ДВУМЯ УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

$j$	$a_j$	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$j$	$a_j$	$b_j$	$c_j$	$d_j$
<b><math>r_0 = 0.850</math></b>					<b><math>r_0 = 0.925</math></b>				
0	0.01391	-0.00109	0.01925	0.00178	0	0.00446	-0.00020	0.00521	0.00025
1	-0.18509	0.02153	-0.29290	-0.04100	1	-0.11936	0.00793	-0.14854	-0.01077
2	0.49553	-0.12439	1.21841	0.33123	2	0.73899	-0.10074	1.11453	0.15894
3	0.87720	0.07401	-0.75107	-1.05172	3	0.83256	0.33947	-0.77383	-0.86781
4	-0.34461	0.84157	-0.14781	0.91361	4	-0.24874	0.88204	-0.16581	0.92115
5	0.39144	-0.21561	-0.11381	0.01703	5	0.23586	-0.11908	-0.13043	0.03778
<b><math>r_0 = 0.875</math></b>					<b><math>r_0 = 0.950</math></b>				
0	0.01051	-0.00072	0.01373	0.00107	0	0.00214	-0.00007	0.00238	0.00008
1	-0.16846	0.01709	-0.24536	-0.02897	1	-0.08609	0.00397	-0.09940	-0.00486
2	0.57478	-0.12324	1.18494	0.27272	2	0.82401	-0.07726	1.07756	0.10415
3	0.86064	0.15601	-0.75830	-0.99229	3	0.82060	0.44139	-0.78215	-0.80271
4	-0.30763	0.85345	-0.15351	0.91569	4	-0.22514	0.89822	-0.17243	0.92463
5	0.32862	-0.17638	-0.11910	0.02318	5	0.20179	-0.09810	-0.13640	0.04638
<b><math>r_0 = 0.900</math></b>									
0	0.00731	-0.00042	0.00903	0.00057					
1	-0.14668	0.01244	-0.19722	-0.01885					
2	0.65592	-0.11570	1.15032	0.21521					
3	0.84584	0.24442	-0.76588	-0.93099					
4	-0.27598	0.86704	-0.15951	0.91819					
5	0.27763	-0.14475	-0.12465	0.03007					

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ  $F(\eta)$ ,  $G(\eta)$ 

$$r_0 = 0.850$$

$\eta$	$10^2 F$	$10^3 G$	$\eta$	$10^2 F$	$10^3 G$
0.01156	1.1837	-0.8612	0.06056	0.6055	-0.0922
0.01256	1.1664	-0.8426	0.06156	0.6039	-0.0762
0.01356	1.1493	-0.8242	0.06256	0.6030	-0.0601
0.01456	1.1322	-0.8061	0.06356	0.6026	-0.0440
0.01556	1.1153	-0.7882	0.06456	0.6028	-0.0277
0.01656	1.0985	-0.7705	0.06556	0.6037	-0.0114
0.01756	1.0818	-0.7531	0.06656	0.6051	+0.0051
0.01856	1.0653	-0.7359	0.06756	0.6072	0.0216
0.01956	1.0489	-0.7189	0.06856	0.6099	0.0382
0.02056	1.0326	-0.7020	0.06956	0.6132	0.0549
0.02156	1.0164	-0.6854	0.07056	0.6171	0.0717
0.02256	1.0004	-0.6690	0.07156	0.6216	0.0886
0.02356	0.9846	-0.6527	0.07256	0.6267	0.1056
0.02456	0.9689	-0.6366	0.07356	0.6324	0.1227
0.02556	0.9534	-0.6207	0.07456	0.6387	0.1398
0.02656	0.9380	-0.6050	0.07556	0.6456	0.1571
0.02756	0.9229	-0.5894	0.07656	0.6531	0.1744
0.02856	0.9079	-0.5739	0.07756	0.6612	0.1918
0.02956	0.8932	-0.5585	0.07856	0.6699	0.2093
0.03056	0.8786	-0.5433	0.07956	0.6791	0.2269
0.03156	0.8643	-0.5282	0.08056	0.6889	0.2446
0.03256	0.8502	-0.5131	0.08156	0.6993	0.2625
0.03356	0.8364	-0.4982	0.08256	0.7102	0.2804
0.03456	0.8228	-0.4833	0.08356	0.7216	0.2984
0.03556	0.8095	-0.4685	0.08456	0.7336	0.3166
0.03656	0.7965	-0.4537	0.08556	0.7461	0.3349
0.03756	0.7838	-0.4390	0.08656	0.7591	0.3533
0.03856	0.7714	-0.4243	0.08756	0.7726	0.3719
0.03956	0.7593	-0.4097	0.08856	0.7865	0.3906
0.04056	0.7476	-0.3950	0.08956	0.8010	0.4095
0.04156	0.7362	-0.3804	0.09056	0.8159	0.4285
0.04256	0.7252	-0.3657	0.09156	0.8313	0.4477
0.04356	0.7146	-0.3510	0.09256	0.8471	0.4672
0.04456	0.7044	-0.3363	0.09356	0.8633	0.4868
0.04556	0.6945	-0.3216	0.09456	0.8800	0.5066
0.04656	0.6851	-0.3068	0.09556	0.8971	0.5267
0.04756	0.6762	-0.2919	0.09656	0.9146	0.5470
0.04856	0.6677	-0.2770	0.09756	0.9324	0.5675
0.04956	0.6596	-0.2621	0.09856	0.9507	0.5883
0.05056	0.6521	-0.2471	0.09956	0.9693	0.6094
0.05156	0.6450	-0.2320	0.1006	0.9883	0.6307
0.05256	0.6385	-0.2168	0.1016	1.0076	0.6524
0.05356	0.6324	-0.2015	0.1026	1.0273	0.6744
0.05456	0.6269	-0.1862	0.1036	1.0473	0.6967
0.05556	0.6220	-0.1707	0.1046	1.0677	0.7193
0.05656	0.6176	-0.1552	0.1056	1.0884	0.7423
0.05756	0.6137	-0.1396	0.1066	1.1093	0.7657
0.05856	0.6104	-0.1239	0.1076	1.1306	0.7895
0.05956	0.6077	-0.1081	0.1086	1.1522	0.8136

