

Г. КОЛЬСКИЙ

ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Перевод с английского
В. С. ЛЕНСКОГО

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва—1955

STRESS WAVES
IN SOLIDS

by
H. KOLSKY

OXFORD
1953

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

В настоящей монографии дано систематическое изложение различных вопросов, связанных с распространением волн в твердых телах, как вполне упругих, так и при наличии диссипативных сил и пластических деформаций. Особенностью книги является то, что автор ее, не останавливаясь на детальном изложении математической теории, которая во многих пунктах или лишь намечена в виде общих соотношений, или приведена для наиболее простых случаев, много внимания уделяет физической стороне вопроса. В связи с этим приведены многочисленные сравнения теоретических выводов с данными опытов, методы экспериментальных исследований механического поведения материалов в условиях динамических деформаций, описания лабораторных установок для измерения величин, необходимых для анализа явления. Помимо изложения полученных до настоящего времени теоретических и экспериментальных результатов по распространению волн в твердых телах, автор ставит вопросы, которые остаются еще не выясненными и требуют дальнейших исследований.

Характер изложения и многообразие поднятых вопросов делают книгу доступной и интересной для широкого круга читателей—инженеров, научных работников, студентов университетов и втузов.

В конце книги приведен список дополнительной литературы, не претендующий на полноту и содержащий указания на некоторые оригинальные исследования русских и советских авторов. Он поможет читателю получить представление о развитии и современном состоянии тех вопросов теории распространения волн в твердых телах и ее приложений, которые недостаточно освещены автором монографии.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Теория распространения упругих волн в твердых телах создавалась в течение прошлого столетия Стоксом, Пуассоном, Релеем, Кельвином и другими как развитие теории упругости в применении к задачам колебаний, а также для использования в исследованиях по распространению света, рассматривавшегося как колебания упругого эфира. В течение первой четверти текущего столетия физики пренебрегали этим предметом частично потому, что их внимание привлекали новые области, открывшиеся в связи с появлением атомной физики, частично же вследствие того, что теория во многих отношениях опережала экспериментальные исследования, так как тогда не было методов, удобных для наблюдения процесса распространения волн напряжения в лабораторных условиях.

Вследствие ряда различных причин в последние годы наблюдается заметное оживление интереса к этой области, и в печати появляется теперь большое и все возрастающее количество результатов оригинальных исследований как экспериментального, так и теоретического характера. Причина этого заключается, во-первых, в том, что вследствие развития электроники появилась возможность легко возбуждать и обнаруживать упругие волны высокой частоты, включая ультразвуковые. Во-вторых, появление новых материалов, таких, как пластики, вызвало интерес к теории механических свойств несовершенного упругих твердых тел, а волны напряжения оказываются мощным средством для изучения механических характеристик таких материалов. Наконец, исследование свойств твердых тел при очень высоких скоростях нагружения стало весьма важным с инженерной точки зрения. Так, задачи о распространении импульсов напряжения большой амплитуды и короткой продолжительности имеют исключительно большое военное значение. Они интенсивно изучались во время второй мировой войны и привели к развитию теории пластических волн.

Задача настоящей монографии — дать сжатый очерк классической теории, показать, как эта теория может быть распространена на тела несовершенно упругие, и в суммарном виде изложить экспериментальные исследования, проведенные в последние годы.

Наш предмет требует, конечно, некоторых математических рассмотрений; мы изложили их настолько это возможно просто, так, чтобы в них легко мог разобраться каждый читатель, имеющий физическое образование.

Г. К.

Баттервикские научные лаборатории
акционерного общества „Импириэл кэмикл индастриз“
Уэлин, Хертс
июль 1952

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

В динамике твердого тела предполагается, что напряжения, возникающие при приложении силы в некоторой точке тела, мгновенно приводят в движение каждую его другую точку, так что можно считать, что сила вызывает линейное ускорение всего тела как целого и угловое ускорение его относительно центра тяжести. С другой стороны, в теории упругости тело рассматривается как находящееся в равновесии под действием приложенных сил, причем предполагается, что упругие деформации уже приняли их статические значения. Такая трактовка достаточно точна для задач, в которых время между моментом приложения нагрузки и установлением действительного равновесия мало по сравнению с промежутками времени, в течение которых производятся наблюдения. Однако когда мы исследуем действие сил, приложенных лишь на короткий промежуток времени или быстро изменяющихся, это явление надо рассматривать с точки зрения распространения волн напряжения.

Целью настоящей монографии является описание задач, связанных с изучением волн напряжения в твердых телах, и методов (экспериментальных и теоретических) для их исследования.

Конечность скорости волн в жидкой среде с плотностью ρ и модулем всестороннего сжатия k можно вывести непосредственно из уравнений движения такой среды, причем в руководствах по теории звука показано, что эта скорость распространения равна $\sqrt{k/\rho}$. Если среда не оказывает сопротивления конечным напряжениям сдвига, то имеется только один тип волнового движения, который может в ней распространяться. Но в безграничных изотропных твердых телах могут распространяться два типа упругих волн: волны расширения со скоростью $\left[\left(k + \frac{4}{3} \mu \right) / \rho \right]^{1/2}$, где μ — модуль сдвига, и волны искажения, скорость распространения которых равна $(\mu/\rho)^{1/2}$. При деформировании твердой среды возникают обычно как волны искажения, так и волны расширения, причем можно показать, что при падении волны любого типа на границе тела возникают волны обоих типов.

Кроме указанных выше двух типов волн, которые могут распространяться внутри безграничной твердой среды, упругие волны могут распространяться также вдоль поверхности, причем связанные с ними

перемещения убывают с глубиной по экспоненциальному закону. Так как эти волны расходятся только в двух измерениях, они затухают с расстоянием медленнее других типов волн. Эти волны, называемые волнами Релея, играют важную роль в сейсмических явлениях.

Реальные тела никогда не бывают совершенно упругими, так что при распространении в них возмущений часть механической энергии превращается в тепло; несколько различных механизмов этих превращений объединены общим названием — *внутреннее трение*. При прохождении в теле цикла напряжений обнаруживается, вообще говоря, петля гистерезиса: кривая напряжение — деформация для возрастающих напряжений не повторяется точно ее нисходящей ветвью. Даже в том случае, когда влияние этого эффекта незначительно при статическом нагружении, оно может быть существенным фактором затухания упругих волн, так как при прохождении импульса давления через материал каждый слой поочередно проходит через такой цикл, а для синусоидальных колебаний число циклов гистерезиса зависит от частоты и может достигать порядка миллионов в секунду. Градиенты скорости, создаваемые волной напряжения, приводят ко второму виду потерь, связанному с вязкостью материала. Природа затухания различна для этих двух типов внутреннего трения, и экспериментальные данные показывают, что оба типа имеют место.

Многие материалы обнаруживают также *механическую релаксацию*; это значит, что деформация, вызванная внезапным приложением фиксированного напряжения, асимптотически возрастает с течением времени. Аналогично напряжения, возникающие при мгновенном деформировании материала, асимптотически ослабевают. Найдено, что волны напряжений, период которых близок к *времени релаксации* среды, быстро затухают при прохождении через среду. Наконец, сжатия и расширения, производимые упругими волнами, порождают перепады температуры, и конечная теплопроводность среды является еще одним механизмом, с помощью которого механическая энергия рассеивается в виде тепловой энергии.

Природа внутреннего трения в твердых телах не полностью изучена, и в этой области необходимы дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования. Изучение этого вопроса приведет к лучшему пониманию молекулярных процессов, возникающих при деформировании твердых тел, и связи между молекулярной структурой и макроскопическими физическими свойствами.

Важны два других типа волн напряжения, возникающих в среде, в которой зависимость напряжение — деформация перестает быть линейной, — ударные волны и пластические волны. Ударная волна может образоваться в среде, когда скорость распространения больших возмущений превосходит скорость распространения меньших возмущений. При этих условиях любой импульс давления, распространяясь в среде, образует все более и более крутой фронт, толщина которого в пределе ограничивается молекулярным строением среды. С другой сто-

роны, пластические волны могут возникнуть, когда среда упруга лишь до известного предела, а для напряжений, превышающих его, наступает течение. При этих условиях в среде распространяется упругая волна, за которой следует пластическая волна, распространяющаяся с меньшей скоростью.

В части I этой монографии рассматривается распространение волн напряжения в совершенно упругих твердых телах, причем теория развивается как математическое следствие закона Гука и уравнений движения. Единственное различие между определенными телами в такой постановке вызывается различием значений их упругих постоянных и плотностей. В конце части I описаны новые экспериментальные исследования, предпринятые с целью проверки этой теории.

Часть II касается распространения волн напряжения в несовершеннo упругих телах. Вначале рассмотрено внутреннее трение и природа различных диссипативных процессов, им вызываемых. Затем дан обзор экспериментальных исследований по измерению динамических упругих характеристик. Наконец дан очерк теории пластических волн и ударных волн и описаны некоторые процессы разрушения, производимые большими импульсами напряжения.

ЧАСТЬ I

УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Глава II

РАСПРОСТРАНЕНИЕ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

В этой главе выведены уравнения движения изотропной упругой среды в перемещениях частиц и показано, что эти уравнения движения описывают два типа волн, которые могут распространяться в неограниченном упругом теле. Эти два типа волн названы *волнами расширения* и *волнами искажения*. Движение частицы в плоской волне расширения происходит в направлении распространения, тогда как в плоской волне искажения оно происходит в направлении, перпендикулярном направлению распространения.

В неограниченных телах могут распространяться только такие волны. Если же тело имеет свободную поверхность или если имеется поверхность раздела двух тел, то могут распространяться еще и поверхностные волны Релея.

В главе рассмотрено также отражение и преломление упругих волн на плоских границах и дано краткое описание распространения упругих волн в кристаллической среде¹⁾.

§ 1. Компоненты напряжения и деформации

Напряжение на элементе поверхности внутри твердого тела действует, вообще говоря, не по нормали к этой поверхности и имеет составляющие как по нормали к площадке, так и по касательной к ней. Если отнести тело к трем взаимно перпендикулярным осям Ox , Oy , Oz и рассмотреть напряжения, действующие на три плоскости, перпендикулярные к этим осям и проходящие через рассматриваемую точку P , то получим девять компонент напряжения. Обозначим их σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{xz} и т. д.; первая буква в индексе означает направление напряжения, а вторая — плоскость, на которую оно действует²⁾. Рассматривая бесконечно малый прямоугольный параллелепипед, содержащий точку P , с гранями, перпендикулярными

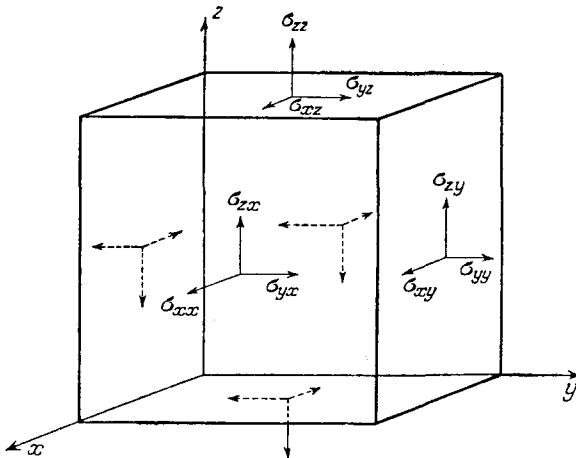
1) Для удобства читателя, желающего пропустить математический анализ, изложенный в гл. II и III, в конце гл. III дана сводка основных результатов теории упругих волн в неограниченном и ограниченном телах.

2) Употребляется несколько различных обозначений для компонент напряжения. Сравнение их дано в приложении.

к осям (фиг. 1), и подсчитывая моменты, можно убедиться, что для равновесия необходимо, чтобы удовлетворялись равенства

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad \text{и} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}.$$

Следовательно, независимыми остаются только шесть компонент напряжения. Через эти шесть компонент можно выразить напряжение, действующее на любой другой элемент поверхности, проходящей через точку P , т. е. они полностью определяют напряжение в точке ¹⁾.



Фиг. 1. Компоненты напряжений, действующих на бесконечно малый прямоугольный параллелепипед.

Перемещение любой точки P тела можно разложить по осям x , y , z на компоненты u , v , w , так что если координаты точки в исходном состоянии суть (x, y, z) , то при деформации они принимают значения $(x + u, y + v, z + w)$. Чтобы определить деформацию в любой точке, надо рассмотреть изменение положения этой точки относительно соседних. Рассмотрим точку, очень близкую к P , которая в недеформированном состоянии имела координаты $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$; пусть перемещение ее имеет компоненты $(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w)$. Тогда, если δx , δy и δz достаточно малы,

1) В этом можно убедиться, рассматривая бесконечно малый тетраэдр, содержащий точку P , одна сторона которого параллельна элементу рассматриваемой поверхности, а три другие перпендикулярны осям координат. Разложив силы, действующие на тетраэдр, на три перпендикулярных направления, получим выражения напряжений, действующих на наклонный элемент, через шесть компонент напряжения.

получим

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z,$$

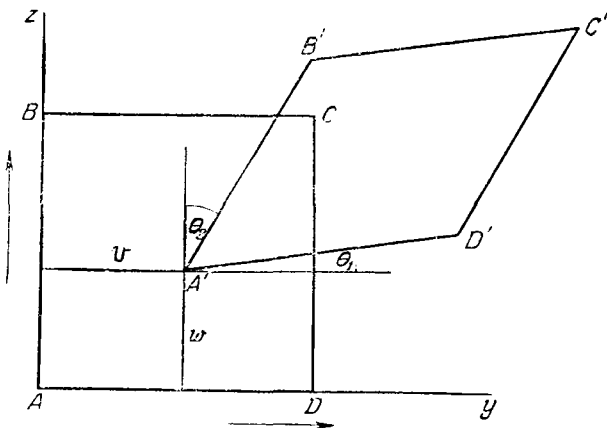
$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z,$$

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z.$$

Следовательно, если значения девяти величин

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

в данной точке известны, то относительные перемещения всех окру-



Фиг. 2. Сдвиг и поворот в двух измерениях.

жающих точек могут быть найдены. Для удобства эти девять величин группируются и обозначаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ 2\bar{\omega}_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, & 2\bar{\omega}_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, & 2\bar{\omega}_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (2.1)$$

Первые шесть величин в уравнениях (2.1) называются компонентами деформации. Три из них, а именно ε_{xx} , ε_{yy} и ε_{zz} , представляют собой относительные удлинения малых линейных элементов, прохо-

дящих через точку P параллельно осям x , y и z соответственно. Три других, ε_{yz} , ε_{zx} и ε_{xy} , являются компонентами деформации сдвига в плоскостях, соответствующих индексам.

Значение этих величин для двумерной деформации в плоскости yz показано на фиг. 2. На ней $ABCD$ — бесконечно малый квадрат, который перемещается и деформируется в ромб $A'B'C'D'$; θ_1 и θ_2 — углы, образованные отрезками $A'D'$ и $A'B'$ с осями y и z соответственно. Далее, $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\partial v}{\partial z}$; для достаточно малой деформации углы можно считать равными их тангенсам, так что $\varepsilon_{yz} = \theta_1 + \theta_2$, что и является определением деформации сдвига. Величины $\bar{\omega}_x$, $\bar{\omega}_y$ и $\bar{\omega}_z$ не относятся к деформации окрестности точки P и представляют собой компоненты вращения ее как твердого тела, так что если перемещение представляется вектором \mathbf{s} , то эти величины суть составляющие $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{s}$ по осям. Можно видеть на фиг. 2, что величина $2\bar{\omega}_x = \theta_1 - \theta_2$ не связана с деформацией $ABCD$ и равна удвоенному углу поворота диагонали AC . В случае когда компоненты вращения равны нулю, деформация является безвихревой и называется *чистой деформацией*.

§ 2. Обобщенная форма закона Гука

Экспериментально найдено, что для большинства твердых тел рассмотренные выше деформации пропорциональны приложенной нагрузке, если только нагрузка не превосходит некоторого значения, называемого пределом упругости. Этот экспериментальный закон математически формулируется так: *каждая из шести компонент напряжения в любой точке тела является линейной функцией шести компонент деформации*, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} + c_{14}\varepsilon_{yz} + c_{15}\varepsilon_{zx} + c_{16}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= c_{21}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} + c_{23}\varepsilon_{zz} + c_{24}\varepsilon_{yz} + c_{25}\varepsilon_{zx} + c_{26}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{zz} &= c_{31}\varepsilon_{xx} + c_{32}\varepsilon_{yy} + c_{33}\varepsilon_{zz} + c_{34}\varepsilon_{yz} + c_{35}\varepsilon_{zx} + c_{36}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yz} &= c_{41}\varepsilon_{xx} + c_{42}\varepsilon_{yy} + c_{43}\varepsilon_{zz} + c_{44}\varepsilon_{yz} + c_{45}\varepsilon_{zx} + c_{46}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{zx} &= c_{51}\varepsilon_{xx} + c_{52}\varepsilon_{yy} + c_{53}\varepsilon_{zz} + c_{54}\varepsilon_{yz} + c_{55}\varepsilon_{zx} + c_{56}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{xy} &= c_{61}\varepsilon_{xx} + c_{62}\varepsilon_{yy} + c_{63}\varepsilon_{zz} + c_{64}\varepsilon_{yz} + c_{65}\varepsilon_{zx} + c_{66}\varepsilon_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

(обобщенная форма закона Гука), где коэффициенты представляют собой упругие постоянные материала. Хотя закон в такой форме не поддается прямой опытной проверке, он охватывает экспериментальные результаты для различных типов нагружения, и любое его математи-

ческое следствие, которое может быть проверено опытным путем, оказывается верным в пределах упругости материала.

Можно показать¹⁾, что условие того, что упругая энергия является однозначной функцией деформации, состоит в равенстве коэффициентов c_{rs} и c_{sr} . При этом число независимых коэффициентов уменьшается от 36 до 21. В совершенно анизотропном материале, в котором нет пространственной симметрии (например, для кристаллов триклинной системы), упругие свойства среды определяются значениями 21 различной величины. Если материал имеет оси или плоскости симметрии, находятся новые соотношения между этими коэффициентами (Ляв, стр. 172) и число независимых упругих постоянных существенно уменьшается. Например, для кубического кристалла остаются только три независимые постоянные.

В изотропном теле значения коэффициентов не должны зависеть от выбора прямоугольной системы осей, откуда вытекает, что независимых постоянных здесь только две. Обозначим их λ и μ . Тогда

$$c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = \lambda,$$

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} = \mu,$$

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu,$$

а остальные двадцать четыре коэффициента равны нулю. Уравнения (2.2) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{xx}, & \sigma_{yy} &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{yy}, & \sigma_{zz} &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{yz} &= \mu \varepsilon_{yz}, & \sigma_{zx} &= \mu \varepsilon_{zx}, & \sigma_{xy} &= \mu \varepsilon_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где $\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$; эта величина выражает изменение объема единичного куба и называется дилатацией или объемным расширением.

Две упругие постоянные λ и μ , называемые константами Ляме, полностью определяют упругие свойства изотропного тела. Для удобства, однако, используются обычно четыре упругие постоянные: модуль продольной упругости E , пуассоново отношение ν , модуль объемного сжатия k и модуль сдвига, совпадающий с константой Ляме μ . С помощью уравнений (2.3) E , ν и k можно выразить через λ и μ .

Модуль E можно определить как отношение напряжения к относительному удлинению, когда к цилиндрическому или призматическому образцу приложено равномерно распределенное по плоским концевым сечениям напряжение, а боковая поверхность свободна. Пусть ось x параллельна оси цилиндра, тогда σ_{xx} — приложенное напряжение, а другие компоненты напряжения равны нулю. Первые

¹⁾ См. Ляв А., Математическая теория упругости, М.—Л., 1934, стр. 110. [Здесь и дальше страницы указаны по русскому изданию. — Прим. перев.]

три уравнения при этом дают

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{xx} + \lambda (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \\ 0 &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{yy} + \lambda (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}), \\ 0 &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{zz} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy});\end{aligned}$$

разрешив эти уравнения относительно ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , получим

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{xx}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{xx}.$$

Согласно определению $E = \sigma_{xx}/\varepsilon_{xx}$, так что

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (2.4)$$

Пуассоново отношение ν определено как отношение поперечного сокращения к продольному удлинению образца при свободной боковой поверхности, т. е. в рассматриваемом случае как $-\varepsilon_{yy}/\varepsilon_{xx}$. Следовательно,

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.5)$$

Модуль объемного сжатия k определяется как отношение приложенного давления к относительному изменению объема тела, подверженного равномерному гидростатическому сжатию. При этих условиях

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P \quad \text{и} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} = 0,$$

и из соотношений (2.3) получаем $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -P/(3\lambda + 2\mu)$. Так как относительное изменение объема равно $-(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = -\Delta$, то

$$k = \frac{P}{\Delta} = \lambda + \frac{2}{3} \mu. \quad (2.6)$$

Наконец, модуль сдвига (или жесткости) μ равен отношению сдвигающего напряжения к деформации сдвига [см. последние три уравнения (2.3)].

§ 3. Уравнения движения упругой среды

Чтобы получить уравнения движения упругой среды, рассмотрим изменение напряжений на перпендикулярных к осям гранях малого параллелепипеда со сторонами δx , δy , δz (фиг. 3). Компоненты напряжения изменяются при переходе от грани к грани; чтобы вычислить усилие, действующее на каждую грань, отнесем напряжение, умноженное на площадь грани, к центру каждой грани.

Как видно из фиг. 3, параллельно каждой оси действуют шесть сил. Если рассмотреть равнодействующую сил, действующих в на-

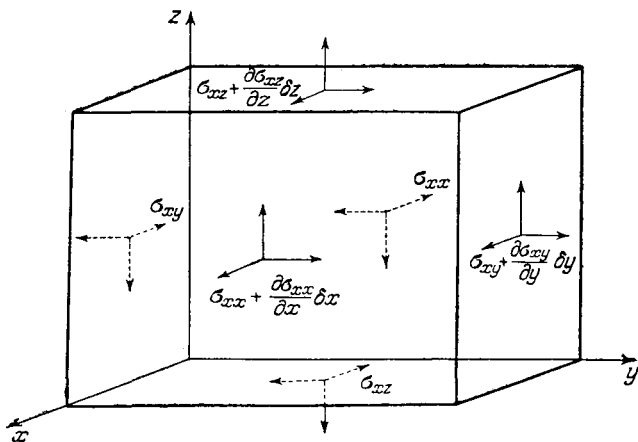
правления x , получим

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z - \sigma_{xx} \delta y \delta z + \\ & + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z - \sigma_{xy} \delta x \delta z + \\ & + \left(\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y - \sigma_{xz} \delta x \delta y, \end{aligned}$$

откуда после упрощений находим

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z.$$

По второму закону Ньютона, без учёта массовых сил типа гравитационных, написанное выражение равно $\left[(\rho \delta x \delta y \delta z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]$, где



Фиг. 3. Компоненты напряжений, действующих на малый прямоугольный параллелепипед.

ρ — плотность элемента и u — перемещение его в направлении оси x , так что

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z};$$

аналогично

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}$$

и

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}.$$

(2.7)

Эти уравнения движения сохраняют силу при любой зависимости напряжение — деформация среды. Чтобы решить их, надо использовать законы упругости. Для изотропной среды эти законы даются уравнениями (2.3); подставляя из них значения компонент напряжения в (2.7), получим

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \varepsilon_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \varepsilon_{xz}).$$

Далее, по формулам (2.1),

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Следовательно,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u, \quad (2.8)$$

где ∇^2 обозначает оператор

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right);$$

аналогично

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (2.9)$$

и

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w. \quad (2.10)$$

Как можно показать, уравнения движения (2.8), (2.9), (2.10) описывают распространение двух типов волн в среде. Так, дифференцируя уравнение (2.8) по x , (2.9) по y и (2.10) по z и складывая отдельно левые и правые части, получим

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta. \quad (2.11)$$

Это — волновое уравнение, показывающее, что объемное расширение Δ распространяется в среде со скоростью $[(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$.

С другой стороны, дифференцируя (2.9) по z , (2.10) по y и вычитая из одного результата другой, получим

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

или

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \bar{\omega}_x, \quad (2.12)$$

где $\bar{\omega}_x$ — вращение относительно оси x , определяемое уравнением (2.1). Аналогичные уравнения можно получить для $\bar{\omega}_y$ и $\bar{\omega}_z$. Значит, вихрь распространяется со скоростью $(\mu/\rho)^{1/2}$.

Если объемное расширение Δ равно нулю, уравнение (2.8) дает

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 u, \quad (2.13)$$

и аналогичные уравнения получатся для v и w .

Если u , v и w удовлетворяют условиям

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

где φ — потенциальная функция, то вращения $\bar{\omega}_x$, $\bar{\omega}_y$ и $\bar{\omega}_z$ будут равны нулю. В этом случае

$$\Delta = \nabla^2 \varphi \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \nabla^2 u.$$

Подставляя в (2.8), получим

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 u \quad (2.14)$$

и аналогично для v и w .

Таким образом, мы видим, что внутри упругого тела волны могут распространяться с двумя различными скоростями. Волны, не связанные с вращением, распространяются со скоростью $[(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2} = c_1$, волны же, не связанные с объемным расширением, распространяются со скоростью $(\mu/\rho)^{1/2} = c_2$. Указанные два типа волн называются *безвихревыми* и *эквиволюмиальными* соответственно, но, так как эти названия слишком громоздки, чаще используются термины „волны расширения“ и „волны искажения“. В известном отношении термин „волна искажения“ вводит в заблуждение, поскольку эквиволюмиальные волны связаны с искажением без объемного расширения, а безвихревые волны содержат то и другое¹⁾. Тем не менее для краткости термин „волна искажения“ будет здесь сохранен.

Можно показать, что любая плоская волна может распространяться внутри изотропной упругой среды только с той или другой из указанных скоростей. Рассмотрим, например, плоскую волну, распространяющуюся параллельно оси x . (Вследствие изотропности среды это предположение не нарушает общности.) Пусть скорость распространения волны равна c ; тогда перемещения u , v и w будут функциями одного параметра $\psi = x - ct$. Значит,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}, \end{aligned}$$

¹⁾ Имеется в виду, что при прохождении безвихревой волны возникает деформация формоизменения, связанная со сдвигами (но не с вихревым движением). — *Прим. перев.*

а производные по y и z равны нулю. Подставляя эти выражения в уравнения движения (2.8), (2.9) и (2.10), получим соответственно

$$\rho c^2 u'' = (\lambda + 2\mu) u'', \quad (2.15)$$

$$\rho c^2 v'' = \mu v'', \quad (2.16)$$

$$\rho c^2 w'' = \mu w''. \quad (2.17)$$

Здесь через u'' , v'' и w'' обозначены вторые производные u , v и w по ψ . Уравнения (2.15), (2.16), (2.17) при неравных одновременно нулю u'' , v'' , w'' могут удовлетворяться только в двух случаях: или $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ и $v'' = w'' = 0$, или $c^2 = \mu/\rho$ и $u'' = 0$. В первом случае имеют место продольные волны, в которых движение происходит в направлении распространения, а во втором случае движение поперечно и параллельно фронту волны.

Теория поперечных упругих волн в твердых телах была впервые разработана Навье [99] и несколько позже, более строго, Пуассоном [112]. Примерно в то же время опубликована теория Френеля о поперечных колебаниях в световых волнах. Так как до этого вопрос о поперечных колебаниях, распространяющихся внутри среды, не рассматривался вообще, последующее развитие теории упругих волн имело тенденцию увязываться с развитием теории распространения света (Стокс [136], Кельвин [70]).

Скорость волн искажения зависит только от плотности ρ и модуля сдвига μ , и с первого взгляда может показаться, что скорость волны расширения должна зависеть только от плотности и модуля объемного сжатия k . Однако $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ [см. уравнение (2.6)], так что скорость волны расширения равна $\left[\left(k + \frac{4}{3}\mu \right) / \rho \right]^{1/2}$ и, следовательно, зависит как от модуля сдвига так и от модуля объемного сжатия. Физический смысл этого состоит в том, что при распространении волны расширения среда подвергается не просто сжатию, а комбинации сжатия и сдвига. Рассмотрим для пояснения малый кубик материала на пути плоской волны расширения, распространяющейся в направлении оси x ; площадь его поперечного сечения, перпендикулярного к оси x , остается неизменной при прохождении волны, тогда как размер в направлении оси x изменяется. Следовательно, имеет место изменение *формы* элемента наряду с изменением его объема, и сопротивление среды сдвигу играет роль наравне с сопротивлением сжатию.

§ 4. Интегрирование волнового уравнения

Уравнения (2.11), (2.12) и (2.13) имеют один и тот же вид:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \alpha, \quad (2.18)$$

В том случае, когда деформация является функцией только одной координаты, например x , уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}. \quad (2.19)$$

Общим решением его является

$$\alpha = f(x - ct) + F(x + ct),$$

где f и F — произвольные функции, определяемые начальными условиями; f соответствует плоской волне, распространяющейся в положительном направлении оси x , а F — в отрицательном направлении. Из конструкции решения видно, что если в некоторый момент t_1 для какой-либо волны α является известной функцией x (т. е. деформация среды имеет заданную форму), то в последующий момент t_2 она имеет ту же форму, смещенную на расстояние $c(t_2 - t_1)$ вдоль оси x .

Если возмущение исходит из точки и имеет симметричный характер, то деформация должна зависеть только от величины радиуса-вектора r , отсчитываемого от этой точки. Так как $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то имеем

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{r^2 - x^2}{r^2} \frac{\partial \alpha}{\partial r}$$

и аналогичные выражения $\partial^2 \alpha / \partial y^2$ и $\partial^2 \alpha / \partial z^2$, так что уравнение (2.18) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \text{ или } \frac{\partial^2 (r\alpha)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\alpha)}{\partial r^2}.$$

Это уравнение имеет ту же форму, что и (2.19), и решением его является

$$r\alpha = f(r - ct) + F(r + ct), \quad (2.20)$$

где $f(\dots)$ соответствует сферической волне, расходящейся от начала координат, тогда как $F(\dots)$ соответствует сходящейся сферической волне. Амплитуда в обоих случаях обратно пропорциональна расстоянию r .

§ 5. Волны Релея

В неограниченном изотропном теле могут распространяться два и только два типа упругих волн. Однако, когда имеется граничная поверхность, могут возникать также поверхностные упругие волны. Эти волны, подобные гравитационным волнам в жидкостях, были впервые исследованы в 1887 г. Релеем [119], который показал, что их действие быстро затухает с глубиной и что скорость их распространения меньше скорости волн внутри тела.

Рассмотрим распространение плоской волны внутри упругой среды с плоской границей и попытаемся найти решение уравнений движения (2.8), (2.9) и (2.10), соответствующее возмущению, область

действия которого ограничена, по существу, окрестностью границы и которое удовлетворяет условию, что граница свободна от напряжений. Примем для простоты границу за плоскость $xу$, а ось z направим внутрь среды. Пусть плоская волна распространяется в направлении x . Перемещения в этом случае не будут зависеть от y , поэтому можно определить две потенциальные функции φ и ψ так, что

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Из (2.21) получаем для объемного расширения Δ

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla^2 \varphi,$$

тогда как для $\bar{\omega}$ — вращения в плоскости xz — имеем

$$\bar{\omega}_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \nabla^2 \psi.$$

(Эти уравнения показывают, что функция φ связана с объемным расширением, производимым возмущением, а ψ связана с вращением; введение двух потенциальных функций дает возможность разделить действия объемного расширения и вращения в среде.)

Подставляя (2.21) в (2.8) и (2.10), получим соответственно

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \varphi) + \mu \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi),$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \varphi) - \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi).$$

Написанные уравнения будут удовлетворяться, если удовлетворяются уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \varphi \equiv c_1^2 \nabla^2 \varphi, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \psi \equiv c_2^2 \nabla^2 \psi. \quad (2.23)$$

Если мы теперь рассмотрим синусоидальную волну частоты $p/2\pi$, распространяющуюся со скоростью c в направлении x , с длиной волны $2\pi/f$, так что $c = p/f$, то решения уравнений (2.22) и (2.23) можно искать в форме

$$\varphi = F(z) \cdot \exp [i(pt - fx)], \quad (2.24)$$

$$\psi = G(z) \cdot \exp [i(pt - fx)], \quad (2.25)$$

где $i = \sqrt{-1}$, а F и G — функции, определяющие характер изменения амплитуды волн по z . Подставляя выражение для φ из (2.24) в уравнение (2.22), получим

$$-\frac{p^2}{c_1^2} F(z) = -f^2 F(z) + F''(z),$$

где $F''(z) = \frac{d^2}{dz^2} F(z)$.

Это уравнение можно переписать так:

$$F''(z) - (f^2 - h^2)F(z) = 0, \quad (2.26)$$

где $h = p/c_1$.

Общее решение уравнения (2.26) есть

$$F(z) = A \cdot \exp(-qz) + A' \cdot \exp(qz), \quad (2.27)$$

где

$$q^2 = f^2 - h^2. \quad (2.28)$$

Второй член в (2.27) соответствует возмущению, возрастающему с увеличением z , и для рассматриваемого здесь типа волн коэффициент A' должен быть равен нулю.

Аналогично, если подставить в уравнение (2.23) выражение для ψ из (2.25), получим уравнение

$$-x^2 G(z) = -f^2 G(z) + G''(z),$$

где $x = p/c_2$, решение которого, соответствующее существу задачи, есть

$$G(z) = B \cdot \exp(-sz); \quad (2.29)$$

здесь

$$s^2 = f^2 - x^2. \quad (2.30)$$

Значит решения (2.24) и (2.25) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A \cdot \exp[-qz + i(pt - fx)], \\ \psi &= B \cdot \exp[-sz + i(pt - fx)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Условие задачи требует, чтобы компоненты напряжения σ_{zz} , σ_{zy} и σ_{zx} обращались в нуль на поверхности $z = 0$. В силу (2.21) величина

$$\sigma_{zz} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

выражается через φ и ψ так:

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}.$$

При подстановке из (2.31) это дает при $z = 0$

$$A[(\lambda + 2\mu)q^2 - \lambda f^2] - 2B\mu i s f = 0. \quad (2.32)$$

Далее,

$$\sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

и из (2.21) имеем

$$\sigma_{zx} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right).$$

При подстановке значений φ и ψ из (2.31) получаем при $z = 0$

$$2iqfA + (s^2 + f^2)B = 0. \quad (2.33)$$

Исключая отношение A/B из (2.32) и (2.33), находим

$$4\mu qsf^2 = [(\lambda + 2\mu)q^2 - \lambda f^2](s^2 + f^2). \quad (2.34)$$

Возводя обе части (2.34) в квадрат и подставляя значения q и s из (2.28) и (2.30), имеем

$$16\mu^2(f^2 - h^2)(f^2 - \kappa^2)f^4 = [-(\lambda + 2\mu)h^2 + 2\mu f^2]^2(2f^2 - \kappa^2)^2.$$

Деление обеих частей этого уравнения на $\mu^2 f^8$ дает

$$16\left(1 - \frac{h^2}{f^2}\right)\left(1 - \frac{\kappa^2}{f^2}\right) = [2 - (\lambda + 2\mu)\mu^{-1}h^2/f^2]^2\left(2 - \frac{\kappa^2}{f^2}\right)^2. \quad (2.35)$$

Так как

$$h = \frac{p}{c_1} \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{p}{c_2},$$

то $h^2/\kappa^2 = \mu/(\lambda + 2\mu)$. Из уравнения (2.5) находим

$$\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} = \alpha_1^2,$$

так что

$$h = \alpha_1 \kappa.$$

При подстановке значений для h и для $(\lambda + 2\mu)/\mu$ уравнение (2.35) преобразуется в следующее:

$$16(1 - \alpha_1^2 \kappa^2/f^2)(1 - \kappa^2/f^2) = (2 - \kappa^2/f^2)^4. \quad (2.36)$$

Производя в (2.36) умножение и обозначая отношение κ/f через κ_1 , получаем

$$\kappa_1^6 - 8\kappa_1^4 + (24 - 16\alpha_1^2)\kappa_1^2 + (16\alpha_1^2 - 16) = 0. \quad (2.37)$$

Это — кубическое относительно κ_1^2 уравнение, причем κ_1 зависит только от величины ν , и если значение ν для среды известно, уравнение может быть решено численно. Далее, $\kappa_1 = \kappa/f = p/fc_2$, а p/f — скорость поверхностных волн и c_2 — скорость волн искажения; значит, κ_1 есть отношение скорости поверхностных волн к скорости волн искажения, причем последняя зависит только от упругих постоянных материала. Отсюда следует, что скорость распространения поверхностных волн не зависит от частоты $p/2\pi$ и зависит только от упругих постоянных материала. Значит, дисперсии этих волн нет, и плоская волна распространяется без искажения формы.

Скорость затухания волн с глубиной z зависит от значений факторов затухания q и s . Уравнения (2.28) и (2.30) дают

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{f^2} &= 1 - \alpha_1^2 \kappa_1^2, \\ \frac{s^2}{f^2} &= 1 - \kappa_1^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Следовательно, по значению κ_1 можно определить значения q/f и s/f . Далее, из уравнений (2.21) и (2.31) имеем

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -(A l f e^{-qz} + B s e^{-sz}) \exp [i (pt - fx)], \\ \omega &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -(A q e^{-qz} - B f e^{-sz}) \exp [i (pt - fx)]. \end{aligned} \right\} (2.39)$$

Подставляя B из (2.33) и беря действительные части в выражениях (2.39), получаем

$$\left. \begin{aligned} u &= A f [e^{-qz} - 2qs (s^2 + f^2)^{-1} e^{-sz}] \sin (pt - fx), \\ \omega &= A q [e^{-qz} - 2f^2 (s^2 + f^2)^{-1} e^{-sz}] \cos (pt - fx). \end{aligned} \right\} (2.40)$$

Если взять, например, $\nu = 1/4$, то $\alpha_1^2 = 1/3$ и уравнение (2.37) примет вид

$$3\kappa_1^6 - 24\kappa_1^4 + 56\kappa_1^2 - 32 = 0$$

или

$$(\kappa_1^2 - 4)(3\kappa_1^4 - 12\kappa_1^2 + 8) = 0,$$

откуда следует, что

$$\kappa_1^2 = 4, \quad 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{или} \quad 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Из (2.38) видно, что первые два из этих значений κ_1 дают мнимые значения для q/f и s/f и, следовательно, не соответствуют разыскиваемому типу волн. Пригодно будет только третье значение $\kappa_1 = 0,9194$, и, значит, при $\nu = 0,25$ скорость распространения поверхностных волн составляет 0,9194 от скорости волн искажения. Далее, из (2.38) находим $q/f = 0,8475$ и $s/f = 0,3933$. Из (2.40) видно, что скорость, с которой амплитуда перемещения в направлении распространения затухает с глубиной, зависит от множителя

$$e^{-qz} - 2qs (s^2 + f^2)^{-1} e^{-sz}.$$

При подстановке численных значений q/f и s/f этот множитель будет равен

$$\exp (-0,8475 fz) - 0,5773 \exp (-0,3933 fz).$$

Он быстро убывает с возрастанием fz и обращается в нуль при $fz = 1,210$. Для этого значения fz перемещение $u = 0$ при всех значениях x и t ; следовательно, на глубине $1,21/f$ имеется плоскость, в которой нет движения, параллельного поверхности. По определению, f равно 2π , поделенному на длину волны, так что это имеет место на глубине 0,193 от длины волны. Для больших глубин амплитуда опять становится отличной от нуля, но имеет противоположный знак, так что колебания происходят в противоположной фазе.

Скорость убывания с глубиной амплитуды движения в направлении, перпендикулярном поверхности, как видно из выражения (2.40) для ω ,

зависит от множителя

$$e^{-az} - 2f^2(s^2 + f^2)^{-1} e^{-sz}.$$

Подстановка сюда численных значений дает

$$\exp(-0,8475 fz) - 1,7321 \exp(-0,3933 fz).$$

Этот множитель не меняет знака, так что нет конечной глубины, на которой движение в нормальном к поверхности направлении прекращается. При возрастании z амплитуда колебаний вначале возрастает, достигает максимума на глубине 0,076 от длины волны и затем монотонно убывает. На глубине одной длины волны $fz = 2\pi$ и амплитуда уменьшается до 0,19 от ее значения на поверхности.

Можно видеть, что fz есть определяющий параметр затухания с глубиной для колебаний как параллельных поверхности, так и перпендикулярных к ней. Так как p/f есть скорость распространения поверхностных волн, постоянная для любого данного материала, и $p/2\pi$ — частота колебаний, то f пропорционально частоте. Следовательно, волны Релея высокой частоты будут затухать с глубиной быстрее, чем волны низкой частоты; это поведение аналогично *скин-эффекту* в распространении высокочастотных переменных электрических токов в проводниках.

Выражения (2.40) для u и w показывают, что траекторией каждой частицы среды является эллипс, большая ось которого перпендикулярна к поверхности. Для частиц на поверхности (где $z = 0$) отношение большой оси эллипса к малой равно 1,468.

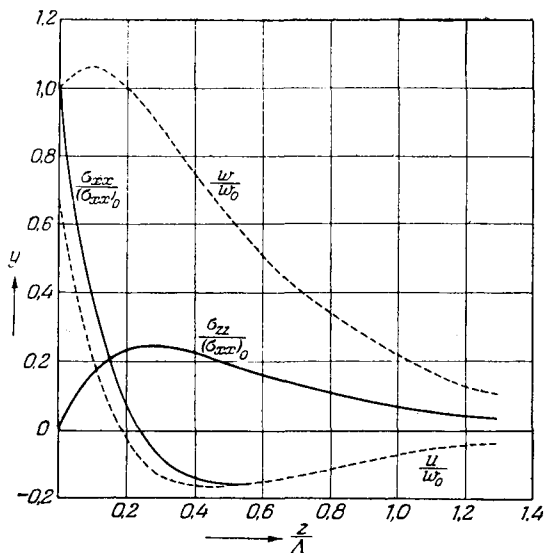
Все числовые расчеты были проведены в предположении, что $\nu = 1/4$. Однако подобные результаты получаются и при использовании других значений ν . Если, например, принять предельное значение $\nu = 1/2$, $\alpha_1 = 0$, то уравнение (2.37) переходит в

$$x_1^6 - 8x_1^4 + 24x_1^2 - 16 = 0$$

и имеет единственный действительный корень $x_1^2 = 0,9127$. В этом случае поверхностные волны распространяются со скоростью, которая составляет 0,9554 от скорости волн искажения; подстановка в (2.40) показывает, что движение, параллельное поверхности, прекращается в этом случае на глубине 0,138 от длины волны.

Для стали ($\nu = 0,29$) скорость волн Релея получается равной 0,9258 от скорости волн искажения в материале. Автор признателен Р. М. Девису за фиг. 4, на которой приведены расчетные значения амплитуд компонент напряжения и перемещений для этого значения пуассонова отношения. Кривые даны в безразмерной форме, пики значений перемещений \hat{u} и \hat{w} нанесены как отношения \hat{u}/\hat{w}_0 и \hat{w}/\hat{w}_0 , где \hat{w}_0 — амплитуда колебаний в направлении z на поверхности. Пиковые значения напряжений $\hat{\sigma}_{xx}$, $\hat{\sigma}_{zz}$ нанесены как отношения $\hat{\sigma}_{xz}/(\hat{\sigma}_{xx})_0$

и $\hat{\sigma}_{zz}/(\hat{\sigma}_{xx})_0$, где $(\hat{\sigma}_{xx})_0$ — амплитуда σ_{xx} на поверхности. Все эти величины даны в функции от z/Δ , где Δ — длина волны колебаний, равная $2\pi/f$. Кривые иллюстрируют, как амплитуда колебания в направлении x проходит через нуль, тогда как амплитуда в направлении z вначале слегка возрастает, а затем монотонно убывает. Они показывают также, что компонента σ_{xx} меняет знак, тогда как компонента σ_{zz} достигает максимума приблизительно при $0,3 z/\Delta$ и затем асимптотически убывает с глубиной. Релей высказал мысль, что так



Фиг. 4. Амплитуды напряжений и перемещений, связанных с поверхностными волнами Релея в стали ($\nu = 0,29$).

как эти поверхностные волны расходятся только в двух измерениях и, следовательно, затухают с расстоянием медленнее объемных упругих волн, то можно ожидать, что они играют важную роль в сейсмических явлениях. Действительно, это в значительной мере подтверждается сейсмографическими записями волн, наблюдаемых на некотором удалении от эпицентра землетрясения. Записи обнаруживают три отдельные группы волн. Первыми прибывают волны, в которых колебания преимущественно продольные; это волны расширения, имеющие наибольшую скорость распространения. Позже приходят волны искажения, в которых движение главным образом поперечное, и, наконец, поверхностные волны, амплитуда которых велика по сравнению с амплитудой двух других типов волн. Если эта последняя группа состоит только из волн Релея, в ней должны содержаться как

вертикальная, так и горизонтальная компоненты с преобладанием первой. Практически найдено, что это не так: вертикальная компонента иногда полностью отсутствует. Для воли Релея направление колебаний горизонтальной компоненты должно быть параллельно направлению распространения, тогда как часто обнаруживаются горизонтальные компоненты, параллельные фронту волны. Ляв [87] высказал мысль, что эти волны могут быть объяснены, если предположить, что упругость и плотность внешних слоев земли отличаются от их значений внутри. Он показал, что поперечные волны могут распространяться по такому внешнему слою без проникновения в глубину. Волны такого типа стали называться *волнами Лява*.

Стоунли [137] рассмотрел более общую задачу распространения волн на поверхности раздела двух твердых сред. Он показал, что в средах должны распространяться волны, аналогичные волнам Релея, причем амплитуды в них должны достигать максимума на поверхности раздела. Стоунли исследовал также обобщенный тип волны Лява, которая распространяется вдоль внутреннего пласта, ограниченного с обеих сторон толстыми слоями материала, отличающегося по своим упругим свойствам¹⁾.

§ 6. Отражение упругих волн от свободной границы

В предыдущих разделах было показано, что в твердой среде могут распространяться два типа упругих волн. Установлено, что при падении волны любого типа на границу двух сред происходит как отражение, так и преломление. В более общем случае возникают четыре различные волны; волна каждого типа отражается, и волна каждого типа преломляется.

Вначале мы покажем, что при отражении плоской волны расширения от свободной поверхности (в идеальном случае — от границы вакуума, где не могут возникнуть преломленные волны) граничные условия не могут быть удовлетворены в предположении, что отражается только волна расширения. Затем перейдем к разысканию амплитуды и направления дополнительной отраженной волны искажения, которая необходима для удовлетворения этим граничным условиям.

Пусть направление распространения падающей волны расширения в плоскости xu составляет угол α_1 с осью x , а свободной границей является плоскость yz (фиг. 5). Рассмотрим простую гармоническую волну, в которой перемещение, перпендикулярное к фронту волны, есть Φ_1 ; тогда можно положить

$$\Phi_1 = A_1 \sin(pt + f_1x + g_1y),$$

¹⁾ В наиболее общем виде задача о распространении поверхностных волн рассмотрена С. Л. Соболевым (Матем. сб., т. 40, 1933), Е. А. Нарышкиной (Труды сейсм. ин-та АН СССР, № 90, 1940) и И. Г. Петровским (ДАН СССР, XLVII, № 4, 1945). — *Прим. перев.*

где A_1 — амплитуда волны,

$$f_1 = \frac{p \cos \alpha_1}{c_1}, \quad g_1 = \frac{p \sin \alpha_1}{c_1}$$

и c_1 — скорость распространения волн. (Здесь взята волна, распространяющаяся в направлении убывающих x и y .) Если u_1 и v_1 — перемещения для этой волны, параллельные направлениям x и y соответственно, то

$$u_1 = \Phi_1 \cos \alpha_1, \quad v_1 = \Phi_1 \sin \alpha_1.$$

Далее, пусть отраженная волна расширения составляет угол α_2 с осью x и ее перемещение, перпендикулярное к фронту волны, есть Φ_2 . Тогда

$$\Phi_2 = A_2 \sin(pt - f_2 x + g_2 y + \delta_1),$$

где

$$f_2 = \frac{p \cos \alpha_2}{c_1}, \quad g_2 = \frac{p \sin \alpha_2}{c_1},$$

δ_1 — постоянная, учитывающая изменение в фазе волны при отражении, A_2 — амплитуда. Если u_2 и v_2 — перемещения, производимые отраженной волной, то

$$u_2 = -\Phi_2 \cos \alpha_2 \quad \text{и} \quad v_2 = \Phi_2 \sin \alpha_2.$$

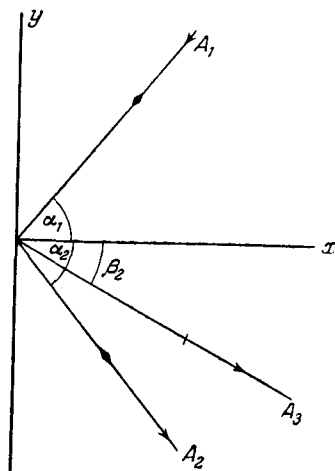
На свободной границе ($x=0$) σ_{xx} и σ_{yx} должны быть равны нулю для всех значений y и t . Обозначим через u и v полные перемещения, производимые падающей и отраженной волнами; из уравнения (2.3) имеем

$$\sigma_{xx} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

(Так как, по предположению, перемещения в направлении z отсутствуют, то $\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$.)

Подставляя $u_1 + u_2$ вместо u в выражение для σ_{xx} и $v_1 + v_2$ вместо v в выражение σ_{yx} , получим (после дифференцирования и



Фиг. 5. Отражение волны расширения от свободной границы.

Жирными ромбиками помечены волны расширения, штрихом — волна искажения.

перегруппировки членов)

$$\sigma_{xx} = [\lambda (f_1 \cos \alpha_1 + g_1 \sin \alpha_1) + 2\mu f_1 \cos \alpha_1] \Phi'_1 + \\ + [\lambda (f_2 \cos \alpha_2 + g_2 \sin \alpha_2) + 2\mu f_2 \cos \alpha_2] \Phi'_2,$$

где

$$\Phi'_1 = A_1 \cos (pt + f_1 x + g_1 y),$$

$$\Phi'_2 = A_2 \cos (pt - f_2 x + g_2 y + \delta_1).$$

При подстановке f_1 , f_2 , g_1 и g_2 это выражение упрощается:

$$\sigma_{xx} = \frac{p}{c_1} [(\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha_1) \Phi'_1 + (\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha_2) \Phi'_2].$$

Из условия на границе после подстановки значений Φ'_1 и Φ'_2 получаем

$$A_1 (\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha_1) \cos (pt + g_1 y) + \\ + A_2 (\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha_2) \cos (pt + g_2 y + \delta_1) = 0.$$

Это уравнение может удовлетворяться при любых значениях y и t только в том случае, когда $g_1 = g_2$ (т. е. $\alpha_1 = \alpha_2$), $\delta_1 = 0$ и $A_1 = -A_2$ или $\delta_1 = \pi$ и $A_1 = A_2$. Оба решения, конечно, эквивалентны друг другу и соответствуют изменению в фазе на π при отражении.

Если мы теперь рассмотрим второе условие, означающее, что на границе не должно быть касательных напряжений, и таким же путем подставим u и v в выражение для σ_{yx} , то получим

$$\sigma_{yx} = \mu \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 \sin \alpha_1 + \Phi_2 \sin \alpha_2) + \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 \cos \alpha_1 - \Phi_2 \cos \alpha_2) \right];$$

после преобразований это дает на границе ($x = 0$)

$$\sigma_{yx} = \frac{\mu}{c_1} [A_1 \sin 2\alpha_1 \cos (pt + g_1 y) - A_2 \sin 2\alpha_2 \cos (pt + g_2 y)].$$

Однако написанное выражение не равно нулю при условиях, которые необходимы для обращения в нуль σ_{xx} (т. е. $\alpha_1 = \alpha_2$ и $A_1 = -A_2$); значит, если мы примем, что отражается только волна расширения, то мы не сможем удовлетворить обоим граничным условиям — условиям отсутствия касательных и нормальных напряжений. Если же мы предположим, что, кроме того, отражается еще и волна искажения, то окажется возможным удовлетворить обоим граничным условиям. Пусть направление распространения отраженной волны искажения образует угол β_2 с осью x (фиг. 5) и пусть перемещение, производимое ею, есть Φ_3 , тогда

$$\Phi_3 = A_3 \sin (pt - f_3 x + g_3 y + \delta_2),$$

где

$$f_3 = \frac{p \cos \beta_2}{c_2} \quad \text{и} \quad g_3 = \frac{p \sin \beta_2}{c_2},$$

c_2 — скорость распространения волн искажения, а δ_3 — постоянная, учитывающая изменение в фазе при отражении. Колебания этих волн сдвига будут поперечными и должны происходить в плоскости xu , так как мы предположили, что движения в направлении z нет. Если обозначить добавочные перемещения от этой волны через u_3 и v_3 , то

$$u_3 = \Phi_3 \sin \beta_2, \quad v_3 = \Phi_3 \cos \beta_2.$$

Рассмотрим теперь условие отсутствия напряжения сдвига на границе ($x = 0$); оно требует

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

где

$$u = u_1 + u_2 + u_3, \quad v = v_1 + v_2 + v_3.$$

Подставляя значения u и v , получим

$$(f_1 \sin \alpha_1 + g_1 \cos \alpha_1) \Phi_1' - (f_2 \sin \alpha_2 + g_2 \cos \alpha_2) \Phi_2' - \\ - (f_3 \cos \beta_2 - g_3 \sin \beta_2) \Phi_3' = 0.$$

Производя замену всех входящих сюда функций через соответствующие им выражения, будем иметь

$$\frac{A_1}{c_1} p \sin 2\alpha_1 \cos (pt + g_1 y) - \frac{A_2}{c_1} p \sin 2\alpha_2 \cos (pt + g_2 y + \delta_1) - \\ - \frac{A_3}{c_2} p \cos 2\beta_2 \cos (pt + g_3 y + \delta_2) = 0.$$

Это уравнение может удовлетворяться для всех значений y и t только при $g_1 = g_2 = g_3$, т. е. при

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_1} = \frac{\sin \beta_2}{c_2};$$

отсюда получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{и} \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Таким образом, волна расширения отражается под углом, равным углу падения, а отражение волны искажения подобно преломлению света, причем „коэффициент преломления“ равен отношению скорости волны расширения к скорости волны искажения, т. е. $\sqrt{2 + \lambda/\mu}$. Мы должны также положить δ_1 и δ_2 равными нулю или π ; если принять, что они равны нулю, после подстановки значения c_1/c_2 получим соотношение между амплитудами:

$$2(A_1 - A_2) \cos \alpha_1 \sin \beta_2 - A_3 \cos 2\beta_2 = 0. \quad (2.41)$$

Теперь можно видеть, что условие отсутствия нормального напряжения на границе также удовлетворяется. Имеем

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y},$$

что после подстановки $u = u_1 + u_2 + u_3$ и $v = v_1 + v_2 + v_3$ дает при $x = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{A_1}{c_1} p (\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha_1) \cos (pt + g_1 y) + \\ & + \frac{A_2}{c_1} p (\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha_2) \cos (pt + g_2 y + \delta_1) - \\ & - \frac{A_3}{c_3} p (\mu \sin 2\beta_2) \cos (pt + g_3 y + \delta_2). \end{aligned}$$

Если, как прежде, $g_1 = g_2 = g_3$ и $\delta_1 = \delta_2 = 0$, то это выражение будет равно нулю для всех значений y и t при выполнении условия для амплитуд:

$$(A_1 + A_2) (\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha_1) - A_3 \frac{c_1}{c_2} \mu \sin 2\beta_2 = 0.$$

Подставляя λ и μ из соотношения $(\lambda + 2\mu)/\mu = c_1^2/c_2^2 = \sin^2 \alpha_1/\sin^2 \beta_2$, перепишем это условие в виде

$$(A_1 + A_2) \cos 2\beta_2 \sin \alpha_1 - A_3 \sin \beta_2 \sin 2\beta_2 = 0. \quad (2.42)$$

Из уравнений (2.41) и (2.42) можно подсчитать амплитуды двух отраженных волн, и, так как эти уравнения приложимы к гармоническим волнам любой частоты, они справедливы также для волн произвольной формы¹⁾. При нормальном падении $A_3 = 0$ и отраженных

¹⁾ Для отражения плоских волн расширения произвольного вида от плоской границы известно следующее решение (см., например, написанную С. Л. Соболевым главу XII в книге: Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, М.—Л., 1937). Пусть падающая плоская волна расширения задана потенциалами

$$\begin{cases} \varphi_1 = f\left(t - \theta x + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2} y\right) & (|\theta| < \frac{1}{a}) \\ \psi_1 = 0, \end{cases}$$

где $1/\theta$ — так называемая кажущаяся скорость, равная скорости движения следа волны на граничной плоскости $y = 0$. Разыскивая отраженные волны расширения и искажения в виде

$$\begin{cases} \varphi_2 = Af\left(t - \theta x - \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2} y\right), \\ \psi_2 = Bf\left(t - \theta x - \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2} y\right) \end{cases}$$

и используя условия, что граничная поверхность $y = 0$ свободна от напряжений,

волн искажения не возникает. Амплитуда отраженной волны расширения равна в этом случае амплитуде падающей волны, а фаза при отражении от границы изменяется на π .

