

WERKSTATTBÜCHER

HERAUSGEBER H.HAAKE

HEFT 52

V. HAPPACH

**TECHNISCHES
RECHNEN**

I. TEIL

DRITTE AUFLAGE



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

WERKSTATTBÜCHER

FÜR BETRIEBSBEAMTE, KONSTRUKTEURE U. FACHARBEITER
HERAUSGEGEBEN VON DR.-ING. H. HAAKE VDI

Jedes Heft 50—70 Seiten stark, mit zahlreichen Textabbildungen

Preis: RM 2.— oder, wenn vor dem 1. Juli 1931 erschienen, RM 1.80 (10% Notnachlaß)

Bei Bezug von wenigstens 25 beliebigen Heften je RM 1.50

Die Werkstattbücher behandeln das Gesamtgebiet der Werkstatttechnik in kurzen selbständigen Einzeldarstellungen; anerkannte Fachleute und tüchtige Praktiker bieten hier das Beste aus ihrem Arbeitsfeld, um ihre Fachgenossen schnell und gründlich in die Betriebspraxis einzuführen. Die Werkstattbücher stehen wissenschaftlich und betriebstechnisch auf der Höhe, sind dabei aber im besten Sinne gemeinverständlich, so daß alle im Betrieb und auch im Büro Tätigen, vom vorwärtsstrebenden Facharbeiter bis zum leitenden Ingenieur, Nutzen aus ihnen ziehen können. Indem die Sammlung so den einzelnen zu fördern sucht, wird sie dem Betrieb als Ganzem nutzen und damit auch der deutschen technischen Arbeit im Wettbewerb der Völker.

Einteilung der bisher erschienenen Hefte nach Fachgebieten

I. Werkstoffe, Hilfsstoffe, Hilfsverfahren

	Heft
Das Gußeisen. 2. Aufl. Von Chr. Gilles	19
Einwandfreier Formguß. 2. Aufl. Von E. Kothny	30
Stahl- und Temperguß. 2. Aufl. Von E. Kothny	24
Die Baustähle für den Maschinen- und Fahrzeugbau. Von K. Krekeler	75
Die Werkzeugstähle. Von H. Herbers	50
Nichteisenmetalle I (Kupfer, Messing, Bronze, Rotguß). 2. Aufl. Von R. Hinzmann	45
Nichteisenmetalle II (Leichtmetalle). 2. Aufl. Von R. Hinzmann	53
Härten und Vergüten des Stahles. 5. Aufl. Von H. Herbers. (Im Druck)	7
Die Praxis der Warmbehandlung des Stahles. 5. Aufl. Von P. Klostermann	8
Elektrowärme in der Eisen- und Metallindustrie. Von O. Wundram	69
Brennhärten. 2. Aufl. Von H. W. Grönegreß. (Im Druck)	89
Die Brennstoffe. Von E. Kothny	32
Öl im Betrieb. 2. Aufl. Von K. Krekeler	48
Farbspritzen. Von R. Klose	49
Rezepte für die Werkstatt. 4. Aufl. Von F. Spitzer	9
Furniere — Sperrholz — Schichtholz I. Von J. Bittner	76
Furniere — Sperrholz — Schichtholz II. Von L. Klotz	77

II. Spangebende Formung

Die Zerspanbarkeit der Werkstoffe. 2. Aufl. Von K. Krekeler	61
Hartmetalle in der Werkstatt. Von F. W. Leier	62
Gewindeschneiden. 3. Aufl. Von O. M. Müller	1
Wechselräderberechnung für Drehbänke. 5. Aufl. Von E. Mayer	4
Bohren. 3. Aufl. Von J. Dinnebier	15
Senken und Reiben. 3. Aufl. Von J. Dinnebier	16
Innenräumen. 2. Aufl. Von L. Knoll	26
Außenräumen. Von A. Schatz	80
Das Sägen der Metalle. Von H. Hollaender	40
Die Fräser. 3. Aufl. Von E. Brödner	22
Das Fräsen. Von Dipl.-Ing. H. H. Klein	88
Das Einrichten von Automaten I (Die Automaten System Spencer und Brown & Sharpe). Von K. Sachse. (Vergriffen)	21
Das Einrichten von Automaten II (Die Automaten System Gridley [Einspindel] und Cleveland und die Offenbacher Automaten). Von Ph. Kelle, E. Gothe, A. Kreil	23
Das Einrichten von Automaten III (Die Mehrspindel-Automaten, Schnittgeschwindigkeiten und Vorschübe). Von E. Gothe, Ph. Kelle, A. Kreil	27
Das Einrichten von Halbautomaten. Von J. v. Himbergen, A. Bleckmann, A. Wassmuth	36
Die wirtschaftliche Verwendung von Einspindelautomaten. Von H. H. Finkelnburg	81
Die wirtschaftliche Verwendung von Mehrspindelautomaten. Von H. H. Finkelnburg	71
Werkzeugeinrichtungen auf Einspindelautomaten. Von F. Petzoldt	83
Maschinen und Werkzeuge für die spangebende Holzbearbeitung. Von H. Wichmann	78

III. Spanlose Formung

Freiformschmiede I (Grundlagen, Werkstoff der Schmiede, Technologie des Schmiedens). 3. Aufl. Von F. W. Duesing und A. Stodt. (Im Druck)	11
Freiformschmiede II (Schmiedbeispiele). 2. Aufl. Von B. Preuss und A. Stodt	12
Freiformschmiede III (Einrichtung und Werkzeuge der Schmiede). 2. Aufl. Von A. Stodt	56

(Fortsetzung 3. Umschlagseite)

WERKSTATTBÜCHER
FÜR BETRIEBSBEAMTE, KONSTRUKTEURE UND FACH-
ARBEITER. HERAUSGEBER DR.-ING. H. HAAKE VDI

HEFT 52

Technisches Rechnen

Von

Dr. phil. Vollrat Happach

Oberingenieur, Stettin

Erster Teil

Regeln, Formeln und Beispiele
für das Rechnen mit Zahlen und Buchstaben
zum Gebrauch in Werkstatt, Büro und Schule

Dritte, verbesserte Auflage
(13. bis 18. Tausend)

Mit 50 Abbildungen im Text



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1943

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einführung: Allgemeines über technische Zahlen und technisches Rechnen	3
I. Die grundlegenden Rechenverfahren und Hilfsmittel	5
A. Regeln für das Rechnen ohne Hilfsmittel	5
1. Die Addition S. 5. — 2. Die Subtraktion S. 6. — 3. Die Multiplikation S. 7. —	
4. Die Division S. 10. — 5. Das Zerlegen in Faktoren S. 12. — 6. Potenzen S. 13. —	
7. Wurzeln S. 15. — 8. Logarithmen S. 16. — 9. Das Rechnen mit Winkeln S. 19.	
B. Regeln für das Rechnen mit dem Rechenschieber	22
10. Einrichtung des logarithmischen Rechenschiebers S. 22. — 11. Gebrauch des	
Rechenschiebers S. 22.	
C. Regeln für das Rechnen mit Tabellenwerten	25
12. Der Funktionsbegriff S. 25. — 13. Lineare Interpolation S. 26. — 14. Ein-	
richtung und Gebrauch einiger Tafeln S. 27. — 15. Tafeln für Logarithmen und	
Kreisfunktionen S. 29.	
II. Anwendung der Sätze der Geometrie und der Algebra sowie der höheren	
Rechnungsarten auf das numerische Rechnen	30
A. Algebra und algebraische Analysis	30
16. Allgemeines über Gleichungen und ihre Auflösung S. 30. — 17. Gleichungen	
1. Grades S. 31. — 18. Proportionen S. 33. — 19. Gleichungen höheren Grades	
und transzendente Gleichungen S. 34. — 20. Graphische Lösung von Gleichungen	
S. 37. — 21. Reihen S. 38. — 22. Das Rechnen mit Näherungsformeln S. 40.	
B. Die für das numerische Rechnen bedeutsamen Eigenschaften der	
Funktionen	40
23. Koordinatensysteme S. 40. — 24. Die gerade Linie im r.K.S. S. 42. —	
25. Gleichungen einiger Kurven im r.K.S. S. 43. — 26. Definition und Berechnung	
des Differentialquotienten S. 47. — 27. Anwendung der Differentialrechnung	
auf das numerische Rechnen S. 49.	
III. Anwendung des Zahlenrechnens auf besondere Probleme der Werkstatt-	
praxis	50
A. Technische Rechnungen allgemeiner Art	50
28. Maßstäbe S. 50. — 29. Mengenrechnung S. 51. — 30. Prozent- und Zins-	
rechnung S. 51. — 31. Elemente der Fehlerrechnung S. 53.	
B. Das Rechnen mit technischen Formeln	57
32. Allgemeines S. 57. — 33. Mechanik S. 57. — 34. Elektrik S. 60. — 35. Wärme	
S. 62. — 36. Optik S. 62.	

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

ISBN 978-3-662-41733-1

ISBN 978-3-662-41874-1 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-41874-1

Vorwort zur dritten Auflage.

Der Stoff des „Technischen Rechnens“, der ursprünglich nur ein Bändchen der „Werkstattbücher“ füllte, verteilt sich seit der 2. Auflage¹ auf zwei Hefte. Im vorliegenden ersten Teil wird das Rechnen mit Zahlen und Buchstaben behandelt. Im zweiten Teil — Heft 90 der W.-B. — werden die zeichnerischen Verfahren einer eingehenderen Betrachtung unterzogen. Er lehnt sich in seinem Aufbau völlig an das numerische Rechnen an. Beide Hefte erläutern die besprochenen Rechenregeln und -formeln durch zahlreiche durchgeführte Beispiele. Diese letzteren wurden nicht nur dem allgemeinen Maschinenbau und der technischen Physik sondern auch dem heute besonders aktuellen Gebiete der Wehrtechnik entnommen.

Einführung: Allgemeines über technische Zahlen und technisches Rechnen.

Die Größen, mit denen man in der Technik rechnet, sind teils spezielle Zahlen, kurzweg auch „Zahlen“ genannt, teils allgemeine, durch Symbole dargestellte Größen und die aus ihnen zusammengesetzten „algebraischen Ausdrücke“.

Zu den speziellen Zahlen gehören:

1. die natürlichen, positiven und negativen Zahlen (z. B. 1, 2, 3; — 4, — 5 usw.);
2. die Brüche, eingeteilt in gemeine und Dezimalbrüche (z. B. $\frac{3}{8}$ bzw. 0,375);
3. die irrationalen Zahlen, d. h. solche algebraisch erchenbare Zahlen, die sich nicht durch einen gemeinen Bruch und daher auch nicht durch einen endlichen Dezimalbruch darstellen lassen (z. B. $\sqrt{2}$);
4. die transzendenten Zahlen, d. h. solche, die nicht durch einfache algebraische Operationen gefunden werden können, wie z. B. die Logarithmen, die trigonometrischen Funktionswerte, die Zahl π usw.

An die Stelle der speziellen Zahlen treten bei allgemeinen Untersuchungen die sog. Symbole, meistens Buchstaben des lateinischen, griechischen, seltener des deutschen Alphabetes, denen man bestimmte, gelegentlich auch alle nur denkbaren Eigenschaften der speziellen Zahlen zuschreibt. Die bei algebraischen Ausdrücken als Faktoren stehenden Zahlen nennt man Koeffizienten oder Beiwerte. Auch die durch Symbole dargestellten allgemeinen Zahlen und algebraischen Größen lassen sich — wie die speziellen Zahlen — unterscheiden in

positive und negative Zahlen (z. B. $+a$, $-b$);

ganze und gebrochene Zahlen (z. B. a bzw. $\frac{a}{b}$);

rationale und irrationale Zahlen (z. B. a , $\frac{a}{b}$ bzw. \sqrt{a} , $\sqrt{\frac{a}{b}}$);

algebraische und transzendente Zahlen (z. B. $3a^2$ bzw. $d^2 \frac{\pi}{4}$, $\log 3$);

reelle und imaginäre Zahlen (z. B. a , b^2 , \sqrt{c} bzw. $\sqrt{-a}$).

¹ Die erste Auflage erschien 1933, die zweite 1939.

Außerdem ist noch zu unterscheiden zwischen absoluten und relativen Zahlen (z. B. a , b , 8 bzw. $+a$, $-b$ usw.), konstanten Größen, d. h. solchen mit bestimmtem, feststehendem oder als feststehend angenommenem Werte, z. B. a , b , $\pi = 3,141\dots$, und variablen Größen, d. h. solchen, die — gewöhnlich innerhalb bestimmter, vorgeschriebener Grenzen — beliebige Werte annehmen können (sehr häufig durch die Symbole x , y , z dargestellt).

Regeln, die für das Rechnen mit allgemeinen Zahlen aufgestellt sind, gelten stets auch für das Rechnen mit speziellen Zahlenwerten¹.

Bezüglich dieser ist noch folgendes zu bemerken:

Die meisten Zahlen, mit denen man in der Technik rechnet, sind die Ergebnisse von Messungen. Den Meßinstrumenten wie den mit ihnen gewonnenen Zahlen schreibt man gewisse Eigenschaften zu, die man durch die Begriffe „richtig“, „genau“ usw. zu charakterisieren gesucht hat. Leider steht die Bedeutung dieser Begriffe nicht allgemein fest, so daß eine schärfere Fassung am Platze erscheint. Wir erklären:

1. Eine Zahl heißt richtig, wenn sie bis auf den Abrundungsfehler bzw. bis auf eine angebbare Unsicherheit der letzten Ziffer mit dem wahren Wert der durch sie bezeichneten Größe übereinstimmt.

2. Unter der Genauigkeit einer Zahlenangabe verstehen wir das Verhältnis der Unsicherheit der letzten mitgeteilten Ziffer zum Gesamtwerte der Zahl; gewöhnlich wird dieses Verhältnis in Prozenten des Gesamtwertes angegeben, und man spricht alsdann von einer prozentualen Genauigkeit, im Gegensatz zur absoluten Genauigkeit, dem absoluten Betrage der Unsicherheit. Dieser kann oft bei Werten, die durch Messungen gefunden wurden, durch besondere Rechenverfahren (vgl. Abschnitt 31) ermittelt werden.

Unter Stellenzahl ist hier und im folgenden lediglich die Anzahl der für die Rechnung in Betracht kommenden Ziffern verstanden. So ist $0,000583$ eine Zahl mit drei Stellen, $59,7$ ebenfalls. $7,350$ ist eine vierstellige Zahl. Es ist also ein Unterschied, ob man schreibt $2,7$ oder $2,700$, da man im ersten Falle eine zweistellige, im zweiten Falle eine vierstellige Zahl vor sich hat. Die Zahlen sind mit so vielen Stellen anzugeben, wie richtig sind.

Rechnet man mit Zahlen von beschränkter Genauigkeit, so ist auch das Rechenergebnis mehr oder minder unsicher; denn es ist ohne weiteres klar, daß die prozentuale Genauigkeit des Ergebnisses niemals höher sein kann als die der Zahlen, aus denen es errechnet wurde. Die Genauigkeit technischer Zahlen ist selten höher als $\pm 0,5\%$, d. h. in der Regel sind nur 2 Stellen richtig, und die dritte Stelle ist bereits mehr oder minder unsicher. *Die Rechengenauigkeit weiter als bis zur dritten Stelle zu treiben, ist daher im allgemeinen zwecklos.* Fälle, in denen aus besonderen Gründen genauer gerechnet werden muß, kommen natürlich auch gelegentlich vor, und es ist Sache des Rechners, zu prüfen, wie weit im einzelnen Falle die Rechengenauigkeit zu treiben ist.

Die im Wege numerischer Berechnung zu findenden Zahlenwerte sollen auf möglichst bequeme Weise, schnell und rechnerisch richtig gefunden werden. Es bedingt dies die Anwendung besonderer, vereinfachter Rechenverfahren, sowie umfassende Rechenkontrollen. Diese sind freilich nicht immer bequem, denn eine bloße Wiederholung der Rechnung nach dem ursprünglichen Verfahren schützt

¹ Beachte aber den Unterschied der Schreibweise bei speziellen und allgemeinen Zahlen:

$$3\frac{4}{7} \text{ bedeutet } 3 + \frac{4}{7}; \quad a\frac{b}{c} \text{ bedeutet } a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

bekanntlich keineswegs vor der Wiederholung eines etwa begangenen Rechenfehlers. Wo man auf eine durchgreifende Kontrolle verzichten muß, überzeuge man sich wenigstens durch eine Überschlagsrechnung, ob das gefundene Resultat überhaupt möglich ist; besonders überprüfe man grundsätzlich die richtige Stellung des Kommas bei Dezimalbrüchen. Ein Kommafehler ist in jedem Falle verhängnisvoller als jede noch so grobe Abrundung oder Vernachlässigung.

Eine weitere wichtige Forderung ist die nach der Übersichtlichkeit der Rechnung, wozu z. B. auch die Begründung besonderer Operationen gehört. Den Gang einer zu Papier gebrachten Rechnung soll ja schließlich nicht nur der Rechner selbst, sondern auch jeder andere verfolgen können. Bei wiederholten Rechnungen der gleichen Art — etwa bei der Auswertung einer Formel, in der eine oder mehrere Größen der Reihe nach geändert werden — ist die Benutzung eines besonders für diesen Zweck entworfenen Formulars nicht nur übersichtlich, sondern auch bequem.

Die rechnerisch zu lösenden Aufgaben aus der technischen Praxis werden gewöhnlich in Form eines Textes gegeben; es ist Sache des Rechners, diesen Text in die Form einer Rechenaufgabe zu kleiden. Die alsdann mit den einzelnen Zahlen vorzunehmenden Rechenoperationen werden durch besondere Rechnungszeichen angedeutet. Für die vier Grundrechnungsarten gelten folgende:

1. das „Pluszeichen“ (+) als Zeichen für das Zusammenzählen: Addition;
2. das „Minuszeichen“ (−) als Zeichen für das Abziehen: Subtraktion;
3. der „Punkt“ (·) als Zeichen für das Malnehmen: Multiplikation;
4. der „Doppelpunkt“ (:) als Zeichen für das Teilen: Division.

(Der Doppelpunkt wird auch gelegentlich ersetzt durch einen schrägen oder waagerechten Strich, also $3 : 7 = 3/7 = \frac{3}{7}$.)

Als Rechenvorschrift im weiteren Sinne können auch die Klammern angesehen werden, die vornehmlich angewandt werden, um die als Faktoren zu setzenden Summen und Differenzen abzugrenzen. So bedeutet die Schreibweise $(3 + 7) \cdot 3$ etwas anderes als $3 + 7 \cdot 3$.

Es ist weiter zu beachten, daß die Zeichen + und − nicht immer nur Operationszeichen sind, sondern oft als sog. Vorzeichen zu den Zahlen gehören, bei denen sie stehen, diese also als „positiv“ oder „negativ“ kennzeichnen. Dabei sind Zahlen ohne Vorzeichen stets als positiv anzusehen.

I. Die grundlegenden Rechenverfahren und Hilfsmittel.

A. Regeln für das Rechnen ohne Hilfsmittel.

1. Die Addition. a) In der Gleichung $a + b + c = d$ nennt man die Zahlen a , b und c Summanden, d die Summe. Zur Erleichterung der Addition vieler Summanden kann die Rechenregel dienen: die Reihenfolge der Summanden ist beliebig.

b) Bei mehreren Summanden ist es bequemer, die Summanden nicht nebeneinander, sondern untereinander zu schreiben; man kontrolliert jede Addition dadurch, daß man sie bei anderer Reihenfolge der Summanden wiederholt.

c) Hat man benannte Zahlen — Maßzahlen oder andere „dimensionierte“ Größen — zu addieren, so achte man auf die Benennungen bzw. Maßeinheiten: Nur gleichartige Größen dürfen addiert werden.

d) Auch bei der Addition algebraischer, d. h. durch Symbole (Buchstaben) dargestellter Zahlen ist darauf zu achten, daß nur gleichartige Größen additiv zusammengefaßt werden.

Beispiele: $0,25 + 3,57 + 1,75 = 0,25 + 1,75 + 3,57 = 2,00 + 3,57 = 5,57$
 $3,37 \text{ m} + 1,3 \text{ dm} = 3,37 \text{ m} + 0,13 \text{ m} = 3,50 \text{ m}$ ($\text{m} = \text{Meter}$, $\text{dm} = \text{Dezimeter!}$)
 $3x + 4y + 2x = 3x + 2x + 4y = 5x + 4y$.

2. Die Subtraktion. a) In der Gleichung $a - b = c$ heißt a der Minuend, b der Subtrahend und das Ergebnis die Differenz zwischen a und b . Diese Gleichung ist jedoch nur dann richtig, wenn $c + b = a$ ist, d. h. bei jeder rechnerisch richtigen Subtraktion muß Differenz + Subtrahend = Minuend sein: eine wichtige Rechenkontrolle!

b) Hat man mehrere teils positive, teils negative Zahlen zusammenzufassen, so kann man beispielsweise erst alle positiven, dann alle negativen Zahlen zusammennehmen und aus den erhaltenen Summen dann die Differenz bilden. Denn: Man kann in jeder beliebigen Reihenfolge addieren und subtrahieren.

c) Ist der Subtrahend — absolut genommen — größer als der Minuend, so subtrahiere man die absolut kleinere von der absolut größeren Zahl und gebe dem Resultat das negative Vorzeichen, z. B. $4,3 - 18,5 = -14,2$.

d) Bei der Subtraktion (und auch Addition) algebraischer Größen treten gelegentlich Klammern auf, über deren Beseitigung (= „Auflösung“) folgende Regeln gelten:

1. Eine Klammer, vor der ein Pluszeichen steht, wird aufgelöst, indem man den Inhalt der Klammer ohne diese unverändert abschreibt.

2. Eine Klammer, vor der ein Minuszeichen steht, wird aufgelöst, indem man den Inhalt der Klammer ohne diese mit umgekehrten Vorzeichen niederschreibt. Größen ohne Vorzeichen sind dabei stets als positiv aufzufassen.

Als letzte der hierher gehörigen Regeln merke man sich:

3. Sind mehrere ineinander geschachtelte Klammern vorhanden, so ist es zweckmäßig (nicht notwendig), die innersten Klammern zuerst aufzulösen.

Beispiele: $(a + b) + (a - b) = a + b + a - b = 2a;$
 $(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2b;$

$$a + [(b - a) - (a + b)] - b = a + [b - a - a - b] - b = a - 2a - b = -a - b;$$

$$3a - [2a - (a - b) + 2b] - 3b = 3a - [2a - a + b + 2b] - 3b =$$

$$3a - 2a + a - b - 2b - 3b = 2a - 6b.$$

e) Aus den im vorigen Absatz gegebenen Regeln folgt, daß

$$-(a) = +(-a), \quad (1)$$

da ja, wenn man die Klammern auflöst, sich die Identität $-a = -a$ ergibt.

Die durch die Gleichung (1) gegebene Tatsache ist wichtig; die Gleichung sagt nämlich aus, daß man die Subtraktion auch auffassen kann als eine Addition mit umgekehrtem Vorzeichen.

Die Differenz $a - b$ kann man sich also auch als Summe geschrieben denken, nämlich $a - b = a + (-b)$. Man nennt daher auch mehrere durch Plus- oder Minuszeichen verbundene Größen eine algebraische Summe.

Merke ferner: Eine algebraische Summe aus zwei Gliedern heißt Binom, z. B. $(a + b)$ oder $(a - 2b)$ usw.

f) Statt eine Zahl von einer anderen zu subtrahieren, kann man auch ihre dekadische Ergänzung addieren und braucht alsdann lediglich eine entsprechende Zehnerpotenz zu subtrahieren.

Die dekadische Ergänzung von 3,475 ist 6,525.

„ „ „ „ 97,099 „ 02,901.

Man findet demnach die dekadische Ergänzung zu einer Zahl dadurch, daß man deren einzelne Ziffern, von links beginnend, zu 9, die letzte zu 10 ergänzt.

Nun ist beispielsweise

$$- 3,475 = + 6,525 - 10;$$

man schreibt diese Differenz einfach in folgender Form:

$$\times 6,525 \text{ (gelesen: dekadische Ergänzung . . .),}$$

wobei also bei der Rechnung an Stelle des Kreuzes eine Eins mit negativem Vorzeichen zu setzen ist: $\times = (-1)$.

Beispiele:	$12,348 - 7,692 = 12,348$	$17,68 - 25,89 = 17,68$
	$\times 2,308$	$\times 74,11$
	Ergebnis: $\underline{14,656} - 10$	Ergebnis: $\times 91,79 = -8,21$.

3. Die Multiplikation. a) Definition. Die Aufgabe der Multiplikation liegt vor, wenn die Summe aus mehreren gleich großen Summanden zu bilden ist, z. B. $7 + 7 + 7 + 7 = 4 \cdot 7$; $a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$; $b + b + b + \dots + b + b = a \cdot b$ (a Summanden).

b) In der Gleichung $a \cdot b \cdot c = d$ nennt man die zu multiplizierenden Zahlen a , b und c die Faktoren; das Ergebnis d der Multiplikation heißt Produkt. Die Reihenfolge der Faktoren ist beliebig.

Beispiel: $0,5 \cdot 3,75 \cdot 20 = 0,5 \cdot 20 \cdot 3,75 = 10 \cdot 3,75 = 37,5$.

c) Hat man zwei mehrstellige Zahlen miteinander zu multiplizieren, so multipliziere man den ersten Faktor folgeweise mit den einzelnen Ziffern des zweiten, und zwar gewöhne man sich daran, die Ziffern des zweiten Faktors — des sog. Multiplikators — von links nach rechts zu benutzen.

d) Hat man zwei zweistellige Zahlen miteinander zu multiplizieren, so ist das Verfahren nach FEROL bequem, bei dem man nach folgendem Schema rechnet:

Es ist nämlich mit Bezug auf das gegebene Schema:

$\begin{array}{r} 6 \ 7 \\ \times \\ \hline 5 \ 4 \\ \hline \end{array}$	<p>1) $7 \cdot 4 = 28$; die 8 notiert man, die 2 merkt man sich;</p> <p>2) $7 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 35 + 24 = 59$; hierzu die 2 von der Multiplikation der</p> <p>3) $5 \cdot 6 = 30$; hierzu die 6 der vorigen Operation gibt 36, was man notiert.</p>
--	--

3618 Einer gibt 61; die 1 notiert man; die 6 ist wieder zu merken;

Den Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens liefert die Algebra (siehe diesen Abschn. unter g) in Verbindung mit der Tatsache, daß

1. Einer mal Einer Einer ergibt,
2. Einer mal Zehner und Zehner mal Einer Zehner ergibt,
3. Zehner mal Zehner Hunderter ergibt.

Sind die Faktoren Dezimalbrüche, so führt man die Multiplikation zunächst ohne Berücksichtigung des Kommas aus; dessen Stellung wird vorher oder zum Schluß auf Grund eines Überschlages ermittelt.

Beispiel: $7,8 \cdot 0,43 = ?$; $78 \cdot 43 = 3354$

Überschläglichs ist $7,8 \approx 8$; $0,43 \approx 0,4$; $8 \cdot 0,4 = 3,2$; folglich kann das genaue Resultat nur lauten: 3,354.

Auch mehr als zweistellige Zahlen könnte man nach dem FEROLSchen Verfahren multiplizieren, doch sind dann die Rechnungen weniger bequem.

e) Hat man mehr als zweistellige Zahlen miteinander zu multiplizieren, so genügt bei technischen Rechnungen meist die abgekürzte Multiplikation nach folgendem Beispiel:

$85,82 \cdot 1,245$	Es wird hier nur die Multiplikation mit der 1. Ziffer des Multiplikators genau durchgeführt; bei der Multiplikation mit den folgenden Ziffern des Multiplikators vernachlässigt man folgeweise die letzte, die beiden letzten, die drei letzten usw. Stellen des vorstehenden Faktors und berücksichtigt lediglich ihren Einfluß auf die jeweils letzte Stelle.
8582	
1716.	
343..	
43...	
106,84...	

Es ist im gegebenen Beispiel:

$$8582 \cdot 1 = 8582$$

$$858\cancel{2} \cdot 2 = 1716 \quad (2 \cdot 2 = 4 \text{ bleibt unberücksichtigt})$$

$$85\cancel{8}\cancel{2} \cdot 4 = 343 \quad (4 \cdot 8 = 32, \text{ berücksichtigt wird hiervon nur die } 3)$$

$$8\cancel{5}\cancel{8}\cancel{2} \cdot 5 = 43 \quad (5 \cdot 6 = 30, \text{ berücksichtigt wird die } 3).$$

Die vernachlässigten Stellen des vorstehenden Faktors werden durchstrichen; die vernachlässigten Stellen in den Produkten kann man durch Punkte ersetzen, vor allem, wenn man gewohnt ist, die Kommastellung durch Abzählen der Stellen bis zum Komma zu bestimmen; zweckmäßig ist es indes auch hier, die Stellung des Kommas durch eine Überschlagsrechnung zu finden. Im Beispiel ist $85,82 \cdot 1,245 \approx 90 \cdot 1 = 90$; das genaue Ergebnis ist etwas größer, nämlich = 106,84.