$\eta$	$10^2 F$	$10^3 G$
0.1096	1.1741	0.8381
0.1106	1.1962	0.8631
0.1116	1.2186	0.8885
0.1126	1.2413	0.9143
0.1136	1.2643	0.9406
0.1146	1.2876	0.9674
0.1156	1.3111	0.9946
0.1166	1.3348	1.0223
0.1176	1.3588	1.0505
0.1186	1.3831	1.0793

$\eta$	$10^2 F$	$10^3 G$
0.1196	1.4076	1.1085
0.1206	1.4324	1.1383
0.1216	1.4574	1.1686
0.1226	1.4827	1.1994
0.1236	1.5082	1.2308
0.1246	1.5339	1.2628
0.1256	1.5599	1.2953
0.1266	1.5861	1.3284
0.1276	1.6126	1.3621
0.1286	1.6393	1.3964

 $r_0 = 0.875$ 

0.00664	0.9421	-0.6107
0.00764	0.9261	-0.5953
0.00864	0.9102	-0.5802
0.00964	0.8944	-0.5653
0.01064	0.8788	-0.5507
0.01164	0.8633	-0.5363
0.01264	0.8479	-0.5221
0.01364	0.8326	-0.5081
0.01464	0.8175	-0.4943
0.01564	0.8025	-0.4808
0.01664	0.7877	-0.4675
0.01764	0.7730	-0.4543
0.01864	0.7585	-0.4413
0.01964	0.7441	-0.4286
0.02064	0.7299	-0.4160
0.02164	0.7159	-0.4036
0.02264	0.7021	-0.3913
0.02364	0.6884	-0.3792
0.02464	0.6750	-0.3672
0.02564	0.6618	-0.3554
0.02664	0.6488	-0.3436
0.02764	0.6361	-0.3320
0.02864	0.6237	-0.3204
0.02964	0.6115	-0.3090
0.03064	0.5996	-0.2976
0.03164	0.5880	-0.2863
0.03264	0.5767	-0.2750
0.03364	0.5658	-0.2638
0.03464	0.5552	-0.2525
0.03564	0.5450	-0.2413
0.03664	0.5352	-0.2301
0.03764	0.5258	-0.2189
0.03864	0.5168	-0.2077
0.03964	0.5083	-0.1965
0.04064	0.5002	-0.1852
0.04164	0.4926	-0.1739
0.04264	0.4854	-0.1626
0.04364	0.4788	-0.1512
0.04464	0.4727	-0.1397