На фиг. 6 значения отношений A_2/A_1 и A_3/A_1 нанесены в функции угла падения для материала с пуассоновым отношением, равным $1/3$. Отношение c_1/c_2 равно $[(\lambda + 2\mu)/\mu]^{1/2}$, и из уравнения (2.5) видно, что $c_1/c_2 = 2$ при этом значении ν . Графики показывают, что амплитуда отраженной волны искажения достигает максимума при угле падения около 48° и это максимальное значение больше амплитуды падающей волны. Амплитуда отраженной волны расширения достигает минимума при угле падения около 65° ; при касательном падении отраженных волн искажения нет, а A_2/A_1 снова становится равным единице. Надо заметить, что поток энергии волны искажения меньше, чем поток энергии волны расширения при той же амплитуде перемещения (отношение потоков энергии равно c_2/c_1), и что вместе с тем, так как волна искажения отражается с меньшим углом, чем угол падения волны расширения, ширина отраженного луча волны искажения больше ширины падающего луча волн расширения и, следовательно, плотность энергии будет этим уменьшаться. Если принять это во внимание, то из фиг. 6 найдем, что сумма энергий двух отраженных волн равна энергии падающей волны расширения.

Рассмотрим, наконец, отражение волны искажения, падающей на свободную границу. Как и прежде, имеем плоскую волну, распространяющуюся параллельно плоскости xu и падающую на плоскую границу, совпадающую с плоскостью uz . Пусть угол падения есть β'_1 (фиг. 7). Чтобы решить эту задачу, надо уточнить направление колебаний в волне. Перемещение, возникающее от любой волны

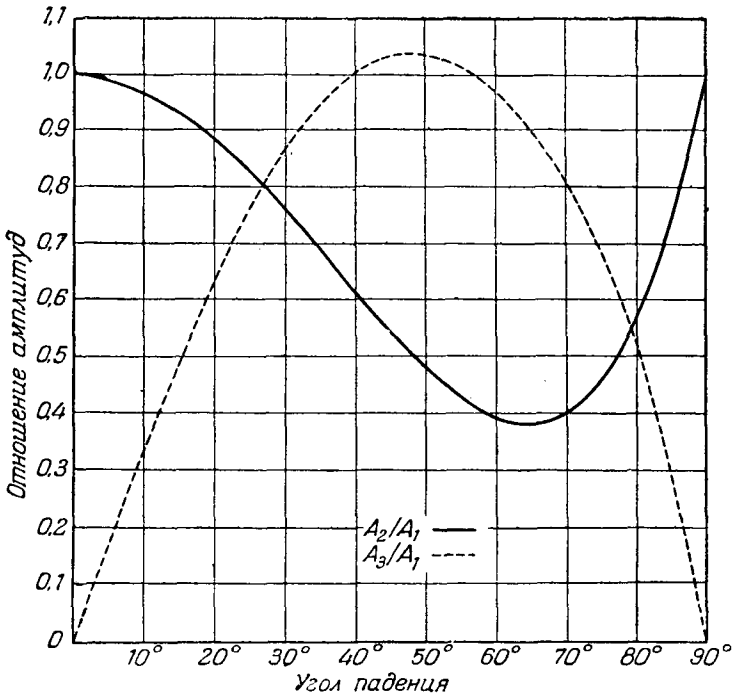
найдем

$$A = \frac{-(2\theta^2 - \frac{1}{b^2})^2 + 4\theta^2 \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}}{(2\theta^2 - \frac{1}{b^2})^2 + 4\theta^2 \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}},$$

$$B = \frac{-4\theta(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}) \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}}{(2\theta^2 - \frac{1}{b^2})^2 + 4\theta^2 \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}}$$

(a и b — скорости волн расширения и искажения). Так как $|\theta| < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, то A и B имеют действительные значения. При $\theta = 0$ (случай нормального падения) $B = 0$, т. е. отраженной волны искажения не возникает. Непосредственно из выражений для φ_1 и φ_2 выводится „закон синусов“: $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} = \frac{a}{b}$. — Прим. перев.

искажения, можно рассматривать как результат наложения двух составляющих волн, направления колебания в которых образуют прямой угол. Значит, достаточно определить условия отражения волны с колебанием, параллельным оси z , и волны с колебаниями в перпендикуляром к z направлению. Условия для любого другого



Фиг. 6. Амплитуды отраженных волн расширения и искажения при различных углах падения для $\nu = 1/3$.

направления колебаний можно тогда найти, комбинируя полученные результаты.

Граничные условия, которым надо удовлетворить, следующие:

$$\sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

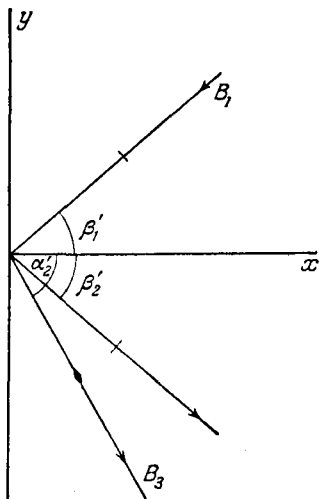
Для волны с направлением колебаний, параллельным оси z , движения в направлениях x и y нет, так что $u = 0$ и $v = 0$. Значит, волна искажения такой же амплитуды и противоположной фазы, отражающаяся под углом, равным углу падения, удовлетворяет граничным условиям, и волна расширения не возникает.

Для волны искажения с направлением колебаний, перпендикулярным оси z , решение аналогично тому, которое уже описано для падающей волны расширения. Здесь нет движения в направлении оси z , и соответствующие условия на границе суть $\sigma_{xx} = 0$ и $\sigma_{yx} = 0$. Оказывается, что этим условиям можно удовлетворить только в предположении, что отражается не только волна искажения, но и волна расширения. Волна искажения отражается под углом, равным углу падения, а волна расширения отражается под углом α'_2 , причем $\sin \alpha'_2 / \sin \beta'_1 = c_1 / c_2$. Если амплитуда падающей волны искажения равна B_1 , отраженной волны искажения B_2 и отраженной волны расширения B_3 , то условие $\sigma_{xx} = 0$ при $x = 0$ дает

$$(B_1 + B_2) \sin 2\beta'_1 \sin \beta'_1 - B_3 \sin \alpha'_2 \cos 2\beta'_1 = 0. \quad (2.43)$$

С другой стороны, из условия $\sigma_{yx} = 0$ при $x = 0$ имеем

$$(B_1 - B_2) \cos 2\beta'_1 - 2B_3 \sin \beta'_1 \cos \alpha'_2 = 0. \quad (2.44)$$



Фиг. 7. Отражение волны искажения от свободной границы.

Из этих уравнений при любом угле падения можно найти B_2/B_1 и B_3/B_1 , причем видно, что в случае нормального падения ($\beta'_1 = 0$) $B_3 = 0$ и отраженной волны расширения нет¹⁾.

§ 7. Отражение и преломление на границе раздела двух сред

Когда упругая волна любого типа встречает свободную по отношению к сдвигу границу, возникает, вообще говоря, четыре волны. Две из них преломляются во вторую среду, две другие отражаются. Исследование этой задачи подобно тому, которое уже описано для отражения от свободной границы, и потому не нуждается в детальном разборе. Полное описание общего случая отражения и

¹⁾ Как и в случае продольных волн, для рассмотренного здесь случая движения в плоскости распространения имеется решение для отражения плоской волны искажения произвольного вида от плоской границы (см. написанную С. Л. Соболевым главу XII в книге: Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, М.—Л., 1937).

преломления на плоской границе раздела двух сред дано Кноттом [172], Зёппритцем [65] и Мекльваном и Зооном [90]¹⁾.

В этой задаче имеются четыре различных граничных условия — значения следующих четырех величин:

- I. Нормальное перемещение,
- II. Касательное перемещение,
- III. Нормальное напряжение,
- IV. Касательное напряжение

по обе стороны границы раздела должны совпадать.

Задавая падающую на свободную границу $y = 0$ волну искажения потенциалами

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \psi_1 = f\left(t - \theta x - \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2} y\right) \quad \left(|\theta| < \frac{1}{b}\right) \end{cases}$$

и разыскивая отраженные волны в форме

$$\begin{cases} \varphi_2 = Cf\left(t - \theta x - \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2} y\right) \\ \psi_2 = Df\left(t - \theta x - \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2} y\right), \end{cases}$$

путем подстановки в граничные условия находим

$$C = \frac{4\theta \left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right) \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}}{\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4\theta^2 \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}},$$

$$D = \frac{-\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4\theta^2 \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}}{\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4\theta^2 \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}}.$$

При нормальном падении ($\theta = 0$) $C = 0$ и продольной отраженной волны не возникает. Непосредственно получается также закон синусов для угла отражения продольной волны.

Условие $|\theta| < \frac{1}{b}$ не обеспечивает неравенства $|\theta| < \frac{1}{a}$. Но при $|\theta| > \frac{1}{a}$ написанное решение теряет смысл, так как C и D становятся комплексными.

При таких углах падения (величина кажущейся скорости $\frac{1}{\theta}$ связана, очевидно, с углом падения) наступает явление полного отражения (см. ниже, § 8), для исследования которого требуется анализ комплексных решений. — *Прим. перев.*

¹⁾ Из работ советских ученых по этому вопросу см., например, Нарышкина Е. А., Труды сейсм. ин-та АН СССР, № 38, 1934; Гоголадзе В. Г., ДАН СССР, XLIX, № 7, 1945, и др. — *Прим. перев.*

Теперь вместо одного перемещения возникают пять (одно от падающей волны, два от отраженных волн и два от преломленных волн). Если рассматривать волну, распространяющуюся в плоскости xu , и принять за границу раздела плоскость uz , то граничные условия можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \sum u_a = \sum u_b, \\ \text{II. } & \sum v_a = \sum v_b \text{ и } \sum w_a = \sum w_b, \\ \text{III. } & \sum (\sigma_{xx})_a = \sum (\sigma_{xx})_b \end{aligned}$$

или, подставляя выражения напряжений через перемещения из уравнений (2.3),

$$\sum \left(\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_a = \sum \left(\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_b,$$

$$\text{IV. } \sum (\sigma_{yx})_a = \sum (\sigma_{yx})_b \text{ и } \sum (\sigma_{zx})_a = \sum (\sigma_{zx})_b,$$

что также с помощью уравнений (2.3) дает

$$\sum \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_a = \sum \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_b$$

и

$$\sum \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_a = \sum \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_b.$$

Компоненты напряжения и деформации в первой среде отмечены индексом a , а во второй среде индексом b . Написанные выше граничные условия задаются в плоскости $x = 0$.

Рассмотрим волну расширения, распространяющуюся параллельно плоскости xu и падающую на границу под углом α_1 ; пусть углы отражения и преломления волн расширения равны α_2 и α_3 соответственно, а углы отражения и преломления волн искажения суть β_2 и β_3 соответственно (фиг. 8). Найдено (Мекльван и Зоон), что граничные условия будут удовлетворены, если предположить, что к этим волнам применим принцип Гюйгенса; иначе говоря, что фронт волны на любом расстоянии представляет собой огибающую ряда сферических волн, исходящих из точек фронта волны в предшествующем состоянии. Такое построение, как и в случае света, приводит к соотношению

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_1} = \frac{\sin \beta_2}{c_2} = \frac{\sin \alpha_3}{c_3} = \frac{\sin \beta_3}{c_4}, \quad (2.45)$$

где c_1 и c_2 — скорости распространения волн расширения и искажения в первой среде, а c_3 и c_4 — соответствующие скорости во второй среде. Пусть амплитуда падающей волны расширения равна A_1 , отраженной и преломленной волн расширения — A_2 и A_4 соответственно, а для соответствующих волн искажения — A_3 и A_5 (фиг. 8).

Подстановка в граничные условия приводит к четырем соотношениям между амплитудами. Так, условие I дает

$$(A_1 - A_2) \cos \alpha_1 + A_3 \sin \beta_2 - A_4 \cos \alpha_3 - A_5 \sin \beta_3 = 0; \quad (2.46)$$

первая часть условия II (т. е. соотношение $\sum v_a = \sum v_b$) дает

$$(A_1 + A_2) \sin \alpha_1 + A_3 \cos \beta_2 - A_4 \sin \alpha_3 + A_5 \cos \beta_3 = 0; \quad (2.47)$$

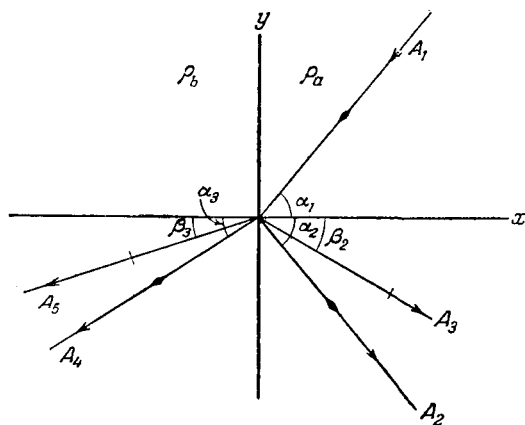
условие III, вследствие того, что $w = 0$ и движение происходит в плоскости xu , приводит к равенству

$$\sum \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \right]_a = \sum \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \right]_b,$$

откуда следует соотношение

$$(A_1 + A_2) c_1 \cos 2\beta_2 - A_3 c_2 \sin 2\beta_2 - A_4 c_3 (\rho_b / \rho_a) \cos 2\beta_3 - \\ - A_5 c_4 (\rho_b / \rho_a) \sin 2\beta_3 = 0, \quad (2.48)$$

где ρ_a и ρ_b — плотности двух сред (λ и μ выражены здесь через скорости распространения и плотности сред).



Фиг. 8. Отражение и преломление волны расширения, падающей на плоскую границу раздела.

Наконец, из первого условия IV

$$\sum (\sigma_{yx})_a = \sum (\sigma_{yx})_b$$

получаем после подстановки значений компонент напряжения

$$\rho_a c_2^2 [(A_1 - A_2) \sin 2\alpha_1 - A_3 (c_1/c_2) \cos 2\beta_2] - \\ - \rho_b c_4^2 [A_4 (c_1/c_3) \sin 2\alpha_3 - A_5 (c_1/c_4) \cos 2\beta_3] = 0. \quad (2.49)$$

Четыре совместных уравнения (2.46), (2.47), (2.48) и (2.49) позволяют выразить амплитуды отраженных и преломленных волн через амплитуду падающей волны расширения.

В случае нормального падения α_1 равно нулю и, вследствие (2.45), все другие углы также равны нулю; тогда из указанных четырех уравнений можно видеть, что A_3 и A_5 обращаются в нуль, так что возникают только волны расширения. Решения для A_2 и A_4 имеют вид

$$A_2 = A_1 (\rho_b c_3 - \rho_a c_1) / (\rho_b c_3 + \rho_a c_1), \quad (2.50)$$

$$A_4 = A_1 2\rho_a c_1 / (\rho_b c_3 + \rho_a c_1). \quad (2.51)$$

Амплитуда отраженной волны напряжения зависит, следовательно, от величины $(\rho_b c_3 - \rho_a c_1)$, и если произведение плотности на скорость одинаково в двух средах, то никаких отраженных волн при нормальном падении не возникает. Это произведение ρc называется *характеристическим импедансом* среды. Из (2.50) видно, что, если характеристический импеданс второй среды больше, чем первой, амплитуда перемещения при отражении имеет тот же знак, что и в падающей волне. Так как, однако, направления распространения падающей и отраженной волн противоположны, это соответствует изменению в фазе колебаний на π . Если характеристический импеданс второй среды меньше, чем первой, амплитуда также меняет знак, так что при отражении изменения в фазе не происходит.

Переходим теперь к отражению и преломлению волн искажения, падающих на плоскость раздела. Предположим, что падающая волна с амплитудой B_1 распространяется параллельно плоскости xu и встречает под углом β'_1 плоскость раздела, совпадающую с плоскостью uz . Как и в случае отражения от свободной поверхности, надо уточнить направление колебаний в падающей волне искажения, причем следует рассмотреть два различных случая, именно, когда колебания параллельны оси z и когда они перпендикулярны ей, т. е. происходят в плоскости xu .

Если колебания параллельны оси z , то перпендикулярно поверхности раздела движения нет и отраженных или преломленных волн расширения не возникает. Пусть амплитуды отраженной и преломленной волн искажения суть B_2 и B_5 ; первая отразится под углом, равным углу падения, а вторая преломится под углом β'_3 , таким, что $\sin \beta'_3 / \sin \beta'_1 = c_4 / c_2$. К этому случаю применимы только вторые части граничных условий II и IV:

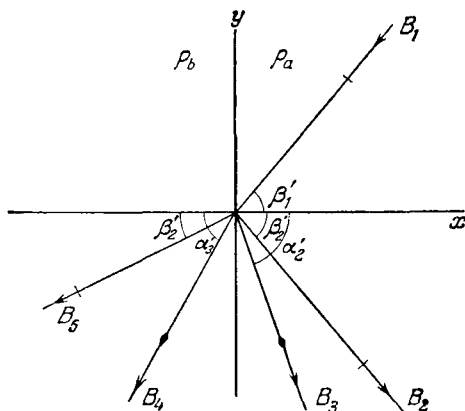
$$\sum \omega_a = \sum \omega_b \quad \text{и} \quad \sum (\sigma_{zx})_a = \sum (\sigma_{zx})_b,$$

из которых получаем

$$B_1 + B_2 - B_5 = 0, \quad (2.52)$$

$$\rho_a \sin 2\beta'_1 (B_1 - B_2) - B_5 \rho_b \sin 2\beta'_3 = 0. \quad (2.53)$$

Если колебания в падающей волне происходят параллельно плоскости xu , то возникают четыре волны (фиг. 9). Для удовлетворения граничным условиям углы должны снова подчиняться закону синусов,



Фиг. 9. Отражение и преломление волны искажения, падающей на плоскую границу раздела.

как в уравнениях (2.45), так что, обозначая углы, образуемые отраженной и преломленной волнами расширения с нормалью, через α'_2 и α'_3 соответственно, а их амплитуды через B_3 и B_4 , будем иметь

$$\frac{\sin \beta'_1}{c_2} = \frac{\sin \beta'_2}{c_2} = \frac{\sin \alpha'_2}{c_1} = \frac{\sin \alpha'_3}{c_3} = \frac{\sin \beta'_3}{c_4}. \quad (2.54)$$

Четыре граничных условия приводят в этом случае к следующим соотношениям между амплитудами:

$$(B_1 - B_2) \sin \beta'_1 + B_3 \cos \alpha'_2 + B_4 \cos \alpha'_3 - B_5 \sin \beta'_3 = 0, \quad (2.55)$$

$$(B_1 + B_2) \cos \beta'_1 + B_3 \sin \alpha'_2 - B_4 \sin \alpha'_3 - B_5 \cos \beta'_3 = 0, \quad (2.56)$$

$$c_2(B_1 + B_2) \sin 2\beta'_1 - B_3 c_1 \cos 2\beta'_1 + \\ + B_4 c_3 (\rho_b / \rho_a) \cos 2\beta'_3 - B_5 c_4 (\rho_b / \rho_a) \sin 2\beta'_3 = 0, \quad (2.57)$$

$$\rho_a c_2 [(B_1 - B_2) \cos 2\beta'_1 - B_3 (c_2 / c_1) \sin 2\alpha'_2] - \\ - \rho_b c_4 \left[\frac{c_4}{c_3} B_4 \sin 2\alpha'_3 + B_5 \cos 2\beta'_3 \right] = 0. \quad (2.58)$$

Видно, что при нормальном падении волны расширения не возникают и написанные выше соотношения упрощаются:

$$B_1 + B_2 - B_5 = 0,$$

$$\rho_a c_2 (B_1 - B_2) - \rho_b c_4 B_5 = 0,$$

Если произведение скорости волны искажения на плотность одинаково для обеих сред, то в случае нормального падения $B_2 = 0$ и волна искажения не отражается.

Соотношения между амплитудами при отражении от свободной поверхности можно вывести из общих уравнений на границе раздела двух сред, полагая ρ_2 равным нулю. Условия I и II равенства перемещений неприменимы, но уравнения, полученные из условий III и IV, т. е. (2.48), (2.49), (2.57) и (2.58), приводятся к уравнениям (2.41) — (2.44), полученным для свободной границы в предыдущем параграфе.

§ 8. Полное отражение

В предыдущих двух разделах граничные условия удовлетворялись с помощью соотношений типа (2.45) между скоростями волн в обеих средах и углами падения, отражения и преломления. Однако, когда скорость распространения отраженной или преломленной волны больше скорости падающей волны, должен существовать критический угол падения, при котором угол отражения или преломления становится равным $\pi/2$. Для углов падения, больших этого, соотношение перестает быть верным и положение становится подобным тому, которое известно как полное внутреннее отражение в оптике.

В случае свободной границы это наступает только для волны искажения, падающей под углом, синус которого больше $\sqrt{\mu/(\lambda + 2\mu)}$. Для волны, падающей на границу раздела двух сред, существует также критический угол падения и по отношению к преломлению волн; так, если c_3 больше c_1 , падающая волна расширения будет порождать волну расширения во второй среде только в том случае, когда синус угла падения меньше c_1/c_3 . Для углов падения, больших критического, задачу надо решать, как и в оптике, с помощью функций комплексного переменного. Найдено, что в случае отраженной или преломленной плоской волны возникает возмущение, убывающее по экспоненциальному закону с расстоянием от границы раздела. Эта волна не уносит энергию от границы, и энергия падающих волн делится между отраженной и преломленной волнами. Наличие этой затухающей волны приводит, однако, к изменению в фазе в других возникающих волнах.

Чтобы проиллюстрировать случай полного отражения, рассмотрим вновь простейший случай плоской гармонической волны искажения, падающей на свободную границу (фиг. 7). Пусть, как и ранее, волна распространяется параллельно плоскости xu , причем колебания происходят в этой плоскости. Пусть угол падения равен β'_1 и пусть волна расширения отражается под углом α'_2 , так что

$$\frac{\sin \alpha'_2}{\sin \beta'_1} = \frac{c_1}{c_2} = \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right]^{1/2}.$$

Если перемещение, производимое падающей волной параллельно ее фронту, обозначить Ψ'_1 , соответствующее перемещение для отраженной волны искажения Ψ'_2 , а для отраженной волны расширения Φ'_2 , то

$$\Psi'_1 = \text{Re} \{ B_1 \exp [i(pt + f'_1 x + g'_1 y)] \},$$

где

$$f'_1 = \frac{p \cos \beta'_1}{c_2} \quad \text{и} \quad g'_1 = \frac{p \sin \beta'_1}{c_2};$$

$$\Psi'_2 = \text{Re} \{ B_2 \exp [i(pt - f'_1 x + g'_1 y + \delta_1)] \}$$

и

$$\Phi'_2 = \text{Re} \{ B_3 \exp [i(pt - f'_2 x + g'_2 y + \delta_2)] \},$$

где

$$f'_2 = \frac{p \cos \alpha'_2}{c_1} \quad \text{и} \quad g'_2 = \frac{p \sin \alpha'_2}{c_1}.$$

Далее, если $\sin \beta'_1 > c_2/c_1$, то $\sin \alpha'_2$ становится больше единицы; значит, $\cos \alpha'_2$ чисто мнимый и f'_2 можно приравнять $-im$, где $m = (p/c_1) [(c_1/c_2)^2 \sin^2 \beta'_1 - 1]^{1/2}$. Значит, Φ'_2 становится равным $B_3 e^{-mx} \times \cos(pt + g'_2 y)$. Это соответствует волне, амплитуда которой убывает по экспоненциальному закону с расстоянием от поверхности раздела и фаза которой не зависит от x . Амплитуда отраженной волны искажения становится равной амплитуде падающей волны, т. е. $B_1 = B_2$, и для удовлетворения граничным условиям δ_1 не может принимать значения 0 или π и является функцией β_1 и c_1/c_2 .

Как упоминалось ранее, полученные соотношения между амплитудами, направлениями и фазами падающей, отраженной и преломленной синусоидальных волн не зависят от длины волны и могут быть использованы независимо от формы волны. Однако когда возникает полное отражение, это уже не имеет места и анализ становится очень сложным. Фридлендер [35] рассмотрел задачу о плоской волне искажения произвольной формы, падающей на границу раздела, когда угол падения превышает критическое значение¹⁾.

§ 9. Распространение в аэлотропной среде

При выводе уравнений движения твердой среды (2.7) было отмечено, что эти уравнения справедливы при любых зависимостях между напряжением и деформацией. Волновые уравнения изотропного упругого тела были затем получены подстановкой из соответ-

¹⁾ Анализ явления полного отражения плоской поперечной волны произвольного вида дан в главе, написанной С. Л. Соболевым в книге: Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, М.—Л., 1937.—Прим. перев.

ствующих уравнений упругости (2.3). Чтобы исследовать распространение упругих волн в аэлотропном теле, например в монокристалле, надо использовать общие зависимости (2.2) между напряжением и деформацией. Они выражают компоненты напряжения через компоненты деформации, а деформации, в свою очередь, можно выразить через перемещения u , v и w с помощью уравнений (2.1).

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в аэлотропной среде со скоростью c , причем нормаль имеет направляющие косинусы l , m и n . Перемещения u , v и w являются в этом случае функциями одного параметра

$$\psi = lx + my + nz - ct,$$

так что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = l \frac{\partial u}{\partial \psi}, & \varepsilon_{yy} &= m \frac{\partial v}{\partial \psi}, & \varepsilon_{zz} &= n \frac{\partial w}{\partial \psi}, \\ \varepsilon_{zx} &= n \frac{\partial u}{\partial \psi} + l \frac{\partial w}{\partial \psi}, & \varepsilon_{yz} &= m \frac{\partial v}{\partial \psi} + n \frac{\partial w}{\partial \psi} & \text{и} & \varepsilon_{xy} = l \frac{\partial v}{\partial \psi} + m \frac{\partial u}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

Тогда первое уравнение (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (c_{11}l + c_{16}m + c_{15}n) \frac{\partial u}{\partial \psi} + (c_{16}l + c_{12}m + c_{14}n) \frac{\partial v}{\partial \psi} + \\ &+ (c_{15}l + c_{14}m + c_{13}n) \frac{\partial w}{\partial \psi} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= l[(c_{11}l + c_{16}m + c_{15}n) u'' + (c_{16}l + c_{12}m + c_{14}n) v'' + \\ &+ (c_{15}l + c_{14}m + c_{13}n) w''], \end{aligned}$$

где u'' , v'' , w'' обозначают вторые производные от u , v и w по ψ . Аналогичные выражения можно получить для $\partial \sigma_{xy}/\partial y$ и $\partial \sigma_{xz}/\partial z$, и, так как $\partial^2 u/\partial t^2 = c^2 u''$, уравнения движения (2.7) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho c^2 u'' &= Au'' + Hv'' + Gw'' \\ \rho c^2 v'' &= Hu'' + Bv'' + Fw'' \\ \rho c^2 w'' &= Gu'' + Fv'' + Cw'' \end{aligned} \right\}, \quad (2.59)$$

где

$$A = c_{11}l^2 + c_{66}m^2 + c_{55}n^2 + 2c_{16}lm + 2c_{56}mn + 2c_{15}nl,$$

$$B = c_{66}l^2 + c_{22}m^2 + c_{44}n^2 + 2c_{26}lm + 2c_{24}mn + 2c_{46}nl,$$

$$C = c_{55}l^2 + c_{44}m^2 + c_{33}n^2 + 2c_{45}lm + 2c_{34}mn + 2c_{35}nl,$$

$$F = c_{56}l^2 + c_{24}m^2 + c_{34}n^2 + (c_{25} + c_{46})lm + (c_{23} + c_{44})mn + (c_{36} + c_{45})nl,$$

$$G = c_{15}l^2 + c_{46}m^2 + c_{85}n^2 + (c_{14} + c_{56})lm + (c_{36} + c_{45})mn + (c_{13} + c_{55})nl,$$

$$H = c_{16}l^2 + c_{26}m^2 + c_{45}n^2 + (c_{12} + c_{66})lm + (c_{25} + c_{46})mn + (c_{14} + c_{56})nl.$$

Исключение u'' , v'' , w'' из (2.15) приводит к детерминантному уравнению

$$\begin{vmatrix} (A - \rho c^2) & H & G \\ H & (B - \rho c^2) & F \\ G & F & (C - \rho c^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.60)$$

Это — кубическое относительно c^2 уравнение, имеющее три положительных корня для любого реального упругого тела. В общем случае эти корни различны и соответствуют трем различным скоростям распространения. Значение этих скоростей зависит от двадцати одной упругой постоянной материала и направления распространения, определяемого величинами l , m и n . Волновая поверхность представляет собой три полосы, подобные двум полосам поверхности Френеля при распространении света в кристаллической среде. Можно показать [70], что когда три скорости распространения различны, уравнения (2.59) означают, что направления колебаний, соответствующие трем скоростям, взаимно перпендикулярны. Когда две скорости распространения совпадают, соответствующие им колебания образуют простое волновое движение, происходящее в плоскости, перпендикулярной направлению третьего колебания. Когда это имеет место, совместное движение, как и в случае света, может иметь форму плоской поляризации, эллиптической поляризации или круговой поляризации — в зависимости от фазовых соотношений двух компонент колебания и их амплитуд.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ В ОГРАНИЧЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

В предыдущей главе были получены уравнения движения изотропной твердой среды (2.8), (2.9) и (2.20), выраженные через перемещения. Теоретически распространение волн напряжения в ограниченном изотропном твердом теле можно изучить, решая эти уравнения при определенных граничных условиях. Из рассмотрения отражения плоской упругой волны от плоскости раздела можно видеть, что при наличии нескольких свободных поверхностей задача не является столь простой и фактически, за исключением простейших случаев, точных ее решений не найдено.

В этой главе вначале рассматривается распространение волны напряжения вдоль цилиндрического стержня, так как эта задача исследована теоретически наиболее полно и имеется достаточно много экспериментальных данных. Прежде чем заняться ее исследованием в точной постановке, мы рассмотрим простейший подход, применимый к распространению волн, длина которых велика по сравнению с диаметром стержня.

Имеется три типа колебаний в тонком стержне или балке: продольные, крутильные и поперечные. При продольных колебаниях элемент стержня удлиняется, но нет никаких поперечных перемещений оси стержня. При крутильных колебаниях каждое поперечное сечение стержня, оставаясь в своей плоскости, поворачивается относительно своего центра, а ось стержня остается невозмущенной. Наконец, поперечные колебания соответствуют изгибу частей стержня, при котором элементы его центральной оси движутся в поперечном направлении.

§ 1. Продольные колебания стержней

Если считать, что каждое плоское поперечное сечение стержня во время движения остается плоским, а напряжение распределено по нему равномерно, то уравнение движения можно получить непосредственно. Рассмотрим малый элемент стержня PQ длины δx с площадью поперечного сечения, равной A (фиг. 10). Пусть напряжение в плоскости, проходящей через P , равно σ_{xx} , тогда на другом конце элемента напряжение равно $\sigma_{xx} + (\partial\sigma_{xx}/\partial x)\delta x$ и по второму закону Ньютона имеем

$$\rho A \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x, \quad (3.1)$$

где ρ — плотность стержня. Отношение напряжения σ_{xx} к деформации $\partial u/\partial x$ равно модулю упругости E , так что (3.1) можно записать в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

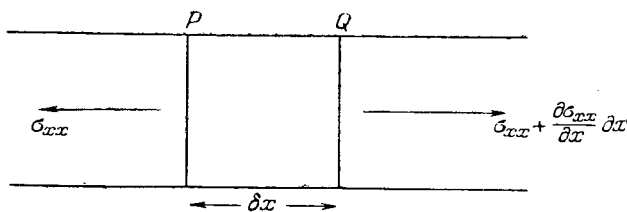
Это уравнение описывает распространение продольных волн вдоль стержня со скоростью $\sqrt{E/\rho}$; оно имеет ту же форму, что и (2.15). Решение уравнения (3.2) можно представить в виде

$$u = f(c_0 t - x) + F(c_0 t + x), \quad (3.3)$$

где

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3.4)$$

а F и f — произвольные функции, определяемые начальными условиями. Функция f соответствует волне, распространяющейся в направлении



Фиг. 10. Силы, действующие на элемент стержня при продольном движении.

возрастания x , а функция F — волне, распространяющейся в противоположном направлении. При выводе уравнения (3.2) не было предположено, что стержень обязательно цилиндрический, и это уравнение приложимо в равной мере к тонким стержням или балкам любого поперечного сечения, не изменяющегося по длине.

Приближенность приведенного подхода состоит в предположении, что плоские поперечные сечения стержня остаются плоскими при прохождении волн напряжения, а напряжение равномерно распределено по каждому поперечному сечению. Между тем продольные удлинения и сокращения отрезков стержня обязательно сопровождаются поперечными сокращениями и расширениями, причем отношение поперечных и продольных деформаций равно пуассонову отношению ν . Это поперечное движение приводит к неоднородному распределению напряжений по поперечному сечению стержня, так что плоские поперечные сечения искажаются. Влияние поперечного движения в цилиндрических стержнях будет рассмотрено позже, причем будет показано,

что оно становится важным, когда истинные длины волн будут того же порядка, что и диаметр стержня.

Рассмотрим, прежде всего, следствия уравнения (3.3), приложимые к распространению упругих волн, длины которых велики по сравнению с поперечными размерами стержня. Для простоты рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении убывающих x ; тогда

$$u = f(c_0 t + x). \quad (3.5)$$

Дифференцируя обе части (3.5) по x , получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(c_0 t + x), \quad (3.6)$$

где f' означает производную по аргументу $(c_0 t + x)$. Затем, дифференцируя (3.5) по t , получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_0 f'(c_0 t + x); \quad (3.7)$$

тогда из (3.6) и (3.7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_0 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Далее, $\partial u / \partial x$ равно σ_{xx} / E , так что

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{c_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \rho c_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) показывает, что напряжение в каждой точке связано со скоростью частицы прямой пропорциональностью с коэффициентом, равным ρc_0 , соответствующим *характеристическому импедансу*, определенному ранее в связи с уравнениями (2.50) и (2.51). По аналогии со случаем электропроводности уравнение (3.8) представляет механический аналог закона Ома, а значение характеристического импеданца материала в системе С. Г. С. выражается в „акустических омах“.

Так как скорость распространения c_0 не зависит от частоты волн напряжения, импульс напряжения, компоненты Фурье которого имеют длины волн, большие по сравнению с диаметром стержня, будут распространяться без дисперсии. Когда такой импульс достигнет свободного конца стержня, он отразится. Чтобы найти природу отраженного импульса, используем граничные условия, выражающие отсутствие нормальных напряжений в концевом сечении. Если перемещение в падающем импульсе равно

$$u_1 = F(c_0 t + x), \quad (3.9)$$

а перемещение в отраженном импульсе

$$u_2 = f(c_0 t - x), \quad (3.10)$$

то напряжения, производимые этими импульсами, составляют

$$E \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad \text{и} \quad E \frac{\partial u_2}{\partial x},$$

так что результирующее напряжение равно

$$E \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = E [F'(c_0 t + x) - f'(c_0 t - x)]. \quad (3.11)$$

Если измерять x от конца стержня, то условие, что этот конец свободен от напряжения, имеет вид

$$F'(c_0 t) - f'(c_0 t) = 0. \quad (3.12)$$

Следовательно, отраженный импульс давления имеет ту же форму, что и падающий, но противоположен по знаку, т. е. импульс сжатия, отразившись, становится таким же импульсом растяжения. Перемещение любой точки стержня равно $u_1 + u_2$ и на свободном конце стержня ($x = 0$) оно равно $2F(c_0 t)$, так что перемещения, а значит и скорости частиц на конце стержня равны удвоенным значениям их во время распространения импульса вдоль стержня.

Когда импульс давления отражается от закрепленной границы на конце стержня, граничное условие требует равенства нулю перемещения при $x = 0$. Из (3.9) и (3.10) общее перемещение равно

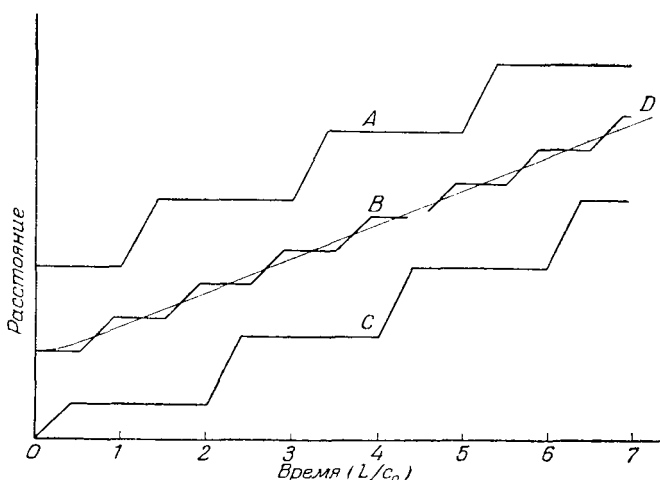
$$u_1 + u_2 = F(c_0 t + x) + f(c_0 t - x), \quad (3.13)$$

откуда при $x = 0$ имеем $f(c_0 t) = -F(c_0 t)$; значит, перемещение u_2 в отраженном импульсе равно по величине и противоположно по направлению перемещению в падающем импульсе. Напряжение, возникающее в отраженном импульсе, равно $E \frac{\partial u_2}{\partial x}$ или, по доказанному сейчас, равно $E \frac{\partial u_1}{\partial x}$,

т. е. напряжению в падающем импульсе. Итак, импульс давления, отражаясь от жесткой границы, не изменяется, так как распределение давления остается прежним, но направление перемещения и направления распространения изменяются на обратные. Таким образом, напряжения, производимые падающим и отраженным импульсами, складываются на закрепленном конце, и значение результирующего напряжения равно удвоенному значению напряжения при распространении импульса вдоль стержня.

В качестве иллюстрации результатов элементарного подхода рассмотрим движение свободно подвешенного стержня AC , к концу C которого в течение короткого промежутка времени δt приложена постоянная сила P . Общее количество движения, сообщаемое стержню, равно $P \delta t$, и, если масса стержня равна M , то центр тяжести должен двигаться с постоянной скоростью V , такой, что $MV = P \delta t$. В момент снятия силы часть стержня длины $c_0 \delta t$ находится в состоянии сжатия, а остальная часть находится в состоянии

покоя и недеформирована. Импульс напряжения сохраняет постоянную длину и распространяется вдоль стержня с постоянной скоростью c_0 . Как видно из уравнения (3.8), скорость частицы, производимая импульсом, равна $P/(rc_0A)$, и масса, движущаяся с этой скоростью, равна $\rho A c_0 \delta t$, так что количество движения попрежнему равно $P \delta t$. Когда импульс достигает свободного конца A стержня, он отражается как импульс растяжения, распространяющийся в обратном направлении со скоростью c_0 . Этот импульс растяжения отражается от другого конца стержня как импульс сжатия, и повторяется полный цикл.



Фиг. 11. Кривая перемещение — время для стержня, показывающая разрывное движение при повторных отражениях продольного импульса давления.

Кривые относятся к движению: A — переднего торца стержня, B — средней точки стержня, C — противоположного торца стержня и D — центра тяжести стержня. Для наглядности перемещения сильно увеличены по сравнению с длиной стержня.

Импульс пробегает длину стержня L за время L/c_0 ; на фиг. 11 показано движение при $\delta t < 2L/c_0$. A и C — кривые перемещение — время концов стержня, движущихся рывками через интервалы $2L/c_0$; B — такая же кривая для средней точки стержня, которая приходит в движение вдвое чаще, так как импульс проходит через нее дважды при отражении от каждого конца; D — кривая для центра тяжести стержня, представляющая параболу для промежутка времени δt , в течение которого приложена постоянная сила P , после чего она представляет прямую линию.

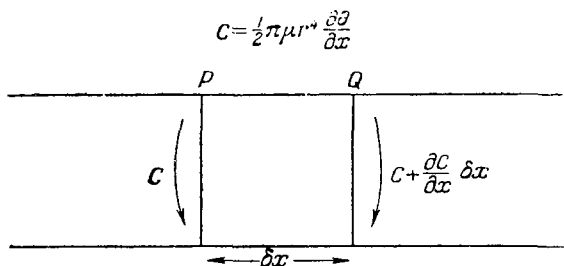
Необходимость постоянной скорости центра тяжести после того, как сила снята, связана с различием между массой единицы длины в невозмущенной области стержня и на длине $c_0 \delta t$, содержащей

импульс. Поэтому как движущийся вперед импульс сжатия, так и движущийся в обратном направлении импульс растяжения приводят к движению вперед центра тяжести. Из кривых B и D можно видеть, что для каждого цикла продолжительности $2L/c_0$ средняя точка стержня и его центр тяжести совпадают четыре раза. Два раза это происходит при прохождении через центр стержня, когда область повышенной линейной плотности симметрична относительно центра. Два других соответствуют моментам, когда половина импульса отразилась от концевого сечения. Напряжения, производимые падающей и отраженной половинами импульса, в этот момент в точности погашаются, и плотность становится равномерной по всему стержню.

В действительности длина импульса по мере распространения постепенно возрастает. Это происходит вследствие дисперсии, связанной с радиальным движением стержня, а также с внутренним трением. (Оба эти явления будут рассмотрены позже.) Ступени, показанные на фиг. 11, вследствие дисперсии становятся сглаженными, а длина импульса, в конце концов, возрастает до длины стержня. Задачу после этого можно рассматривать так, как если бы центр тяжести стержня двигался с постоянной скоростью, а стержень совершал в то же время свободные продольные колебания около этого центра. Эти колебания постепенно затухают и остается только поступательное движение вперед, которое рассматривается в динамике твердого тела.

§ 2. Крутильные колебания стержней

При крутильных колебаниях цилиндрического стержня каждое поперечное сечение остается в его плоскости и вращается относи-



Ф и г. 12. Пары сил, действующие на элемент стержня при крутильных колебаниях.

тельно его центра. Уравнение движения можно получить, рассматривая силы, действующие на элемент стержня PQ бесконечно малой длины δx (фиг. 12).

Пусть крутящая пара, действующая в сечении P , равна C , а противоположно направленная пара, действующая в сечении Q , равна $C + (\partial C / \partial x) \delta x$. Если средний угол поворота элемента относительно

его центра равен θ , то можно приравнять результирующую пару произведению момента инерции элемента I' на угловое ускорение; получим

$$\frac{\partial C}{\partial x} \delta x = I' \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (3.14)$$

Далее, если две противоположные пары величины C действуют каждая на противоположные концы цилиндра длины x' и радиуса r , то они приводят к относительному повороту концевых сечений на θ' , так что

$$C = \frac{1}{2} \pi \mu r^4 \frac{\theta'}{x'}. \quad (3.15)$$

Это соотношение можно получить, рассматривая цилиндр как бы разделенным на ряд бесконечно тонких коаксиальных трубок. Следовательно, если относительный поворот сечений P и Q равен $\delta\theta$, то из (3.15) получим в пределе

$$C = \frac{1}{2} \pi \mu r^4 \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (3.16)$$

Момент инерции I' элемента цилиндра PQ относительно его оси равен

$$I' = \frac{1}{2} \pi \rho r^4 \delta x. \quad (3.17)$$

Подставляя значения C и I' из (3.16) и (3.17) в (3.14), получим

$$\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (3.18)$$

Имеем опять волновое уравнение типа (2.19), показывающее, что волны кручения распространяются вдоль цилиндрического стержня со скоростью $\sqrt{\mu/\rho}$, которая совпадает с определенной в предыдущей главе скоростью распространения волн искажения в безграничной среде.

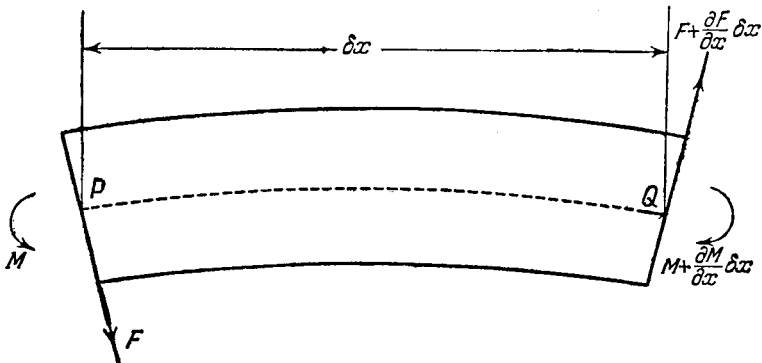
Позже будет показано, что уравнение (3.18) можно вывести из общих соотношений упругости и, в отличие от уравнения (3.12) для продольных волн, (3.18) дает точное описание распространения крутильных колебаний вдоль круглого цилиндра, когда каждое сечение цилиндра вращается как целое. Импульс крутильных колебаний такого вида распространяется вдоль цилиндрического стержня без дисперсии, если материал стержня совершенно упруг.

§ 3. Изгибные колебания стержней

Теория изгибных колебаний стержней труднее теории двух уже рассмотренных типов колебаний, так как возникающие упругие деформации более сложны, и даже элементарная теория показывает, что скорость изгибных волн зависит от длины волны. Изложение точного

решения задачи можно найти у Тимошенко [143], Прескотта [114], Хадсона [61], Купера [22] и Девиса [25]. Вследствие дисперсии, связанной с этим типом волнового движения, распространение импульсов изгибных волн мало привлекало внимание экспериментаторов, а теория использовалась главным образом для определения периода свободных поперечных колебаний стержней. Резонансная частота колеблющейся консоли дает точный метод измерения динамического модуля продольной упругости материала и используется для изучения упругих свойств твердых тел (см., например, Девис и Джемс [27], Грим и Итон [44] и Ноли [100]).

В простейшей теории изгибных колебаний стержня произвольного, но постоянного поперечного сечения предполагается, что движение каждого элемента стержня представляет собой чистый перенос его в направлении, перпендикулярном оси стержня.



Фиг. 13. Силы и моменты, действующие на элемент стержня при изгибных колебаниях.

На фиг. 13 показаны силы, действующие на очень малый элемент стержня PQ длины δx , который изгибается в плоскости xz . Изгибающий момент изменяется вдоль стержня и в точке P принят равным M ; тогда его значение в точке Q равно

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} \delta x.$$

Изгибающий момент должен уравниваться перерезывающими силами, действующими параллельно оси z . Перерезывающая сила в сечении P принята равной F , а в сечении Q она равна

$$F + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x.$$

Уравнение движения элемента в направлении оси z имеет вид

$$\rho A \delta x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x$$

или

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (3.19)$$

где ρ — плотность стержня, A — площадь поперечного сечения и w — перемещение в направлении z .

Для решения уравнения (3.19) надо выразить F через w и упругие постоянные материала. Вычисляя моменты относительно оси, проходящей через центр элемента в направлении y , получим

$$\frac{\partial M}{\partial x} \delta x + \left(2F + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x \right) \frac{\delta x}{2} = 0 \quad (3.20)$$

и в пределе, когда δx становится бесконечно малым,

$$F = - \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (3.21)$$

Чтобы получить связь между M и w , представим себе элемент стержня как бы состоящим из совокупности параллельных волокон. Выше нейтральной поверхности они растянуты, а ниже ее — сжаты. Найдено, что если радиус кривизны нейтральной поверхности равен R , а момент инерции поперечного сечения относительно диаметра, лежащего в нейтральной поверхности, равен I , то

$$M = \frac{EI}{R}. \quad (3.22)$$

Для малых деформаций $1/R$ можно принять равным $\partial^2 w / \partial x^2$, так что из (3.21) получаем

$$F = - EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (3.23)$$

После подстановки (3.23) в (3.19) находим

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$$

Это может быть записано так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - c_0^2 K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (3.24)$$

где $K = \sqrt{I/A}$ — радиус инерции поперечного сечения относительно оси, лежащей в нейтральной поверхности и перпендикулярной оси стержня. Для цилиндрического стержня радиуса a , $K = a/2$. Уравнение (3.24) представляет собой волновое уравнение для изгибных колебаний, причем непосредственной подстановкой можно убедиться,

что решение в форме $w = f(x - ct)$ или $w = f(x + ct)$, вообще говоря, не удовлетворяет этому уравнению. Значит, изгибное возмущение произвольной формы не может распространяться вдоль стержня без дисперсии.

Пусть вдоль стержня со скоростью c' распространяются синусоидальные изгибные волны, тогда

$$w = D \cos(pt - fx), \quad (3.25)$$

где D — амплитуда, $f = 2\pi/\Delta$ и $p = 2\pi c'/\Delta$, а Δ — длина волны. Дифференцируя (3.25) и подставляя в (3.24), получим

$$p^2 = c_0^2 K^2 f^2$$

или

$$c' = \frac{2\pi c_0 K}{\Delta}. \quad (3.26)$$

Следовательно, c' обратно пропорционально длине волны, и если длина волны бесконечно мала, то скорость, с которой она распространяется, бесконечно большая. Величина c' называется скоростью волны или *фазовой скоростью*. Чтобы определить скорость, с которой распространяется энергия импульса изгибных колебаний, надо найти *групповую скорость* c'_g . Она определяется как скорость, с которой распространяется пакет волн, в котором длины составляющих волн ограничены значением Δ ; c'_g и c' связаны зависимостью

$$c'_g = c' - \Delta \frac{dc'}{d\Delta} \quad (3.27)$$

(см., например, Стефенс и Бете [135]). Отсюда и из (3.26) имеем

$$c'_g = c' + \Delta \frac{2\pi c_0 K}{\Delta^2} = 2c'. \quad (3.28)$$

Таким образом, групповая скорость изгибных волн равна удвоенной фазовой скорости и, следовательно, становится бесконечной для импульса, состоящего из бесконечно коротких волн. Вывод, что изгибный импульс переносится с бесконечной скоростью, физически противоестественен и в действительности формулы (3.26) и (3.28) применимы только к волнам, для которых Δ велико по сравнению с K (радиусом инерции стержня).

Причины, по которым приведенные выше рассуждения не применимы, когда длина волны сравнима с поперечными размерами стержня, состоят в следующем:

(I) предположение, что движение представляет собой чистый перенос в направлении z , неправильно для коротких длин волн, так как в этом случае необходимо также учесть *вращательное движение* сечений стержня;

(II) предположение, что продольные сечения элементов стержня остаются прямоугольной формы во время движения, также неправильно для колебаний, длина волны которых сравнима с толщиной стержня.

Чтобы сделать поправку на (I), в уравнение (3.20) надо добавить член, учитывающий *инерцию вращения* элемента. Значит, при рассмотрении моментов мы должны приравнять результирующую пару произведению момента инерции элемента на его угловое ускорение. Уравнение (3.20) приводится тогда к виду

$$\left(F + \frac{\partial M}{\partial x}\right) \delta x = \rho I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \delta x, \quad (3.29)$$

где I — момент инерции поперечного сечения относительно оси, а α — угол поворота сечения. Для малых деформаций α равно $\partial w / \partial x$, так что (3.29) переходит в

$$F = -\frac{\partial M}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}. \quad (3.30)$$

Подставляя $\partial F / \partial x$ из (3.19) и M из (3.22) (в последнем предварительно положено $1/R = \partial^2 w / \delta x^2$), получим

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}$$

или

$$c^2 K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.31)$$

Это уравнение аналогично уравнению (3.24), но имеет добавочный член, учитывающий инерцию вращения, и если в качестве решения взять (3.25), получим

$$c' = c_0 \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2 K^2}\right)^{-1/2}, \quad (3.32)$$

после чего из (3.27) найдем

$$c'_g = c_0 \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2 K^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{1 + 4\pi^2 K^2 / \Lambda^2}\right). \quad (3.33)$$

При малом значении K/Λ уравнения (3.32) и (3.33) дают те же результаты, что и (3.26) и (3.28), но когда K/Λ велико, c' и c'_g стремятся к c_0 . Таким образом, окончательное уравнение (3.31) физически более удовлетворительно, поскольку оно не приводит к бесконечному значению для групповой скорости. Поправка (I) на инерцию вращения была предложена Релеем [120]. Однако, как показал Тимошенко [143], поправка на сдвиг элемента так же важна, как и поправка на инерцию вращения. Дело в том, что перерезывающая сила F , показанная

на фиг. 13, искажает каждый элемент, и в результате этого наклон оси стержня в деформированном состоянии представляет сумму углов поворота элемента и угла его сдвига. Если это учесть, то уравнение (3.31) принимает вид

$$c_0^2 K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - K^2 (1 + \varepsilon') \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\varepsilon' K^2}{c_0^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.34)$$

Последнее уравнение отличается от (3.31) двумя добавочными членами, содержащими безразмерную величину ε' , равную $2R'/(1 + \nu)$, где R' — постоянная, зависящая от формы поперечного сечения стержня, и ν — пуассоново отношение материала. Для стержня круглого сечения $R' = 10/9$. Прескотт [114] вывел (3.34) методом, отличным от использованного Тимошенко. В следующем параграфе будет показано (см. фиг. 16 и 17), что численные значения для скорости, полученные из этого уравнения для цилиндрического стержня, очень близки к значениям, полученным Хадсоном [61], вычислявшим эти скорости, исходя из общих уравнений упругости.

