METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS

1. FUNCTIONAL ANALYSIS

MICHAEL REED

Department of Mathematics
Duke University

BARRY SIMON

Departments of
Mathematics
and Physics
Princeton University

ACADEMIC PRESS NEW YORK LONDON

1972

М. Рид, Б. Саймон

МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1

Функциональный анализ

Перевод с английского
А. К. ПОГРЕБКОВА и В. Н. СУШКО

Под редакцией
М. К. ПОЛИВАНОВА

С предисловием
Н. Н. БОГОЛЮБОВА

Издательство „Мир"
Москва 1977

ОГЛАВЛЕНИЕ

УДК 517.43:519.55

Первый том руководства, написанного видными американскими учеными на основе курса, прочитанного ими в Принстонском университете. Ярко и наглядно представлены основные сведения из современного функционального анализа, необходимые физикам. Описываются начальные понятия, гильбертовы, банаховы, топологические и локально выпуклые пространства, а также основы теории операторов. Следующие тома авторы предполагают посвятить анализу операторов и операторным алгебрам.

В книге много примеров, поясняющих существо рассматриваемых понятий и связи их с физикой, и большое число упражнений. Замечания в конце каждой главы указывают развитие идей как в математическом, так и в физическом направлении.

Своеобразный подход авторов к материалу делает книгу интересной для всех, кто занимается функциональным анализом и его применениями.

Редакция литературы по математическим наукам

Р $\dfrac{20204\text{-}008}{041\,(01)\text{-}77}$ 8-77

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Предлагаемая читателю книга Рида и Саймона посвящена разделу математики, который называется функциональным анализом, однако она имеет еще одно заглавие «Методы современной математической физики». И фактически эта дисциплина сейчас постепенно оформляется в интенсивном взаимодействии теоретической физики и математики.

Некоторое время назад квантовая физика поставила ряд совершенно новых задач, для решения которых пришлось обратиться к новым математическим средствам. Одна из первых книг в этой новой области была написана фон Нейманом как попытка дать математическое основание квантовой механике. В дальнейшем и теоретическая квантовая физика, и соответствующие математические средства развивались, обогащались и усложнялись. При этом каждая область развивалась в согласии со своими традициями: физики стремились решать свои задачи, опираясь на интуицию и аналогии, математики хотели добиться логической завершенности всех открывающихся возможностей.

Но каждая из наук сталкивалась со своими трудностями.

В физике оказывалось, что новые задачи не поддаются упрощенным решениям, а математики в абстрактных построениях отставали от насущных проблем физики. Поэтому время от времени возникала необходимость во встрече и взаимной корректировке. Так, например, при построении квантовой электродинамики вознкила необходимость в обращении к понятию обобщенной функции и к постановке чисто математической задачи о перемножении обобщенных функций, в теории дисперсионных соотношений пришлось обратиться к функциям многих комплексных переменных и т. д.

Такие «контакты» всякий раз оказывались плодотворными как для теоретической физики, так и для математики. Физиков они вооружали новыми методами решения их задач, а математикам подсказывали актуальные направления развития теории.

Именно в результате этих плодотворных взаимных усилий сейчас строится новое здание современной математической физики, которая вызвана к жизни задачами квантовой физики, подобно тому как классическая математическая физика была рождена задачами электродинамики, теории теплопередачи, теории колебаний и др.

Формирование этой новой дисциплины и отражает весьма удачный курс Рида и Саймона, который выгодно отличается от многих других руководств. Курс включает в себя материал, который можно найти по частям в разных математических монографиях, однако здесь этот материал объединен именно тем, как он применяется для решения физических задач. Авторы книги (один—условно математик, другой —условно физик) сами активно участвуют в решении актуальных проблем теоретической физики, что позволяет им правильно выбрать наиболее интересные и важные задачи. Очень удачен уровень изложения. Оно достаточно строго, хотя доказательства часто не приводятся, особенно если они сами по себе не поучительны, но при этом книга нигде не опускается до уровня справочника. В качестве иллюстраций абстрактных математических понятий и методов широко используются различные физические конструкции (например, пространство Фока, уравнения бутстрапа, уравнения статистической физики и т. д.). В целом книга представляет собой хорошо продуманный курс основ современной математической физики. Можно надеяться, что она будет способствовать повышению уровня математической культуры физиков и ознакомлению математиков с задачами, нуждами и путями развития физики.

Н. Н. Боголюбов

Р. С. Филлипсу и А. С. Вайтману —
учителям, коллегам, друзьям

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — первый из трех[1]) томов курса, посвященного методам функционального анализа в современной математической физике. Здесь излагаются основы функционального анализа, и этот том можно рассматривать как самостоятельную книгу, хотя в нем и есть отдельные ссылки к следующим томам. Мы включили сюда лишь небольшое число приложений, чтобы облегчить читателю понимание мотивировок некоторых математических рассуждений. Второй и третий тома посвящены более специальным областям функционального анализа и содержат многочисленные приложения к задачам современной физики. Важнейшие приложения функционального анализа к классической физике и к теории дифференциальных уравнений в частных производных входят во все три тома. О тематике следующих томов можно составить представление по оглавлению этих томов, которое мы здесь помещаем.