Das abgekürzte Verfahren ist bei technischen Rechnungen deswegen berechtigt, weil die Zahlen, mit denen gerechnet wird, nur eine beschränkte Genauigkeit haben, und es deswegen zwecklos wäre, die Rechengenauigkeit prozentual weiter zu treiben, als der Genauigkeit der gegebenen Zahlen entspricht. Das heißt: Sind zwei vierstellige Zahlen gegeben, so braucht ihr Produkt auch nicht genauer als auf vier Stellen berechnet zu werden. Man treibt auch wohl, in der Meinung, die Auf- bzw. Abrundungsfehler vermeiden zu können, die Rechengenauigkeit um eine Stelle weiter als hiernach notwendig wäre; Sinn hat jedoch die Maßnahme im allgemeinen nicht.

f) Die Tatsache, daß die Reihenfolge der Faktoren beliebig ist, kann oft zur Erleichterung der Rechnung dienen bzw. die Rechenarbeit vermindern.

Ferner ist es von Vorteil, zu bedenken, daß:

$$2a = a + a; \quad \text{z. B. } 12,36 \cdot 2 = 12,36 + 12,36 = 24,72,$$

$$5a = \frac{10}{2}a; \quad \text{z. B. } 5 \cdot 13,4 = \frac{10 \cdot 13,4}{2} = \frac{134}{2} = 67,$$

$$0,25a = \frac{a}{4}; \quad \text{z. B. } 0,25 \cdot 42 = \frac{42}{4} = 10,5; \quad 2,5 = \frac{10}{4}; \quad 25 = \frac{100}{4} \text{ usw.}$$

$$1,5a = a + 0,5a; \quad \text{z. B. } 1,5 \cdot 38,4 = 38,4 + 19,2 = 57,6,$$

$$0,333a = \frac{a}{3}; \quad 0,667a = \frac{2}{3}a; \quad \text{endlich } \pi = 3,1416 \approx \frac{22}{7}; \quad \frac{\pi}{4} = 0,7854 \approx 0,8.$$

Die Quadrate der ganzen Zahlen von 1 bis 20 und die Kuben von 1 bis 10 sollte jeder technische Rechner auswendig wissen.

$$\text{Beispiele: } 0,05 \cdot 7,04 = 7,04 \cdot 0,05 = 0,704 \cdot 0,5 = 0,352; \quad 1,25 \cdot 4,08 = \frac{10}{8} \cdot 4,08 = \frac{40,8}{8} = 5,1;$$

$$0,15 \cdot 4,2 = \frac{1,5}{10} \cdot 4,2 = \frac{6,3}{10} = 0,63; \quad 0,375 \cdot 0,4 = 0,75 \cdot 0,2 = 0,15;$$

$$62000 \cdot 0,00015 = 6,2 \cdot 1,5 = 6,2 + 3,1 = 9,3.$$

g) Bei der Multiplikation algebraischer Ausdrücke ist noch folgendes zu beachten:

1. Vor Ausführung einer Multiplikation ist das Vorzeichen des Resultates aus denen der Faktoren zu bestimmen, und zwar gelten hierfür folgende Regeln:

$$(+)\cdot(+)=+; \quad (+)\cdot(-)=-; \quad (-)\cdot(+)=--; \quad (-)\cdot(-)=+ \quad (2)$$

Hierbei ist zu bedenken, daß jede Zahl ohne ein Vorzeichen stets als positiv anzusehen ist.

2. Jede Summe oder Differenz, die als Faktor steht, ist in eine Klammer zu schließen, z. B. $3(a+b) \neq 3a+b^*$.

* Das Zeichen \neq lies „ungleich“ oder „verschieden von“.

fehler beseitigt werden. Man erkennt jedenfalls schon an diesem einfachen Beispiel den hervorragenden Wert der symbolischen Schreibweise: Sie erspart viele Worte und drückt dabei die mathematischen Zusammenhänge auf kürzeste und dabei doch völlig exakte Weise aus. Im übrigen beachte man, daß alle die durch Formeln gegebenen Rechenregeln Kannvorschriften, nicht Mußvorschriften sind, d. h. daß man sie überall da, wo es beliebt und von Vorteil erscheint, anwenden darf, aber nicht immer und überall anwenden muß.

k) Wichtig ist noch die Festsetzung:

$$0 \cdot a = 0. \quad (10)$$

Diese — nicht beweisbare — Gleichung läßt den Schluß zu, daß es „verschieden große Nullen“ geben müsse, da doch offenbar die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Null nach Aussage der Gleichung *a* mal größer ist, als die als Faktor bei *a* stehende Null. Es handelt sich hier um ein Problem, das eine tiefe philosophische Bedeutung hat und bei der Differentialrechnung eine grundlegende Rolle spielt. Jedenfalls ist die Null nicht als Zahl anzusprechen, sondern lediglich als ein Symbol, das gewissen Gedankengängen entsprungen ist.

Dividiert man die Gleichung (10) durch die Null, die als Faktor bei *a* steht, so erhält man mit

$$\frac{0}{0} = a$$

die bedeutsame Tatsache, daß der wahre Wert für $\frac{0}{0}$ jede beliebige Größe sein kann; man sagt, $\frac{0}{0}$ habe einen unbestimmten Wert. So erhält man beispielsweise, wenn man in dem Ausdruck $\frac{x^2-1}{x-1}$ für *x* den Wert *x* = 1 einführt, mit $\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ einen unbestimmten Wert; durch einen kleinen Kniff kann man hier indes als wahren Wert 2 herausrechnen, wenn man nämlich setzt:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1; \quad \text{für } x=1 \text{ wird } x+1=2.$$

Was hier für die „Null“ gesagt wurde, gilt sinngemäß auch für das Symbol ∞ („unendlich groß“; gemeinhin „unendlich“).

4. Die Division. a) In der Gleichung $a : b = c$ nennt man *a* den Dividend, *b* den Divisor, *c* den Quotient. Jede Divisionsaufgabe läßt sich auch als gemeiner Bruch schreiben: $a : b = \frac{a}{b}$. In dem Bruche $\frac{a}{b}$ nennt man *a* den Zähler *b* den Nenner. Brüche, deren Nenner eine Potenz mit ganzen Exponenten von 10 ist, also Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000 usw., können als Dezimalbrüche geschrieben werden, z. B.

$$\frac{31}{100} = 0,31; \quad \frac{31}{1000} = 0,031 \text{ usw.}$$

Ein gemeiner Bruch wird in einen Dezimalbruch verwandelt, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert; das Ergebnis ist stets

entweder ein endlicher Dezimalbruch; z. B. $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375000 = \frac{375}{1000}$

oder ein periodischer Dezimalbruch; z. B. $\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0,428571428571 \dots = \frac{428571}{999999}$. (Die hinter den Dezimalbrüchen angegebenen gemeinen Brüche deuten die Verfahren an, die man anwenden muß, um einen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln!)

Ist die Rechnung $a : b = c$ richtig und vollständig durchgeführt, so muß nach der obigen Definition $c \cdot b = a$, d. h. Quotient mal Divisor gleich Dividend sein (= Probe!). Bricht man die Rechnung nach einigen Stellen ab, so wird diese Bedingung nicht scharf erfüllt sein können.

b) Ist der Divisor eine mehrstellige Zahl, so wendet man oft mit Vorteil das Verfahren der abgekürzten Division an, das darin besteht, daß man der Reihe nach die letzte, vorletzte usw. Stelle des Divisors vernachlässigt. (Beachte im Beispiel, daß $9 \times 34 = 306$ unrichtig wäre; es ist vielmehr $9 \times 349 = 8 + 306 = 314!$)

Beispiele: $76,48 : 3,492 = 21,903$

$$\begin{array}{r} 6984 \\ \underline{664} \\ 349 \\ \underline{315} \\ 314 \\ \underline{\quad} \\ 1 \end{array}$$

c) Für das Rechnen mit Brüchen gelten folgende Regeln:

1. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler des Bruches mit dieser Zahl multipliziert und das Produkt durch den Nenner des Bruches dividiert:

$$a \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{y}; \quad 3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}. \quad (12)$$

2. Zwei und mehrere Brüche werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das der Nenner dividiert:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}; \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}. \quad (13)$$

3. Ein Bruch bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man seinen Zähler wie auch seinen Nenner mit derselben Zahl multipliziert (= erweitert) oder durch dieselbe Zahl dividiert (= kürzt):

$$\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx}; \quad \text{z. B. } \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21} \text{ usw. (Erweitern);} \quad (14)$$

$$\frac{3a}{6b} = \frac{a}{2b}; \quad \frac{3,2x}{0,8y} = \frac{32x}{8x} = \frac{4x}{y} \text{ (Kürzen).}$$

4. Gleichnamige Brüche, das sind solche mit gleichen Nennern, werden addiert, indem man die Summe der Zähler durch den gemeinsamen Nenner dividiert:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a+b}{x}; \quad \text{z. B. } \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}. \quad (15)$$

5. Ungleichnamige Brüche können erst addiert werden, nachdem sie zuvor durch Erweitern auf den gleichen Nenner gebracht, d. h. gleichnamig gemacht wurden:

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay}{by} + \frac{bx}{by} = \frac{ay+bx}{by} \quad \text{oder} \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{6} + \frac{1 \cdot 3}{6} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6};$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{a+b}{ab}; \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}.$$

Oft sind mehrere der hier zusammengestellten Regeln anzuwenden, z. B.

$$4,16 \cdot \frac{0,675}{0,832} = \frac{4,16 \cdot 0,675}{0,832} = \frac{4,16 \cdot 0,675 \cdot 10}{8,32} = \frac{0,675 \cdot 10}{2} = 0,3375 \cdot 10 = 3,375;$$

$$\frac{0,64}{18,3} \cdot \frac{0,366}{0,0128} = \frac{64 \cdot 36,6 \cdot 10000}{100 \cdot 18,3 \cdot 100 \cdot 128} = \frac{\cancel{64} \cdot \cancel{36,6} \cdot \cancel{10000}}{\cancel{18,3} \cdot \cancel{128}} = \frac{2}{2} = 1,000.$$

d) Wir sahen (Abschn. 2, e), wie eine Subtraktion in eine Addition dadurch verwandelt werden kann, daß man den Subtrahenden mit umgekehrtem Vorzeichen zum Minuenden addiert. Ähnlich läßt sich auch eine Divisionsaufgabe in eine Multiplikationsaufgabe umwandeln: Statt eine Zahl durch eine andere zu dividieren, kann man sie nämlich mit dem reziproken Wert des Divisors multiplizieren. Der reziproke Wert eines Bruches ist der Bruch, den man erhält, wenn

Beim Rechnen mit Brüchen ist diese Zerlegung in Primfaktoren oft von Vorteil, nämlich dann, wenn es sich darum handelt, den sog. Hauptnenner für mehrere ungleichnamige Brüche zu bestimmen. Man findet ihn, indem man sämtliche Nenner in Primfaktoren zerlegt, und von diesen Faktoren alle diejenigen (Faktoren oder auch Faktorenprodukte), die in sämtlichen gegebenen Nennern gleichzeitig auftreten, so weit streicht, als sie in dem Produkt mit dem größten Vielfachen des betreffenden Faktors enthalten sind. Das Produkt aus den übrigbleibenden Faktoren ist der gesuchte Hauptnenner.

Beispiel:
$$\frac{3}{88} + \frac{5}{132} = ?$$

Der Hauptnenner aus 88 und 132 ist $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \times 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 = 264$, also

$$\frac{3}{88} + \frac{5}{132} = \frac{3 \cdot 3}{88 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{132 \cdot 2} = \frac{9}{264} + \frac{10}{264} = \frac{19}{264}.$$

b) Ist bei einer algebraischen Summe ein und derselbe Faktor in sämtlichen Summanden erkennbar, so kann dieser Faktor „ausgesondert“ (oder weniger schön ausgedrückt: „ausgeklammert“) werden. Schematisch verfährt man hierbei in der Weise, daß man den gemeinsamen Faktor vor eine Klammer setzt und in diese die durch den gemeinsamen Faktor dividierten Summanden des gegebenen Ausdrucks schreibt.

Beispiele:
$$3x - 12y = 3(x - 4y);$$

$$ax + by - ay - bx = a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b);$$

$$6a - 9ay = 3a(2 - 3y); \quad ab - a = a(b - 1).$$

In Faktoren zerlegt werden kann auch auf Grund bekannter Formeln. Von diesen führen wir hier an:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad (18) \quad x^2 + (y + b)x + ab = (x + a)(x + b) \quad (19)$$

Beispiele: $9x^2 - 0,01y^2 = (3x + 0,1y)(3x - 0,1y)$; $x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$; denn $-4 - 2 = -6$; $(-4)(-2) = +8$.

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1); \quad \frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a + 1} = \frac{(a + 1)(a - 1)}{(a + 1)(a + 1)} = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

6. Potenzen. a) Eine Potenz ist ein Ausdruck von der Form a^n (lies „a hoch n“); er bedeutet ein Produkt aus n gleichen Faktoren, von denen jeder a ist. Die Zahl a , die mehrmals als Faktor gesetzt werden soll, heißt Basis; die Zahl, die angibt, wie oft die Basis als Faktor gesetzt werden soll, heißt Potenzexponent oder kurz Exponent. Also

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots \quad (n \text{ Faktoren}) \quad (20)$$

Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende Regeln:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (21); \quad \text{z. B. } a^3 \cdot a^7 = a^{10}.$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{1}{a^{y-x}} \quad (22); \quad \text{z. B. } \frac{a^5}{a^3} = a^2; \quad \frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}.$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \quad (23); \quad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}. \quad (24)$$

Merke ferner:

$$a^0 = 1 \quad (25); \quad a^1 = a; \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (26); \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad (27)$$

Beispiele: $a^7 \cdot a = a^8$; $\frac{a^3}{b^5} : b^3 = \frac{a^3 \cdot b^3}{b^5 \cdot a^5} = \frac{1}{a^2 b^2} = \frac{1}{(ab)^2} = \left(\frac{1}{ab}\right)^2$;

$$\frac{(4ab^2)^2}{(2a^2b)^3} = \frac{16a^2b^4}{8a^6b^3} = \frac{2b}{a^4}; \quad \frac{(3x^2)^2}{(xy^2)^2} = \frac{(3x)^2}{y^2} = \frac{9x^2}{y^2}.$$

b) Für das praktische Rechnen von besonderer Bedeutung sind die Zehnerpotenzen. Es ist:

$$10^3 = 1000; \quad 10^2 = 100; \quad 10^1 = 10; \quad 10^0 = 1.$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01; \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001; \quad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001.$$

Das Rechnen mit den Zehnerpotenzen bietet oft große Vorteile, da es möglich ist, mit ihrer Hilfe manche Zahlen so umzuformen, daß sie für die Rechnung bequem werden, z. B. $0,00048 = 4,8 \cdot 10^{-4}$ usw.

Beispiele:

$$\frac{0,0007 \cdot 14}{0,00028} = \frac{7 \cdot 10^{-4} \cdot 14}{28 \cdot 10^{-5}} = \frac{7}{2 \cdot 10^{-1}} = 35; \quad \frac{0,00036 \cdot 1200000}{0,018} = \frac{36 \cdot 10^{-5} \cdot 12 \cdot 10^5}{18 \cdot 10^{-3}} = 24000.$$

e) Mit Hilfe der Regeln für die Multiplikation läßt sich nachweisen, daß

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ (s. Formel 6)}$$

und $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ ist.

Man erkennt, daß durch das Ausmultiplizieren jede Binom-Potenz in eine sog. Reihe entwickelt wird, in der sich die Glieder nach fallenden Potenzen von a und nach steigenden Potenzen von b ordnen lassen. Führt man statt a und b spezielle Zahlen ein, so findet man, daß die einzelnen Summanden der Reihe, von links nach rechts betrachtet, immer kleiner werden, wenn $b < a$, und zwar um so schneller, je kleiner b gegen a ist — eine Tatsache, die für das praktische Rechnen von großer Bedeutung ist.

Beispiel: $(1 + \alpha t)^3 = 1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3$ für $\alpha \cdot t = 0,002$ wird: $(1 + \alpha t)^3 = 1 + 0,006 + 0,000012 + 0,000000008 \approx 1,006$, d. h. schon das 3. Glied kann hier vernachlässigt werden, und es genügt, zu setzen: $(1 + \alpha t)^3 = 1 + 3\alpha t$.

Die Koeffizienten bei den einzelnen Summanden der Reihe heißen Binomialkoeffizienten.

Nachstehend sind diese für positive ganzzahlige Potenzexponenten zusammengestellt:

0. Potenz	1
1. „	1 1
2. „	1 2 1
3. „	1 3 3 1
4. „	1 4 6 4 1
5. „	1 5 10 10 5 1
6. „	1 6 15 20 15 6 1
7. „	1 7 21 35 35 21 7 1
:	$\swarrow \swarrow \swarrow \swarrow \swarrow \swarrow \swarrow \swarrow$

Dieses Schema wird das „PASKALSche Dreieck“ genannt; es läßt sich beliebig fortführen, wenn man sich zuvor das Bildungsgesetz für die Zahlen der einzelnen Schrägreihen klar macht: die erste Schrägreihe sind lauter Einsen. Die zweite Schrägreihe läßt sich aus der ersten ableiten:

$$\begin{array}{l}
 1 = 1 \\
 \quad | \\
 1 + 1 = 2 \\
 \quad \quad | \\
 2 + 1 = 3 \\
 \quad \quad \quad | \\
 3 + 1 = 4 \\
 \quad \quad \quad \quad | \\
 4 + 1 = 5 \text{ usw. (= natürliche Zahlenreihe).}
 \end{array}$$

Die dritte leitet sich aus der zweiten ab wie folgt:

$$\begin{array}{r}
 1 = 1 \\
 \quad | \\
 1 + 2 = 3 \\
 \quad \quad | \\
 3 + 3 = 6 \\
 \quad \quad \quad | \\
 6 + 4 = 10 \\
 \quad \quad \quad \quad | \\
 10 + 5 = 15 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad | \\
 15 + 6 = 21 \text{ usw.} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad (= \text{erste Summenreihe der natürlichen Zahlen}).
 \end{array}$$

Die vierte Schrägreihe ergibt sich als Summenreihe der dritten:

$$\begin{array}{r}
 1 = 1 \\
 \quad | \\
 1 + 3 = 4 \\
 \quad \quad | \\
 4 + 6 = 10 \\
 \quad \quad \quad | \\
 10 + 10 = 20 \\
 \quad \quad \quad \quad | \\
 20 + 15 = 35 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad | \\
 35 + 21 = 56 \text{ usw.} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad (= \text{zweite Summenreihe der natürlichen Zahlen}).
 \end{array}$$

Aufgabe des allgemeinen binomischen Lehrsatzes ist es, das Gesetz aufzufinden, nach dem auch für gebrochene und negative Exponenten die Binomialkoeffizienten errechnet werden können (s. S. 39).

7. Wurzeln. a) Unter der n . Wurzel aus a (geschrieben: $\sqrt[n]{a}$) versteht man jene Zahl b , deren n . Potenz den Wert a hat; es ist also

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ wenn } b^n = a \text{ ist.} \quad (28)$$

Die Zahl a , aus der die Wurzel gezogen werden soll, heißt Radikand; die Zahl n , mit der man den Wurzelwert b potenzieren muß, um den Radikanden zu erhalten, heißt Wurzelexponent.

Folgende Sätze sind zu merken:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}; \\ \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}} \end{array} \right\} (29) \quad \begin{array}{l} \text{d. h. jede Wurzel läßt sich als} \\ \text{Potenz mit gebrochenem Ex-} \\ \text{ponenten schreiben} \end{array} \quad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m; \quad (32)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad (30) \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}; \quad (33)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad (31) \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot x]{a^x} \quad (34)$$

Merke ferner: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}; \quad a^{-\frac{x}{y}} = \frac{1}{\sqrt[y]{a^x}}.$

Der Wurzelexponent 2 wird nicht mitgeschrieben; die zweite Wurzel heißt auch Quadratwurzel oder kurz Wurzel, die dritte Wurzel auch Kubikwurzel.

Es ist also $\sqrt[2]{25} = \sqrt{25} = 5$, denn $5^2 = 25$.

Beispiele:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a; \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a^2}} = \sqrt[6]{a^0} = \sqrt[6]{1} = 1; \quad a^{-0,333} = a^{0,333} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a},$$

b) Die Quadratwurzel aus gegebenen Zahlen kann nach bestimmten Regeln bis auf beliebig viele Stellen ausgezogen werden. Für viele Zwecke genügt jedoch die näherungsweise Berechnung auf Grund der Formel:

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a} \quad (\text{wenn } b \ll a). \quad (35)$$

Beispiele: 1. $\sqrt{65,6} = \sqrt{64 + 1,6} = \sqrt{8^2 + 1,6} = 8 + \frac{1,6}{16} = 8,10;$

2. $\sqrt{1,92} = \sqrt{1,96 - 0,04} = \sqrt{1,4^2 - 0,04} = 1,4 - \frac{0,04}{2,8} = 1,386.$

3. $\sqrt{54,75^2 + 2,10^2} = 54,75 + \frac{4,4}{109,5} = 54,79.$

c) Kubikwurzeln berechnet man am zweckmäßigsten mit Hilfe einer Tafel (siehe Abschn. 14) oder auf Grund einer Näherungsgleichung (vgl. Abschn. 22).

8. **Logarithmen.** a) **Begriffsbestimmung.** Alle Rechnungsarten lassen sich umkehren; so ist beispielsweise die Subtraktion die Umkehrung der Addition, die Division die Umkehrung der Multiplikation. Ebenso kann das Radizieren als eine Umkehrung des Potenzierens angesehen werden. Das Logarithmieren ist eine zweite Umkehrung des Potenzierens. Ist nämlich $b^n = a$,

so folgt zunächst $b = \sqrt[n]{a} \quad (1. \text{ Umkehrung});$
 ferner folgt noch $n = {}^{(b)}\log a \quad (2. \text{ Umkehrung})$

(lies: $n =$ Logarithmus a in bezug auf die Basis b). Die Zahl b heißt logarithmische Basis; die Zahl a heißt Logarithmand. Die beiden Gleichungen

$$n = {}^{(b)}\log a \quad \text{und} \quad b^n = a \quad (36)$$

gehören also zusammen; sie enthalten die Definition des Logarithmus:

Der Logarithmus einer Zahl ist derjenige Potenzexponent, mit dem man die logarithmische Basis potenzieren muß, um den Logarithmanden zu erhalten.

Die Berechnung der Logarithmen aus dem Logarithmanden und der logarithmischen Basis ist mit den uns bisher bekannten algebraischen Hilfsmitteln im allgemeinen sehr umständlich; die Logarithmen sind eben keine algebraischen, sondern, wie man sagt, transzendente Zahlen.

Ist der Logarithmand eine erkennbare Potenz der logarithmischen Basis, so kann der Logarithmus ohne eine eigentlich logarithmische Rechnung bestimmt werden. Es sei beispielsweise ${}^{(2)}\log 32 = x$ zu berechnen. Nach unserer Definition ist also derjenige Exponent (im Beispiel x) gesucht, mit dem die logarithmische Basis (im Beispiel 2) potenziert werden muß, um den Logarithmanden (im Beispiel 32) zu erhalten. Daher $2^x = 32$ und hieraus unmittelbar $x = 5$, denn $2^5 = 32$, d. h. ${}^{(2)}\log 32 = 5$.

Ähnlich findet man ${}^{(5)}\log 25 = 2$, denn $5^2 = 25$; ${}^{(10)}\log 1000 = 3$, denn $10^3 = 1000$.

d) Die Logarithmengesetze. Mit Hilfe der Potenzgesetze lassen sich die folgenden Sätze ableiten¹:

$$\log(ab) = \log a + \log b; \quad (37) \quad \log a^n = n \cdot \log a; \quad (39)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b; \quad (38) \quad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a. \quad (40)$$

¹ Die logarithmische Basis ist hier, gemäß den Vorschlägen des Normenausschusses, weggelassen worden, da ja die Logarithmengesetze für jede beliebige Basis gelten.

Anwendung finden die Logarithmengesetze zur genaueren Berechnung verwickelterer algebraischer Ausdrücke, besonders zur Berechnung höherer Potenzen und Wurzeln.

Nachstehend einige Beispiele, welche die Umformung eines Ausdrucks mit Hilfe der Logarithmengesetze, den sog. logarithmischen Ansatz, erläutern sollen:

$$\log \sqrt{\frac{a \cdot b^3}{c \cdot \sqrt{d}}} = \frac{1}{2} \log \frac{ab^3}{c \sqrt{d}} = \frac{1}{2} (\log a + 3 \log b - \log c - \frac{1}{2} \log d);$$

$$\log \frac{a^2 \sqrt{b}}{\pi} \sqrt{\frac{c}{\sqrt{d}}} = 2 \log a + \frac{1}{2} \log b - \log \pi + \frac{1}{2} (\log c - \frac{1}{2} \log d).$$

e) Die BRIGGSSchen Logarithmen. Die Gesamtheit aller auf die gleiche Basis bezogenen Logarithmen nennt man ein Logarithmensystem. Wenngleich jede beliebige Zahl als Basis eines Logarithmensystems gewählt werden kann, bietet doch gerade die Basis 10 mancherlei Vorteile, auf die weiter unten noch eingegangen werden wird. Es ist das Verdienst des englischen Mathematikers HENRY BRIGGS, die Zahl, 10 als gebräuchliche Basis der Logarithmen eingeführt zu haben, weswegen die auf 10 bezogenen Logarithmen auch BRIGGSSche Logarithmen genannt werden.

Im BRIGGSSchen Logarithmensystem¹ ist:

$$\begin{array}{ll} \lg 100 = 2, \text{ denn } 10^2 = 100; & \lg 0,1 = -1, \text{ denn } 10^{-1} = 0,1; \\ \lg 10 = 1, \text{ denn } 10^1 = 10; & \lg 0,01 = -2, \text{ denn } 10^{-2} = 0,01 \\ \lg 1 = 0, \text{ denn } 10^0 = 1; & \text{usw.} \end{array}$$

$\lg 2$ muß hiernach zwischen 1 und 0 liegen; aus einer Logarithmentafel (siehe S. 29) kann man entnehmen $\lg 2 = 0,3010$. Die spezielle Zahl, deren Logarithmus aufzusuchen ist, und die wir allgemein Logarithmand nennen, heißt auch Numerus.

Der Logarithmus selbst wird durch das Komma in zwei Teile zerlegt: die Zahl vor dem Komma heißt Kennziffer, die Zahl dahinter heißt Mantisse. Im allgemeinen können aus den Logarithmentafeln lediglich die Mantissen entnommen werden; die Kennziffern muß man jeweils aus dem Stellenwert des betreffenden Numerus ableiten.

$$\begin{array}{ll} \text{Beispiele:} & \lg 2 = 0,3010 & \lg 0,2 = 0,3010 - 1 \\ & \text{daher } \lg 20 = 1,3010 & \lg 0,02 = 0,3010 - 2 \\ & (\text{denn } \lg 20 = \lg 10 \cdot 2 = \lg 10 + \lg 2!) & \lg 0,002 = 0,3010 - 3 \\ & \lg 200 = 2,3010 & \text{usw.} \end{array}$$

Für die Größe der Kennziffer lassen sich somit folgende Regeln aufstellen:

1. Wenn der Numerus größer als 1, so ist die Kennziffer gleich der Anzahl der Ziffern vor dem Komma, vermindert um 1.

2. Bei Dezimalbrüchen, die kleiner als 1 sind, ist die Kennziffer negativ, und zwar gleich der Anzahl der vor der ersten Ziffer stehenden Nullen einschließlich der vor dem Komma.

3. Die Mantissen sind immer positiv, z. B. $\log 2 = 0,3010$; daher $\log 20000 = 4,3010$; $\log 0,0002 = 0,3010 - 4 = -3,6990$. Gleiche Ziffernfolgen haben also Logarithmen mit gleichen Mantissen — eine Eigentümlichkeit, die lediglich den BRIGGSSchen (dekadischen) Logarithmen zukommt, und die den Hauptgrund für ihre allgemeine Einführung bildet.

Je nach dem Grade der verlangten Genauigkeit rechnet man mit 4-, 5-, 6-, 7-, auch 10stelligen Logarithmen. Für rein technische Rechnungen genügen

¹ Die genormte Bezeichnung für den BRIGGSSchen Logarithmus ist „lg“ (statt log).

4stellige Tafeln im allgemeinen vollständig. Zwischenwerte sind nach später gegebenen Regeln (siehe S. 26f.) zu interpolieren.