§ 4. Уравнения Похгаммера для цилиндрических стержней

Как упоминалось ранее, теоретически возможно решать любую задачу о колебаниях или о распространении напряжений в упругом теле, если к уравнениям (2.8), (2.9), (2.10) предыдущей главы присоединить соответствующие граничные условия. Однако практически точные решения не получены даже в простейшем случае колебаний цилиндра конечной длины, хотя в этом частном случае можно построить решения, которые дают результаты, очень близкие к истине, когда длина цилиндра велика по сравнению с его диаметром. Эта задача была впервые исследована на основе общих уравнений упругости Похгаммером [111] и независимо от него Кри [17, 18]¹⁾.

Для круглого цилиндра сочетать граничные условия с уравнениями движения в декартовых координатах (2.8), (2.9) и (2.10) очень трудно, а потому надо преобразовать эти уравнения к цилиндрическим координатам (это сделано в приложении). Если в качестве цилиндрических координат взять r , θ и z , а соответствующие перемещения обозначить u_r , u_θ и u_z , то уравнения можно записать в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \bar{\omega}_\theta}{\partial z}, \quad (3.35)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2\mu \frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial r}, \quad (3.36)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\omega}_\theta) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial \theta}, \quad (3.37)$$

¹⁾ Сводку результатов Похгаммера можно найти в книге: Ляв А., Математическая теория упругости, М.—Л., 1934, стр. 302.

где Δ — дилатация, которая в цилиндрических координатах имеет выражение

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (3.38)$$

а $\bar{\omega}_r$, $\bar{\omega}_\theta$ и $\bar{\omega}_z$ — компоненты вращений относительно трех ортогональных направлений, выбранных вдоль радиус-вектора r , перпендикулярно плоскости rz и параллельно оси z соответственно. Эти три компоненты имеют выражения

$$\left. \begin{aligned} 2\bar{\omega}_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \\ 2\bar{\omega}_\theta &= \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ 2\bar{\omega}_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Уравнения (3.39) приводят к тождественному соотношению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r\bar{\omega}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\omega}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial z} = 0. \quad (3.40)$$

При применении уравнений (3.35), (3.36) и (3.37) к колебаниям круглого цилиндра мы будем ось z направлять вдоль оси цилиндра. На поверхности цилиндра должны отсутствовать три компоненты напряжения, действующие в радиальном направлении (по аналогии с обозначениями в декартовых координатах будем обозначать эти компоненты σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ и σ_{rz}). Соотношения между ними и деформациями имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right], \\ \sigma_{rz} &= \mu \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Если мы рассмотрим распространение бесконечного ряда синусоидальных волн вдоль твердого цилиндра, таких что перемещение в каждой точке представляется простой гармонической функцией переменных z и t , то можем записать

$$\left. \begin{aligned} u_r &= U \exp [i(\gamma z + pt)], \\ u_\theta &= V \exp [i(\gamma z + pt)], \\ u_z &= W \exp [i(\gamma z + pt)], \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

где U , V и W — функции от r и θ .

Частота волн равна $p/2\pi$, а их длина $2\pi/\gamma$, так что фазовая скорость равна p/γ . Подставляя (3.42) в уравнения (3.35), (3.36) и (3.37)

и учитывая граничные условия, требующие, чтобы компоненты напряжения (3.41) обращались в нуль на поверхности цилиндра ($r = a$), можно получить выражения для фазовой скорости волн данной частоты.

Рассмотрим теперь с помощью этих уравнений три типа колебаний цилиндрических стержней — продольные, крутильные и поперечные.

а) Продольные волны

Предположим здесь, что перемещение u_θ равно нулю, т. е. что каждая частица колеблется в плоскости rz , и предположим еще, что движение симметрично относительно оси цилиндра, так что U и W не зависят от θ . Тогда, вследствие (3.39), $\bar{\omega}_r$ и $\bar{\omega}_z$ равны нулю, а уравнения (3.35) и (3.37) принимают вид

$$-\rho p^2 u_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + i 2\mu \gamma \bar{\omega}_\theta, \quad (3.43)$$

$$-\rho p^2 u_z = i(\lambda + 2\mu) \gamma \Delta - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\theta) \quad (3.44)$$

[так как на основании (3.42) $\partial u_r / \partial t = i p u_r$, $\partial u_r / \partial z = i \gamma u_r$ и т. д.].

Используя выражения (3.38) и (3.39), мы можем исключить из уравнений (3.43) и (3.44) или $\bar{\omega}_\theta$ или Δ . Это приводит к двум соотношениям:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + h'^2 \Delta = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\omega}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{\omega}_\theta}{r^2} + \chi'^2 \bar{\omega}_\theta = 0, \quad (3.46)$$

где

$$h'^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} - \gamma^2 \quad (3.47)$$

и

$$\chi'^2 = \frac{\rho p^2}{\mu} - \gamma^2. \quad (3.48)$$

Если в уравнении (3.45) перейти от переменной r к $h'r$, получится уравнение Бесселя нулевого порядка, так что решение, имеющее конечное значение на оси, есть

$$\Delta = G J_0(h'r). \quad (3.49)$$

Аналогично, вводя в уравнение (3.46) переменную $\chi'r$, получаем уравнение Бесселя первого порядка, так что

$$\bar{\omega}_\theta = H J_1(\chi'r), \quad (3.50)$$

причем G и H — функции z и t , не зависящие от r .

Подставляя теперь u_r и u_z из (3.42) в (3.38) и (3.39), имеем

$$\Delta = \left[\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + i \gamma W \right] \exp [i(\gamma z + p t)], \quad (3.51)$$

$$2\bar{\omega}_\theta = \left[i \gamma U - \frac{\partial W}{\partial r} \right] \exp [i(\gamma z + p t)]. \quad (3.52)$$

Чтобы удовлетворить (3.49), (3.50), (3.51) и (3.52), U и W должны иметь вид

$$U = A \frac{\partial}{\partial r} J_0(h'r) + C\gamma J_1(x'r), \quad (3.53)$$

$$W = Ai\gamma J_0(h'r) + \frac{Ci}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rJ_1(x'r)], \quad (3.54)$$

где A и C — константы.

Если теперь сделать подстановку (3.53) и (3.54) в выражения для σ_{rr} и σ_{rz} , даваемые (3.41), то условие обращения этих компонент в нуль на поверхности цилиндра (где $r = a$) дает

$$A \left[2\mu \frac{\partial^2}{\partial a^2} J_0(h'a) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} p^2 \rho J_0(h'a) \right] + 2C\mu\gamma \frac{\partial}{\partial a} J_1(x'a) = 0, \quad (3.55)$$

$$2A\gamma \frac{\partial}{\partial a} J_0(h'a) + C \left(2\gamma^2 - \frac{p^2 \rho}{\mu} \right) J_1(x'a) = 0 \quad (3.56)$$

(для краткости здесь написано $\partial(\)/\partial a$ вместо $[\partial(\)/\partial r]_{r=a}$). Исключая из (3.55) и (3.56) величину A/C , получим известное *уравнение частот*, содержащее частоту колебаний, длину волны, радиус цилиндра a , упругие постоянные λ и μ и плотность ρ . Из этого уравнения можно получить фазовую скорость для синусоидальных волн любой частоты в бесконечно длинном цилиндре. Однако для цилиндра конечной длины эти решения не точны, так как они не удовлетворяют условиям того, что концы стержня свободны от усилий. Но если длина цилиндра велика по сравнению с a , то оставшиеся не учтенными напряжения очень малы.

Представляя $J_0(h'a)$ и $J_1(x'a)$ в виде степенных рядов, имеем

$$J_0(h'a) = 1 - \frac{1}{4} (h'a)^2 + \frac{1}{64} (h'a)^4 - \dots,$$

$$J_1(x'a) = \frac{1}{2} (x'a) - \frac{1}{16} (x'a)^3 + \dots$$

Если радиус цилиндра a достаточно мал, чтобы $h'a$ и $x'a$ были малы по сравнению с единицей [что, согласно (3.47) и (3.48), эквивалентно тому, что длина волны колебаний велика по сравнению с радиусом цилиндра], то, пренебрегая в разложении функций Бесселя в степенные ряды степенями $h'a$ и $x'a$ выше первой, получим

$$J_0(h'a) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial a} J_0(h'a) = \frac{1}{2} h'^2 a \text{ и т. д.}$$

Если подставить эти приближенные значения в (3.55) и (3.56), то уравнение частот примет вид

$$(2\gamma^2 - p^2 \rho) x'a \left(h'^2 + \frac{\lambda p^2 \rho}{\mu (\lambda + 2\mu)} \right) = 2\gamma^2 x'a. \quad (3.57)$$

Отбрасывая решение $x' = 0$, соответствующее волнам, распространяющимся со скоростью $(\mu/\rho)^{1/2}$ [см. уравнение (3.48)], и подставляя h'

из (3.47), найдем

$$\frac{p^2}{\gamma^2} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)\rho}. \quad (3.58)$$

Соотношение (3.58) выражает фазовую скорость через упругие постоянные и плотность цилиндра, и, так как $\mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ равно модулю упругости E [см. уравнение (2.4)], эта скорость равна $\sqrt{E/\rho}$, что было получено в элементарной теории [уравнение (3.4)].

Учитывая в разложениях функций Бесселя члены, содержащие a^2 , получим лучшее приближение; тогда решение уравнения частот имеет вид

$$\frac{p}{\gamma} = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4} \nu^2 \gamma^2 a^2\right), \quad (3.59)$$

где ν — пуассоново отношение, равное $\frac{1}{2} \lambda/(\lambda + \mu)$. Уравнение (3.59)

было выведено также Релеем [120] путем рассмотрения энергии, связанной с поперечным движением стержня. В безразмерных величинах уравнение (3.59) запишется в виде

$$\frac{c_p}{c_0} = 1 - \nu^2 \pi^2 \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^2, \quad (3.60)$$

где $c_p = p/\gamma$ — фазовая скорость волн, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ — скорость бесконечно длинных волн в стержне и $\Lambda = 2\pi/\gamma$ — длина волны. Из (3.60) видно, что фазовая скорость уменьшается до нуля с уменьшением длины волны до значения, равного νa . Следовательно, это уравнение не может давать надежных результатов за исключением случаев, когда длины волн велики по сравнению с радиусом цилиндра.

Групповая скорость может быть получена из (3.60) с помощью соотношения (3.27), т. е.

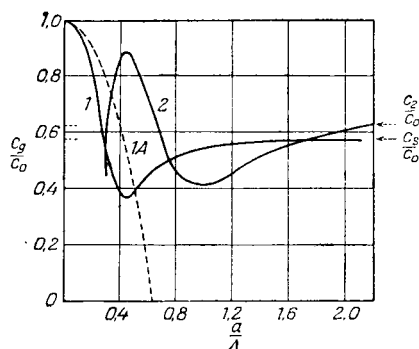
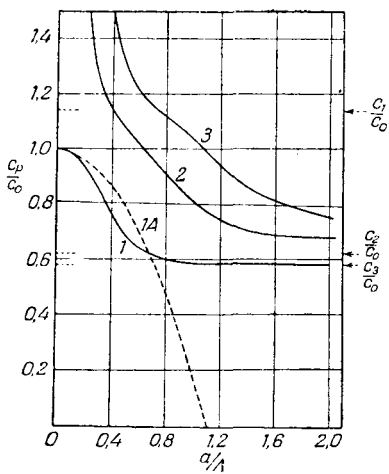
$$\frac{c_g}{c_0} = 1 - 3\nu^2 \pi^2 \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^2. \quad (3.61)$$

Групповая скорость стремится к нулю, когда длина волны стремится к $\nu a \sqrt{3}$. Кривые, полученные с помощью уравнений (3.60) и (3.61) при $\nu = 0,29$ (значение для стали), показаны на фиг. 14 и 15 пунктирными линиями 1А.

Хотя описанное здесь исследование Похгаммера впервые опубликовано в 1876 г. и было очень хорошо известно последующим исследователям в этой области (Релей ссылаясь на него в «Теории звука» [120]), численные результаты были получены только в последние годы. Для продольных волн это было сделано Филдом [33], Бенкрофтом [6], Черлинским [24], Миндлиным [96] и Девисом [25], а численные результаты для аналогичной трактовки изгибных колебаний, которая будет рассмотрена ниже, опубликованы Хадсоном [61].

В пределах своей применимости уравнения (3.55) и (3.56) приводят к уравнению частот, содержащему шесть параметров: упругие постоянные λ и μ , плотность ρ , радиус стержня a , частоту волн $p/2\pi$ и их длину $2\pi/\gamma$. Однако выражая это уравнение в безразмерной форме, мы можем сократить число переменных до трех: c_p/c_0 , a/Δ и ν . Значит, для каждого заданного значения ν получается уравнение, содержащее только c_p/c_0 и a/Δ . Найдено, что это уравнение имеет много корней, причем каждый корень соответствует особой форме колебания стержня. На кривых 1, 2 и 3 фиг. 14 показаны значения,

вычисленные Девисом [25] для первых трех корней уравнения частот при $\nu = 0,29$. Бенкрофт [6] рассчитал первую ветвь кривой для ряда значений ν , и кривая,



Фиг. 14. Фазовая скорость волны расширения в цилиндрических стержнях при $\nu = 0,29$.

Фиг. 15. Групповая скорость волны расширения в цилиндрических стержнях при $\nu = 0,29$.

полученная из его результатов путем интерполяции при $\nu = 0,29$, согласуется с кривой, полученной Девисом. На фиг. 14 приведены также значения c_1/c_0 , c_2/c_0 и c_s/c_0 , причем c_1 и c_2 — скорости волн расширения и искажения в безграничной среде, а c_s — скорость поверхностных волн Релея в полубесконечной среде. Эти отношения можно выразить через ν :

$$\frac{c_1^2}{c_0^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{E} = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \tag{3.62}$$

$$\frac{c_2^2}{c_0^2} = \frac{\mu}{E} = \frac{1}{2(1 + \nu)}, \tag{3.63}$$

а c_s/c_0 можно вывести из (3.63), предварительно найдя c_s/c_2 из кубического уравнения (2.37) предыдущей главы. Для $\nu = 0,29$, $c_s/c_2 = 0,9528$, так что $c_s/c_0 = 0,5764$.

Из кривой 1 фиг. 14 видно, что для больших длин волн ($a/\Delta < 0,1$) фазовая скорость продольных волн очень мало отличается от c_0 , а поправка Релея [уравнение (3.60)], показанная кривой 1А, весьма точно описывает зависимость длины волны от частоты для этого типа колебаний. Для более коротких волн ошибки становятся более существенными, но кривая 1А продолжает давать удовлетворительное приближение до значений a/Δ порядка 0,7. При более высоких значениях кривые 1 и 1А быстро отклоняются и, тогда как по точной теории фазовая скорость с уменьшением длины волн должна асимптотически стремиться к c_s (Бенкрофт [6] показал, что уравнение частот переходит в кубическое уравнение поверхностных волн (2.34), когда a/Δ очень велико), кривая 1А пересекает ось a/Δ при 1,098.

Чтобы найти соответствующее данному корню уравнения частот распределение перемещений и напряжений по поперечному сечению, надо прежде из уравнений (3.55) и (3.56) получить отношение A/C , даваемое этим корнем. Вводя это значение A/C в (3.53) и (3.54), получим выражения для U и W , содержащие только одну постоянную, которая определяется амплитудой волны. Уравнения (3.42) выражают u_r и u_z через U и W , а соответствующие компоненты напряжения находятся из уравнений (3.41). Этим методом Девис (1948) рассчитал распределение перемещений и компонент напряжения по поперечному сечению стального цилиндра для первого корня уравнения частот.

Подсчеты показывают, что первая форма¹⁾, даваемая кривой 1 на фиг. 14, соответствует колебаниям, при которых до определенного значения a/Δ , равного приблизительно 0,375 при $\nu = 0,29$, узловых цилиндрических поверхностей не возникает. При указанном значении узловой цилиндр появляется на поверхности стержня, а при больших значениях a/Δ эта форма колебаний имеет один узловой цилиндр. Вторая форма (кривая 2 фиг. 14) имеет два узловых цилиндра и т. д. Вид колебаний зависит от начальных условий, причем экспериментально обнаружено, что обычно возбуждается первая форма. Как и можно было ожидать на основании того факта, что при больших a/Δ фазовая скорость для первой формы стремится к скорости поверхностных волн, обнаружено, что продольное перемещение u_z при этих условиях очень велико на поверхности цилиндра и быстро убывает с глубиной, что аналогично волнам Релея в поверхностных слоях полубесконечной среды.

Из фиг. 14 видно, что фазовые скорости для высших форм превышают скорость волн расширения в среде. Однако, как упоминалось ранее, фазовая скорость не соответствует переносу энергии, которая распространяется с групповой скоростью c_g . На фиг. 15 изображены кривые c_g , соответствующие ветвям 1 и 2 кривых фазовой

1) Здесь и далее мы заменяем не распространенный в нашей литературе термин „мода“ несколько менее точным термином „форма“. — *Прим. перев.*

скорости на фиг. 14. Они получены путем дифференцирования соответствующих кривых c_p с использованием соотношения (3.27). Значения c_g , полученные из уравнения (3.61) с использованием поправки Релея, показаны пунктирной кривой IA . Видно, что и здесь кривая IA дает надежные результаты лишь при очень малых значениях a/Δ . Из кривой 2 видно, что групповая скорость в отличие от фазовой скорости не превышает c_0 . Видно также, что при первой форме групповая скорость достигает минимума при значении a/Δ около 0,45, тогда как при второй форме примерно этому значению соответствует максимум. Это объясняется тем, что при распространении в стальном стержне импульса первой формы в „хвосте“ импульса обнаруживаются компоненты Фурье с длиной волны около 0,45 радиуса стержня.

Описанный подход к распространению гармонических волн расширения в бесконечном цилиндрическом стержне с помощью точных уравнений приводит к выводу, что энергия не может переноситься вдоль цилиндра этим типом волн со скоростью, превышающей c_0 . Некоторые исследователи — Филд [33], Саусвелл [132], Прескотт [114] и Купер [22] — указывают, однако, что теоретически допустимо рассматривать цилиндр таким же методом как безграничную среду. Тогда надо было бы ожидать, что упругие волны будут распространяться только с двумя скоростями, возможными для бесконечной среды (c_1 и c_2), причем эти волны непрерывно отражаются от свободной поверхности цилиндра таким образом, как это описано в предыдущей главе. Тогда, если мы рассмотрим возмущение в некоторой точке внутри цилиндра, то обнаружим, что из этой точки должна распространяться сферическая волна расширения со скоростью c_1 ; часть этой волны должна распространяться вдоль цилиндра, не испытывая отражений от поверхности. Амплитуда этой неотразившейся волны должна убывать обратно пропорционально расстоянию, вследствие чего действие ее быстро затухает, но, тем не менее, часть энергии переносится со скоростью волн расширения в среде. Части волны, падающие на цилиндрическую поверхность, приводят к появлению отраженных волн расширения и искажения, которые, в свою очередь, при повторном отражении порождают волны обоих типов. Естественно ожидать, что наибольшая часть энергии возмущения будет распространяться со скоростью, меньшей скорости волн расширения. Но теория Похгаммера утверждает, что *никакая* часть энергии не может переноситься со скоростью, большей c_0 , и этот парадокс надо разрешить на основании экспериментальных наблюдений.

Можно было бы отметить, что в теории Похгаммера речь идет о синусоидальных волнах, распространяющихся вдоль бесконечного цилиндра. Как показал Ляв (стр. 303), уравнения (3.35), (3.36) и (3.37) не могут быть удовлетворены для свободных колебаний цилиндра конечной длины гармоническими решениями типа (3.42), если предполагать, что торцы цилиндра свободны от напряжений.

С другой стороны, для бесконечного цилиндра часть энергии, переносимая элементарными сферическими волнами, постепенно падает до нуля, так что аргументация предыдущего параграфа неприменима. Здесь следует заметить, что уравнения Похгаммера представляют собой не что иное, как уравнения движения упругой среды в цилиндрических координатах, и, если эти уравнения применить к неограниченной среде, они укажут на наличие двух и только двух типов волн, распространяющихся со скоростями c_1 и c_2 .

Представляется очевидным, что при внезапном приложении силы к центру одной из плоских поверхностей диска, толщина которого сравнима с радиусом, часть энергии должна достигнуть другой стороны со скоростью волны расширения. Имеет ли это место, когда однородная плоская волна падает на пластинку, — менее ясно, и, возможно, здесь играют роль условия на краях пластинки. Бенкрофт [6] утверждает, что для плоских волн надо различать случаи, когда поперечное движение возможно и когда оно ограничено или вследствие приложения внешних сил, или вследствие наличия невозмущенной среды. Если поперечное движение может происходить свободно, действующей упругой постоянной будет E ; когда оно невозможно, такой постоянной будет $\lambda + 2\mu$.

Прежде чем закончить описание теории распространения волны расширения в стержнях, следует упомянуть о подходе к ней Гибе и Блехшмидта [41], поскольку на основе этой теории было проведено большинство последующих экспериментальных исследований в Германии и в Америке. Согласно этой теории, вибрирующий стержень можно рассматривать как две отдельные механические системы, каждая из которых обладает своим спектром резонансных частот. Наблюдаемые резонансные частоты стержня рассматриваются как результат взаимодействия этих двух механических систем. Для цилиндрического стержня первый спектр резонансных частот берется таким же, как для стержня бесконечно малого поперечного сечения при продольных колебаниях, а второй спектр — таким, как в диске бесконечно малой толщины при радиальных колебаниях. Гибе и Блехшмидт предположили, что могут возбуждаться только фундаментальные частоты радиальных колебаний, которые комбинируются с различными возможными формами продольных колебаний.

Полученные ими кривые зависимости фазовой скорости от длины волны имеют две ветви, одна из которых совершенно аналогична кривой 1А фиг. 14, а другая подобна кривой 2 той же фигуры, но смещена вправо. Наиболее замечательным выводом из этой теории является наличие „мертвой зоны“ между двумя ветвями, соответствующей области частот, в которой невозможно возбуждение продольных колебаний в стержне.

Гибе и Блехшмидт предлагают разыскивать экспериментально такую область для тонкостенной цилиндрической трубы, к которой они также применили их теорию. Однако нет ясности в отношении

такой мертвой зоны для сплошных цилиндров, для которых экспериментальные данные прекрасно согласуются с кривой I фиг. 14. Установлено, что подход Гибе и Блехшмидта ближе к действительности, чем поправка Релея, и он дает интересную физическую модель распространения волн расширения в стержне. Однако он вытеснен, по крайней мере, в части, касающейся массивных цилиндров, результатами, полученными на основе точных уравнений теории упругости.

б) Крутильные волны

В случае распространения крутильных колебаний мы должны найти решение уравнений движения (3.35), (3.36) и (3.37), для которого продольных и поперечных перемещений нет, и движение симметрично относительно оси цилиндра, т. е. u_r и u_z должны быть равны нулю, а u_θ не должно зависеть от θ . Учитывая эти условия, из (3.38) видим, что объемное расширение Δ равно нулю, а компоненты вращения, согласно (3.39), имеют значения

$$2\bar{\omega}_r = -\frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad 2\bar{\omega}_z = \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \quad \bar{\omega}_\theta = 0.$$

Уравнения движения (3.35) и (3.37) удовлетворяются тождественно, а (3.36) принимает вид

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}. \quad (3.64)$$

Если теперь рассмотреть гармонические волны и взять для u_θ выражение (3.42), то уравнение (3.64) приводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \left(\frac{\rho p^2}{\mu} - \gamma^2 - \frac{1}{r^2} \right) V = 0. \quad (3.65)$$

Если, согласно (3.48), обозначить $(\rho p^2/\mu - \gamma^2)$ через κ'^2 и сделать замену переменной r на $\kappa' r$, то (3.65) перейдет в уравнение Бесселя первого порядка, решение которого, принимающее конечное значение на оси, представляется в виде

$$V = B J_1(\kappa' r), \quad (3.66)$$

где B — постоянная. Условие равенства нулю трех компонент напряжения σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ и σ_{rz} на поверхности цилиндра приводит к единственному уравнению, так как из (3.41) видно, что σ_{rr} и σ_{rz} равны нулю всюду.

На основании (3.66) условие равенства нулю $\sigma_{r\theta}$ при $r = a$ дает

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{J_1(\kappa' a)}{a} \right] = 0. \quad (3.67)$$

Уравнение (3.67) имеет множество корней, первым из которых является $\kappa' = 0$. Но это значение κ' не следует учитывать в (3.66),

поскольку (3.65) приводится к уравнению Бесселя только при χ' , отличном от нуля. Поэтому надо возвратиться к уравнению (3.65) и попытаться учесть это значение χ' . Тогда найдем, что уравнению удовлетворяет функция

$$V = B'r, \quad (3.68)$$

где B' — постоянная. Как можно видеть из (3.41), это выражение для V обращает $\sigma_{r\theta}$ в нуль, так что граничное условие на поверхности цилиндра удовлетворяется. Так как амплитуда u_θ пропорциональна r , а u_r и u_z равны нулю, соответствующее этому решению движение представляет вращение каждого поперечного сечения цилиндра как целого относительно центра. На основании того, что $\chi'^2 = \rho p^2/\mu - \gamma^2$, фазовая скорость, соответствующая $\chi' = 0$, определяется из соотношения

$$\frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (3.69)$$

Значит, дисперсии волн не происходит, а фазовая и групповая скорости равны скорости волн искажения в безграничной среде. Этот результат согласуется с тем, что получено из элементарного подхода [см. уравнение (3.18)].

Выполняя дифференцирование в уравнении (3.67) и используя рекуррентную формулу для бесселевых функций¹⁾, получим

$$\frac{\chi' a J_0(\chi' a)}{J_1(\chi' a)} = 2. \quad (3.70)$$

Корни уравнения (3.70) можно определить численно по таблицам бесселевых функций. Они дают ряд значений $\chi' a$, соответствующих более сложным видам крутильных колебаний, имеющим узловые цилиндры. Обозначая первый из таких корней через K_1 , имеем

$$K_1^2 = a^2 \left(\frac{\rho^2 p}{\mu} - \gamma^2 \right). \quad (3.71)$$

Но $\sqrt{\mu/\rho}$ есть скорость c_2 распространения волн искажения в безграничной среде, а p/f — фазовая скорость распространения волн кручения вдоль стержня, которую обозначим c_t , и f равно $2\pi/\Lambda$, где Λ — длина этих волн кручения. Следовательно, (3.71) можно записать в безразмерной форме:

$$K_1^2 = 4\pi^2 \left(\frac{a}{\Lambda} \right)^2 \left(\frac{c_t^2}{c_2^2} - 1 \right)$$

или

$$\frac{c_t}{c_2} = \left(K_1^2 \frac{(\Lambda/a)^2}{4\pi^2} + 1 \right)^{1/2}. \quad (3.72)$$

¹⁾ См., например, Ватсон Г., Теория бесселевых функций, М., 1949. — Прим. ред.

Уравнение (3.72) дает зависимость между фазовой скоростью и длиной волны кручения при различных значениях K_1 . Можно заметить, что для всех соответствующих форм колебаний имеет место дисперсия, фазовая скорость становится бесконечной для очень длинных волн и приближается к значению c_2 для очень коротких волн. Дифференцируя (3.72) по Δ и подставляя результат в уравнение (3.27), можно получить выражение для групповой скорости волн кручения; эта скорость равна c_2^2/c_t , так что она изменяется от нуля для очень длинных волн и асимптотически стремится к c_2 при очень коротких волнах.

в) *Изгибные волны*

При распространении вдоль стержня продольных волн и волн кручения движение симметрично относительно оси стержня, и потому перемещения не зависят от θ , а амплитудные функции U , V и W в уравнениях (3.42) зависят только от r . Исследование этих типов волновых движений упрощается также тем, что для продольных волн V равно нулю, а для волн кручения равны нулю U и W .

Для изгибных же волн надо рассматривать все три компоненты перемещения, причем все они зависят от θ . Поэтому исследование их с помощью уравнений Похгаммера становится очень сложным и не будет здесь приведено во всех деталях. Описание его можно найти у Лява (стр. 304); окончательное уравнение частот рассмотрено Бенкрофтом [6] и Хадсоном [61]. Последний исследовал общий случай колебаний, а уравнение частот для изгибных колебаний вывел в качестве частного случая.

Если недеформированную ось стержня принять за ось z и предположить, что колебания происходят в плоскости, содержащей эту ось и линию, от которой отсчитывается θ , то естественно искать решения в таком виде, что u_r и u_z пропорциональны $\cos \theta$, а u_θ пропорционально $\sin \theta$. Тогда вместо уравнений (3.42) запишем

$$\left. \begin{aligned} u_r &= U' \cos \theta \exp [i(\gamma z + pt)], \\ u_\theta &= V' \sin \theta \exp [i(\gamma z + pt)], \\ u_z &= W' \cos \theta \exp [i(\gamma z + pt)], \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

где U' , V' , W' — функции только r .

Для ясности будем называть плоскость, от которой отсчитывается θ , „вертикальной“, а направление оси z — „горизонтальным“. Значит, θ равно нулю в вертикальном сечении стержня, содержащем ось z . Второе из уравнений (3.73) означает, что в точках вертикальной плоскости u_θ равно нулю, и точки, расположенные на ней, во время колебаний остаются в этой плоскости. Для точек горизонтальной плоскости, содержащей ось стержня (эта плоскость соответствует „нейтральной оси“ в элементарной теории изгибных колебаний),

θ равно $\pi/2$, так что на основании первого и третьего уравнений (3.73) u_r и u_z равны нулю. Следовательно, точки горизонтальной плоскости испытывают чисто вертикальные колебания, так как третья, отличная от нуля компонента перемещения u_θ перпендикулярна радиусу-вектору r и оси z .

Таким образом, уравнения (3.73) описывают поперечное движение изгибного типа, совершающееся в плоскости, от которой отсчитывается θ ; это движение будет определено, если будут найдены выражения для U' , V' и W' так, чтобы были удовлетворены уравнения движения (3.35), (3.36) и (3.37) и граничные условия на поверхности стержня.

Найдено, что уравнениям движения удовлетворяют следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} U' &= A \frac{\partial}{\partial r} J_1(h'r) + B\gamma \frac{\partial}{\partial r} J_1(x'r) + Cr^{-1}J_1(x'r), \\ V' &= Ar^{-1}J_1(h'r) - B\gamma r^{-1}J_1(x'r) - C \frac{\partial}{\partial r} J_1(x'r), \\ W' &= A\gamma J_1(h'r) - Bix'^2 J_1(x'r), \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

где A , B и C — постоянные, а h' и x' определяются уравнениями (3.47) и (3.48) соответственно. [Основания для такого выбора выражений приведены у Лява (стр. 304—305); они аналогичны тем, которые использованы в этом параграфе для получения выражений (3.53) и (3.54) для U и W .] Можно показать, что уравнения движения приводят к уравнениям Бесселя первого порядка для объемного расширения Δ и для компоненты вихря $\overline{\omega}_z$. Из этих уравнений получается, что Δ пропорционально $J_1(h'r)$, а $\overline{\omega}_z$ пропорционально $J_1(x'r)$; можно затем показать, что $\overline{\omega}_r$ должно быть пропорционально

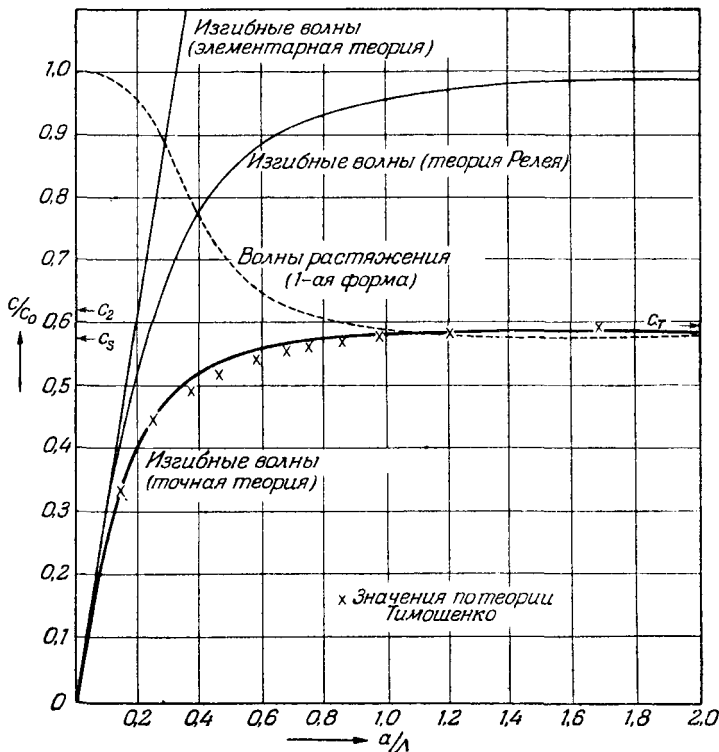
$$G\rho^2\mu^{-1}r^{-1}J_1(x'r) + H\gamma \frac{\partial}{\partial r} [J_1(x'r)],$$

где G и H — постоянные. После этого находим, что удовлетворить этим соотношениям для Δ , $\overline{\omega}_z$ и $\overline{\omega}_r$, составленным с помощью выражений (3.73), можно тогда, когда U' , V' и W' имеют вид (3.74).

Чтобы удовлетворить граничным условиям, надо использовать уравнения (3.74), предварительно найдя с их помощью деформации при вычислении выражений (3.41) для компонент напряжения σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ и σ_{rz} , которые должны обращаться в нуль на поверхности цилиндра, где $r = a$. Это приводит к трем совместным уравнениям, из которых можно исключить A , B и C (эти уравнения можно записать так, что они будут содержать только две постоянные, например A/B и A/C), и затем вывести уравнение частот. Ляв установил, что, как и в случае продольных волн, решения не описывают точно свободные изгибные колебания цилиндра конечной длины, так как условия, что

концевые сечения свободны от напряжения, не могут быть точно удовлетворены этими решениями. Однако, когда длина цилиндра велика по сравнению с его радиусом, оставшиеся неучтенными напряжения очень малы.

Уравнение частот для изгибных волн дано в детерминантной форме Бенкрофтом [6], который указал на непригодность его использования



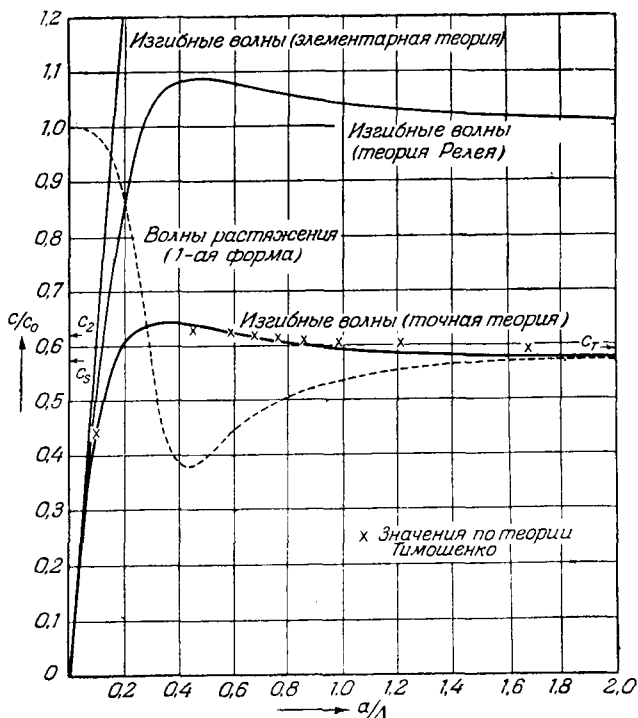
Фиг. 16. Фазовая скорость изгибных волн в цилиндрических стержнях при $\nu = 0,29$.

вследствие его сложности. Но Хадсону [61] удалось выполнить необходимые вычисления в этом уравнении; он получил значения, которые показывают, как фазовая скорость изгибных волн зависит от отношения длины волны к радиусу цилиндра. Он показал также, что для изгибных волн уравнение частот имеет единственный корень, так что эти волны в отличие от волн расширения и кручения могут распространяться только в виде одной формы.

Хадсон представил свои результаты в безразмерной форме в виде таблицы отношений фазовой скорости изгибных волн в стержне

к скорости волн искажения в неограниченной среде. Эти скорости даны для различных отношений длины волн к длине окружности сечения стержня, и результаты представлены для ряда значений пуассонова отношения ν . Девис [25] произвел интерполяцию по этим значениям для случая $\nu = 0,29$.

Фиг. 16, заимствованная из работы Девиса, построена таким же образом, как фиг. 14. Изображенные на ней кривые представляют



Фиг. 17. Групповая скорость изгибных волн в цилиндрических стержнях при $\nu = 0,29$.

зависимость отношения фазовой скорости изгибных волн к скорости продольных волн расширения с бесконечной длиной волны (эта скорость, обозначенная попрежнему через c_0 , равна $\sqrt{E/\rho}$) в функции от a/Δ , где a — радиус цилиндра и Δ — длина волны изгибных волн. Для сравнения на фиг. 16 показаны также кривые, полученные на основании элементарной теории [уравнение (3.26)] и с учетом поправки Релея [уравнение (3.32)], а также кривая для первой формы продольных волн расширения на фиг. 14. Результаты, полученные из уравнения Тимошенко (3.34), представлены рядом точек, причем

видно, что они находятся в очень хорошем согласии с результатами, полученными Хадсоном на основании точных уравнений теории упругости. Расхождение этих результатов увеличивается с возрастанием значения a/Δ , но даже в предельном случае бесконечно коротких волн оно невелико. По точной теории предельная скорость должна быть равна скорости поверхностных волн Релея c_s , которая при $\nu = 0,29$ составляет $0,5764c_0$, а теория Тимошенко дает значение предельной скорости $0,5906 c_0$ (на фигуре обозначено c_T).

Из фиг. 16 видно, что при длинах волн, примерно в десять раз больших радиусов цилиндра, все четыре подхода дают по существу одинаковые результаты. Но для длин волн, меньших этого значения, элементарная теория и поправка Релея дают значительные погрешности.

На фиг. 17 показаны групповые скорости, выведенные из кривых фиг. 16; наиболее интересная особенность здесь состоит в том, что, согласно точной теории, групповая скорость должна иметь максимум при a/Δ , равном примерно 0,3. Это означает, что при распространении вдоль стержня изгибного импульса компоненты Фурье с длиной волн, равной примерно трем радиусам стержня, должны обгонять компоненты с другими длинами волн и находиться в „голове“ импульса.

§ 5. Распространение упругого импульса вдоль цилиндрического стержня

Согласно элементарной теории распространения упругих возмущений вдоль цилиндрического стержня, при распространении изгибных импульсов имеет место дисперсия, тогда как продольные и крутильные импульсы должны распространяться вдоль стержня без изменения формы.

Теория Похгаммера, описанная в предыдущем параграфе, показывает, что скорость распространения продольных синусоидальных волн зависит от длины волны, и только в случае распространения волн кручения основных форм явление дисперсии не имеет места. Эта теория показывает также, что для всех трех типов волн элементарная теория применима лишь в случаях, когда длина волны велика по сравнению с радиусом стержня. Результаты точной теории нельзя безоговорочно применять к распространению единичного импульса, так как такой импульс можно анализировать по синусоидальным составляющим только с помощью интеграла Фурье, который, вообще говоря, дает трудно обозримые результаты. Однако тип искажения, производимый распространяющимся вдоль стержня импульсом, можно оценить на основании дисперсионных кривых фиг. 14—17.

Девис [25] исследовал случай продольного импульса в рамках точной теории двумя путями. Первый из использованных им методов состоит в изучении распространения периодически повторяющегося импульса. Такой повторяющийся импульс можно анализировать

с помощью рядов Фурье, причем скорость распространения, соответствующая каждому члену ряда, может быть найдена из кривых фазовых скоростей. Во второй постановке использован метод стационарной фазы Кельвина. В этом методе рассматривается распространение бесконечно короткого импульса бесконечно большой амплитуды. Такой импульс можно выразить через интеграл Фурье и рассматривать как результат суперпозиции синусоидальных волн напряжения, охватывающих спектр длин волн. Все пакеты волн берутся одинаковой амплитуды и считаются находящимися в фазе в начале координат и погашающими друг друга в любом другом месте в момент $t=0$. Распределение напряжений в любой последующий момент можно тогда исследовать по кривым групповой скорости.

Пользуясь этим, Девис показал, что продольный импульс, начальная длина которого сравнима с радиусом, по мере распространения вдоль стержня искажается и основной импульс сопровождается „хвостом“ колебания высокой частоты; далее, любые резкие изменения градиента размываются, а прямолинейная часть импульса превращается в колеблющуюся кривую. Он подтвердил свои выводы экспериментально и показал, что они могут быть получены из приближенного уравнения продольных волн при учете эффекта поперечной инерции (см. Ляв, стр. 446).

§ 6. Распространение вдоль стержней некругового поперечного сечения

Элементарная теория распространения упругих волн вдоль цилиндрических стержней, описанная в начале этой главы, может быть распространена на стержни любого поперечного сечения, если только длина волны велика по сравнению с его поперечными размерами. Согласно этой теории, продольные волны распространяются с постоянной скоростью $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$, а скорость крутильных волн должна зависеть от формы поперечного сечения, но для любой данной формы она постоянна. Изгибные же волны испытывают дисперсию; фазовая скорость синусоидальных изгибных волн с длиной волны Δ равна $2\pi K c_0 / \Delta$, где K — радиус инерции поперечного сечения стержня относительно оси, перпендикулярной оси стержня и лежащей в нейтральной поверхности [см. уравнение (3.26)]. Когда длины волн становятся сравнимыми с поперечными размерами стержня, написанное соотношение теряет силу и для исследования природы распространения надо использовать точные уравнения теории упругости. Точная теория для цилиндрических стержней была рассмотрена в предыдущих параграфах, но для стержней некругового поперечного сечения анализ становится чрезвычайно сложным, и лишь в немногих случаях были сделаны попытки найти решения.

Кри [17, 18] рассмотрел распространение продольных волн вдоль стержней эллиптического и прямоугольного поперечных сечений и

вывел следующее приближенное выражение для фазовой скорости c_p волн с длиной $2\pi/\gamma$:

$$c_p = c_0 \left(1 - \frac{1}{2} \gamma^2 \gamma^2 I_1 \right), \quad (3.75)$$

I_1 — момент инерции поперечного сечения относительно оси стержня, равный $(a^2 + b^2)/4$ для стержня эллиптического поперечного сечения, где a и b — наибольшая и наименьшая оси эллипса; для прямоугольного стержня I_1 равно $(a^2 + b^2)/3$ (здесь a и b — стороны прямоугольного сечения). Формула (3.75) представляет обобщенную форму уравнения Релея (3.59), выведенного для цилиндрических стержней; она дает надежные результаты, если наибольший поперечный размер стержня a' достаточно мал по сравнению с длиной волны Δ , чтобы можно было пренебрегать членами (a'/Δ) порядка выше второго.

Морз [98] также рассмотрел распространение продольных волн вдоль стержней поперечного сечения с помощью точных уравнений теории упругости и получил решения для стержней, ширина которых велика по сравнению с толщиной. Он показал, что эти решения находятся в хорошем согласии с его экспериментальными результатами [97]. Экспериментальные результаты лежат на двух отдельных кривых, соответствующих двум ветвям 1 и 2 теоретических кривых фиг. 14 для цилиндров.

Морз определил экспериментально, что квадратный стержень дает дисперсионную кривую, которая неразличима с кривой, полученной для цилиндрического стержня, если отношение диаметра цилиндра к стороне квадрата поперечного сечения равно 1,3. Это оказалось справедливым для всей дисперсионной кривой. Согласно формуле Кри [уравнение (3.75)], отношение должно быть равно 1,15; следует внимательно изучить, является ли столь малая разница результатом экспериментальных погрешностей или приближенности уравнения (3.75).

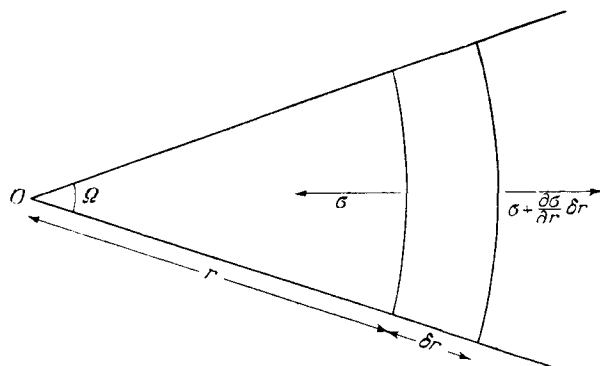
§ 7. Распространение вдоль конического стержня

Продольные гармонические волны, длина которых велика по сравнению с поперечными размерами стержня, распространяются с постоянной скоростью c_0 . Значит, импульс, составленный такими волнами, должен распространяться вдоль стержня постоянного поперечного сечения с этой скоростью без изменения формы. Однако если поперечное сечение не постоянно по длине стержня, форма импульса и его амплитуда изменяются в процессе распространения.

Распространение продольного импульса вдоль конического стержня рассмотрели Лендон и Куини [81], которые использовали такой стержень для измерения давлений, вызванных взрывом. Использованный ими экспериментальный метод, первоначально введенный Гопкинсоном [58], будет описан в следующей главе. Но приближенная теория

распространения продольных волн вдоль конического стержня малого угла раствора будет изложена здесь для иллюстрации некоторых различий в поведении плоских и сферических волн напряжения. Эта теория применима только к волнам, длина которых велика по сравнению с диаметром конуса в области их распространения. Результаты связаны с некоторыми опытами по разрушению конусов, описанными в гл. VIII.

Расположим вершину конуса малого телесного угла Ω в начале координат O (фиг. 18) и рассмотрим силы, действующие на элемент



Фиг. 18. Распределение напряжений в коническом стержне.

конуса, ограниченный сферами радиусов r и $r + \delta r$. Если Ω достаточно мал, то нормальное напряжение будет равномерно распределено по каждой из сферических поверхностей; обозначим через σ нормальные напряжения на поверхности радиуса r и через $\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial r} \delta r$ на поверхности радиуса $r + \delta r$. Результирующая напряжений направлена параллельно оси конуса, так что уравнение движения в этом направлении можно записать в виде

$$\rho r^2 \Omega \delta r \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial r} \delta r \right) (r + \delta r)^2 \Omega - \sigma r^2 \Omega, \quad (3.76)$$

где ρ — плотность конуса и u_1 — перемещение, параллельное его оси. Производя умножение и отбрасывая члены, содержащие $(\delta r)^2$, получим из (3.76)

$$r \frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2\sigma = \rho r \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \quad (3.77)$$

Если теперь элемент рассматривать как плоский, то закон упругости имеет вид $\sigma = E \partial u_1 / \partial r$, где E — модуль продольной упругости;

тогда из (3.77) получим

$$\rho r \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = Er \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + 2E \frac{\partial u_1}{\partial r} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 (u_1 r)}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 (u_1 r)}{\partial r^2}, \quad (3.78)$$

где $c_0^2 = E/\rho$.

Уравнение (3.78) — волновое уравнение для сферических волн, и решением его, как и для уравнения (2.20) предыдущей главы, является

$$u_1 r = f(r - c_0 t) + F(r + c_0 t), \quad (3.79)$$

где функции $f(r - c_0 t)$ и $F(r + c_0 t)$ представляют волны, движущиеся в противоположных направлениях.

Если мы рассмотрим волну

$$u_1 = \frac{1}{r} F(r + c_0 t), \quad (3.80)$$

то для напряжения будем иметь

$$\sigma = E \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{E}{r} F'(r + c_0 t) - \frac{E}{r^2} F(r + c_0 t), \quad (3.81)$$

а для скорости частиц —

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{c_0}{r} F'(r + c_0 t). \quad (3.82)$$

Значит, для этих волн нет простой зависимости между напряжением и скоростью частицы. Однако если r достаточно велико, чтобы вторым членом в (3.81) можно было пренебречь по сравнению с первым, то получим

$$\sigma = \frac{E}{c_0} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \rho c_0 \frac{\partial u_1}{\partial t}. \quad (3.83)$$

Это соотношение аналогично уравнению (3.8) для плоских волн. Выражение (3.80) может представлять импульс, движущийся в направлении вершины конуса, если взять $t = 0$ за момент достижения головой импульса вершины конуса, а t считать отрицательным во время движения импульса к вершине. Функция

$$u_1 = \frac{A}{r} \left[\exp\left(\frac{-r - c_0 t}{\Delta}\right) - 1 \right] \quad (3.84)$$

представляет перемещение, связанное с простейшим типом импульса. Она имеет силу для отрицательных значений t при r , численно большем $c_0 t$. В голове импульса $r = -c_0 t$ и перемещение равно нулю; значениям $r < |c_0 t|$ соответствует невозмущенная область конуса, где перемещение вновь обращается в нуль. В выражении (3.84) Δ — так называемая *характерная длина* импульса, причем приближенная теория применима только в той области конического стержня, в которой эта длина велика по сравнению с диаметром стержня.

A — постоянная, имеющая размерность квадрата длины и определяющая амплитуду импульса.

Из (3.81) находим напряжение, связанное с импульсом:

$$\sigma = \frac{-AE}{\Delta r} \exp\left(\frac{-r - c_0 t}{\Lambda}\right) + \frac{AE}{r^2} \left[1 - \exp\left(\frac{-r - c_0 t}{\Lambda}\right)\right] \quad (3.85)$$

[σ считается положительным для растягивающих напряжений, так что отрицательные значения σ в (3.85) соответствуют сжатию].

Из (3.85) видно, что для $r \gg |c_0 t|$, т. е. в областях стержня, удаленных от головы импульса, имеет место растягивающее напряжение AE/r^2 . Это напряжение необходимо для сохранения количества движения в стержне. Количество движения, связанное с импульсом, есть

$$\int_{-\infty}^{-c_0 t} \rho r^2 \Omega \frac{\partial u_1}{\partial t} dr = - \int_{-\infty}^{-c_0 t} \rho r^2 \Omega \frac{Ac_0}{\Delta r} \exp\left(\frac{-r - c_0 t}{\Lambda}\right) dr.$$

Интегрирование и подстановка пределов дает

$$-A\rho c_0 \Omega (c_0 t - \Lambda).$$

Значит, количество движения непрерывно убывает со скоростью $A\rho c_0 \Omega = AE\Omega$ (надо помнить, что здесь t отрицательно и растет по модулю при движении импульса к вершине). Уменьшение количества движения уравнивается „остаточным“ растягивающим напряжением AE/r^2 , действующим на поверхность площади $r^2\Omega$.

Возвращаясь теперь к выражению (3.85), видим, что импульс имеет два члена противоположных знаков и что волна сжатия сопровождается волной растяжения, причем по мере приближения импульса к вершине конуса область сжатия становится все короче и короче. Приравнявая (3.85) нулю, можно найти значение r на границе областей сжатия и растяжения:

$$\frac{1}{\Lambda} \exp\left(\frac{-r - c_0 t}{\Lambda}\right) = \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(\frac{-r - c_0 t}{\Lambda}\right)\right]$$

или, вводя r_0 вместо $c_0 t$, это соотношение можно представить в безразмерной форме:

$$\left(\frac{r}{\Lambda} + 1\right) \exp\left(\frac{-r + r_0}{\Lambda}\right) = 1. \quad (3.86)$$

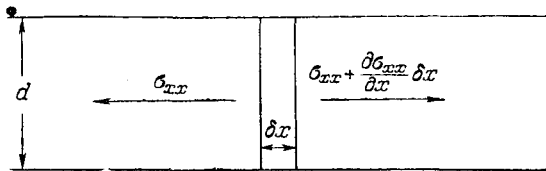
Здесь r_0 — расстояние от головы импульса до вершины конуса, а r — расстояние, на котором оканчивается волна сжатия. Следовательно, длина волны сжатия равна $(r - r_0)$ и (3.86) дает длину области сжатия для различных значений r . Численные значения таковы:

r_0/Λ	8,0	4,0	2,0	1,0	0,5	0,25
$(r - r_0)/\Lambda$	2,44	1,94	1,50	1,15	0,85	0,63

Следовательно, по мере приближения импульса к вершине область сжатия становится все короче и, когда, наконец, вершина будет достигнута, конический стержень находится целиком в состоянии растяжения. Затем импульс отражается от вершины, и в области между головой этого отраженного импульса и вершиной конуса надо рассматривать эффекты наложения падающего и отраженного импульсов.

§ 8. Распространение продольных волн в бесконечной пластинке

Прежде чем закончить рассмотрение теории упругих волн в твердых телах, остановимся коротко на рассмотрении продольных волн в бесконечной пластинке. Эта задача была решена в 1917 г. Лембом [78], который показал, что для волн, длины которых малы по сравнению с толщиной пластинки, скорость распространения становится равной скорости поверхностных волн Релея. Когда длина волны



Фиг. 19. Распределение напряжений в бесконечной пластинке.