Мы глубоко благодарны

студентам (особенно Д. Гукенхеймеру), которые прослушали наш курс в 1970/71 г. и высказали плодотворные замечания как по поводу лекций, так и по поводу их записей;

Л. Гроссу, Т. Като и особенно Д. Рюеллю, которые прочитали некоторые части рукописи и сделали множество полезных замечаний и исправлений;

Ф. Армстронг, Э. Эпштейн и X. Верц за перепечатку записей лекций;

М. Голдбергеру, Э. Нельсону, М. Саймон, И. Стейну и А. Вайтману за помощь и поддержку.

Майк Рид
Барри Саймон

---

[1]) Как видно из уже вышедшего в английском издании второго тома, авторы не уложились в запланированную схему (см. оглавление следующих томов, которое мы приводим по второму тому). — *Прим. ред.*

ВВЕДЕНИЕ

Корни математики лежат в теории чисел, геометрии и физике. Со времен Ньютона поиски математических моделей физических явлений служили источником математических задач. Фактически целые области математики выросли из попыток разобраться в конкретных физических ситуациях. Например, весь гармонический анализ развился из работы Фурье об уравнении теплопроводности.

И хотя в этом столетии математика и физика развивались порознь, физика продолжала стимулировать математические исследования. Отчасти по этой причине влияние физики на математику всем хорошо понятно. Однако значение математики для физики далеко не все правильно оценивают. Существует широко распространенное заблуждение, что математика полезна для физики лишь постольку, поскольку она дает средства для вычислений. На деле математика играет гораздо более тонкую роль, которая в конечном счете куда важнее. Когда создается удачная математическая модель физического явления, т. е. модель, которая позволяет делать точные вычисления и предсказания, то сама математическая структура модели открывает новые стороны этого явления. Иными словами, когда модель удачна, то естественно думать о физических величинах на языке математических объектов, их представляющих, и интерпретировать сходные или вторичные явления на языке той же модели. В результате исследование внутренней математической структуры модели может изменить и расширить наше представление о физическом явлении. Великолепным примером служит механика Ньютона, которая дала столь ясную и совершенную картину движения небесных тел, что ею стали пользоваться для объяснения практически всех физических явлений. Сама эта модель заняла центральное место в понимании всего физического мира, и отказаться от нее в конце девятнадцатого века было необычайно трудно даже перед лицом очевидных противоречий. Более современный пример подобного влияния математики на физику дает применение теории групп к классификации элементарных частиц.

Исследование математических моделей физических явлений составляет часть предмета математической физики. Под исследованием здесь понимается и строгий вывод конечных формул, и анализ внутренней математической структуры моделей. В обоих случаях возникают задачи, которые приводят к более общим математическим вопросам, уже не связанным непосредственно с какой-либо частной моделью. И хотя эти общие вопросы оказываются иногда чисто математическими, их принято относить к математической физике, поскольку они возникли из физических задач.

Традиционная математическая физика имела дело с математическими задачами классической физики: механики, гидродинамики, акустики, теории потенциала и оптики. Главным математическим средством была теория дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, а также родственные области, такие, как теория интегральных уравнений и вариационное исчисление. Эта классическая математическая физика давно уже входит в учебную программу математических и физических факультетов. Но начиная с 1926 г. фронт исследований все больше смещается в сторону квантовой механики и областей, начало которым положила квантовая теория: атомной физики, ядерной физики, теории твердого тела, физики элементарных частиц. Основной математической дисциплиной при изучении этих областей оказывается функциональный анализ, хотя важную роль играют также теория представлений групп и функции многих комплексных переменных. Сразу после 1926 г. фон Нейман приступил к анализу общей структуры квантовой механики, но тогда почти не делалось попыток исследовать характер отдельных квантовых систем (исключение составляют лишь некоторые работы Фридрихса и Реллиха). Положение изменилось в начале 50-х годов, когда Като доказал самосопряженность атомных гамильтонианов, а Гординг и Вайтман сформулировали аксиомы квантовой теории поля. В этих работах продемонстрирована плодотворность методов функционального анализа и поднято множество трудных математических вопросов, к которым приводит современная физика. С тех пор необычайно расширился как арсенал средств функционального анализа, так и круг объектов, рассматриваемых в математической физике. Диапазон задач простирается здесь от самых конкретных — например, вычисление или оценка точечного спектра некоего частного оператора — и до самых общих, таких, как теория представлений C^*-алгебр. Методы и общий подход к предмету стали более абстрактными. И хотя есть такие области, где физика настолько понятна, что задачи сводятся к чисто математическим упражнениям, но есть и такие, где ни физическая, ни математическая модель не очень понятны. Такая эволюция имела много серьезных последствий, из которых отнюдь не последнее — затрудненность общения между математиками и физиками. Физики встревожены растущими требованиями к широте математического образования и математической искушенности, которые нужны теперь для понимания моделей. А математики страдают от своей неспособности понять физику и от того, что физики не способны формулировать свои задачи так, чтобы они стали понятны математикам.