4. Der Unterschied Δ der Mantissen zweier Zahlen a und b ($b = a + \Delta a$), die sich also um den (kleinen) Betrag Δa unterscheiden, berechnet sich (nach den Lehren der Differentialrechnung S. 47) zu

$$\Delta = \frac{0,4343 \cdot \Delta a}{a} \quad (41)$$

Hat man z. B.

$$\lg 2 = 0,30103,$$

so folgt damit für beispielsweise $\lg 2,002$ ($a = 2,00$; $\Delta a = 0,002$)

$$\lg 2,002 = 0,30103 + \frac{0,4343 \cdot 0,002}{2} = 0,30103 + 0,00043 = 0,30146;$$

ferner erhält man für $\lg 49,97$ aus $\lg 5 = 0,69897$

$$\begin{aligned} \lg 49,97 &= 1,69897 - \frac{0,434 \cdot 0,03}{50} = 1,69897 - 0,00026 \\ &= 1,69871. \end{aligned}$$

f) Natürliche Logarithmen. Die im vorstehenden behandelten, auf die Basis 10 bezogenen BRIGGSschen Logarithmen werden auch gemeine Logarithmen genannt im Gegensatz zu den NAPIERSchen oder natürlichen Logarithmen, welche die Zahl $e = 2,7182818284 \dots$ zur Basis haben, d. h. im natürlichen Logarithmensystem denkt man sich alle Zahlen umgerechnet als Potenzen der Basis e . (Näheres über e siehe S. 39.)

Aus $e^y = x$ folgt $(e)\log x = y$. Dafür schreibt man gewöhnlich $y = \ln x$ und liest das: „ y gleich Logarithmus naturalis x “; es ist also: $y = \ln x$, wenn $x = e^y$. (42) Für das Rechnen mit natürlichen Logarithmen gelten naturgemäß dieselben Gesetze wie für die gemeinen Logarithmen, doch ist das Rechnen weniger bequem, da die Kennziffer ja hier keinen direkten Anhalt für die Stellenzahl des Numerus bietet und umgekehrt. Natürliche Logarithmen können jedoch leicht in BRIGGSsche umgerechnet werden mit Hilfe der Formel $\lg x = M \ln x$ (43)

Umgekehrt ist: $\ln x = \frac{\lg x}{M}$, das bedeutet: Die gemeinen und die natürlichen Logarithmen derselben Zahlen unterscheiden sich lediglich um einen konstanten Faktor M , den sog. Modulus. Es ist der Modulus M des BRIGGSschen Logarithmensystems

$$M = 0,43429 \dots \quad (44)$$

Beispiel: $\ln 2 = \frac{\lg 2}{M} = \frac{0,301}{0,434} = 0,693.$

g) Aus $a^0 = 1$ folgt $(a)\log 1 = 0$; aus $a^1 = a$ folgt $(a)\log a = 1$, (45)

das heißt also, daß der Logarithmus von 1 in jedem Logarithmensystem gleich Null ist.

Wir sahen weiter, daß $\lg 0,1 = -1$, $\lg 0,01 = -2$, $\lg 0,001 = -3$ usw. Durch Weiterführung dieses Schemas läßt sich zeigen, daß schließlich

$$\lg 0 = -\infty. \quad (46)$$

werden muß. Der Logarithmus von 0 ist — übrigens auch wieder für jedes Logarithmensystem — minus unendlich. Für Zahlen, die kleiner als Null sind, d. h. für negative Numeri, lassen sich reelle Logarithmen nicht angeben; sie sind für negative Zahlen imaginär* bzw. komplex. Trotzdem lassen sich logarithmische

* „Imaginär“ nennt man z. B. Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, für die sich „reelle“ Werte nicht angeben lassen; „komplexe“ Zahlen entstehen durch Addition einer reellen und einer imaginären Zahl.

Rechnungen auch mit negativen Zahlen vornehmen, wenn man die Vorzeichen bei der logarithmischen Rechnung zunächst vernachlässigt, im Resultat indes wieder berücksichtigt.

h) Endlich mögen nochmals die genormten Bezeichnungen für die Logarithmen der verschiedenen Systeme zusammengestellt werden. Es bedeutet

- $\log x$ den Logarithmus von x in einem beliebigen System,
- ${}^{(b)}\log x$ den Logarithmus von x in bezug auf die Basis b ,
- $\lg x$ den BRIGGSSchen Logarithmus von x ,
- $\ln x$ den natürlichen Logarithmus von x .

9. Das Rechnen mit Winkeln. a) Für die Größe von Winkeln gibt es mehrere verschiedene Maße und Bestimmungsmöglichkeiten. Wir nennen:

1. das Gradmaß (alter und neuer Teilung),
2. das absolute oder Bogenmaß,
3. die Kreisteilung nach Teilstrichen,
4. die trigonometrische Bestimmung.

Im Gradmaß setzt man die Winkelsumme um einen Punkt gleich 360° oder vier rechten Winkeln ($= 4R$), so daß also auf einen rechten Winkel 90° kommen. Jeder Winkelgrad ($^\circ$) wird in 60 Minuten ($'$), jede Minute in 60 Sekunden ($''$) geteilt. Der größte Winkel, der als solcher zeichnerisch dargestellt werden kann, hält 360° ; größere Winkel müssen so gezeichnet werden wie die um 360° kleineren Winkel, d. h. ein Winkel von beispielsweise 400° wird so gezeichnet wie ein solcher von $400^\circ - 360^\circ = 40^\circ$.

Beispiele: $1^\circ 02' = 62'$; $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 0,0167^\circ$; $1'' = 0,0167' = 0,0002777^\circ$;

$$180^\circ - 17^\circ 45' 15'' = 179^\circ 59' 60'' - 17^\circ 45' 15'' = 162^\circ 14' 45'';$$

$$(2^\circ 50' 30'') \cdot 3 = 6^\circ 150' 90'' = 6^\circ 151' 30'' = 8^\circ 31' 30''.$$

b) Neben dieser „alten“ Winkelteilung besteht noch eine sog. „neue Teilung“, die sich, obwohl sie unserem dekadischen Zahlensystem angepaßt ist, dennoch bisher nicht allgemein hat durchsetzen können.

Bei der neuen Teilung ist der Kreis in 400 Zentigrade ($^\circ$) zu je 100 Zentiminuten (c) zu je 100 Zentisekunden (cc) geteilt, so daß beispielsweise $10^\circ 15^c 78^{cc} = 10,1578^\circ = 1015,78^c = 101578^{cc}$ ist. Die Umrechnung von Winkelangaben alter Teilung in solche neuer Teilung und umgekehrt geschieht auf Grund der Überlegung, daß $100^\circ = 90^\circ$, woraus unmittelbar folgt, daß $1^\circ = \left(\frac{90}{100}\right)^\circ = 0,9^\circ$ oder weiter $1^\circ = 1,111^\circ$. So ist z. B. $15^\circ 15' = 15,25^\circ = 16,94^\circ$; $3^\circ 08^c = 3,08^\circ = 2,772^\circ = 2^\circ 46,32' = 2^\circ 46' 19,2''$.

c) In einem Kreise mit dem Radius r (Abb. 1) entspricht

- dem Winkel α° die Bogenlänge b ,
- dem Winkel 360° die Bogenlänge $2r\pi$;

hieraus die Proportion (vgl. S. 33):

$$\frac{b}{2r\pi} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}, \text{ oder nach einiger Umformung } \frac{b}{r} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ};$$

setzt man nun $\frac{180^\circ}{\pi} = \rho^\circ$, so erhält man mit

$$\frac{b}{r} = \frac{\alpha}{\rho} \tag{47}$$

eine Formel, die für mancherlei Rechnungen vorteilhaft ist.

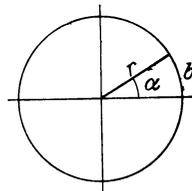


Abb. 1.

ϱ ist eine konstante Zahl, und zwar ist

$$\varrho^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57,3^0, \quad \text{wenn } \alpha \text{ in Graden,} \quad (48)$$

$$\varrho' = \frac{(180 \cdot 60)'}{\pi} = 3438' \approx 3440', \quad \text{wenn } \alpha \text{ in Minuten,} \quad (49)$$

$$\varrho'' = \frac{(180 \cdot 60 \cdot 60)''}{\pi} = 206265'' \approx 206000'', \quad \text{wenn } \alpha \text{ in Sekunden} \quad (50)$$

in die Rechnung eingeführt wird.

Für $r = 1$, den sog. „Einheitskreis“, geht Gl. (47) über in die einfachere $b_0 = \frac{\alpha}{\varrho}$; man nennt hier b_0 das Bogenmaß oder den Arkus (arc) des Winkels α und schreibt

$$b_0 = \widehat{\alpha} = \text{arc } \alpha = \frac{\alpha^0}{\varrho^0} = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''}. \quad (51)$$

Das Bogenmaß ist somit eine unbenannte Zahl (Verhältniszahl).

Die Länge des Bogens b im Kreise mit dem Radius r berechnet sich aus dem Bogenmaß zu

$$b = r \cdot b_0 = r \cdot \text{arc } \alpha.$$

Beispiele: 1.

$$\text{arc } 37^0 = \frac{37^0}{57,3^0} = 0,646.$$

2. Eine Riemenscheibe hat 1,5 m Durchmesser; der vom Riemen umspannte Bogen mißt 225^0 ; mit welcher Länge liegt der Riemen auf der Scheibe auf? Welchen Winkel würde der Riemen einschließen, wenn er 200 cm aufläge?

$$\text{Lösung: } b = \frac{r \alpha}{\varrho} = \frac{1,5 \cdot 225}{2 \cdot 57,3} = 2,95 \text{ m; } \alpha = \frac{b \varrho}{r} = \frac{200 \cdot 57,3}{150} = 153^0.$$

3. Zwei Stangen stehen senkrecht in 1 m Abstand; aus welcher Entfernung (rechtwinklig zur Verbindungslinie der Stangen) müßte man sie betrachten, um sie unter einem Winkel von $1^0 (1', 1'')$ zu sehen?

Lösung: 57,3 m bzw. 3440 m bzw. 206000 m.

d) Ganz entsprechende Überlegungen kann man für die Teilung nach Neugraden anstellen, und man erhält

$$\varrho^g = \frac{200^g}{\pi} = 63,662^g = 6366^c = 636620^{cc} \quad (52)$$

e) Bei der Teilung nach Teilstrichen ist der Kreisumfang in 6400 gleiche Teile geteilt. Infolgedessen berechnet sich das ϱ für die Teilstrichteilung zu

$$\varrho^t = \frac{\text{Halbkreis}}{\pi} = \frac{3200}{3,14} = 1018,6 \approx 1000,$$

d. h. ein Teilstrich entspricht rund einem Tausendstel der Entfernung, und die Gleichung

$$\frac{b}{r} = \frac{\alpha}{\varrho}$$

geht mit Bezug auf die Abb. 2 über in

$$\frac{B}{E} = \frac{t}{1000}. \quad (53)$$

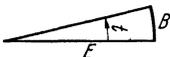


Abb. 2.

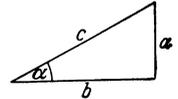
Die Teilung nach Teilstrichen ist die für militärische Zwecke bevorzugte Winkelteilung, man findet sie in Form von Strichplatten vielfach in Ferngläsern, die Meßzwecken dienen.

Beispiel: Ein Flugzeug mit der bekannten Tragflügelspannweite $B = 16,5$ m fliege auf den Beobachter zu; es erscheint diesem unter einem Winkel von $t = 3,3$ Teilstrichen. Wie weit ist es von dem Beobachter entfernt?

$$E = \frac{1000 \cdot B}{t} = \frac{1000 \cdot 16,5}{3,3} = \frac{10000 \cdot 1,65}{3,3} = \frac{10000}{2} = 5000 \text{ (Meter!)}$$

f) Bei der trigonometrischen Ermittlung eines Winkels drückt man dessen Größe durch das Verhältnis zweier Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aus, in welchem der Winkel ein Basiswinkel ist. Es gibt hier eine ganze Reihe von Möglichkeiten.

Man nennt mit Bezug auf Abb. 3 das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse den Sinus:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad (54)$$

Abb. 3.

das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse den Kosinus:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}; \quad (55)$$

das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden den Tangens:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad (56)$$

das Verhältnis der anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden den Kotangens:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}. \quad (57)$$

Durch den Vergleich dieser sog. trigonometrischen Funktionen findet man noch eine Reihe sehr interessanter Beziehungen, z. B.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad (58) \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (59)$$

Sie zu finden und zu beweisen ist Aufgabe der Goniometrie.

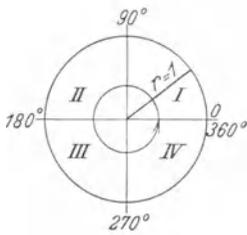


Abb. 4.

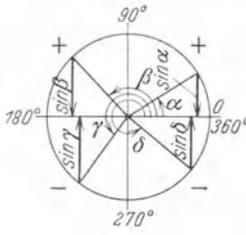


Abb. 5.

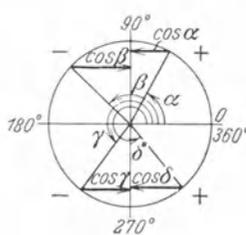


Abb. 6.

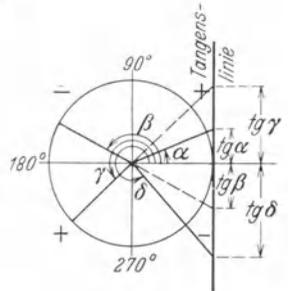


Abb. 7.

Über die Größen der trigonometrischen Funktionen geben Tabellen Auskunft, sofern es sich um Winkel handelt, die kleiner als 90° sind. Größere Winkel als diese müssen auf kleinere zurückgeführt werden, und zwar geschieht das mit Hilfe von Betrachtungen, die man an einem Hilfskreis mit dem Radius $r=1$ (dem Einheitskreis) anstellt.

Abb. 4 zeigt einen Kreis, der durch ein Achsenkreuz in 4 Quadranten (I, II, III und IV) zerlegt ist.

In Abb. 5 sind einige Winkel und ihre sin-Werte

„	„	6	„	„	„	„	„	cos-	„
„	„	7	„	„	„	„	„	tg-	„
„	„	8	„	„	„	„	„	ctg-	„

eingetragen, und man erkennt, daß die Werte

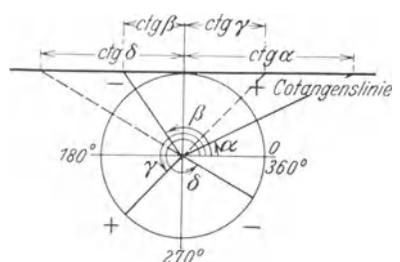


Abb. 8.

für $\sin \alpha$ zwischen $+1$ und -1
 für $\cos \alpha$ zwischen $+1$ und -1
 für $\operatorname{tg} \alpha$ zwischen $+\infty$ und $-\infty$
 für $\operatorname{ctg} \alpha$ zwischen $+\infty$ und $-\infty$

liegen.

Zu jedem gegebenen Winkel, der größer als 90° ist, läßt sich ein anderer bestimmen, der, im ersten Quadranten liegend, denselben trigonometrischen Funktionswert hat wie der gegebene, abgesehen vom Vorzeichen. Diese Tatsache ermöglicht die Bestimmung der Funktionswerte auch für den Fall, daß der gegebene Winkel größer als 90° ist.

Die Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen ergeben sich aus dem Einheitskreise für die einzelnen Quadranten wie folgt:

Quadrant	I	II	III	IV	Quadrant	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-	tg	+	-	+	-
cos	+	-	-	+	ctg	+	-	+	-
Beispiele:	sin $215^\circ = -\sin 35^\circ$; cos $215^\circ = -\cos 35^\circ$;				tg $215^\circ = + \operatorname{tg} 35^\circ$; ctg $215^\circ = + \operatorname{ctg} 35^\circ$.				

Wichtig sind noch folgende leicht abzuleitende Formeln:

$$\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos \alpha \quad (61) \qquad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (63)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (62) \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (64)$$

Beispiele: $\sin 127^\circ = \sin 53^\circ = \cos 37^\circ$, $\cos 127^\circ = -\cos 53^\circ = -\sin 37^\circ$,
 $\cos 80^\circ = \sin 10^\circ$.

Über die numerische Bestimmung der Funktionswerte s. S. 30.

B. Regeln für das Rechnen mit dem Rechenschieber.

10. Einrichtung des logarithmischen Rechenschiebers. a) Jeder Rechenschieber, oder besser gesagt Rechenstab, besteht aus Stab, Zunge und Läufer (vgl. Abb. 9).

Gewöhnlich besitzt der Stab zwei verschiedene logarithmische Teilungen: eine obere, die sich wiederholt, und eine untere, einfache, die demgemäß doppelt so lang ist wie jede der beiden oberen. Die Teilungen der Zunge sind genau die gleichen wie die entsprechenden des Stabes; sie beginnen sämtlich mit 1; naturgemäß kann man jedoch dem Anfangsstrich den Wert einer beliebigen ganzen Zehnerpotenz beilegen.

Der Läufer besteht im wesentlichen aus einer Glasscheibe, die in der Mitte einen senkrechten Strich eingeztägt trägt; gelegentlich hat er auch drei Striche. (Über die Bedeutung der beiden besonderen Striche wird weiter unten die Rede sein.)

b) Auch andere Anordnungen der Skalen sind für Sonderfälle nicht selten. Doch kann an dieser Stelle darauf nicht näher eingegangen werden.

Die für technische Zwecke übliche Teilungslänge des Rechenschiebers beträgt etwa 25 cm; kürzere Längen sind nicht zu empfehlen.

11. Gebrauch des Rechenschiebers. a) Die einzelnen mit dem Rechenschieber auszuführenden Operationen sind an sich sehr einfach und werden daher im allgemeinen bald beherrscht; gewisse Schwierigkeiten macht lediglich das Einstellen und das Ablesen der Zahlen wegen der an den einzelnen Stellen verschieden weit getriebenen Unterteilung.

Bevor mit dem eigentlichen Rechnen begonnen werden kann, muß eine gewisse Sicherheit im Einstellen bzw. Ablesen erreicht sein.

Man beginne daher seine Übungen mit dem Rechenschieber damit, daß man den (mittleren) Läuferstrich etwa auf folgende Zahlen zunächst auf der oberen,

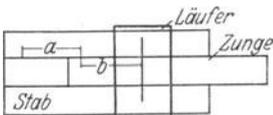


Abb. 9.

dann auf der unteren Stabteilung einstellt: 2 3 3,5 4,2 4,55 56,7 4300 4,785 38,7; 55 505 5005 5055 180 190 185 183 183,5; 11,4 11,04 11,05 11,55 1,5 1,05 1,005 1,08 0,1405.

b) Einfache Multiplikation und Division. Die Eigenart der logarithmischen Teilung führt die Multiplikation auf eine Addition und die Division auf eine Subtraktion zurück. Man benutze für den Anfang die oberen Teilungen des Stabes und der Zunge.

Multiplikation: Das Schema einer Multiplikation $a \cdot b = c$ mit Hilfe des Rechenstabes zeigt Abb. 9. Die der Reihe nach auszuführenden Operationen sind:

1. Faktor a mit dem Anfangsstrich der Zunge auf der (oberen) Stabteilung einstellen.

2. Läuferstrich auf Faktor b auf der (oberen) Teilung der Zunge einstellen.

3. Produkt $a \cdot b$ unter dem Läuferstrich auf der (oberen) Stabteilung ablesen.

4. Aufschreiben des Ergebnisses und Bestimmen der Kommastellung durch eine Überschlagsrechnung.

Beispiele: $2 \cdot 3 = 6$; $2,3 \cdot 3 = 6,9$; $3,8 \cdot 4,5 = 17,1$; $2,45 \cdot 3,76 = 9,22$; $4,25 \cdot 1,95 = 8,28$; $9,2 \cdot 0,55 = 5,06$; $0,672 \cdot 1,593 = 1,072$.

Bei der Division hat man wie folgt zu verfahren: $\frac{c}{b} = a$.

1. Läuferstrich auf den Dividenten c auf der rechten Hälfte der oberen Stabteilung einstellen.

2. Zunge verschieben, so daß der Divisor b auf der Zungenteilung unter dem Läuferstrich steht.

3. Quotienten $\frac{c}{b}$ auf der (oberen) Stabteilung über dem Anfangs- oder Endstrich der entsprechenden Zungenteilung ablesen.

4. Bestimmung des Kommas durch eine Überschlagsrechnung.

Beispiele: $\frac{6}{3} = 2$; $\frac{6,2}{2,5} = 2,48$; $\frac{73,5}{17,2} = 4,04$; $\frac{1,64}{0,953} = 1,72$; $\frac{0,1353}{0,01235} = 10,95$.

c) Verbundene Multiplikation und Division. Besteht sowohl der Zähler wie auch der Nenner eines Bruches aus mehreren Faktoren, so läßt sich gleichwohl das Ergebnis in einem Gange ermitteln, wenn man nach folgendem Rechenschema verfährt:

$$\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g \cdot h} = a : e \cdot b : f \cdot c : g \cdot d : h^*.$$

Beispiel: $\frac{27,3 \cdot 15,4}{28,9 \cdot 7,36} = 27,3 : 28,9 \cdot 15,4 : 7,36 = 1,976$.

Die Zwischenergebnisse, z. B. 27,3 : 28,9 usw. brauchen naturgemäß nicht abgelesen zu werden.

Bei derartigen Aufgaben kommt es lediglich darauf an, abwechselnd zu multiplizieren und zu dividieren.

d) Quadrieren. Wenn die untere Teilung genau doppelt so lang ist wie die obere, so müssen wegen $\lg a^2 = 2 \log a$ die genau übereinander stehenden Zahlenwerte dieser beiden Teilungen sich in jedem Falle wie

$$\frac{\text{Quadratzahl}}{\text{Grundzahl}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\text{Grundzahl}}{\text{Quadratwurzel}} \quad \text{verhalten}$$

Es kann entweder mit Hilfe des mittleren Läuferstriches oder des Anfangsstriches der Zungenteilung eingestellt werden.

Beispiele: $4^2 = 16$; $3,76^2 = 14,2$; $4,55^2 = 20,8$ $9,07^2 = 82,8$; $10,3^2 = 106$.

* Diese Schreibweise ist nicht mathematisch einwandfrei und dient lediglich zur Erläuterung! Richtiger hätte man zu schreiben $\left(\left(\left(\left(a : e\right) \cdot b\right) : f\right) \cdot c\right) : g\right) \cdot d : h$.

e) **Quadratwurzelziehen.** Beim Ziehen der Quadratwurzel ist der Radikand zunächst in der bekannten Weise in Gruppen von je 2 Ziffern — vom Komma ausgehend — einzuteilen. Befindet sich in der ersten Gruppe nur eine Ziffer, so ist der betreffende Radikand auf der ersten Teilung des oberen Stabes einzustellen; befinden sich hingegen in der oberen Gruppe zwei Ziffern, so kommt für die Einstellung des Radikanden die zweite Hälfte der oberen Stabteilung in Frage.

Beispiele: $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{360} = 18,97$; $\sqrt{4,75} = 2,18$; $\sqrt{1,08} = 1,04$; $\sqrt{4750} = 68,9$; $\sqrt{0,00121} = 0,03475$.

f) **Kreisinhalte.** Auf der unteren Teilung der Zunge befinden sich bei vielen Rechenschiebern zwei mit c bezeichnete Strichmarken, die um $\sqrt{\frac{1}{\pi/4}}$ von dem Anfangs- bzw. Mittelstrich der oberen Teilung entfernt sind, und die daher bei Kreisinhalts- und Durchmesserberechnungen gute Dienste leisten. Statt der Strichmarken in der Teilung sind auch gelegentlich zwei besondere Läuferstriche vorhanden.

Sucht man beispielsweise den Flächeninhalt eines Kreises vom Durchmesser $d = 3$, so stellt man den c -Strich über die 3 der unteren Stabteilung und liest über dem Anfangsstrich der oberen Zungenteilung den gesuchten Wert $d^2 \pi/4 = 7,07$ ab; die Stellung des Kommas bestimmt man am besten durch eine Überschlagsrechnung.

Sucht man den Durchmesser eines durch einen Flächeninhalt gegebenen Kreises, so geht man in umgekehrter Reihenfolge vor. Da die Bestimmung des Durchmessers aus der Fläche auf das Ziehen der Quadratwurzel hinausläuft, sind die für diese angegebenen Einteilungsregeln zu beachten.

g) **Trigonometrische Funktionen und Logarithmen.** Die Skalen für $\sin \alpha$ und $\text{tg } \alpha$ befinden sich zumeist auf der Rückseite der Zunge. Die Einstell- bzw. Ablesemarken sind dann an besonderen Ausschnitten auf der Rückseite des Stabes angeordnet. Die zugehörigen Funktionswerte werden auf der Vorderseite des Stabes abgelesen. Da im übrigen die Anordnung verschieden ist, unterrichtet man sich zweckmäßig durch Berechnen eines bekannten Funktionswertes — z. B. $\sin 30^\circ = 0,5$ od. dgl. — über die jeweils einander zugeordneten Teilungen. Bei Winkeln, die kleiner als 6° sind, beachte man, daß hier hinreichend genau (Abb. 10) ist

$$\sin \alpha = \text{arc } \alpha = \text{tg } \alpha. \tag{64}$$

Von Vorteil ist es ferner, zu beachten, daß

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha); \quad \text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg}(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\text{ctg } \alpha}.$$

Beispiele: $\sin 33^\circ = 0,544$; $\sin 3^\circ 15' = 0,0567$;
 $\cos 37^\circ = \sin 53^\circ = 0,798$; $\cos 148^\circ = -\sin 58^\circ = -0,848$;
 $\text{ctg } 273^\circ 05' = -\text{tg } 3^\circ 05' = -0,0538$.

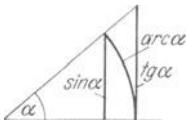


Abb. 10.

h) **Die Genauigkeit,** mit der der Rechenschieber eine Rechnung auszuführen gestattet, liegt bei 0,2 bis 0,3%. Doch auch bei genaueren Rechnungen ist er zu gebrauchen, wenn man anfangs direkt rechnet, und nur die letzten drei Stellen mit dem Rechenschieber bestimmt.

Beispiele:

$34,458 \cdot 5,294$	$58,395 : 14,482 = 4,0322$
$\underline{17229}$ (= direkt aus $34458 \cdot 5$)	$\underline{57928}$
$\underline{1013}$ (= 34458×294 ; Rechenschieberresultat!)	$467 : 1448$ (Rechenschieberresultat: 322).
$\underline{182,42}$	

C. Regeln für das Rechnen mit Tabellenwerten.

12. Der Funktionsbegriff. a) Zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene algebraische Ausdrücke bilden eine Gleichung.

Die Gleichung $y = x^2$ sagt aus, daß die Größe y genau so groß sei wie das Quadrat von x . Um die vorgelegte Beziehung $y = x^2$ näher zu untersuchen, kann man für den allgemeinen Wert x der Reihe nach mehrere bequeme Zahlen einführen und die zugehörigen y -Werte berechnen; es ergeben sich alsdann für $y = x^2$ folgende Wertpaare:

x (angenommen)	0	1	2	3	4	5	...
y (berechnet)	0	1	4	9	16	25	...

Größen, die beliebige Werte annehmen können, heißen Veränderliche oder Variable; und zwar nennt man mit Bezug auf unser Beispiel x die unabhängig Veränderliche oder auch das Argument, im Gegensatz zu der abhängig Veränderlichen oder dem Funktionswert y .

b) Die mathematische Abhängigkeit der beiden Variablen voneinander kann ganz verschieden geartet sein, z. B.

$$y = x^2; \quad y = x^1, \quad y = \sqrt{x}; \quad y = \frac{1}{x}; \quad y = x^2 \frac{\pi}{4}; \quad y = x \cdot \pi; \quad y = \sin x;$$

$$y = \lg x; \quad y = \ln x; \quad \text{usw.}$$

Allgemein schreibt man solche Abhängigkeiten in der Form

$$y = f(x) \tag{65}$$

und sagt, y sei eine Funktion von x . Die Schreibweise $y = f(x)$ deutet also lediglich an, daß die Größe y von der Größe des Arguments in irgendeiner Weise abhängig ist; welcher Art diese Abhängigkeit ist, geht aus der allgemeinen Schreibweise nicht hervor und muß im Sonderfalle noch besonders angegeben oder angenommen werden.

Man kann die Funktionen einteilen in:

einfache und zusammengesetzte (z. B. $y = x^3$ bzw. $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 5$),

ganze und gebrochene (z. B. $y = \frac{3}{5}x^2$ bzw. $y = \frac{x-5}{x-4}$);

algebraische und transzendente (z. B. $y = \sqrt{x}$ bzw. $y = \sin x$).

c) Graphische Darstellungen der Funktionen. Die einzelnen Funktionswerte y lassen sich graphisch darstellen, z. B. in einem System sich rechtwinkelig schneidender Linien, einem sog. Koordinatensystem, das nach CARTESIUS (DESCARTES), der es in die Wissenschaft einführte, auch cartesisches Koordinatensystem heißt. Die wie oben berechneten Wertpaare sind die Koordinaten von Punkten, deren fortlaufende Verbindung ein Bild der betreffenden Funktion gibt. Abb. 11 stellt einen Teil der oben tabellarisch berechneten Funktion $y = x^2$ dar.