велика по сравнению с толщиной пластинки, напряжения распределены равномерно по ее поперечному сечению, перпендикулярному направлению распространения волн, и уравнение движения можно вывести непосредственно. Так, если плоскость xu взять параллельно поверхностям пластинки, а ось x — в направлении распространения, и рассмотреть элемент единицы длины в направлении u и ширины δx (фиг. 19), то получим

$$\rho d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta x = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \right) d - \sigma_{xx} d \delta x,$$

где d — толщина пластинки и ρ — плотность. Отсюда

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3.87}$$

Чтобы выразить σ_{xx} через перемещение u , надо обратиться к соотношениям упругости (2.3) между компонентами напряжения и деформации в изотропном теле. При выбранных направлениях осей перемещение v в направлении u и σ_{zz} — напряжение, перпендикулярное пластинке, равны нулю, так что из первого и третьего уравнений (2.3)

имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_{zx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0.\end{aligned}$$

Исключая $\partial w/\partial z$ из этих уравнений, находим

$$\sigma_{xx} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.88)$$

Тогда (3.87) переходит в уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.89)$$

Это волновое уравнение, показывающее, что волны распространяются с постоянной скоростью

$$c_L = \left[\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\rho(\lambda + 2\mu)} \right]^{1/2}. \quad (3.90)$$

Скорость c_L можно более удобно выразить через E и ν , пользуясь уравнениями (2.4) и (2.5):

$$c_L = \left[\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)} \right]^{1/2}. \quad (3.91)$$

Формула (3.91) справедлива, когда длина волны велика по сравнению с толщиной пластинки d . Когда же длина волны становится сравнимой с толщиной, распределение напряжений по сечению пластинки, перпендикулярному фронту волны, перестает быть равномерным. Тогда надо использовать точные уравнения теории упругости (2.8), (2.9), (2.10) и граничные условия, выражающие, что поверхности пластинки свободны от напряжений, причем анализ совершенно аналогичен тому, который описан в гл. II для волн Релея. Лемб [78] рассмотрел распространение синусоидальных плоских волн в бесконечной пластинке и показал, что при симметрии движения относительно срединной плоскости пластинки уравнение частот имеет вид

$$\frac{\text{th}(\beta d/2)}{\text{th}(\zeta d/2)} = \frac{4f^2 \zeta \beta}{(f^2 + \beta^2)^2}, \quad (3.92)$$

где f равно 2π , поделенному на длину волны, а β и ζ — две функции, определяемые уравнениями

$$\beta^2 = f^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right), \quad \zeta^2 = f^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right). \quad (3.93)$$

Здесь c — фазовая скорость волны в пластинке, а c_1 и c_2 , как и ранее, — скорости волн расширения и волн искажения в безгранич-

ной среде. Надо заметить, что при $c > c_2$ величина β становится чисто мнимой, и если ее положить равной $i\beta_r$, то (3.92) можно записать в виде

$$\operatorname{tg}(\beta_r d/2) = \frac{4f^2 \zeta \beta}{f^2 + \beta^2}.$$

Из (3.92) можно видеть, что если длина волны велика по сравнению с d , то βd и ζd становятся малыми, так что гиперболические тангенсы можно заменить их аргументами, и (3.92) тогда дает

$$4f^2 \zeta^2 = (f^2 + \beta^2)^2. \quad (3.94)$$

Подставляя сюда β^2 и ζ^2 из (3.93), получим

$$4f^4 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) = f^4 \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2,$$

откуда

$$c^2 = 4c_2^2 \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2}.$$

Но $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ и $c_2^2 = \mu/\rho$, следовательно,

$$c^2 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\rho(\lambda + 2\mu)},$$

что совпадает с (3.90) — результатом, полученным из элементарной теории.

Для очень коротких волн βd и ζd становятся очень большими и их гиперболические тангенсы стремятся к единице. При этом уравнение (3.92) упрощается:

$$(f^2 + \beta^2)^2 = 4f^2 \zeta \beta.$$

Возводя в квадрат обе части и подставляя значения β и ζ из (3.93), получаем

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_1^2}\right)^4 = 16 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right). \quad (3.95)$$

Если обозначить $x_1 = c/c_2$ и $\alpha_1 = c_1/c_2$, то (3.95) после перемножения дает

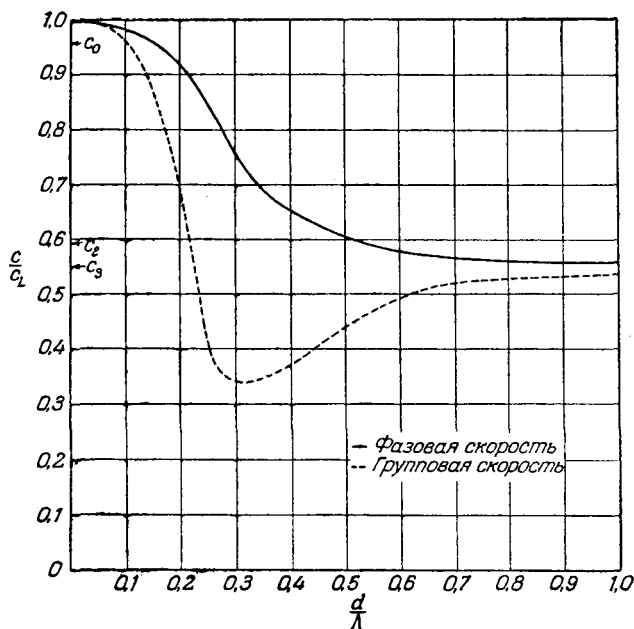
$$x_1^6 - 8x_1^4 + (24 - 16\alpha_1^2)x_1^2 + (16\alpha_1^2 - 16) = 0, \quad (3.96)$$

что совпадает с уравнением (2.37) для поверхностных волн Релея, и так как

$$\alpha_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu},$$

то (3.96) может быть решено для любого значения пуассонова отношения ν .

Итак, плоские продольные волны в бесконечной пластинке могут распространяться со скоростью $c_L = \{E/(\rho[1 - \nu^2])\}^{1/2}$, когда длина волны Δ очень велика по сравнению с толщиной пластинки d , и со скоростью поверхностных волн Релея, когда длина волны очень мала



Фиг. 20. Скорости плоских продольных волн в бесконечной пластинке при $\nu = 0,29$.

в сравнении с толщиной. Для длин волн, сравнимых с толщиной, имеет место дисперсия, скорость зависит от отношения длины волны к толщине.

На фиг. 20 показаны кривые фазовой скорости и групповой скорости в функции d/Δ при $\nu = 0,29$. Кривая фазовой скорости рассчитана по уравнению (3.92), а групповые скорости были затем получены из соотношения (3.27); скорости нанесены в виде отношения c/c_L . Видно, что групповая скорость имеет минимальное значение при d/Δ , равном приблизительно 0,3; по виду кривые очень похожи на те, которые были получены для первой формы в цилиндрическом стержне (фиг. 14 и 15).

§ 9. Сводка результатов теории упругих волн, изложенной в гл. II и III

Уравнения движения изотропного упругого тела в перемещениях частиц u , v , w в направлениях x , y , z соответственно записываются в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u, \quad (2.8)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v, \quad (2.9)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w; \quad (2.10)$$

здесь ρ — плотность тела, Δ — объемное расширение, равное $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, а λ и μ — константы Ляме: μ равно модулю сдвига, λ равно $(k + 2\mu/3)$, где k — модуль всестороннего сжатия; ∇^2 — оператор Лапласа, т. е. $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Решение уравнений (2.8), (2.9) и (2.10) для безграничной среды соответствует двум типам волн: волнам расширения, распространяющимся со скоростью $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$, и волнам искажения со скоростью $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$. Движение частиц в первой волне продольно, т. е. происходит в направлении распространения, а во второй поперечно, т. е. перпендикулярно направлению распространения.

Если имеется свободная поверхность, могут распространяться также поверхностные волны Релея. Они распространяются со скоростью, составляющей α_1 -ю часть от скорости c_2 волн искажения; значение α_1 получается из (кубического относительно α_1^2) уравнения:

$$\alpha_1^6 - 8\alpha_1^4 + (24 - 16\alpha_1^2)\alpha_1^2 + 16\alpha_1^2 - 16 = 0; \quad (2.37)$$

α_1 — упругая постоянная материала, равная

$$[(1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)]^{1/2},$$

где ν — пуассоново отношение. Движение частиц в волнах Релея происходит в плоскости, перпендикулярной к поверхности, вдоль которой распространяются волны, и параллельной направлению распространения. Для синусоидальных волн Релея траектория каждой частицы есть эллипс.

Когда волна расширения падает на свободную поверхность, то при ее отражении возникают две волны, одна из которых — волна расширения, угол отражения которой равен углу падения (α), а другая — волна искажения, угол отражения которой равен β ; причем $\beta < \alpha$ и $\sin \beta / \sin \alpha = c_2/c_1$. Аналогично, если на свободную границу под углом β

падает волна искажения, то отражаются, вообще говоря, две волны: волна искажения и волна расширения. Волна искажения отражается под углом β , а волна расширения под углом α , определяемым из закона синусов. Волна, падающая на границу раздела двух сред, порождает в общем случае четыре волны: в каждой среде будет распространяться волна расширения и волна искажения. Соотношения между амплитудами падающей, отраженных и преломленных волн даны уравнениями (2.41)—(2.58) гл. II.

В гл. III рассмотрены типы волн, которые могут распространяться в стержнях: это — продольные, крутильные и изгибные волны. Если длина волны велика по сравнению с поперечными размерами стержня, продольные и крутильные волны распространяются с постоянными скоростями. Скорость распространения продольных волн c_0 равна $(E/\rho)^{1/2}$, где E — модуль продольной упругости, а скорость крутильных волн в стержне круглого поперечного сечения равна $(\mu/\rho)^{1/2}$. Скорость распространения изгибных волн зависит от длины волны и для очень коротких волн равна $c = 2\pi c_0 K/\Delta$, где Δ — длина волны, $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$ и K — радиус инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси стержня.

Скорость продольных волн зависит от длины волны; когда последняя становится сравнимой с поперечными размерами стержня, волны малой длины распространяются со скоростью поверхностных волн Релея (фиг. 14 и 15). Скорость крутильных волн не зависит от длины волны, если стержень совершает колебания основной формы, т. е. если каждое сечение вращается как целое около его центра. Практически определено, что возбуждается только эта основная форма. Скорость изгибных волн также стремится к скорости поверхностных волн Релея, когда длина волны становится малой по сравнению с поперечными размерами стержня (фиг. 16 и 17). Скорость распространения продольных волн в пластинках (c_L) равна

$$c_L = \left[\frac{4\mu (\lambda + \mu)}{\rho (\lambda + 2\mu)} \right]^{1/2} = \quad (3.90)$$

$$= \left[\frac{E}{\rho (1 - \nu^2)} \right]^{1/2}, \quad (3.91)$$

когда длина волны велика по сравнению с толщиной пластинки. Для малых длин волн скорость их распространения равна скорости поверхностных волн Релея (фиг. 20).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Хотя почти вся теория, изложенная в предыдущей главе, относится к концу прошлого столетия, только сравнительно недавно для экспериментальной техники стала доступной проверка многих результатов этой теории. Методы электроники чрезвычайно облегчили как возбуждение, так и обнаружение высокочастотных упругих волн. В этой главе будет дан краткий обзор результатов экспериментов по распространению волн напряжения в материалах, поведение которых не отклоняется существенно от вполне упругих. Опытные исследования, связанные с отклонениями от совершенной упругости, будут описаны в гл. VI.

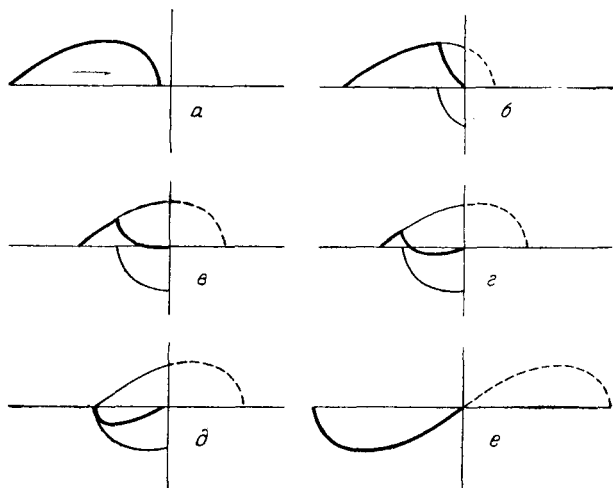
§ 1. Мерный стержень Гопкинсона

До развития электронной техники экспериментальное исследование упругих волн в твердых телах ограничивалось в значительной мере улавливанием сейсмических волн и исследованием колебаний слышимых частот в опытах по акустике. Б. Гопкинсон [58] был в числе первых исследователей распространения импульсов напряжения в лабораторных условиях, причем он проводил эти опыты с целью изучения природы зависимости давления от времени при взрыве или при встрече снаряда с жесткой поверхностью. Его приспособление, известное под названием стержня Гопкинсона, основано на применении элементарной теории распространения упругих импульсов напряжения в цилиндрическом стержне, когда длина импульса велика по сравнению с радиусом стержня. Электрический вариант стержня Гопкинсона, предложенный в 1948 г. Девисом [25], даёт возможность экспериментально исследовать природу распространения импульсов, длина которых сравнима с поперечными размерами стержня. Этот вариант будет описан в следующем параграфе.

Прибор Гопкинсона состоит из цилиндрического стального стержня длиной около метра и более и около 2,5 см в диаметре, подвешенного в горизонтальном положении на четырех нитях, так что он может совершать колебания в вертикальной плоскости. К одному концу стержня прижат цилиндрический ударник, называемый „хронометром“, а к другому концу, называемому ударяемым концом, прилагается переменное давление. „Хронометр“ изготовлен из той же

стали, что и стержень, и имеет одинаковый с ним диаметр. Один торец „хронометра“ и концевое сечение стержня, к которому он прижат, притерты, а „хронометр“ удерживается магнитным притяжением или путем нанесения легкой смазки на притертые поверхности.

Когда снаряд встречается ударяемый конец такого стержня или когда на этом конце производится взрыв заряда, вдоль стержня начинает распространяться импульс сжатия, причем, как показано в предыдущей главе, импульс будет распространяться без искажения,



Фиг. 21. Отражение импульса сжатия от свободной границы.

если диаметр стержня мал по сравнению с длиной импульса, а материал не напряжен выше предела пропорциональности. Такой импульс сжатия проходит без изменения формы через место стыка стержня и „хронометра“, а затем отражается от свободного конца „хронометра“ в виде импульса растяжения. Отраженный импульс растяжения распространяется через хвост падающего импульса сжатия, и как только на стыке стержня и „хронометра“ возникнет растягивающее напряжение, этот последний отлетает с моментом количества движения, захваченным им. В опытах Гопкинсона количество движения измерялось путем захвата „хронометра“ в баллистический маятник, а количество движения, сохранившееся в стержне, определялось по амплитуде его колебания.

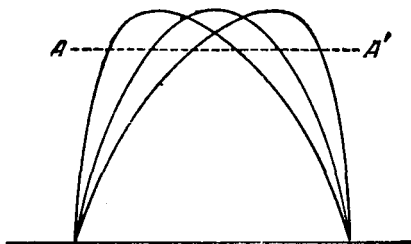
На фиг. 21 показано распределение напряжений в различные моменты, когда плоский импульс сжатия произвольной формы отражается от свободной поверхности. Результирующее напряжение в

любой точке стержня в процессе отражения получается путем сложения напряжений, вызванных падающим и отраженным импульсами, которые показаны тонкими линиями. Результирующее напряжение показано на каждой фигуре жирной линией, а пунктирные линии соответствуют той части импульса, которая уже отразилась. На фиг. 21, *a* показан импульс, приближающийся к свободной границе; *b* — часть импульса отразилась, но напряжения все еще всюду сжимающие; *в* — несколько более поздний момент, когда вблизи свободной границы появилось некоторое растягивающее напряжение; это растяжение увеличилось в *г*, а в *д* половина импульса отразилась; напряжение всюду растягивающее. В *е* отражение закончено, и возникший импульс растяжения имеет ту же форму, что и падающий импульс сжатия.

Отражение импульса сжатия от свободного конца „хронометра“ приводит к распределениям напряжений, подобным тем, которые показаны на фигуре, но если „хронометр“ короче длины импульса, то он отделится от стержня прежде, чем отражение закончится. Когда „хронометр“ отделится от стержня, количество движения, захваченное им, соответствует части импульса, имеющей длину, равную удвоенной длине „хронометра“, и, как видно из фиг. 21, *д*, „хронометр“ длиной, равной половине длины импульса, захватывает все количество движения, оставляя стержень в покое. Это дает метод измерения продолжительности импульса: ее можно вычислить, если известны наименьшая длина „хронометра“, оставляющего стержень в невозмущенном состоянии, и скорость продольных волн в материале стержня.

Измеряя количество движения, захваченное „хронометрами“ различной длины, можно получить площадь в кривой давление — время в различных интервалах.

Однако из этих измерений нельзя определить точную форму кривой давление — время, так как точки начала различных интервалов неизвестны. На фиг. 22 показаны три формы импульса, которые могут соответствовать одним и тем же данным наблюдений. Эти кривые таковы, что любая горизонтальная прямая типа *AA'* отсекает от них одинаковые отрезки и длина отрезков соответствует удвоенной длине „хронометра“. Захваченное количество движения равно площади под кривой давление — время между точками пересечения, причем для всех кривых эти площади одинаковы. Однако максимальное значение давления в импульсе можно определить, так как оно равно пределу среднего давления в очень коротком „хронометре“.



Фиг. 22. Различные формы импульсов, соответствующие одинаковым показаниям стержня Гопкинсона.

(На фиг. 22 это соответствует наивысшему положению прямой AA' , когда она становится касательной к трем кривым.)

Стержень Гопкинсона был использован Исследовательским управлением в Вулвиче (Робертсон [122]) для измерения давлений, возникающих при детонации различных зарядов; Лэндон и Квини [81] описали несколько опытов со стержнем Гопкинсона, ударяемый конец которого был коническим. Когда для такого стержня был использован достаточно длинный „хронометр“, то было обнаружено, что стержень, вместо того чтобы двигаться вперед, когда „хронометр“ отлетел, движется в обратном направлении. Они объяснили это явление тем, что импульс сжатия, распространяясь вдоль конического стержня, образует область растяжения и, когда часть импульса, в которой произошел переход от сжатия к растяжению, достигает места контакта, „хронометр“ отлетает, оставляя часть импульса с отрицательным количеством движения, связанным со стержнем. Элементарная теория распространения волн вдоль конического стержня была рассмотрена в конце гл. III.

§ 2. Мерный стержень Девиса

Хотя стержень Гопкинсона обладает преимуществом простоты, он имеет два серьезных недостатка. Во-первых, как показано в предыдущем параграфе, он не дает формы кривой давление — время в импульсе, а только продолжительность и значение максимального давления. Во-вторых, растягивающее усилие, необходимое для нарушения контакта между стержнем и „хронометром“, вносит в эксперимент новую неизвестную переменную величину и мешает использовать этот прибор для измерений импульсов малой амплитуды.

Р. Девис [25] изобрел мерный стержень, в котором измерения производятся электрическим методом, причем этот прибор обеспечивает непрерывную запись продольного перемещения, производимого импульсом давления на свободном конце стержня. В гл. III для плоской волны, распространяющейся вдоль стержня, было показано, что продольное напряжение σ_{xx} пропорционально скорости частицы du/dt :

$$\sigma_{xx} = \rho c_0 \frac{du}{dt}$$

[см. уравнение (3.8)]. Вследствие отражения свободный конец стержня получает удвоенную скорость частиц, так что если продольное перемещение и скорость частицы обозначить ξ и $\dot{\xi}$ соответственно, то имеем

$$\dot{\xi} = 2 \frac{du}{dt} = 2 \frac{\sigma_{xx}}{\rho c_0}. \quad (4.1)$$

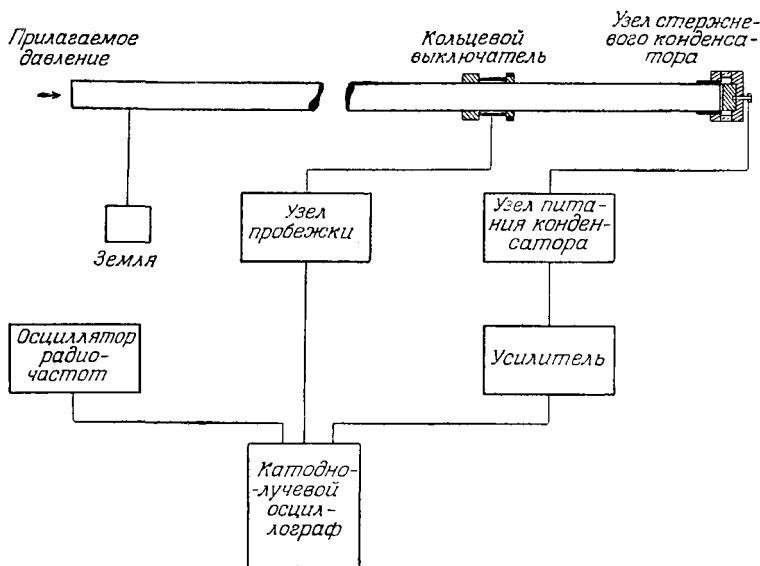
С помощью стержня Девиса кривую (ξ, t) можно получить непосредственно, после чего дифференцированием этой кривой можно

определить кривую давление — время для импульса. Если вместо продольного перемещения конца стержня измерять радиальное перемещение ζ' в том же сечении стержня, то из определения пуассонова отношения ν получим

$$\zeta' = \frac{\nu a \sigma_{ax}}{E}, \quad (4.2)$$

где a — радиус стержня и E — модуль упругости; тогда кривую давление — время можно получить из кривой (ζ', t) простым умножением ординат на $\nu a/E$.

Как и в случае стержня Гопкинсона, аппаратура Девиса дает правильную запись давления, приложенного к нему, лишь тогда, когда а) напряжение нигде не превышает предела упругости стали и б) давление не изменяется настолько быстро, что длины волн, связанных с импульсом давления, становятся сравнимыми с радиусом стержня. На фиг. 23 показано общее устройство стержня Девиса.



Фиг. 23. Общая схема устройства мерного стержня Девиса.

Продольное перемещение ξ концевой сечении стержня измеряется путем использования стержня в качестве заземленной обкладки в плоском конденсаторе. Изолированная обкладка состоит из металлической пластинки, вмонтированной в узел „стержневого конденсатора“. Этот узел свободно скользит по концу стержня и содержит изолированную пластинку, параллельную концевому сечению стержня.

При медленном движении стержня обе обкладки движутся вместе; при приходе же импульса конец стержня перемещается свободно, тогда как изолированная пластинка вследствие ее инерции в течение короткого промежутка времени остается в покое. Изолированная пластинка заряжается до высокого напряжения с помощью „узла питания конденсатора“. Он содержит контур сопротивления — емкость с большой постоянной времени, так что заряд изолированной пластинки может изменяться только очень медленно и поэтому любое быстрое изменение емкости плоско-параллельного конденсатора приводит к соответствующим изменениям разности потенциалов между его обкладками. Если относительное изменение емкости мало, эта разность потенциалов прямо пропорциональна перемещению концевой сечению стержня. Эти изменения разности потенциалов усиливаются и подаются на катодно-лучевой осциллограф, где они регистрируются фотографически.

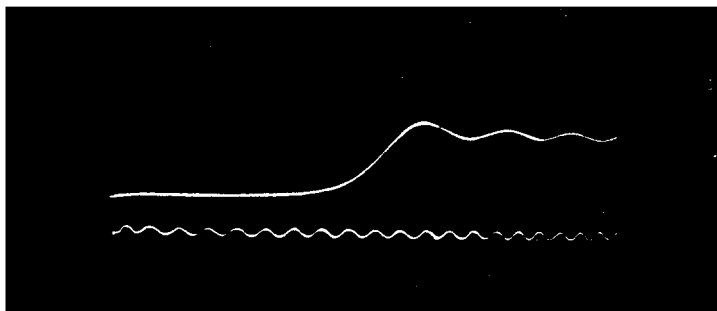
Использованный катодно-лучевой осциллограф относится к типу двухлучевых; на экране осциллографа имеются два пятнышка, которые совершают одинаковое движение в горизонтальном направлении, но могут иметь независимые вертикальные перемещения. Электрический сигнал от узла плоско-параллельного конденсатора после усиления используется для перемещения одного пятнышка осциллографа, тогда как другое пятнышко получает питание от стандартного осциллятора радиочастот. Горизонтальное перемещение пятнышек производится с помощью „узла пробежки“, который включается инерционным выключателем, расположенным на стержне. Этот выключатель состоит из изолированного металлического кольца, которое свободно скользит по стержню и находится в контакте с металлическими штифтами, ввинченными в стержень. Набегающий импульс давления отделяет кольцо от штифтов, что приводит к закиганию газонаполненной термоионной лампы в „узле пробежки“. Помимо производства пробежки пятнышек, узел пробежки налагает мгновенное положительное напряжение на контрольную сетку катодно-лучевой трубки, вследствие чего яркость пятнышка возрастает, когда оно движется по экрану.

На фиг. 24 приведен тип записи, полученной с помощью этого приспособления. Эта фотография получена при взрыве детонатора № 8 на конце стержня диаметром 2,5 см и длиной 183 см. Можно видеть, что основной импульс имеет продолжительность около 25 мксек. и сопровождается рядом колебаний. Начальный импульс давления, производимый детонатором, оказывается здесь заметно растянутым вследствие эффекта дисперсии в стержне. Эта дисперсия приводит также к отставанию высокочастотных составляющих, которые наблюдаются в виде ряда колебаний, видимых в хвосте импульса.

Влияние этой дисперсии на импульсы различных форм и продолжительностей было теоретически исследовано Девисом [25], который показал, что для стержня диаметром 2,5 см и длиной 61 см

искажение, производимое в импульсе с первоначальной длиной 20 мсек., приводит к ошибкам порядка 2—3% при измерениях давления. Девис подтвердил эти выводы экспериментально путем измерений при ударах снарядов и волн детонации в газовых смесях, где давления могут быть рассчитаны теоретически.

Два других узла конденсатора, описанных Девисом, были цилиндрического типа. В обоих этих конденсаторах изолированная металлическая цилиндрическая труба удерживается так, что ось ее совпадает с осью стержня. Первый тип конденсатора используется на



Фиг. 24. Осциллограмма, полученная с помощью стержня Девиса с детонатором № 8.

Нижняя линия — шкала времени с периодом 5,3 мсек. (Пятнышко осциллографа движется слева направо.)

конце стержня и измеряет продольные перемещения, тогда как второй тип помещается в любом месте по длине стержня и измеряет радиальные перемещения. Девис показал, что для импульсов короткой продолжительности оба типа цилиндрических конденсаторов дают эффекты искажения более сильные, чем плоско-параллельный конденсатор. Поэтому эти конденсаторы применялись только для длинных импульсов. Однако цилиндрический конденсатор для измерения продольного перемещения имеет преимущество постоянной чувствительности даже при больших перемещениях, а конденсатор, измеряющий радиальные перемещения, дает показания, пропорциональные давлению [см. уравнение (4.2)], и потому устраняет необходимость дифференцирования кривой перемещение — время.

§ 3. Мерный стержень для кручения

В предыдущей главе было показано, что скорость распространения гармонических волн кручения в круглом цилиндре не зависит от длин волн, если движение совершается по основной форме

колебания стержня, т. е. если угловое перемещение является линейной функцией расстояния от оси стержня. Крутящий импульс этого типа должен, следовательно, распространяться вдоль стержня без изменения вида, и потому можно ожидать, что мерный стержень, в котором давление приложено так, что вызывает вместо продольных волн волны кручения, будет давать более правильные измерения давлений, приложенных с большой скоростью.

Такой мерный стержень был предложен Девисом и Оуэном [28, 105, 106]. В этом приспособлении угловое перемещение маленькой оптически гладкой площадки на поверхности цилиндрического стального стержня записывается фотографически, а вращающееся с большой скоростью зеркало используется для нанесения шкалы времени. Девис и Оуэн установили, что для крутящего импульса, возбужденного ударом снаряда по краю стержня, возникает движение по основному типу и импульс распространяется вдоль стержня без изменения формы. Они показали, что это приспособление может записывать большие изменения давления, происходящие в течение менее 1 мсек.

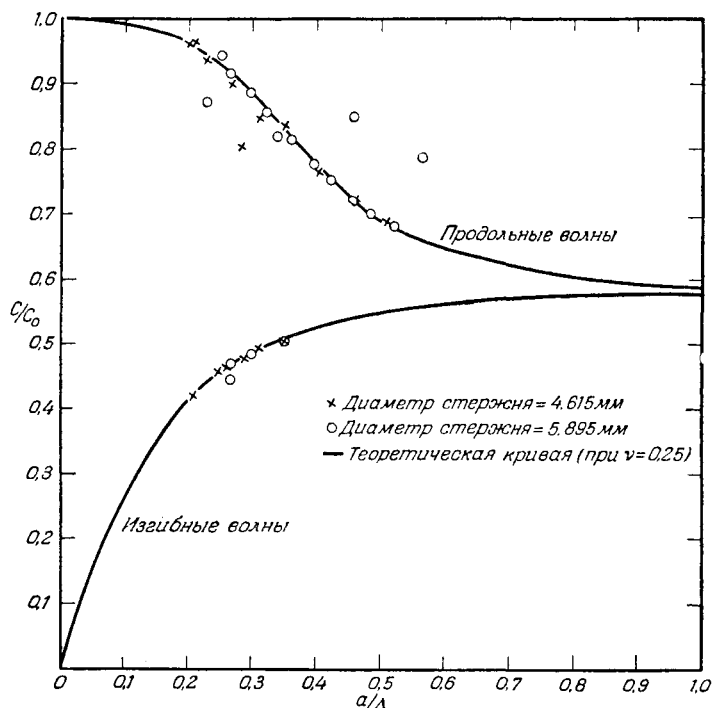
§ 4. Ультразвуковые измерения

Девис [25] показал, что данные опытов по распространению импульсов напряжения вдоль цилиндрических стержней согласуются с тем, что предсказывается теорией Похгаммера — Кри. Измерения фазовой скорости дают наиболее прямой метод проверки теории, и на протяжении последних лет многие исследователи провели такие измерения. Во всех этих исследованиях использовался метод настройки стержня из данного материала в резонанс; фазовая скорость получается тогда как произведение частоты и длины волны. Для заданного стержня можно было бы наблюдать много положений резонанса, соответствующих фундаментальным частотам и ряду гармоник.

Гибе и Шайбе [42] приводили в колебательное движение кварцевые стержни, используя их пьезоэлектрические свойства. Резонансные частоты в стержнях наблюдались в разреженной атмосфере в небольшом зазоре между кристаллами, которые использовались в качестве возбужденных электродов. При резонансе в этом зазоре обнаруживалось свечение разряда. Гибе и Блехшмидт [41] использовали эффект магнитострикции для возбуждения стержней и труб из никеля и из сплава никель — железо. В их приспособлении вокруг стержня располагались две катушки, по одной из которых пропускался переменный ток высокой частоты, тогда как другая катушка использовалась в качестве детектора, сигнал от которого очищался и затем измерялся с помощью гальванометра.

Рёрих [123], Шёнэкс [128] и Шир и Фокке [130] использовали кварцевые кристаллы для возбуждения стержней из других материа-

лов и измеряли длины волн при резонансе непосредственно по неподвижному волновому узору, который получается, если стержень посыпать порошком ликоподия. Рёрих проводил опыты с цилиндрами из поликристаллических стали, меди, алюминия и латуни, а также с цилиндрами из стекла. Шёнэкк использовал монокристаллические



Фиг. 25. Экспериментальные данные для магниевых стержней и сравнение их с теоретическими кривыми.

образцы из цинка, кадмия и олова, а также образцы из поликристаллического цинка; Шир и Фокке проводили измерения с цилиндрами из поликристаллического серебра, никеля и магния.

Все эти исследователи установили, что, когда длина волны составляет несколько диаметров стержня, данные опытов хорошо согласуются со значениями, вычисляемыми с учетом релейской поправки [см. уравнение (3.60) и кривую 1А фиг. 14]. При более же высоких частотах, когда длины волн становятся того же порядка, что и диаметр образца, наблюдаемые фазовые скорости оказываются меньше тех, которые получаются при применении релейской поправки.

Гибе и Блехшмидт [41] разработали теорию распространения продольных волн вдоль цилиндра, причем фазовые скорости, вычисленные на основании этой теории, находятся в лучшем соответствии с наблюдаемыми значениями. Однако Рёрих [123] нашел, что эта теория тоже становится несостоятельной при очень высоких частотах. Теория Гибе и Блехшмидта и причины, по которым она является только приближенной, были рассмотрены в гл. III.

Шир и Фокке [130] проводили измерения с целью проверки теории Гибе и Блехшмидта, причем они также нашли, что она теряет силу при высоких частотах. Наконец, в работах Бэнкрофта [6] и Хадсона [61] были получены точные значения скоростей продольных и поперечных волн в цилиндрах на основании уравнений Похгаммера — Кри. Экспериментальные данные Ширы и Фокке находятся в хорошем согласии с этими значениями скоростей.

На фиг. 25 показано сравнение теоретических кривых со скоростями, наблюдавшимися Ширым и Фокке для двух магниевых стержней различных диаметров; в теоретических кривых значение пуассонова отношения ν принято равным 0,25. Результаты приведены в безразмерной форме: отношение c/c_0 дано для различных значений отношения a/Δ (здесь c — фазовая скорость волн с длиной Δ , c_0 — скорость продольных волн с бесконечной длиной волны и a — радиус стержня; сравнить с фиг. 16). Можно видеть, что согласие очень хорошее за исключением нескольких отдельных точек, которые, повидимому, соответствуют другим формам колебаний. Одна из основных трудностей экспериментального исследования состоит в том, что возбуждаемые в цилиндрах изгибные, крутильные и продольные волны возникают, вообще говоря, одновременно и наблюдаемая волновая картина становится очень сложной.

Стэнфорд [133] провел измерения продольных колебаний цилиндрических алюминиевых стержней с диаметром от 1,25 см до 30 см. Стержни заземлялись в средней точке и вводились в резонанс посредством тонких никелевых трубок, которые управлялись с помощью магнитостратки. Использовались частоты от 5 до 50 кгц. Стэнфорд нашел, что кривая c_p в функции радиуса стержня очень близко припадает к теоретической кривой 1, показанной на фиг. 14. При более высоких частотах он получил некоторые данные о резонансах, соответствующих высшим формам, показанным в виде кривых 2 и 3.

ЧАСТЬ II

ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЯ
В НЕСОВЕРШЕННО УПРУГОЙ
СРЕДЕ

Глава V

ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ

Теория, описанная в первой части этой монографии, базируется на законе Гука. Уравнения движения твердого тела получаются приравниванием упругим силам произведений масс на ускорения, причем предполагается, что никакие другие силы не играют роли. Поведение многих тел не отличается существенно от вполне упругих при малых деформациях и, как показано в гл. IV, результаты наблюдений часто хорошо согласуются с данными упругой теории.

Однако, если материал совершает колебания, часть упругой энергии всегда превращается в тепло вследствие внутреннего трения. Так, когда твердый образец вибрирует, его свободные колебания затухают даже в том случае, когда он изолирован от окружающих предметов. Амплитуда колебания образца при отсутствии внутреннего трения должна была бы безгранично возрастать при воздействии переменной внешней силы, действующей с резонансной частотой образца. Практически амплитуда всегда принимает конечное значение.

Для жидкостей и газов диссипативные силы порождаются вязкостью и теплопроводностью, причем эти эффекты могут быть исследованы аналитически. В твердых телах поведение оказывается гораздо более сложным и существенно зависит от природы твердого тела. В настоящее время нет удовлетворительной теории внутреннего трения в твердых телах и требуется накопление экспериментальных данных.

§ 1. Определения

Наиболее прямой метод определения внутреннего трения состоит в вычислении отношения $\Delta W/W$, где ΔW — энергия, рассеянная рассматриваемым образцом в течение цикла напряжений, а W — упругая энергия, накопленная образцом в момент достижения наибольшей деформации. Это отношение, называемое „специфической демпфирующей способностью“ или „специфическим рассеянием“, может быть измерено для цикла напряжения безотносительно к каким-либо предположениям о природе внутреннего трения. Его значение обычно зависит от амплитуды и скорости цикла, а часто также от предыдущей истории образца.

Имеется несколько непрямых методов определения внутреннего трения, причем они связаны с предположением, что восстанавливающие

силы пропорциональны амплитуде колебания, тогда как диссипативные силы пропорциональны скорости. Если применить эти условия, то отношение двух последующих амплитуд свободных колебаний будет постоянным, причем натуральный логарифм этого отношения Δ' , называемый логарифмическим декрементом, принимается за меру внутреннего трения. Как показано ниже, если в качестве Δ' принят натуральный логарифм отношения последовательных амплитуд с одной и той же стороны от положения равновесия, то он равен половине специфического рассеяния, когда демпфирование слабо.

Другой непрямой мерой внутреннего трения служит острота резонансной кривой при вынужденных колебаниях. Если образец нагружается синусоидальной силой заданной амплитуды, частота которой может изменяться, и амплитуда колебаний образца записывается как функция частоты, то график этой зависимости имеет максимум при резонансной частоте N и падает по обе стороны от этой точки. При самом низком внутреннем трении образца острота этого резонансного пика наибольшая, и если ΔN — изменение частоты вынуждающей силы, необходимое для изменения амплитуды от половины ее максимального значения по одну сторону резонансной частоты до половины максимального значения по другую сторону, то $\Delta N/N$ есть мера внутреннего трения. Для линейной системы с малым демпфированием $\Delta N/N$ равно специфическому рассеянию, помноженному на $\sqrt{3}/2\pi$.

Покажем теперь, как получаются соотношения между этими различными определениями внутреннего трения для образца, в котором восстанавливающая упругая сила пропорциональна перемещению, а рассеяние пропорционально скорости. Уравнение движения такого образца можно записать в виде

$$P = M_1 \ddot{\xi} + \eta_1 \dot{\xi} + E_1 \xi, \quad (5.1)$$

где P — вынуждающая сила, а ξ — перемещение. Первый член в правой части уравнения есть инерционный член, M_1 зависит от массы и формы образца; второй член — демпфирующий, η_1 включает отношение скорости к демпфирующей силе; третий член — упругий, E_1 зависит от модуля упругости и формы образца.

Для свободных колебаний P равно нулю и общим решением уравнения (5.1) в этом случае является

$$\begin{aligned} \xi = & A \exp \left\{ \left[-\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 - 4E_1 M_1} \right] \frac{t}{2M_1} \right\} + \\ & + B \exp \left\{ \left[-\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2 - 4E_1 M_1} \right] \frac{t}{2M_1} \right\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где A и B — комплексные постоянные, зависящие от начальных условий движения. Характер движения будет зависеть от того,

будет ли η_1^2 больше или меньше $4E_1M_1$: если $\eta_1^2 > 4E_1M_1$, то движение не будет колебательным; если $\eta_1^2 < 4E_1M_1$, то, выделив действительную часть в (5.2), получим

$$\xi = C \exp\left(\frac{-\eta_1 t}{2M_1}\right) \cdot \cos(p_1 t + \beta), \quad (5.3)$$

где

$$p_1^2 = \frac{E_1}{M_1} - \frac{\eta_1^2}{4M_1^2}, \quad (5.4)$$

а β и C — функции от A и B .

Частота колебаний равна $p_1/2\pi$, и из соотношения (5.4) видно, что частота, так же как и амплитуда колебаний, зависит от η_1 . Амплитуда уменьшается в $\exp(\eta_1 t/2M_1)$ раз за время t , так что в течение периода колебания она уменьшается в $\exp(\eta_1 \pi/M_1 p_1)$ раз. Значит, логарифмический декремент затухания равен

$$\Delta' = \frac{\eta_1 \pi}{M_1 p_1}. \quad (5.5)$$

Когда демпфирование достаточно мало, так что можно пренебречь величиной η_1^2 по сравнению с $4E_1M_1$, уравнение (5.4) показывает, что p_1^2 в этом случае равно E_1/M_1 , а уравнение (5.5) может быть записано в следующем виде:

$$\Delta' = \frac{p_1 \pi \eta_1}{E_1}. \quad (5.6)$$

Упругая энергия, накопленная в образце, пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому если ξ_1 и ξ_2 — последовательные значения амплитуд по одну и ту же сторону от положения равновесия, то специфическое рассеяние $\Delta W/W$ имеет значение $(\xi_1^2 - \xi_2^2)/\xi_1^2$. Когда оно мало по сравнению с единицей, имеем

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2} \approx \frac{2(\xi_1 - \xi_2)}{\xi_2} \approx 2 \ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) = 2\Delta'. \quad (5.7)$$

Значит, при свободных колебаниях, если демпфирование мало, специфическое рассеяние равно удвоенному логарифмическому декременту.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания, когда P в уравнении (5.1) представляет силу, изменяющуюся со временем по синусоидальному закону с частотой $p/2\pi$, так что

$$P = P_0 \sin pt. \quad (5.8)$$

Решение уравнения (5.1) представляется теперь в виде суммы двух членов: частного решения этого уравнения и общего решения уравнения свободных колебаний. Последнее дается формулой (5.3) и

соответствует переходному процессу; при возрастании t оно стремится к нулю. Частное решение, соответствующее установившемуся состоянию, имеет вид

$$\xi = \frac{P_0}{pZ} \sin(pt - \delta), \quad (5.9)$$

где

$$Z^2 = \left(\frac{E_1}{p} - M_1 p\right)^2 + \eta_1^2 \quad (5.10)$$

и

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{p\eta_1}{E_1 - M_1 p^2}. \quad (5.11)$$

Написанное выше решение аналогично решению, полученному для электрического контура с самоиндукцией, емкостью и сопротивлением; M_1 , $1/E_1$ и η_1 соответствуют этим трем электрическим величинам, причем перемещение ξ соответствует заряду. Величина Z тогда соответствует электрическому импедансу контура и называется механическим импедансом колеблющейся системы.

Из уравнения (5.9) можно видеть, что амплитуда максимальна, когда pZ минимально, и это соответствует значению

$$p^2 = \frac{E_1}{M_1} - \frac{\eta_1^2}{2M_1^2}. \quad (5.12)$$

Таким образом, вынуждающая частота, при которой амплитуда максимальна, не равна p_1 — собственной частоте колеблющейся системы [см. уравнение (5.4)]. Чтобы получить „полуширину“ пика резонанса, мы должны найти два значения p , для которых амплитуда перемещения ξ равна половине ее максимального значения. Из (5.9), (5.12) и (5.4) можно найти, что это максимальное значение равно $P_0/\eta_1 p_1$, так что половинное значение определится из уравнения

$$(E_1 - M_1 p^2)^2 + \eta_1^2 p^2 = 4\eta_1^2 p_1^2.$$

Два решения этого уравнения получаются подстановкой значения p_1^2 из формулы (5.4)

$$p^2 = \left(\frac{E_1}{M_1} - \frac{\eta_1^2}{2M_1^2}\right) \pm \frac{\eta_1 p_1 \sqrt{3}}{M_1},$$

так что если p_2 и p_3 — два значения p , то имеем

$$p_2^2 - p_3^2 = \frac{2\sqrt{3}\eta_1 p_1}{M_1}. \quad (5.13)$$

Полуширина резонансного пика дается отношением $\Delta N/N$, где N — резонансная частота и ΔN — разность между двумя частотами, соответствующими значениям p_2 и p_3 . Далее, в каждом случае p равно частоте, умноженной на 2π , так что, если демпфирование мало,

мы имеем

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{p_2 - p_3}{p_1} \approx \frac{p_2^2 - p_3^2}{2p_1^2}$$

и из (5.13) и (5.5) получаем

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{p_2^2 - p_3^2}{2p_1^2} = \frac{\gamma_1 \sqrt{3}}{M_1 p_1} = \frac{\Delta' \sqrt{3}}{\pi}. \quad (5.14)$$

Значит, полуширина резонансного пика равна логарифмическому декременту Δ' , умноженному на $\sqrt{3}/\pi$, или специфическому рассеянию, умноженному на $\sqrt{3}/2\pi$ [см. формулу (5.7)]. По аналогии с теорией электричества величина Q используется иногда в качестве меры остроты резонанса; она определяется следующим соотношением:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta N}{N},$$

откуда

$$Q = \frac{\pi}{\Delta'} = \frac{2\pi}{\Delta W/W}. \quad (5.15)$$

Работа, производимая внешней силой при действии в образце синусоидального цикла напряжений в течение периода τ , дается выражением

$$\Delta W = \int_0^\tau P \frac{d\xi}{dt} dt.$$

На основании (5.8) и (5.9) это выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{P_0^2}{Z} \int_0^\tau \sin pt \cos (pt - \delta) dt = \\ &= \frac{P_0^2 \pi}{Zp} \sin \delta \left(\text{так как } \tau = \frac{2\pi}{p} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Из (5.11) и (5.10) можно видеть, что $\sin \delta = \eta_1/Z$, так что

$$\Delta W = \frac{\pi P_0^2 \eta_1}{Z^2 p}. \quad (5.17)$$

Упругая энергия, накопленная образцом, когда перемещение достигает максимума, равна $W = \frac{1}{2} E_1 (\xi_{\max})^2$ и, следовательно, из (5.9) мы имеем

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{2\pi \eta_1 p}{E_1} \quad (5.18)$$

или

$$\Delta' = \frac{\pi \eta_1 P}{E_1}, \quad (5.19)$$

что совпадает с логарифмическим декрементом затухания (5.6) для свободных колебаний.

§ 2. Методы измерений

Определения внутреннего трения, рассмотренные в предыдущем параграфе, подсказывают различные пути, с помощью которых внутреннее трение в образце может быть измерено. Так, специфическое рассеяние можно определить непосредственно как количество тепла, которое производится, когда образец совершает замкнутый цикл напряжений. Это было проделано для стали Гопкинсоном и Вильямсом [59] и сравнительно недавно Фёпплом [34], который измерял разность температур между серединой и концами испытываемого образца, подверженного циклической деформации. Эта разность температур пропорциональна скорости образования в образце тепла и его отвода в окружающую среду. Чтобы получить абсолютные значения, использовалась калиброванная аппаратура. Калибровка производилась путем пропускания электрического тока через образец, находящийся в покое, и наблюдения разности температур при известном рассеянии тепла. Гопкинсон и Вильямс использовали область напряжений до 4700 кг/см^2 и частоты до 120 гц. Из пикового значения напряжения можно вычислить максимальную упругую энергию, накопленную образцом, и отсюда определить специфическое рассеяние $\Delta W/W$. Главное неудобство этого метода состоит в том, что для получения доступных измерению разностей температур требуются большие силы, а потому аппаратура должна быть выполнена в промышленных масштабах.

Непрямые измерения внутреннего трения можно выполнить, определяя логарифмический декремент образца при свободных колебаниях или остроту резонанса при вынужденных колебаниях. Этими двумя методами было проделано большое количество измерений; они будут рассмотрены в гл. VI. Другой метод исследования внутреннего трения, более тесно связанный с предметом настоящей монографии, состоит в измерении затухания волны напряжения во время ее распространения в твердом теле.

Найдено, что для плоской синусоидальной волны малой амплитуды затухание происходит по экспоненциальному закону, так что если начальная амплитуда давления равна P_0 , то после прохождения волной расстояния x амплитуда становится равной $P_0 \exp(-\alpha x)$; здесь α — постоянная затухания, являющаяся мерой внутреннего трения материала. Поток энергии для плоской волны с амплитудой давления P равен $P^2/2\rho c$, где ρ — плотность материала и c — скорость распространения. Если рассмотреть полоску материала толщиной δx

и с единичным поперечным сечением, нормальным к волне, то энергия, входящая за единицу времени, равна

$$\frac{P_0^2 \exp(-2\alpha x)}{2fc},$$

а энергия, выходящая за единицу времени, есть

$$\frac{P_0^2 \exp[-2\alpha(x + \delta x)]}{2fc}.$$

Значит, энергия, рассеянная в полоске за одну секунду, приблизительно равна

$$\frac{P_0^2 \alpha \delta x}{fc} \exp(-2\sigma x)$$

и, следовательно, энергия ΔW , рассеянная в течение одного цикла, определяется следующим образом:

$$\Delta W = \frac{2\pi P_0^2 \alpha \delta x}{fc p} \exp(-2\sigma x), \quad (5.20)$$

где $p/2\pi$ — частота.

Плотность энергии в среде равна $P^2/2\rho c^2$ и потому максимальная энергия W , накопленная в образце, будет

$$W = \frac{P_0^2 \delta x}{2\rho c^2} \exp(-2\alpha x); \quad (5.21)$$

следовательно, из (5.20) и (5.21) имеем

$$\alpha = \frac{p}{4\pi c} \frac{\Delta W}{W}, \quad (5.22)$$

так что α может быть связано со специфическим рассеянием или с другими величинами, использованными для определения внутреннего трения. Метод распространения волн применялся в последние годы различными исследователями для измерения внутреннего трения в материалах, которые можно изготовить в форме полос или проволок; результаты этих измерений будут описаны в следующей главе.

§ 3. Поведение „вязко-упругих“ тел

При рассмотрении уравнения (5.1) колеблющегося тела было предположено, что упругая восстанавливающая сила пропорциональна перемещению, а диссипативная сила пропорциональна скорости. Было указано, что E_1 в уравнении (5.1) зависит от упругих постоянных, а η_1 зависит от диссипативных сил, причем обе величины связаны также с размерами образца. Однако природа этих диссипативных сил не

обсуждалась. Рассмотрим теперь, как внутреннее трение зависит от частоты, если предположить, что диссипативные силы имеют чисто вязкую природу. При обсуждении этой задачи надо, прежде всего, остановиться на параметрах, от которых могут зависеть вязкие силы. Максвелл [94], изучая природу вязкости в газах, высказал предположение, что, хотя связь между напряжением σ и деформацией ε в упругом теле имеет вид $\sigma = E^*\varepsilon$, где E^* — соответствующая упругая постоянная, зависимость для реального тела точнее описывается соотношением

$$\frac{d\sigma}{dt} = E^* \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{\tau}, \quad (5.23)$$

где τ — „время релаксации“ тела.

Значит, если время приложения силы мало по сравнению с τ , материал ведет себя подобно упругому телу, если же это время велико по сравнению с τ , поведение материала подобно поведению вязкой жидкости с вязкостью $E^*\tau$. Твердое тело, подчиняющееся закону (5.23), называется „телом Максвелла“, оно может быть представлено моделью, содержащей пружину и последовательно соединенный с ней вязкий элемент, часто называемый „амортизатором“ (фиг. 26, б). Пружина предполагается подчиняющейся закону Гука, а амортизатор рассматривается как поршень, движущийся в жидкости, которая подчиняется закону вязкости Ньютона, так что скорость пропорциональна приложенной силе.

Мы еще возвратимся к поведению тел Максвелла, но прежде обсудим другой тип соединения упругого и вязкого элементов, который впервые был рассмотрен Мейером [95] и позже обобщен Фохтом [148]. Фохт предположил, что компоненты напряжения в твердом теле выражаются в виде суммы двух групп членов, из которых первая пропорциональна деформациям, а вторая — скоростям изменений деформаций. Значит, в уравнениях для аэлотропного тела [уравнения (2.2) гл. II] каждая компонента напряжения должна представляться в виде суммы двенадцати членов: шести членов вида $c_{rs}\varepsilon_{ij}$ и шести членов вида $a_{rs}(\partial/\partial t)\varepsilon_{ij}$. Здесь коэффициенты c_{rs} — упругие постоянные материала, а коэффициенты a_{rs} — соответствующие постоянные вязкости. Для изотропного материала последние приводятся к двум постоянным вязкости, соответствующим константам Ляме; будем их обозначать λ' и μ' . Соотношения упругости (2.3) тогда принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda' \frac{\partial\Delta}{\partial t} + 2\mu' \frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial t} \text{ и т. д.,} \\ \sigma_{yz} &= \mu\varepsilon_{yz} + \mu' \frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial t} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Эти соотношения приводят к уравнениям, аналогичным тем, которые получены для упругого тела, но вместо λ в них будет стоять оператор $\lambda + \lambda'(\partial/\partial t)$, а вместо μ — оператор $\mu + \mu'(\partial/\partial t)$; при этом в большинстве случаев уравнения сильно усложняются.

Тело такого типа, называемое телом Фохта, может быть описано моделью, показанной на фиг. 26, *a*, с пружиной и параллельно включенным амортизатором. При деформации кручения имеет место только сдвиг, а потому пружина должна иметь жесткость модуля сдвига μ , а амортизатор должен иметь вязкость μ' .

Если на противоположные концы цилиндра длины l и радиуса r действуют две противоположно направленные пары величины C каждая и относительное угловое смещение двух концевых сечений есть θ , то для вполне упругого тела имеем

$$C = \frac{1}{2} \pi \mu r^4 \theta / l \quad [\text{см. уравнение (3.15)}], \quad (5.25)$$

а для тела Фохта

$$C = \frac{1}{2} \pi r^4 \left(\mu \theta + \mu' \frac{\partial \theta}{\partial t} \right). \quad (5.26)$$

Если простоты ради рассмотреть диск с моментом инерции I , подвешенный на проволоке длины l и радиуса r , и предположить, что момент инерции диска велик по сравнению с моментом инерции проволоки, то уравнение крутильных колебаний имеет вид

$$I \ddot{\theta} + \frac{\pi r^4}{2l} (\mu' \dot{\theta} + \mu \theta) = 0. \quad (5.27)$$

Это совпадает с уравнением (5.1) при $P=0$, если в качестве ξ взято угловое перемещение и

$$M_1 = I, \quad E_1 = \frac{\pi r^4 \mu}{2l},$$

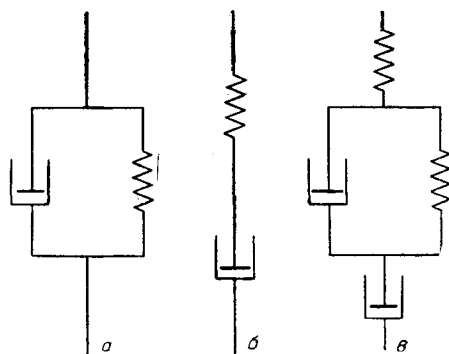
$$\eta_{11} = \frac{\pi r^4 \mu'}{2l}.$$

Следовательно, когда демпфирование мало, логарифмический декремент системы Δ' , согласно уравнению (5.6), равен

$$\Delta' = p_1 \pi \frac{\eta_{11}}{E_1} = p_1 \pi \frac{\mu'}{\mu}. \quad (5.28)$$

Значит, если проволока ведет себя как тело Фохта, то логарифмический декремент пропорционален частоте и отношению μ'/μ .

В общем случае деформации наряду со сдвигом включают объемное расширение, так что необходимо использовать четыре постоянные λ , λ' , μ и μ' и, чтобы решить соответствующую задачу, часто



Фиг. 26. Модели вязко-упругих тел.

a — тело Фохта; *b* — тело Максвелла; *в* — более общая модель.