0.04564	0.4671	-0.1282
0.04664	0.4620	-0.1167
0.04764	0.4575	-0.1050
0.04864	0.4536	-0.0933
0.04964	0.4503	-0.0816
0.05064	0.4476	-0.0698
0.05164	0.4454	-0.0579
0.05264	0.4439	-0.0459
0.05364	0.4430	-0.0339
0.05464	0.4427	-0.0218
0.05564	0.4430	-0.0096
0.05664	0.4439	+0.0026
0.05764	0.4455	0.0149
0.05864	0.4477	0.0273
0.05964	0.4505	0.0397
0.06064	0.4540	0.0522
0.06164	0.4580	0.0647
0.06264	0.4627	0.0773
0.06364	0.4680	0.0900
0.06464	0.4740	0.1028
0.06564	0.4805	0.1156
0.06664	0.4876	0.1284
0.06764	0.4953	0.1414
0.06864	0.5036	0.1544
0.06964	0.5124	0.1675
0.07064	0.5218	0.1807
0.07164	0.5317	0.1939
0.07264	0.5422	0.2073
0.07364	0.5531	0.2207
0.07464	0.5646	0.2343
0.07564	0.5766	0.2480
0.07664	0.5890	0.2618
0.07764	0.6020	0.2758
0.07864	0.6153	0.2899
0.07964	0.6291	0.3042
0.08064	0.6434	0.3186
0.08164	0.6580	0.3332
0.08264	0.6730	0.3481
0.08364	0.6885	0.3631



$\eta$	$10^2 F$	$10^3 G$
0.08464	0.7043	0.3783
0.08564	0.7204	0.3938
0.08664	0.7369	0.4096
0.08764	0.7538	0.4256
0.08864	0.7709	0.4419
0.08964	0.7884	0.4584
0.09064	0.8062	0.4753
0.09164	0.8243	0.4925
0.09264	0.8427	0.5100
0.09364	0.8614	0.5279
0.09464	0.8803	0.5461
0.09564	0.8996	0.5647

$\eta$	$10^2 F$	$10^3 G$
0.09664	0.9191	0.5837
0.09764	0.9388	0.6031
0.09864	0.9588	0.6228
0.09964	0.9790	0.6430
0.1006	0.9995	0.6636
0.1016	1.0203	0.6846
0.1026	1.0413	0.7061
0.1036	1.0625	0.7280
0.1046	1.0840	0.7504
0.1056	1.1057	0.7732
0.1066	1.1276	0.7965

 $r_0 = 0.900$ 

0.00500	0.6592	-0.3573
0.00600	0.6453	-0.3461
0.00700	0.6315	-0.3351
0.00800	0.6179	-0.3244
0.00900	0.6044	-0.3138
0.01000	0.5910	-0.3036
0.01100	0.5777	-0.2934
0.01200	0.5646	-0.2835
0.01300	0.5517	-0.2738
0.01400	0.5390	-0.2643
0.01500	0.5264	-0.2549
0.01600	0.5139	-0.2458
0.01700	0.5017	-0.2368
0.01800	0.4896	-0.2279
0.01900	0.4778	-0.2192
0.02000	0.4662	-0.2106
0.02100	0.4548	-0.2022
0.02200	0.4436	-0.1939
0.02300	0.4328	-0.1856
0.02400	0.4222	-0.1775
0.02500	0.4119	-0.1694
0.02600	0.4019	-0.1614
0.02700	0.3923	-0.1535
0.02800	0.3830	-0.1456
0.02900	0.3741	-0.1377
0.03000	0.3656	-0.1298
0.03100	0.3575	-0.1220
0.03200	0.3499	-0.1141
0.03300	0.3427	-0.1063
0.03400	0.3360	-0.0984
0.03500	0.3298	-0.0905
0.03600	0.3242	-0.0826
0.03700	0.3190	-0.0746
0.03800	0.3145	-0.0666
0.03900	0.3105	-0.0585
0.04000	0.3071	-0.0504
0.04100	0.3043	-0.0423
0.04200	0.3021	-0.0341