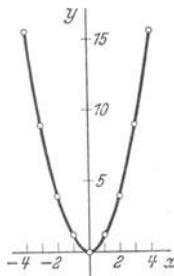


Abb. 11.

Die graphische Darstellung hat gegenüber der Zahlentabelle mancherlei Vorzüge, so z. B. den der größeren Anschaulichkeit, ferner gestattet sie das unmittelbare Ablesen von Zwischenwerten, die bei der tabellarischen Darstellung erst durch eine besondere Rechnung — die sog. Interpolation — gefunden werden müssen.

Diesen Vorteilen stehen allerdings auch Nachteile gegenüber: so beansprucht die Zeichnung im allgemeinen mehr Platz als eine Tabelle von gleicher Genauigkeit. Außerdem setzt die graphische Darstellung in der überwiegenden Mehrzahl der

Fälle eine Zahlentafel voraus. Und die Aufstellung dieser Zahlentafel ist nicht immer ganz einfach.

13. Lineare Interpolation. a) Eine Funktion, bei der innerhalb eines bestimmten Bereichs die aufgezeichneten Punkte ununterbrochen aufeinander folgen, heißt stetig innerhalb dieses Bereichs. So verläuft beispielsweise die Funktion $y = \operatorname{tg} x$ stetig für den Bereich $x]_0^{\pi/2}$ und weiter für den Bereich $x]_{\pi/2}^{\pi}$, da in diesen Bereichen y ohne Unterbrechung sich von 0 bis ∞ ändert bzw. von $-\infty$ bis 0. Bei $x = \pi/2$ selbst ist jedoch der Verlauf unstetig, da hier die Funktionswerte innerhalb der unendlich kleinen Änderungen des Arguments $\pi/2 - \Delta x$ und $\pi/2 + \Delta x$ von $+\infty$ auf $-\infty$ überspringen.

Man überzeuge sich hiervon an Hand einer Zeichnung. (Vgl. auch Abb. 32.)

b) Kennt man nun von einer Funktion $y = f(x)$ die Wertpaare x_1 und y_1 bzw. x_2 und y_2 , so lassen sich, sofern der Bereich $x_2 - x_1$ nicht zu groß ist und die Funktion innerhalb desselben stetig verläuft, die zwischen y_1 und y_2 liegenden Funktionswerte y , die zu beliebig angenommenen x zwischen x_1 und x_2 gehören, durch eine sog. Proportionalrechnung finden. Aus den zusammengehörigen Wertpaaren

x_1	y_1	(1. gegebenes Wertpaar)
x_2	y_2	(2. gegebenes Wertpaar)
a	y	(gesuchtes Wertpaar; eine der beiden Größen muß gegeben sein)

folgt $x_2 - x_1 \mid y_2 - y_1$ oder, gekürzt geschrieben, $\Delta x \mid \Delta y$.
 $x - x_1 \mid y - y_1$ „ „ „ „ „ „ $\delta x \mid \delta y$.

Durch Division erhält man die Gleichung:

$$\frac{\delta x}{\Delta x} = \frac{\delta y}{\Delta y}. \text{ Hieraus entweder}$$

$$\delta x = \delta y \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \text{oder} \quad \delta y = \delta x \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{66}$$

d. h. ändert sich das Argument x um den bekannten Betrag δx , so ändert sich der Funktionswert um den Betrag δy ; ändert man den Funktionswert um δy , so ändert sich die Abszisse um den Betrag δx . Der gesuchte Funktionswert y bzw. das gesuchte Argument x berechnet sich schließlich zu

$$y = y_1 + \delta y \quad \text{bzw.} \quad x = x_1 + \delta x. \tag{67}$$

c) Die Anwendung dieser Interpolationsformeln ist nur so lange zulässig, als die Änderungen des Arguments mit ausreichender Annäherung proportionale Änderungen der Funktionswerte zur Folge haben. Nun mögen einige Beispiele den Gebrauch der Formeln zeigen.

1. Beispiel: Gegeben sei

x	y
610	7853
611	7860

Welcher Wert gehört zu $x = 610,7$?

Es ist $\Delta x = 1$; $\Delta y = 7$; $\delta x = 0,7$; daher $\delta y = 0,7 \cdot \frac{7}{1} = 4,9$.

Daraus $y = 7853 + 4,9 \approx 7858$.

2. Beispiel:

x	y
610	7853
611	7860

Welcher Wert x gehört zu $y = 7858$?

Es ist wieder $\Delta x = 1$; $\Delta y = 7$; $\delta y = 5$;

daher $\delta x = 5 \cdot \frac{1}{7} = 0,7$ und schließlich $x = 610 + 0,7 = 610,7$.

Da es im übrigen beliebig ist, welches von den Wertpaaren man mit dem Index 1 bezeichnet, kann man die Rechnung auch in der Weise durchführen, daß man, anstatt die erste Zahl um die errechnete Korrektur δx bzw. δy zu vergrößern, die zweite Zahl um die entsprechende Korrektur vermindert.

3. Beispiel:

x	y	
4,45	+1,2	Welcher Wert x gehört zu $y = 0,0$?
4,46	-3,3	
?	0,0	

Es ist:

$$\Delta x = 0,01; \Delta y = -4,5; \delta y = -1,2; \delta x = -1,2 \frac{-4,5}{0,01} = \frac{0,012}{4,5} = 0,0027; x = 4,4527;$$

$$\text{mit } \delta y = +3,3 \text{ erhält man } \delta x = \frac{3,3 \cdot 0,01}{-4,5} = -0,0073; x = 4,46 - 0,0073 = 4,4527.$$

14. Einrichtung und Gebrauch einiger Tafeln. a) In vielen technischen Kalendern sind Zahlentafeln enthalten, aus denen die Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln, die Reziproken, Logarithmen, Kreisumfänge und -inhalte sowie gelegentlich auch noch andere Funktionswerte für die ganzen Zahlen von 1 bis 999 entnommen werden können. Die Benutzung dieser Tafeln bei technischen Rechnungen bedeutet oft eine nicht unwesentliche Zeitersparnis.

Im allgemeinen befinden sich in der äußersten Spalte links (manchmal auch noch in der äußersten rechts) die Argumente, gewöhnlich mit n bezeichnet, rechts davon die zugehörigen Funktionswerte, z. B.

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,65321	2,2222	1413,7	159043	450
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	2,65418	2,2173	1416,9	159751	451

b) Bei ausführlicheren Rechentafeln, z. B. größeren Logarithmentafeln, Tafeln der trigonometrischen Werte usw. enthalten die einzelnen senkrechten Reihen noch Zwischenwerte, geordnet nach Zehnteln der Einheit des Arguments, oder bei Winkeln, etwa fortlaufend von 10 zu 10 Minuten usw. Da hier sich die Funktionswerte nur langsam ändern, werden die vordersten, sich gleichbleibenden Ziffern oft nur einmal angegeben; sie dürfen natürlich nicht vergessen werden. Näheres hierüber im Abschn. 15.

Die Benutzung der Tafeln ist so lange einfach, als die betreffenden Argumente, deren Funktionswerte bestimmt werden sollen, darin unmittelbar enthalten sind. Oft sind jedoch Umstellungen des Kommas notwendig, gelegentlich auch Interpolationen.

c) Die Tafel für n^2 . Das Komma muß in der Quadratzahl um 2 Stellen verschoben werden, wenn es in der Basis um eine Stelle geändert wird.

Beispiel: $481^2 = 231361$, daher $48,1^2 = 2313,61$; $4,81^2 = 23,1361$ usw.

Gelegentlich sind Interpolationen notwendig, z. B.: $43,47^2$ soll auf 4 Stellen genau berechnet werden. Die Rechnung, die an Hand der Tabelle im Kopf ausgeführt werden kann, möge hier schriftlich ausgeführt werden. Man beachte, daß für die 4stellige Rechnung nicht alle in der Tabelle gegebenen Ziffern verwendet zu werden brauchen.

$$\begin{array}{r} 43,4^2 = 1883,6 \\ 43,5^2 = 1892,2 \\ \hline 0,1 \dots 8,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,07 \frac{8,6}{0,1} = 6,0 \\ 43,47^2 = 1889,6 \end{array}$$

Rechnet man abgekürzt, was ja in den allermeisten Fällen zulässig ist, so vereinfacht sich die Rechnung ganz wesentlich, so daß sie bequem im Kopf ausgeführt werden kann, z. B.

$$\begin{array}{r}
 3,783^2 = ? \quad (\text{mit Berücksichtigung des Kommas und unter Vernachlässigung der überflüssigen Stellen aus der Tabelle entnommen}) \\
 3,78^2 = 14,29 \\
 3,79^2 = 14,36 \\
 \hline
 0,01 \quad \dots \quad 0,07 \\
 0,003 \quad \dots \quad 0,021
 \end{array}$$

daher $3,783^2 = 14,29 + 0,02 = 14,31$.

Man könnte auch in Erinnerung früher gegebener Regeln [Formel (8)] folgendermaßen rechnen:

$$3,783^2 = (3,78 + 0,003)^2 \approx 3,78^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0,003 = 14,29 + 0,02_4 = 14,31.$$

d) Berechnung von $\sqrt[n]{n}$ mit Hilfe der Quadrattafel. Da $n = \sqrt[n]{n^2}$ ist, können die Tafelwerte n als Quadratwurzeln der unter n^2 befindlichen Zahlen angesehen werden. Will man also aus einer vorgelegten Zahl die Quadratwurzel mit Hilfe der Tabelle für n^2 ziehen, so teile man zunächst den Radikanden, vom Komma ausgehend, in Gruppen zu zwei Ziffern ein. Aus der ersten Gruppe ziehe man die Wurzel im Kopfe überschläglich; erhält man als Ergebnis beispielsweise 4, so suche man in der Gegend von $n = 400$ diejenige Zahl n^2 , die gleich dem gegebenen Radikanden ist. Gegebenenfalls interpoliere man.

Beispiele:

1. $\sqrt[4]{47,06} = 6,860$ (unmittelbar zu entnehmen);
2. $\sqrt[2]{202,4} = 14,23$ (die letzte 3 ist durch Interpolation gefunden);
 $\begin{array}{r} 201,6 \\ \hline 08 : 28; \end{array}$
3. $\sqrt[3]{0,7985} = 0,936$
 $\begin{array}{r} 74 \\ \hline 11 : 18. \end{array}$

Man beachte, daß die lineare Interpolation im vorliegenden Falle auf das gleiche hinauskommt, wie die Anwendung der Gleichung (35).

e) Tafel für n^3 . Beim Aufsuchen der Kuben beachte man, daß eine Verschiebung des Kommas in der Basis um eine Stelle beim Kubus eine solche von drei Stellen erforderlich macht. Beim Ziehen der dritten Wurzel hat man daher den vorgelegten Radikanden — ausgehend vom Komma — in Gruppen von je drei Ziffern einzuteilen und im übrigen analog der unter c gegebenen Vorschrift zu verfahren.

Beispiele: 1. $4,50^3 = 91,12$; 2. $45,06^3 = 91\,125$ 3. $\sqrt[3]{48700} = 36,52$.

$$\begin{array}{r}
 365 \\
 \hline
 91490;
 \end{array}$$

f) Die Reziprokentafel. Diese Tafel dient dazu, eine Division in eine Multiplikation zu verwandeln. Verschiebt man bei n das Komma um eine Stelle nach links, so ist es bei $\frac{1000}{n}$ um eine Stelle nach rechts zu verschieben und umgekehrt. Am ehesten sichert auch hier eine Überschlagsrechnung vor Fehlern.

Beispiele: $\frac{1}{4,51} = 0,2217$; $\frac{1,5}{0,276} = 1,5 \cdot 3,66 = 3,66 + 1,83 = 5,49$.

g) Die Tafeln der Kreisumfänge und -inhalte. Für den Kreisumfang eines Kreises vom Durchmesser n gilt:

$$U = n\pi, \quad (68)$$

daher die Kommaregel: Eine Verschiebung des Kommas in n hat genau die gleiche Verschiebung des Kommas in U zur Folge.

Beispiel: $n = 476 \quad U = 1495$; $n = 4,76 \quad U = 14,95$.

Für den Kreisinhalt eines Kreises vom Durchmesser n gilt:

$$F = \frac{n^2 \pi}{4}. \quad (69)$$

Für die Stellung des Kommas gelten daher dieselben Regeln wie für die Quadratzahlen.

Beispiele: $n = 4,5$ $F = 12,55$; $n = 0,045$ $F = 0,001255$; $F = 7$ $n = 2,985$;
 $F = 70$ $n = 9,44$; $F = 700$ $n = 29,85$.

h) Es gibt auch noch besondere Tafeln für $\sqrt[n]{\quad}$ und $\sqrt[3]{\quad}$. Nach dem in diesem Kapitel unter d und e Gesagten erübrigen sie sich, da das dort gegebene Verfahren bequemer ist und zudem genauere Ergebnisse liefert. Im übrigen bietet der Gebrauch der Tafeln für $\sqrt[n]{\quad}$ und $\sqrt[3]{\quad}$, wenn man glaubt, ihrer nicht entraten zu können, nichts Neues.

15. **Tafeln für Logarithmen und Kreisfunktionen.** a) Größere Logarithmentafeln sind derart eingerichtet, daß links das Argument (= der Numerus) steht und rechts davon die Mantissen für diesen Numerus sowie die für jeweils um ein Zehntel der Numeruseinheit zunehmenden Argumente.

Beispiel (Auszug aus einer 4stelligen Logarithmentafel):

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
287	45	79	80	82	83	85	86	88	89	91	92
288		94	95	97	98	*00	*01	*03	*04	*06	*07
289	46	09	10	12	13	15	16	18	19	21	22

Die beiden ersten Ziffern der Mantissen, die sich für eine große Zahl aufeinanderfolgender Numeri immer wiederholen, werden nur einmal abgedruckt. Der Übergang zur nächsthöheren Ziffer wird innerhalb der Tabelle durch einen Stern kenntlich gemacht. Über die Bestimmung der Kennziffer und über alle anderen für das Rechnen mit Logarithmen gültigen Regeln vgl. Abschn. 8.

Aus der oben abgedruckten Tabelle ist zu entnehmen:

$$\begin{aligned} \lg 287,4 &= 2,4585 & \lg x &= 4,4617; & x &= 28955 \\ \lg 28,86 &= 1,4603 & \lg x &= 0,4599; & x &= 2,8835 \\ \lg 2,8736 &= 0,4584_2 & & & & \text{(Interpolieren!)} \end{aligned}$$

Bei 5- und mehrstelligen Logarithmentafeln erleichtern die beigedruckten Proportionaltafeln („P. P.“ = partes proportionales) die Interpolation.

b) Beispiel für eine größere logarithmische Rechnung:

$$x = \frac{4,475 \cdot \sqrt[4]{56,89}}{0,8976^5} = ?; \quad \lg x = \lg 4,475 + \frac{1}{4} \lg 56,89 - 5 \lg 0,976.$$

4,475	0,6508	1	0,6508
56,89	1,7550	$\frac{1}{4}$	0,43875
0,8976	0,9531 — 1	—5	—4,7655 + 5
21,085			—3,6760 + 5 = 1,3240

$x = 21,085.$

c) Das Rechnen mit Logarithmen läßt sich nicht umgehen, wenn die zu berechnende Größe ein Potenzexponent ist.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1. \quad 10000 &= 6500 \cdot 1,08^n; & n &= ? & \left| \begin{array}{l} \text{hieraus: } 4 - 3,8129 = 0,1871 = n \cdot 0,0334; \\ n = \frac{0,1871}{0,0334} = 5,602 \text{ (Rechenschieberresultat);} \end{array} \right. \\ \lg 10000 &= \lg 6500 + n \cdot \lg 1,08; \\ & 4 = 3,8129 + n \cdot 0,0334; \\ 2. \quad x &= 10^{1,6}; & \lg x &= 1,6 \lg 10 = 1,6; & x &= 39,8. \end{aligned}$$

d) Die Einrichtung der Tafeln für die Kreisfunktionen ist verschieden und im wesentlichen abhängig von dem Grade der Unterteilung. Nachstehend bringen wir einen Auszug einer Tafel für $\sin \alpha$, bei der die Argumente links fortschreiten von Grad zu Grad. Die Unterteilung der Grade erfolgt in den waagerechten Reihen von 10 zu 10 Minuten:

α°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'
50	0,7660	7679	7698	7716	7735	7753	7771
51	0,7771	7790	7808	7826	7844	7862	7880

e) Der Tatsache entsprechend, daß $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$, werden die Tafeln gleichzeitig für $\cos \alpha$ eingerichtet. So entnimmt man beispielsweise gleichzeitig

$$\sin 37^\circ 10' = \cos 52^\circ 50' = 0,6041; \quad \sin 66^\circ 10' = \cos 23^\circ 50' = 0,9147.$$

Entsprechendes gilt für die tg- und ctg-Funktion.

f) Gegebenenfalls muß interpoliert werden, was sich bei den kleinen Bereichen leicht im Kopf ausführen läßt: $\sin 45^\circ 13' = 0,7092 + 0,3 \cdot 20 = 0,7098$.

↓
bezogen auf die 4. Dezimale

g) Zum genauen Zeichnen von Winkeln bedient man sich mit Vorteil der tg-Funktion. Zeichne z. B. den Winkel $\alpha = 33^\circ 46'$ aus $\text{tg } \alpha = 0,669$! Ebenso die Winkel $66,7^\circ$ und $138^\circ 36'$ (mit je 100 mm langen Schenkeln).

II. Anwendung der Sätze der Algebra und der höheren Rechnungsarten auf das technische Rechnen.

A. Algebra und algebraische Analysis.

16. Allgemeines über Gleichungen und ihre Auflösung. a) Eine Gleichung nennt man allgemein je zwei algebraische Ausdrücke, die durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden sind. Die Größen links und rechts des Gleichheitszeichens heißen die Seiten der Gleichung.

Gleichungen sind beispielsweise:

- | | | |
|--|---|-------------------------|
| 1. $a = a$: identische Gleichung | } | Definitionsgleichungen |
| 2. $n \cdot a = a + a + a + \dots$ (n Summanden) | | |
| 3. $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots$ (n Faktoren) | | |
| 4. $a \cdot b = b \cdot a$ | } | Algebraische Formeln |
| 5. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ | | |
| 6. $ax + b = c; \quad x = ?$ | } | Bestimmungsgleichungen. |
| 7. $F = \frac{d^2 \pi}{4} \quad d = ?$ | | |

Identische Gleichungen sind solche, deren beide Seiten sowohl dem Inhalt wie auch der Form nach übereinstimmen. Die identische Gleichung 1, deren Richtigkeit sich nicht beweisen läßt, ist die symbolische Darstellung des mathematischen Grundsatzes oder Axioms: „Jede Größe ist sich selber gleich.“

Definitionsgleichungen schließen eine Erklärung ein. So erklärt die Gleichung 2 die Multiplikation als eine Addition gleicher Summanden; die Gleichung 3 erklärt die Potenz als ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren. Solche Definitionsgleichungen erklären sowohl eine mathematische Operation an sich, wie auch das für diese eingeführte Symbol. Oft reicht übrigens für eine eindeutige Definition eine einzige Gleichung nicht aus; es ist noch eine zweite Gleichung notwendig, auf die sich die Definition stützt, eine Voraussetzung; so

kann z. B. die Wurzel lediglich dadurch ausreichend erläutert werden, daß man sagt: Es ist $\sqrt[n]{a} = b$, vorausgesetzt, daß $b^n = a$.

Formeln sind Gleichungen, die einen Lehrsatz einschließen; der in Gleichung 4 enthaltene Lehrsatz lautet: „Die Reihenfolge der Faktoren ist beliebig.“

Bestimmungsgleichungen endlich sind solche Gleichungen, die eine oder mehrere Unbekannte enthalten, die durch gegebene oder als bekannt vorausgesetzte Größen ausgedrückt werden sollen. Das Berechnen der Unbekannten nennt man Auflösen der Gleichung.

b) Die Bestimmungsgleichungen können wie folgt eingeteilt werden:

Algebraische Gleichungen			Transzendente Gleichungen		
(mit 1, 2, 3 und mehr Unbekannten)					
1. Grades (= lineare Gleichungen)	2. Grades (= quadratische Gleichungen)	3. Grades (= kubische Gleichungen)	Höheren Grades	Exponential- Gleichungen	Trigono- metrische Gleichungen

Beispiele:

$ax + b = 0$: lineare Gleichung; $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots = 0$: Gleichung n . Grades

$x^2 + ax + b = 0$: quadratische Gleichung; $ax = b$: Exponentialgleichung

$x^3 + bx + c = 0$: kubische Gleichung; $a \sin(bx + c) = d$: trigonometrische Gleichung.

Der Grad einer algebraischen Gleichung ist bedingt durch den größten Exponenten, der bei der Unbekannten auftritt.

c) Die Auflösung einer Gleichung wird ermöglicht durch die Tatsache, daß eine Gleichung unverändert bleibt, wenn beide Seiten in gleicher Weise umgeformt werden. Man darf also beide Seiten um dieselbe Größe vermehren oder vermindern, man darf beide Seiten mit derselben Zahl multiplizieren oder durch die gleiche Zahl dividieren; man kann beide Seiten logarithmieren, potenzieren usw.

Wichtig sind besonders folgende beiden Regeln:

$\begin{array}{l} 1. \quad x - a = b \\ \quad x - a + a = b + a \\ \quad \quad \quad \underbrace{}_0 \\ \quad x = b + a \end{array}$	}	d. h. eine additive Größe kann von der einen Seite mit umgekehrtem Vorzeichen auf die andere Seite geschrieben werden.
$\begin{array}{l} 2. \quad ax = b \\ \quad \frac{ax}{a} = \frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a} \\ \quad x = b \cdot \frac{1}{a} \end{array}$	}	d. h. ein Faktor der einen Seite kann auf die andere Seite als reziproker Faktor geschrieben werden.

Beispiele: $\sqrt[3]{ax} = 3$;

$$ax = 9;$$

$$x = \frac{9}{a},$$

$$a^4x = a^2 + 3x;$$

$$4x \lg a = (2 + 3x) \lg a;$$

$$4x = 2 + 3x;$$

$$x = 2;$$

$$x^2 = 2ax - a^2;$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0;$$

$$(x - a)^2 = 0;$$

$$x - a = 0;$$

$$x = a.$$

17. Gleichungen 1. Grades. a) Jede Gleichung 1. Grades mit einer Unbekannten läßt sich auf die Form bringen: $ax + b = 0$. Die Lösung dieser Normalform lautet $x = -\frac{b}{a}$.

Um eine vorgelegte Gleichung auf diese leicht lösbare Normalform zu bringen, ist oft eine Reihe von Umformungen notwendig, die nach folgendem Schema ausgeführt werden können:

1. Nenner beseitigen. Es geschieht dies dadurch, daß die ganze Gleichung mit dem Hauptnenner durchmultipliziert wird. Die einzelnen Nenner heben sich dabei naturgemäß weg.

2. Klammern auflösen.

3. Die Glieder ordnen, d. h. alle Glieder mit der Unbekannten schreibt man auf die linke, alle anderen auf die rechte Seite.

4. Die Unbekannte links aussondern.

5. Die Gleichung durch den Faktor der Unbekannten dividieren.

Beispiel:

$$x - 7 + 5 = \frac{10x - 32}{2x - 10};$$

1. $3(2x - 10) + 5(x - 7)(2x - 10) = (10x - 32)(x - 7);$

2. $6x - 30 + 10x^2 - 70x - 50x + 350 = 10x^2 - 32x - 70x + 224;$

3. $10x^2 - 10x^2 + 6x - 70x - 50x + 32x + 70x = 224 + 30 - 350;$

4. $-12x = -96;$

5. $x = \frac{-96}{-12} = +8.$

b) Bei den meisten technischen Aufgaben handelt es sich darum, eine vorgelegte Formel nach einer der darin enthaltenen, durch die Aufgabe bestimmten Größe aufzulösen. Die Auflösung erfolgt nach den gleichen Grundsätzen wie bisher.

1. Beispiel: $\lambda = \frac{Pl}{EF}; F = ?; 1.* \lambda EF = Pl; 5. F = \frac{Pl}{\lambda E}.$

2. Beispiel: $v = k \frac{273 + t}{p}; t = ?;$

1. $vp = k(273 + t);$ 3. $kt = vp - 273k;$

2. $vp = 273k + kt;$ 5. $t = \frac{vp - 273k}{k} = \frac{vp}{k} - 273.$

c) Sollen mehrere Unbekannte bestimmt werden, so müssen so viel voneinander unabhängige Gleichungen gegeben sein, wie Unbekannte vorhanden sind.

Das für technische Aufgaben wichtigste Lösungsverfahren ist die Methode der Substitution, die nachstehend an einem Beispiel allgemein dargestellt werden soll:

$$\left. \begin{array}{l} 1. a_1x + b_1y = c_1 \\ 2. a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Die 1. Gleichung nach } y \text{ aufgelöst gibt die} \\ \text{Substitutionsgleichung:} \end{array}$$

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}.$$

Setzt man diese in die 2. Gleichung ein, so erhält man

$$a_2x + \frac{b_2c_1 - b_2a_1x}{b_1} = c_2; \quad a_2b_1x + b_2c_1 - a_1b_2x = b_1c_2;$$

$$x(a_2b_1 - a_1b_2) = b_1c_2 - b_2c_1; \quad x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die Substitutionsgleichung erhält man schließlich

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

* Die Ziffern bedeuten hier die Nummern der Umformungen unseres „Schemas“ im Abschnitt a).

(Man beachte den planmäßigen Aufbau der auftretenden Produktdifferenzen, die man Determinanten nennt, und die in der Theorie der Gleichungen eine Rolle spielen.)

$$\begin{array}{l} \text{Beispiel:} \quad 1. \frac{3(y-2x)}{5} = 0,6 \\ \quad \quad \quad 2. \quad y + 2,5x = 10 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Substitutionsgleichung aus 2.:} \\ \boxed{y = 10 - 2,5x} \end{array}$$

$$\frac{3(10 - 2,5x - 2x)}{5} = 0,6; \quad 10 - 4,5x = 1; \quad 4,5x = 10 - 1 = 9; \quad \underline{x = 2};$$

$$y = 10 - 2,5 \cdot 2 = 10 - 5 = 5; \quad \underline{y = 5}.$$

18. Proportionen. a) Eine Proportion ist eine Gleichung, deren beide Seiten Verhältniszahlen sind. Eine Verhältniszahl ist der Quotient aus zwei Zahlen mit derselben Maßbezeichnung.

Die allgemeine Form einer Proportion ist

$$a : b = c : d \quad (70)$$

gelesen „ a verhält sich zu b wie c zu d “ oder auch „es verhält sich a zu b wie c zu d “.

Die Größen a , b , c und d heißen Glieder der Proportionen, und zwar nennt man a und d die Außenglieder, b und c die Innenglieder.

Wichtige Lehrsätze über Proportionen sind:

1. Das Produkt der Innenglieder ist gleich dem Produkt der Außenglieder.

2. In jeder Proportion können die Innenglieder vertauscht werden, ebenso die Außenglieder.

3. In jeder Proportion können die Innenglieder zu Außengliedern gemacht werden, wenn gleichzeitig die Außenglieder zu Innengliedern werden.

4. In jeder als Bruchgleichung geschriebenen Proportion kann der Zähler auf jeder Seite um den Betrag des zugehörigen Nenners vermehrt oder vermindert werden. Entsprechendes gilt für die Nenner: Gesetz der korrespondierenden Addition und Subtraktion.

b) Eine Proportion mit gleichen Innen- oder Außengliedern heißt stetige Proportion, z. B.

$$a : x = x : b \quad (71)$$

$$\text{Daraus folgt:} \quad x^2 = a \cdot b \quad (72) \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{ab}. \quad (73)$$

Man nennt x die mittlere Proportionale zwischen a und b oder auch das geometrische Mittel aus a und b . Allgemein gilt für das geometrische Mittel aus n Größen

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}, \quad (74)$$

während das arithmetische Mittel aus den gleichen Größen sich berechnet zu

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \quad (75)$$

Nach CAUCHY ist stets $m_a > m_g$, (76)
sofern $a_1 \neq a_2$.

Beispiele: 1. Aus 10 und 12 ist

$$\text{das arithmetische Mittel } m_a = \frac{10 + 12}{2} = 11,0,$$

$$\text{das geometrische Mittel } m_g = \sqrt{10 \cdot 12} = \sqrt{120} = 10,95,$$

also etwas kleiner als 11.