приходится делать некоторые упрощающие предположения относительно связи между ними. Так, вместо использования двух констант Ляме λ и μ пользуются сжимаемостью k ($k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$) и μ и связанными с ними постоянными вязкости $\lambda' + \frac{2}{3}\mu'$ и μ' . При этом $\lambda' + \frac{2}{3}\mu'$ часто обозначают χ и называют *объемной вязкостью* тела, а μ' называют сдвиговой вязкостью. Затем предполагается, что χ пренебрежимо мало, так что остается только одна постоянная вязкости μ' . Для некоторых веществ, называемых резиноподобными материалами, эти гипотезы представляются оправданными, поскольку для них влияние объемной вязкости мало по сравнению с влиянием сдвиговой вязкости. Однако в общем случае это предположение не оправдывается.

Другое часто делаемое [115] упрощающее предположение состоит в том, что $\lambda/\lambda' = \mu/\mu'$. При этом снова остается только одна независимая постоянная вязкости. Представляется, однако, мало обоснованным делать такое предположение за исключением общего соображения, что вязкие процессы могут сопровождать упругие процессы (см. Томпсон [142]).

В случае одноосного растяжения стержня, когда боковая поверхность свободна от напряжений, отношение напряжения к деформации в упругом теле равно модулю продольной упругости $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ [см. уравнение (2.4)]. Для тела же Фохта, как показал Томпсон, зависимость между напряжением и деформацией должна иметь вид

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} + E' \frac{d\varepsilon_{xx}}{dt}, \quad (5.29)$$

где E' приближенно определяется соотношением

$$\frac{E'}{E} = \frac{\lambda\mu\tau_1 + (3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2)\tau_2}{(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)}, \quad (5.30)$$

причем

$$\tau_1 = \frac{\lambda'}{\lambda} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \frac{\mu'}{\mu}.$$

Постоянная E' была названа «коэффициентом нормальной вязкости» Хонда и Конно. [Если $\lambda'/\lambda = \mu'/\mu = \tau'$, то (5.30) дает $E' = E\tau'$.]

Продольные колебания стержня, поведение которого подобно поведению тела Фохта, можно представить уравнением (5.1), если E_1 приравнять BE' и $\eta_1 = BE'$, где B — величина, зависящая от формы стержня и имеющая размерность квадрата длины. Значит, из (5.6) логарифмический декремент Δ' приближенно будет выражен так:

$$\Delta' = \frac{p_1\pi E'}{E}, \quad (5.31)$$

где p_1 — частота, умноженная на 2π .

Возвратимся теперь к телу Максвелла, для которого зависимость напряжение — деформация имеет вид (5.23), а соответствующая ме-

ханическая модель изображена на фиг. 26, б. Для простоты рассмотрим продольные колебания большой массы M , подвешенной на стержне длины l с площадью поперечного сечения A , и предположим, что инерция стержня пренебрежимо мала по сравнению с M . Тогда уравнение движения массы имеет вид

$$M\ddot{\xi} + A\sigma = 0, \quad (5.32)$$

где σ — напряжение в стержне и ξ — перемещение массы. Относительное удлинение стержня при этом равно ξ/l , и, следовательно, уравнение (5.23) запишется в виде

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{E^*}{l} \frac{d\xi}{dt} - \frac{\sigma}{\tau}. \quad (5.33)$$

Исключая σ и $d\sigma/dt$ из (5.32) и (5.33), получаем

$$\frac{M}{A} \frac{d^3\xi}{dt^3} + \frac{M}{A\tau} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{E^*}{l} \frac{d\xi}{dt} = 0. \quad (5.34)$$

После интегрирования находим

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\xi}{dt} + \frac{E^*A}{Ml} \xi = \text{const.} \quad (5.35)$$

Уравнение (5.35) по форме подобно уравнению (5.1), и если масса M колеблется, то она будет совершать демпфирующие синусоидальные колебания, которые, как видно из сравнения с (5.3), записываются в виде

$$\xi = C \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \cos(p_1 t + \beta),$$

где $p_1^2 = E^*A/Ml - 1/4\tau^2$. Логарифмический декремент Δ' есть натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд по одну и ту же сторону от положения равновесия. Так как коэффициент уменьшения амплитуды за единицу времени составляет $1/2\tau$, то уменьшение амплитуды за одно колебание будет равно $\exp(\pi/\tau p_1)$; следовательно,

$$\Delta' = \frac{\pi}{\tau p_1}. \quad (5.36)$$

Для тела Максвелла время релаксации τ можно рассматривать как отношение его „эффективной вязкости“ η^* к модулю упругости E^* , так что (5.36) можно переписать в виде

$$\Delta' = \frac{\pi E^*}{\eta^* p_1}. \quad (5.37)$$

Значит, для тела Максвелла логарифмический декремент изменяется *обратно пропорционально* как частоте, так и эффективной вязкости материала.

Если мы сравним (5.37) с (5.28), то увидим, что тела Максвелла и тела Фохта ведут себя противоположным образом. Это дает удобный

способ проверить, ведут ли себя реальные тела подобно той или другой идеализированной модели. Как будет показано в следующей главе, для большинства тел Δ' ведет себя отлично от обеих моделей и чаще всего почти не зависит от частоты. Таким образом, хотя эти модели удобны для качественного описания возможного возникновения внутреннего трения из процессов вязкой природы, они являются слишком упрощенными, чтобы служить количественным целям. На фиг. 26, в показано несколько более сложное устройство, в котором скомбинированы свойства моделей Фохта и Максвелла. Эта модель дает результаты, более близкие к поведению реальных тел, но количественное соответствие, за исключением малой области частот, все же весьма неудовлетворительно.

Чтобы принять во внимание тот факт, что в теле могут иметь место одновременно несколько различных релаксационных явлений, надо было бы рассматривать более сложные модели. Они состоят из нескольких моделей Максвелла, соединенных параллельно, или из нескольких моделей Фохта, соединенных последовательно. Тело, таким образом, рассматривается как имеющее несколько различных времен релаксации или в пределе непрерывный „спектр“ времен релаксации. Такая трактовка математически эквивалентна постановке Больцмана, которая будет обсуждена ниже.

§ 4. Принцип суперпозиции

Если тело Максвелла деформировано на величину ϵ и удерживается при этой деформации, то напряжение будет с течением времени ослабевать. Из уравнения (5.23) видно, что напряжение убывает по экспоненциальному закону, его значение в момент t будет $E^* \epsilon \exp(-t/\tau)$. Больцман [12] обобщил это соотношение на материалы, для которых убывание напряжения происходит не обязательно по экспоненциальному закону. Он высказал мысль, что механическое поведение твердого тела является функцией его полной предшествующей истории, и предположил, что когда образец испытывает ряд деформаций, то действие каждой деформации не зависит от других и результирующее поведение можно вычислить путем простого сложения действий, которые имели бы место, если бы каждая деформация действовала одна. Это предположение стало известно как *принцип суперпозиции*. Больцман предположил, что сдвиг и объемное расширение могут релаксировать различным образом, так что для деформаций, таких, как одноосное растяжение, в которых имеет место то и другое, изучение явления сильно осложняется. Однако, если деформация происходит в форме кручения, когда имеется только сдвиг, или если тело таково, что эффект объемной релаксации мал, то анализ упрощается.

Предполагается, что если образец получил за время δT деформацию величины $\epsilon(T)$ к моменту T , то к моменту $t > T$ от этого

возникнет остаточное напряжение

$$-\varepsilon(T)f(t-T)\delta T.$$

Функция $f(t-T)$ называется *функцией памяти* и является характеристикой материала и типа напряженного состояния. Полное напряжение σ предполагается равным сумме элементарных напряжений, остающихся от полной предшествующей истории образца, и напряжения, соответствующего мгновенному значению деформации ε в момент времени t . Последнее напряжение обычно считается пропорциональным ε , но в общем случае оно записывается как $F(\varepsilon)$; тогда зависимость между напряжением и деформацией принимает вид

$$\sigma(\varepsilon, t) = F(\varepsilon) - \int_{-\infty}^t \varepsilon(T)f(t-T)dT. \quad (5.38)$$

Уравнение (5.38) представляет одну из форм принципа суперпозиции, в которой рассматривается задача о релаксации напряжения, причем напряжение в любой момент времени является функцией истории деформирования образца. Но можно ставить обратную задачу, т. е. рассматривать в качестве независимой переменной напряжение, а возникающую при этом деформацию выводить из известной истории напряжения (см., например, Лидерман [84]). Было показано (Гросс [45]), что оба подхода математически эквивалентны, и каким из них пользоваться — дело удобства.

Для тела Максвелла функция $F(\varepsilon) = E^*\varepsilon$, а функция памяти $f(t-T) = (E^*/\tau)\exp[(T-t)/\tau]$. Уравнение (5.38) вследствие этого принимает вид

$$\sigma = E^*\varepsilon - \frac{E^*}{\tau} \int_{-\infty}^t \varepsilon(T) \exp\left(\frac{T-t}{\tau}\right) dT. \quad (5.39)$$

Значит, если первоначально недеформированный образец к моменту времени t_1 получил деформацию ε и деформация затем поддерживается при этом значении, то напряжение в момент времени t равно

$$\sigma = E^*\varepsilon \left[1 - \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^t \exp\left(\frac{T-t}{\tau}\right) dT \right] = E^*\varepsilon \exp\left(\frac{t_1-t}{\tau}\right),$$

что совпадает с результатом, полученным непосредственно из уравнения (5.23).

Для реальных тел $f(t-T)$ не может быть выражена простой экспоненциальной функцией, и лучшее согласие с экспериментальными результатами получается, если принять ее в виде нескольких экспоненциальных функций, каждая из которых имеет свое особое значение τ . Такой подход эквивалентен рассмотрению механического устройства,

содержащего ряд максвелловских моделей, соединенных параллельно. В пределе функция памяти может быть представлена интегралом

$$f(t - T) = \int_0^{\infty} A(\tau) \exp\left(\frac{T-t}{\tau}\right) d\tau. \quad (5.40)$$

Здесь $A(\tau) d\tau$ представляет „число“ времен релаксации между τ и $\tau + d\tau$ и модулей упругости, связанных с ними. Кривая $A(\tau)$ в функции τ дает *релаксационный спектр* материала, который в общем случае легче, чем саму функцию памяти, увязать с микроскопическими процессами, порождающими релаксацию. Гросс [45] рассмотрел те математические преобразования, которые необходимы для определения функции $A(\tau)$, когда функция $f(t - T)$ известна.

Надо заметить, что в максвелловской модели напряжение асимптотически стремится к нулю, если поддерживать постоянное значение деформации. Это справедливо для любого числа максвелловских элементов, соединенных параллельно. Однако в реальных телах напряжение, вообще говоря, стремится к конечному значению, что может быть учтено в модели введением второй пружины в максвелловский элемент (см. фиг. 27, а).

В случае уравнения Больцмана

Фиг. 27. Две эквивалентные механические модели.

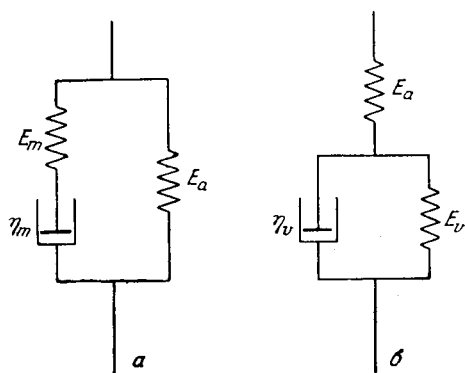
а — дополнительная пружина, включенная параллельно модели Максвелла; б — дополнительная пружина присоединена последовательно к модели Фохта.

(5.33) это означает, что при неизменном значении ε интеграл асимптотически стремится к значению $A\varepsilon$, которое меньше чем $F(\varepsilon)$. Зависимость между напряжением и деформацией для деформаций, которые поддерживаются в течение длительного времени, принимает вид

$$\sigma = F(\varepsilon) - A\varepsilon,$$

что соответствует зависимости между σ и ε при наличии дополнительной пружины.

Модель Фохта не обнаруживает релаксации напряжения, так как если деформация зафиксирована, то зафиксировано также и напряжение; если же к модели последовательно подключена вторая пружина (фиг. 27, б), то она становится эквивалентной максвелловской модели с последовательно включенной пружинкой. Пусть на фиг. 27, а жест-



кость пружины, последовательно соединенной с амортизатором, есть E_m (так что удлинение, производимое силой P_1 , равно P_1/E_m), жесткость дополнительной пружины есть E_a и „вязкость“ амортизатора равна η_m (так что при приложении силы P_1 удлинение происходит со скоростью P_1/η_m). Чтобы получить для этой модели соотношение между приложенной силой P и деформацией ϵ , надо сложить силы, действующие в двух параллельных плечах. Если обозначить через P_1 силу, действующую в плече, содержащем максвелловский „элемент“, а натяжение дополнительной пружины через P_2 , то получим

$$E_m P_1 + \eta_m \frac{dP_1}{dt} = E_m \eta_m \frac{d\epsilon}{dt} \quad (5.41)$$

и

$$P_2 = E_a \epsilon. \quad (5.42)$$

Так как $P = P_1 + P_2$, то из (5.41) и (5.42) будем иметь

$$E_m P + \eta_m \frac{dP}{dt} = \eta_m (E_a + E_m) \frac{d\epsilon}{dt} + E_m E_a \epsilon. \quad (5.43)$$

Аналогично, если в модели на фиг. 27, б обозначить жесткости пружин через E_v и E'_a , а „вязкость“ амортизатора через η_v и сложить деформации дополнительной пружины и фохтовского элемента, соединенного с ней последовательно, вновь получим зависимость между приложенной силой P и деформацией ϵ :

$$(E'_a + E_v) P + \eta_v \frac{dP}{dt} = \eta_v E'_a \frac{d\epsilon}{dt} + E_v E'_a \epsilon. \quad (5.44)$$

Уравнения (5.43) и (5.44) эквивалентны, если $E'_a = E_a + E_m$, $E_v = E_a(1 + E_a/E_m)$ и $\eta_v E_m E_a = \eta_m E_v E'_a$. Механическое поведение этих двух типов моделей, таким образом, одинаково, и с математической точки зрения дело только удобства — какой моделью пользоваться.

§ 5. Распространение волн напряжения в „вязко-упругом“ теле

Теория колебаний больцмановского тела, подчиняющегося уравнению (5.38), приводит к чрезвычайно сложной математической задаче, включающей решение интегро-дифференциального уравнения с частными производными. В. Вольтерра [150] в его теории функционалов рассматривал эту задачу, но результаты этой теории нашли пока очень небольшие применения к изучению динамического поведения вязко-упругих материалов.

Более простая задача колебания образцов из фохтовского и максвелловского материалов была рассмотрена ранее в этой главе. Рассмотрим теперь распространение волн напряжения в таких средах. При выводе зависимостей между компонентами напряжения и ускорения в начале гл. II [уравнения (2.7)] не было сделано никаких пред-

положений относительно зависимости напряжение — деформация для сплошной среды, а потому эти уравнения применимы также к движению вязкоупругого тела. Как упоминалось, соотношения между компонентами напряжения и деформаций для тела Фохта имеют ту же самую форму, что и для упругого тела, если использовать оператор $\lambda + \lambda' (\partial/\partial t)$ вместо λ и оператор $\mu + \mu' (\partial/\partial t)$ вместо μ .

Таким образом, при подстановке значений компонент напряжения в первое из уравнений (2.7) получим для тела Фохта следующее уравнение движения в направлении оси x :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[(\lambda + \mu) + (\lambda' + \mu') \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 u \quad (5.45)$$

и аналогичные уравнения для компонент v и w . Как и для упругого тела, эти соотношения приводят к дифференциальным уравнениям для безвихревого и эквиволюмиального движений. Уравнение для распространения перемещения u в волне расширения имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 u + (\lambda' + 2\mu') \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (5.46)$$

а для волны искажения имеем

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 u + \mu' \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (5.47)$$

Аналогичные уравнения получаются для v и w .

Если теперь простоты ради рассмотреть плоскую волну искажения, распространяющуюся в направлении x при движении частиц в направлении z , то из (5.47) получим

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu' \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}. \quad (5.48)$$

Это уравнение, вообще говоря, не удовлетворяется функциями типа $w = F(x - ct)$ или $w = F(x + ct)$. Если мы попытаемся искать гармоническое решение так, чтобы w представлялось действительной частью от $A \exp [i(p t - f_1 x)]$, то при подстановке в (5.48) получим

$$\rho p^2 = \mu f_1^2 + i \mu' f_1^2 p. \quad (5.49)$$

Отсюда следует, что f_1 должно быть комплексным; если положить его равным $f + i\alpha$ и приравнять действительную и мнимую части в уравнении (5.49), то найдем

$$\rho p^2 = \mu (f^2 - \alpha^2) - 2\mu' p f \alpha \quad (5.50)$$

и

$$2\mu \alpha f = -\mu' p (f^2 - \alpha^2),$$

откуда

$$f^2 = \frac{\mu p p^2}{2(\mu^2 + \mu'^2 p^2)} \left\{ \left[1 + \frac{(\mu' p)^2}{\mu^2} \right]^{1/2} + 1 \right\} \quad (5.51)$$

и

$$\alpha^2 = \frac{\mu p p^2}{2(\mu^2 + \mu'^2 p^2)} \left\{ \left[1 + \frac{(\mu' p)^2}{\mu^2} \right]^{1/2} - 1 \right\}.$$

Комплексная величина f_1 означает, что волна затухает по экспоненциальному закону при распространении в теле, и выражение для ω можно записать так:

$$\omega = \exp(\alpha x) \cos(pt - fx). \quad (5.52)$$

[Из уравнения (5.51) можно видеть, что α может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Однако положительный корень не соответствует физическому содержанию задачи.] Как f , так и α зависят от частоты, и, когда $\mu' p$ мало по сравнению с μ , величина α становится пропорциональной квадрату частоты. Заметим, что α здесь то же самое, что и в уравнении (5.22), которое описывает соотношение между затуханием прогрессивных волн и специфическим рассеянием $\Delta W/W$. Уравнение (5.22) показывает, что α пропорционально произведению частоты на специфическое рассеяние, так что при малых значениях μ' специфическое рассеяние, а значит, и логарифмический декремент пропорциональны частоте. Это согласуется с уравнением (5.6), полученным для колеблющегося тела Фохта.

Выражение (5.51) для f показывает, что $f = p(\rho/\mu)^{1/2}$ при малых значениях $\mu' p$. Следовательно, фазовая скорость, определяемая как p/f , равна $(\mu/\rho)^{1/2}$, т. е. имеет то же значение, что и для упругого тела. Значит, фазовая скорость менее чувствительна к частоте, чем затухание, и начинает изменяться лишь тогда, когда p становится сравнимым с μ/μ' . Исследование волн расширения аналогично тому, что сделано для волн искажения, только вместо μ надо писать $\lambda + 2\mu$ и $\lambda' + 2\mu'$ вместо μ' .

Распространение продольных волн вдоль тонкого стержня из материала, который ведет себя как тело Фохта, описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E' \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \quad (5.53)$$

где E' — „вязкость при растяжении“, определяемая уравнениями (5.29) и (5.30). Это приводит вновь к уравнениям, аналогичным (5.51), с заменой μ и μ' на E и E' соответственно.

Хилье [51] рассмотрел распространение продольных синусоидальных волн вдоль вязко-упругой нити и вывел соотношения для тела Максвелла, тела Фохта и тела, поведение которого подобно поведению моделей на фиг. 27. Для максвелловского тела зависимость между напряжением и деформацией (5.23) можно записать в следующей форме

$$\frac{d\sigma}{dt} = E^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\sigma}{\tau}. \quad (5.54)$$

Здесь τ — время релаксации и, если через η^* обозначить „эквивалентную вязкость“ тела, то $\tau = \eta^*/E^*$.

Уравнение движения стержня, согласно второму закону Ньютона, есть

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (5.55)$$

так что, дифференцируя (5.54) по x и подставляя значение $\partial \sigma / \partial x$ из (5.55), получим

$$\rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - E^* \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (5.56)$$

Уравнение (5.56) не удовлетворяется функцией типа $u = A \exp i(pt - f_1 x)$, если f_1 не комплексно. Полагая, как прежде, $f_1 = f + i\alpha$, найдем

$$\left. \begin{aligned} f^2 &= [\rho p^2 / 2E^*] [(1 + p^{-2}\tau^{-2})^{1/2} + 1], \\ \alpha^2 &= [\rho p^2 / 2E^*] [(1 + p^{-2}\tau^{-2})^{1/2} - 1]. \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

Когда p велико по сравнению с $1/\tau$, иначе говоря, когда период волны напряжения короток по сравнению с временем релаксации, то $f^2 = \rho p^2 / E^*$ и скорость волны равна $(E^*/\rho)^{1/2}$, т. е. она такая же, как в упругом стержне с модулем Юнга E^* . При этом фактор затухания α принимает значение $(p/4E^*\tau^2)^{1/2}$ и, следовательно, не зависит от частоты. Специфическое рассеяние пропорционально α/p [см. уравнение (5.22)] и, следовательно, обратно пропорционально частоте. Это находится в согласии с уравнением (5.37) для вибрирующего тела Максвелла. Третий тип модели, рассмотренной Хилье, показан на фиг. 27,б, где дополнительная пружина соединена последовательно с моделью Фохта. Зависимость напряжение — деформация для такой модели дается уравнением (5.44):

$$(E'_a + E_v) \sigma + \eta_v \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \eta_v E'_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - E_v E'_a \varepsilon = 0,$$

где σ — напряжение и ε — деформация. Если продифференцировать эту зависимость по x и подставить значение $\partial \sigma / \partial x$ из (5.55), то получим

$$\rho \eta_v \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \rho (E'_a + E_v) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \eta_v E'_a \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - E_v E'_a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (5.58)$$

Полагая η_v/E_v равным τ , „времени запаздывания“ фохтовского элемента, и, как прежде, разыскивая решение в виде

$$u = A \exp [i(pt - (f + i\alpha)x)],$$

найдем, что уравнение (5.58) удовлетворяется, если f и α определены соотношениями

$$\left. \begin{aligned} f^2 &= \frac{\rho p^3}{2E_c E'_a} \left[\left(\frac{E'_a{}^2 + E_c^2 p^2 \tau^2}{1 + p^2 \tau^2} \right)^{1/2} + \frac{E'_a + E_c p^2 \tau^2}{1 + p^2 \tau^2} \right], \\ \alpha^2 &= \frac{\rho p^3}{2E_c E'_a} \left[\left(\frac{E'_a{}^2 + E_c^2 p^2 \tau^2}{1 + p^2 \tau^2} \right)^{1/2} - \frac{E'_a + E_c p^2 \tau^2}{1 + p^2 \tau^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

где E_c представляет совместный модуль двух пружин, соединенных последовательно, так что $1/E_c = 1/E'_a + 1/E_v$. Если E'_a очень велико,

т. е. если дополнительная пружина жесткая, то уравнение (5.59) упрощается и принимает вид уравнения (5.51) для простого тела Фохта. Если, с другой стороны, E_v очень мало, уравнение (5.58) становится идентичным уравнению (5.56) для максвелловского тела.

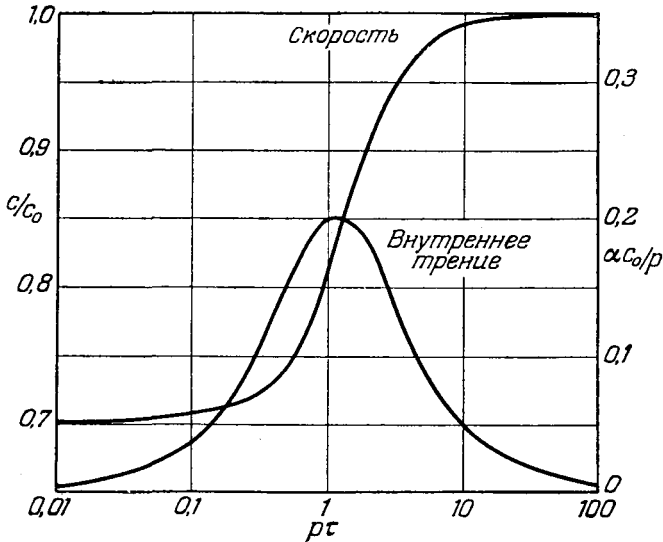
Скорость c распространения волн вдоль стержня определена как p/f , и из уравнений (5.59) видно, что для малых значений p она стремится к $(E_c/\rho)^{1/2}$, а при очень больших значениях p — к $(E'_a/\rho)^{1/2}$. Значит, при частотах, малых по сравнению с $1/\tau$, скорость распространения соответствует упругому поведению двух пружин, соединенных последовательно, тогда как при высоких частотах фохтовская пружина оказывается бездействующей и скорость распространения зависит от модуля дополнительной пружины. Демпфирование волны определяется величиной α и возрастает с возрастанием частоты; однако специфическое рассеяние пропорционально α/p , и из (5.59) можно видеть, что оно стремится к нулю как при очень малых, так и при очень больших значениях $p\tau$, достигая максимума между ними.

На фиг. 28 показаны кривые скорости распространения и специфического рассеяния в функции величины $p\tau$ для особого случая $E'_a = E_v$. Кривые нанесены в безразмерной форме: скорость взята в виде отношения c/c_0 , где c_0 — скорость распространения при „нулевой“ частоте, причем $c_0^2 = E_c/\rho$, а демпфирование выражено через величину $\alpha c_0/p$ и пропорционально специфическому рассеянию в теле. Из фигуры можно видеть, что демпфирование максимально при $p\tau = 1,18$ и что при частотах выше или ниже этого значения оно быстро падает. Можно провести сравнение кривой скорости на фиг. 28 с дисперсионными кривыми, показанными на фиг. 14, для продольных волн в упругом цилиндрическом стержне. Дисперсия в последнем вызвана чисто геометрическими факторами, здесь же она обусловлена вязко-упругими свойствами тела. Интересно отметить, что тенденции дисперсии противоположны в этих двух случаях: высокочастотные волны распространяются быстрее низкочастотных в вязко-упругом теле, тогда как в упругом цилиндре, диаметр которого сравним с длиной волны, имеет место обратное. Интересно было бы исследовать распространение волн в вязко-упругом цилиндре, диаметр которого сравним с длиной волны, поскольку здесь имеют место два противоположных эффекта.

Следует еще раз подчеркнуть, что очень немногие тела хотя бы приближенно ведут себя подобно модели Максвелла или Фохта и что только с помощью спектра времен релаксации может быть достаточно точно определено динамическое поведение тела. Единственным доводом для использования простейших моделей с одним временем релаксации является то, что в противном случае математический анализ становится чрезвычайно запутанным. Однако когда механическое поведение вязко-упругого тела надо знать только в ограниченной области частот, „упругость“ и „вязкость“,

полученные с помощью простейшего максвелловского или фохтовского элемента, часто оказываются удобным методом описания механических свойств при предписанных условиях.

Функция памяти и связанный с ней спектр времен релаксации описывают механическое поведение тела постольку, поскольку тело представляет линейную систему, т. е. поскольку имеется линейная



Фиг. 28. Изменение частоты скорости распространения и потерь на демпфирование для тела, которое ведет себя подобно модели фиг. 27,б при $E'_\alpha = E_\nu$.

зависимость между напряжением и деформацией при фиксированном времени; если же такой зависимости в материале нет, то сделанные выше построения неверны. Существование линейной системы предполагается и при применении принципа суперпозиции. Для большинства тел существует значение деформации, до которого, хотя бы приближенно, это предположение оправдано. Теория распространения напряжения в нелинейных системах еще не развита за исключением одного или двух довольно специальных случаев. Они будут рассмотрены в гл. VII, где изучается распространение пластических и ударных волн.

§ 6. Механизм внутреннего трения

Внутреннее трение в твердых телах может быть вызвано несколькими различными механизмами, и хотя все они, в конце концов, приводят к преобразованию механической энергии в теплоту, эти меха-

низмы включают в себя два различных диссипативных процесса. Эти два процесса представляют собой, грубо говоря, аналоги вязких потерь и потерь путем теплопроводности при распространении звуковых волн в жидкостях.

Первый тип процесса зависит непосредственно от неупругого поведения тела. Если кривая напряжение — деформация для единичного цикла колебаний имеет вид петли гистерезиса, то площадь, заключенная внутри этой петли, представляет ту механическую энергию, которая теряется в форме тепла. Когда образец совершает замкнутый цикл напряжений „статически“, определенное количество энергии рассеивается и эти потери представляют часть специфического рассеяния при колебаниях образца. Как показали Джемант и Джексон [40], даже в том случае, когда петля гистерезиса настолько узкая, что не может быть измерена статически, она оказывает существенное влияние на затухание колебаний, так как в опыте на колебания образец может совершать большое число замкнутых циклов гистерезиса. Потеря энергии за один цикл постоянна, так что специфическое рассеяние и, следовательно, логарифмический декремент не зависят от частоты. Джемант и Джексон нашли, что для многих материалов логарифмический декремент действительно постоянен в довольно широкой области частот, и пришли к заключению, что основная причина внутреннего трения в этих случаях может быть связана просто со „статической“ нелинейностью зависимости напряжение — деформация материала. Аналогичные результаты были получены Вегелем и Уолтером [155] при высоких частотах.

В дополнение к статическому гистерезису многие материалы обнаруживают потери, связанные с перепадами скорости, возникающими при колебаниях, причем силы, порождающие эти потери, можно рассматривать как имеющие вязкую природу. Как мы видели, наличие таких сил означает, что механическое поведение зависит от скорости деформирования; этот эффект отмечается, в частности, в органических полимерах с длинными молекулярными цепочками. Предметом реологии является главным образом такого рода зависимость от времени.

Можно различать два типа вязких потерь в твердых телах, что качественно соответствует поведению моделей Максвелла и Фохта, описанных в предыдущих параграфах. Так, когда нагрузка поддерживается постоянной, это может привести к необратимой деформации, как в модели Максвелла, или же деформация может с течением времени асимптотически стремиться к некоторому постоянному значению и медленно исчезать при снятии нагрузки, как это происходит в модели Фохта. Последний тип вязкости называют иногда внутренней вязкостью, а о механическом поведении таких тел говорят как о *запаздывающей упругости*.

Истолкование эффектов вязкости в твердых телах в молекулярных масштабах не вполне ясно главным образом потому, что типы микроскопических процессов, которые приводят к рассеянию механической

энергии в форме тепла, относятся еще в значительной степени к области догадок. Тобольский, Пауэл и Эринг [145] и Алфрей [2] исследовали вязко-упругое поведение с помощью теории скоростных процессов. В этом подходе делается предположение, что каждая молекула (или каждое звено молекулярной цепочки в случае полимеров с длинными молекулярными цепочками) совершает тепловые колебания в „энергетическом колодце“, образованном ее соседями. В результате тепловых флуктуаций время от времени появляется энергия, достаточная для того, чтобы молекула могла покинуть колодец, и при наличии внешних сил имеет место диффузия, одинаковая во всех направлениях. Скорость диффузии зависит от вероятности получения молекулой энергии, достаточной для того, чтобы покинуть колодец, и, следовательно, от абсолютной температуры тела. Если к телу приложено гидростатическое давление, высота энергетического колодца изменяется, скорость диффузии становится другой, но остается одинаковой во всех направлениях. При одноосном растяжении высота колодца в направлении растягивающего напряжения становится ниже, чем в направлении, перпендикулярном к нему. Поэтому молекулы с большей вероятностью будут распространяться параллельно растягивающему напряжению, чем в перпендикулярном к нему направлении. Это течение приводит к преобразованию упругой энергии, накопленной телом, в беспорядочное тепловое движение, которое в макроскопическом масштабе воспринимается как внутреннее трение. Там, где молекулы движутся целиком, течение будет необратимым, и поведение будет аналогично модели Максвелла, тогда как там, где звенья молекул перепутаны, материал ведет себя подобно модели Фохта и обнаруживает запаздывающую упругость.

Если сделать определенные предположения относительно формы колодца потенциальной энергии и природы молекулярных групп, которые в нем колеблются, то можно показать (Тобольский, Пауэл, Эринг [145], стр. 125), что теория приводит к механическому поведению тела, подобному тому, которое описывается моделями пружина — амортизатор, рассмотренными ранее в этой главе. В такой трактовке вопроса подчеркивается зависимость вязко-упругих свойств от температуры; из этой зависимости могут быть выведены термодинамические соотношения. Главное неудобство в приложении теории к реальным телам в количественном отношении связано с тем, что природа потенциального колодца для тел является в значительной мере предметом догадки и что часто несколько различных процессов могут протекать одновременно. Тем не менее, это пока почти единственный серьезный подход к молекулярному объяснению наблюдаемых эффектов, и он дает надежную базу для развития в будущем.

Потери происходят в однородных неметаллических телах главным образом подобно тому, как описано выше, и внутреннее трение связано скорее с неупругим поведением материала, чем с его макроскопическими тепловыми свойствами. В металлах, однако, имеются

потери теплового характера, которые, вообще говоря, более существенны, и Зенер [162] рассмотрел несколько различных тепловых механизмов, приводящих к рассеянию механической энергии в форме тепла.

Изменения объема тела должны сопровождаться изменениями температуры; так, когда тело сжимается, его температура возрастает, а когда оно расширяется, температура понижается. Для простоты мы рассмотрим изгибные колебания консольной пластинки (язычка). Каждый раз, когда язычок изогнут, внутренняя сторона нагревается, а наружная охлаждается, так что получается непрерывный поток тепла туда и обратно поперек язычка, совершающего изгибные колебания. Если движение очень медленное, то перенос тепла совершается изотермически и, следовательно, обратимо, а потому при очень малых частотах колебаний не должно происходить никаких потерь. Если колебания происходят столь быстро, что теплота не имеет времени для перетекания поперек язычка, то условия становятся адиабатическими и попрежнему никаких потерь не возникает. При изгибных же колебаниях, периоды которых сравнимы с временем, необходимым для перетекания тепла поперек язычка, возникает необратимое превращение механической энергии в теплоту, наблюдаемое в виде внутреннего трения. Зенер [161] показал, что для колеблющегося язычка специфическое рассеяние дается выражением

$$\frac{\Delta W}{W} = 2\pi \frac{E_S - E_T}{E_S} \cdot \frac{N_0 N}{N_0^2 + N^2}, \quad (5.60)$$

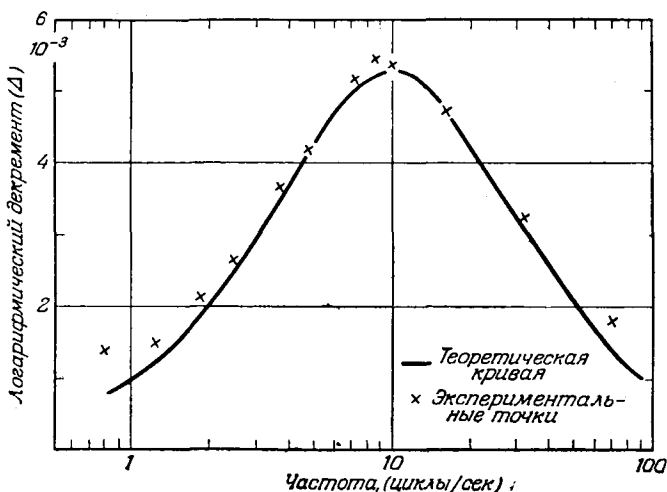
где E_S и E_T — адиабатическое и изотермическое значения модуля Юнга материала, N — частота колебаний, N_0 — релаксационная частота, которая для язычка прямоугольного поперечного сечения имеет выражение

$$N_0 = \pi K' / (2c_p \rho d^2); \quad (5.61)$$

здесь K' — теплопроводность, C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, ρ — плотность, d — толщина язычка в плоскости колебаний.

Бенневиц и Рётгер [10] измерили внутреннее трение в немецких серебряных язычках при поперечных колебаниях. Результаты их экспериментов показаны на фиг. 29 вместе с теоретической кривой, полученной с помощью уравнения (5.60). При построении этой кривой не были использованы никакие произвольные параметры, причем соответствие между теорией и экспериментом поразительно хорошее. Ясно, что в области частот около N_0 (приблизительно 10 гц) теплопроводность в язычке является основной причиной внутреннего трения. Видно также, что при частотах, далеких от N_0 , экспериментальные значения внутреннего трения выше тех, которые предсказываются теорией, и это указывает на то, что здесь становятся относительно более важными другие влияния. Продольное напряжение будет поро-

ждать аналогичные эффекты, так как часть образца сжата, тогда как другая растянута, и в этом случае тепловой поток параллелен направлению распространения. Так как расстояние между областями сжатия и разрежения в этом случае равно половине длины волны, то потери, вызванные этой причиной, будут малыми при обычных частотах.



Фиг. 29. Сравнения значений внутреннего трения для немецких серебряных пластинок при поперечных колебаниях, измеренных Бенневицем и Рётгером и полученных по теоретическим соотношениям Зенера.

Описанный тип тепловых потерь имеет место независимо от того, однородно тело или нет. Если материал неоднороден, имеются дополнительные механизмы, приводящие к тепловым потерям. Так, в поликристаллическом материале соседние зерна могут иметь различные кристаллографические направления по отношению к направлению деформации и вследствие этого получать при деформировании образца напряжения различной величины. Поэтому температура будет изменяться от кристаллита к кристаллиту, вследствие чего будут возникать мельчайшие тепловые потоки через границы зерен. Как и в случае потерь, связанных теплопроводностью при колебаниях консоли, существует нижний предел частот, когда деформации протекают настолько медленно, что изменения объема совершаются изотермически без каких-либо потерь энергии, а также существует верхний предел частот, когда деформации протекают адиабатически, так что снова никаких потерь не происходит. Наибольшие потери имеют место, когда приложенная частота попадает

между этими двумя пределами; значение этой частоты зависит от размера кристаллического зерна и от теплопроводности среды. Зенер вывел выражение для частоты, при которой потери такого рода максимальны. Это уравнение аналогично (5.61) и имеет вид

$$N_0 = \frac{3\pi K'}{\rho c_p a^2}, \quad (5.62)$$

где a — средний линейный размер зерна.

Рэндал, Роуз и Зенер [118] измерили внутреннее трение в латунных образцах с различными размерами зерна и нашли, что при использованных частотах максимальное демпфирование наблюдалось, когда размер зерна был очень близок к тому, который определяется уравнением (5.62). Величина внутреннего трения, вызываемого этими микроскопическими тепловыми потоками, зависит от типа кристаллической структуры, так же как и от размера зерна, и возрастает при возрастании упругой анизотропии отдельных кристаллитов. Зенер [162], стр. 89—90 предположил, что при очень высоких частотах тепловой поток почти полностью ограничивается непосредственной окрестностью границы зерна; это приводит к зависимости, согласно которой специфическое рассеяние пропорционально корню квадрату от частоты колебаний. Этот результат подтвержден экспериментально для латуни Рэндалом, Роузом и Зенером [118]. При очень низких частотах, с другой стороны, тепловой поток происходит во всем материале; отсюда получается соотношение, согласно которому внутреннее трение пропорционально первой степени частоты. Экспериментальные результаты Зенера и Рэндала [164] находятся в согласии с этим выводом.

Имеются два других типа тепловых потерь, о которых необходимо упомянуть. Первый связан с отводом тепла в окружающий воздух; скорость потерь по этой причине, однако, столь мала, что сказывается лишь при очень низких частотах колебаний. Другой вид потерь может возникнуть вследствие отсутствия теплового равновесия между нормальными формами колебаний Дебая; эти потери аналогичны демпфированию ультразвука в газах, вызванному конечностью времени, которое необходимо, чтобы тепловая энергия перераспределилась между различными степенями свободы газовых молекул. Однако в твердых телах равновесие между различными формами колебаний устанавливается настолько быстро, что внутреннее трение, вызванное подобной причиной, можно было бы ожидать заметным только при частотах порядка 1000 мггц. Теория описанного выше явления была рассмотрена Ландау и Румером [80] и позже Гуревичем [47].

Для поликристаллических металлов Ки [69] исследовал внутреннее трение, вызванное „вязким скольжением“ на границах кристаллов. Он провел эксперименты по затуханию крутильных колебаний в чистом алюминии и показал, что внутреннее трение в этом случае

можно точно вычислить в предположении, что металл на границах кристаллов ведет себя вязким образом.

Имеется еще два других процесса, происходящих в кристаллических телах при их деформациях, которые могли бы привести к внутреннему трению. Первый из них представляет собой движение в кристаллах областей беспорядка, которые называются *дислокациями*. Второй процесс состоит в упорядочении растворенных атомов при приложении напряжения; последнее имеет место в тех случаях, когда существуют примеси, растворенные в кристаллической решетке. Роль дислокаций в пластической деформации кристаллов впервые рассматривали Оровен [104], Паланей [113] и Тейлор [138], и, хотя представляется вероятным, что движение этих дислокаций может часто являться существенной причиной внутреннего трения особенно при больших деформациях, точный механизм, по которому упругая энергия рассеивается, в настоящее время не выяснен (см. Бредфилд [15]). Влияние на внутреннее трение растворенных в кристаллической решетке примесей впервые рассмотрел Горский [43] и позднее Сноэк [131]. Основанием к тому, что наличие таких растворенных атомов приводит к внутреннему трению, служит то, что равновесное распределение их в напряженном кристалле отличается от равновесного распределения, когда кристалл ненапряжен. При приложении напряжения установление нового равновесия требует времени, так что деформация отстает от напряжения. Это вносит процесс релаксации, играющий важную роль для осциллирующих напряжений, период которых сравним с временем релаксации. Скорость, с которой равновесие устанавливается, зависит очень заметно от температуры, так что этот тип внутреннего трения должен быть очень чувствительным к температуре.

Частный случай внутреннего трения был обнаружен в ферромагнитных материалах. Беккер и Дёринг [9] дали исчерпывающий обзор экспериментальных и теоретических исследований для материалов этого типа по важной для приложений задаче о магнито-стрикционном эффекте в возбуждении ультразвука. Найдено, что внутреннее трение в ферромагнитных материалах значительно больше, чем в других металлах, причем оно возрастает при их намагничивании; оно также быстро возрастает с ростом температуры при достижении точки Кюри.

Механизмом, который ослабляет волны напряжений в твердых телах, но который, строго говоря, не является внутренним трением, является рассеяние. Это явление возникает в поликристаллических металлах, когда длина волны становится сравнимой с размером зерна; Мезон и Мак-Скимин [92] провели измерения эффекта рассеяния в алюминиевых стержнях и показали, что, когда длина волны сравнима с размером зерна, затухание (α) обратно пропорционально четвертой степени длины волны. Эта зависимость совпадает с той, которая дана Релеем [120] (том II, стр. 194) для рассеяния звука в газах.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УПРУГИХ СВОЙСТВ

В предыдущей главе были рассмотрены различные методы определения внутреннего трения, причем для этого необходимо было описать различные типы экспериментов по измерению его величины. В этой главе детально описаны некоторые методы, которые были использованы для исследования динамического упругого поведения твердых тел, и дан обзор полученных экспериментальных результатов.

Использованные методы можно разделить на несколько различных классов:

- 1) метод свободных колебаний;
- 2) резонансный метод;
- 3) методы распространения волн;
- 4) прямое определение кривых напряжения — деформация.

Применение того или иного метода зависит от периода и амплитуды деформации, которая подлежит исследованию, и от формы образца, которая наиболее пригодна. Некоторые исследователи пользовались различными или всеми из указанных методов в одном исследовании, но здесь для удобства они рассматриваются раздельно.

§ 1. Свободные колебания

Если механические свойства исследуемого материала линейны, т. е. если его упругие свойства не зависят от амплитуды, то при заданной частоте колебаний период и логарифмический декремент свободных колебаний будут определять механическое поведение этого материала. Техника эксперимента для такого типа измерений проста, и этим методом было проведено большое число исследований внутреннего трения. Так как для того, чтобы облегчить наблюдения, желательна большая амплитуда, этот метод применялся главным образом с использованием крутильных и изгибных колебаний. При очень медленных колебаниях как период, так и логарифмический декремент можно измерить непосредственно, при высоких же частотах можно использовать фотографический или электрический метод записи. Чтобы охватить всю необходимую область частот, могут быть использованы образцы различных размеров. В общем случае более удобно, однако, использовать дополнительные инерционные элементы, что позволяет изменять период колебаний при одном и том же образце.

Наиболее ранние измерения этим методом были проведены Вебером [154], который использовал образец как подвешенный элемент в баллистическом гальванометре. В последние годы методом свободных колебаний пользовались Фэппль [34], Нортон [102], Джемант и Джексон [40], Ки [69], Гайлет [46], Кемел [68], Верт [156] и Лизерзич [86]. Фэппль, Нортон, Гайлет и Ки применили метод крутильных колебаний металлических образцов, Кемел измерял затухание поперечных колебаний образцов из металлов и стекла, а Верт изучал продольные колебания образцов из монокристалла цинка. Джемант и Джексон использовали метод как крутильных, так и изгибных колебаний для металлов, стекла и диэлектриков, а Лизерзич методом крутильных колебаний исследовал различные пластики.

Как показано в предыдущей главе, потери в металлах имеют в основном тепловой характер, причем теория Зенера объясняет большинство наблюдаемых результатов. Внутреннее трение в пластиках и диэлектриках, вообще говоря, значительно выше, так что значение модуля упругости изменяется с частотой очень быстро. Эти явления будут обсуждены позже, в главе, где описаны другие методы измерения динамических упругих свойств, но здесь было бы полезным иметь оценку относительных значений величины внутреннего трения в различных материалах. В табл. 1 приведены значения, полученные Джемантом и Джексонем при частотах между 0,3 и 10 гц. Самое низкое значение внутреннего трения отмечено в пьезоэлектрических кварцевых резонаторах. Ван Дейк [147] даёт значение $1,5 \cdot 10^{-6}$ для логарифмического декремента кварцевого кольца, резонирующего при частоте 100 кгц; видно, что наивысшее значение в табл. 1 более чем в 50 000 раз больше этого.

Таблица 1

ЛОГАРИФИЧЕСКИЙ ДЕКРЕМЕНТ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ
ПО ДАННЫМ ДЖЕМАНТА И ДЖЕКСОНА

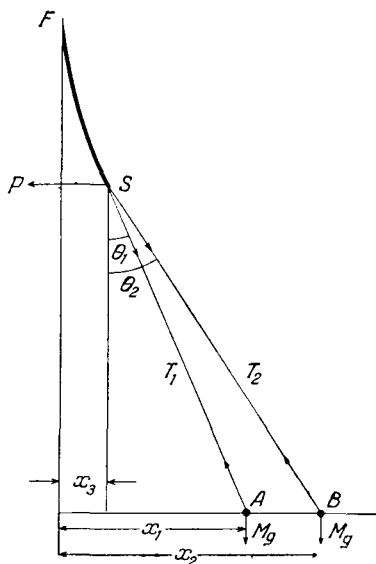
Материал	Крутильные колебания	Изгибные колебания
Сталь	—	$1,7 \cdot 10^{-3}$
Медь	—	$3,2 \cdot 10^{-3}$
Литой кварц	$2,6 \cdot 10^{-3}$	—
Стекло (свинцовое)	$4,2 \cdot 10^{-3}$	—
Стекло (мягкое)	$14,0 \cdot 10^{-3}$	$9,5 \cdot 10^{-3}$
Древесина	—	$27,0 \cdot 10^{-3}$
Эбонит	$29,0 \cdot 10^{-3}$	$85,0 \cdot 10^{-3}$
Полистирен	$48,0 \cdot 10^{-3}$	—

Очень изящное видоизменение метода свободных колебаний предложено Ле Ролландом [82], который использовал исследуемый образец,

чтобы спарить два маятника с одним и тем же периодом. Когда один маятник приведен в движение, его колебания оказываются медленно затухающими, тогда как другой колеблется с возрастающей амплитудой. При совершенно упругом образце первый маятник, в конце концов, прекращает колебания и процесс идет в обратном направлении, так что каждый маятник по очереди приобретает всю кинетическую энергию. Можно показать, что время между двумя остановками каждого маятника приблизительно пропорционально силе, которая требуется, чтобы сместить конец образца, соединяющего маятники, на единицу расстояния; этим и измеряется модуль упругости материала под действием осциллирующей силы. При использовании спаренных маятников период колебаний можно изменять от доли секунды до нескольких секунд, что позволяет определять изменение динамического модуля с частотой.

Как показал Ле Ролланд, это приспособление можно с успехом использовать также для изучения внутреннего трения в образце. Когда два маятника совершают колебания в противоположных фазах, на образец не действует поперечная сила и колебания затухают только вследствие сопротивления воздуха и трения в опорах. Когда оба маятника колеблются в одной фазе, тормозящее действие воздуха и трение в опорах продолжает оставаться, но, кроме того, образец совершает замкнутый цикл напряжений в течение каждого колебания. Энергия, потерянная внутри образца, увеличивает демпфирование, и разница между скоростями затухания колебаний для двух случаев дает меру внутреннего трения этого образца.

Тип упругой деформации, испытываемой образцом, зависит от способа крепления к нему маятников. Простейший тип устройства имеет образец в форме стержня, один конец которого жестко зашпелен, а другой поддерживает опору, на которой колеблются маятники в параллельных плоскостях (см. фиг. 30). При таком приспособлении образец изгибается под действием маятников; объектом исследования в этом случае является модуль Юнга. При другом способе опирания можно возбуждать крутильные колебания образца и измерять модуль сдвига.



Фиг. 30. Маятники Ле Ролланда.

Рассматривая уравнения движения устройства, изображенного на фиг. 30, массой образца FS и опоры двух маятников SA и SB можно пренебречь по сравнению с массой гирь маятников (каждая из которых подвешена на нити длиной l и равна M). Пусть в некоторый момент времени t горизонтальное перемещение опоры равно x_3 , а горизонтальные перемещения точек A и B равны x_1 и x_2 соответственно. Пусть T_1 и T_2 — натяжения нитей, поддерживающих гири. Тогда уравнение движения маятника SA имеет вид

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + T_1 \sin \theta_1 = 0, \quad (6.1)$$

где θ_1 — угол, образованный направлением AS с вертикалью, проведенной через точку S . Если этот угол мал, то $\sin \theta_1 = (x_1 - x_3)/l$ и $T_1 = Mg$, так что вместо уравнения (6.1) получаем

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + Mg \frac{x_1 - x_3}{l} = 0$$

или

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{g}{l} (x_1 - x_3) = 0, \quad (6.2)$$

Аналогично для второго маятника имеем

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{g}{l} (x_2 - x_3) = 0. \quad (6.3)$$

Вычисляя теперь силы, действующие на точку S в горизонтальном направлении, найдем

$$T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 = P, \quad (6.4)$$

где P — горизонтальная восстанавливающая сила, вызываемая образцом; для упругого образца она будет пропорциональна перемещению x_3 из положения равновесия, так что вместо P можно записать $A'x_3$, где A' — величина, зависящая от модуля Юнга и от размеров образца. Значит, если θ_1 и θ_2 малы, уравнение (6.4) дает

$$Mg \frac{x_1 - x_3}{l} + Mg \frac{x_2 - x_3}{l} = A'x_3$$

или

$$x_3 = \frac{Mg}{A'l + 2Mg} (x_1 + x_2) = B' (x_1 + x_2), \quad (6.5)$$

где $B' = Mg/(A'l + 2Mg)$.

Если теперь вычесть соответствующие части уравнений (6.2) из (6.3), получим уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) + \frac{g}{l} (x_1 - x_2) = 0,$$

общее решение которого есть

$$x_1 - x_2 = C_1 \sin (p_1 t + \alpha_1), \quad (6.6)$$

где $p_1^2 = g/l$, а C_1 и α_1 зависят от начальных условий. Таким образом, расстояние между двумя маятниками $x_1 - x_2$ изменяется со временем по синусоидальному закону, причем период равен естественному периоду одного маятника.

Если сложить (6.2) и (6.3) и подставить x_3 из (6.5), то получим уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \frac{g}{l}(1 - 2B')(x_1 + x_2) = 0,$$

общее решение которого есть

$$x_1 + x_2 = C_2 \sin(p_2 t + \alpha_2), \quad (6.7)$$

где $p_2^2 = (g/l)(1 - 2B')$, C_2 и α_2 — константы, зависящие от начальных условий. Из (6.6) и (6.7) окончательно имеем

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 &= C_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(p_2 t + \alpha_2) \\ 2x_2 &= C_2 \sin(p_2 t + \alpha_2) - C_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Если маятник A в нулевой момент времени смещен и освобожден, то при $t = 0$, $x_2 = \dot{x}_2 = \dot{x}_1 = 0$, откуда $C_1 = C_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$, так что

$$x_1 = C_1 \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t \cos \frac{p_1 - p_2}{2} t,$$

$$x_2 = C_2 \sin \frac{p_1 + p_2}{2} t \sin \frac{p_1 - p_2}{2} t.$$

Эти выражения описывают колебания с частотой $(p_1 + p_2)/4\pi$, амплитуды которых изменяются с частотой $(p_1 - p_2)/4\pi$; последнее выражение дает частоту *биения*. Если $p_1 - p_2$ мало по сравнению с p_1 , то $p_1 - p_2 \approx (p_1^2 - p_2^2)/2p_1$ и из выражений p_1 и p_2 , определяемых уравнениями (6.6) и (6.7), получаем

$$p_1 - p_2 \approx B' \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (6.9)$$

Величина A' , вообще говоря, велика по сравнению с величиной $2Mg/l$, так что на основании (6.5) заключаем, что частота биения приблизительно обратно пропорциональна A' , которая, по определению, есть сила, необходимая, чтобы сместить конец образца на единицу расстояния. Из уравнений (6.8) можно видеть, что перемещение каждого маятника представляет сумму двух отдельных синусоидальных колебаний с различными частотами, амплитуды которых зависят от начальных условий. Два члена в правой части каждого уравнения соответствуют двум различным *формам* системы: первый член соответствует *асимметричной форме*, а второй член — *симметричной форме*.

Приведенная выше простая теория содержит предположение, что образец подчиняется закону Гука и что перемещение его конца пропорционально приложенной силе. Если образец ведет себя вязкоупругим образом, то в уравнении (6.5) будет еще один дополнительный член, содержащий выражение dx_v/dt , и, хотя уравнение (6.6) сохраняет силу, уравнение (6.7) будет теперь содержать экспоненциальный множитель демпфирования. Значит, симметричная форма будет медленно затухать, тогда как асимметричная форма будет незатухающей (если исключить сопротивление воздуха). Если при этих условиях один маятник приведен в движение, то колебания не прекращаются полностью, а будут проходить через минимум. Отношение минимальной амплитуды к максимальной дает меру вязких потерь в образце; это было использовано Коваком [76] для измерения внутреннего трения пластиков.