0.04300	0.3005	-0.0259
0.04400	0.2996	-0.0176
0.04500	0.2993	-0.0093
0.04600	0.2996	-0.0009
0.04700	0.3006	+0.0075
0.04800	0.3023	0.0159
0.04900	0.3045	0.0244
0.05000	0.3074	0.0329
0.05100	0.3110	0.0415
0.05200	0.3152	0.0501
0.05300	0.3200	0.0588
0.05400	0.3254	0.0675
0.05500	0.3314	0.0762
0.05600	0.3380	0.0850
0.05700	0.3452	0.0939
0.05800	0.3530	0.1028
0.05900	0.3613	0.1117
0.06000	0.3701	0.1208
0.06100	0.3794	0.1299
0.06200	0.3892	0.1391
0.06300	0.3995	0.1484
0.06400	0.4103	0.1579
0.06500	0.4215	0.1674
0.06600	0.4332	0.1771
0.06700	0.4453	0.1869
0.06800	0.4577	0.1969
0.06900	0.4705	0.2071
0.07000	0.4837	0.2174
0.07100	0.4972	0.2279
0.07200	0.5111	0.2386
0.07300	0.5252	0.2496
0.07400	0.5397	0.2608
0.07500	0.5545	0.2723
0.07600	0.5696	0.2840
0.07700	0.5849	0.2961
0.07800	0.6005	0.3084
0.07900	0.6164	0.3210
0.08000	0.6325	0.3339

$\eta$	$10^2 F$	$10^3 G$
0.08100	0.6488	0.3472
0.08200	0.6654	0.3608
0.08300	0.6823	0.3747
0.08400	0.6994	0.3890
0.08500	0.7167	0.4036

$\eta$	$10^2 F$	$10^3 G$
0.08600	0.7342	0.4186
0.08700	0.7520	0.4340
0.08800	0.7700	0.4498
0.08900	0.7882	0.4660
0.09000	0.8067	0.4825

$$\cdot r_0 = 0.925$$

0.00539	0.3837	-0.1586
0.00639	0.3726	-0.1519
0.00739	0.3617	-0.1453
0.00839	0.3510	-0.1389
0.00939	0.3404	-0.1326
0.01039	0.3300	-0.1265
0.01139	0.3198	-0.1206
0.01239	0.3098	-0.1149
0.01339	0.2999	-0.1093
0.01439	0.2903	-0.1038
0.01539	0.2809	-0.0984
0.01639	0.2718	-0.0932
0.01739	0.2629	-0.0880
0.01839	0.2544	-0.0830
0.01939	0.2461	-0.0780
0.02039	0.2382	-0.0730
0.02139	0.2306	-0.0681
0.02239	0.2235	-0.0633
0.02339	0.2167	-0.0584
0.02439	0.2104	-0.0536
0.02539	0.2046	-0.0488
0.02639	0.1993	-0.0440
0.02739	0.1945	-0.0391
0.02839	0.1903	-0.0343
0.02939	0.1867	-0.0294
0.03039	0.1836	-0.0245
0.03139	0.1812	-0.0196
0.03239	0.1794	-0.0146
0.03339	0.1782	-0.0097
0.03439	0.1777	-0.0046
0.03539	0.1778	+0.0004

0.03639	0.1786	0.0054
0.03739	0.1801	0.0105
0.03839	0.1822	0.0156
0.03939	0.1850	0.0208
0.04039	0.1884	0.0259
0.04139	0.1925	0.0311
0.04239	0.1971	0.0363
0.04339	0.2024	0.0415
0.04439	0.2082	0.0468
0.04539	0.2146	0.0521
0.04639	0.2215	0.0575
0.04739	0.2289	0.0629
0.04839	0.2368	0.0684
0.04939	0.2452	0.0740
0.05039	0.2540	0.0796
0.05139	0.2633	0.0854
0.05239	0.2729	0.0913
0.05339	0.2828	0.0973
0.05439	0.2931	0.1035
0.05539	0.3038	0.1098
0.05639	0.3148	0.1163
0.05739	0.3260	0.1230
0.05839	0.3376	0.1299
0.05939	0.3494	0.1370
0.06039	0.3614	0.1443
0.06139	0.3737	0.1518
0.06239	0.3862	0.1596
0.06339	0.3990	0.1677
0.06439	0.4120	0.1760
0.06539	0.4253	0.1846

$$r_0 = 0.950$$

$\eta$	$10^2 F$	$10^3 G$
0.00406	0.1809	-0.0513
0.00506	0.1730	-0.0480
0.00606	0.1654	-0.0449
0.00706	0.1579	-0.0418
0.00806	0.1506	-0.0389
0.00906	0.1435	-0.0361
0.01006	0.1366	-0.0334
0.01106	0.1300	-0.0308
0.01206	0.1237	-0.0283
0.01306	0.1177	-0.0258
0.01406	0.1121	-0.0234
0.01506	0.1068	-0.0211
0.01606	0.1020	-0.0187
0.01706	0.0976	-0.0164
0.01806	0.0937	-0.0141
0.01906	0.0904	-0.0117
0.02006	0.0877	-0.0094
0.02106	0.0856	-0.0070
0.02206	0.0842	-0.0047
0.02306	0.0834	-0.0023
0.02406	0.0833	+0.0001