2. Das arithmetische Mittel ist zu bilden aus

46,32 Hier braucht man nicht erst sämtliche Zahlen zu addieren, denn man erkennt
 46,28 ja, daß das Mittel mit 46, . . . beginnen muß. Die Summe der ersten Dezimalen
 46,43 hinter dem Komma ist 23, daher die 2 hinter dem Komma; der überschießende
 46,18 Betrag von 3 Einheiten ist gleich 30 Einheiten der 2. Dezimale hinter dem Komma.
 46,18 Dazu die Summe der Zahlen der durch $n = 10$ geteilten 2. Dezimale gibt 75.

46,21 c) Die Aussage, zwei Größen y und x seien proportional, kann
 46,41 wie folgt ausgedrückt werden: $y : x = y_1 : x_1$. (77)
 46,37 Dabei müssen y_1 und x_1 zwei den Größen x und y gleichartige und
 46,12 bekannte Größen sein. Alsdann ist der Bruch $\frac{y_1}{x_1}$ eine bekannte, kon-
 46,25 stante Zahl: $\frac{y_1}{x_1} = C$. Damit geht unsere Proportion über in $y = Cx$, (78)
 46,275

d. h. zwei Größen sind proportional, wenn sie sich durch einen konstanten Faktor, den sog. Proportionalitätsfaktor, unterscheiden.

d) Außer dieser direkten Proportionalität gibt es noch andere Zusammenhänge. Man liest:

$$y = \frac{C}{x}, \quad y \text{ ist umgekehrt proportional } x; \quad (79)$$

$$y = C \sqrt{x}, \quad y \text{ ist der Wurzel aus } x \text{ proportional}; \quad (80)$$

$$y = \frac{C}{x^2}, \quad y \text{ ist umgekehrt proportional dem Quadrate von } x; \quad (81)$$

usw.

In technischen und physikalischen Formeln spielen die Proportionalitätsfaktoren meist die Rolle von Stoffkonstanten, die man spezifisch (deutsch „bezogen“) nennt (z. B. spezifisches [bezogenes] Gewicht, spezifischer Widerstand, spezifische Wärme usw.). Sie erhalten meist ein besonderes Symbol.

Beispiele: Das absolute Gewicht G eines Körpers ist proportional seinem Volumen V : $G = V \cdot \gamma$. Der Proportionalitätsfaktor γ heißt hier „spezifisches Gewicht“.

Der Fallweg s beim freien Fall im luftleeren Raum ist proportional dem Quadrate der Fallzeit t : $s = \frac{g}{2} t^2$. Der Proportionalitätsfaktor ist hier $\frac{g}{2}$, wobei g eine besondere physikalische Bedeutung hat (= Erdbeschleunigung).

c) Eine Größe kann auch gleichzeitig mehreren Größen proportional sein. Die betreffenden Größen sind alsdann miteinander zu multiplizieren.

Beispiel: Die elastische Längenänderung λ , die ein durch eine äußere Kraft P belasteter Stab vom Querschnitt F und der Länge l erfährt, ist

1. proportional der ursprünglichen Länge l ,

2. proportional der beanspruchenden Kraft P

3. umgekehrt proportional der Querschnittsfläche F ; daher

$$\lambda = \alpha \frac{Pl}{F} = \frac{Pl}{EF}, \quad \text{wenn der Proportionalitätsfaktor mit } \alpha \text{ bzw. } \frac{1}{E} \text{ bezeichnet wird.}$$

19. Gleichungen höheren Grades und transzendente Gleichungen. a) Folgende Sätze gelten allgemein für Gleichungen zweiten und höheren Grades:

1. Eine Gleichung n . Grades hat stets n Wurzeln (= Lösungen).

2. Sind $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ die Wurzeln einer Gleichung n . Grades, so führt der Ausdruck

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0 \quad (82)$$

auf die gegebene Gleichung zurück.

3. Hat eine vorgelegte Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (83)$$

die Wurzel $x = \alpha$, so ist $f(x)$ durch $x - \alpha$ ohne Rest teilbar.

4. Sind $x_1 x_2 \cdots x_n$ die Wurzeln der Gleichung (83), so gilt für die Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n); \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \cdots; \\ a_3 &= -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_4 x_5 + \cdots); \\ a_n &= (-1)^n \cdot x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots x_n. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

b) Jede quadratische Gleichung läßt sich durch entsprechende Umformung auf die Normalform bringen:

$$f(x) = x^2 + ax + b = 0. \quad (85)$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichungen sind

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Die Größe $\frac{a^2}{4} - b$ heißt Diskriminante; ist sie negativ, so sind die beiden Wurzeln sog. konjugiert komplexe Zahlen.

Als Rechenkontrollen hat man folgende:

$$1. \quad (x - x_1)(x - x_2) = 0; \quad (86)$$

diese Gleichung muß, aufgelöst, die ursprüngliche Gleichung ergeben.

$$2. \text{ Es muß sein: } \quad -(x_1 + x_2) = a \quad (87) \quad x_1 x_2 = b. \quad (88)$$

Beispiel: $x(x - 5,5) = 15$ führt auf die Normalform: $x^2 - 5,5x - 15 = 0$, hieraus

$$x_{1,2} = +2,75 \pm \sqrt{2,75^2 + 15} = +2,75 \pm \sqrt{7,56 + 15} = +2,75 \pm 4,75,$$

daher $x_1 = -2,0$; $x_2 = +7,5$.

Kontrollen: $(x + 2)(x - 7,5) = x^2 - 5,5x - 15 = 0$ (stimmt); oder

$$a = -(-2 + 7,5) = -5,5 \text{ (stimmt); } \quad b = -2 \cdot 7,5 = -15 \text{ (stimmt).}$$

c) Auch zur Lösung von kubischen Gleichungen und manchen Gleichungen noch höheren Grades sind exakte Lösungsverfahren bekannt, doch soll auf diese hier nicht eingegangen werden. Zudem werden für technische Zwecke gewöhnlich nicht alle, sondern nur einzelne, meist in ihrer Größenordnung bekannte Wurzeln gebraucht. Solche Gleichungen löst man alsdann zweckmäßig nach einem Näherungsverfahren. Zu diesem Zweck setzt man in die vorgelegte Gleichung $f(x) = 0$ beliebige Werte, in deren Nähe man die gesuchte Wurzel vermutet, für x ein, und berechnet für diese die Werte $f(x)$. Sie werden gewöhnlich $\neq 0$ sein; durch geeignete Wahl von x kann man sich indes jenem Werte für x , für den $f(x) = 0$ wird, immer mehr nähern. Man kann aber auch aus zwei der gefundenen Näherungswerte sehr schnell zu erheblich genaueren Werten gelangen, wenn man sich der Regula falsi oder der Newtonschen Näherungsmethode bedient. Die regula falsi ist nichts weiter als eine lineare Interpolation nach dem Beispiel 3 des Abschnitts 13c, während nach NEWTON sich die an dem Näherungswert α anzubringende $\Delta\alpha$ berechnet zu

$$\Delta\alpha = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad (89)$$

wobei unten $f'(\alpha)$ die erste Ableitung der gegebenen Funktion $f(x)$ bedeutet, in welche man für x den Näherungswert α einsetzte. (Vgl. Abschnitt 26.)

Beispiel: Die Gleichung

$$2,1x^6 - 10,92x = 579,6$$

hat eine Wurzel zwischen 2 und 3; sie ist zu berechnen.

Lösung: Durch Division mit dem Koeffizienten von x^6 wird die vorgelegte Gleichung etwas einfacher:

$$x^6 - 5,2x = 276,0 = 0.$$

Der gesuchte Wert liegt, wie eine Überschlagsrechnung zeigt, nahe bei 2,5. Für diesen Wert und für $x = 2,6$ sind die resultierenden Funktionswerte nachstehend berechnet. Es zeigt sich, daß der genauere Wert zwischen 2,5 und 2,6 liegt, und zwar näher an dem letzteren, weil $f(x)$ mit 19,4 näher an 0 liegt als 44,86. Durch eine lineare Interpolation gemäß Beispiel 3 im Abschnitt 13 b kann jener Wert, für den $f(x)$ genau gleich Null wird, gefunden werden:

x	x^6	$5,2x$	$x^6 - 5,2x$	$f(x)$
2,5	244,14	13,0	231,14	-44,86
2,6	308,92	13,52	295,40	19,40

x	$f(x)$
2,5	-44,9
2,6	+19,4

$$\Delta x = 0,1; \quad \Delta f(x) = +64,3; \quad \delta f(x) = +44,9; \quad \text{somit}$$

$$\delta x = \delta f(x) \frac{\Delta x}{\Delta f(x)} = 44,9 \frac{0,1}{64,3} = \frac{4,49}{64,3} = +0,07_0,$$

so daß der genauere Wert

$$x = 2,5 + 0,07_0 = 2,57_0 \text{ wird.}$$

Nach NEWTON hätte man mit $\alpha = 2,5$ und $f(\alpha) = -44,9$:

$$f'(\alpha) = 6 \cdot 2,5^5 - 5,2 = 6 \cdot 97,6 - 5,2 = 580,8;$$

$$\Delta \alpha = -\frac{-44,9}{580,8} = +0,07_7,$$

somit $x = \alpha + \Delta \alpha = 2,5 + 0,07_7 = 2,57_7$.

Durch Wiederholung der Verfahren kann das Ergebnis jeweils noch verbessert werden.

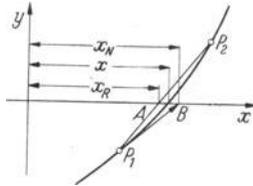


Abb. 12.

d) Die nach den beiden Verfahren berechneten Werte unterscheiden sich deswegen um einiges, weil die Regula falsi mit der Sehne zwischen P_1 und P_2 (Abb. 12) arbeitet, das Newtonsche Näherungsverfahren hingegen mit den Tangenten, die man sich durch P_1 und P_2 an die Kurve $y = f(x)$ gelegt denkt. Einen genaueren Wert für x erhält man durch Mittelung der beiden x -Werte; im letzten Beispiel also

$$x = \frac{x_R + x_N}{2} = \frac{2,570 + 2,577}{2} = 2,573_5.$$

e) Von den transzendenten Gleichungen behandeln wir hier lediglich die Exponentialgleichungen, die gewöhnlich mit Hilfe von Logarithmen gelöst werden. So folgt beispielsweise aus $b = a \cdot q^x$:

$$\lg b = \lg a + x \lg q, \quad x \lg q = \lg b - \lg a, \quad x = \frac{\lg b - \lg a}{\lg q}.$$

Auch die Lösung mit Hilfe der Regula falsi bietet hier gelegentlich Vorteile.

1. Beispiel: $x^x = 100$; $x = ?$; $x \lg x = 2$; $f(x) = x \lg x - 2 = 0$.

x	$f(x)$
3	-0,57
4	+0,41

$$\text{Hieraus } x = 3 + \frac{1 \cdot 0,57}{0,98} = 3,58.$$

Eine weitere Verbesserung kann durch Wiederholung des Verfahrens erzielt werden:

x	$f(x)$
3,58	+0,0171
3,60	-0,0027

$$\text{Hieraus } x = 3,58 + 0,02 \frac{0,0171}{0,0198} = 3,5973.$$

2. Beispiel: $a = b \cdot e^{1 - \frac{\alpha}{T}}$; $T = ?$

Lösung: $\ln a = \ln b + 1 - \frac{\alpha}{T} = \ln b + \ln e - \frac{\alpha}{T}$

$$\ln a - \ln b - \ln e = \ln \frac{a}{b \cdot e} = -\frac{\alpha}{T}$$

$$T = -\frac{\alpha}{\ln \frac{a}{b \cdot e}} = C \cdot \alpha.$$

20. Graphische Lösung von Gleichungen. a) Die graphischen Lösungen von Gleichungen sind auch lediglich Näherungslösungen, deren Genauigkeit indes für viele technische Zwecke ausreicht. Gegebenenfalls können die graphisch gefundenen Näherungswerte nach einem der im Kapitel 19 genannten Verfahren verbessert werden.

Zum Zwecke der graphischen Lösung setzt man wieder in die vorgelegte Gleichung $f(x) = 0$ für x irgendwelche Zahlenwerte ein, berechnet die zugehörigen $f(x)$ -Werte, die gewöhnlich ± 0 sein werden und zeichnet die Kurve $f(x)$ nach dem bekannten Verfahren (S. 25) in ein r.K.S. (rechtwinkliges Koordinatensystem s. Abschn. 23) ein. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit der x -Achse kennzeichnen jene Stellen der Kurve, für die $f(x) = 0$ wird, d. h. die Abszissen der Schnittpunkte sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

Beispiel: $x^3 + x^2 - 5,7x - 3 = 0$; $x = ?$ Nachstehend die tabellarische Auswertung:

Die hiernach aufgezeichnete Kurve zeigt Abb. 13; die x -Achse wird in den Punkten $x_1 = -2,7$, $x_2 = -0,5$, $x_3 = +2,2$ geschnitten; dies sind — näherungsweise — die Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

Die graphisch bestimmten Werte können durch Interpolation oder, was dasselbe, durch Anwendung der Regula falsi verbessert werden:

x -3 -2 $?$ $+1$
 $f(x)$ $-3,9$ $+4,4$ 0 $+8,3$ $+3,9$,

$$\delta x = 3,9 \cdot \frac{1}{8,3} = 0,464, \text{ daher } x = -3 + 0,464 = -2,54.$$

x	x^3	x^2	$-5,7x$	$f(x)$
-3	-27	$+9$	$+17,1$	$-3,9$
-2	-8	$+4$	$+11,4$	$+4,4$
-1	-1	$+1$	$+5,7$	$+2,7$
0	0	0	0	-3
1	1	$+1$	$-5,7$	$-6,7$
2	8	$+4$	$-11,4$	$-2,4$
3	27	$+9$	$-17,1$	$+15,9$

b) Gelegentlich führt die Zerlegung der vorgelegten Gleichung $f(x) = 0$ in zwei bequem und ohne Aufstellung einer besonderen Zahlentafel darstellbare Kurven $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zu recht ansprechenden graphischen Lösungen.

Beispielsweise läßt sich die Gleichung

$$x^2 - x - 4 = 0$$

deuten als eine Parabel $y_1 = x^2$, der die Gerade $y_2 = -x - 4$ überlagert ist (vgl. Abschn. 25 S. 43ff.). Schreibt man nun die Gleichung in der Form

$$x^2 = x + 4,$$

so bedeutet das, daß als Wurzeln, die diese Gleichung befriedigen, jene Abszissen anzusprechen sind, in denen beide Linien dieselbe Ordinate haben. Das sind aber die Schnittpunkte beider Linien. Abb. 14 zeigt die graphische Lösung nach diesem Vorschlage. Man hätte die Zerlegung aber auch anders vornehmen können. Durch Division mit x geht die vorgelegte Gleichung über in

$$x - 1 - \frac{4}{x} = 0 \quad \text{oder} \quad x - 1 = \frac{4}{x},$$

danach ergeben sich die Wurzeln aus dem Schnittpunkt der Geraden $x - 1$ mit der Hyperbel $\frac{4}{x}$ (Abb. 15).

c) Auf dem gleichen Grundsatz beruht das Verfahren zur graphischen Lösung von Gleichungen mit zwei Unbekannten. Sind z. B. die Gleichungen

$$f_1(x, y) = 0 \qquad f_2(x, y) = 0$$

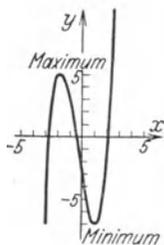


Abb. 13.

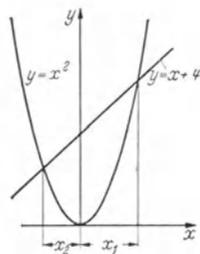


Abb. 14.

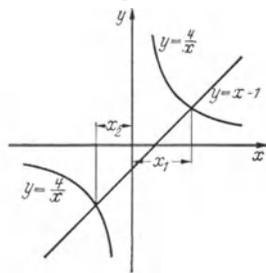


Abb. 15.

gegeben, so läßt sich jede als Kurve in einem r.K.S. darstellen. Die Werte, welche beide Gleichungen befriedigen, werden offenbar dargestellt durch die Koordinaten jener Punkte, die beiden Kurven gemeinsam sind, d. h. durch die Koordinaten der Schnittpunkte beider Kurven.

d) Ein wichtiges Hilfsmittel bei der graphischen Lösung von Gleichungen ist das logarithmisch geteilte Achsenkreuz. Als sog. Logarithmenpapiere (im Gegensatz zu den Millimeterpapieren) sind alle möglichen Teilungen im Handel erhältlich (Schleicher & Schüll, Düren), so solche mit einer logarithmisch und einer linear geteilten Achse, selbst mit zwei logarithmisch geteilten Achsen, dabei eine oder auch mehrere Zehnerpotenzen umfassend.

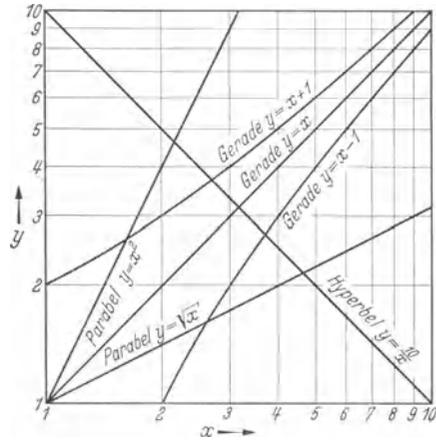


Abb. 16.

Im doppelt logarithmisch geteilten Achsenkreuz erscheinen die Kurven lediglich nach Länge und Breite zusammengezogen; eine Gerade des numerischen K.S. erscheint hier gewöhnlich als flache Kurve. Ist nur eine Achse logarithmisch, die andere linear geteilt, so wird die Kurve in Richtung der logarithmisch geteilten Achse verkürzt; in einem solchen System wird eine Gerade zur (logarithmischen bzw. Exponential-) Kurve. Es ist möglich, Kurven durch Eintragen in ein entsprechend gewähltes logarithmisches Achsenkreuz stark zu verstrecken, wenn nicht sogar als Gerade darzustellen. In letzterem Falle können auch

durch Extrapolation noch zusammengehörige Werte mit ausreichender Genauigkeit graphisch bestimmt werden. Abb. 16 zeigt einige durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegebenen Linien im doppelt logarithmischen Achsenkreuz.

e) Die vorstehend beschriebenen Verfahren der graphischen Lösung von Gleichungen finden vornehmlich Anwendung, wenn es sich um die Bestimmung lediglich von Einzelwerten handelt. Für die fortlaufende Berechnung von mehreren Werten nach immer demselben Rechenschema (FormelAuswertung) hat man andere, bequemere Hilfsmittel erdacht, die man als Nomogramme oder Rechentafeln bezeichnet¹.

21. Reihen. a) Unter einer Reihe versteht man die Aufeinanderfolge von Gliedern, deren jedes sich aus dem vorhergehenden auf Grund irgendeiner bestimmten Gesetzmäßigkeit errechnen läßt. Man unterscheidet arithmetische, geometrische, binomische und transzendente Reihen.

b) Bei einer arithmetischen Reihe (1. Ordnung) ist jedes Glied das arithmetische Mittel aus dem vorhergehenden und dem folgenden Gliede. Zwei aufeinanderfolgende Glieder unterscheiden sich um eine konstante Differenz d . Eine arithmetische Reihe sieht also allgemein so aus:

$$\begin{array}{cccccc}
 1. & 2. & 3. & 4. & n. \text{ Glied} & \\
 a & a + d & a + 2d & a + 3d & a + (n - 1)d. & (90)
 \end{array}$$

Es gilt also für das n . Glied die Beziehung $z = a + (n - 1)d$. (91)

Zählt man alle n Glieder zusammen, so erhält man die Summe s der arithmetischen Reihe

$$s = \frac{a + z}{2} n.$$

¹ Vgl. Werkstattbuch Heft 90, Techn. Rechnen 2. Teil „Graphisches Rechnen“.

c) Bei einer geometrischen Reihe ist jedes Glied das geometrische Mittel aus dem vorhergehenden und dem folgenden Gliede. Zwei aufeinanderfolgende Glieder unterscheiden sich durch einen konstanten Faktor, den sog. Quotienten q der geometrischen Reihe.

Eine geometrische Reihe ist wie folgt aufgebaut:

$$\begin{array}{cccccc} 1. & 2. & 3. & 4. & n. \text{ Glied} & \\ a & aq & aq^2 & aq^3 & \dots aq^{n-1}. & \end{array} \quad (92)$$

Es gilt also für das n . Glied die Beziehung $z = aq^{n-1}$. (93)

Für die Summe von n Gliedern einer geometrischen Reihe gilt

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}; \quad (94)$$

für $n = \infty$ und $0 < |q| < 1$ geht diese Gleichung über in $s = \frac{a}{1 - q}$ (95)

d) Die Potenzen des Binoms $(a + b)$ lassen sich in eine Reihe entwickeln. Für beliebige, also auch für gebrochene und negative Exponenten, gestattet der binomische Lehrsatz die Berechnung der Binomialkoeffizienten. Die höheren Rechnungsarten beweisen, daß ganz allgemein gilt

$$(a \pm b)^n = a^n \pm n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} \cdot b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} \cdot b^3 + \dots \quad (96)$$

Die Symbole $2!$, $3!$ usw. lies „Zwei Fakultät“ usw. Allgemein versteht man unter $m!$ das Produkt

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (m - 1) \cdot m. \quad (97)$$

Die Folgerungen, die sich aus dem binomischen Lehrsatz ergeben, sind für das praktische Rechnen von großer Wichtigkeit.

e) Von den transzendenten Reihen sind zu nennen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots; \quad (98) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots; \quad (99)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots; \quad (100) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (101)$$

hieraus für $x = 1$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots = \lim^* \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828 \dots (n \rightarrow \infty); \quad (102)$$

$$\ln(a + h) - \ln a = 2 \left[\frac{h}{2a + h} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2a + h} \right)^3 + \dots \right]. \quad (103)$$

Beispiele: 1. Die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 100 einschließlich ist

$$s = \frac{a+z}{2} n = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

2. Die Amplituden h einer gedämpften Schwingung bilden eine geometrische Reihe. Der Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden Amplituden heißt Dämpfungskoeffizient k . Bestimmt man durch eine Messung die Amplitude der p . Schwingung zu h_p , die Amplitude der q . Schwingung zu h_q so ist nach Gleichung 92 $h_p = k^{p-1}$; $h_q = k^{q-1}$; durch Division

$$\frac{h_p}{h_q} = \frac{k^{p-1}}{k^{q-1}} = k^{p-q}; \quad \text{hieraus } k = \left(\frac{h_p}{h_q} \right)^{\frac{1}{p-q}} = \sqrt[p-q]{\frac{h_p}{h_q}}.$$

3. $\sin 10^\circ = \sin 0,175 = 0,175 - \frac{0,175^3}{6} + \frac{0,175^5}{120} - \dots$
 $= 0,175 - 0,0009 + 0,000001 \dots = 0,174 \dots$

* „lim“ lies limes = Grenzwert.

22. Das Rechnen mit Näherungsformeln. a) Aus dem binomischen Lehrsatz folgen nachstehende, für das praktische Rechnen recht vorteilhafte, zum Teil bereits früher erwähnte Näherungsformeln:

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}, \text{ wenn } b \ll a; \quad (104) \quad \frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x, \text{ wenn } x \ll 1, \quad (106)$$

$$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2}, \text{ wenn } b \ll a; \quad (105) \quad (1 \pm \delta)^n = 1 \pm n\delta, \text{ wenn } \delta \ll 1. \quad (107)$$

Beispiele: $\sqrt[3]{37,5} = \sqrt[3]{36 + 1,5} = \sqrt[3]{6^2 + 1,5} = 6 + \frac{1,5}{12} = 6,12;$

$$\sqrt{2} = 0,1 \sqrt{200} = 0,1 \sqrt{14^2 + 4} = 0,1 \left(14 + \frac{4}{28} \right) = 0,1 \cdot 14,14 = 1,414 \dots;$$

$$\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{125 - 25} = 5 - \frac{25}{75} = 4,67;$$

$$\frac{1}{1,0012} = 1 - 0,0012 = 0,9988; \quad \frac{1}{5,02} = \frac{1}{5(1,004)} = 0,2 \cdot 0,996 = 0,1992;$$

$$1,0025^{3,4} = 1 + 0,0025 \cdot 3,4 = 1,0085; \quad \sqrt[3]{1,018} = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,018 = 1,006.$$

b) Aus den bekannten transzendenten Reihen ergeben sich folgende Näherungsformeln:

$$\sin x = \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} x = \widehat{x}, \text{ für } x < 0,1; \quad (108) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} \text{ für } x < 0,5; \quad (109)$$

$$\ln(a + h) = \ln a + \frac{2h}{2a + h} = \ln a + \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \text{ für } h \ll a; \quad (110)$$

$$\lg(a + h) = \lg a + M \cdot \frac{h}{a}, \text{ wobei } M = 0,4343 \dots \text{ [Formel (44)]} \quad (111)$$

$$\sin(x + \delta) = \sin x + \delta \cos x, \text{ für } \delta \ll x; \quad (112) \quad \operatorname{tg}(x + \delta) = \operatorname{tg} x + \frac{\delta}{\cos^2 x} \quad (113)$$

Beispiele:

$$\sin 5^\circ = \sin 0,0872 = 0,0872; \quad \ln 3 = \ln(2,718 + 0,282) = 1 + \frac{0,282}{2,718} = 1,103;$$

$$\operatorname{tg} 1^\circ 12' = \operatorname{arc} 72' = \frac{72}{3438} = 0,02096 \dots;$$

$$\lg 2 = 0,3010; \text{ daher } \lg 2,033 = 0,3010 + \frac{0,434 \cdot 0,033}{2} = 0,3083$$

$$\sin 32^\circ = \sin 30^\circ + \frac{2}{57,3} \cos 30^\circ = 0,5 + 0,0348 \cdot 0,866 = 0,5 + 0,0302 = 0,5302.$$

B. Die für das numerische Rechnen bedeutsamen Eigenschaften der Funktionen.

23. Koordinatensysteme. a) Die Lage eines Punktes in der Ebene kann auf mehrfache Weise eindeutig angegeben werden, und zwar genügen hierzu im allgemeinen zwei Bestimmungsstücke. Diese können Abstände, Entfernungen, Gerade oder Winkel sein, die von bestimmten Punkten, Geraden oder Richtungen ausgehen. Diese Ausgangsgrößen nennt man das Koordinaten- oder Bezugssystem; sie sind stets als gegeben zu betrachten. Die beiden Größen, welche die Lage eines Punktes in einem gegebenen Bezugssystem bestimmen, heißen Koordinaten.

b) Im rechtwinkligen Koordinatensystem (r.K.S.) wird das Bezugssystem gebildet durch zwei zueinander rechtwinklig stehende Achsen (Abb. 17);

die waagerechte Achse heißt auch Abszissenachse, die senkrechte Ordinatenachse. Beide schneiden sich im Koordinaten-Nullpunkt oder Ursprung 0.

Die Lage eines Punktes wird im r.K.S. festgelegt durch die Abstände des Punktes rechtwinklig von den Koordinatenachsen; den waagerechten Abstand nennt man Abszisse x , den senkrechten Abstand Ordinate y ; um anzudeuten, daß ein Punkt P die Koordinaten x und y habe, schreibt man $P(x, y)$.

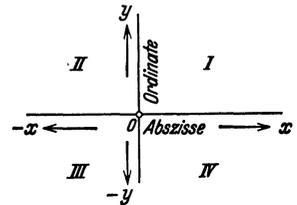


Abb. 17.

Das Achsenkreuz teilt die Ebene in 4 Quadranten, die nach Abb. 17 mit I, II, III, IV bezeichnet werden. Die Vorzeichen der Ordinaten und Abszissen sind in den einzelnen Quadranten verschieden; es ist:

im 1. Quadrant die Abszisse positiv, die Ordinate positiv
„ 2. „ „ „ negativ, „ „ „
„ 3. „ „ „ „ „ „ negativ
„ 4. „ „ „ „ positiv, „ „ „

In Abb. 18 sind zwei Punkte dargestellt, nämlich $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$; ihre Entfernung berechnet sich aus den Koordinatenunterschieden $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ nach dem Pythagoreischen Lehrsatz zu

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{114}$$

Der Neigungswinkel α der Strecke $P_1 P_2$ läßt sich aus folgender Beziehung ableiten:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{115}$$

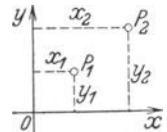


Abb. 18.