Несколько замечаний о самой книге. Предварительные знания, которые требуются для ее чтения, отвечают тому среднему уровню, который достигается после примерно первых трех лет обучения в американском университете. Первая глава была задумана как обзор этого предварительного материала. Мы рассчитывали также, что читатель отчасти знаком с материалом глав II—IV, и опускали некоторые доказательства, если считали их несущественными и не представляющими самостоятельного интереса.

Содержание этого тома укладывается в двухсеместровый курс. Правда, мы прочитали большую часть этого материала в специальном односеместровом курсе в Принстонском университете, встречаясь со своими слушателями по пять раз в неделю, но никому не советуем повторять этот опыт. Чтобы содержание книги было легче приспособить к лекциям, мы располагали материал внутри глав так, что первые разделы содержат основные понятия, а последующие—более специальные и трудные вопросы и приложения. Например, основной материал о неограниченных операторах можно прочитать студентам в девяти или десяти лекциях на материале § 1—4 гл. VIII. С другой стороны, если восполнить детали доказательств и добавить материал из замечаний и задачи, то из главы VIII можно сделать отдельный односеместровый курс.

Каждая глава в этой книге заканчивается длинным списком задач. Некоторые задачи должны заполнить пробелы основного текста (они отмечены крестом †). В других намечены иные доказательства или вводится новый материал. Мы включили и трудные задачи (отмеченные звездочкой *), чтобы зажечь читателя. Очень советуем всем решать задачи. Ни для кого не секрет, что математику учат решая задачи, а не наблюдая, как их решают другие.

Мы надеемся, что наш курс откроет физикам доступ к современным абстрактным методам, и что математики тоже выиграют, если будут изучать эти методы одновременно с их приложениями.

СОДЕРЖАНИЕ СЛЕДУЮЩИХ ТОМОВ

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Начинающий ... не должен смущаться, если ... он обнаружит, что у него не хватает предварительных знаний даже для чтения предварительных сведений.

П. ХАЛМОШ

1.1. Множества и функции

Мы предполагаем, что читатель знаком с множествами и функциями, но думаем не будет лишним сразу же установить определенную терминологию и ввести обозначения, которыми мы будем пользоваться далее на протяжении всей книги.

Пусть X — некоторое множество; запись $x \in X$ означает, что x есть элемент множества X, а запись $x \notin X$ — что x не лежит во множестве X. Вместо высказывания «для всех x из X» мы пишем $(\forall x \in X)$, а вместо выражения «существует такое $x \in X$, что» — $(\exists x \in X)$. Символом $\{x \mid P(x)\}$ обозначается множество всех $x \in X$, удовлетворяющих условию (или условиям) $P(x)$. Если A — подмножество множества X (обозначается $A \subset X$), то $X \setminus A$ представляет собой дополнение подмножества A до множества X, т. е. $X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$. Вообще если A и B — подмножества одного и того же множества X, то $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A, x \notin B\}$. В случаях, когда мы рассматриваем множества, снабженные топологиями, под $\bar{A}$ всегда подразумевается замыкание множества A. Наконец, множество упорядоченных пар $\{\langle x, y\rangle \mid x \in X, y \in Y\}$ называется **декартовым произведением** множеств X и Y и обозначается $X \times Y$.

Словами «функция» и «отображение» мы пользуемся как синонимами. Для того чтобы подчеркнуть, что некоторая функция f зависит от двух переменных, мы будем иногда писать $f(\cdot, \cdot)$. Тогда символ $f(\cdot, y)$ обозначает функцию одной переменной, получаемую из $f(\cdot, \cdot)$ при фиксированном значении y второй переменной. Линейная функция иначе будет называться **оператором**, или **линейным преобразованием**. Все рассматриваемые нами функции всегда будут однозначными: функция из множества X в другое множество Y, обозначаемая любым из способов $f: X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$ или $x \mapsto f(x)$, на каждом элементе $x \in X$ принимает одно и только одно значение из множества Y. Если $A \subset X$, то $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$ есть подмножество в Y, а если $B \subset Y$, то $f^{-1}[B] = \{x \mid f(x) \in B\}$ — подмножество в X. Множество $f[X]$ мы будем называть **областью значений** функции f и обозначать символом

$\operatorname{Ran} f$. Множество X называется **областью определения** функции f. Функцию f назовем **инъективной** (или взаимно однозначной), если для каждого элемента $y \in \operatorname{Ran} f$ существует не более одного элемента $x \in X$, такого, что $f(x) = y$; **сюръективной** (или отображением на), если $\operatorname{Ran} f = Y$; **биективной** (или просто биекцией), если она одновременно и инъективна и сюръективна. Сужение функции f на подмножество A ее области определения будем обозначать через $f \restriction A$.

Если $X \supset A$, то **характеристическую функцию** $\chi_A(x)$ мы определим формулой

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

В дальнейшем нам понадобятся два теоретико-множественных понятия, несколько более содержательных, чем простые обозначения. Обсудим их чуть подробнее. Назовем **отношением** R на множестве X любое подмножество R декартова произведения $X \times X$; если $\langle x, y\rangle \in R$, то будем говорить, что элемент x находится в отношении R (или в R-отношении) к элементу y, и писать xRy.