$\eta$	$10^2 F$	$10^3 G$
0.02506	0.0838	0.0025
0.02606	0.0850	0.0049
0.02706	0.0869	0.0073
0.02806	0.0895	0.0097
0.02906	0.0927	0.0122
0.03006	0.0965	0.0146
0.03106	0.1008	0.0171
0.03206	0.1057	0.0196
0.03306	0.1110	0.0222
0.03406	0.1169	0.0248
0.03506	0.1231	0.0275
0.03606	0.1297	0.0303
0.03706	0.1367	0.0331
0.03806	0.1440	0.0360
0.03906	0.1516	0.0391
0.04006	0.1595	0.0423
0.04106	0.1676	0.0456
0.04206	0.1760	0.0491
0.04306	0.1846	0.0528
0.04406	0.1934	0.0566

## ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф.И. О плоско-параллельных воздушных течениях через каналы при околосзвуковых скоростях. "Математический сборник", 1933, т.40, № 1, 59-72.
2. Görtler H. Zum Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen. "ZAMM", 1939, 19, № 6, 325-337.
3. Астров В., Левин Л., Павлов Е., Христианович С. О расчете сопел Лаваля. "Прикл. матем. и мех.", 1943, т. VII, в. 1, 3-24.
4. Hill R., Pack D.C. An investigation by the method of characteristics, of the lateral expansion of the gases behind a detonating slab of explosive. "Proc. Roy. Soc.", 1947, 191, № 1027.
5. Guderley K.G. Störungen in ebenen und rotations symmetrischen Schall- und Überschallparallelstrahlen. "ZAMM", 1947, 25/27, № 7, 190.
6. Овсянников Л.В. Об одном газовом течении с прямой звуковой линией. "Прикл. матем. и мех.", 1949, т. XIII, в. 5, 537-542.
7. Овсянников Л.В. Исследование газовых течений с прямой звуковой линией. Труды ЛКВВИА, 1950, вып. XXXIII, 3-24.
8. Кацкова О.Н., Шмыглевский Ю.Д. Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. В сб.: "Вычислительная математика", сб.2. М., Изд-во АН СССР, 1957, 45-89.
9. Кацкова О.Н. Об осесимметричном свободном расширении реального газа. "Ж. вычисл. матем. и матем. физ." 1961, т.1, № 2, 301-307.
10. Кацкова О.Н. Расчет кольцевых сверхзвуковых сопел и диффузоров. В сб.: "Вычислительная математика", № 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, 111-129.
11. Ван Жу-цюань. Расчет сверхзвукового течения в окрестности кольцевой звуковой линии. "Ж. вычисл. матем. и матем. физ.", 1962, т. 2, № 2, 290-302.
12. Франкль Ф.И. К теории сопел Лаваля. "Изв. АН СССР", сер. матем., 1945, т. 9, № 5, 387-422.
13. Фалькович С.В. К теории сопла Лаваля. "Прикл. матем. и мех.", 1946, т. X, в. 4, 503-512.
14. Lighthill M. J. The hodograph transformation in trans-sonic flow. I Symmetrical channels. "Proc. Roy. Soc.", London, A, 1947, 191, № 1023, 323.
15. Cherry T.M. Exact solutions for flow of a perfect gas in a two-dimensional Laval nozzle. "Proc. Roy. Soc.", London, A, 1950, 203, № 1075, 551-571.
16. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids. "Quart. of Appl. Math.", 1950, VII, № 4, 381-397.
17. Ehlers F.E. On some solutions on the hodograph equation which yield transonic flows through a Laval nozzle. "J. Aeronaut. Sci.", 1955, 22, № 2, 107.
18. Рыжов О.С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лаваля. "Прикл. матем. и мех.", 1958, т. XXII, в. 4, 433-443.
19. Рыжов О.С. Образование ударных волн в соплах Лаваля. "Прикл. матем. и мех.", 1963, т. XXVII, в. 2, 309.
20. Ehlers F.E. The method of characteristics for isoenergetic supersonic flows adapted to high-speed digital computers. "J. Soc. Industr. Appl. Math.", 1959, 7, № 1, 85-100. Русский перевод в сб.: "Механика", 1960, № 1 (59), 3-16.
21. Чушкин П.И. Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа. "Прикл. матем. и мех.", 1960, т. XXIV, в. 5, 927-930.