Der analytische Ausdruck für eine im r.K.S. dargestellte Kurve ist gegeben durch die für jeden einzelnen Kurvenpunkt gültige mathematische Beziehung zwischen den die Kurvenpunkte bestimmenden Abszissen x und Ordinaten y . Diese mathematische Abhängigkeit zwischen den einzelnen x und y schreibt man in der Form

$$y = f(x) \quad (= \text{explizite Form}) \tag{116}$$

oder auch, wenn die Gleichung auf Null gebracht ist,

$$f(x, y) = 0 \quad (= \text{implizite Form}). \tag{117}$$

Man liest Gleichung (116): y ist eine Funktion von x ; die Gleichung (117): Funktion von x und y ist gleich Null. Die Größen x und y nennt man Variable oder Veränderliche; wenn man bei der tabellarischen Auswertung die Werte für x und aus ihnen auf Grund des vorgelegten Zusammenhangs die ihnen zugeordneten y -Werte berechnet, so nennt man x die unabhängig Veränderliche oder das Argument, y hingegen die abhängig Veränderliche oder Funktion (vgl. S. 25).

c) Im Polarkoordinatensystem (P.K.S) bildet das Bezugssystem ein Punkt 0 (Ursprung) und eine Anfangsrichtung, die gewöhnlich mit der Richtung der $+x$ -Achse des entsprechenden r.K.S. zusammenfällt (Abb. 19). Die Lage eines Punktes ist hier bestimmt durch dessen Abstand vom Ursprung und die Neigung der Verbindungslinie OP gegen die x -Achse.

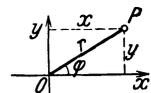


Abb. 19.

Der Abstand $OP = r$ heißt alsdann Radius-Vektor, der Winkel φ heißt Richtungswinkel oder Anomalie. Radiusvektor r und Richtungswinkel φ bilden die Polarkoordinaten des betreffenden Punktes.

Zwischen den Polarkoordinaten r und φ und den rechtwinkligen Koordinaten x und y bestehen die Beziehungen

$$y = r \sin \varphi \quad (118) \quad x = r \cos \varphi \quad (119) \quad \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \varphi \quad (120)$$

Die Polarkoordinaten werden für spiralförmige und ähnliche Kurven verwendet, weil für diese die Gleichungen in Polarkoordinaten einfacher werden als in rechtwinkligen.

Beispiele: $r = a\varphi$: Archimedische Spirale, Abb. 20; (121)

$r = \frac{a}{\varphi}$: Hyperbolische Spirale, Abb. 21 (122); $r = e^{a\varphi}$: Logarithm. Spirale, Abb. 22 (123)

d) Im **Linienkoordinatensystem (L.K.S.)** ist das Bezugssystem gegeben durch zwei meist parallele Gerade u und v (Abb. 23). Ein Punkt in diesem System entspricht einer Kurve im r.K.S. und ist bestimmt durch

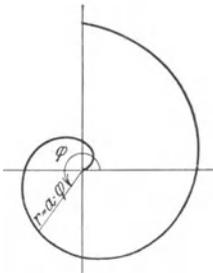


Abb. 20.

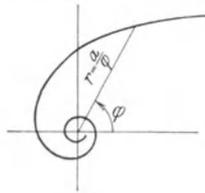


Abb. 21.

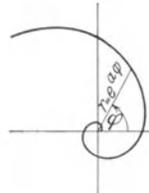


Abb. 22.

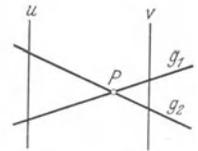


Abb. 23.

den Schnitt zweier Geraden; eine Linie im L.K.S. entspricht einer Kurvenschar des r.K.S., in beiden Systemen analytisch dargestellt durch eine Gleichung zwischen drei Variablen. Linienkoordinaten bilden die Grundlage für die Aufstellung von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), die im 2. Teil¹ eingehend behandelt werden.

24. Die gerade Linie im r.K.S. a) Jeder lineare Zusammenhang zwischen den Veränderlichen x und y läßt sich im r.K.S. als gerade Linie darstellen. In allgemeiner Form läßt sich der Zusammenhang schreiben:

$$f(x) = y = ax + b. \quad (124)$$

[Die vielleicht noch allgemeinere Form $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ läßt sich unschwer durch Division durch β auf die Form der Gleichung (124) bringen.]

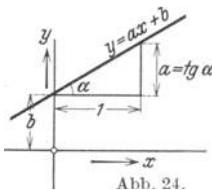


Abb. 24.

Die Konstanten a und b sind bestimmend für die Lage und Richtung der Geraden. Wie aus Abb. 24 hervorgeht, gilt für jeden Punkt der Geraden die Beziehung

$$\frac{y-b}{x} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{somit} \quad y = x \operatorname{tg} \alpha + b,$$

das heißt: das freie Glied b in der Gleichung ist der Abschnitt der Geraden auf der y -Achse, und der Koeffizient von x , der in der Gleichung (124) mit a bezeichnet wurde, ist der Tangens des Neigungswinkels der Geraden gegen die x -Achse:

$$a = \operatorname{tg} \alpha. \quad (125)$$

b) Die Gerade $y = ax + b$ könnte man also ohne Aufstellung einer besonderen Zahlentafel in der Weise zeichnen, daß man auf der y -Achse das Stück b (unter Berücksichtigung von dessen Vorzeichen!) aufträgt und durch

¹ Werkstattbuch Heft 90, Technisches Rechnen 2. Teil.

Punkte durch einen stetigen Linienzug, so erhält man eine Kurve, deren jeweiliger Verlauf für die vorgelegte Gleichung charakteristisch ist.

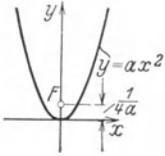


Abb. 25.

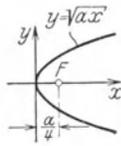
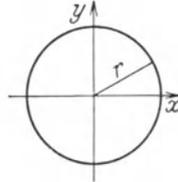


Abb. 26.



b. 27.

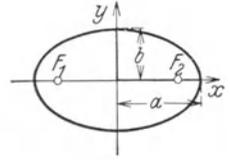


Abb. 28.

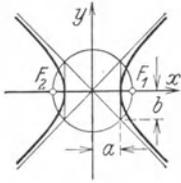


Abb. 29.

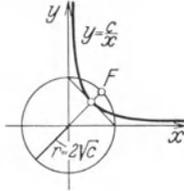


Abb. 30.

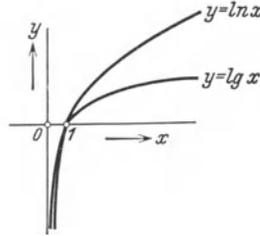


Abb. 31.

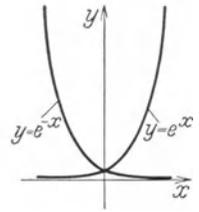


Abb. 32.

Es stellt dar:

die Gleichung $y = ax + b$ eine gerade Linie (Abb. 24); (129)

„ „ $y = ax^2$ eine Parabel (Abb. 25); (130)

„ „ $y = \sqrt{ax}$ eine Parabel (Abb. 26); (131)

„ „ $y^2 + x^2 = r^2$ oder $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ einen Kreis (Abb. 27); (132)

„ „ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine Ellipse (Abb. 28); (133)

„ „ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine Hyperbel (Abb. 29); (134)

„ „ $y = \frac{c}{x}$ eine Hyperbel (Abb. 30); (135)

„ „ $y = \lg x$ die gemeine logarithmische Linie } (Abb. 31); (136)

„ „ $y = \ln x$ die Linie des natürlichen Logarithmus } (136)

„ „ $y = e^x$ und $y = e^{-x}$ die sog. e-Linie (Abb. 32). (137)

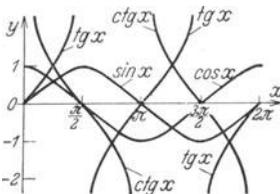


Abb. 33.

b) Auch die trigonometrischen Funktionen lassen sich auf diese Weise graphisch darstellen, wenn man als Abszissen die Winkel (im Bogenmaß) und als Ordinaten die zugehörigen Funktionswerte aufzeichnet (Abb. 33).

c) Wie ändert sich nun die Kurvengleichung, wenn man die Kurve verschiebt oder verdreht? Hierüber geben die Abb. 34 bis 38 Aufschluß. Nachstehend sind die Kurvengleichungen aufgeführt, in die die ursprünglichen Gleichungen (Abb. 34) $y = f(x)$ übergehen, wenn die gegebene Kurve

1. in der $+x$ -Richtung um das Stück a verschoben wird (Abb. 35):

$$y = f(x - a), \quad (138)$$

2. in der $-x$ -Richtung um das Stück a verschoben wird (Abb. 35):

$$y = f(x + a), \quad (139)$$

3. in der $+y$ -Richtung um das Stück b verschoben wird (Abb. 36):

$$y - b = f(x), \tag{140}$$

4. in der $-y$ -Richtung um das Stück b verschoben wird (Abb. 36):

$$y + b = f(x), \tag{141}$$

5. wenn die Ordinaten n mal größer werden sollen (Abb. 37):

$$y = n f(x), \tag{142}$$

6. wenn die Ordinaten auf den n . Teil verkleinert werden:

$$n \cdot y = f(x), \tag{143}$$

7. wenn die Abszissen n mal länger erscheinen sollen:

$$y = f\left(\frac{x}{n}\right), \tag{144}$$

8. wenn die Abszissen n mal kürzer erscheinen sollen (Abb. 38):

$$y = f(nx). \tag{145}$$

9. Wird endlich die vorgelegte Kurve um den Winkel α gegen die $+x$ -Achse gedreht, so lautet die Gleichung der gedrehten Kurve:

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = f(y \sin \alpha + x \cos \alpha), \tag{146}$$

d. h. statt y ist $y \cos \alpha - x \sin \alpha$, statt $f(x)$ ist $f(y \sin \alpha + x \cos \alpha)$ zu setzen.

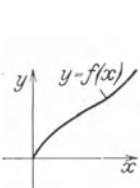


Abb. 34.

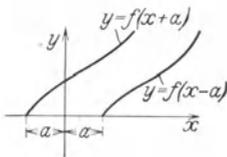


Abb. 35.

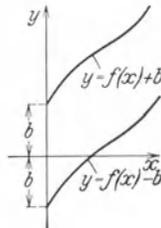


Abb. 36.

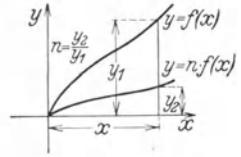


Abb. 37.

Beispiele: 1. Die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ soll um 45° gedreht werden; alsdann wird wegen

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ aus } y^2 = x^2 - a:$$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - a^2;$$

$$\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} - a^2; \text{ hieraus } xy = \frac{a^2}{2} = c. \text{ [Vgl. Formel (135)!]}$$

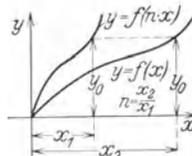


Abb. 38.

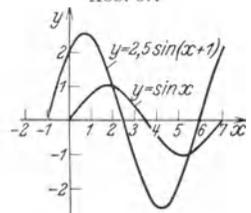


Abb. 39.

2. Die Parabel $y = x^2$ werde in Richtung der x -Achse um das Stück a , in Richtung der y -Achse um das Stück b verschoben. Folglich lautet die Gleichung der verschobenen Parabel $(y - b) = (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$; $y = x^2 - 2ax + a^2 + b$ oder, wenn man $-2a = A$ und $a^2 + b = B$ setzt: $y = x^2 + Ax + B$.

3. Wie läßt sich die Kurve $y = 2,5 \sin(x + 1)$ aus der einfachen Sinuslinie $y = \sin x$ ableiten?

a) $x + 1$ bedeutet, daß die neue Kurve um den Betrag 1 ($= 57,3^\circ$) in Richtung der $-x$ -Achse zu verschieben ist.

b) Der Faktor 2,5 bedeutet, daß die Ordinaten der neuen Kurve überall 2,5mal so lang sind wie die der einfachen Sinuslinie (Abb. 39).

d) Wenn nun die Gleichung für eine gegebene krumme Linie aufgestellt werden soll, so tritt insofern eine Schwierigkeit auf, als Kurven von ganz verschiedenem

mathematischen Charakter wenigstens über kleinere Intervalle, wie sie für technische Zwecke meist nur in Frage kommen, so sehr einander ähnlich sind, daß es unmöglich ist, von dem Kurvenstück zu sagen, ob es etwa von einer quadratischen, kubischen oder transzendenten Funktion her stammt. Hinzu kommt, daß die zu analysierenden Kurven oft nur „ausgleichende Kurven“ sind, die man durch eine auf Grund von Messungen gefundene und in ein Koordinatenkreuz eingetragene Punktreihe gelegt hat.

Wo theoretische Anhaltspunkte für den wahren Charakter der zu untersuchenden Kurven fehlen, bleibt somit nichts übrig, als sich für irgendeinen bestimmten Zusammenhang der Variablen zu entscheiden. Die wichtigsten theoretischen Zusammenhänge, auf die man technische Kurven zu untersuchen hat und deren Betrachtung in der Mehrzahl der Fälle genügt, sind folgende:

1. $y = ax + b$: einfache Gerade!
2. $y = ax^2 + bx + c$: gemeine Parabel!
3. $y = a \sqrt[n]{x+b}$ oder $y = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$: Parabel höherer Ordnung!
4. $y = \frac{ax+b}{x+c}$ oder $y = \frac{a}{x+b}$: Hyperbel!
5. $y = a \cdot e^{bx}$: e -Funktion!

Es ist selbstverständlich, daß bei der Berechnung von 2 Koeffizienten 2 Punkt-paare, von 3 Koeffizienten 3 Punkt-paare usw. aus dem Zahlenmaterial bzw. der Kurve herausgegriffen werden müssen.

Besonders wichtig für die Technik sind die hyperbolischen und exponentiellen Zusammenhänge — nicht etwa, weil sie tatsächlich am häufigsten vorkämen, sondern weil sie einseitig gekrümmte Kurven durch eine Mindestzahl von Koeffizienten innerhalb weiter Intervalle darzustellen gestatten und die sich ergebenden Formeln verhältnismäßig einfach im Aufbau sind.

Trägt man irgendwelche — theoretisch oder empirisch gefundene — Zusammenhänge, die im r.K.S. eine Kurve ergeben, in ein einfach oder doppelt logarithmisches K.S. ein, so wird darin die Kurve oft wesentlich gestreckter erscheinen, so daß sie unter Umständen sogar durch eine Gerade ersetzt werden kann. Im letzteren Falle ist es dann einfach, nach der im vorigen Abschnitt angegebenen Vorschrift die Kurvengleichung abzuleiten. Ein Beispiel möge das Gesagte erläutern:

Die nachstehend zusammengestellten Wertpaare sind gemessen worden.

Messung-Nr.	$\frac{l}{d}$	k
1	0,1	2,1
2	0,3	3,7
3	0,5	4,7
4	0,7	5,6
5	1,0	6,7
6	1,5	8,2

Die Beziehung $k = f\left(\frac{l}{d}\right)$ ist gesucht.

Die graphische Darstellung ergibt eine parabelähnliche Kurve. Man könnte daher der Kurvengleichung die Form geben: $k = a + b\left(\frac{l}{d}\right) + c\left(\frac{l}{d}\right)^2$. — Die Auflösung der drei Gleichungen:

$$(1) \quad 2,1 = a + 0,1b + 0,01c; \quad (4) \quad 5,6 = a + 0,7b + 0,49c; \\ (6) \quad 8,2 = a + 1,5b + 2,25c$$

gibt als Kurvengleichung

$$k = 1,39 + 7,3\left(\frac{l}{d}\right) - 1,85\left(\frac{l}{d}\right)^2.$$

Abgesehen von der wenig gefälligen Form dieser Gleichung weichen die hier-nach berechneten k -Werte für $\frac{l}{d} = 0,3$ bzw. $= 0,5$ und $1,0$ von den beobachteten so stark ab, daß es zweckmäßig erscheint, nach einer anderen Beziehung zu suchen. Trägt man die gegebenen Werte in ein r.K.S. mit logarithmisch geteilten Achsen

ein, so liegen sämtliche Punkte mit hinreichender Genauigkeit auf einer Geraden, deren Gleichung sich z. B. aus den Punkten (2) und (5) wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \lg 3,7 &= a \lg 0,3 + b \\ \lg 6,7 &= a \lg 1,0 + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,568 &= -0,523a + b \\ 0,826 &= 0 + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,258 &= 0,523a \\ a &= 0,493 \\ b &= 0,826 \end{aligned}$$

daher

$$\lg k = 0,493 \lg \left(\frac{l}{d}\right) + 0,826;$$

$$\lg \left[k \left(\frac{l}{d}\right)^{-0,493} \right] = 0,826;$$

$$k \left(\frac{l}{d}\right)^{-0,493} = 6,7;$$

$$k = 6,7 \left(\frac{l}{d}\right)^{0,493} \approx 6,7 \sqrt[l]{d}.$$

Auch ohne die Darstellung im doppelt logarithmischen r.K.S. wäre man zum gleichen Ergebnis gekommen, wenn man von vornherein zwischen k und $\left(\frac{l}{d}\right)$ einen Zusammenhang von der Form $k = a \left(\frac{l}{d}\right)^b$ der Berechnung zugrunde gelegt hätte; das Gleichungspaar $3,7 = a \cdot 0,3$ und $6,7 = a \cdot 1,0$ führt ebenfalls zu $a = 6,7$; $b = 0,493 \approx 0,5$. Die auf Grund der Gleichung $k = 6,7 \sqrt[l]{d}$ berechneten k -Werte zeigen befriedigende Übereinstimmung mit den gemessenen.

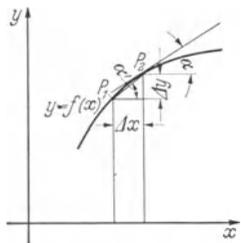


Abb. 40.

26. Definition und Berechnung des Differentialquotienten.

a) Die Differentialrechnung stellt sich als erste Aufgabe, die Frage zu beantworten: Um welchen Betrag dy ändert sich bei der gegebenen Beziehung $y = f(x)$ der Funktionswert y , wenn die Abszisse x sich um den bestimmten Betrag dx ändert.

Hat man zwei dicht benachbarte Kurvenpunkte (Abb. 40), so läßt sich aus den Koordinatenunterschieden Δy und Δx leicht der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und aus ihm die Neigung der Sehne berechnen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha' = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

Man kann sich nun vorstellen, daß die Punkte immer näher zusammenrücken und schließlich so nahe beieinander liegen, daß die Differenzen Δy und Δx unendlich klein werden. Diese äußerst kleinen Differenzen, die man als Grenzwerte (= limes) der Differenzen Δy und Δx bezeichnet, nennt man Differentiale. Es ist

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta y = dy; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = dx; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (148)$$

b) Die Differentialquotienten sind wieder Funktionen des Argumentes x ; man schreibt daher in Anlehnung an die Schreibweise $y = f(x)$ auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = y'$$

und nennt $y' = f'(x)$ die erste Ableitung der Funktion $y = f(x)$. Aus der 1. Ableitung findet man durch nochmalige Differentiation die 2. Ableitung, daraus wieder die 3. Ableitung usw.:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = y'', \quad (149)$$

$$\frac{df''(x)}{dx} = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3 y}{dx^3} = f'''(x) = y''' \text{ usw.} \quad (150)$$

c) Für die Berechnung der Differentialquotienten bestehen mehrere Möglichkeiten. Meist führt die Bildung des Grenzwertes der Differenz Δy und Division durch dx zum Ziele. Hat man beispielsweise $y = x^n$, so ist $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$; $\Delta y = x^n + n \cdot \Delta x \cdot x^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \Delta x^2 \cdot x^{n-2} + \dots - x^n$; geht man zur Grenze $\rightarrow 0$ über, so darf man die höheren Glieder vernachlässigen, und man erhält

$$\lim \Delta y = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot dx - x^n = n \cdot x^{n-1} \cdot dx;$$

somit
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}. \quad (151)$$

Aus der nebenstehenden Abb. 41 läßt sich der Differentialquotient für $y = \sin x$ unmittelbar ablesen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \sin x}{b} = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x. \quad (152)$$

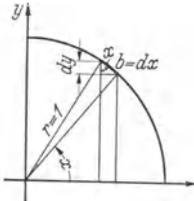


Abb. 41.

d) Die für das praktische Rechnen wichtigsten Differentialquotienten sind:

$$\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1} \quad \frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{x} = \lg e \frac{M}{x} \quad (156) \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (160)$$

$$\frac{da^x}{dx} = a \cdot \ln a \quad (153) \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad (157) \quad \frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (161)$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \quad (154) \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \quad (158) \quad \frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (162)$$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} \quad (155) \quad d \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (159) \quad \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad (163)$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (164)$$

e) Die Ableitungen von zusammengesetzten Funktionen lassen sich aus denen der Teilfunktionen nach folgenden Regeln finden; es sei $u = f_1(x)$; $v = f_2(x)$; $a = \text{const.}$

$$y = u + v; \quad y' = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = u' + v' \quad (165)$$

$$y = u \cdot v; \quad y' = v \cdot u' + u \cdot v' \quad (166)$$

$$y = \frac{u}{v}; \quad y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2} \quad (167)$$

$$y = a; \quad y' = 0 \quad (168)$$

$$y = a \cdot u; \quad y' = a \cdot u' \quad (169)$$

$$y = f(u); \quad y' = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (170)$$

Beispiele: 1. $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} = 3 \cdot x^{\frac{2}{3}}$; $y' = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

2. $y = \sin^2 x = u^2$; $u = \sin x$; $\frac{dy}{du} = 2u$; $\frac{du}{dx} = \cos x$; $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot u \cdot \cos x$
 $= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

oder auch nach (166): $y = \sin x \cdot \sin x = u \cdot v$; $y' = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \cos x = \sin 2x$.

$$3. y = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} = \frac{u}{v}; \quad y' = \frac{(a^2 + x^2)(-2x) - (a^2 - x^2)(2x)}{(a^2 + x^2)^2}$$

$$= \frac{-2a^2x - 2x^3 - 2a^2x + 2x^3}{(a^2 + x^2)^2} = -\frac{4a^2x}{(a^2 + x^2)^2}.$$

f) Betrachtet man in der Funktion $z = f(x, y)$ zunächst nur die eine der Variablen — etwa x — als veränderlich, die andere aber als konstant, so heißt die Ableitung nach dieser Veränderlichen die partielle Ableitung nach x ; man schreibt sie $\frac{\partial z}{\partial x}$; entsprechend schreibt man die partielle Ableitung der Funktion z nach y $\frac{\partial z}{\partial y}$; das sog. totale Differential dz berechnet sich bei zwei Variablen aus den partiellen Ableitungen zu

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy. \quad (171)$$

Beispiel: $z = x^y$; $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$; $dz = yx^{y-1} \cdot dx + x^y \ln x \cdot dy$.

Für $f(x, y) = 0$ ist also $z = 0$; somit $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$, hieraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad (172)$$

als Differentialquotient der unentwickelten Funktion $f(x, y) = 0$.

27. Anwendung der Differentialrechnung auf das numerische Rechnen. a) Die Tatsache, daß $y' = \operatorname{tg} \alpha$, d. h. daß der Differentialquotient die Richtung der Tangente in dem Punkte $P(x, y)$ der Funktion $y = f(x)$ zu berechnen gestattet, gibt die Möglichkeit, höchste und tiefste Punkte (= Maxima und Minima) von Kurven, ferner allerlei Berührungsgrößen, wie Länge von Tangenten, Subtangenten usw., ferner die Krümmung von Kurven überhaupt rechnerisch zu bestimmen.

Um festzustellen, wo eine gegebene Kurve $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum hat, setze man $y' = 0$; die hieraus berechneten Werte für x und y geben die Koordinaten der höchsten oder tiefsten Punkte der betr. Kurve; es handelt sich um einen höchsten Punkt, wenn für das betr. x die zweite Ableitung, also $y'' < 0$; um einen tiefsten Punkt, wenn $y'' > 0$.

Beispiel: Für die Parabel $y = ax - x^2$ wird $y' = a - 2x = 0$; hieraus $x = \frac{a}{2}$ und $y = \frac{a^2}{4}$ als Koordinaten des gesuchten ausgezeichneten Punktes.

Wegen $y'' = -2$ handelt es sich um einen höchsten Punkt. (Zeichnung!)

b) Zwei Kurven y_1 und y_2 berühren sich in einem Punkte $P(x, y)$, wenn in diesem Punkte die ersten Ableitungen gleich sind: $y_1' = y_2'$; man nennt solche Berührung von erster Ordnung; sind außerdem auch noch die zweiten Ableitungen gleich, dann spricht man von einer Berührung zweiter Ordnung. Der Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, der eine Kurve $f(x)$ in einem Punkte nach zweiter Ordnung berührt, heißt Krümmungskreis. Sein Radius r gilt als Maß für die Krümmung der berührten Kurve an der betrachteten Stelle. Für die Berechnung der Bestimmungsgrößen a , b und r des Krümmungskreises dienen folgende Gleichungen:

$$a = x - \frac{1 + (y')^2}{y''} \cdot y'; \quad b = y - \frac{1 + (y')^2}{y''}; \quad r = \pm \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y''}. \quad (173)$$

Beispiel: Wie lautet die Gleichung des Krümmungskreises für den Punkt $P_{(1,1)}$ der Hyperbel $xy = 1$? Aus $y = \frac{1}{x}$ folgt $y' = -\frac{1}{x^2}$; $y'' = +\frac{2}{x^3}$; somit wird bei Einführung der Koordinaten für P

$$a = \frac{3x^4 + 1}{2x^3} = 2; \quad b = \frac{x^4 + 3}{2x} = 2; \quad r = \pm \frac{\sqrt{(x^4 + 1)^3}}{2x^3} = \sqrt{2}; \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2.$$

e) In der Gleichung $dy = dx \cdot f'(x)$

können die Differentiale dx und dy auch als Fehler aufgefaßt werden; die Differentialrechnung ist daher grundlegend für die Fehler- und Fehlerausgleichsrechnung.

Beispiel: Durch Messung der Gegenstandsweite a und der Bildweite b bestimmt man die Brennweite f einer Konvexlinse zu $f = \frac{ab}{a+b}$; a sei um da , b um db unrichtig gemessen; wie wirkt sich der Fehler auf f aus? Es ist nach Gleichung (171)

$$df = \frac{(a+b)b - ab}{(a+b)^2} da + \frac{(a+b)a - ab}{(a+b)^2} db = \frac{b^2}{(a+b)^2} da + \frac{a^2}{(a+b)^2} db = f^2 \left(\frac{da}{a^2} + \frac{db}{b^2} \right).$$

d) Eine weitere wichtige Anwendung der Differentialrechnung ist die Verwandlung von Funktionen in konvergente Reihen. Solche Reihen geben oft die Möglichkeit, bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung, äußerst bequeme innerhalb beliebiger Grenzen genaue Rechenformeln aufzustellen. Die wichtigsten allgemeinen Reihen sind

1. die MAC LAURINSche Reihe:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) \dots, \quad (174)$$

2. die TAYLORSche Reihe für eine Veränderliche:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots, \quad (175)$$

3. die TAYLORSche Reihe für zwei Veränderliche:

$$f(x+h; y+k) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right)^{[2]*} + \dots. \quad (176)$$

Für Näherungsrechnungen genügen oft die beiden ersten Glieder der Gleichungen (174) und (175); bei (176) die drei ersten Glieder. Die wichtigsten aus den angeführten abgeleiteten Reihen finden sich im Abschnitt 21.

III. Anwendung des Zahlenrechnens auf besondere Probleme der Werkstattpraxis.

A. Technische Rechnungen allgemeiner Art.

28. Maßstäbe. a) Wenn eine ebene Figur in natürlicher Größe oder in allen ihren Teilen gleichmäßig verjüngt bzw. vergrößert dargestellt wird, so sagt man, sie sei maßstäblich abgebildet. Den Grad der Vergrößerung oder Verjüngung kann man aus dem sog. Maßstab entnehmen, der allgemein in der Form „Maßstab $1:\lambda$ “ angegeben wird, wobei $\lambda > 1$ bei verjüngten, $\lambda < 1$ bei vergrößerten Maßstäben. Vergrößerte Maßstäbe schreibt man auch gelegentlich Maßstab $\lambda:1$. Der „Maßstab“ gibt stets das Verhältnis der gezeichneten Länge l zur Länge in Wirklichkeit L , so daß für alle Maßstäbe die Proportion: $\frac{l}{L} = \frac{1}{\lambda}$ gilt. (177)

b) Die für technische Zeichnungen genormten Maßstäbe sind $5:1$, $2,5:1$, $1:1$; $1:2,5$, $1:5$, $1:10$, $1:50$, $1:100$.

* Die [2] deutet an, daß innerhalb der Klammern die zweiten Ableitungen zu setzen sind.

c) Auch andere Größen als nur Längen kann man zeichnerisch darstellen, z. B. Kräfte, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen usw., wenn man der Zeichnung einen besonderen „Kräftemaßstab“, „Geschwindigkeitsmaßstab“ usw. zugrunde legt.

29. Mengenrechnung. a) Das Gewicht ist proportional der Menge des Stoffes, wobei unter „Menge“ das Volumen oder die Anzahl der einzelnen — gleichartigen — Stücke zu verstehen ist. Im letzten Falle ist der Proportionalitätsfaktor durch eine Vergleichsmessung zu bestimmen.