Основным преимуществом метода свободных колебаний является его простота; в частности, он пригоден для работы при низких частотах с образцами, имеющими слабое внутреннее трение. Однако, опираясь на фотографические методы записи, были использованы и высокие частоты; Лизерзич [86], пользуясь этим методом, работал при частотах до 1000 *гц*. Основная погрешность метода в измерениях внутреннего трения происходит за счет внешних потерь, вызываемых сопротивлением воздуха, трением в опорах и т. п. В случаях, когда внутреннее трение мало, это часто приводит к большим ошибкам. Что касается сопротивления воздуха, то оно иногда исключалось работой в вакууме, как в опытах Кемела, или проведением отдельных серий измерений, позволяющих принять его во внимание, как в методе Ле Ролланда.

§ 2. Резонансный метод

Резонансный метод измерения упругих свойств материалов основан на том, что если осциллирующая сила, амплитуда которой фиксирована, а частота может изменяться, приложена к механической системе, то амплитуда возникших колебаний проходит через максимум при частоте, называемой резонансной частотой системы. Значение этой резонансной частоты зависит от упругих свойств системы, а ширина резонансного пика дает меру имеющихся диссипативных сил. В предыдущей главе было показано, что, когда диссипативные силы велики, они изменяют значение резонансной частоты, но этот эффект может быть рассчитан, если значение демпфирования известно.

Если предприняты соответствующие предосторожности, чтобы исключить внешнее демпфирование, вызываемое сопротивлением воздуха, потерями в опорах и т. п., то этим методом можно определить как внутреннее трение, так и упругие постоянные образца. Измерения могут быть выполнены с помощью продольных, изгибных и крутильных колебаний при частотах от нескольких *гц* до нескольких

мгц. Метод может быть успешно применен в том случае, когда демпфирование настолько велико, что свободные колебания затухают слишком быстро, чтобы можно было произвести точные измерения; однако, метод не очень удобен для образцов с очень малым внутренним трением, так как резонансный пик становится при этом слишком острым для точной работы. Когда для управления образцом используется калиброванный электронный осциллятор, нет необходимости делать абсолютные измерения механических колебаний, так как требуются лишь относительные значения амплитуды при частотах в окрестности резонанса. Основное неудобство резонансного метода состоит в том, что соединение управляющей системы с образцом может привести к изменению резонансной частоты и формы резонансного пика. Иногда бывает необходимо провести ряд измерений с меняющейся степенью связи, чтобы учесть этот эффект.

Квимби [115] один из первых использовал резонансный метод для измерения внутреннего трения в твердых телах. Для возбуждения продольных колебаний в образцах, имеющих формы стержней, он использовал кристалл пьезоэлектрического кварца. Кристалл был прикреплен цементирующим веществом к одному концу образца, а вблизи другого конца был подвешен диск Релея, с помощью которого измерялась амплитуда колебаний. Квимби проводил опыты с образцами из меди, алюминия и стекла при частотах около 40 *кГц*. В более поздних работах Квимби [116], Захариас [160] и Кук [21] применили этот метод для исследования потерь в ферромагнитных материалах.

Вегель и Уолтер [155] использовали как продольные, так и крутильные колебания металлических цилиндрических стержней при частотах между 100 и 10 000 *Гц*. Колебания возбуждались электромагнитным способом токами Фуко, индуцированными в одном конце образца; при этом амплитуда измерялась током, индуцированным в катушке, которая совершала колебания в постоянном магнитном поле на другом конце образца. Рендал, Роуз и Зенер [118] аналогичным методом исследовали зависимость между внутренним трением и размером зерна; результаты их исследования были приведены в предыдущей главе.

Бенкрофт и Джекобс [7] пользовались электростатическим методом возбуждения продольных колебаний в металлических стержнях, причем амплитуда измерялась с помощью конденсаторного микрофона. Аналогичный метод был использован Парфитом [107] для высоких полимеров при частотах между 5 и 60 *кГц*. Бордони [13] также описал электростатический генератор с конденсаторным микрофоном для улавливания колебаний. Конденсаторный микрофон действует на осциллятор радиочастот, и Бордони утверждает, что путем детектирования частотных модуляций он может измерять перемещения, в которых среднее движение поверхности составляет лишь долю ангстрема.

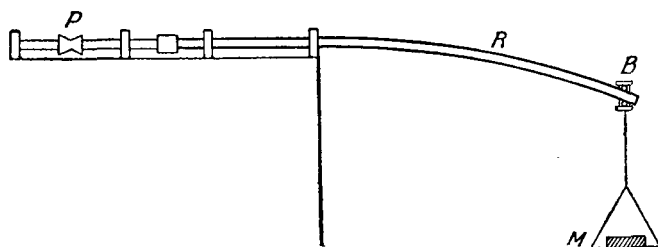
Одна из трудностей измерения внутреннего трения резонансным методом состоит в потере энергии в опорах, и потому в большинстве

вышеупомянутых исследований образец был подвешен на тонких проволоках или нитях. Даже при таком креплении некоторая часть энергии распространяется вдоль подвески, и Джемант [39] использовал проволочные опоры для возбуждения и детектирования изгибных колебаний. В его приспособлении образец был взят в форме пустотелого металлического цилиндра, подвешенного на двух тонких проволоках, каждая из которых была прикреплена к центру диафрагмы телефона (наушника). Один из наушников, который действовал как генератор, был соединен с осциллятором, а электрическая энергия от другого была использована для измерения амплитуды колебаний. Джемант измерил внутреннее трение в парафиновом воске, найдя вначале потери в пустой металлической трубке, а затем в трубке, наполненной воском.

Джемс и Девис [66] воспользовались методом изгибных колебаний для измерения упругих постоянных металлических стержней, а в другой работе [27] они рассмотрели теоретически влияния связи между образцом и генератором. В экспериментальном исследовании колебания в образце возбуждались с помощью электромагнита, который имел две обмотки. Через одну обмотку проходил постоянный ток, возбуждая статическое магнитное поле, а через другую обмотку проходил переменный ток. Связь зависит от значения статического магнитного поля, так что, получая резонансные кривые при различных значениях постоянного тока, можно путем экстраполяции получить резонансную частоту при нулевой связи. В недавней работе Хилье [52] воспользовался этим методом для измерения динамического значения модуля Юнга в нескольких высоких полимерах, причем амплитуда колебаний наблюдалась непосредственно с помощью микроскопа с градуированным окуляром.

Ноли [100] исследовал упругие свойства резиноподобных материалов, причем он использовал пять различных экспериментальных методов, чтобы охватить всю область частот между 0,1 гц и 120 кгц. При самых низких частотах (от 0,1 до 25 гц) применялся метод свободных колебаний, причем резиновый образец действовал как упругая восстанавливающая сила на балку, качающуюся на ножевой призме. При высоких частотах использовались три различных резонансных метода и метод распространения волн. Метод распространения волн будет рассмотрен в следующем параграфе, а здесь мы бегло упомянем о резонансных методах, которые описал Ноли. При частотах между 10 и 500 гц Ноли пользовался методом резонансных колебаний язычка, при котором образец был защемлен в записывающую головку граммофона и изгибные колебания сообщались ему через зажим. Этот метод удобен, но частоты, которые он может перекрыть, ограничены как механическими возможностями записывающей головки, так и упругими свойствами образца, поскольку резонансная частота может быть изменена только путем изменения его размеров или формы.

При частотах порядка 500 гц Ноли пользовался резонансным методом при продольных колебаниях, причем полоска из резины была зажата между двумя грамофонными головками, одна из которых действовала как генератор, а вторая служила приемником. Здесь снова резонансные частоты зависят от длины образца, хотя на одном образце можно исследовать ряд гармоник. Ограниченность этого метода состоит в том, что он требует от опор образца большей жесткости, чем сам образец. Это требование соблюдается в случае резины, но не удовлетворяется в случае образцов из твердых материалов.



Фиг. 31. Схема метода вращающегося стержня для измерения внутреннего трения (Кимбал).

При самых высоких частотах (12—120 кгц) Ноли использовал метод магнестрикционного резонанса. Резиновый образец удерживался никелевым стержнем, который приводился в движение с помощью магнестрикции. Наличие образца изменяло резонансную частоту стержня и расширяло резонансный пик. Изменение резонансной частоты дает меру упругости образца, а увеличение ширины резонансного пика зависит от внутреннего трения. Ноли не претендует на очень высокую точность этого метода, который дает разброс результатов порядка 10—20%, но этот метод обладает тем преимуществом, что позволяет использовать очень маленькие образцы.

Прежде чем закончить обзор методов измерения динамических упругих свойств с помощью вынужденных колебаний, следует упомянуть о приспособлении с вращающимся стержнем, изобретенном Кимбалом [71]. Этот метод принципиально отличается от описанных выше резонансных методов и может быть использован для измерения внутреннего трения при частотах от одного цикла в секунду до нескольких килоциклов в секунду. Приспособление показано схематически на фиг. 31. Образец в форме цилиндрического стержня R вращается валом P . Вблизи конца стержня установлен подшипник B , к которому подвешена масса M , отклоняющая стержень в вертикальной плоскости. При вращении стержень проходит через ряд циклов напряжений от изгиба, причем внутреннее трение в стержне приводит к отставанию деформации от напряжения, что вызывает отклонение конца стержня в горизонтальном направлении; величина горизонталь-

ного отклонения служит мерой отставания по фазе и, следовательно, мерой внутреннего трения.

Кимбал пользовался этим методом для измерения логарифмического декремента нескольких металлов, стекла, древесины, целлюлоида и резины. Он нашел, что для этих материалов в использованной им области частот логарифмический декремент не зависит от частоты или, иначе говоря, энергия, потерянная за один цикл напряжения, не зависит от скорости нагружения. Как упоминалось ранее, Джемант и Джексон [40] получили аналогичные результаты методом свободных колебаний и высказали мысль, что механизм демпфирования скорее фрикционной, чем вязкой природы. Как показано в предыдущей главе, другое объяснение этого явления состоит в том, что в области частот, в которой велись исследования, распределение времен релаксации полого.

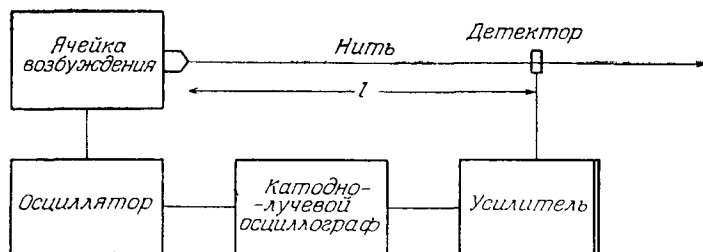
§ 3. Методы распространения волн

Как было показано в первой части монографии, есть много различных типов упругих волн, которые могут распространяться в твердой среде. В неограниченном твердом теле имеется только два типа волн, называемых волнами расширения и волнами искажения. Вдоль твердого стержня могут распространяться три типа волн — растяжения, кручения и изгиба, а в пластинках — волны растяжения и изгиба. Кроме того, вдоль поверхности твердого тела могут распространяться волны Релея, если только их длина не велика по сравнению с поперечными размерами образца.

Скорости распространения всех этих упругих волн зависят наряду с другими факторами от упругих постоянных и плотности тела, так что динамические значения упругих постоянных можно определить по скорости распространения. Если тело не вполне упруго, часть энергии волны напряжения рассеивается в процессе распространения в среде и, как показано в главе V, величину этого затухания можно поставить в соответствие с внутренним трением, определенным иным путем. Несколько измерений скорости распространения и затухания синусоидальных волн было проведено при низких частотах на образцах в форме полос и нитей, причем определяющей упругой постоянной здесь является модуль Юнга. При высоких частотах импульсы расширения и искажения возбуждались в массивных блоках материала. Преимущества, которыми обладают методы распространения волн по сравнению с другими методами, описанными ранее, состоят, во-первых, в том, что необходимая область частот может быть перекрыта на одном образце, во-вторых, в том, что при измерении внутреннего трения этим методом легче уменьшить внешние потери на опорах, и, наконец, в том, что в нерассеивающей среде метод позволяет достигнуть чрезвычайно высокой степени точности. Бредфилд [14] установил, что упругие постоянные металлов можно измерить с помощью ультразвуковых импульсов с точностью до $1/400000$.

Неудобства методов распространения волн состоят в том, что необходимая аппаратура, вообще говоря, значительно сложнее, чем в исследованиях методом резонанса или свободных колебаний; далее, не всегда легко обеспечить, чтобы был возбужден определенный тип волны, и, наконец, в рассеивающей среде интерпретация результатов, полученных с помощью импульсов, часто оказывается затруднительной. Этот последний пункт будет более полно обсужден позже в этом параграфе.

Исследование с помощью распространения низкочастотных продольных волн в нитях было в основном связано с динамическим поведением резиноподобных материалов и высоких полимеров; этим методом пользовались Беллоу и Сильверман [4], Ноли [100], Беллоу и Смит [5], Витте, Мровка и Гатс [159], Хилье и Кольский [53] и Хилье [52]. На фиг. 32 показана типичная компоновочная схема приспособления, использованного в исследованиях. Осциллятор переменной



Фиг. 32.

частоты соединен с ячейкой возбуждения. В зависимости от частоты и потребной мощности это может быть пьезоэлектрический кристалл, магнитострикционный стержень или громкоговоритель. Конец нити прикрепляется к колеблющейся части ячейки возбуждения таким образом, что в нити возбуждаются продольные волны. Детектором является пьезоэлектрический кристалл, который связан с нитью маленьким зондом и может перемещаться вдоль образца. Усиленные электрические сигналы от детектора и от ячейки возбуждения подаются в катодно-лучевой осциллограф, где фазы и амплитуды двух синусоидальных колебаний сравниваются. Из ряда измерений разности фаз в зависимости от расстояния l между детектором и ячейкой возбуждения можно определить скорость волны в нити. Затухание может быть определено из изменений амплитуды с изменением расстояния между генератором и детектором.

Если детектор совсем не отражает падающую волну напряжения и если нить достаточно длинна, чтобы амплитуду отраженной от конца нити волны можно считать пренебрежимо малой, то соотношения для фазы и амплитуды будут просты, так как продольное напряжение σ

в нити на расстоянии x от ячейки возбуждения определяется формулой

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-\alpha x) \sin \left[p \left(t - \frac{x}{c} \right) \right],$$

где σ_0 — амплитуда напряжения на конце нити, связанном с ячейкой возбуждения, p равно произведению 2π на частоту, α — фактор затухания, связанный со специфическим рассеянием уравнением (5.22) гл. V, и c — скорость волны. Значит, если амплитуда напряжения на расстоянии x вдоль нити есть $\hat{\sigma}$, а разность фаз между возбуждателем и детектором равна θ радианов, то имеем

$$\hat{\sigma} = \sigma_0 \exp(-\alpha x), \quad (6.10)$$

$$\theta = \frac{px}{c}. \quad (6.11)$$

Хотя эффект отражения от конца нити можно исключить, взяв нить столь длинной, чтобы затухание в материале нити уменьшило амплитуду отраженной волны до пренебрежимо малой величины, или устройв на конце нити механическое приспособление, вообще говоря, ощутимо за исключением тех случаев, когда затухание в материале очень велико. Отражение от детектора влияет на измерения фазы и амплитуды, причем, если амплитуда отраженной волны составляет m -ую часть от амплитуды падающей волны, то вместо соотношений (6.10) и (6.11) получим

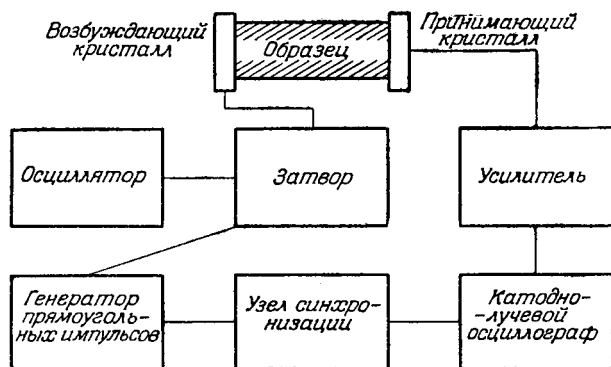
$$\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_0} = \frac{(1-m) \exp(-\alpha x)}{\left[1 - 2m \exp(-2\alpha x) \cos \frac{2px}{c} + m^2 \exp(-4\alpha x) \right]^{1/2}}, \quad (6.12)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \frac{px}{c}} = \frac{1 + m \exp(-2\alpha x)}{1 - m \exp(-2\alpha x)}. \quad (6.13)$$

Значит, за исключением случаев, когда αx очень велико, амплитуда и фаза изменяются с расстоянием несколько сложным образом, и, хотя скорость c может быть определена сравнительно легко из ряда измерений фаз, определение величины α требует более сложных вычислений.

В недавнее время для измерений упругих постоянных твердых тел была применена радиолокационная техника, развившаяся за годы второй мировой войны. Метод состоит в возбуждении короткого импульса высокочастотных колебаний и в измерении времени его распространения и затухания при прохождении через образец. Этот метод применили Ротс [124], Мезон и Мак-Скимин [92, 93], а также Айвей, Мровка и Гатс [65]. Общий вид использованной ими

аппаратуры схематически показан на фиг. 33. Импульсы, которыми они пользовались, имели продолжительность от 1 до 15 мксек., с частотой колебания порядка 100 мгц. Импульс пробегает туда и обратно вдоль образца и детектируется принимающим кристаллом; относительные амплитуды последовательно отраженных импульсов дают меру затухания, а интервалы между ними определяют скорость распространения. Мезон и Мак-Скимин [92, 93] и Ротс [124] исследовали таким образом металлические образцы, а Айвей, Мровка и Гатс [65] — резиновые. Во всех этих опытах ультразвуковые импульсы передавались от кристалла к образцу через промежуточную среду,



Фиг. 33. Экспериментальное приспособление для измерений с помощью ультразвуковых импульсов.

в качестве которой у Ротса и Айвея, Мровки и Готса служила водяная ванночка, а Мезон и Мак-Скимин использовали парафин при продольных колебаниях и слой очень вязкой жидкости при высокочастотных импульсах искажения¹⁾.

Преимущество импульсного метода состоит в том, что коль скоро аппаратура смонтирована, измерения скорости и затухания выполняются быстро и просто, причем можно использовать очень высокие частоты. Кроме того, при образцах из нерассеивающих материалов можно обеспечить очень высокую степень точности измерений. Однако, как указал Девис [26], часто бывает трудно интерпретировать экспериментальные результаты, полученные этим методом. Когда поперечные размеры образца велики по сравнению с его длиной и с длиной ультразвуковых волн, время распространения будет соответствовать

¹⁾ Мезон [91] показал, что вязкие жидкости обнаруживают свойство упругости при сдвиге; полизобутилен, например, имеет модуль сдвига $3 \cdot 10^7$ дн/см² при частотах порядка 100 кгц. Поэтому такие жидкости можно использовать для передачи импульсов искажения.

или скорости волны расширения, или скорости волны искажения в зависимости от типа импульса. Когда образцы берутся в форме стержней, импульсы отражаются от боковой поверхности, и на детектор поступает большое число различных импульсов, которые распространялись различными путями. Это происходит потому, что, как показано в гл. II, при наклонном падении волны расширения на свободную поверхность возникают как отраженная волна расширения, так и отраженная волна искажения. Хагс, Пондром и Мимс [62] провели опыты по распространению импульсов в металлических стержнях и показали, что такая серия импульсов действительно получается. Мезон и Мак-Скимин [93] также нашли, что отражения от боковой поверхности образца делают результаты запутанными при использовании продольных импульсов; они установили, что волны искажения распространяются при этих условиях без дисперсии, так как они падают на свободную поверхность под углами, большими критического угла, и поэтому отражаются без искажения формы, — образец действует как волновод. Распространение непрерывных волн в очень длинных стержнях было рассмотрено в главе III, причем было показано, что скорость распространения стремится к скорости поверхностных волн Релея, когда длина волны становится малой по сравнению с поперечными размерами стержня (см. фиг. 14 и 15).

Рассмотренное выше относится как к совершенно упругой, так и к рассеивающей среде. Однако если среда является рассеивающей, т. е. ее упругие свойства изменяются с частотой, интерпретация результатов становится еще более неопределенной, так как нет больше единой скорости распространения, и скоростью переноса энергии является групповая скорость c_g , которая отличается от фазовой скорости c_p на величину $\Delta(dc_p/d\Delta)$, где Δ — длина волны. Когда рассеяние среды велико, как у многих высоких полимеров, эта разница может быть очень существенной. При этих условиях необходимо также, чтобы импульс содержал большое количество синусоидальных волн, иначе его спектр Фурье будет содержать широкую область частот, которые будут распространяться с различными скоростями, и длина импульса будет возрастать по мере распространения вдоль образца. Изменение затухания с частотой будет еще более осложнять дело, так как, вообще говоря, высокочастотные компоненты будут демпфировать интенсивнее, чем низкочастотные, и будут распространяться быстрее, так что они окажутся в голове импульса.

Из сказанного выше можно видеть, что результаты, полученные по импульсному методу, надо истолковывать с некоторой осторожностью, особенно когда образец обладает рассеивающим свойством. Тем не менее, метод является надежным средством изучения динамических упругих свойств твердых тел при высоких частотах и с его помощью уже получено много полезных результатов.

В методах, описанных до сих пор, обнаружение волн напряжений основано на возбуждении слабого электрического тока, который затем

надо усилить и измерить. Однако, когда исследуемый материал прозрачен, имеется достаточно средств оптической техники, позволяющих определить механические свойства материалов без использования большого количества добавочного электронного оборудования. Один из таких методов основан на том, что при колебаниях прозрачного образца с высокой частотой повторяющиеся различия в плотности приводят к тому, что образец ведет себя подобно оптической диффракционной решетке, так что если через него проходит луч монохроматического света, то возникает серия диффракционных лучей. Наблюдая диффракционные картины, можно вычислить шаг решетки и, следовательно, длину волны напряжения, а затем, если частота колебаний известна, можно определить скорость распространения. Этот метод был впервые использован Дебаем и Сирсом [29], Лукасом и Биквардом [89], а в работах Шефера и Бергмана [125], Хидемана, Асбаха и Хоша [50] и Хидемана и Хоша [49] метод применяется для измерения упругих постоянных прозрачных твердых тел. Описание указанных работ и других оптических диффракционных методов наблюдения распространения ультразвуковых волн приведено в книге Бергмана [11].

Когда амплитуда волны напряжения достаточно велика, для наблюдения прохождения волн напряжения можно использовать фотоупругие свойства прозрачного твердого тела. Идея этого метода основана на том, что многие прозрачные твердые тела в напряженном состоянии перестают быть оптически изотропными и становятся двоякопреломляющими, т. е. значение коэффициента преломления в этих телах зависит от плоскости поляризации падающего света. Если образец в форме пластинки напряжен, то в каждой его точке обнаруживаются два взаимно перпендикулярных направления поляризации с наибольшим и наименьшим значениями коэффициентов преломления. Эти два направления параллельны пластинке и совпадают с направлениями, в которых нормальные компоненты напряжения в точке имеют соответственно максимальное и минимальное значения¹⁾. Далее, для большинства тел найдено, что вплоть до предела упругости разность между экстремальными значениями коэффициента преломления пропорциональна алгебраической разности значений главных напряжений, причем коэффициент пропорциональности — *оптикоупругая постоянная* — является физической константой материала. Этот результат известен под названием *закона Брюстера*.

Когда луч плоско-поляризованного света проходит через напряженный образец, то он разлагается на две составляющие с плоскостями поляризации, перпендикулярными друг другу и параллельными направлениям главных напряжений. Эти два луча проходят через образец с различными скоростями, так что возникает разность фаз

¹⁾ Это — направления *главных* напряжений, причем можно показать, что касательные напряжения вдоль этих направлений равны нулю.

между ними. В общем случае выходящий из образца свет оказывается эллиптически поляризованным, и если его рассматривать через анализатор (например, через призму Николя или слой поляроида), то наблюдаемая интенсивность будет зависеть от разности фаз, внесенной образцом, и, следовательно, от приложенного напряжения. При использовании монохроматического света образец будет казаться пересеченным большим числом светлых и темных полос; картина распределения их зависит от распределения напряжений в образце, а потому из таких картин можно определить разность главных напряжений во всех точках образца. Метод фотоупругости широко использовался для экспериментального определения статического распределения напряжений в различного типа инженерных конструкциях; описание теории и приложений этого метода к инженерным задачам можно найти в книгах Кокера и Файлона [20], Фрохта [36] и Джессопа и Гарриса [67].

Чтобы применить эффект фотоупругости к изучению распространения волн напряжения, необходимо производить высокоскоростную фотографию фотоупругих картин. Это было сделано с помощью высоковольтных искровых разрядов Шардином и Стратсом [127], Сениором [129], Шардином [126] и Кристье [19]. Серия таких фотографий, сделанных Кристье, показана на листе I (фронтиспис). На этих фотографиях изображено распространение импульса напряжений через пластинку из „Перспекса“¹⁾, импульс напряжения был произведен маленьким зарядом азиды свинца, подорванного в контакте с верхним краем пластинки. (В опыте использован свет с круговой поляризацией, так как плоско поляризованный свет дает *изоклины* — темные полосы, соответствующие областям, где главные напряжения параллельны осям поляроида; наличие их путает картину.)

Эта серия фотографий показывает два типа цилиндрических волн, распространяющихся с различными скоростями от места взрыва. При этом продольная волна распространяется быстрее, и если ее длина велика по сравнению с толщиной пластинки, то она распространяется со скоростью $[E/\rho(1-\nu^2)]^{1/2}$ [см. уравнение (3.91)]. Поперечная волна распространяется медленнее, со скоростью волн искажения в материале $[\mu/\rho]^{1/2}$. Поперечная волна является результатом искажения верхнего края пластинки, вызванного взрывом, причем движение частиц в ней происходит параллельно плоскости пластинки. Когда взрыв произведен в центре пластинки, поперечные волны не наблюдаются. На последних рисунках изображено отражение волн напряжения от боковых сторон и от нижней стороны пластинки и можно видеть, что наложение падающей и отраженных волн приводит к очень сложной картине напряжений. Интервалы времени между искрами, производящими отдельные фотографии, измерялись с помощью фотоэлемента и катодно-лучевого осциллографа и выдерживались с

1) Так называют пластицированный полиметил-метакрилат. — *Прим. перев.*

точностью до 0,1 мксек., так что в прозрачных материалах эта техника дает чрезвычайно точный метод измерения скорости распространения волн напряжения, а также служит средством изучения отражения волн напряжения на границе раздела. Однако в приложении к измерению динамических упругих постоянных метод страдает от недостатка, присущего всем импульсным методам, а именно от того, что в рассеивающих системах интерпретация результатов очень затруднительна, так как импульс по мере распространения в среде изменяет форму и нет единой скорости распространения. Далее, трудно произвести импульс достаточной амплитуды, если исключить взрывы или удары снарядом, причем эти импульсы в отличие от волновых пакетов, даваемых пьезоэлектрическим кристаллом, содержат широкий спектр компонент Фурье и будут поэтому диспергировать очень быстро.

§ 4. Построение динамической кривой напряжение — деформация

В трех методах измерения динамических упругих свойств твердых тел, которые были рассмотрены, — свободные колебания, вынужденные колебания и распространение волн — упругие постоянные и внутреннее трение не могли бы быть выведены из измерений, если бы не были сделаны некоторые предположения о природе диссипативных сил и о линейности системы. Эти предположения заключались в том, что диссипативная сила пропорциональна скорости изменения деформации и что тип механического поведения не зависит от амплитуды деформации в области напряжений, использованных в опытах. Предполагая, что имеет место принцип суперпозиции Больцмана, можно было бы построить функцию памяти из серии экспериментов, проведенных во всей области частот, и отсюда сделать теоретический вывод о механическом поведении твердого тела, подверженного негармоническому воздействию напряжений.

Тем не менее часто оказывается предпочтительным провести прямые измерения напряжений и деформаций образца в деформированном состоянии, так как тогда можно судить о механическом поведении при данном цикле напряжений, не делая каких-либо априорных предположений о поведении твердого тела. Этим методом определяется не только количество энергии, потерянное в течение цикла напряжений, но и форма петли гистерезиса. Однако при высоких скоростях нагружения экспериментальное определение кривой напряжение — деформация связано с очень существенными трудностями, а именно с инерционными эффектами в измерительной аппаратуре и с техникой записи распространяющихся напряжений и деформаций.

При возрастании скорости нагружения ускорение движущихся частей аппаратуры для измерения деформации начинает требовать усилий, сравнимых с усилиями, необходимыми для деформирования образца. Часто оказывается даже невозможным отличить эти инер-

ционные эффекты от эффектов, вызываемых механическим поведением исследуемого образца. Кроме того, когда скорости нагружения очень велики, инерция самого образца вызывает неоднородное распределение по его длине, что приводит к распространению волн вдоль образца с последовательными отражениями их от его концов. При таких высоких скоростях нагружения применение обычных механических приборов для измерения напряжений становится невозможным, так как их собственный период колебаний слишком велик, чтобы они могли давать надежные показания, когда сила изменяется быстро.

Трудности, связанные с такими измерениями, и некоторые методы, которые использовались для их преодоления, рассмотрены Тейлором [139]. В гл. VIII будут рассмотрены работы по динамическим испытаниям твердых тел, связанные с измерением предела текучести и предела прочности в случае растяжения при высоких скоростях нагружения. Здесь мы опишем методы построения кривых напряжения — деформации при высоких скоростях нагружения, которые были развиты Тейлором [139], Э. Вольтерра [149] и автором [73].

Тейлор и Э. Вольтерра пользовались фотографической записью напряжений и деформаций в образцах, имеющих форму коротких цилиндров. Образцы помещались на плоском конце цилиндрического стержня, который подвешивался как баллистический маятник. Второй стержень свободно подвешивался соосно с первым и раскачивался, так что при ударе образец сжимался между плоскими торцами стержней. Зависимость деформации от времени выводилась непосредственно из фотографической записи; зависимость напряжение — время находилась из движения стального стержня, которое происходит с ускорением, получаемым от напряжений, возникающих в образце. Таким образом, построение кривой напряжение — время связано с двукратным дифференцированием кривой перемещение — время, что выполнимо благодаря высокой точности измерений по фотографическим записям. Этим методом были исследованы образцы из резины и других высоких полимеров при продолжительности цикла напряжений от 5 до 17 мсек., причем были получены кривые напряжение — деформация. Для анализа результатов предполагалось, что материалы подчиняются принципу суперпозиции Больцмана, и зависимость между напряжением σ и деформаций ϵ принималась в форме

$$\sigma = \psi(\epsilon) + \int_0^t \varphi(t - T) \frac{d\epsilon}{dT} dT. \quad (6.14)$$

Можно видеть, что эта зависимость имеет форму, несколько отличную от выражения (5.38). Уравнение (6.14) выводится из рассмотрения малых изменений деформации, которые имели место в предшествующей истории образца, и из суммирования связанных с ними остаточных элементарных напряжений. Так, $\varphi(t - T)d\epsilon$ есть напряжение, остающееся в момент времени t от изменения деформации $d\epsilon$,

которое имело место в момент T . Гросс [45] сравнил различные формы принципа суперпозиции и показал, что все они эквивалентны и что спектр времен релаксации может быть выведен из любой формы функции памяти.

Тейлор и Вольтерра с помощью уравнения (6.14) истолковали результаты опытов с баллистическим маятником над политаном и воскообразным пластиком и показали, что их экспериментальные результаты могут быть хорошо представлены функцией памяти $\varphi(t-T)$ в форме $A \exp[(T-t)/\tau]$, где $A = 2 \cdot 10^9$ и $\tau = 1/600$ в системе CGS. Это эквивалентно предположению, что материал ведет себя так, как если бы он имел единственное время релаксации 1,7 мсек. Надо помнить, что продолжительности соударений в опытах Тейлора и Вольтерра были между 5 и 17 мсек., так что получившееся время релаксации составляет около одной десятой от наибольшего из времен соударений. Как будет показано ниже, эксперименты, проведенные с циклами напряжений продолжительностью порядка 20 мсек., дают значение $\tau = 2$ мсек., так что использование единственного времени релаксации для таких материалов представляется имеющим небольшое теоретическое значение и является только удобным методом описания суммарного механического поведения материала при напряжениях, прикладываемых в течение ограниченного промежутка времени. Это будет обсуждено позже в настоящей главе.

Вольтерра [149] описал также применение мерного стержня Девиса (см. гл. IV этой книги) для определения зависимости напряжение — деформация в цилиндрических образцах. Один торец образца помещается напротив ударяемого конца мерного стержня, а в контакте с противоположным торцом образца располагается наковальня в форме короткого стального цилиндра. Затем пуля диаметром 0,58 см ударяет по свободному торцу наковальни. Импульс напряжения, который возбуждается на конце мерного стержня давлением образца, распространяется вдоль стержня и записывается с помощью плоскопараллельного конденсаторного микрофона и катодно-лучевого осциллографа, как в аппаратуре Девиса (фиг. 23). Таким образом может быть определена кривая напряжение — время для образца. Чтобы получить кривую деформация — время, такой же пулей стреляют по концу мерного стержня Девиса без образца и наковальни, причем предполагается, что полученная таким образом кривая давление — время подобна той, которая получается в первом опыте, когда пуля ударяет по наковальне. Если масса наковальни равна M , а ее перемещение в момент t есть x , то по второму закону Ньютона имеем

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = P_1(t) - P_2(t), \quad (6.15)$$

где $P_1(t)$ — сила давления пули на наковальню, а $P_2(t)$ — сила взаимодействия между образцом и наковальней. Если теперь пере-

мещение конца мерного стержня, измеренное конденсаторным микрофоном, равно $\xi_1(t)$ при наличии образца и $\xi_2(t)$ без образца, то имеем

$$P_1(t) = \frac{1}{2} B\rho c \frac{d\xi_1}{dt} \quad \text{и} \quad P_2(t) = \frac{1}{2} B\rho c \frac{d\xi_2}{dt}, \quad (6.16)$$

где B — площадь поперечного сечения образца, ρ — плотность материала стержня и c — скорость распространения продольных волн в стержне [см. уравнение (4.1)]. Подставляя $P_1(t)$ и $P_2(t)$ из соотношений (6.16) в уравнение (6.15) и производя интегрирование, находим

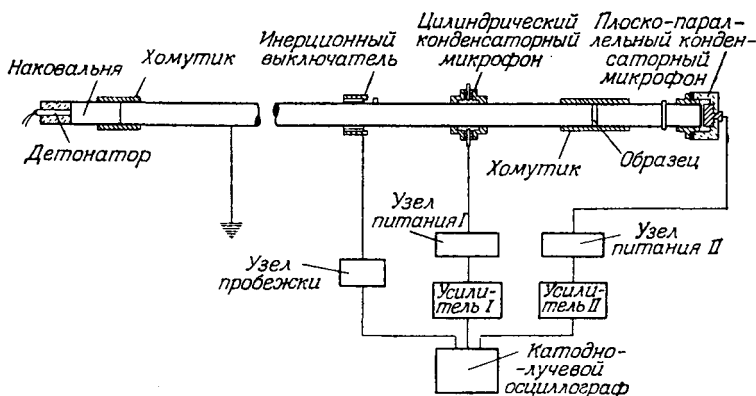
$$x = \frac{B\rho c}{2M} \int_0^t (\xi_1 - \xi_2) dt. \quad (6.17)$$

Отсюда можно получить кривую деформация — время, после чего для образца может быть построена кривая напряжение — деформация.

Основной недостаток этого метода состоит в том, что кривая напряжение — деформация может быть получена только для возрастающих напряжений, а также в том, что импульсы давления должны быть достаточно продолжительными, чтобы они не искажались по мере их распространения вдоль стального стержня. Этим методом Вольтерра [149] провел измерения с медными и политановыми образцами. При медных образцах напряжение достигало максимума в течение 130 мксек., а при политановых образцах — в течение 320 мксек.

На фиг. 34 показано видоизменение мерного стержня Девиса, использованное автором [73] для определения зависимости напряжение — деформация в образцах, имеющих форму дисков, когда они проходят цикл напряжений за время порядка 20 мксек. Импульс давления возбуждался здесь детонатором, который прикреплялся к сменной стальной наковальне на ударяемом конце стержня. Импульс распространяется по стержню и сжимает образец между основным стержнем и наставным стержнем, причем плотно подогнанный хомутик удерживает образец и наставной стержень в нужном положении. Плоские поверхности образцов смазываются тонким слоем масла, чтобы обеспечить свободное поперечное движение. Амплитуда импульса, перед тем как он достигает образца, измеряется с помощью цилиндрического конденсаторного микрофона, сигнал от которого усиливается и подается на агрегат отклоняющих в направлении Y пластинок двухлучевого катодного осциллографа. Сигнал от плоско-параллельного конденсаторного микрофона, помещенного на конце наставного стержня, также усиливается и подается на другой агрегат Y — пластинок осциллографа. Инерционный выключатель, подобный тому, который описан Девисом, служит для включения

узла пробегки, который дает периодическую пробежку в направлении X осциллографа и подсвечивает пятнышко осциллографа, так что можно получить фотографическую запись его следа. Осциллографическая запись, полученная от цилиндрического микрофона, дает зависимость давление — время для падающего импульса, распространяющегося вдоль стержня к образцу [см. уравнение (4.2)]; будем называть это напряжение $\sigma_1(t)$. Запись от плоско-параллельного конденсаторного микрофона дает перемещение свободного конца наставного стержня, которое будем называть $\xi_2(t)$. Из зависимостей $\sigma_1(t)$ и $\xi_2(t)$ можно вывести соотношение напряжение — деформация образца.



Фиг. 34. Использование стержня Девиса для определения динамической зависимости напряжение — деформация.

Зависимость напряжение — время $\sigma_2(t)$ можно получить из уравнения

$$\sigma_2(t) = \frac{1}{2} \rho c \frac{d\xi_2}{dt}. \quad (6.18)$$

Чтобы найти зависимость деформация — время, надо рассмотреть перемещения двух концов образца отдельно. Конец образца, находящийся в контакте с основным стержнем, перемещается как под действием падающего импульса, так и под действием отраженного импульса, движущегося обратно вдоль стержня. Перемещение, выз-

ванное падающим импульсом, равно $(1/\rho c) \int_0^t \sigma_1(t) dt$, а перемещение,

вызванное отраженным импульсом, равно $(1/\rho c) \int_0^t [\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] dt$.

Значит, общее перемещение этого конца равно

$$\frac{1}{\rho c} \int_0^t [2\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] dt.$$

Перемещение торца, находящегося в контакте с наставным стержнем, равно $(1/\rho c) \int_0^t \sigma_2(t) dt$, так что изменение длины образца равно

$(2/\rho c) \int_0^t [\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] dt$, что вследствие уравнения (6.8) равно

$$\frac{2}{\rho c} \int_0^t \sigma_1(t) dt - \xi_2(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t),$$

если вместо $(2/\rho c) \int_0^t \sigma_1(t) dt$ писать $\xi_1(t)$.

Можно видеть, что $\xi_1(t)$ представляет собой перемещение конца наставного стержня, когда между стержнями нет образца и начальный импульс переходит в наставной стержень без изменения формы¹⁾.

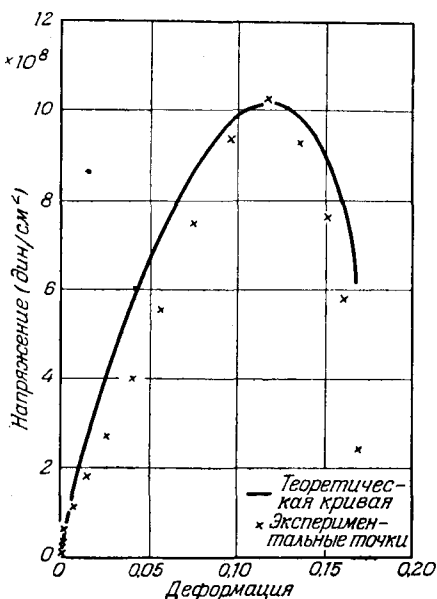
В этих экспериментах длина образца должна быть достаточно малой по сравнению с длиной импульса, чтобы разность давлений на обоих концах образца была пренебрежимо малой. При этих условиях поступательным ускорением образца можно пренебречь, но надо еще принять во внимание радиальное движение, так как с ним связана кинетическая энергия, каким бы тонким образец ни был. Эта поправка на радиальную энергию содержит вторую производную от деформации по времени. К счастью, в условиях проведенных опытов она никогда не превышала 5⁰/₀, и поэтому нет необходимости определять ее абсолютное значение со слишком большой точностью.

Этим методом были построены кривые напряжение — деформация для нескольких пластиков и резин, кроме того, несколько опытов было проведено с медными и свинцовыми образцами. Результаты для пластиков и резин истолковывались с помощью функции памяти в форме, определяемой уравнением (6.14). В случае политана найдено, что прекрасную согласованность с экспериментальными результатами можно получить в предположении, что функция $\varphi(t - T)$ имеет вид $A \cdot \exp[-(t - T)/\tau]$ при $A = 4,6 \cdot 10^{10} \text{ дн/см}^2$ и $\tau = 2 \text{ мсек}$. Сравнивая со значениями, полученными Вольтерра, можно видеть,

¹⁾ Как показал Девис [25], искажение, наблюдаемое с помощью цилиндрического конденсаторного микрофона при коротких импульсах, больше искажения, наблюдаемого при помощи плоско-параллельного устройства, и в описанных здесь опытах $\xi_1(t)$ измерялось непосредственно путем проведения отдельных экспериментов без образца между стержнями.

что значения A и τ здесь сильно отличаются от тех, которые были выведены из опытов Вольтерра, и это указывает на то, что предположение о единственном времени релаксации является чрезмерным упрощением задачи. Однако в очень короткой области времен весьма простая форма функции памяти является совершенно достаточной, как можно видеть из фиг. 35, на которой экспериментальные точки для политана сравниваются с теоретической кривой. Экспериментальные точки получены через интервалы в 2 мксек, так что полный цикл напряжений соответствует приблизительно 28 мксек.

Как упоминалось в гл. V, общая форма функции памяти соответствует спектру времен релаксации. Причина, вследствие которой единственное время релаксации дает хорошую согласованность только тогда, когда рассматривается ограниченное время и ограниченная область частот, состоит в следующем. Процессы, которые связаны с временами релаксации, очень длительными по сравнению с временем приложения напряжения, не должны оказывать влияния на механическое поведение, тогда как процессы с очень короткими временами релаксации выступают в роли „мгновенной“ механической реакции материала, а не в роли функции памяти ¹⁾.



Фиг. 35. Сравнение экспериментальных данных для политана с кривой, полученной из соотношения

$$\sigma = 10^9 \epsilon + 4,6 \cdot 10^{10} \int_0^t \exp [-(t-T)] \times \\ \times 5 \cdot 10^5 \frac{d\epsilon}{dT} dT.$$

§ 5. Обсуждение экспериментальных результатов

Большинство экспериментальных исследований динамических упругих свойств твердых тел было проведено с образцами из металлов или из высоких полимеров. Имеется, однако, большое количество

¹⁾ Установлено, что функция памяти $\varphi(t-T)$ монотонно убывает, и использование единственного времени релаксации математически эквивалентно отысканию экспоненциальной функции, которая приблизительно совпадает с функцией памяти в малой области значений $(t-T)$.

статей, в которых описаны исследования других материалов. Современные исследования включают также измерения в области звуковых частот для древесины (Кругер и Роолов [77], Бардуччи и Паскуалини [8] и Фукада [37]). При ультразвуковых частотах измерения для различных стекол были проделаны Алегретти [3], а Гюнтер и Зигель [63] изучали упругие постоянные и внутреннее трение каменной соли вблизи точки плавления. Упругие постоянные щелочно-галоидных кристаллов измерили Нурми [103], Хантингдон [64] и Гэлт [38]. Тиде [141] описал некоторые измерения над немецким материалом дегусситом (окись алюминия). Этот материал замечателен необычайно большой скоростью звука — 9600 м/сек.

Исследования металлов в последние годы связаны главным образом или с точным определением упругих постоянных, или с изучением различных механизмов внутреннего трения. Исследования последнего типа были обсуждены в конце гл. V, причем, как было показано, результаты наблюдений хорошо согласуются с теоретическими выводами Зенера относительно потерь энергии вследствие теплопроводности. Зенер [163] дал общий обзор потерь, вызванных внутренним трением, и рассмотрел типы наблюдаемых спектров времени релаксации.

Теоретическое истолкование исследований по высоким полимерам было менее удачным, так как при их деформировании, повидимому, приходит в действие большое число различных молекулярных механизмов. Релаксационный спектр таких материалов бывает обычно очень растянутым, и надо провести измерения для нескольких десятков частот, чтобы уловить общую тенденцию. Главный вывод, сделанный из опытных данных, состоит в том, что механические свойства таких материалов очень заметно зависят от температуры: Установлено, что влияние повышения температуры эквивалентно влиянию понижения частоты, и наоборот. Александров и Лазуркин [1] впервые провели полное исследование влияния температуры на динамические упругие свойства резины. Они вели исследования при частотах между 0,1 и 1000 циклов в минуту и при температурах от -180° до 200° С. Эти результаты, а также и результаты других работ по динамическим свойствам резины были обсуждены Трелоаром [146].

Ноли [101], экспериментальные исследования которого уже были описаны, перекрыл наибольшую область частот для резиноподобных материалов при различных температурах. Он получил результаты для модуля Юнга при частотах между 0,1 гц и 120 кгц для различных резин. В его экспериментах колебания были как продольными, так и изгибными, так что действующей упругой постоянной был модуль Юнга. По аналогии с электрическими измерениями, Ноли выразил свои результаты через комплексный модуль Юнга в форме $E_1 + iE_2$. Действительная часть модуля E_1 соответствует упругой восстанавливающей силе и для совершенно упругих материалов равна модулю Юнга, а мнимая часть E_2 является мерой механических

потерь в материале. Основанием для такой записи служит предположение, что при какой-нибудь одной частоте материал можно рассматривать как тело Фохта, для которого зависимость напряжение — деформация имеет вид [см. уравнение (5.29)]:

$$\sigma = E\varepsilon + E' \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

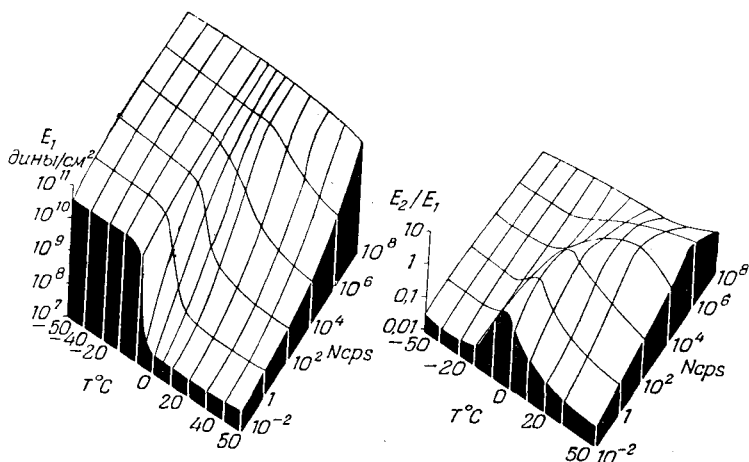
Здесь E — модуль Юнга и E' — „коэффициент нормальной вязкости“. Если теперь материал испытывает синусоидальные колебания частоты $\rho/2\pi$, то имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(ipt),$$

так что зависимость между напряжением и деформацией может быть записана в форме

$$\sigma = [E + ipE']\varepsilon.$$

Таким образом, выражение $E + ipE'$ стоит здесь вместо модуля Юнга E для совершенно упругого материала. В обозначении Ноли E_1 пишется вместо E и E_2 вместо $\rho E'$. Как показано в гл. V [уравнение (5.3)], логарифмический декремент приблизительно равен $\rho\pi E'/E$, так что в обозначении Ноли он дается выражением $\pi E_2/E_1$.

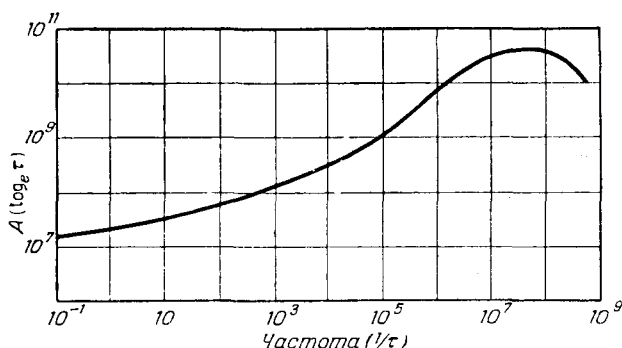


Фиг. 36. Рисунки, показывающие вероятное поведение динамического модуля E_1 и фактора рассеяния E_2/E_1 для резины Буна (по Ноли).

На фиг. 36 схематически представлены суммарные данные об изменениях E_1 и E_2/E_1 с температурой и частотой в образце из резины Буна. Эти кривые приведены по данным Ноли, который установил, что они являются только полуквантитативными. Экспериментальные

результаты относительно модуля Юнга получены для частот, не превышающих 10^6 гц; приближенные значения верхних пределов для E_1 и E_2/E_1 выведены из нескольких измерений скорости и затухания волн расширения с частотой 15 мгц.

Левый рисунок на фиг. 36 показывает, что E_1 возрастает с частотой и убывает с температурой. Точка замерзания материала, которая соответствует наибольшему возрастанию модуля, оказывается около -20°C при частотах ниже 1 гц; при использовании более высоких частот колебаний эта точка повышается. Значит, подверженный быстро изменяющимся напряжениям материал кажется „замораживающим“ при более высокой температуре, чем в случае, когда он



Фиг. 37. Вероятный вид спектра времен релаксации для резины Буна (по Ноли).

деформируется медленнее. Этот эффект был впервые отмечен Александровым и Лазуркиным [1]. Внутреннее трение E_2/E_1 при какой-нибудь определенной частоте, как видно из фигуры, имеет максимум относительно температуры, причем температура, при которой эти максимальные потери имеют место, повышается с частотой. Рисунок, данный Ноли, показывает также уменьшение E_2/E_1 при очень высоких частотах. Представляется малоочевидным из этих опытов, что такое уменьшение имеет место в действительности, и главным доводом Ноли для предположения, что это так, является то, что в других отношениях имеется близкая аналогия между внутренним трением в высоких полимерах и диэлектрическими потерями в полярных средах. Так как найдено, что диэлектрические потери проходят через максимум с изменением частоты при какой-нибудь фиксированной температуре, то можно ожидать, что внутреннее трение будет вести себя так же. Опыты по распространению высокочастотных импульсов расширения в различных резинах, которые были проведены Айвеем, Мровкой и Гатсом [65], ясно показали, однако, что внутреннее трение проходит через максимум с возрастанием частоты.

Сравнивая кривые для одной температуры на фиг. 36 с теоретическими кривыми для одного времени релаксации, показанными на фиг. 28, можно видеть, что в обоих случаях потери на демпфирование имеют максимум, тогда как изменение эффективного модуля упругости (представленного на фиг. 28 кривой скорости) изображается S-образной кривой. Однако экспериментальные кривые для резины гораздо более пологий, чем теоретические кривые для материала с единственным временем релаксации, так что первые можно рассматривать как результат наложения кривых из „спектра“ времен релаксации. Ноли [101] дал численную оценку приближенного спектра времен релаксации в членах максвелловских элементов; на фиг. 37 показана величина $A(\ln \tau)$, нанесенная в функции частоты. Теория спектра релаксационных времен рассматривалась в гл. V и зависимость между $A(\tau)$ и бoльцмановой функцией памяти дана уравнением (5.20). Из фигуры можно видеть, что спектр времен релаксации очень пологий, так что исходя из него трудно прийти к определенному заключению относительно молекулярных процессов, которые порождают механическую релаксацию. Однако спектр является удобным способом суммирования результатов опытов в очень широкой области частот, которая была перекрыта.

Глава VII

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

В первой части монографии было рассмотрено распространение волн напряжения в совершенно упругих средах. Влияние диссипативных сил, которые приводят к превращению упругой энергии в теплоту, было обсуждено в гл. V, а экспериментальные результаты по динамическим измерениям описаны в гл. VI. Однако все системы, которые были до сих пор рассмотрены, подчиняются линейным дифференциальным уравнениям, причем предполагалось, что амплитуда во всех случаях достаточно мала, чтобы восстанавливающая упругая сила была пропорциональной деформации. Общая задача о распространении напряжений в нелинейной среде является, очевидно, чрезвычайно сложной и решения ее были получены лишь в немногих особых случаях.

Вначале будет рассмотрена задача о распространении пластической деформации вдоль проволоки или стержня, которые являются упругими до определенного значения напряжений, называемого *пределом пропорциональности*. За пределом пропорциональности зависимость между напряжением и деформацией становится иной, причем при снятии напряжений наблюдаются явления гистерезиса. Таким образом, для напряжений, превышающих предел пропорциональности, деформация является однозначной функцией напряжения только при возрастании последнего; при убывании напряжения имеет место другая зависимость напряжение — деформация.

Эта задача была впервые рассмотрена во время второй мировой войны независимо Тейлором [139], Карманом и Дюве [152]¹⁾ и Рахматулиным [117].

При рассмотрении этой задачи Карман и Рахматулин пользовались лагранжевыми координатами, а Тейлор использовал координаты Эйлера. Оба подхода, как можно показать, дают одинаковые результаты, но, так как физический подход в этих двух случаях различен, здесь будут приведены обе трактовки.

Рассматриваемая система представляет собой бесконечно длинную проволоку или стержень, конец которого в момент $t = 0$ получает

¹⁾ Исследования Тейлора и Кармана были вначале изданы в секретных отчетах в 1940—1942 гг., так что здесь указаны последующие публикации этих авторов.

внезапно скорость V_1 , и эта скорость остается постоянной для $t > 0$. Задача состоит в определении состояния проволоки в момент t . Предполагается, что зависимость напряжение — деформация в проволоке линейна до критического значения напряжения, после превышения которого эта зависимость между напряжением σ и деформацией ϵ становится нелинейной, но однозначной для возрастающих напряжений, так что $\sigma = \sigma(\epsilon)$, где $\sigma(\epsilon)$ — известная функция деформации ϵ . Предполагается также, что скорость нагружения не влияет на зависимость напряжение — деформация и что поперечное сечение проволоки достаточно мало, чтобы можно было пренебречь влиянием радиальной кинетической энергии.