22. Кацкова О.Н., Наумова И.Н., Шмыглевский Ю.Д., Шулишина Н.П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М., ВЦ АН СССР, 1961.

23. Broer L.J.F. Characteristics of equations of motion of reacting gas. "J.Fl. Mech.", 1958, 4, part 3, 276 - 282.

24. Williams F.A. Chemical reactions in supersonic flow. "ARS Journal", 1959, 29, № 6, 442 - 443.

25. Cleaver J. W. The two-dimensional flow of an ideal dissociating gas. The College of Aeronautics, Cranfield, 1959, R. № 127.

26. Capiaux R., Washington M. Non-equilibrium flow past a wedge. "IAS Paper", 1962, № 99.

27. Кацкова О.Н., Крайко А.Н. Расчет плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений при наличии необратимых процессов. "Прикл. мех. и техн. физ.", 1963, т. 4, 116 - 118.

28. Кацкова О.Н., Крайко А.Н. Расчет плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений при наличии необратимых процессов. М., ВЦ АН СССР, 1964.

29. Рыжов О.С., Шмыглевский Ю.Д. Об одном свойстве трансзвуковых течений газа. "Прикл. матем. и мех.", 1961, XXV, вып. 3, 453 - 455.

30. Кацкова О.Н., Крайко А.Н. Расчет осесимметричных течений реального газа. "Ж. вычисл. матем. и матем. физ.", 1962, 2, № 1, 125 - 132.

31. Наумова И.Н. Аппроксимация термодинамических функций воздуха. "Ж. вычисл. матем. и матем. физ.", 1961, 1, № 2, 295 - 300.

32. Hansen C.F. Approximations for the thermodynamic and transport properties of high-temperature air. NASA, Technical report R-50, 1959.

33. Предводителев А.С., Ступоченко Е.В., Плешанов А.С., Самуйлов Е.В., Рождественский И.Б. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 300° до 6000°К и давлений от 0,001 до 1000 атмосфер). М., Изд-во АН СССР, 1961.

34. Предводителев А.С., Ступоченко Е.В., Самуйлов Е.В., Стаханов И.П., Плешанов А.С., Рождественский И.Б. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 6000° до 12 000°К и давлений от 0,001 до 1000 атмосфер). М., Изд-во АН СССР, 1957.

35. Предводителев А.С., Ступоченко Е.В., Плешанов А.С., Самуйлов Е.В., Рождественский И.Б. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 12 000° до 20 000°К и давлений от 0,001 до 1000 атмосфер). М., Изд-во АН СССР, 1959.

36. Кацкова О.Н., Шмыглевский Ю.Д. Таблицы параметров осесимметричного сверхзвукового течения свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. М., Изд-во АН СССР, 1962.

37. Пирумов У.Г., Рубцов В.А. Расчет осесимметричных сверхзвуковых кольцевых сопел. "Изв. АН СССР", сер. Механика и машиностроение, 1961, № 6, 15 - 25.

38. Волконская Т.Г. Расчет сверхзвуковых осесимметричных струй. В сб.: "Численные методы в газовой динамике". М., Изд. МГУ, 1963, 76-83.

39. Шмыглевский Ю.Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М., ВЦ АН СССР, 1963.

40. Крайко А.Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. М., ВЦ АН СССР, 1963.