Beispiele: 1. In einem Kasten befinden sich 6,27 kg Schrauben, von denen 89 Stück 50 g wiegen. Wieviel Schrauben sind vorhanden? Es sind $x = \frac{50}{1000} \cdot 6270 = 11150$. (Es braucht nicht genauer gerechnet zu werden, weil aus den Angaben zu schließen ist, daß das Gewicht auf etwa 5 g unsicher ist. Da eine Schraube $\sim 0,5$ g wiegt, entspricht dies einer Unsicherheit in der Zahl von 10 Stück.)

2. In einem Kasten befinden sich 2,92 kg gleichartige Muttern, von denen 100 Stück 148,3 g wiegen. Wieviel Muttern sind vorhanden? Es sind $x = \frac{2920}{1,483} = 1970$.

b) Die geleistete Arbeit ist proportional der aufgewendeten Zeit und der Zahl der damit beschäftigten Arbeiter; desgleichen der aufzuwendende Arbeitslohn. Die zur Leistung einer bestimmten Arbeit aufzuwendende Zeit ist aber umgekehrt proportional der Arbeiterzahl.

Beispiel: Durch eine Röhre vom Durchmesser d_1 kann ein Behälter vom Volumen V in t_1 sek mit Wasser gefüllt werden, durch eine andere Röhre vom Durchmesser d_2 sind dazu t_2 sek erforderlich. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn beide Röhren gleichzeitig in Betrieb sind? Die Wassergeschwindigkeit v in beiden Röhren sei die gleiche.

$$\text{Es ist} \quad V = \frac{v \cdot d_1^2 \pi}{4} t_1 = \frac{v \cdot d_2^2 \pi}{4} t_2; \quad \text{hieraus} \quad t_1 = \frac{d_2^2}{d_1^2} t_2$$

Durch die 1. Röhre wird in 1 sek $\frac{V}{t_1}$ des Behältnisses gefüllt.

Durch die 2. Röhre wird in 1 sek $\frac{V}{t_2}$ des Behältnisses gefüllt.

Durch beide Röhren zusammen wird in 1 sek

$$\frac{V}{t_1} + \frac{V}{t_2} = V \frac{t_1 + t_2}{t_1 \cdot t_2} = \frac{V}{t_1 + t_2} \text{ gefüllt.}$$

Zur Auffüllung des Volumens V sind also $\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$ Sekunden erforderlich.

30. Prozent- und Zinsrechnung. a) Es ist 1% von $b = \frac{b}{100}$; p % von $b = \frac{pb}{100}$. Setzt man diesen Wert gleich a , so erhält man die Grundformel für die Prozentrechnung

$$a = p \frac{b}{100}. \quad (178)$$

Man nennt: a die Prozente von b , b die Bezugszahl, p den Prozentsatz oder die Prozentzahl. Wesentlich bei allen Prozentrechnungen ist, daß Klarheit über die Bezugszahl besteht.

Beispiele: 1. Wieviel Prozent von 15,8 sind 3,2? $p = \frac{100a}{b} = \frac{100 \cdot 3,2}{15,8} = 20,2\%$.

2. 6,7% von 17,8 = ? $a = \frac{bp}{100} = \frac{17,8 \cdot 6,7}{100} = 1,19$.

3. Um wieviel Prozent ist 62 größer als 52,5? 62 ist um 9,5 größer als 52,5; 9,5 sind $p = \frac{100 \cdot 9,5}{52,5} = 18\%$ von 52,5.

4. Um wieviel Prozent ist 52,5 kleiner als 62? 52,5 ist um 9,5 kleiner als 62; 9,5 sind $p = \frac{100 \cdot 9,5}{62} = 15,3\%$ von 62.

Man beachte den Einfluß der verschiedenen Bezugswahlen!

5. Unter p -proz. Alkohol versteht man eine Mischung von Alkohol und Wasser, deren Alkoholgehalt $p\%$ vom Gesamtvolumen ausmacht. Es handelt sich hier also um Volumprozent.

Wieviel Wasser muß man 96proz. Alkohol zusetzen, um 40proz. zu erhalten?

96proz. Alkohol	enthält	96 cm ³ Alkohol	auf	100 cm ³ Mischung,
40proz. „	„	40 cm ³ „	„	100 cm ³ „
40proz. „	„	96 cm ³ „	„	240 cm ³ „

d. h. je 100 cm³ 96proz. Alkohol müssen 140 cm³ Wasser zugefügt werden, um 40proz. Alkohol zu erhalten.

6. Unter p -haltigem Silber versteht man eine Legierung, die zu $p\%$ des Gesamtgewichts aus Silber besteht. Wievielhaltig wird eine Mischung aus G_1 Gramm p_1 -haltigem und G_2 Gramm p_2 -haltigem Silber?

Die Silberhaltigkeit p berechnet sich auf Grund der Proportion $\frac{\text{Silbergehalt } S}{\text{Gesamtgewicht } G} = \frac{p}{1000}$,

daher $p = 1000 \frac{S}{G}$.

Es enthalten	G_1	Gramm Legierung	$\frac{p_1}{1000} \cdot G_1$	Gramm Silber
„	„	G_2	„	„
			$\frac{p_2}{1000} \cdot G_2$	„

Es enthalten $G_1 + G_2$ Gramm Legierung $\frac{p_1 G_1 + p_2 G_2}{1000}$ Gramm Silber

daher $p = 1000 \frac{S}{G} = \frac{p_1 G_1 + p_2 G_2}{G_1 + G_2}$.

b) Unter Zinsen versteht man die Vergütung, die ein Schuldner seinem Gläubiger für ein gewährtes Darlehn zu zahlen hat. Sie sind

- proportional dem vereinbarten Zinsfuß p ,
- „ dem geliehenen Kapital K ,
- „ der Zeit t .

Der Zinsfuß p wird in $\%$ ausgedrückt und gewöhnlich auf das Jahr als Einheit bezogen (pro anno = p. a.). Eine in Monaten oder Tagen gegebene Zeit muß also in Jahre umgerechnet werden; man rechnet dabei das Jahr zu 12 Monaten je 30 Tage. Der Tag der Aus- und der Rückzahlung wird bei der Zinsberechnung mitgerechnet.

Die Zinsen berechnen sich nach dem Gesagten nach der Gleichung

$$z = K \cdot t \cdot \frac{p}{100}. \tag{179}$$

Beispiele: 188 RM. bringen bei 8% p. a. in 6 Wochen wieviel Zinsen?

$$z = 188 \cdot \frac{42}{360} \cdot \frac{8}{100} = 1,76 \text{ RM.}$$

2700 RM. sind vom 15. Januar bis 28. September mit 7,5% p. a. zu verzinsen; das macht

$$2700 \frac{(8 \cdot 30 + 14)}{360} \cdot \frac{7,5}{100} = 143,20 \text{ RM.}$$

(Beim Rechnen mit Geld und Geldeswert sind abgekürzte Rechenverfahren nicht zulässig!)

d) Werden die fälligen Zinsen nicht ausgezahlt, sondern jeweils zum Kapital geschlagen, so liegt eine Aufgabe der Zinseszinsrechnung vor.

Setzt man $1 + \frac{p}{100} = q$, (180)

wobei man q den Zinsfaktor nennt, so gibt die Zinseszinsformel $b = a \cdot q^n$ (181) den Endwert b an, auf den das Kapital a in n Jahren durch Zinseszins anwächst.

Verzehrt oder vermindert man ein Kapital a am Ende jeden Jahres um den Betrag r , so ist nach n Jahren ein Kapital vorhanden:

$$b = aq^n \pm r \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (182)$$

Werden die Zahlungen am Anfang des Jahres geleistet, so ist statt r der Wert rq einzuführen.

Ist die Zahlungsperiode nicht das Jahr, sondern der Monat, so ist an Stelle von q mit $\sqrt[12]{q}$ zu rechnen.

Beispiele: In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 4 bzw. 6 bzw. 8 bzw. 10 % Jahreszinsen? Aus $2a = a \cdot q^n$ folgt $\lg 2 = n \lg q$, hieraus $n = \frac{\lg 2}{\lg q} = \frac{0,301}{\lg q}$. Im einzelnen:

q	1,04	1,06	1,08	1,10
$\lg q$	0,0170	0,0253	0,0334	0,0414
n	17,7	11,9	9,0	7,3 Jahre.

e) Jemand bringt von seinem 20. Lebensjahr ab jeden Monat 10,00 RM. auf die Sparkasse. Über welche Summe kann er nach 25 Jahren verfügen, wenn die Sparkasse 8 % Zinsen p. a. gewährt?

$$b = r \frac{(\sqrt[12]{q})^n - 1}{(\sqrt[12]{q}) - 1}; \quad r = 10,00; \quad q = 1,08; \quad \sqrt[12]{1,08} = 1,00643;$$

$$n = 25 \cdot 12 = 300; \quad b = 10 \frac{1,00643^{300} - 1}{0,00643} = \frac{5,847}{0,00643} = 9080 \text{ RM. (überschläglich).}$$

Man beachte den außerordentlichen Zinsgewinn von mehr als 6000 RM.!

31. Elemente der Fehlerrechnung. a) Es ist zunächst zu unterscheiden zwischen wahren Fehlern ε und scheinbaren Fehlern v . Der wahre Fehler ist definiert durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{wahrer Fehler} &= \text{Wahrheit} - \text{gemessenem Wert} \\ \varepsilon &= W - J. \end{aligned} \quad (183)$$

Diese Definition weist eine Schwierigkeit auf: wir kennen ja den wahren Wert W gar nicht, sondern wollen ihn erst z. B. durch eine Messung bestimmen.

In den weitaus meisten Fällen tritt daher an Stelle des wahren Wertes W ein irgendwie berechneter, substituierter Wert, z. B. das arithmetische Mittel aus einer Reihe von Messungen oder der nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefundene wahrscheinlichste Wert oder dergleichen. Man nennt diesen Wert „Sollwert“ S .

Die Differenzen

$$v = S - J \quad (184)$$

nennt man „scheinbare Fehler“, „Abweichungen“, „Verbesserungen“ usw.

Beispiel: Mit Hilfe eines Rechenschiebers fand man $a \cdot b = 76,08 \cdot 12,48 = 951$; die unmittelbare Ausrechnung liefert genauer 949,5; folglich ist die Differenz $949,5 - 951 = -1,5$ ein wahrer Fehler des Rechenschieberresultates.

b) Die Ursachen der Fehler liegen in der Unzulänglichkeit teils der Geräte, teils unserer Sinne.

Wir unterscheiden demgemäß a) Gerätefehler, b) persönliche Fehler.

Zu den Gerätefehlern gehören beispielsweise Teilungsgenauigkeiten der Ablesekalen, elastische Nachwirkungen bei Federn, während die persönlichen Fehler sich vorwiegend als Schätzungsfehler auswirken.

Auch außerhalb der Instrumente wie der Person des Messenden liegende Einflüsse beeinträchtigen häufig die Meßgenauigkeit: besonders unkontrollierbare

Einflüsse der Temperatur und — bei elektrischen Messungen — magnetische oder statische Felder usw.

Die verschiedenen Fehlereinflüsse wirken teils zusammen, teils heben sie sich auf — bei jeder Messung jedoch in verschiedenem Maße und in verschiedener Weise. Je nachdem, wie sie sich letzten Endes auswirken, unterscheidet man:

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| 1. grobe Fehler, | 3. systematische Fehler, |
| 2. konstante Fehler, | 4. zufällige Fehler. |

Grobe Fehler können durch entsprechende Sorgfalt, besonders durch hinreichende Messungskontrollen (Doppelmessungen) erkannt und beseitigt werden.

Konstante Fehler, d. h. solche, mit denen jede Messung, die mit den gleichen Geräten unter gleichen Beobachtungsbedingungen ausgeführt wird, behaftet ist — zu ihnen gehört beispielsweise der Nullpunktfehler bei Mikrometerschrauben — können ebenfalls durch entsprechende Untersuchungen erkannt und in Rechnung gestellt werden.

Systematische Fehler sind solche, die in irgendeiner Abhängigkeit zu der gemessenen Größe stehen, wie z. B. die Längenfehler, die sich ergeben, wenn man eine Strecke mit zu langem oder zu kurzem Maßstab mißt. Auch sie können durch geeignete Messungsverfahren (z. B. durch Messung mit verschiedenen Instrumenten) erkannt und ihrer Größe nach bestimmt werden.

Zufällige Fehler nennt man solche, deren Größe und Richtung von allerlei unkontrollierbaren Zufälligkeiten abhängt, ganz gleich, ob sie durch das Instrument, die Person des Beobachters oder äußere Umstände bedingt sind.

Grobe Fehler sind immer, konstante und systematische Fehler meistens vermeidbar; stets sind sie jedoch — geeignete Messungsverfahren vorausgesetzt — wenigstens erkennbar.

Zufällige Fehler sind — immer wieder sachgemäße Anlage der Messung vorausgesetzt — meistens unvermeidlich, und in ihren wahren Größen nicht angebbar; höchstens ihre Ursachen können im Einzelfalle vermutet oder erkannt werden.

c) Aufgabe der Fehlertheorie ist es, die Eigenschaften der zufälligen Fehler bezüglich ihrer Größe und Häufigkeit usw. zu studieren und so die Möglichkeit zu geben, im Einzelfalle begründete Angaben über die mutmaßliche Größe der Fehler bzw. der Unsicherheit des mitgeteilten Resultats zu machen.

Die Angabe $17,3 \pm 0,5$ bedeutet nun, daß der mutmaßlich richtige Wert 17,3 ist, daß aber der wahre Wert möglicherweise bis zu 0,5 Einheiten größer oder kleiner als 17,3 sein kann. Man nennt die Angabe $\pm 0,5$ die Fehlergrenzen. Das Wort „Fehler“ hat eben eine ziemlich universelle Bedeutung und steht oft für „Unsicherheit“, „Schwankung“, „Abweichung“ oder „Verbesserung“. Für die Folge ist dies wohl zu beachten.

d) Führt man ein und dieselbe Messung mehrmals aus, so wird man — bei hinreichend weit getriebener Meßgenauigkeit — stets voneinander abweichende Ergebnisse erhalten. Es liegt in diesem Falle nahe, das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen als den vermutlich richtigen Wert anzusehen.

Der große Göttinger Mathematiker C. F. GAUSS († 1855) hat nachgewiesen, daß unter der Voraussetzung, daß die Meßfehler ausschließlich zufällige Fehler sind, und wenn eine genügend große Zahl von Beobachtungen vorliegt, das arithmetische Mittel auch der wahrscheinlichste Wert der gemessenen Größe ist. Bezeichnet man die Beobachtungen mit L_1, L_2, \dots, L_n , den Mittelwert daraus mit x , und ist die Gesamtzahl der Beobachtungen n , so gilt also

$$x = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n}{n} = \frac{\sum (L)}{n} \quad \text{oder in GAUSSScher Schreibweise: } x = \frac{[L]}{n}.$$

Der Wert x ist also jetzt der Sollwert unserer Beobachtungen; die scheinbaren Fehler v berechnen sich damit im einzelnen zu $x - L_1 = v_1$, $x - L_2 = v_2$ usw. Unter dem sog. durchschnittlichen Fehler d des Mittelwertes x versteht man das arithmetische Mittel aus allen n Abweichungen, ohne Berücksichtigung von deren Vorzeichen, also in GAUSS'scher Schreibweise: $d = \frac{[v]}{n}$. (185)

GAUSS ist nun in der Lage, die Unsicherheit nicht nur des Mittelwertes, sondern auch der Einzelmessung anzugeben, und zwar mit Hilfe des von ihm in die Wissenschaft eingeführten mittleren Fehlers (m.F.). Es ist nach GAUSS:

$$\text{der m.F. der Einzelmessung: } m_L = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}; \quad (186)$$

$$\text{der m.F. des Mittels: } m_x = \pm \frac{m_L}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \quad (187)$$

Beispiel: 1.

Ergebnisse:

Gemessen		Berechnet	
L mm	v	vv	
0,437	-0,001	0,000001	
0,441	-0,005	25	
0,432	+0,004	16	
0,434	+0,002	4	
$x = 0,436$	$[v] = 0$ $[v] = 0,012$	$[vv] = 0,000046$	

$[v] = 0$ (= Kontrolle für die richtige Mittelbildung!)

$$[v] = 0,012; \text{ daher } d = \pm \frac{0,012}{4} = \pm 0,003 \text{ mm}$$

$[vv] = 0,000046$; daher:

$$m_L = \pm \sqrt{\frac{0,000046}{3}} = \pm 0,004 \text{ mm};$$

$$m_x = \pm \frac{0,004}{\sqrt{4}} = \pm 0,002 \text{ mm}.$$

Endergebnis also: $x = 0,436 \pm 0,002$ mm; die Einzelmessung ist nun $\pm 0,004$ mm unsicher (nicht etwa fehlerhaft!).

2. Mit einer Mikrometerschraube mißt man den Abstand der parallelen Flächen eines Parallelendmaßes wie folgt: 33,765, 33,760, 33,760, 33,768, 33,765, 33,762. Den Durchmesser einer Welle mißt man mit demselben Gerät an verschiedenen Stellen wie folgt: 38,530, 38,500, 38,555, 38,540, 38,515, 38,575.

Was folgt aus den Messungen?

Für die erste Messung erhält man $x_1 = 33,763 \pm 0,001$; die Einzelmessung ist auf $\pm 0,003$ mm genau.

Für die zweite Messung erhält man $x_2 = 38,537 \pm 0,011$; die Einzelmessung ist auf $\pm 0,03$ mm sicher.

Die Ursache der verschiedenen Meßgenauigkeit liegt in den gemessenen Stücken: In der ersten Messung treten fast ausschließlich die unvermeidlichen Schätzungs- und Gerätefehler in die Erscheinung, im zweiten Falle werden diese völlig überdeckt durch die Ungenauigkeiten im Durchmesser der Welle. Die Verschiedenheit des Durchmessers an den verschiedenen Stellen beträgt

$$m_d = \sqrt{0,03^2 - 0,003^2} = \pm 0,03 \text{ mm}.$$

e) Zwei Größen L_1 und L_2 , die als arithmetisches Mittel aus einer jeweils verschiedenen Anzahl von Beobachtungen gefunden wurden, haben nicht denselben Wert für die weitere rechnerische Behandlung; sie haben, wie man sagt, verschiedenes Gewicht. Einem Ergebnis, das aus einer größeren Anzahl von Beobachtungen ermittelt wurde, muß man demnach ein größeres Gewicht zusprechen als einem aus weniger Beobachtungen ermittelten. Es ist üblich, das Gewicht p einer Größe der Anzahl n von Beobachtungen, aus der sie bestimmt wurde, proportional zu setzen:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (188)$$

Die Gleichung (187) gestattet nun, statt der Anzahl der Beobachtungen deren mittleren Fehler zur Bestimmung des Gewichtes heranzuziehen. Es ist

$$n_1 = \frac{m_2^2}{m_1^2}; \quad n_2 = \frac{m_1^2}{m_2^2}; \quad \text{somit} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}, \quad (189)$$

d. h. die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler.

Beispiele: Einer Beobachtung mit dem m.F. = $\pm 0,5$ gibt man das Gewicht $p = 1$. Welches Gewicht erhält alsdann eine gleichartige Beobachtung mit dem m.F. $m = \pm 0,4$?

Lösung: $\frac{1}{p_2} = \frac{0,4^2}{0,5^2} = \frac{0,16}{0,25}; \quad p_2 = \frac{25}{16} = 1,56.$

Der m.F. einer Einzelbeobachtung sei $m = \pm 2,2$. Wie oft ist sie zu wiederholen, damit sie das Gewicht 2 erhalte? Der m.F. der Gewichtseinheit sei $\pm 1,8$.

Lösung: $\frac{1}{2} = \frac{m_2^2}{1,8^2}; \quad m_2^2 = 1,62,$

d. h. der m.F. der Beobachtungen muß durch die n -fache Wiederholung auf $\sqrt{1,62}$ herabgedrückt werden. Gleichung (189) liefert dann $n = \frac{2,2^2}{1,62} = 3.$

f) Ist ein durch Rechnung zu bestimmendes Ergebnis x von mehreren Beobachtungen $L_1, L_2 \dots L_n$ derart abhängig, daß die Beziehung besteht:

$$x = f(L_1, L_2 \dots L_n)$$

und sind ferner $m_1, m_2 \dots m_n$ die mittleren Fehler der einzelnen Messungen $L_1, L_2 \dots L_n$, so gilt für den m.F. von x die Gleichung

$$m = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L_1} m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L_2} m_2\right)^2 + \dots} \quad (190)$$

Diese Gleichung heißt „Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz“.

Dieses Gesetz ist für die praktische Fehlerrechnung von großer Bedeutung; die Gleichung gibt auch dann noch brauchbare Ergebnisse, wenn für $L_1, L_2 \dots$ usw. nicht die strengen, sondern nur genäherte Werte eingeführt werden.

Beispiel: Zur Bestimmung des Volumens eines prismatischen Körpers mißt man mittels einer Schublehre die drei Kanten $a = 13,4$ mm, $b = 25,3$ mm, $c = 18,7$ mm je auf $0,05$ mm genau. Wie groß ist das Volumen und dessen mutmaßlicher Fehler?

Es ist das Volumen $V = abc$ und der gesuchte mutmaßliche Fehler

$$m_v = \sqrt{(bcm_a)^2 + (acm_b)^2 + (abm_c)^2} = \sqrt{558 + 157 + 286} = \pm 32 \text{ mm}^3,$$

daher $V = 6340 \pm 32 \text{ mm}^3$. Man erkennt, daß es sinnlos wäre, sämtliche bei der unmittelbaren Ausrechnung erhaltenen Ziffern, also das Ergebnis mit $6339,674 \text{ mm}^3$ mitzuteilen, da bereits die 3. Stelle um 3 Einheiten unsicher ist!

g) Auch ohne Anwendung der Differentialrechnung lassen sich — wenigstens bei algebraischen Zusammenhängen — aus den Einzelfehlern die resultierenden (Maximal-) Fehler überschlagen, wenn man außer mit den absoluten Größen der Fehler noch mit den prozentualen Fehlern rechnet¹.

Es mögen im folgenden die absoluten Fehler mit \mathcal{A} , die prozentualen mit δ bezeichnet werden.

In bezug auf die Angabe $10,3 \pm 0,4$ ist $\mathcal{A} = \pm 0,4$; $\delta = \frac{0,4}{10,3} \cdot 100 \approx 4\%$.

Es gelten nun folgende — algebraisch bzw. mit Hilfe der im Abschn. 22 „Rechnen mit Näherungswerten“ gegebenen Regeln unschwer abzuleitende — Sätze:

¹ Es genügt, mit einstelligen (höchstens zweistelligen) Werten der Fehler zu rechnen!

1. Bei der Addition und Subtraktion fehlerbehafteter Größen addieren sich die absoluten Fehler.

2. Bei der Multiplikation und Division fehlerbehafteter Größen addieren sich die prozentualen Fehler.

Beispiele: Es sei $a = 4,8 \pm 0,2$; $b = 10,7 \pm 0,1$, dann ist $d_a = 0,2$; $\delta_a = 4\%$; $d_b = 0,1$; $\delta_b = 1\%$. Somit wird beispielsweise: $4,8 + 10,7 = 15,5 \pm 0,3$, $10,7 - 4,8 = 5,8 \pm 0,3$. (Die absoluten Fehler sind hier zwar gleich, nicht aber die prozentualen Fehler, denn im ersten Falle ist $\delta = 2\%$, im zweiten aber $\delta = 6\%$.)

$$4,8 \cdot 10,7 = 51,3 \pm 5\% \text{ (vom Ergebnis!)} = 51,3 \pm 2,6.$$

Es genügt daher die Angabe: 51 ± 3 .

$$\frac{10,7}{4,8} = 2,23 \pm 5\% = 2,23 \pm 0,11.$$

Die Fehlerrechnung für das Beispiel zu Formel 190 wäre wie folgt durchzuführen:

$$\delta_a = 0,37\%; \quad \delta_b = 0,2\%; \quad \delta_c = 0,27\%; \quad \text{daher } V = 6340 \pm 0,84\% = 6340 \pm 53.$$

h) Bei meßtechnischen Versuchsreihen ergibt sich häufig die Aufgabe, durch eine (durch Koordinaten gegebene) Punktreihe eine ausgleichende Kurve zu legen. Nach der GAUSSSchen Hypothese gilt als günstigste jene, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen Kurve und Punktreihe ein Minimum wird. Diese These bildet die Grundlage der „Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate“.

B. Das Rechnen mit technischen Formeln.

32. Allgemeines. Technische Formeln sind Gleichungen zwischen irgendwelchen technischen Maßgrößen. Diese technischen Größen werden durch Symbole dargestellt. Die Symbole charakterisieren also nicht nur einen bestimmten technischen Begriff, sondern gleichzeitig auch eine bestimmte Maßgröße oder „Dimension“, so daß z. B. das Maß der links vom Gleichheitszeichen stehenden Größe sich zwangsläufig aus den rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Maßen ergibt. In technischen Gleichungen können zwar die Produkte und Quotienten aus den verschiedenartigsten Maßgrößen gebildet werden; addiert und subtrahiert werden dürfen indes nur Größen derselben Dimension. Tritt beispielsweise in einer abgeleiteten Formel die Summe oder Differenz aus verschiedenen Maßgrößen auf — z. B. die Differenz zwischen einer Kraft und einer Leistung —, so darf daraus ohne weiteres geschlossen werden, daß die Ableitung einen Fehler aufweist.

Beispiel: In der Formel $s = \frac{g}{2} t^2$ wird s in m, t in s gemessen. Welches ist das Maß für g ? Aus $g = \frac{2s}{t^2}$ folgt $[g]^* = \frac{[2s]}{[t^2]} = \text{m/s}^2$. Das Maß für g ist also „Meter durch Sekunden-Quadrat“.

Nur bei sog. „Faustformeln“ sind die Beziehungen zwischen den Dimensionen der beiden Seiten vom Gleichheitszeichen gelegentlich verwischt. Die nicht erkennbaren Dimensionen sind alsdann in den auftretenden Koeffizienten versteckt.

33. Mechanik. a) Die Grundgrößen der technischen Mechanik sind:

- die Kraft P , gemessen in kg,
- der Weg s , gemessen in m (oder einem anderen Längenmaß),
- die Zeit t , gemessen in s (oder einem anderen Zeitmaß).

Hieraus abgeleitete Begriffe sind:

* Die eckigen Klammern lies hier: „Maß für“.

die Geschwindigkeit = $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \quad v = \frac{s}{t} \text{ (m/s);} \quad (191)$

die Arbeit = Kraft \times Weg $A = P s \text{ (mkg);} \quad (192)$

die Leistung = $\frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}; \quad L = \frac{A}{t} = \frac{P s}{t} = P v \text{ (mkg/s).} \quad (193)$

Die technische Einheit der Leistung, also 1 mkg/s, ist sehr klein; man faßt je 75 mkg/s zu einer neuen Einheit, der sog. Pferdestärke (PS), zusammen:

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ mkg/s}, \quad (194)$$

so daß für die in PS ausgedrückte Leistung N sich ergibt $N = \frac{L}{75}$. (195)

Zur Hebung eines Gewichtes G entgegen der Erdschwere ist eine Kraft erforderlich von der Größe

$$P = G \text{ (kg)}. \quad (196)$$

Beispiel: Welche Arbeit ist erforderlich, um einen 8 m langen Träger vom Normalprofil INP 28 12 m hoch zu heben? Welche Leistung ist aufzubringen, wenn der Träger in 20 s gehoben werden soll? (1 m INP 28 wiegt 47,9 kg.)

$$A = P s = G s = 8 \cdot 47,9 \cdot 12 = 4590 \text{ mkg};$$

$$L = \frac{A}{t} = \frac{4590}{20} = 229,5 \text{ mkg/s} = \frac{229,5}{75} = 3,06 \text{ PS}.$$

b) Die in PS ausgedrückte Leistung einer Maschine, bei der ein durchschnittlicher Druck p (kg/cm²) n mal in der Minute auf einen Kolben von d (cm) Durchmesser wirkt und den Kolben in jedem Arbeitsgang um h (cm) bewegt, berechnet sich zu

$$N = \frac{\pi d^2 p h n}{1800000}. \quad (197)$$

Rechnet man statt der Größen d und h mit dem in Litern ausgedrückten Hubvolumen V , so geht die vorige Gleichung über in

$$N = \frac{p \cdot n \cdot V}{450}. \quad (198)$$

Beispiele: Eine Lokomobile hat einen Kolbendurchmesser von 30 cm, einen Hub $h = 40$ cm; sie macht bei einem durchschnittlichen Druck auf den Kolben von $p = 8$ kg/cm² $n = 100$ U/min. Wieviel PS leistet die Maschine? Jede Umdrehung hat 2 Arbeitshübe.

Berechnung: $N = 2 \frac{8 \cdot 100 \cdot 30^2 \pi \cdot 40}{4 \cdot 450000} = 2 \frac{8 \cdot 9 \cdot \pi}{4,5} = 32 \cdot \pi \approx 100 \text{ PS}.$

Ein Vierzylinder-Viertaktmotor hat ein Hubvolumen $V_0 = 1500$ cm³ und leistet bei $n_0 = 200$ U/min $N_0 = 24$ PS. Welches ist der durchschnittliche Kolbendruck?