§ 1. Пластические волны в лагранжевых координатах

Остановим наше внимание на малом отрезке проволоки, который в момент $t=0$ был на расстоянии X от ее конца. Начальное положение возбуждаемого конца проволоки принимается за начало координат, а положительное направление оси берется вдоль проволоки. Если в момент t перемещение отрезка есть u , то по второму закону движения Ньютона имеем

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma'}{\partial X}, \quad (7.1)$$

где ρ_0 — плотность недеформированной проволоки и σ' — условное напряжение, т. е. сила, действующая на проволоку, поделенная на начальную площадь поперечного сечения.

Если теперь предположить, что зависимость между σ' и деформацией однозначна, когда напряжение возрастает, то на основании уравнения (7.1) можем записать

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d\sigma'}{d\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial X}. \quad (7.2)$$

Здесь ϵ — относительное удлинение элемента, т. е. $\epsilon = du/dX$, причем не делается предположения, что ϵ обязательно мало. Далее, $d\sigma'/d\epsilon$ есть модуль деформации, упругой или пластической, который мы будем обозначать через S ; $S(\epsilon)$ рассматривается как известная функция от ϵ . Уравнение (7.2) тогда дает

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}. \quad (7.3)$$

Граничные условия таковы: $u = V_1 t$ при $X=0$ для всех положительных значений t и $u=0$ при $X=\infty$. Задача состоит в решении уравнения (7.3) для материала, кривая напряжение — деформация которого и, следовательно, функция $S(\epsilon)$ считаются известными. Имеется два решения уравнения (7.3). Как можно убедиться непо-

средственной проверкой, функция

$$u = V_1 t + \varepsilon_1 X \quad (7.4)$$

удовлетворяет уравнению (7.3) и граничному условию при $X=0$, причем это решение соответствует постоянной деформации ε_1 .

Другое решение может быть найдено, если S/ρ_0 приравнять X^2/t^2 . Так как S является функцией ε , это решение означает, что ε является функцией переменной (X/t), которую мы обозначим через β . Предполагая теперь, что $\varepsilon = f(\beta)$, получим

$$u = \int_{\infty}^X \frac{\partial u}{\partial X} dX = \int_{\infty}^X f(\beta) dX = t \int_{\infty}^{\beta} f(\beta) d\beta \quad (7.5)$$

(так как $dX = t d\beta$). Дифференцируя (7.5) дважды по t , будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\beta^2}{t} f'(\beta), \quad (7.6)$$

где $f'(\beta)$ — производная от $f(\beta)$ по β ; аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{1}{t} f'(\beta). \quad (7.7)$$

Подставляя из (7.6) и (7.7) в уравнение (7.3), находим

$$f'(\beta) = 0 \quad (7.8)$$

или

$$\rho_0 \beta^2 = S. \quad (7.9)$$

Соотношение (7.8) соответствует решению, определяемому формулой (7.4), а соотношение (7.9) соответствует решению, в котором $(X/t) = (S/\rho_0)^{1/2}$.

Для полного решения в проволоке надо различать три области:

- а) от $X=0$ до $X=Ct$ деформация имеет постоянное значение ε_1 , причем C есть скорость распространения фронта пластической волны;
- б) между $X=Ct$ и $X=c_0 t$ имеет место соотношение $X^2/t^2 = S/\rho_0$ (c_0 есть скорость распространения упругой волны);
- в) для $X > c_0 t$, $\varepsilon = 0$.

При $X = c_0 t$ имеет место разрыв деформации. S равно модулю продольной упругости E , и в упругом случае имеем $c_0^2 = E/\rho$.

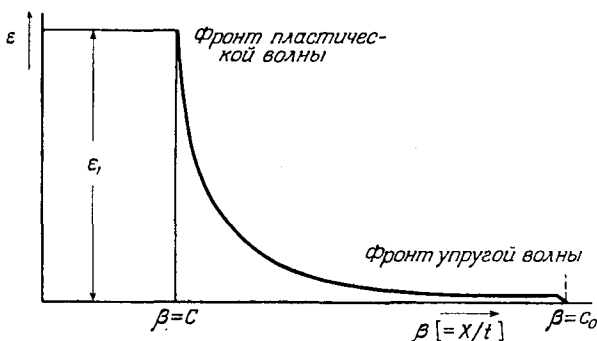
На фиг. 38 схематически показана зависимость между ε и β в трех областях, соответствующих

$$(a) 0 < \beta < C,$$

$$(б) C < \beta < c_0,$$

$$(в) \beta > c_0.$$

В области (б) между фронтом упругой волны и фронтом пластической волны деформация переменная, так как каждое приращение ее от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ распространяется со скоростью, зависящей от значения S при этом частном значении ε . Чтобы закончить решение, надо найти зависимость между скоростью распространения фронта пластической волны C и скоростью V_1 , с которой движется конец проволоки.



Фиг. 38. Схематический вид распределения деформаций.

Из уравнения (7.5) имеем для перемещения конца проволоки

$$u(0, t) = V_1 t = t \int_{\infty}^0 f(\beta) d\beta$$

или

$$V_1 = \int_{\infty}^0 f(\beta) d\beta. \quad (7.10)$$

Из фиг. 38 можно видеть, что интеграл, представляющий площадь под кривой, можно выразить следующим образом:

$$V_1 = - \int_0^{\varepsilon_1} \beta d\varepsilon = - \int_0^{\varepsilon_1} \left(\frac{S}{\rho_0} \right)^{1/2} d\varepsilon. \quad (7.11)$$

Значит, если S известно как функция ε , то соотношение (7.11) дает зависимость между деформацией ε_1 позади фронта пластической волны и скоростью V_1 движения конца проволоки, подвергнутого растяжению. Скорость распространения фронта пластической волны C можно затем получить с помощью кривой напряжения — деформация, так как эта скорость равна значению $(S/\rho_0)^{1/2}$ при $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Распределение напряжения σ' в проволоке можно вывести из распределения деформации ε , причем имеется определенное значение

деформации ϵ_1 , которое соответствует пределу прочности при растяжении проволоки. Скорость V_1 , соответствующая этому значению ϵ , может быть найдена из соотношения (7.11); можно ожидать, что проволока разрушится мгновенно, если концу ее сообщить скорость, превышающую это критическое значение.

§ 2. Пластические волны в эйлеровых координатах

В приведенном выше подходе к задаче уравнения были выведены для малого отрезка проволоки, который движется в пространстве и изменяет свою длину и площадь поперечного сечения, когда проволока растягивается. При подходе к задаче по методу Эйлера, как это делал Тейлор, рассматривается фиксированная область пространства, а уравнения движения и неразрывности получаются для проволоки, проходящей через эту область.

Примем за координату x расстояние от начального положения конца проволоки (x возрастает вдоль проволоки). Уравнение движения для области, заключенной между x и $x + \delta x$, можно получить, приравнявая разность сил, действующих на концы элемента проволоки, находящегося в момент t в этой области, произведению массы этого элемента на его ускорение. Пусть условное напряжение в сечении x , как и в предыдущем параграфе, равно σ' , тогда в сечении $x + \delta x$ оно равно

$$\sigma' + \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \delta x.$$

Если первоначальная площадь поперечного сечения равна A_0 , то результирующая сила, действующая на элемент будет $A_0 (\partial \sigma' / \partial x) \delta x$. Масса элемента равна $A_0 \rho_0 \delta x / (1 + \epsilon)$, где ρ_0 — плотность материала проволоки до деформации и ϵ — деформация. Если скорость элемента в момент t есть V , то центр его за время δt пройдет расстояние $V \delta t$ и его скорость в момент $t + \delta t$ будет

$$V + V \delta t \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t.$$

Следовательно, ускорение равно $\partial V / \partial t + V \partial V / \partial x$. По второму закону движения Ньютона получаем

$$\frac{\rho_0 A_0}{1 + \epsilon} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta x = A_0 \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \delta x$$

или

$$\frac{\rho_0}{1 + \epsilon} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = \frac{d\sigma'}{d\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x}. \quad (7.12)$$

Если масса единицы длины проволоки в некоторый момент времени равна M , то

$$M = \frac{\rho_0 A_0}{1 + \epsilon}. \quad (7.13)$$

Скорость изменения во времени этой линейной плотности можно приравнять разности массы входящей и массы, покидающей элемент пространства. Это дает соотношение

$$\frac{\partial M}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (MV). \quad (7.14)$$

Подставляя сюда значение M из (7.13), окончательно получаем уравнение неразрывности для проволоки

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = (1 + \varepsilon) \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (7.15)$$

Уравнения (7.12) и (7.15) подобны уравнениям распространения плоской волны конечной амплитуды в сжимаемой жидкости¹⁾ (задача была рассмотрена Ирншоу и Риманом). Следуя методу решения Ирншоу, предположим, что V является функцией только деформации, так что

$$V = f(\varepsilon). \quad (7.16)$$

Тогда вместо (7.12) будем иметь

$$\frac{\rho_0}{1 + \varepsilon} \frac{df}{d\varepsilon} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] = \frac{d\sigma'}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad (7.17)$$

а уравнение (7.15) даст

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{df}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} (1 + \varepsilon). \quad (7.18)$$

Подставляя значение $\partial \varepsilon / \partial t + V \partial \varepsilon / \partial x$ из уравнения (7.18) в уравнение (7.17), получаем

$$\left(\frac{df}{d\varepsilon} \right)^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma'}{d\varepsilon}. \quad (7.19)$$

Чтобы найти скорость $V = f(\varepsilon)$, надо проинтегрировать соотношение (7.19), и если сделать это начиная с конца проволоки, который находится в покое и где $\varepsilon = 0$, то получим

$$V = - \int_0^{\varepsilon} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma'}{d\varepsilon} \right)^{1/2} d\varepsilon. \quad (7.20)$$

Это совпадает с выражением для скорости конца проволоки, найденным по методу Лагранжа и определяемым уравнением (7.11), так как $S = d\sigma' / d\varepsilon$.

Подставляя значение $df/d\varepsilon$ из (7.19) в уравнение (7.18), имеем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \left[V + (1 + \varepsilon) \left(\frac{S}{\rho_0} \right)^{1/2} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$$

¹⁾ См., например, Ля м б А., Гидродинамика, М.—Л., стр. 594. — *Прим. ред.*

или, обозначая через c выражение $(1 + \varepsilon)(S/\rho_0)^{1/2}$, получаем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (c + V) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0. \quad (7.21)$$

Значит, для точек проволоки, которые движутся в пространстве со скоростью $(c + V)$ деформация ε и, следовательно, напряжение σ' постоянны. Надо заметить, что, так как x растет вдоль проволоки, V отрицательно при растяжении.

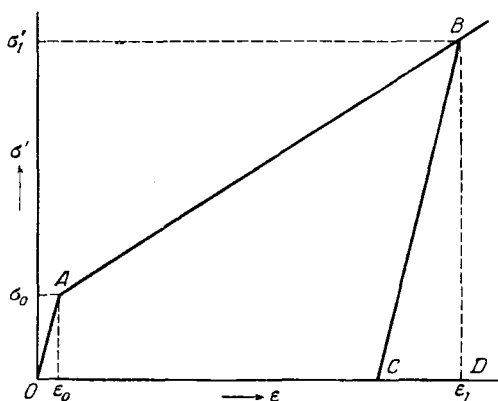
Для большинства твердых тел, как упоминалось в предыдущем параграфе, $d\sigma'/d\varepsilon$ постоянно для напряжений ниже предела упругости и убывает выше этого предела. Поэтому большие деформации распространяются со скоростью, меньшей скорости упругих волн, и распределение деформации будет подобным тому, которое показано на фиг. 38. Однако когда $d\sigma'/d\varepsilon$ возрастает с ростом ε , большие деформации распространяются быстрее малых и любой большой импульс, распространяясь в среде, образует крутой фронт, градиент в котором чрезвычайно ограничен диссипативными силами типа вязкости и теплопроводности. Значимость этих диссипативных сил возрастает, когда перепад давлений на фронте импульса становится круче. Образование ударных волн будет рассмотрено ниже.

§ 3. Волны разгрузки

До сих пор мы рассматривали образец бесконечной длины, когда один конец его растягивается с постоянной скоростью. Как упоминалось ранее, зависимость между напряжением и деформацией при уменьшении напряжения отличается от той, которая имеет место при его возрастании. В общем случае распространение волны разгрузки начинается при освобождении конца стержня, и интерференция между этой волной и волнами, которые уже распространяются в образце, представляет очень сложную проблему. Для чисто упругих деформаций эта задача была исследована Перри [109]; здесь же мы будем рассматривать поведение пластического материала с идеализированной зависимостью напряжение — деформация, показанной на фиг. 39. Кривая напряжение — деформация предполагается линейной и обратимой до точки A — предела пропорциональности; в этой точке внезапно изменяется наклон, но линейность сохраняется. Далее, после того как предел пропорциональности пройден, например, в точке B , и напряжение уменьшается, то предполагается, что кривая BC идет параллельно OA . Когда напряжение полностью снято, сохраняется остаточная деформация OC . После этого образец становится упругим при напряжениях, не превышающих значения в точке B ; кривая BC является обратимой.

Если конец проволоки из материала, имеющего такую идеализированную кривую напряжение — деформация, растягивается с постоянной скоростью, то возникает пластическая волна с крутым

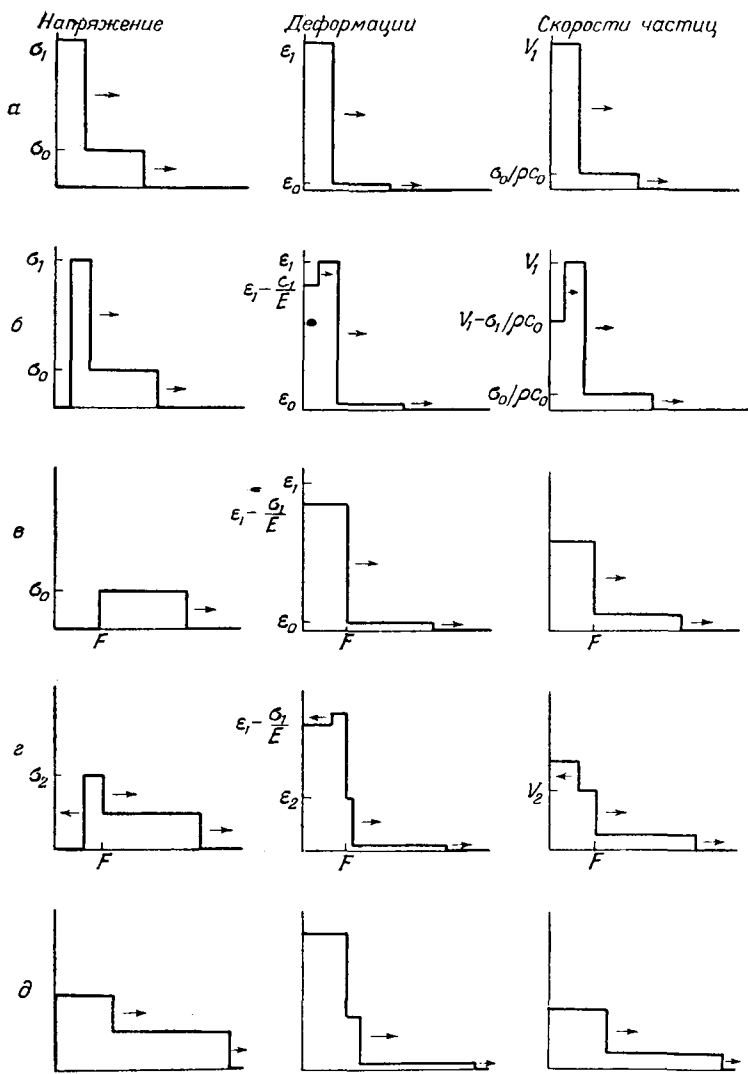
фронтом и распределение напряжений, деформаций и скоростей частиц в бесконечной проволоке будет таким, как показано на фиг. 40, *a*. Если модуль $d\sigma'/d\varepsilon$ в упругой области равен E (наклон прямой OA на фиг. 39), а его значение при возрастающих напряжениях в пластической области есть S_1 (наклон прямой AB), то скорость распространения упругой волны относительно проволоки равна $c_0/(1 + \varepsilon)$, где $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$; соответствующая же скорость пластической волны равна $C/(1 + \varepsilon)$, где $C = (S_1/\rho)^{1/2}$. Между фронтами упругой и пластической волны напряжение σ_0 и деформация ε_0 равны значениям на пределе пропорциональности A , а скорость частицы будет $\sigma_0/(\rho c_0)$. Позади



Фиг. 39. Идеализированная кривая напряжение—деформация для пластического материала.

фронта пластической волны величина деформации ε_1 определяется уравнением (7.11); напряжение σ_1 , связанное с ней, можно найти по кривой напряжение — деформация (фиг. 39). Как можно видеть, $\sigma_1 = E\varepsilon_0 + S_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)$. Скорость частицы в этой области равна скорости V_1 , с которой растягивается конец проволоки, т. е. часть проволоки, в которой происходит пластическое течение, движется как твердое тело.

Если теперь конец проволоки внезапно освободить, так чтобы напряжение на нем упало до нуля, то вдоль проволоки начнет распространяться волна разгрузки. Фронт этой волны движется со скоростью, соответствующей наклону прямой BC на фиг. 39, т. е. со скоростью упругих волн в материале. Следовательно, он в конце концов догонит фронт пластической волны. На фиг. 40, *b* показано распределение напряжений, деформаций и скоростей частиц уже после разгрузки. Между концом проволоки и фронтом волны разгрузки напряжение полностью отсутствует, деформация уменьшилась



Фиг. 40. Распространение волны разгрузки вдоль проволоки из материала, для которого зависимость напряжение — деформация имеет вид, показанный на фиг. 39.

После внутреннего отражения в точке F (г) имеем $\sigma_2 = \rho c_0 (V_1 - V_2) - \sigma_0$,
и $\epsilon_2 = \sigma_0 / E + (\sigma_2 - \sigma_0) / S_1$.

на величину, соответствующую ее упругой части (CD на фиг. 39), а скорость частицы убавилась на величину $\sigma_1/(\rho c_0)$. На фиг. 40, *в* показан момент, когда фронт волны разгрузки как раз достиг фронта пластической волны, причем скорость частиц равна $V_1 — \sigma_1/(\rho c_0)$ в ненапряженной области до точки F и равна $\sigma_0/(\rho c_0)$ между точкой F и фронтом упругой волны.

Начиная с этого момента пластическая волна уменьшенной амплитуды будет двигаться вперед вдоль проволоки от точки F , а упругая волна будет двигаться в обратном направлении; этот эффект имеет характер „внутреннего отражения“ в точке F . Обе волны, возникшие вследствие такого отражения, являются волнами растяжения, причем скорости частиц по разные стороны от точки F равны между собой. Из условий равенства значений напряжения и скорости по обе стороны от точки F после отражения можно определить амплитуды двух возникших волн. На фиг. 40, *г* показана пластическая волна уменьшенной амплитуды, движущаяся вдоль проволоки от точки F , и отраженная упругая волна, распространяющаяся в обратном направлении к концу проволоки. На фиг. 40, *д* эта волна достигла конца проволоки и условия для напряжений и скоростей подобны тем, которые имели место на фиг. 40, *а*, только скорость частицы между концом проволоки и фронтом пластической волны имеет меньшее значение. Затем повторяется полный цикл и, когда вторая волна сжатия распространяется вдоль проволоки и достигает фронт пластической волны, ее амплитуда уменьшается еще раз, так что остаточная деформация в проволоке имеет ступенчатый характер¹⁾. Каждая ступень соответствует точке, в которой упругая волна сжатия догоняет фронт пластической волны.

При построении фиг. 40 наклон кривой напряжение — деформация в пластической области был принят равным одной девятой значения в упругой области, так что $E = 9S_1$ и $C = 3c_0$. Далее, σ_1 было принято равным $4\sigma_0$, так что $\epsilon_1 = 28\epsilon_0$ (см. фиг. 39). Построение этих кривых проще начинать с кривых для скоростей частиц, так как при освобождении конца проволоки количество движения остается постоянным и потому площадь под кривой скоростей частиц должна также оставаться постоянной. Это дает удобный способ проверки условий после внутреннего отражения в точке F .

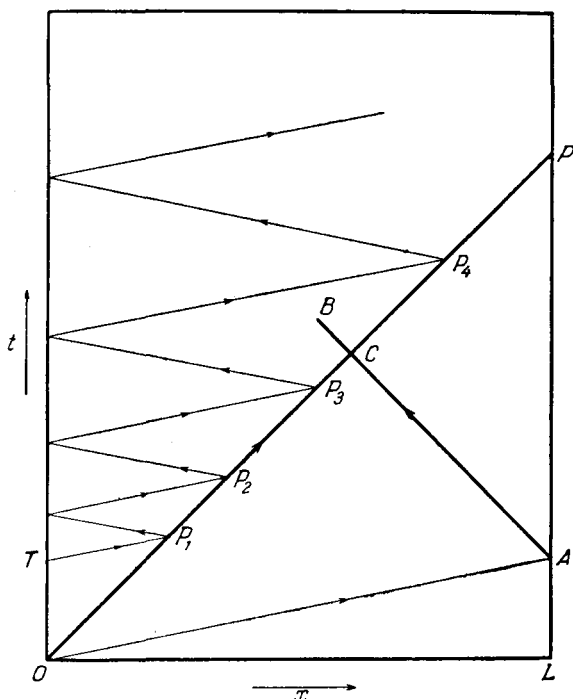
¹⁾ Такая картина распространения волны разгрузки не является единственно возможной. При некоторых значениях растягивающей силы (или скорости движения конца проволоки), когда возникшее напряжение немного превышает предел упругости, при первой же встрече волны разгрузки с фронтом пластической волны обе возникшие при внутреннем отражении волны могут оказаться упругими и дальнейшее распространение пластических деформаций прекратится. В проволоке останется одна зона постоянных остаточных деформаций. При увеличении растягивающей силы таких зон может образоваться две, три и т. д. [См., например, Ленский В. С., Прикладн. матем. и мех., XIII, № 2 (1949).] — *Прим. перев.*

§ 4. Пластические волны в образцах конечной длины

Рассмотренные до сих пор в этой главе пластические волны возникали при растяжении проволоки выше предела упругости. Точно такой же анализ можно распространить на задачу о внезапном сжатии; эта теория была применена к соударению стержней Уайтом [157] и Де Югасом [30]. Если один конец стержня внезапно сжат выше предела упругости и напряжение здесь поддерживается, то вдоль стержня будет распространяться упругая волна сжатия, за которой будет следовать, но медленнее, пластическая волна. При снятии напряжения вдоль стержня начнет распространяться волна разгрузки, которая в этом случае будет волной растяжения. Поскольку ее скорость больше скорости пластической волны, то она настигнет фронт последней и при этом, как показано в предыдущем параграфе, уменьшит ее амплитуду. В стержне конечной длины упругая волна отражается от другого его конца, причем если этот конец закреплен, то при отражении возникает пластическая волна. Таким образом, если один конец стержня сжат на короткое время, а затем освобожден, то несколько различных волн будут распространяться в обоих направлениях, и распределение напряжений через некоторое время после удара становится чрезвычайно запутанным.

Уайт [157] рассмотрел эту задачу для материала, у которого зависимость напряжение — деформация имеет вид, показанный на фиг. 39, и изобразил диаграмму распространения фронтов различных волн на плоскости (x, t) . Такая диаграмма показана на фиг. 41 для стержня, испытывавшего удар на одном конце, тогда как другой его конец закреплен. Упругие волны показаны на фигуре тонкими линиями, а пластические волны — жирными линиями. Предположено, что длина стержня равна OL , а постоянное сжимающее напряжение приложено в течение времени OT , после чего снято. Зависимость (x, t) для фронта начальной упругой волны обозначена OA , а зависимость для фронта пластической волны обозначена OP . Из точки и распространяется волна разгрузки со скоростью упругих волн и встречает пластическую волну в точке P_1 . Затем упругая волна сжатия движется в обратном направлении к концу стержня, тогда как пластическая волна с уменьшенной амплитудой, но с той же скоростью распространяется к точке P_2 , где она еще раз встречает упругую волну, отраженную от конца стержня, и этот процесс повторяется в точках P_3, P_4 и т. д., причем амплитуда пластической волны при каждой встрече уменьшается. Тем временем упругая волна достигает закрепленного конца стержня в точке A . Так как в момент отражения напряжение между фронтом пластической волны и закрепленным концом стержня всюду равно пределу пропорциональности, избыточное напряжение, возникающее при отражении, распространяется в обратном направлении как пластическая волна; это показано на фиг. 41 в виде прямой AB . Эта волна встречает

прямую пластическую волну в точке C , где происходит взаимодействие между обоими фронтами пластических волн, которое приводит к дальнейшему возрастанию деформации.



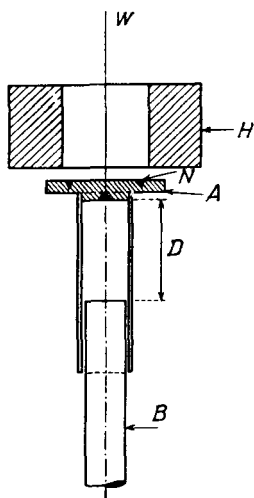
Фиг. 41. Диаграмма положение — время для фронтов пластической и упругой волны в стержне конечной длины.

Тонкие линии относятся к фронтам упругих волн, жирные — к фронтам пластических волн.

§ 5. Эксперименты по пластическим волнам

Пока имеется очень мало опубликованных данных опытов по распространению пластических волн. Карман и Дюве [152] описали некоторые эксперименты по распространению волн вдоль медных проволок, а Уайт [157] рассмотрел некоторые опыты по удару стальных стержней, проведенные в Калифорнийском технологическом институте. Аппаратура, применявшаяся Дюве для проверки теории распространения пластических волн, показана на фиг. 42. Были использованы отожженные медные проволоки, на которых до деформации наносятся на равных расстояниях метки. По измерениям расстояний между этими метками после опыта можно определить рас-

пределение деформаций. Конец проволоки прикреплен к жесткому элементу A . Вертикальный стержень B покоится на нижней раме испытательной машины, а его верхний конец входит свободно в трубчатую часть элемента A . Молот H падает между двумя вертикальными направляющими и ускоряется натянутыми резиновыми шнурами. Когда он ударяет по пластинке A , проволока удлиняется до тех пор, пока диск A не встретит стержень B . Диск A имеет круговую выточку N , причем обод диска отламывается по этой



Фиг. 42. Приспособление для исследования распространения пластических волн в проволоке.

выточке, когда A пройдет расстояние D и остановится стержнем B . Молот продолжает двигаться вниз. Время соударения может варьироваться расстоянием D ; скорость молота тоже можно менять. Молот достаточно массивен, чтобы не замедляться заметно при растяжении проволоки; скорость движения молота измеряется электрическим методом.

Целью опытов была проверка трех пунктов теории распространения пластических волн, причем для этого проводились отдельные эксперименты. Эти три пункта следующие:

- 1) существование фронта пластической волны данной величины;
- 2) зависимость между скоростью удара V_1 и деформацией ϵ_1 позади фронта пластической волны;
- 3) распределение пластических деформаций между пластической волной и упругой волной.

Чтобы проверить первый пункт, скорость молота поддерживалась постоянной, а продолжительность удара варьировалась путем изменения расстояния D . В этих опытах была найдена на конце проволоки область постоянных деформаций, длина которой пропорциональна продолжительности удара. Следовательно, как и предсказывается теорией, пластическая волна, амплитуда которой постоянна при постоянной скорости, распространялась вдоль проволоки.

Чтобы проверить второй пункт, скорость молота V_1 изменялась и измерялась возникшая пластическая деформация на конце проволоки. Теоретическая зависимость между V_1 и ϵ_1 выражена уравнением (7.11) и была рассчитана для проволоки по статическому определению кривой напряжение — деформация. Затем полученная в опыте кривая (S, ϵ) численно интегрировалась. Согласие между теорией и опытом было найдено вполне удовлетворительным.

Чтобы проверить третий пункт, Дюве предположил, что в конце удара движение прекращается и пластическая деформация „замерзает“

в проволоке. Как показано выше, в действительности этого не происходит, так как в конце удара вдоль проволоки распространяется волна разгрузки. Когда волна разгрузки достигает фронта пластической волны, она уменьшает амплитуду последней и отражается обратно к концу проволоки. Происходит ряд таких отражений, и в результате окончательное распределение пластических деформаций позади фронта пластической волны изображается гораздо более пологой кривой, чем в момент прекращения удара. Далее, надо ожидать, что кривая распределения деформаций по длине будет иметь ступенчатую форму, причем каждая ступень соответствует точке, в которой упругая волна разгрузки догоняет фронт пластической волны. Дюве нашел экспериментально, что распределение пластических деформаций на фронте пластической волны в действительности более полого, чем он ожидал, и последующие расчеты с учетом многократного отражения волн разгрузки дало лучшую согласованность с экспериментальными результатами.

Другое экспериментальное исследование пластических волн, описанное Уайтом [157], было проведено Дюве и Кларком со стальными образцами при растяжении и сжатии. Истолкование этих результатов осложняется тем, что предел пропорциональности материала чрезвычайно чувствителен к скорости нагружения: предел текучести при динамических условиях в два или три раза более статического значения. До тех пор пока динамические зависимости напряжения — деформация в таких материалах не будут исследованы другими методами, опыты по распространению пластических волн в них не могут дать особенно полезных результатов.

§ 6. Ударные волны в твердых телах

Как показано в § 2 этой главы, уравнения движения и неразрывности твердого стержня или проволоки формально эквивалентны уравнению волны конечной амплитуды в жидкости. Скорость распространения возмущения, согласно уравнению (7.21), равна $c + V$, и, если модуль упругости $S = d^2/dz^2$ постоянен, большие возмущения *сжатия* будут распространяться быстрее малых возмущений, так что любой конечный импульс сжатия по мере распространения в среде, в конце концов, образует ступенчатый фронт. В твердых телах скорости частиц даже при интенсивных возмущениях очень малы по сравнению со скоростью распространения, так что, если S постоянно, импульс напряжения может распространяться на значительное расстояние без изменения формы, но изменения значения этого модуля упругости S приводят к искажению импульсов конечной амплитуды. Для большинства твердых тел S уменьшается за пределом упругости, и в стержнях из таких материалов при достаточно больших деформациях возникают не ударные волны, а пластические волны. Однако имеется несколько твердых тел, например резины и другие высокие

полимеры, в которых большие деформации приводят к определенной ориентации длинных цепочечных молекул, вызывающей сильные возрастания значения $dv'/d\varepsilon$. Поэтому можно ожидать, что при распространении в таких материалах больших деформаций будут развиваться ударные волны. Кажется, до настоящего времени не было проведено каких-либо опытов, чтобы исследовать, имеет ли это место в действительности.

Ударные волны могут возникать в твердых телах также при других условиях, например когда в этих телах распространяются волны расширения большой амплитуды. Как показано в первой части монографии, упругие волны расширения распространяются в твердом теле со скоростью $[(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ или $\left[\left(k + \frac{2}{3}\mu\right)/\rho\right]^{1/2}$, где k — модуль всестороннего сжатия. Но, как показал Бриджмен [16], сжимаемость k твердых тел возрастает при высоких давлениях, вследствие чего можно ожидать, что скорость волны сжатия большой амплитуды будет больше, чем волны малой амплитуды. Модуль сдвига μ , видимо, роли не играет, так как задолго до того, как такое высокое давление будет достигнуто, предел текучести на сдвиг будет пройден и материал будет фактически вести себя подобно жидкости.

Бриджмен [16] показал, что зависимость между объемом v' и гидростатическим давлением P в твердых телах может быть представлена в виде соотношения

$$\frac{v' - v'_0}{v'_0} = aP + bP^2, \quad (7.22)$$

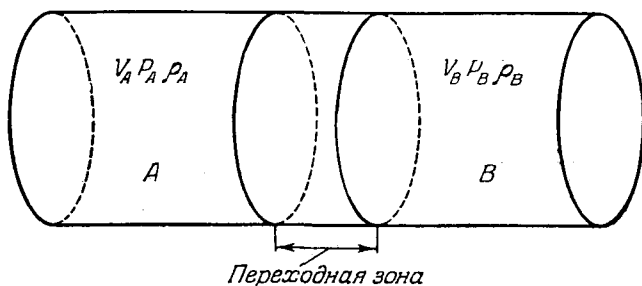
где v'_0 — начальный объем, а a и b — постоянные. Если P измеряется в кг/см^2 , то a будет порядка $5 \cdot 10^{-7}$ и b — порядка 10^{-12} для большинства металлов. Для чистого железа $a = 5,9 \cdot 10^{-7}$ и $b = 2,1 \cdot 10^{-12}$.

Модуль всестороннего сжатия k определяется как $v' \partial P / \partial v'$ и при малых давлениях стремится к постоянному значению $1/a$, а при высоких давлениях он имеет значение $1/(a + 2bP)$. Таким образом, чтобы изменить сжимаемость металлов на 10% , необходимо давление порядка 1000 кг/см^2 , что приводит к изменению скорости распространения только на $1/20\%$. Очевидно, кривизна диаграммы (P, v) в металлах становится существенной только при очень высоких давлениях и, следовательно, возникновение ударных волн в твердых телах вероятно или при непосредственном контакте тела со взрывным зарядом, или при попадании в тело высокоскоростного снаряда.

Сколько-нибудь детальное рассмотрение теории ударных волн выходит за рамки настоящей монографии, но полное обсуждение этого вопроса можно найти у Тейлора и Маккола [140], Эрпена [48], Куранта и Фридрихса [23] и Пенняя и Пайка [108]. Мы дадим лишь

краткое описание того, как получаются основные уравнения ударных волн. Эти соотношения, известные под названием уравнений Ранкина—Гюгонио, выводятся из уравнений сохранения массы, количества движения и энергии в среде.

Предположим, что возникла плоская ударная волна, распространяющаяся в материале с постоянной скоростью c . В области позади ее фронта скорости частиц, давление и плотность предполагаются постоянными. Имеется переходная зона между фронтом ударной волны и невозмущенным материалом. Условия в переходной зоне также предполагаются установившимися. Выберем теперь нашу систему отсчета так, что переходная зона представляется находящейся в покое. На фиг. 43 показан материальный цилиндр единичного поперечного



Фиг. 43. Цилиндрическая масса материала единичного поперечного сечения, проходящая справа налево через переходную зону ударной волны.

Система отсчета выбрана так, что переходная зона кажется находящейся в покое.

сечения, содержащий переходную зону. Пусть в выбранной системе отсчета давление, плотность и скорость частиц позади переходной зоны, в зоне A суть P_A , ρ_A и V_A , а в невозмущенном материале соответствующие величины суть P_B , ρ_B и V_B .

Так как вещество нигде не аккумулируется, масса материала, входящего в переходную зону за единицу времени, равна массе материала, выходящего из этой зоны, так что если обозначить эту массу через m , то имеем

$$m = \rho_A V_A = \rho_B V_B. \quad (7.23)$$

Материал входит в переходную зону со скоростью V_B и покидает ее со скоростью V_A . Приравняв скорость изменения количества движения действующей силе, получим

$$m(V_B - V_A) = P_A - P_B. \quad (7.24)$$

Наконец, работа, которая передается цилиндру в единицу времени, равна $P_A V_A - P_B V_B$, причем она совпадает с изменением кинетической энергии и внутренней энергии материала при прохождении через

переходную зону. Если обозначить изменение внутренней энергии в единице массы через ΔU , то имеем

$$P_A V_A - P_B V_B = m \left[\frac{1}{2} (V_B^2 - V_A^2) + \Delta U \right]. \quad (7.25)$$

(7.23), (7.24) и (7.25) суть те три уравнения, из которых можно вывести соотношения Ранкина—Гюгонно.

Так, из (7.23) и (7.24) находим

$$V_B = v_B \left[\frac{P_A - P_B}{v_B - v_A} \right]^{1/2}, \quad (7.26)$$

где $v_A = 1/\rho_A$ и $v_B = 1/\rho_B$. Далее, V_B есть скорость кажущегося движения материала в невозмущенной области, если система отсчета выбрана так, что переходная область представляется неподвижной. Она равна, следовательно, скорости распространения ударного фронта c в невозмущенном материале.

Скорость частиц позади ударного фронта относительно невозмущенного материала равна $V_B - V_A$; из соотношений (7.23) и (7.24) эта скорость будет

$$V = V_B - V_A = [(P_A - P_B)(v_B - v_A)]^{1/2}. \quad (7.27)$$

Наконец, из (7.25) получаем соотношение

$$\Delta U = \frac{1}{2} (P_A + P_B)(v_B - v_A). \quad (7.28)$$

Три уравнения (7.26), (7.27) и (7.28) и есть соотношения Ранкина—Гюгонно для распространяющегося ударного фронта, причем первые два из этих уравнений выведены целиком из условий сохранения массы и количества движений и, следовательно, справедливы даже в том случае, когда в среде генерируется химическая энергия, как это имеет место в волне детонации, проходящей через заряд. Из уравнения (7.26) можно видеть, что для очень малых разностей давления скорость c стремится к скорости звука в среде, а из (7.26) и (7.27) зависимость между разностью давлений ΔP и скоростью частиц V принимает вид

$$\Delta P = \rho V c, \quad (7.29)$$

что представляет собой соотношение, полученное для плоских упругих волн [см. уравнение (3.8)].

Толщина переходной зоны зависит от свойств среды и управляется диссипативными силами, влияние которых становится существенным при возрастании перепада скорости в переходной зоне. Для жидкостей показано, что эта толщина имеет порядок одного среднего свободного пробега молекулы. Для газов это, очевидно, будет предельной толщиной, так как расстояние между молекулами, которые испытали ускорение от приближающегося ударного фронта, и молекулами, еще не испытавшими его воздействия, должно быть по крайней мере такого порядка. Кажется, не было опубликовано работ относительно вероятной толщины переходной зоны в твердых телах.

Глава VIII

РАЗРУШЕНИЯ, ПРОИЗВОДИМЫЕ ВОЛНАМИ НАПРЯЖЕНИЯ

Когда импульс напряжения достаточно большой амплитуды проходит через твердое тело, он может произвести разрушения. Целью этой главы является описание того, как такие разрушения образуются, а также описание особенностей, которые отличают их от разрушений, производимых в условиях статического нагружения.

Разрушения, производимые импульсами напряжения, отличаются от разрушений, производимых „статически“, по нескольким различным причинам. Во-первых, при импульсах короткой продолжительности ни одна образующаяся трещина еще не успевает развиваться, а импульс уже проходит и напряжения снимаются. Это происходит потому, что скорость распространения трещины, вообще говоря, значительно меньше скорости распространения импульса¹⁾. Во-вторых, при коротком импульсе в любой данный момент времени только малая часть образца находится в напряженном состоянии и разрушения могут образовываться в одной области образца совершенно независимо от того, что происходит в любом другом месте. В-третьих, как показано в гл. II, когда импульс сжатия падает на свободную границу, он приводит к образованию отраженного импульса растяжения, а при наклонном падении образуется как импульс расширения, так и импульс искажения. Интерференция таких отраженных импульсов может привести, как показано на фотографии I (фронтиспис), к очень сложным распределениям напряжений, причем при наложении различных отраженных импульсов могут возникнуть напряжения достаточно большие, чтобы произвести разрушение, когда амплитуда падающего импульса слишком мала для этого. Наконец, как показано в гл. IV, динамические упругие свойства многих твердых тел могут заметно отличаться от свойств статических. Так, при очень высоких скоростях нагружения, связанных с интенсивными импульсами напряжения, материалы, которые обычно считаются вязкими, могут вести себя как хрупкие.

§ 1. Опыты Дж. Гопкинсона

Одним из самых ранних экспериментальных исследований разрушений, производимых волнами напряжений, является исследование, проведенное Дж. Гопкинсоном [60], который измерял прочность стальных

¹⁾ См. Эдгертон и Берстоу [31, 32], Шардин [126], Кристья [19].

проволок, внезапно растягиваемых падающим грузом. Использованная им аппаратура в принципе подобна той, которая описана недавно Карманом и Дюве [152] и показана на фиг. 42. Груз в форме шара с просверленным отверстием, через которое продета проволока, падает вдоль неё с заданной высоты и ударяет по скобе, прикрепленной к нижнему концу проволоки. Пользуясь различными грузами и разными высотами, Дж. Гопкинсон получил довольно замечательный результат, заключающийся в том, что минимальная высота с которой груз должен быть сброшен, чтобы разрушить проволоку, не зависит от размера груза. Иными словами, при этих условиях влияние двух ударов эквивалентно не тогда, когда их количества движения или энергии одинаковы, но тогда, когда равны скорости грузов. Дж. Гопкинсон объяснил этот результат с точки зрения упругих волн, распространяющихся вверх и вниз по проволоке. Когда груз ударяет по скобе, конец проволоки приобретает скорость частиц V_0 , равную скорости груза и скобы, а волна со ступенчатым фронтом распространяется вверх по проволоке со скоростью упругой волны растяжения $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$. Напряжение σ_0 в голове импульса определяется уравнением¹⁾

$$\sigma_0 = \rho V_0 c_0. \quad (8.1)$$

Напряжение действует на груз и замедляет его. Если масса груза равна M , то уравнение движения его запишется

$$M \frac{dV}{dt} = A\sigma = \rho AVc_0. \quad (8.2)$$

Здесь V — скорость груза в момент t , σ — напряжение на нижнем конце проволоки и A — площадь ее поперечного сечения. Решение уравнения (8.2) можно представить в виде

$$V = V_0 \exp \frac{-\rho A c_0 t}{M}. \quad (8.3)$$

Напряжение на нижнем конце проволоки в момент t , как можно видеть из уравнений (8.2) и (8.3), равно

$$\sigma = \rho c_0 V_0 \exp \frac{-\rho A c_0 t}{M}, \quad (8.4)$$

и значит, волна, распространяющаяся вверх по проволоке, имеет ударный фронт с величиной скачка, равной $\rho V_0 c_0$, причем натяжение убывает с удалением от фронта волны, по экспоненциальному закону, так что на расстоянии x от груза оно равно

$$\sigma = \rho c_0 V_0 \exp \left[\frac{\rho A}{M} (x - c_0 t) \right]. \quad (8.5)$$

Когда эта волна достигает верхнего конца проволоки, она отражается в виде волны растяжения, так что непосредственно после

¹⁾ См. уравнение (3.8) гл. III.

начала отражения растягивающее напряжение в верхнем конце проволоки равно удвоенному значению напряжения в голове импульса. Отраженная часть импульса распространяется в обратном направлении через хвост падающего импульса и затем вновь отражается от груза. Таким образом, импульс непрерывно движется вверх и вниз по проволоке. В опытах Дж. Гопкинсона фронт волны напряжения мог пробегать длину проволоки несколько раз до того, как груз M замедлялся настолько, что напряжение падало в несколько раз по сравнению с его значением в голове импульса. Следовательно, различные части волны распространялись в противоположных направлениях вдоль проволоки одновременно и результирующие распределения напряжений были очень сложными. Если напряжение при первом отражении, равное $2\rho V_0 c_0$, достаточно для разрушения проволоки, то можно ожидать, что разрушение произойдет очень близко к ее верхнему концу. Дж. Гопкинсон определил в своих опытах, что это действительно имеет место, если только проволока вообще разрушается. Далее, при этих условиях разрушение может наступить даже при малом грузе M , так как напряжение зависит только от значения скорости V_0 .

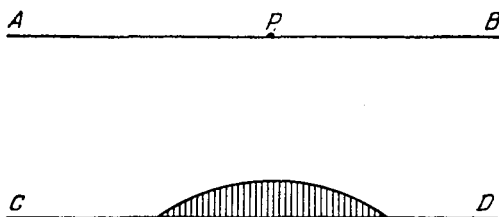
Б. Гопкинсон [55] повторил опыты своего отца, применяя аппаратуру, которая позволяла ему измерять максимальную деформацию в верхнем конце проволоки; он использовал также малые грузы, так что скорость экспоненциального убывания напряжения в хвосте волны была очень велика. Тем не менее, как показал Тейлор [139], наибольшее растягивающее напряжение в опытах Б. Гопкинсона возникало не при первом отражении, когда напряжение равнялось $2\rho V_0 c_0$, а при третьем отражении, т. е. при втором отражении в верхнем конце проволоки, когда напряжение достигало значения $2,15\rho V_0 c_0$. Б. Гопкинсон в этих опытах показал, что предел прочности при динамическом растяжении металлической проволоки гораздо больше, чем при статических измерениях, причем поправка для напряжения, сделанная Тейлором, только подкрепляет это заключение.

§ 2. Разрушения, производимые взрывами

Б. Гопкинсон [57] исследовал разрушения, возникающие в металлических образцах, когда в контакте с ними подрываются небольшие количества взрывчатого вещества. Он пользовался стальными образцами, причем заряды пироксилина детонировались в контакте с пластинками различной толщины. Для тонких пластинок (менее 12,7 мм толщины) Гопкинсон нашел, что взрыв пробивает в них сквозное отверстие. В толстых же плитах заряд оставляет вмятину на той поверхности плиты, с которой он находится в контакте, и выбрасывает круглый диск с противоположной стороны, причем поверхность этого диска, который Гопкинсон назвал „отколом“, имеет беспорядочную текстуру и приблизительно сферическую форму.

Когда заряд детонирует, он в течение нескольких микросекунд превращается в горячий газ, давление возрастает очень быстро до нескольких десятков тонн на квадратный сантиметр. Так как в этих опытах горячие газы от взрыва были ограничены только окружающим воздухом, они расширялись очень быстро и давление падало в течение нескольких сотысячных секунды. Поэтому сферический импульс сжатия очень короткой продолжительности направляется внутрь стального образца. Этот сферический импульс достигает нижней поверхности образца и отражается от нее как импульс растяжения, и поскольку сталь гораздо меньше сопротивляется растяжению, чем сжатию, то отраженный импульс растяжения производит откол в материале.

Описанное явление показано схематически на фиг. 44. Заряд расположен в точке P верхней поверхности плиты AB ; сферическая



Фиг. 44. Образование „откола“ в большой плите.

волна сжатия распространяется от него и отражается от свободной нижней поверхности плиты CD . В области непосредственно под зарядом она отражается целиком как волна растяжения; далее падает на нижнюю поверхность наклонно и в дополнение к волне растяжения возникает отраженная волна искажения. Это явление было рассмотрено в гл. II, причем на фиг. 6 показаны относительные амплитуды этих волн при различных углах падения для материала с пуассоновым отношением 0,33.

Волна расширения всегда отражается под углом, равным углу падения, так что она кажется исходящей из точки P' , которая представляет отражение точки P относительно плоскости CD . Отраженный импульс расширения проходит через хвост падающего импульса сжатия, а результирующее напряжение в плите равно сумме напряжений, порождаемых падающим и отраженным импульсами. Распределение напряжений при нормальном падении импульса сжатия на свободную поверхность рассмотрено в гл. IV и показано схематически на фиг. 21. Форма импульса сжатия, получающегося от взрыва пироксилина, не обязательно такая, как показано на фиг. 21, хотя, в результате очень быстрой детонации и сравнительно медленного растекания продуктов детонации, импульс, повидимому, быстро возрастает и значительно медленнее ослабевает. Далее, вследствие

больших давлений, возникающих при детонации, в волне развивается, вероятно, ударный фронт, который сохраняется при распространении в образце, по крайней мере, в области вблизи взрыва.

Как показано на фиг. 21, осязаемое растягивающее напряжение появляется впервые на некотором расстоянии от свободной поверхности и здесь начинается разрушение. Как только разрушение началось, остальная часть импульса отражается от вновь образовавшейся свободной поверхности, так что, когда амплитуда импульса напряжения достаточно велика, возможно образование нескольких параллельных трещин. В момент образования трещины некоторая часть количества движения остается между трещиной и нижней поверхностью, и если трещина распространилась в достаточной степени, чтобы кусок металла оторвался, он отлетает с количеством движения, захваченным им. Это явление подобно тому, которое использовано в мерном стержне Гопкинсона (см. выше), когда форма импульса давления определяется по его частям, захваченным хронометром и измеряемым моментом количества движения, которое приобретает хронометр. В описанных выше опытах по „отколу“ Гопкинсон обнаружил, что „откол“ отлетал с заметной скоростью и был в состоянии пробить толстую деревянную доску.

Область, в которой наступает разрушение (заштрихованная на фиг. 44), ограничена той частью образца, где растягивающее напряжение отраженной волны больше, чем предел прочности на растяжение. Амплитуда этого отраженного импульса растяжения может уменьшиться от следующих четырех причин:

1. Так как импульс имеет сферическую форму, его амплитуда убывает с возрастанием радиуса. (На фиг. 44 радиус равен расстоянию от отраженной точки P' ; эта точка на фигуре не показана.)

2. С отходом от линии PP' угол падения прямого импульса сжатия увеличивается. В гл. II показано, что при возрастании угла падения амплитуда отраженной волны расширения уменьшается, а остальная энергия переходит в отраженную волну искажения¹⁾.

3. Вследствие внутреннего трения часть упругой энергии импульса при прохождении через образец превращается в теплоту, что приводит к удлинению импульса и к уменьшению его амплитуды, так как количество движения в импульсе сохраняется.

4. Когда наступает разрушение, амплитуда быстро уменьшается, так как упругая энергия, накопленная в материале вокруг места разрушения, рассеивается.

На основании вышесказанного можно ожидать, что область разрушения должна иметь форму приблизительно сферической поверх-

1) Из фиг. 6 можно видеть, что при возрастании угла падения амплитуда отраженной волны расширения начинает опять увеличиваться; при $\nu = 0,33$ угол падения, соответствующий минимуму амплитуды, приблизительно равен 70° .

ности с центром в точке P' . В опытах с более концентрированными зарядами, чем использованные Гопкинсоном (они описаны в следующем параграфе), обнаружено, что откол имеет приблизительно такую форму.

В недавней работе Райнхарта [121] опыты Гопкинсона повторены с использованием цилиндрических зарядов, взрываемых в контакте со стальными плитами. После взрыва плиты разрезались и исследовались изменения твердости и микроструктуры металла. Райнхарт показал, что, кроме разрушений, обнаруженных Гопкинсоном, импульс напряжений производит значительную пластическую деформацию в металле и изменяет его микроструктуру; эти явления связаны с напряжениями сдвига, вызываемыми импульсом.

§ 3. Опыты с образцами различной формы

В опытах, описанных выше, только импульс напряжения, отраженный от нижней поверхности плиты, имел достаточную для разрушения амплитуду, боковые же грани плиты были слишком удаленными от места взрыва, чтобы отраженные от них волны могли привести к разрушению образца. Однако в образцах меньших размеров волны, отраженные от боковых граней, производят разрушения; кроме того, взаимно усиливающее влияние между волнами, отраженными от боковых граней и от нижней поверхности образца, может привести к дополнительным разрушениям. Шерман, Кристье и автор (Кольский и Шерман [75], Кольский и Кристье [74]) провели опыты с образцами из прозрачных материалов, чтобы наблюдать разрушения, происходящие вследствие интерференции между отраженными импульсами давления.

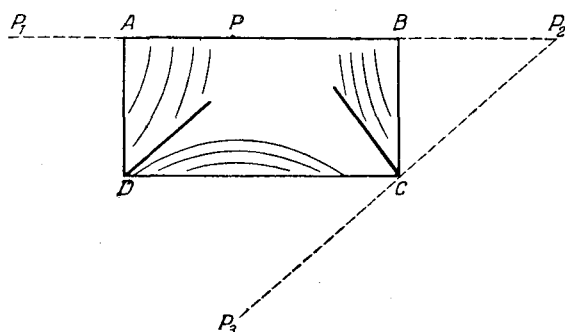
Были использованы образцы из пластиков и стекла; маленький заряд азида свинца (до 0,5 г) наклеивался на поверхность образца в форме небольшого полусферического холмика. Крупинка гремучего серебра помещалась наверху заряда, чтобы обеспечить быструю детонацию; заряд поджигался с помощью проволоочки, нагреваемой электрическим током. Большинство опытов было проведено с образцами из перспекса (пластицированного полиметил-метакрилата), так как этот материал можно сделать совершенно свободным от неоднородных внутренних деформаций, причем скорость волн расширения в нем сравнительно невелика (около 2000 м/сек), так что длина импульса с продолжительностью 2 мксек. составляет только 4 мм. Так как эффективная продолжительность импульсов, получаемых с помощью использованных очень маленьких зарядов, была такого порядка, размеры образца можно было сделать большими по сравнению с длиной импульса. Это упрощало характер распределения напряжений, получающегося после отражения.

При детонации заряда на поверхности большого куска материала образуется маленький поверхностный кратер. Кратер окружен

небольшой приблизительно полусферической областью разрушения. Эти разрушения произведены растягивающими напряжениями, параллельными фронту волны, которые возникли от уходящего сферического импульса сжатия. Разрушения состоят из большого числа мелких волокнистых трещин, расходящихся от места взрыва¹⁾.

Если образец достаточно велик, только эти разрушения и наблюдаются, так как амплитуда уходящего сферического импульса при достижении свободной поверхности образца становится слишком малой, чтобы произвести разрушения.

Если заряд подорван на поверхности полосы материала вдали от краев, откол образуется на противоположной поверхности, в области



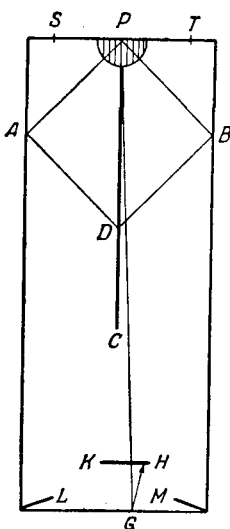
Фиг. 45. Взаимодействие между импульсами, отраженными от боковых граней и от нижней поверхности небольшого прямоугольного образца.

прямо под зарядом. Это явление было рассмотрено в предыдущем параграфе при описании опытов Гопкинсона со стальными образцами. Если заряд помещен вблизи края полосы, импульсы растяжения отражаются как от нижней поверхности, так и от боковой грани полосы. Импульс, отраженный от нижней поверхности, приводит к отколу, а импульс, отраженный от боковой грани, дает поверхность разрушения, параллельную боковой грани. В опытах с маленькими зарядами азид свинца над образцами из пластиков разрушения последнего типа обнаружены на расстоянии в несколько миллиметров от боковой грани. Расстояние этих областей разрушения от боковой грани зависит от амплитуды и формы расходящегося импульса давления. Как показано на фиг. 21, это расстояние никогда не превышает половины длины импульса, а для импульса со ступенчатым фронтом оно должно стать равным половине его длины, когда

¹⁾ Этот эффект можно видеть на фотографии III, где сняты разрушения, образовавшиеся в коническом образце. Полусферическая область здесь окружает центр основания конуса.

амплитуда как раз такая, какая необходима для разрушения материала.