Определение. Отношение R называется **отношением эквивалентности**, если оно удовлетворяет следующим требованиям:

(i) $(\forall x \in X)\, xRx$ (рефлексивность);
(ii) $(\forall x, y \in X)$ из xRy следует yRx (симметричность);
(iii) $(\forall x, y, z \in X)$ из xRy, yRz следует xRz (транзитивность).

Множество элементов из X, находящихся в R-отношении к заданному элементу $x \in X$, называется **классом эквивалентности** элемента x и обозначается $[x]$.

Легко доказать, что справедлива

Теорема I.1. Пусть R — отношение эквивалентности на X. Тогда каждый элемент $x \in X$ принадлежит единственному классу эквивалентности.

Таким образом, отношение эквивалентности естественным способом разбивает множество на непересекающиеся подмножества:

Пример 1 (целые числа по модулю 3). Пусть Z — множество целых чисел. Будем писать xRy, если разность $x - y$ кратна трем. Это отношение эквивалентности разбивает Z на три класса эквивалентности:

$$\begin{aligned} [0] &= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}, \\ [1] &= \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}, \\ [2] &= \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}. \end{aligned}$$

Пример 2 (вещественная проективная прямая). Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая и X — множество ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Для $x, y \in X$ будем писать xRy, если существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $x = \alpha y$. Классы эквивалентности представляют собой проходящие через начало прямые (из которых выколота точка $\langle 0, 0 \rangle$).

Обратимся теперь к обсуждению леммы Цорна.

Определение. Отношение R на множестве X, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности (последнее означает, что xRy и yRx влекут за собой равенство $x = y$), называется **отношением частичного упорядочения** (или просто частичным упорядочением). Если R — частичное упорядочение, то иногда вместо xRy мы будем писать $x < y$.

Пример 3. Пусть X — набор всех подмножеств фиксированного множества Y. Будем писать $A < B$, коль скоро $A \subset B$. Так определенное отношение $<$ задает частичное упорядочение.

Слово «частичный» в данном выше определении употреблено по той причине, что два элемента множества X не обязаны находиться ни в отношении $x < y$, ни в отношении $y < x$. Если же для всех x и y из X или $x < y$, или $y < x$, то множество X называется **линейно упорядоченным**. Например, вещественная прямая $\mathbb{R}$ линейно упорядочена обычным отношением $\leqslant$.

Предположим теперь, что множество X частично упорядочено отношением $<$ и $Y \subset X$. Элемент $p \in X$ называется **верхней гранью** множества Y, если $y < p$ для всех $y \in Y$. Если условия $m \in X$, $m < x$ ведут к тому, что $x = m$, то m называется **максимальным элементом** множества X.

Лемму Цорна, в зависимости от точки зрения, можно либо рассматривать как основополагающее предположение теории множеств, либо выводить из других основных постулатов (она, в частности, эквивалентна *аксиоме* выбора). Мы придерживаемся первой точки зрения как на лемму Цорна, так и на остальные факты теории множеств.

Теорема I.2 (лемма Цорна). Пусть X — непустое частично упорядоченное множество, такое, что каждое его линейно упорядоченное подмножество имеет в X верхнюю грань. Тогда каждое линейно упорядоченное множество в X обладает некоторой верхней гранью, которая является в то же время максимальным элементом в X.

Отметим, наконец, что мы будем пользоваться символом Халмоша ▮ для обозначения конца доказательства.

I.2. Метрические и нормированные линейные пространства

На протяжении всей этой книги мы будем иметь дело с разнообразными множествами функций, операторов или других объектов и часто будем сталкиваться с необходимостью как-то измерять расстояние между элементами рассматриваемого множества. По этой причине разумно ввести обобщение понятия расстояния, обладающее наиболее важными свойствами обычного расстояния в $\mathbb{R}^3$.

Определение. **Метрическое пространство** — это множество M вместе с вещественнозначной функцией $d(\cdot, \cdot)$, определенной на $M \times M$ и удовлетворяющей следующим требованиям:

(i) $d(x, y) \geqslant 0$;
(ii) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iv) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ [неравенство треугольника].

Функция d называется **метрикой** на M.

Элементы метрического пространства мы часто будем называть точками. Подчеркнем, что метрическое пространство представляет собой пару, состоящую из множества M и метрики d; в общем случае данное множество X можно превратить в различные метрические пространства, задавая на $X \times X$ различные метрики. В случаях, когда из контекста не ясно, о какой именно метрике идет речь, мы будем указывать ее явно, обозначая метрическое пространство символом $\langle M, d \rangle$.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$. Евклидово расстояние между точками $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ и $y = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ задается функцией

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Пример 2. Пусть M — единичная окружность в $\mathbb{R}^2$, т. е. множество всех пар вещественных чисел $\langle \alpha, \beta \rangle$, таких, что $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Одна из возможных метрик на окружности такова:

$$d_1(\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha', \beta' \rangle) = \sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}.$$

Другая возможная метрика получится, если положить $d_2(p, p')$ равным длине меньшей дуги, соединяющей точки p и p' (рис. I.1).