Jeder Zylinder hat ein Hubvolumen $V = \frac{V_0}{4} = 375$ cm³; er leistet $N = \frac{24}{4} = 6$ PS; die

Zahl der Kraftimpulse ist beim Viertaktmotor $n = \frac{n_0}{2}$ daher

$$p = \frac{450 N}{n V} = \frac{450 \frac{N_0}{4}}{\frac{n_0}{2} \cdot \frac{V_0}{4}} = \frac{900 N_0}{n_0 \cdot V_0} = \frac{900 \cdot 24}{2000 \cdot 1,5} = \frac{9 \cdot 1,6}{2} = 7,2 \text{ at}.$$

(Der Druck auf den Kolben ist aber nicht gleichmäßig; die tatsächlich auftretenden maximalen Explosionsdrucke betragen das Drei- bis Fünffache des durchschnittlichen Drucks!)

c) Für den in Abb. 42 dargestellten Riemenantrieb gilt, wenn d_1 und d_2 die Scheibendurchmesser, n_1 und n_2 die zugehörigen Drehzahlen — auf die Minute bezogen — bedeuten

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (199)$$

Die übertragene Leistung berechnet sich zu

$$N = \frac{P v}{75} \text{ (PS)}, \tag{200}$$

wobei P die Umfangskraft in kg, v die Umfangsgeschwindigkeit in m/s bedeutet; diese berechnet sich aus d und n zu

$$v = \frac{n d \pi}{60}, \tag{201}$$

wobei für n und d mit Bezug auf unsere Abb. 42 entweder n_1 und d_1 oder n_2 und d_2 zu setzen ist.

Beispiel: $d_1 = 300$ mm; $n_1 = 950$ U/min; d_1 überträgt 2,8 PS; $d_2 = 960$ mm; gesucht Riemengeschwindigkeit v , Umfangskraft P und Drehzahl n_2 .

$$\begin{aligned} \text{Es ist } n_2 &= n_1 \frac{d_1}{d_2} = 950 \frac{300}{960} = 296 \text{ U/min}; & v &= \frac{n_1 d_1 \pi}{60} = \frac{950 \cdot 0,300 \cdot \pi}{60} = 14,9 \text{ m/s}; \\ P &= \frac{75 \cdot N}{v} = \frac{75 \cdot 2,8}{14,9} = 14,1 \text{ kg}. \end{aligned}$$

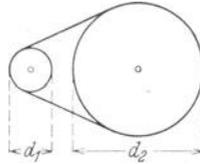


Abb. 42.

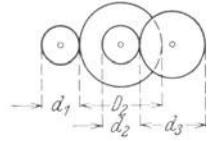


Abb. 43.

d) Für das in Abb. 43 dargestellte Rädergetriebe gilt entsprechend

$$\frac{d_3 \cdot D_2}{d_2 \cdot d_1} = \frac{n_1}{n_3}. \tag{202}$$

Die Zähnezahlen verhalten sich wie die Durchmesser, also

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{d_1}{D_2}; \quad \frac{Z_2}{Z_3} = \frac{d_2}{d_3} \text{ usw.}, \tag{203}$$

Beispiel: Es soll von d_3 eine Kraft auf d_1 im Verhältnis 1:120 übertragen werden. d_3 hat 80 Zähne, d_1 hat 10 Zähne. Wie wird das Verhältnis $\left(\frac{D_2}{d_2}\right)$?

$$\text{Es ist } \frac{D_2 \cdot 80}{10 \cdot d_2} = \frac{120}{1}; \quad \text{daher } \frac{D_2}{d_2} = \frac{10 \cdot 120}{80} = 15.$$

Gibt man d_2 8 Zähne, so erhält D_2 120 Zähne.

e) Ähnliche Überlegungen gelten für die Berechnung von Wechselrädern. Die Wechselräder dienen z. B. dazu, die Umdrehungen der Leitspindel einer Drehbank in ein bestimmtes Verhältnis zu den Umdrehungen der Arbeitsspindel zu bringen. Sie müssen daher für jede andere Steigung ausgewechselt

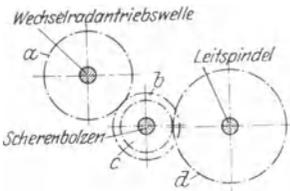


Abb. 44.

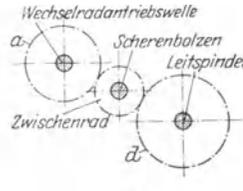


Abb. 45.

werden. Das erste — treibende — Wechselrad sitzt auf der Arbeitsspindel (bzw. auf der von dieser im festen Verhältnis getriebenen Wechselradantriebswelle), das letzte — getriebene — auf der Leitspindel; etwaige weitere, oder auch ein Zwischenrad, auf dem Scherenbolzen. In den Abb. 44 und 45 sind die Wechselräder mit $abcd$ bezeichnet. Abb. 44 stellt eine einfache Übersetzung dar, Abb. 45 eine doppelte. Für die Berechnung der Zähnezahlen der Wechselräder ist die Beziehung maßgebend: Zähnezahl des treibenden Rades verhält sich zur Zähnezahl

des getriebenen wie die Steigung des zu schneidenden Gewindes zur Steigung der Leitspindel. (Sitzt das erste Rad auf der Wechselradwelle, so bleibt die Beziehung ungeändert, nur daß bei der Steigung der Leitspindel die feste Übersetzung zwischen Arbeitsspindel und Wechselradwelle berücksichtigt wird.) Je nach dem Verhältnis der zu schneidenden Steigung zur Steigung der Leitspindel kommt man mit der einfachen Übersetzung Abb. 44 aus oder muß die doppelte Übersetzung nach Abb. 45 anwenden.

Beispiele: Vorhanden seien die Wechselräder: 15, 18, 20, 22, 25, 30, 35, 40, 45, 50 usw. bis 130, außerdem 127. 1. Steigung der Leitspindel $\frac{1}{4}''$, Steigung des zu schneidenden Gewindes $\frac{1}{16}''$. Dann ist $a/b = \frac{4}{16} = \frac{25}{100} = \frac{30}{120}$. Also einfache Übersetzung.

2. Steigung der Leitspindel $\frac{1}{2}''$, Steigung des zu schneidenden Gewindes 2 mm. Dann ist $a/b = \frac{2 \cdot 2}{25 \cdot 4} = \frac{25 \cdot 80}{100 \cdot 127} = \frac{35 \cdot 45}{80 \cdot 125}$. Also doppelte Übersetzung. (Näheres über diese Berechnungen, auch für „schwierige Steigungen“, in Heft 4: Wechselrädereberechnung, dem auch die Abbildungen entnommen sind, und Heft 63.)

f) Zur Berechnung der Tragfähigkeit von Seilen und Ketten dient die Formel

$$P = F \cdot k, \quad (204)$$

wobei P die mit Sicherheit getragene Last in kg, F der tragende Querschnitt in cm^2 , k ein Erfahrungswert, die sog. zulässige Beanspruchung ist, gemessen in kg/cm^2 .

Für St 47 ist k zwischen 900 und 300 kg/cm^2 zu wählen, je nachdem es sich um ruhende, schwellende oder wechselnde Belastungen handelt.

Beispiel: Welche Last kann eine eiserne Kette von 30 mm Glieddurchmesser mit Sicherheit tragen? Für schwellende Belastung — $k = 600 \text{ kg}/\text{cm}^2$ — und mit Rücksicht darauf, daß sich die Last auf zwei gleich große Querschnitte verteilt, gilt die Formel

$$P = 2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} k = 2 \cdot 7,07 \cdot 600 = 8500 \text{ kg}.$$

g) Der Durchmesser d einer Welle, die N PS bei n Umdrehungen je Minute überträgt, berechnet sich zu

$$d = 14,5 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}. \quad (205)$$

Demnach erhält eine Welle, die 10 PS bei 100 n zu übertragen hat, einen Durchmesser

$$d = 14,5 \sqrt[3]{\frac{10}{100}} = 14,5 \cdot \sqrt[3]{0,100} = 6,8 \text{ cm} = 68 \text{ mm}.$$

Eine andere Formel zur Berechnung des Wellendurchmessers ist

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}};$$

sie würde in unserem Beispiel ergeben

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{10}{100}} = 12 \cdot \sqrt[4]{0,316} = 12 \cdot 0,562 = 6,7 \text{ cm}.$$

34. Elektrik. a) Die Grundeinheiten der Elektrizitätsmeßtechnik sind

- das Ohm (Ω) als Einheit des Widerstandes R ,
- das Volt (V) als Einheit der elektrischen Spannung E ,
- das Ampere (A) als Einheit der elektrischen Stromstärke J .

Sie stehen in einer durch das Ohmsche Gesetz gegebenen Beziehung zu einander:

$$J = \frac{E}{R}. \quad (206)$$

Der Widerstand von Kupferdrähten gewöhnlicher Temperatur berechnet sich auf Grund der Beziehung

$$R = \frac{0,0175 \cdot l}{q}, \quad (207)$$

wobei l die Länge in m, q die Querschnittsfläche des Drahtes in mm^2 bedeutet.

Beispiel: Wie groß ist der Widerstand einer elektrischen Glühlampe, die bei 218 V Spannung 0,38 A Strom verbraucht?

$$R = \frac{E}{J} = \frac{218}{0,38} = 574 \Omega.$$

2. Wie groß ist der Widerstand eines 200 km langen Kupferdrahtes von 3 mm Durchmesser?

$$R = \frac{0,0175 \cdot 200000}{7,07} = \frac{17,5 \cdot 200}{7,07} = 495 \Omega.$$

b) Jeder unverzweigte Stromkreislauf weist drei Arten von Widerständen auf: 1. den inneren Widerstand der Stromquelle, der meist sehr gering ist, 2. den Widerstand der Zuleitungen, der ebenfalls gering ist, und schließlich den Nutzwiderstand (Lampe, Motor usw.). In jedem Widerstand findet ein Spannungsabfall statt, der sich nach dem Ohmschen Gesetz berechnet und demnach mit der Stromstärke veränderlich ist.

Beispiel: Zu einem Motor, der 10 A Strom verbraucht, führt eine 100 m lange Doppelleitung aus Kupfer von 4 mm Durchmesser. Welchen Spannungsabfall verursacht die Leitung?

$$\text{Es ist} \quad R = \frac{0,0175 \cdot 200}{12,6} = \frac{3,5}{12,6} = 0,280 \Omega.$$

Der Spannungsabfall ist $E = J \cdot R = 10 \cdot 0,28 = 2,8 \text{ V}$.

c) Der elektrische Strom leistet Arbeit, die in Wattsekunden (Ws) gemessen wird. Da nach den Definitionen der Mechanik: Leistung = $\frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$, so gilt auch

für die elektrische Leistung: $L = \frac{A}{t}$ gemessen in $\frac{\text{W s}}{\text{s}}$ also in Watt (W). Es

ist nun $1 \text{ W} = 1 \text{ V} \times 1 \text{ A} = 1 \text{ VA}$,

also allgemein

$$L = E \cdot J. \quad (208)$$

Da 1 Watt eine recht kleine Leistung darstellt, rechnet man gewöhnlich mit der 1000 mal größeren Einheit Kilowatt:

$$1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}. \quad (209)$$

Die in elektrischen Einheiten gemessene Leistung steht zu der in mechanischen Maßen ausgedrückten Leistung in der Beziehung

$$1 \text{ PS} = 736 \text{ W} \quad (210)$$

bzw.

$$1 \text{ kW} = 1,36 \text{ PS}. \quad (211)$$

Bei der elektrischen Arbeit rechnet man außer mit kW noch mit der Stunde als Zeiteinheit, und erhält damit als eine weitere, größere Einheit die Kilowattstunde:

$$1 \text{ kWh} = 3\,600\,000 \text{ Ws} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws}. \quad (212)$$

Beispiele: 1. Welche Stromstärke verbraucht ein Elektromotor von 6 PS bei 220 V Spannung? $L = 6 \text{ PS} = 6 \cdot 736 = 4420 \text{ W}$. Aus $L = EJ$ folgt $J = \frac{L}{E} = \frac{4420}{220} = 20 \text{ A}$.

2. Zur Erzeugung einer Helligkeit von 1 HK (= 1 Hefnerkerze) braucht man eine Leistung von rd. 1 W. Was kostet demnach das 200stündige Brennen einer 300kerzigen Lampe bei einem Strompreis von 0,24 RM je kWh? $A = 300 \cdot 200 = 60000 \text{ Wh} = 60 \text{ kWh}$. Die Kosten betragen somit: $K = 60 \cdot 0,24 = 14,40 \text{ RM}$.

3. Welche Leistung geht in einem Leiter von R Ohm Widerstand verloren, wenn er von einem Strom J A durchflossen wird?

$$L = EJ; \quad E = JR, \quad \text{daher} \quad L = J^2 R, \quad (213)$$

d. h. der Leistungsverlust wächst mit dem Quadrate der Stromstärke; um geringe Verluste zu haben, wird man also die Stromstärken so gering wie möglich halten; geringe Stromstärken erfordern aber bei gleicher Leistung hohe Spannungen: Daher Hochspannungsleitungen.

d) Elektrische Arbeit kann auch in Wärme umgesetzt werden. So setzt sich z. B. die durch den Widerstand der Zuleitungen verzehrte elektrische Energie grundsätzlich in Wärme um.

Die Anzahl der Kalorien Q (vgl. Abschn. 35) berechnet sich aus der elektrischen Arbeit nach dem JOULESchen Gesetz zu

$$Q = 0,00024 EJt \text{ (Ws)}. \quad (214)$$

Beispiel: Was kostet das Erwärmen von 1 l Wasser von 20° bis zum Sieden bei einem Strompreis von 0,24 RM je kWh?

$$EJt = \frac{Q}{0,00024} = \frac{80}{0,00024} = 333000 \text{ Ws} = 0,0925 \text{ kWh}.$$

Die Kosten betragen somit: $K = 0,0925 \cdot 0,24 = 0,0222 \text{ RM} \approx 2,2 \text{ Rpf.}$ Da nicht sämtliche elektrische Wärme genutzt wird, sondern nur etwa 80 %, betragen die Kosten tatsächlich etwa 2,7 Rpf. rd. 3 Rpf.

35. Wärme. a) Die Wärme, gemessen durch Wärmeeinheiten oder Kalorien, vermag Arbeit zu leisten. Unter einer Kalorie (kcal) versteht man die Wärmemenge, die man aufwenden muß, um die Temperatur von 1 kg (oder 1 l!) Wasser um 1° C zu erhöhen. Diese Wärmemenge ist einer mechanischen Arbeit von 427 mkg äquivalent (= gleichwertig): $1 \text{ kcal} = 427 \text{ mkg}.$ (215)

Man nennt diese 427 mkg deswegen auch „mechanisches Wärmeäquivalent“.

Beispiele: 1. Wieviel Kalorien sind erforderlich, um G Liter Wasser von t_1^0 auf t_2^0 zu erwärmen?

$$Q = G(t_2 - t_1) \quad (216)$$

2. 1 kg Anthrazit entwickelt beim Verbrennen etwa 8000 kcal. Wieviel PS könnten demnach theoretisch gewonnen werden, wenn in einer Stunde 20 kg Anthrazit verbrennen? Wieviel in Wirklichkeit, wenn die die Wärme in mechanische Arbeit umwandelnde Maschine einen Wirkungsgrad von 12 % hat? $20 \cdot 8000 \text{ kcal} = 20 \cdot 8000 \cdot 427 = 68400000 \text{ mkg}.$ Die Zeit, in der die Verbrennung stattfindet, ist 1 h = 3600 s, folglich

$$L = \frac{A}{t} = \frac{68400000}{3600} = 19000 \text{ mkg/s}; \quad \frac{19000}{75} = 253 \text{ PS}.$$

Infolge des geringen Wirkungsgrades werden hiervon indes nur $0,12 \cdot 252 \approx 30 \text{ PS}$ nutzbar gemacht.

b) Der Wärmegrad eines Körpers wird angegeben durch seine Temperatur, die in Celsiusgraden (°) gemessen wird. Die denkbar niedrigste Temperatur beträgt -273^0 . Man nennt sie den absoluten Nullpunkt.

Durch Erwärmung dehnen sich homogene Körper aus. Die Wärmeausdehnung Δl infolge einer Temperaturerhöhung um $(\Delta t)^0$ beträgt für einen ursprünglich l mm langen Stab

$$\Delta l_{\text{mm}} = l \cdot \alpha \cdot \Delta t, \quad (217)$$

wobei α eine Stoffkonstante bedeutet, die linearer Ausdehnungskoeffizient heißt, und für Eisen den Wert $\alpha = 0,000012$, für Silber den Wert $\alpha = 0,0000185$ hat. Die Kraft, mit der sich die Körper infolge Erwärmung ausdehnen, ist beträchtlich; sie beträgt für einen Eisenstab vom Querschnitt F (cm²) in der Längsrichtung

$$P \approx 10F \cdot (\Delta t). \quad (218)$$

Beispiele: 1. Ein Maßstab aus Silber ist bei $+20^0$ richtig. Welche Korrektur ist an der damit bei $12,5^0$ gemessenen (abgelesenen) Länge $l = 432,765 \text{ mm}$ anzubringen?

$\Delta l = -l \cdot \alpha \cdot \Delta t = -433 \cdot 0,0000185 \cdot 7,5 = -0,433 \cdot 0,185 \cdot 0,75 = -0,060 \text{ mm}.$ Die richtige Länge der gemessenen Größen ist also $432,765 - 0,060 = 432,705 \text{ mm}.$ Man beachte, daß bei genauen Messungen der Temperatureinfluß durchaus meßbar ist!

2. Mit welcher Kraft dehnt sich eine Eisenschiene von 35 cm² Querschnitt bei der Erwärmung von -25° auf +35° aus? $P = 10 \cdot 35 \cdot 60 = 21000 \text{ kg (1)}$ (Würde die ausgedehnte Schiene an beiden Enden befestigt, um das Zurückgehen auf die ursprüngliche Länge bei der Abkühlung zu verhindern, so käme auf jeden Quadratzentimeter des Querschnitts eine Beanspruchung [Spannung] von $\frac{21000}{35} = 600 \text{ kg/cm}^2$.)

36. **Optik.** a) Das Licht ist nach unserer heutigen Auffassung eine elektromagnetische Schwingung. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist bestimmt worden zu rund $c = 300000 \text{ km/s}$. (219)

b) Im homogenen Medium pflanzt sich das Licht geradlinig fort. Eine Brechung des Lichts tritt ein, wenn ein Lichtstrahl von einem optisch dünneren in ein dichteres Medium eintritt und umgekehrt. Der vom Einfallslot aus gemessene Winkel ist im dichteren Medium stets kleiner als im dünneren. Für gegebene Medien bilden die Sinuswerte der Einfallswinkel und der zugeordneten Brechungswinkel einen konstanten Quotienten: den Brechungsquotienten n . Allgemein ist (Abb. 46):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n. \quad (220)$$

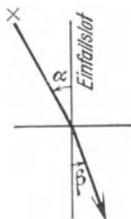


Abb. 46.

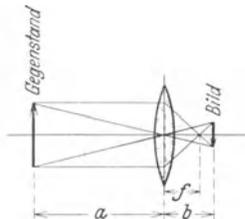


Abb. 47.

c) Besondere Erscheinungen hat die Brechung bei Konvexlinsen zur Folge. Diese entwerfen unter gewissen Umständen von Gegenständen umgekehrte, reelle Bilder (Abb. 47). Dabei besteht zwischen der Gegenstandsweite a , der Bildweite b und der Brennweite f die Beziehung:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (221)$$

(= Dioptrische Hauptformel). Zwei Konvexlinsen im Abstand e mit den Brennweiten f_1 bzw. f_2 wirken, wenn $e < (f_1 + f_2)$, wie eine einzige Linse mit der „äquivalenten“ Brennweite:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e}. \quad (222)$$

d) Die Vergrößerung V einer Lupe (Abb. 48) von der Brennweite f (cm) berechnet sich überschläglich zu:

$$V = \frac{25}{f}. \quad (223)$$

e) Konvexlinsen sind die wesentlichen Bestandteile von Fernrohren und Mikro-

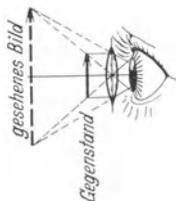


Abb. 48.

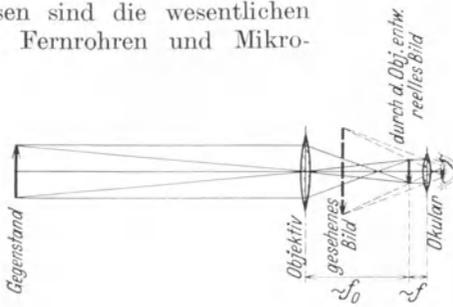


Abb. 49.

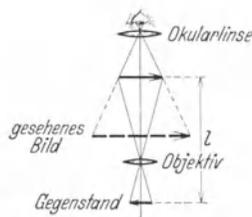


Abb. 50.

skopen. Den Strahlengang durch ein astronomisches oder KEPLERSches Fernrohr zeigt Abb. 49. Bezeichnet

f_o = Brennweite des Objektivs (Ausblick),
 f_o = Brennweite des Okulars (Einblick),
 D_o = den wirksamen Objektivdurchmesser,
 D_o = den wirksamen Okulardurchmesser,
 d = den Durchmesser des Diaphragmas (Gesichtsfeldblende),

so berechnet sich:

$$\text{die Vergrößerung} \quad V = \frac{f_o}{f_o} = \frac{D_o}{D_o}. \quad (224)$$

$$\text{das wahre Gesichtsfeld} \quad G = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{d}{f_o} = 57,3 \cdot \frac{d}{f_o}, \quad (225)$$

$$\text{das scheinbare Gesichtsfeld} \quad g = G \cdot V = 57,3 \cdot \frac{d}{f_o}, \quad (226)$$

$$\text{die relative Helligkeit} \quad H = (D_{o(\text{mm})})^2. \quad (227)$$

f) Für ein Mikroskop (Abb. 50) von der Länge l berechnet sich die Vergrößerung zu:

$$V = \frac{250l}{f_o \cdot f_o}. \quad (228)$$

(l , f_o und f_o in mm!)

Beispiele: 1. Bei einem Prismenfernrohr ist die Vergrößerung $V = 6$; die Objektivbrennweite $f_o = 200$ mm; der wirksame Objektivdurchmesser $D_o = 22$ mm; der Diaphragmadurchmesser $d = 8$ mm; folglich ist die Okularbrennweite $f_o = \frac{f_o}{V} = \frac{200}{6} = 33,3$ mm; die Austrittspupille $D_o = \frac{D_o}{V} = \frac{22}{6} = 3,67$ mm; die relative Helligkeit $H = D_o^2 = 13,5$ (wenig!); das wahre Gesichtsfeld $G = \frac{57,3 \cdot 8}{200} = 2,29^\circ$; das scheinbare Gesichtsfeld $g = 2,29 \cdot 6 = 13,7^\circ$.

2. Welche Objektivbrennweite ist erforderlich für ein Mikroskop von $l = 200$ mm Länge, mit dem bei einer Okularbrennweite $f_o = 16$ mm eine 800fache Vergrößerung erzielt werden soll?

$$f_o = \frac{250l}{f_o \cdot V} = \frac{250 \cdot 200}{16 \cdot 800} = \frac{250}{64} = 3,9 \text{ mm.}$$

3. Um wieviel ist bei einer Konvexlinse die Bildweite b ($= f + \Delta$) stets größer als die Gegenstandsweite a ? ($\Delta \ll f$)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{f + \Delta} = \frac{1}{f}; \quad \frac{1}{a} = \frac{\Delta}{f(f + \Delta)} \approx \frac{\Delta}{f^2}; \quad \Delta = \frac{f^2}{a}.$$

Einteilung der bisher erschienenen Hefte nach Fachgebieten (Fortsetzung)

III. Spanlose Formung (Fortsetzung)

	Heft
Gesektschmiede I (Gestaltung und Verwendung der Werkzeuge). 2. Aufl.	
Von H. Kaessberg	31
Gesektschmiede II (Herstellung und Behandlung der Werkzeuge). Von H. Kaessberg	58
Das Pressen der Metalle (Nichteisenmetalle). Von A. Peter	41
Die Herstellung roher Schrauben I (Anstauchen der Köpfe). Von J. Berger	39
Stanztechnik I (Schnitttechnik). 2. Aufl. Von E. Krabbe	44
Stanztechnik II (Die Bauteile des Schnittes). 2. Aufl. Von E. Krabbe	57
Stanztechnik III (Grundsätze für den Aufbau von Schnittwerkzeugen). Von E. Krabbe	59
Stanztechnik IV (Formstanzen). Von W. Sellin	60
Die Ziehtchnik in der Blechbearbeitung. 3. Aufl. Von W. Sellin	25
Hydraulische Preßanlagen für die Kunstharzverarbeitung. Von H. Lindner	82

IV. Schweißen, Löten, Gießerei

Die neueren Schweißverfahren. 5. Aufl. Von P. Schimpke	13
Das Lichtbogenschweißen. 3. Aufl. Von E. Klosse	43
Praktische Regeln für den Elektroschweißer. 2. Aufl. Von R. Hesse. (Im Druck)	74
Widerstandsschweißen. Von W. Fahrenbach	73
Das Schweißen der Leichtmetalle. Von Th. Ricken	85
Das Löten. 3. Aufl. Von W. Burstyn. (Im Druck)	28
Das ABC für den Modellbau. Von E. Kadlec	72
Modelltischlerei I (Allgemeines, einfachere Modelle). 2. Aufl. Von R. Löwer	14
Modelltischlerei II (Beispiele von Modellen und Schablonen zum Formen). 2. Aufl.	
Von R. Löwer	17
Modell- und Modellplattenherstellung für die Maschinenformerei.	
Von Fr. und Fe. Brobeck	37
Der Gießerei-Schachtofen im Aufbau und Betrieb. 3. Aufl. von „Kupolofen-Betrieb“.	
Von Joh. Mehrrens	10
Handformerei. Von F. Naumann	70
Maschinenformerei. Von U. Lohse	66
Formsandaufbereitung und Gußputzerei. Von U. Lohse	68

V. Antriebe, Getriebe, Vorrichtungen

Der Elektromotor für die Werkzeugmaschine. Von O. Weidling	54
Hohe Drehzahlen durch Schnellfrequenz-Antrieb. Von F. Beinert und H. Birett	84
Stufengetriebe an Werkzeugmaschinen mit kreisender Hauptbewegung. 2. Aufl.	
Von H. Rognitz. (Im Druck)	55
Maschinelle Handwerkzeuge. Von H. Graf	79
Die Zahnformen der Zahnräder. 2. Aufl. Von H. Trier	47
Die Kraftübertragung durch Zahnräder. Von H. Trier	87
Einbau und Wartung der Wälzlager. Von W. Jürgensmeyer	29
Dichtungen. Von K. Trutnovsky. (Im Druck)	92
Teilkopfarbeiten. 3. Aufl. Von W. Pockrandt	6
Spannen im Maschinenbau. Von F. Klautke	51
Der Vorrichtungsbau I (Einteilung, Einzelheiten und konstruktive Grundsätze). 4. Aufl.	
Von F. Klautke †	33
Der Vorrichtungsbau II (Typische Einzelvorrichtungen, Bearbeitungsbeispiele mit Reihen planmäßig konstruierter Vorrichtungen). 4. Aufl. Von F. Klautke †	35
Der Vorrichtungsbau III (Wirtschaftliche Herstellung und Ausnutzung der Vorrichtungen). 3. Aufl. Von H. Mauri. (Im Druck)	42

VI. Prüfen, Messen, Anreißen, Rechnen

Werkstoffprüfung (Metalle). 3. Aufl. Von P. Riebensahm. (Im Druck)	34
Metallographie. 2. Aufl. Von O. Mies	64
Technische Winkelmessungen. 2. Aufl. Von G. Berndt	18
Messen und Prüfen von Gewinden. Von K. Kress	65
Schnittkraft- und Drehmomentmesser für Werkzeugmaschinen. Von H. Schallbroch und H. Balzer	91
Das Anreißen in Maschinenbau-Werkstätten. 3. Aufl. Von H. Mauri	3
Das Vorzeichnen im Kessel- und Apparatebau. 2. Aufl. Von A. Dorl. (Im Druck)	38
Technisches Rechnen I. 3. Aufl. Von V. Happach	52
Technisches Rechnen II. 2. Aufl. Von V. Happach	90
Der Dreher als Rechner. 3. Aufl. Von E. Busch	63
Feinstarbeit, Rechnen und Messen im Lehren-, Vorrichtungs- und Werkzeugbau.	
Von E. Busch und F. Kähler	86
Prüfen und Instandhalten von Werkzeugen und anderen Betriebsmitteln. 2. Aufl.	
Von P. Heinze	67