Помимо разрушений, производимых отдельными отражениями импульса от нижней поверхности и от боковой грани образца, разрушение может наступить также в результате взаимодействия двух отраженных импульсов. Это явление показано схематически на фиг. 45, где изображено поперечное сечение прямоугольного образца. Заряд находится в точке P на верхней грани. BC и AD — линии пересечения с боковыми поверхностями, CD — пересечение с нижней гранью. Волны расширения, отраженные от грани BC и CD , кажутся исходящими из зеркально отраженных точек P_2 и P_3 , причем взаимодействие между ними будет происходить по плоскости, содержащей точку C и перпендикулярной к линии P_2P_3 ; оба отраженных импульса приходят одновременно в любую точку этой плоскости. Аналогичное взаимодействие будет происходить в плоскости, содержащей точку D и перпендикулярной прямой P_1P_3 . В опытах с небольшими прямоугольными образцами обнаружено, что поверхности разрушения проходят по этим плоскостям взаимодействия; на фотографии II показан вид сверху и сбоку на квадратный образец, причем видны эти разрушения.



Фиг. 46. Расположение областей разрушения в цилиндрическом образце при взрыве заряда в центре одного из торцов.

Когда заряд взрывается в центре одного из торцов цилиндрического образца, образуется несколько различных областей разрушения, что показано схематически на фиг. 46. Эти разрушения суть следующие:

а) Небольшая область разрушения вокруг места взрыва P , которая на фиг. 46 заштрихована.

б) Круговая трещина на верхнем торце в нескольких миллиметрах от края (показана на рисунке рисками S и T). Она появляется в результате отражения импульса сжатия от цилиндрической поверхности образца с образованием волны растяжения.

в) Длинная и узкая область разрушения, развивающаяся на некотором расстоянии вниз по оси цилиндра PC . Разрушение произведено волной, которая, отразившись от криволинейной поверхности, сбегаются к оси цилиндра, так что в этой области возникают большие растягивающие напряжения, приложенные в радиальном направлении. Если бы заряд имел в самом деле точечные размеры, то растягивающее напряжение на оси было бы бесконечным; однако поскольку его размеры конечны, большое растягивающее напряжение

возникает лишь в области вокруг оси, радиус которой сравним с размером заряда. Было найдено, что длина этой области разрушения PC возрастает с весом заряда; точка C соответствует точке, где наибольшее результирующее растягивающее напряжение как раз равно пределу прочности на растяжение пластика.

Найдено, что интенсивность разрушения вдоль линии PC не уменьшается монотонно, а проходит через максимум и затем быстро убывает. Причину этого можно представить себе так: для „луча“ PA , который после отражения идет вдоль AD , интенсивность в точке D зависит от длины $PA + AD$, которую он должен пробежать, и от угла падения луча PA на цилиндрическую поверхность. Для точек, лежащих ниже на оси цилиндра, проходимое расстояние и угол падения возрастают и, тогда как амплитуда обратно пропорциональна расстоянию, возрастание угла падения приводит вначале к уменьшению, а затем к увеличению амплитуды отраженной волны растяжения (см. фиг. 6).

Когда заряд взрывается в центре основания конического образца, разрушения образуются вдоль оси конуса так же, как и в цилиндре; эта область разрушения видна на фотографии III, где снят конический образец.

г) В коротких цилиндрах наблюдается плоская область разрушения HK , параллельная основанию цилиндра. Она вызвана отражением импульса от плоского торца цилиндра и подобна образованию откола в плоских пластинках. На рисунке показан луч PGH , иллюстрирующий образование этого разрушения.

д) Наконец, взаимодействие импульса, отраженного от основания цилиндра, и импульса, отраженного от нижней части цилиндрической поверхности, приводит к разрушению по конической поверхности, что показано отрезками L и M на фиг. 46. Это явление уже было рассмотрено и проиллюстрировано на фиг. 43. Можно видеть, что тангенс угла, образуемого конической областью разрушения с основанием цилиндра, равен отношению радиуса цилиндра к его высоте.

§ 4. Разрушения конических образцов

Все разрушения, описанные выше, можно объяснить с точки зрения отражения расходящегося импульса давления от свободных поверхностей образца. Распространение импульса аналогично тому, которое описывается в геометрической оптике при изучении света. Однако, когда импульс распространяется вдоль оси конического образца, амплитуда его возрастает и форма изменяется при движении в направлении к вершине. Теория распространения продольного упругого импульса вдоль конуса, когда размер поперечного сечения мал по сравнению с длиной импульса, рассмотрена в гл. III. Там было показано, что если имеет место импульс сжатия, то постепенно развивается хвост растягивающих напряжений; длина области сжа-

тия становится все короче и короче по мере приближения к вершине. В то же время максимальная амплитуда растягивающего напряжения в хвосте импульса увеличивается, так что если материал гораздо лучше сопротивляется сжатию, чем растяжению, то верхушка конуса может оторваться, прежде чем ее достигнет голова импульса.

При взрыве заряда азиды свинца в центре основания конуса из пластика обнаружено, что верхушка действительно отлетает с большой скоростью; результат этого опыта показан на фотографии III. Кроме отлетевшей верхушки, был извлечен небольшой осколок в форме диска, помещающийся между верхушкой и оставшейся частью конуса; он также показан на фотографии. Количества движения, с которым верхушка отлетает от конуса, соответствует части импульса давления, захваченной верхушкой, так что явление подобно тому, которое имеет место в мерном стержне Гопкинсона (см. гл. IV). Эффект, аналогичный разрушениям в верхушках конусов, наблюдался также в образцах в форме маленьких пластинок с острыми углами. Здесь расходящийся импульс давления концентрируется в углу, и задача представляет собой двумерную аналогию распространения импульса в конусе. Такие разрушения можно видеть в четырех углах квадратного образца, показанного на фотографии II.

§ 5. Типы поверхностей разрушения, вызванных импульсами напряжения

Мы рассмотрели пока, каким образом геометрическая форма образца влияет на положение областей разрушения, вызываемых в нем импульсами давления. Как упоминалось в начале этой главы, поверхности разрушения при этих условиях отличаются от тех, которые получаются, когда образец нагружен статически. Это объясняется тем, что напряжение прикладывается на такой короткий промежуток времени, что ни одна из образующихся трещин не успевает распространиться, и вместо непрерывных трещин возникает большое число отдельных трещин, причем иногда они соединяются и образуют более или менее непрерывную поверхность с беспорядочной текстурой. Образование таких поверхностей разрушения можно видеть внутри квадратного образца, показанного на фотографии II. Можно также видеть, что разрушения вдоль оси конического образца состоят из ряда „пузырьков“; их образование более похоже на кавитацию в жидкости, чем на разрушение в твердом теле.

Импульсы, производимые использованными малыми зарядами из азиды свинца, имели продолжительность порядка 2—3 мксек., и, так как скорость распространения трещины в стекле и в пластике меньше 1500 м/сек (см. Эдгертон и Берстоу [31, 32] и Кристье [19]), трещина не имеет возможности расширяться больше чем на несколько миллиметров, до того как импульс пройдет и напряжение будет снято. Когда использовался заряд, порождающий импульс большей

продолжительности, разрушения получались более похожими на те, которые наблюдаются при статическом нагружении. Так, когда маленький заряд нитроглицерина взрывался на поверхности пластинки из перспекса, образовавшийся откол был очень неправильной формы и имел конхоидальный вид. Причина этой неправильности формы состоит в том, что длина импульса в пластике была в несколько раз больше ее толщины. Поэтому различные части импульса одновременно распространялись туда и обратно поперек пластинки и результирующее распределение напряжений было подобно тому, которое имело место в опытах Гопкинсона со стальными проволоками. Далее, так как в этом опыте продолжительность импульса была гораздо больше, трещины имели возможность разрастись до нескольких сантиметров до того, как напряжение снималось; поэтому в образце получались гладкие поверхности разрыва, характерные для распространяющихся трещин.

§ 6. Хрупкое и вязкое разрушение

Как упоминалось ранее, разрушения, произведенные острыми импульсами напряжения, могут отличаться от разрушений, произведенных статически, также вследствие изменений механического поведения твердых тел при высоких скоростях нагружения. Эти различия не связаны с распространением волн напряжения как таковых и имеют место всегда, когда скорость нагружения достаточно велика. В пластичных твердых телах влияние увеличения скорости нагружения сказывается в том, что образующиеся разрушения становятся более похожими на те, которые наблюдаются в хрупких материалах. Эта задача была рассмотрена Б. Гопкинсом [56] и сравнительно недавно Лизерзичем [85]. Вязкость связана с течением твердого тела под действием приложенных напряжений сдвига, а хрупкое разрушение возникает в том случае, когда мелкие трещины растут под действием приложенных растягивающих напряжений. Когда сила приложена лишь на очень короткое время, возникающие сдвигающие напряжения не успевают произвести течения заметной величины, и многие материалы выдерживают кратковременные напряжения гораздо большей величины, чем их статический предел текучести (см. Тейлор [139]). Далее, когда разрушение происходит при этих условиях, оно имеет форму хрупкого разрушения без течения вокруг поверхностей разрушения. В опытах с образцами из перспекса, описанными в гл. VI, это явление изучалось путем наблюдения разрушающихся образцов в поляризованном свете. Когда пластик деформировался медленно, остаточная деформация большой величины сохранялась после снятия нагрузки. Но в образцах, на которых производились взрывы маленьких зарядов, не наблюдалось такой остаточной деформации даже в областях, непосредственно прилегающих к поверхностям разрушения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Замечания о напряжениях, деформациях и упругих постоянных

Было предложено несколько различных систем для обозначения компонент напряжения и деформации, причем обозначения, использованные в тексте, сравниваются здесь с двумя системами обозначений, наиболее употребительными в литературе, а именно с обозначениями Лява [88] и с обозначениями Кармана [151]. Первыми пользовались также Саусвелл [132] и Планк [110], а вторыми Тимошенко [144].

	В тексте	Карман	Ляв
<i>Декартовы координаты</i>			
Нормальные напряжения	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	X_x, Y_y, Z_z
Касательные напряжения	$\sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$	$\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$	Y_z, Z_x, X_y
Нормальные деформации	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$	$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}
Деформации сдвига	$\epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}, \epsilon_{xy}$	$\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$	e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}
Вращение	$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	—	$\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$
Объемное расширение	Δ	e	Δ
<i>Цилиндрические координаты</i>			
Нормальные напряжения	$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$	$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	$\widehat{rr}, \widehat{\theta\theta}, \widehat{zz}$
Касательные напряжения	$\sigma_{\theta z}, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}, \tau_{zr}, \tau_{r\theta}$	$\widehat{\theta z}, \widehat{zr}, \widehat{r\theta}$
Нормальные деформации	$\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}$	$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$	$e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{zz}$
<i>Упругие постоянные</i>			
Модуль продольной упругости . . .	E	E	E
Модуль всестороннего сжатия . . .	k	k	k
Пуассоново отношение	ν	ν	σ
Модуль сдвига	μ	μ или G	μ
Постоянная Ляме	λ	λ	λ

Тензорные обозначения для напряжений и деформаций дают очень удобный метод записи соотношений теории упругости. В этих обозначениях нормальные компоненты напряжения записываются в форме $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, а касательные компоненты — в виде $\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}$. В декартовых координатах индексы 1, 2, 3 соответствуют осям x, y, z соответственно. Любая компонента напряжения записывается в виде σ_{ij} , где i и j могут принимать значения 1, 2 или 3. Аналогично любая компонента деформации обозначается ϵ_{ij} . Объемное расширение

в этих обозначениях записывается в виде $\sum \epsilon_{ii}$, причем пользуются *условным обозначением суммирования*: опуская знак \sum , пишут ϵ_{ii} вместо $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$. Здесь i называют *фиктивным индексом* и условились, что повторение *буквенного* индекса означает суммирование по нему от 1 до 3. Это соглашение относится также к операциям дифференцирования; например уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{П.1})$$

соответствует системе трех уравнений

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Это те же уравнения движения (2.7), в которых вместо координат x, y, z записано x_1, x_2, x_3 соответственно, а вместо компонент перемещения u, v, w соответственно записано u_1, u_2, u_3 . Таким образом, тензорная форма (п.1) уравнений гораздо более компактна, чем декартова форма (2.7).

§ 2. Векторная форма волновых уравнений

Уравнения движения упругого тела можно записать в векторной форме, причем такая запись имеет то преимущество, что она не зависит от координатной системы.

Если перемещение обозначить вектором s , компоненты которого в декартовой системе координат (x, y, z) суть (u, v, w) , то объемное расширение Δ , являющееся скалярной величиной $[\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z]$, равно *дивергенции* вектора s , обозначаемой $\text{div } s$. Вектор *углового вращения* ω с векторными компонентами в декартовых координатах $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ записывается в виде $1/2 \text{rot } s$. Если i, j, k — единичные векторы вдоль направлений x, y, z соответственно, то

$$\text{rot } s = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k.$$

Имеется еще одна функция, подлежащая определению, — это *градиент* (обозначается grad). Так, если V — скалярная величина, являющаяся функцией от x, y, z , то

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k.$$

Между векторными функциями существуют определенные соотношения. Так, для оператора Лапласа ∇^2 над вектором s имеем

$$\nabla^2 s = i \nabla^2 u + j \nabla^2 v + k \nabla^2 w,$$

где $\nabla^2 u = (\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2)$ и т. д.; можно показать, что

$$\nabla^2 s = \text{grad div } s - \text{rot rot } s. \quad (\text{П.2})$$

Уравнения движения изотропного упругого тела, выведенные в гл. II и представленные уравнениями (2.8), (2.9) и (2.10), можно записать в виде одного

векторного уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{s} + \mu \nabla^2 \mathbf{s}. \quad (\text{П.3})$$

Подставляя значение $\nabla^2 \mathbf{s}$ из (П.2), получаем

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{s} - \mu \text{rot rot } \mathbf{s}. \quad (\text{П.4})$$

Так как $\text{div } \mathbf{s} = \Delta$ и $1/2 \text{rot rot } \mathbf{s} = \omega$, уравнение (П.4) перепишется в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad } \Delta - 2\mu \text{rot } \omega. \quad (\text{П.5})$$

Это уравнение не зависит от выбранной системы координат и более компактно, чем такое же уравнение в декартовой форме.

§ 3. Криволинейные ортогональные координаты

Хотя декартовы координаты удобны для многих задач теории упругости, часто необходимо бывает преобразовать уравнения к другой координатной системе, так как в декартовых координатах выражения оказываются громоздкими. Например, в главе III при рассмотрении распространения упругих волн вдоль цилиндрических стержней были использованы цилиндрические координаты.

Если (q_1, q_2, q_3) — координаты точки в некоторой системе координат, а (x, y, z) — ее декартовы координаты, то x, y и z являются функциями от q_1, q_2 и q_3 , так что $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$ и $z = z(q_1, q_2, q_3)$, причем

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \quad (\text{П.6})$$

и аналогичные выражения можно записать для dy и dz .

Элемент длины определяется соотношением $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, и из (П.6) имеем

$$dl^2 = g_{11} dq_1^2 + g_{22} dq_2^2 + g_{33} dq_3^2 + 2g_{23} dq_2 dq_3 + 2g_{31} dq_3 dq_1 + 2g_{12} dq_1 dq_2,$$

где

$$g_{ij} = g_{ji} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}.$$

Если рассмотреть длину dl_1 , которая соответствует изменению от q_1 до $q_1 + dq_1$ при постоянных q_2 и q_3 , то $dl_1 = (g_{11})^{1/2} dq_1$. Аналогично $dl_2 = (g_{22})^{1/2} dq_2$ и $dl_3 = (g_{33})^{1/2} dq_3$; для удобства величины $(g_{11})^{1/2}$, $(g_{22})^{1/2}$, $(g_{33})^{1/2}$ будем записывать соответственно в виде h_1, h_2 и h_3 . Если система координат ортогональна, т. е. если поверхности $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ пересекаются друг с другом под прямыми углами, то элемент объема dV равен

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Рассмотрим векторную функцию \mathbf{F} с составляющими F_1, F_2, F_3 по направлениям осей такой системы *ортогональных криволинейных координат*. Пусть \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c} — единичные векторы вдоль этих направлений, так что

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{a} + F_2 \mathbf{b} + F_3 \mathbf{c}.$$

Любые векторные функциональные операции над этим вектором можно выразить через его составляющие и коэффициенты h_1, h_2, h_3 . Например,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 F_3) \right] \quad (\text{П.7})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} = & \frac{\mathbf{a}}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 F_2) \right] + \\ & + \frac{\mathbf{b}}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 F_3) \right] + \\ & + \frac{\mathbf{c}}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 F_1) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Наконец, для градиента скалярной функции V имеем

$$\operatorname{grad} V = \frac{\mathbf{a}}{h_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{b}}{h_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{c}}{h_3} \frac{\partial V}{\partial q_3}. \quad (\text{П.9})$$

Чтобы записать (П.7), (П.8) и (П.9) в некоторой конкретной системе координат, надо найти значения h_1, h_2 и h_3 для этой системы. Так, для цилиндрической системы координат r, θ, z имеем $dl_1 = dr, dl_2 = r d\theta, dl_3 = dz$, откуда $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$. Тогда, например, если \mathbf{s} — вектор перемещения с компонентами u_r, u_θ, u_z по направлениям r, θ, z соответственно, то объемное расширение $\operatorname{div} \mathbf{s}$ по (П.7) имеет выражение

$$\Delta = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (ru_z)}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Это совпадает с уравнением (3.38) гл. III. Аналогично из (П.8) можно получить три составляющие $\operatorname{rot} \mathbf{s}$, совпадающие с выражениями (3.39) для $\overline{\omega}_r, \overline{\omega}_\theta, \overline{\omega}_z$.

Определяя таким образом все векторные функции, входящие в уравнение движения изотропного упругого тела (П.5), приходим к уравнениям Похгаммера (3.35), (3.36) и (3.37), использованным в гл. III для изучения распространения упругих волн вдоль цилиндрических стержней. Подобным путем можно получить уравнения в сферических координатах (r, θ, φ) ; в этом случае $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$.

ТАБЛИЦА ЧИСЛОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СКОРОСТЕЙ УПРУГИХ ВОЛН
В НЕКОТОРЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

	Сталь	Медь	Алюминий	Стекло	Резина
Упругие постоянные, дн/см²					
λ	$11,2 \cdot 10^{11}$	$9,5 \cdot 10^{11}$	$5,6 \cdot 10^{11}$	$2,8 \cdot 10^{11}$	$1,0 \cdot 10^{10}$
μ	$8,1 \cdot 10^{11}$	$4,5 \cdot 10^{11}$	$2,6 \cdot 10^{11}$	$2,8 \cdot 10^{11}$	$7,0 \cdot 10^8$
E	$21,0 \cdot 10^{11}$	$12,0 \cdot 10^{11}$	$7,0 \cdot 10^{11}$	$7,0 \cdot 10^{11}$	$2,0 \cdot 10^7$
k	$16,7 \cdot 10^{11}$	$12,5 \cdot 10^{11}$	$7,3 \cdot 10^{11}$	$4,7 \cdot 10^{11}$	$1,0 \cdot 10^{10}$
Пуассоново отношение, ν	0,29	0,34	0,34	0,25	0,5
Плотность, ρ	7,8	8,9	2,7	2,5	0,93
Скорость, м/сек					
c_1	5940	4560	6320	5800	1040
c_2	3220	2250	3100	3350	27
c_0	5190	3670	5090	5300	46
c_s	2980	2120	2920	3080	26
c_L	5420	3900	5410	5460	53

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. П., Лазуркин Я. С., *Acta Physicochimica, URSS*, **12** (1940), 647.
2. Alfrey T., *Mechanical Behaviour of High Polymers*, New York, 1948.
3. Allegretti L., *Ric. Sci.*, **18** (1948), 995.
4. Ballou J. W., Silverman S., *J. Acoust. Soc. Amer.*, **16** (1944), 113.
5. Ballou J. W., Smith J. C., *J. Appl. Phys.*, **20** (1949), 493.
6. Bancroft D., *Phys. Rev.*, **59** (1941), 588.
7. Bancroft D., Jacobs R. B., *Rev. Sci. Instrum.*, **9** (1938), 279.
8. Barducci J., Pasqualini G., *Nuovo Cimento*, **5** (1948), 416.
9. Becker R., Döring W., *Ferromagnetismus*, Berlin, 1939.
10. Bennewitz K., Rötger H., *Zeitschr. f. techn. Physik*, **19** (1948), 521.
11. Bergmann L., *Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik*, Zürich, 1949.
12. Boltzmann L., *Pogg. Ann. Erg.*, **7** (1876), 624.
13. Bordoni P. G., *Nuovo Cimento*, **4** (1947), 177.
14. Bradfield G., *Nuovo Cimento, Suppl. No 2*, **7** (1950), 162.
15. Bradfield G., *Nature*, **167** (1951), 1021.
16. Бриджмен П., *Физика высоких давлений*, М.—Л., 1935.
17. Chree C., *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **14** (1889), 250.
18. Chree C., *Quart. J. Pure and Appl. Math.*, **23** (1899), 335.
19. Christie D. G., *Trans. Soc. Glass Tech.* (1952).
20. Кокер Е. Г., Файлон Л. Н., *Оптический метод исследования напряжений*, М.—Л., 1936.
21. Cooke W. T., *Phys. Rev.*, **50** (1936), 1158.
22. Cooper J. L. B., *Phil. Mag.*, **38** (1947), 1.
23. Курант Г., Фридрихс К., *Сверхзвуковое течение и ударные волны*, М., 1950.
24. Czerlinsky E., *Akust. Z.*, **7** (1942), 12.
25. Davies R. M., *Phil. Trans. A*, **240** (1948), 375.
26. Davies R. M., *Some recent developments in Rheology*, London, 1950.
27. Davies R. M., James E. G., *Phil. Mag.*, **18** (1934), 1023.
28. Davies R. M., Owen J. D., *Proc. Roy. Soc. A*, **204** (1950), 17.
29. Debye P., Sears F. W., *Proc. Nat. Acad. Sci. Wash.*, **18** (1932), 410.
30. De Juhasz K. J., *J. Franklin Inst.*, **248** (1949), 113.
31. Edgerton H. E., Barstow F. E., *J. Am. Ceram. Soc.*, **22** (1939), 302.
32. Edgerton H. E., Barstow F. E., *J. Am. Ceram. Soc.*, **24** (1941), 131.
33. Field G. S., *Canad. J. Research*, **5** (1931), 619.
34. Föppel O., *J. Iron and Steel Inst.*, **134** (1936), 393.
35. Friedlander F. G., *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, **1** (1948), 376.
36. Фрохт М. М., *Фотоупругость*, М.—Л., 1948.
37. Fukada E., *J. Phys. Soc. Japan*, **5** (1950), 321.
38. Galt J. K., *Phys. Rev.*, **73** (1948), 1460.
39. Gemant A., *J. Appl. Phys.*, **11** (1940), 647.
40. Gemant A., Jackson W., *Phil. Mag.*, **23** (1937), 960.
41. Giebe E., Blechschmidt E., *Ann. d. Phys.*, **18** (1938), 417.
42. Giebe E., Scheibe A., *Ann. d. Phys.*, **9** (1931), 93.
43. Горский В. С., *Zeit. Sow. Phys.*, **6** (1936), 77.
44. Grime G., Eaton J. E., *Phil. Mag.*, **23** (1937), 96.

45. Gross B., *J. Appl. Phys.*, **18** (1947), 212.
46. Guillet L., *Strength of Solids*, London, 1948.
47. Гуревич Л., *J. Phys. USSR*, **9** (1945), 383.
48. Herpin A., *Rev. Sci. Paris*, **85** (1947), 817.
49. Hiedemann E., Hoesch K. H., *Naturwiss.*, **23** (1935), 517.
50. Hiedemann E., Asbach H. R., Hoesch K. H., *Z. Phys.*, **90** (1934), 322.
51. Hillier K. W., *Proc. Phys. Soc. B*, **62** (1949), 701.
52. Hillier K. W., *Proc. Phys. Soc. B*, **64** (1951), 998.
53. Hillier K. W., Kolsky H., *Proc. Phys. Soc. B*, **62** (1949), 111.
54. Honda K., Konno S., *Phil. Mag.*, **42** (1921), 115.
55. Hopkinson B., *Proc. Roy. Soc. A*, **74** (1905), 498.
56. Hopkinson B., *Collected Sci. Papers* (1910), Cambridge, 1921, p. 64.
57. Hopkinson B., *Collected Sci. Papers* (1912), Cambridge, 1921, p. 424.
58. Hopkinson B., *Phil. Trans. A*, **213** (1914), 437.
59. Hopkinson B., Williams G. T., *Proc. Roy. Soc. A*, **87** (1912), 502.
60. Hopkinson J., *Collected Sci. Papers*, vol. II (1872), 316.
61. Hudson G. E., *Phys. Rev.*, **63** (1943), 46.
62. Hughes D. S., Pondrom W. L., Mims R. L., *Phys. Rev.*, **75** (1949), 1552.
63. Hunter L., Siegel S., *Phys. Rev.*, **61** (1942), 84.
64. Huntingdon H. B., *Phys. Rev.*, **72** (1947), 321.
65. Ivey D. G., Mrowka B. A., Guth E., *J. Appl. Phys.*, **20** (1949), 486.
66. James E. G., Davies R. M., *Phil. Mag.*, **18** (1934), 1053.
67. Jessop H. T., Harris F. C., *Photoelasticity*, London, 1949.
68. Kamel R., *Phys. Rev.*, **75** (1949), 1606.
69. Ke T. S., *Phys. Rev.*, **71** (1947), 533; **72** (1947), 41 (перевод см. в [162]).
70. Kelvin, *Baltimore Lectures* (London), 1904.
71. Kimball A. L., *J. Appl. Mech.*, **8** (1941), A 37, A 135.
72. Knott C. G., *Phil. Mag.*, **48** (1899), 64.
73. Kolsky H., *Proc. Phys. Soc.*, B **62** (1949), 676. [Есть русск. перевод, см. сб. *Механика*, вып. 4, Издат. иностр. литер. (1950)].
74. Kolsky H., Christie D. G., *Trans. Soc. Glass. Tech.* (1952).
75. Kolsky H., Shearman A. C., *Research*, **2** (1949), 384.
76. Kovacs A., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **227** (1948), 1019.
77. Kruger F., Rohloff E., *Z. f. Phys.*, **110** (1938), I, 58.
78. Lamb H., *Proc. Roy. Soc. A*, **93** (1917), 114.
79. Ляmb Г., *Гидродинамика*, М.—Л., 1947.
80. Ландау Л., Румер Г., *Zeit. Sow. Phys.*, **11** (1937), 18.
81. Landon J. W., Quinney H., *Proc. Roy. Soc. A*, **103** (1923), 622.
82. Le Rolland P., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **192** (1931), 336.
83. Le Rolland P., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **227** (1948), 37.
84. Leaderman H., *Elastic and creep properties of filamentous materials*, Washington, 1943.
85. Lethersich W., *Proc. 7th Int. Congr. Appl. Mech.*, London, 1946, paper 1, 6.
86. Lethersich W., *Brit. J. Appl. Phys.*, **1** (1950), 294.
87. Love A. E. H., *Some problems of Geodynamics*, Cambridge, 1911.
88. Ляв А., *Математическая теория упругости*, М.—Л., 1935.
89. Lucas R., Biquard P., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **194** (1932), 2132.
90. Macelwane J. B., Sohon F. W., *Introduction to theoretical Seismology*, New York, 1936.
91. Mason W. P., *Trans. A. S. M. E.*, **69** (1947), 359.
92. Mason W. P., McSkimin H. J., *J. Acoust. Soc. Amer.*, **19** (1947), 464.
93. Mason W. P., McSkimin H. J., *J. Appl. Phys.*, **19** (1948), 940.
94. Maxwell C., *Scientific Papers*, vol. II, Cambr., 1890.
95. Meyer O., *J. reine angew. Math.*, **58** (1874), 130.

96. Миндлин Я. А., ДАН СССР, LVIII, № 1 (1947).
97. Morse R. W., J. Acoust. Soc. Amer., **20** (1948), 833.
98. Morse R. W., J. Acoust. Soc. Amer., **22** (1950), 219.
99. Navier C. L. M. H., Mem. Acad. Sci. Paris, **7** (1827).
100. Nolle A. W., J. Appl. Phys., **19** (1948), 753.
101. Nolle A. W., J. Polymer Sci., **5** (1949), 1.
102. Norton J. T., Rev. Sci. Instrum., **10** (1939), 77.
103. Nurmi U., Soc. Sci. fenn. Comm. phys. math., **11** (1941), 1.
104. Orowan E., Zeits. f. Phys., **89** (1934), 634.
105. Owen J. D., Thesis subm. to University of Wales for Ph. D. degree (1950).
106. Owen J. D., Davies R. M., Nature, **164** (1949), 752.
107. Parfitt G. G., Nature, **164** (1949), 489.
108. Penney W. G., Pike H. H., Rep. Progress Phys., **13** (1950), 46.
109. Perry J., Phil. Mag., **11** (1906), 107.
110. Planck M., Mechanics of deformable bodies, London, 1932.
111. Pochhammer L., J. reine angew. Math., **81** (1876), 324.
112. Poisson S. D., Mem. Acad. Sci. Paris, **8** (1829).
113. Polanyi M., Zeits. f. Phys., **89** (1934), 660.
114. Prescott J., Phil. Mag., **33** (1942), 703.
115. Quimby S. L., Phys. Rev., **25** (1925), 558.
116. Quimby S. L., Phys. Rev., **39** (1932), 345.
117. Рахматулин Х. А., Приклад. матем. и мех., **IX**, № 1 (1945).
118. Randall R. H., Rose F. C., Zener C., Phys. Rev., **56** (1939), 343.
119. Rayleigh, Lond. Math. Soc. Proc., **17** (1887).
120. Релей, Теория звука, М.—Л., 1940.
121. Rinehart J. S., J. Appl. Phys., **22** (1951), 1178. [Есть русск. перевод, сб. Механика, вып. 4, Издат. иностр. лит. (1953)].
122. Robertson R., Trans. Chem. Soc., **119** (1921), 1.
123. Röhrich K., Zeits. f. Phys., **73** (1932), 813.
124. Roth W., J. Appl. Phys., **19** (1948), 901.
125. Schaefer C., Bergmann L., Sitz. Ber. Berliner Akad., 1934, S. 155, 192.
126. Schardin H., Glastechn. Ber., **23** (1950), 1, 67, 325.
127. Schardin H., Struth W., Glastechn. Ber., **16** (1938), 219.
128. Schoeneck H., Zeits. f. Phys., **92** (1934), 390.
129. Senior D. A., Phil. Mag., **37** (1946), 463.
130. Shear S. K., Focke A. B., Phys. Rev., **57** (1940), 532.
131. Snook J. L., Physica, **8** (1941), 711.
132. Саусвелл Р. В., Введение в теорию упругости, М., 1948.
133. Stanford E. G., Nuovo Cimento, Suppl., № 2, **7** (1950), 332.
134. Stanford E. G., Thesis subm. to Univ. of London for Ph. D. degree (1950).
135. Stephens R. W. B., Bate A. C., Wave motion and Sound, Lond., 1950.
136. Stokes G. G., Phil. Mag., **32** (1848), 343.
137. Stoneley R., Proc. Roy. Soc., A, **106** (1924), 416.
138. Taylor G. I., Proc. Roy. Soc., A, **145** (1934), 362.
139. Taylor G. I., J. Inst. Civil Engrs., **26** (1946), 486. [Есть русск. перев., см. сб. Механика, вып. 3, Издат. иностр. лит. (1950)].
140. Taylor G. I., Masscoll J. W., The Mechanics of compressible fluids, vol. III, Berlin, 1935.
141. Thiede H., Akust. Z., **6** (1941), 64.
142. Thompson J. H. C., Phil. Trans., **231** (1933), 339.
143. Timoshenko S., Phil. Mag., **41** (1921), 744.
144. Тимошенко С. П., Теория упругости, М.—Л., 1934.
145. Tobolsky A., Powell R. E., Eyring H., The Chemistry of large molecules, New York, 1943.
146. Treloar L. K. G., The physics of Rubber Elasticity, Oxford, 1949.

147. Van Dyke K. S., Phys. Rev., **53** (1938), 945.
148. Voigt W., Ann. d. phys., **47** (1892), 671.
149. Volterra E., Nuovo Cimento, **4** (1948), 1.
150. Volterra V., Theory of Functionals, London, 1931.
151. von Kármán T., Ency. d. math. Wiss., **4** (1910), Art. 27.
152. von Kármán T., Duwez P., J. Appl. Phys., **21** (1950), 987 [есть русск. пер., см. сб. Механика, вып. 2, Издат. иностр. лит. (1951)].
153. Weatherburn C. E., Advanced vector analysis, London, 1924.
154. Weber W., Pogg. Ann., Erg., **34** (1837), 247.
155. Wegel R. L., Walther H., Physics, **6** (1935), 141.
156. Wert C. A., J. Appl. Phys., **20** (1949), 29.
157. White M. P., J. Appl. Mech., **16** (1949), 39.
158. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, М.—Л., 1933—34.
159. Witte R. S., Mrowca B. A., Guth E., J. Appl. Phys., **20** (1949), 481.
160. Zacharias J., Phys. Rev., **44** (1933), 116.
161. Zener C., Phys. Rev., **52** (1937), 230.
162. Зенер К., Упругость и неупругость материалов, М., 1954.
163. Zener C., Physica, **15** (1949), 111.
164. Zener C., Randall R. H., Trans. A. I. M. E., **137** (1940), 41.
165. Zoepfritz K., Nach. d. königl. Gesell. d. Wissen. z. Göttingen, math.-phys., Berlin (1919), 66—84.

Литература, добавленная переводчиком

- Аржаных И. С., Преломление вектора смещения запаздывающими потенциалами, ДАН СССР, **XCIV**, № 3 (1954).
- Агабабян Е. Х., Динамическое расширение упругого цилиндра, Укр. мат. журн., **5**, № 3, 4 (1953).
- Баренблатт Г. И., О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций, Прикл. мат. и мех., **XVII**, № 4 (1953).
- Бахшиян Ф. А., Упруго-пластическая сферическая волна нагружения, Прикл. мат. и мех., **XII**, № 3 (1948).
- Гоголадзе В. Г., Волновое уравнение для неоднородных и анизотропных сред, Труды мат. ин-та им. Стеклова, **IX** (1935).
Поверхностные волны в среде с наследственной упругостью, М., 1938.
Общие формулы для отражения и преломления нестационарных упругих волн, ДАН СССР, **XLIX**, № 7 (1945).
- Отражение и преломление упругих волн, Общая теория граничных волн Релея, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 125 (1947).
- Волны Релея на границе сжимаемой жидкой среды и твердого упругого полупространства, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 127 (1948).
- Давиденков Н. Н., Динамические испытания металлов, М., 1936.
- Даниловская В. И., Об одной динамической задаче термоупругости, Прикл. мат. и мех., **XVI**, № 3 (1952).
- Динник А. Н., Удар и сжатие упругих тел, Изв. Киевск. Политех. ин-та, 1909 [См. также Динник А. Н., Избранные труды, т. I, Киев, 1952].
- Еругин Н. П., О функционально-инвариантных решениях, ДАН СССР, **XLII**, № 9 (1944). (См. также Уч. зап. Ленингр. университета, вып. 15, 1948).
- Зволинский Н. В., Волны Релея в неоднородном упругом полупространстве частного типа, Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 3 (1945).
- Ишлинский А. Ю., Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации, Прикл. мат. и мех., **IV**, № 1 (1940).
- Кильчевский Н. А., Теория соударения твердых тел, М.—Л., 1949.
- Купрадзе В. Д., Основные задачи математической теории дифракции, М.—Л., 1935.

- О „принципе излучения“ Зоммерфельда, ДАН СССР, I, № 5 (1934).
- Ленский В. С., Об упруго-пластическом ударе стержня о жесткую преграду, Прикл. мат. и мех., XII, № 2 (1949).
- Метод построения динамической зависимости между напряжениями и деформациями по распределению остаточных деформаций, Вестн. Моск. ун-та, № 5 (1951).
- Ленский В. С. и Тарасова М. А., Определение динамической диаграммы напряжение — деформация резины, Вестн. Моск. ун-та, № 12 (1950).
- Луц Я. Л., О распространении сферических волн в упруго-пластической среде, Прикл. мат. и мех., XIII, № 1 (1949).
- Малышев Б. М., Измерение продолжительности удара, Вестн. Моск. ун-та, № 5 (1952).
- Миндлин Я. А., Краевая динамическая задача теории упругости для круга, ДАН СССР, XV, № 1, 9 (1937).
- Общее представление решения волнового уравнения, ДАН СССР, LVIII, № 1 (1947).
- Михлин С. Г., Распространение волн в областях с криволинейной границей, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 110 (1941).
- Фундаментальные решения динамических уравнений теории упругости для неоднородной среды, Прикл. мат. и мех., XI, № 4 (1947).
- Надеева Р. И., Об определении динамической зависимости между напряжениями и деформациями, Вестн. Моск. ун-та, № 10 (1953).
- Назаров А. Г., О рассеянии энергии при упругих колебаниях. Докл. АН Арм. ССР, 16, № 3 (1953).
- Наймарк М. А., О колебаниях тонкого упругого слоя, лежащего на упругом полупространстве, под действием вертикальной гармонической сосредоточенной силы, приложенной к свободной поверхности слоя, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 119 (1947); № 127 (1948).
- Нарышкина Е. А., Колебания полупространства при любых начальных условиях, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 45 (1934).
- О волнах Rayleigh в пространстве трех измерений. Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 48 (1934).
- Общая теория волн Rayleigh для полупространства. Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 90 (1940).
- Николай Е. Л., К теории продольного удара двух стержней, Тр. Ленингр. индустр. ин-та, № 3 (1939).
- Остроградский М. В., Об интегрировании уравнений в частных производных, относящихся к малым колебаниям упругой среды, Mem. de l'Acad., Петербург, I (1831).
- Панов Д. Ю., О крутильных колебаниях стержня при наличии упругого гистерезиса, Прикл. мат. и мех., IV, № 1 (1940).
- Применение теории упругого последствия Р. Беккера к исследованию действия периодической нагрузки, Прикл. мат. и мех., X, № 5, 6 (1946).
- Петрашень Г. И., Колебание изотропного упругого шара, ДАН СССР, XLVII, № 3 (1945).
- Задача Релея для поверхностных волн в случае сферы, ДАН СССР, LI, № 9 (1946).
- Петровский И. Г., О скорости распространения разрывов производных смещений на поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы, ДАН СССР, XLVII, № 4 (1945).
- Рахматулин Х. А., О распространении волны разгрузки, Прикл. мат. и мех., IX, № 1 (1945).
- О распространении волны разгрузки вдоль стержня переменного предела упругости (Задача о накоплении остаточных деформаций), Прикл. мат. и мех., X, № 3 (1946).

Об ударе по гибкой нити, Прикл. мат. и мех., **XI**, № 3 (1947).

О распространении цилиндрических волн при пластических деформациях (скручивающий удар), Прикл. мат. и мех., **XII**, № 1 (1948).

Исследование законов распространения плоских упруго-пластических волн в среде с переменным пределом упругости, Прикл. мат. и мех., **XIV**, № 1 (1950).

О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации, Уч. зап. МГУ, Механика, 152 (1951).

Поперечный удар по гибкой нити телом заданной формы, Прикл. мат. и мех., **XVI**, № 1 (1952).

Рахматулин Х. А. и Шапиро Г. С., О распространении плоских упруго-пластических волн, Прикл. мат. и мех., **XII**, № 4 (1948).

Смирнов В. И., О сингулярных решениях волнового уравнения и уравнений упругости, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 78 (1936).

Решение предельных задач теории упругости в случае круга и сферы, ДАН СССР, **XIV**, № 2 (1937).

Смирнов В. И. и Соболев С. Л., О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 29 (1933).

Соболев С. Л., Волновое уравнение для случая неоднородной изотропной среды, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 2 (1930).

Волновое уравнение для неоднородной среды, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 6 (1930).

Применение теории плоских волн к задаче Ламба, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 18 (1932).

Sur le vibrations d'un demiplan et d'une couche a conditions initiales arbitraire, Матем. сб., **40** (1933).

Новый метод решения задачи Коши для уравнения в частных производных второго порядка, ДАН СССР, **I**, № 8 (1934).

Теория дифракции плоских волн, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 41 (1934).

К вопросу об интегрировании волнового уравнения в неоднородной среде, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 42 (1934).

Функционально-инвариантные решения волнового уравнения. Тр. мат. ин-та им. Стеклова, **V** (1934).

О задаче Коши для квазилинейных гиперболических уравнений, ДАН СССР, **XX** (1938).

Соболев С. Л. и Купрадзе В. Д., К вопросу о распространении упругих волн на границе двух сред с различными упругими свойствами, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 10 (1930).

Соколовский В. В., Распространение упруго-вязкопластических волн в стержне, Прикл. мат. и мех., **XII**, № 3 (1948).

Сретенский Л. Н., Распространение волн от звучащего диска, Уч. зап. МГУ, Механика, 154 (1951).

Распространение упругих волн, возникающих при движении системы нормальных напряжений по поверхности полупространства, Тр. Моск. мат. об-ва, **I**, 167—186 (1952).

Чебан В. Г., Продольное соударение упруго-пластических стержней, Вестн. Моск. ун-та, № 6 (1952).

Шапиро Г. С., Продольные колебания стержней, Прикл. мат. и мех., **X**, № 5, 6 (1946).

Распространение упруго-пластических волн в стержнях переменного сечения, Прикл. мат. и мех., **XVI**, № 3 (1952).

Шерман Д. И., Колебание упругого полупространства при заданных смещениях или внешних силах на границе, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 118 (1946).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Взрыв** 169
Внутреннее трение 8, 97
Волновое уравнение 20, 22, 179
— — для сферических волн 77
Волны в анизотропной среде 44
— — жидкой среде, скорость распространения 7
— — коническом стержне 75
— — изгибные в цилиндрическом стержне 69
— — искажения, или эквиволюмиальные 7, 13, 21
— — крутильные в цилиндрическом стержне 67
— — Лява 30
— — напряжения в вязко-упругом теле 111
— — — цилиндрическом стержне 47
— — пластические 8, 150, 151, 154, 160, 161
— — плоские 23
— — в анизотропной среде 45
— — поверхностные Релея 13, 23
— — продольные в бесконечной пластинке 79
— — — стержнях некругового поперечного сечения 74
— — — цилиндрическом стержне 60
— — разгрузки 156
— — расширения или безвихревые 7, 13, 21
— — в цилиндрических стержнях, групповая скорость 63
— — — — фазовая скорость 63
— — ударные 8, 150, 163
Вязкое скольжение 121
Вязкость внутреннего 117
— — объемная 106
Вязко-упругие тела 103, 105
Гистерезис 8
Групповая скорость волн расширения в цилиндрических стержнях 63
— — изгибных волн в цилиндрических стержнях 72
Деформация 15, 178
— — чистая 16
Дислокации в кристаллах 122
Дифференциальный метод определения скорости распространения волн 137
Закон Брюстера 137
— — Гука 16
Запаздывающая упругость 117
Импеданс характеристический 41, 49
Импульсный метод для измерения упругих постоянных 135
Колебания стержней изгибные 47, 53
— — крутильные 47, 52, 67
— — продольные 47, 60
Компоненты деформации 15, 16
— — напряжения 13, 14, 16
Коэффициент нормальной вязкости 106
Кривая напряжения — деформация 139, 157
Криволинейные координаты 180
Логарифмический декремент 107, 124
Маятники Ле Роланда 125
Мерный стержень Гопкинсона 85
— — для кручения 91
Метод вращающегося стержня для измерения внутреннего трения 131
— — резонансный 123, 128
— — свободных колебаний 123
Методы измерений внутреннего трения 102
— — распространения волн 123, 132
Механическая релаксация 8
Модуль объемного сжатия k 17, 18, 178, 182
— — продольной упругости E 17, 178, 182
— — сдвига μ 17, 178, 182
Напряжение 13, 14, 178
Напряжения в бесконечной пластинке 79
— — в коническом стержне 76
Объемное расширение 17, 178
Оптико-упругая постоянная 137
Опыты Гопкинсона 167
Откол 169, 170

- Отражение волны искажения от свободной границы 35
 — — расширения от свободной границы 31
 — импульса сжатия от свободной границы 86
 — и преломление волн искажения, падающих на плоскость раздела 41
 — — — — расширения, падающих на плоскость раздела 40
 — — — — на границе двух сред 37
 — упругих волн от свободной поверхности 83
- Поверхностные волны Релея 83
 Полное отражение 43
 Постоянные Ляме 17, 83, 178
 Предел пропорциональности 150
 Прибор Гопкинсона 85
 Принцип суперпозиции 108
 Продольные волны в цилиндрическом стержне 60
 — колебания стержней 47, 60
 — — цилиндрического стержня, уравнение частот 61
 Пуассоново отношение 17, 18, 178, 182
- Разрушение вязкое 177
 — хрупкое 177
 Разрушения конических образцов 175
 — производимые взрывами 169
 Резонансный метод измерения упругих постоянных 123, 128
 Релаксационный спектр 110
 Релаксация механическая 8
- Скин-эффект 28
 Скорость распространения волн в жидкой среде 7
- Скорость распространения волн в изотропных твердых телах 7, 182
 — — изгибных волн 84
 — — крутильных волн 84
 — — продольных волн 84
 Специфическая демпфирующая способность 97
 Специфическое рассеяние 97
 Стержень Гопкинсона 85
 — Девиса 88, 89, 142
- Тело Максвелла 104, 106, 107
 — Фохта 105
- Ударные волны в твердых телах 8, 150, 163
 Ультразвуковые измерения 92
 Упругие постоянные 17, 178, 182
 Упругий импульс в цилиндрическом стержне 73
 Уравнение частот продольных колебаний цилиндрического стержня 61
 Уравнения движения изотропного упругого тела 83
 — — упругой среды 18
 — Похгаммера для цилиндрических стержней 58
 — Ранкина — Гюгоньо 165
 — ударных волн 165
- Фазовая скорость волны расширения в цилиндрических стержнях 63
 — — изгибных волн в цилиндрических стержнях 71
- Фотоупругость 138
 Функция памяти 109, 116
- Характеристический импеданс 41, 49
 Характерная длина импульса 77
 «Хронометр» 85
- Энергетический колодец 118

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика	3
Предисловие автора	5
Глава I. Введение	7

Часть I

Упругие волны

Глава II. Распространение в неограниченной упругой среде	13
§ 1. Компоненты напряжения и деформации	13
§ 2. Обобщенная форма закона Гука	16
§ 3. Уравнения движения упругой среды	18
§ 4. Интегрирование волнового уравнения	22
§ 5. Волны Релея	23
§ 6. Отражение упругих волн от свободной границы	30
§ 7. Отражение и преломление на границе двух сред	37
§ 8. Полное отражение	43
§ 9. Распространение в анизотропной среде	44
Глава III. Распространение в ограниченной упругой среде	47
§ 1. Продольные колебания стержней	47
§ 2. Крутильные колебания стержней	52
§ 3. Изгибные колебания стержней	53
§ 4. Уравнения Похгаммера для цилиндрических стержней	58
а) Продольные волны	60
б) Крутильные волны	67
в) Изгибные волны	69
§ 5. Распространение упругого импульса вдоль цилиндрического стержня	73
§ 6. Распространение вдоль стержней некругового поперечного сечения	74
§ 7. Распространение вдоль конического стержня	75
§ 8. Распространение продольных волн в бесконечной пластинке	79
§ 9. Сводка результатов теории упругих волн, изложенной в главах II и III	83
Глава IV. Экспериментальные исследования упругих материалов.	85
§ 1. Мерный стержень Гопкинсона	85
§ 2. Мерный стержень Девиса	88
§ 3. Мерный стержень для кручения	91
§ 4. Ультразвуковые измерения	92

Часть II

Волны напряжения в несовершенно упругой среде

Глава V. Внутреннее трение	97
§ 1. Определения	97
§ 2. Методы измерений	102

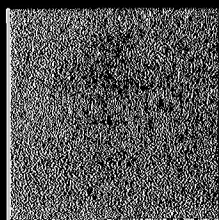
§ 3.	Поведение „вязко-упругих“ тел	103
§ 4.	Принцип суперпозиции	108
§ 5.	Распространение волны напряжения в „вязко-упругом“ теле	111
§ 6.	Механизм внутреннего трения	116
Глава VI. Экспериментальное исследование динамических упругих свойств		123
§ 1.	Свободные колебания	123
§ 2.	Резонансный метод	128
§ 3.	Методы распространения волн	132
§ 4.	Построение динамической кривой напряжение — деформация	139
§ 5.	Обсуждение экспериментальных результатов	145
Глава VII. Пластические волны и ударные волны		150
§ 1.	Пластические волны в лагранжевых координатах	151
§ 2.	Пластические волны в эйлеровых координатах	154
§ 3.	Волны разгрузки	156
§ 4.	Пластические волны в образцах конечной длины	160
§ 5.	Эксперименты по пластическим волнам	161
§ 6.	Ударные волны в твердых телах	163
Глава VIII. Разрушения, производимые волнами напряжения		167
§ 1.	Опыты Дж. Гопкинсона	167
§ 2.	Разрушения, производимые взрывами	169
§ 3.	Опыты с образцами различной формы	172
§ 4.	Разрушения конических образцов	175
§ 5.	Типы поверхностей разрушения, вызванных импульсами напряжения	176
§ 6.	Хрупкое и вязкое разрушение	177
Приложения		
§ 1.	Замечания о напряжениях, деформациях и упругих постоянных	178
§ 2.	Векторная форма волновых уравнений	179
§ 3.	Криволинейные ортогональные координаты	180
Таблица числовых значений		182
Литература		183
Предметный указатель		189

Г. Кольский
ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

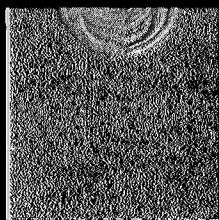
Редактор *И. В. КЕППЕН*, Технический редактор *Е. С. Герасимова*
Переплет художника *А. И. Завьяловой*, Корректор *Н. Г. Яновз*

Сдано в производство 25/1 1955 г. Подписано к печати 5/IV 1955 г. Т-02924.
Бумага 60×92¹/₁₆=6,2 бум. л.—12,4 печ. л. в т/ч. 2 вкл. Уч.-издат. л. 11,5. Изд. № 1/2533.
Цена 9 р. 80 к. Зак. 103.

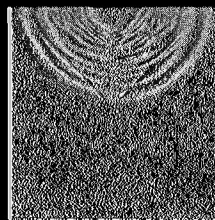
Издательство иностранной литературы
Москва, Ново-Алексеевская, 52



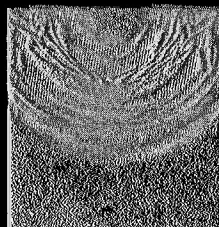
1. 0 мксек.



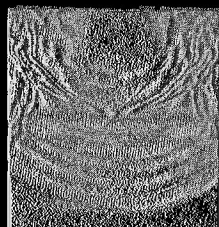
2. 10,5 мксек.



3. 21,7 мксек.



4. 34,3 мксек.



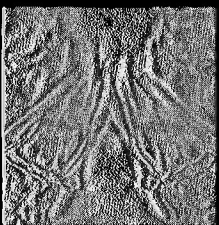
5. 47,3 мксек.



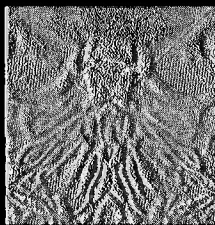
6. 60,3 мксек.



7. 72,7 мксек.



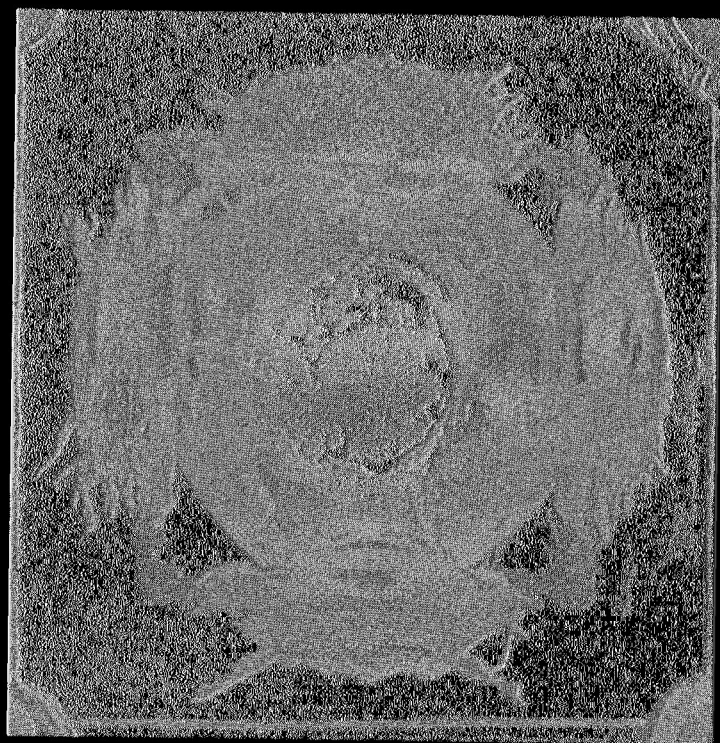
8. 84,7 мксек.



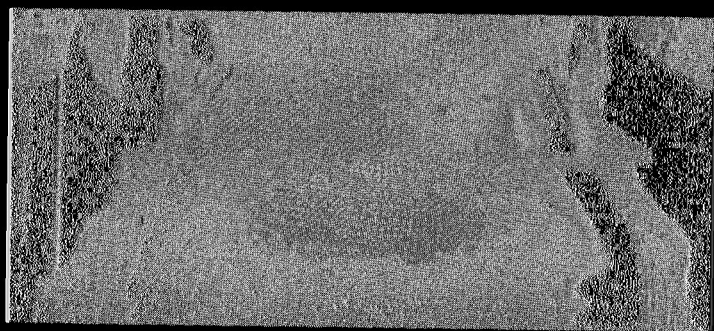
9. 93,5 мксек.

Фотография 1. Волны напряжений в пластике из перелюкса
размерами $140 \times 140 \times 6$ мм, вызванные взрывом заряда из азида свинца
весом 0,12 г в центре верхней грани.

Указаны моменты времени, считая с момента детонации заряда.



a



b

Фотография II. Разрушения в квадратном образце из пер-
спекса, произведенные зарядом азота свинца весом 0,3 г.
a - вид сверху, *b* - вид сбоку. (Увеличение в 3 раза.)