41. Heller L. Equilibrium statistical mechanics of dissociating diatomic gases. "Phys. Fluids", 1959, 2, № 2, 147 - 152.

# Содержание

	Стр.
Введение .....	3
уравнения. Основные задачи .....	4
Глава первая. Течение в окрестности переходной поверхности...	8
§ 1. Сопло с центральным входом .....	8
§ 2. Кольцевые сопла с одной угловой точкой .....	15
§ 3. Кольцевые сопла с двумя угловыми точками .....	16
Глава вторая. Расчет течения в разгонном участке сопла .....	22
§ 1. Метод характеристик для равновесных течений несовершенного газа .....	22
§ 2. Особенности расчета угловой точки и точек на оси .....	26
§ 3. Выделение адиабаты .....	27
§ 4. Схема расчета разгонного участка сопла и ее особенности	31
Глава третья. Расчет течения в выравнивающем участке сопла	34
§ 1. Сопло с заданной образующей .....	34
§ 2. Определение образующей сопла по заданным условиям на выходе .....	35
Глава четвертая. Численные примеры расчетов .....	37
§ 1. Примеры расчета отдельных точек методом характеристик	37
§ 2. Пример расчета сопла .....	40
Приложение .....	43
Таблица 1. Значения функций $\omega(z)$ , $\omega'(z)$ , $\omega''(z)$ для осесимметричных течений .....	44
Таблица 2. Значения функций $\omega(z)$ , $\omega'(z)$ , $\omega''(z)$ для плоских течений .....	46
Таблица 3. Значения функций $\omega(z)$ , $\omega'(z)$ , $\omega''(z)$ для кольцевых сопел с одной угловой точкой .....	48
Таблица 4. Значения коэффициентов в разложениях функций $F, G$ для кольцевых сопел с двумя угловыми точками .....	53
Таблица 5. Значения функций $F(\eta)$ , $G(\eta)$ .....	54
Литература .....	59



**О.Н.Кацкова**

**Расчет равновесных течений газа  
в сверхзвуковых соплах**

\* \* \*

**Утверждено к печати Ученым советом  
Вычислительного центра АН СССР**

\* \*

**Редактор И.А.Орлова. Техн.редактор А.И.Коркина  
Корректор Т.Н.Шведова**

---

*Т-15046. Подписано в печать 20/Х-64 г. Формат бумаги 60 x 92  $\frac{1}{16}$   
Уч.-изд.л. 3, 471. Усл.-печ.л. 3, 875. Заказ 83. Тираж 1850 экз.  
Цена 24 коп.*

---

Отпечатано на ротапронтах в Вычислительном центре АН СССР  
Москва, В-333, улица Вавилова, дом № 28

## ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

### В Ы Ш Л И:

1. Шмыглевский Ю.Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М., ВЦ АН СССР, 1963.

2. Авдеенкова Л.М., Корольков Н.В. Бездиодные магнитные элементы на кольцевых сердечниках. М., ВЦ АН СССР, 1963.

3. Торгов Ю.И. Арифметическое устройство на динамических элементах. М., ВЦ АН СССР, 1963.

4. Сборник материалов по модернизации машины "Урал-1". М., ВЦ АН СССР, 1963.

5. Крайко А.Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. М., ВЦ АН СССР, 1963.

6. Торопов В.С. Использование многодырочных сердечников в оперативных запоминающих устройствах. М., ВЦ АН СССР, 1963.

7. Улановский В.П., Хованский Г.С. Интерполирование табличных функций многих переменных. М., ВЦ АН СССР, 1963.

8. Авдеенкова Л.М., Корольков Н.В., Максимова В.Н., Трефилов В.И. Долговременные (постоянные) запоминающие устройства для ЦВМ. М., ВЦ АН СССР, 1963.

9. Граблев А.С. Быстродействующие феррит-диодные элементы с питанием переменным током для ЦВМ. М., ВЦ АН СССР, 1963.

10. Тарасов С.И. Резонансный способ измерения приращений потока магнитной индукции при импульсном перемагничивании сердечников. М., ВЦ АН СССР, 1964.

11. Кацкова О.Н., Крайко А.Н. Расчет плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений при наличии необратимых процессов. М., ВЦ АН СССР, 1964.

12. Ульмасов Н. Номограммы для гидравлического расчета канализационных сетей. М., ВЦ АН СССР, 1964.

13. Никишин В.С. Температурные напряжения в составном цилиндре при произвольном распределении температуры по высоте. М., ВЦ АН СССР, 1964.

14. Кацкова О.Н. Расчет равновесных течений газа в сверхзвуковых соплах. М., ВЦ АН СССР, 1964.

---

Книги продаются в магазинах "Академкнига" и книготоргов  
Заказы направлять по адресу: Москва-Центр, Б.Черкасский пер., дом 2/10  
Контора "Академкнига"



Цена 24 коп.