Пример 3. Пусть $M = C[0, 1]$ — множество непрерывных вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Любая из двух метрик

$$d_1(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \qquad d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx,$$

превращает M в метрическое пространство.

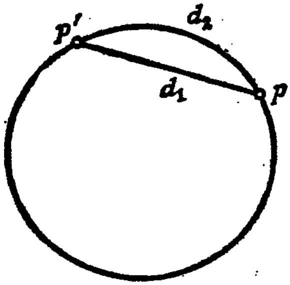

Рис. I.1. Метрики d_1 и d_2.

Теперь, когда мы располагаем понятием расстояния, можно говорить о сходимости.

Определение. Говорят, что последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства $\langle M, d\rangle$ **сходится** к элементу $x \in M$, если $d(x, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Мы часто будем записывать это в виде $x_n \xrightarrow{d} x$ или $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Если x_n не сходится к x, мы будем писать $x_n \overset{d}{\not\to} x$.

В примере 2 мы имеем $d_1(p, p') \leqslant d_2(p, p') \leqslant \pi d_1(p, p')$, или кратко $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \pi d_1$. Это приводит к тому, что $p_n \xrightarrow{d_1} p$ тогда и только тогда, когда $p_n \xrightarrow{d_2} p$. Однако в примере 3 разные метрики порождают разные понятия сходимости, и, поскольку $d_2 \leqslant d_1$, сходимость по метрике d_1 влечет за собой сходимость по метрике d_2, но обратное не верно. Примером служит последовательность функций g_n, изображенных на рис. I.2, которая сходится к нулю по метрике d_2, но не сходится по метрике d_1. В этом легко убедиться при помощи важного понятия последовательности Коши.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства $\langle M, d\rangle$ называется **последовательностью Коши**, если $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)$ из $n, m \geqslant N$ следует $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Предложение. Любая сходящаяся последовательность есть последовательность Коши.

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ и $\varepsilon > 0$. Найдем такое N, что $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ при $n \geqslant N$. Тогда при $n, m \geqslant N$ получим $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_m) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$. ∎

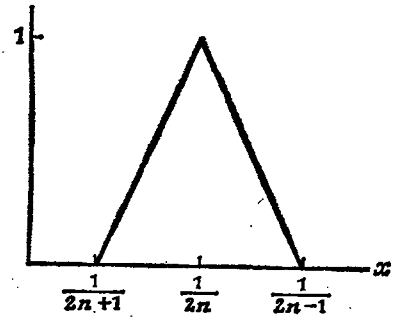

Рис. I.2. График $g_n(x)$.

Вернемся теперь к функциям, изображенным на рис. I.2. Легко видеть, что при $n \neq m$ расстояние $d_1(g_n, g_m) = 1$, так что g_n не есть последовательность Коши в $\langle C[0, 1], d_1\rangle$ и, следовательно, не может сходиться по метрике d_1. Итак, последовательность $\{g_n\}$ сходится в пространстве $\langle C[0, 1], d_2\rangle$, но не сходится в $\langle C[0, 1], d_1\rangle$.

Хотя, как мы видели, каждая сходящаяся последовательность есть последовательность Коши, следующий пример показывает, что обратное не верно. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел с обычной метрикой (т. е. $d(x, y) = |x - y|$), и пусть x^* — любое иррациональное число (т. е. $x^* \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Найдем последовательность рациональных чисел x_n, сходящуюся в $\mathbb{R}$ к x^*. Тогда x_n — последовательность Коши в $\mathbb{Q}$, но она не может сходиться в $\mathbb{Q}$ ни к какому рациональному числу y (ибо если бы $x_n \to y$ в $\mathbb{Q}$, то $x_n \to y$ в $\mathbb{R}$, и мы имели бы $y = x^*$).

Определение. Метрическое пространство, в котором любая последовательность Коши сходится, называется **полным**.

Например, $\mathbb{R}$ — полное метрическое пространство, а $\mathbb{Q}$ — нет. Можно доказать (см. § I.3 и I.5), что пространство $\langle C[0, 1], d_1\rangle$ — полное, а пространство $\langle C[0, 1], d_2\rangle$ — нет.

Пример с пространствами $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ подсказывает, что нужно сделать, чтобы неполное метрическое пространство X превратить в полное. Нужно просто расширить пространство X, добавив к нему «все возможные пределы последовательностей Коши». Исходное пространство X в таком случае будет плотным в объемлющем пространстве $\tilde{X}$ в смысле следующего определения.

Определение. Множество B называется **плотным** в метрическом пространстве M, если любой элемент $m \in M$ является пределом последовательности элементов из B.

Конечно, если заранее не известно большее полное пространство, содержащее исходное неполное пространство (в отличие от случая $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$), то неясно и каковы «все возможные пределы последовательностей Коши». Тот факт, что «пополнение» все же возможно, составляет содержание теоремы, которую мы вскоре сформулируем, но сначала дадим несколько определений.

Определение. Функция f из метрического пространства $\langle X, d\rangle$ в метрическое пространство $\langle Y, \rho\rangle$ называется **непрерывной в точке** x, если $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$, когда $x_n \xrightarrow{d} x$.

Мы уже встречались с примером последовательности элементов f_n в пространстве $C[0, 1]$, такой, что $f_n \xrightarrow{d_2} 0$, но $f_n \overset{d_1}{\not\to} 0$. Это, в частности, означает, что тождественное отображение пространства $\langle C[0, 1], d_2\rangle$ в пространство $\langle C[0, 1], d_1\rangle$ *не* непрерывно, но тождественное отображение из $\langle C[0, 1], d_1\rangle$ в $\langle C[0, 1], d_2\rangle$ непрерывно.

Определение. Биекция h из $\langle X, d\rangle$ в $\langle Y, \rho\rangle$, сохраняющая метрику, т. е. такая, что

$$\rho(h(x), h(y)) = d(x, y),$$

называется **изометрией**. Она автоматически непрерывна. Если такая изометрия существует, то говорят, что пространства $\langle X, d\rangle$ и $\langle Y, \rho\rangle$ **изометричны**.

Изометричные пространства неразличимы по своим метрическим свойствам; любая теорема, касающаяся только метрической структуры пространства $\langle X, d\rangle$, будет выполняться и во всех изометричных ему пространствах.

Теперь мы точно сформулируем, в каком смысле неполное пространство может быть расширено до полного.

Теорема I.3. Если $\langle M, d\rangle$ — неполное метрическое пространство, то существует полное метрическое пространство $\tilde{M}$, такое, что M изометрично плотному подмножеству в $\tilde{M}$.

Набросок доказательства. Рассмотрим последовательности Коши $\{x_n\}$ элементов из M. Назовем две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_m\}$ эквивалентными, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Пусть $\tilde{M}$ — семейство классов эквивалентных последовательностей Коши. Можно показать, что для любых двух последовательностей Коши $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ существует и зависит только от классов эквивалентности этих последовательностей. Этот предел определяет метрику на $\tilde{M}$, в которой $\tilde{M}$ оказывается полным метрическим пространством. Наконец, отобразим M в $\tilde{M}$, сопоставляя каждому элементу x постоянную последовательность $\{x_n = x\}$. Легко убедиться в том, что такое отображение h плотно вкладывает M в $\tilde{M}$ и является изометрией. ∎

Завершая наше обсуждение метрических пространств, мы хотим ввести еще два понятия—определить открытые и замкнутые множества. В качестве образца читателю следует при этом иметь в виду открытые и замкнутые множества на вещественной прямой.

Определение. Пусть $\langle X, d\rangle$—метрическое пространство.

(a) Множество $\{x \mid x \in X, d(x, y) < r\}$ называется **открытым шаром** $B(y; r)$ радиуса r с центром в точке y.

(b) Множество $O \subset X$ называется **открытым**, если $(\forall y \in O)$ $(\exists r > 0)\, B(y; r) \subset O$.

(c) Множество $N \subset X$ называется **окрестностью** точки $y \in N$, если $B(y; r) \subset N$ при некотором $r > 0$.

(d) Пусть $E \subset X$. Точка x называется **предельной точкой** множества E, если $(\forall r > 0)\, B(x; r) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \varnothing$. Иначе говоря, x—предельная точка множества E, если E содержит точки, *отличные от* x, но сколь угодно близкие к x.

(e) Множество $F \subset X$ называется **замкнутым**, если F содержит все свои предельные точки.

(f) Пусть $G \subset X$; точка $x \in G$ называется **внутренней точкой** множества G, если G—окрестность точки x.

Для себя читатель может самостоятельно доказать следующий набор элементарных утверждений:

Теорема I.4. Пусть $\langle X, d\rangle$—метрическое пространство.

(a) Множество O открыто тогда и только тогда, когда множество $X \setminus O$ замкнуто.

(b) $x_m \xrightarrow{d} x$ тогда и только тогда, когда для каждой окрестности N точки x существует натуральное число M, такое, что $x_m \in N$ для всех $m \geqslant M$.

(c) Множество внутренних точек любого множества открыто.

(d) Объединение множества с семейством всех его предельных точек замкнуто.

(e) Множество O открыто тогда и только тогда, когда оно является окрестностью каждой своей точки.

Одно из главных применений открытых множеств—проверка с их помощью сходимости на основе свойства (b) в теореме I.4, в частности проверка непрерывности функции с помощью следующего критерия, доказательство которого мы оставляем читателю в качестве упражнения:

Теорема I.5. Функция $f(\cdot)$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывна тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества $O\subset Y$ множество $f^{-1}[O]$ открыто в X.

Наконец, мы хотим предостеречь читателя, что в неполном метрическом пространстве замкнутые множества часто на первый взгляд могут показаться незамкнутыми. Например, множество $[1/2, 1)$ в пространстве $(0, 1)$ с обычной метрикой замкнуто.

Мы завершим этот раздел обсуждением двух центральных понятий функционального анализа: нормированных линейных пространств и ограниченных линейных преобразований.

Определение. **Нормированное линейное пространство** — это векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) вместе с функцией $\|\cdot\|$ из V в $\mathbb{R}$ (**нормой**), удовлетворяющей условиям:

(i) $\|v\|\geqslant 0$ для всех v из V;
(ii) $\|v\|=0$ тогда и только тогда, когда $v=0$;
(iii) $\|\alpha v\|=|\alpha|\,\|v\|$ для всех v из V и α из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$);
(iv) $\|v+w\|\leqslant\|v\|+\|w\|$ для всех v и w из V.

Определение. **Ограниченное линейное преобразование** (ограниченный оператор) из нормированного линейного пространства $\langle V_1, \|\cdot\|_1\rangle$ в нормированное линейное пространство $\langle V_2, \|\cdot\|_2\rangle$ — это функция T из V_1 в V_2, удовлетворяющая условиям:

(i) $T(\alpha v+\beta w)=\alpha T(v)+\beta T(w)$ $(\forall v, w\in V)$ $(\forall \alpha, \beta\in\mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$;
(ii) $\|Tv\|_2\leqslant C\|v\|_1$ при некоторой константе $C\geqslant 0$, не зависящей от выбора $v\in V$.

Наименьшее из таких чисел C называется **нормой оператора** T и обозначается через $\|T\|$, или $\|T\|_{1,2}$. Таким образом,

$$\|T\|=\sup_{\|v\|_1=1}\|Tv\|_2.$$

Поскольку ниже мы подробно изучаем эти понятия, мы не будем приводить здесь много примеров, а отметим только, что $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\|=\sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2}$$

и $C[0, 1]$ с любой из норм

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)| \quad \text{или} \quad \|f\|_1=\int_0^1|f(x)|\,dx$$

являются нормированными линейными пространствами. Отметим также, что любое нормированное линейное пространство $\langle V, \|\cdot\|\rangle$ есть метрическое пространство с расстоянием, заданным функцией $d(v, w)=\|v-w\|$. Таким образом, в $\langle V, \|\cdot\|\rangle$ переносится понятие непрерывных функций, которое в случае линейных функций реализуется ограниченными линейными преобразованиями. Доказательство этого факта мы оставляем читателю.

Теорема I.6. Пусть T — линейное преобразование между двумя нормированными линейными пространствами. Следующие условия эквивалентны:

(a) T непрерывно в одной точке;
(b) T непрерывно во всех точках;
(c) T ограничено.

Определение. Будем говорить, что пространство $\langle V, \|\cdot\|\rangle$ **полно**, если оно полно как метрическое пространство в метрике, индуцированной нормой.

Если $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ — нормированное линейное пространство, то X как метрическое пространство по теореме I.3 имеет пополнение. Используя факт плотности X в $\tilde{X}$, легко увидеть, что $\tilde{X}$ только одним естественным способом можно превратить в нормированное линейное пространство. Все сказанное прекрасно иллюстрируется следующей важной теоремой и ее доказательством.

Теорема I.7 (об ограниченном линейном отображении). Пусть T — ограниченное линейное преобразование из нормированного линейного пространства $\langle V_1, \|\cdot\|_1\rangle$ в полное нормированное линейное пространство $\langle V_2, \|\cdot\|_2\rangle$. Тогда T единственным образом может быть расширено до ограниченного линейного преобразования (с прежней нормой) $\tilde{T}$ из пополнения пространства V_1 в $\langle V_2, \|\cdot\|_2\rangle$.

Доказательство. Пусть $\tilde{V}_1$ — пополнение V_1. Для каждого x из $\tilde{V}_1$ существует последовательность $\{x_n\}$ элементов из V_1, такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Поскольку $\{x_n\}$ сходится, она является последовательностью Коши, и поэтому для заданного ε можно найти такое N, что $\|x_n - x_m\|_1 \leqslant \varepsilon / \|T\|$, если $n, m > N$. Тогда оценка $\|Tx_n - Tx_m\|_2 = \|T(x_n - x_m)\|_2 \leqslant \|T\| \|x_n - x_m\|_1 \leqslant \varepsilon$ доказывает, что $\{Tx_n\}$ — последовательность Коши в V_2. Так как V_2 полно, то Tx_n сходится к некоторому $y \in V_2$. Положим $\tilde{T}x = y$. Прежде всего нужно доказать, что это определение не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x. Если $x_n \to x$ и $x_n' \to x$, то последовательность $x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots \to x$, и в силу уже приведенных аргументов $Tx_1, Tx_1', \ldots \to \hat{y}$ для некоторого $\hat{y}$. Но в таком случае $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n' = \hat{y} = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$. Более того, можно показать, что определенный так оператор $\tilde{T}$ ограничен, ибо

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{T}x\|_2 &= \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_2 \leqslant && \text{(см. задачу 8)} \\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, C\|x_n\|_1 = && \text{(см. дополнение к § I.2)} \\
&= C\|x\|_1.
\end{aligned}
$$

Доказательство линейности и единственности мы оставляем читателю. ∎

С помощью доказанной теоремы можно дать весьма элегантное определение интеграла Римана. Пусть $PC[a, b]$ — семейство ограниченных, непрерывных справа (т. е. таких, что $\lim\limits_{x \downarrow y} f(x) = f(y)$), кусочно-непрерывных функций на $[a, b]$, обладающих тем свойством, что $\lim\limits_{x \uparrow y} f(x)$ существует для всех y и равен $f(y)$ для всех y, кроме конечного числа. Наделим $PC[a, b]$ нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Пусть $x_0, \ldots, x_n$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Пусть $\chi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, — характеристическая функция полуинтервала $[x_{i-1}, x_i)$, а $\chi_n(x)$ — характеристическая функция отрезка $[x_{n-1}, x_n]$. Функцию на $[a, b]$ вида $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i \chi_i(x)$ с вещественными s_i называют **ступенчатой функцией** (чтобы понять почему — нарисуйте график). Множество всех ступенчатых функций для всех возможных конечных разбиений является нормированным линейным пространством с нормой

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} s_i \chi_i(x) \right\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \left| \sum s_i \chi_i(x) \right| = \max_{i=1, \ldots, n} |s_i|.$$

Обозначим это пространство через $S[a, b]$. Хорошее упражнение (задача 10) — доказать, что $S[a, b]$ плотно в $PC[a, b]$. Для любой ступенчатой функции $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i \chi_i$ в согласии с интуитивным пониманием интеграла $\int [\sum s_i \chi_i(x)]\, dx$ мы полагаем по определению

$$I\left(\sum_{i=1}^{n} s_i \chi_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i (x_i - x_{i-1}).$$

Тогда I — линейное преобразование из $S[a, b]$ во множество вещественных чисел, а из оценки

$$\left| I\left(\sum_{i=1}^{n} s_i \chi_i\right)\right| = \left| \sum s_i (x_i - x_{i-1}) \right| \leqslant \max |s_i| \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \sum s_i \chi_i \right\|_\infty (b - a)$$

видно, что I — *ограниченное* линейное преобразование. Поскольку множество вещественных чисел полно, I можно однозначно продолжить на $\tilde{S}$ — пополнение S (теорема I.7). Это расширение, суженное на $PC[a, b]$, называется интегралом Римана и обозначается

$$I(f) = \int_a^b f\,dx.$$

Несмотря на то что этот способ не выглядит наиболее прямой реализацией интуитивного определения интеграла Римана, поразмыслив, можно понять, что проведенное построение на самом деле представляет собой перевод «обычной» конструкции на язык пополнения и теоремы об ограниченном линейном отображении. Оно иллюстрирует суть общего подхода функционального анализа: для того чтобы определить что-то на нормированном линейном пространстве, часто удобно определить нужный объект на плотном множестве и продолжить его с помощью теоремы об ограниченном линейном отображении. Читателю следовало бы попробовать свои силы в построении интеграла Римана—Стильтьеса (задача 11). Используя такой же метод, можно определить интеграл Римана для непрерывных функций, принимающих значения в любом *полном* нормированном линейном пространстве, в частности для комплекснозначных функций.

Дополнение к § I.2. Верхний и нижний пределы

Понятия верхнего и нижнего пределов могут быть незнакомы читателю, поэтому мы приводим здесь их определения и основные свойства.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}$—бесконечное ограниченное множество. Пусть $\lim\operatorname{pt}(A) = \{$совокупность предельных точек множества $A\}$. Тогда **верхний предел** множества A определяется так:

$$\limsup A = \overline{\lim}\, A = \sup\{x \mid x \in \lim\operatorname{pt}(A)\}.$$

Аналогично нижний предел равен

$$\liminf A = \underline{\lim}\, A = \inf\{x \mid x \in \lim\operatorname{pt}(A)\}.$$

Замечания. 1. Когда A ограничено, множество $\lim\operatorname{pt}(A)$ по теореме Больцано—Вейерштрасса всегда непусто.

2. Если A не ограничено сверху, мы полагаем $\overline{\lim}\, A = +\infty$. Если A ограничено сверху, но $\lim\operatorname{pt}(A) = \varnothing$, мы полагаем $\overline{\lim}\, A = -\infty$.

3. Фактически $\overline{\lim}\, A$ лежит в $\lim\operatorname{pt}(A)$. Действительно, пусть $b = \overline{\lim}\, A$, и пусть задано $\varepsilon > 0$. Можно найти такое $a \in \lim\operatorname{pt}(A)$, что $|b-a| < \varepsilon/2$. Поскольку $a \in \lim\operatorname{pt}(A)$, можно найти $d \in A$, для которого $|a-d| < \varepsilon/2$; в итоге по заданному ε найдено $d \in A$, для которого $|b-d| < \varepsilon$, так что $b \in \lim\operatorname{pt}(A)$.

Верхний предел допускает другое весьма простое описание; доказательство мы оставляем читателю.

Предложение. Пусть $b=\overline{\lim}\,A$. Тогда для $\varepsilon>0$ множество $A\cap\{a\,|\,a>b+\varepsilon\}$ конечно, а $A\cap\{a\,|\,a>b-\varepsilon\}$ бесконечно.

В случае последовательности $\{a_n\}$ говорят, что $b\in\lim\operatorname{pt}\{a_n\}$, если для всех N и всех ε существует такое $n>N$, что $|b-a_n|<\varepsilon$; в этом случае полагают $\overline{\lim}\,a_n=\sup\{b\,|\,b\in\lim\operatorname{pt}\{a_n\}\}$.

Наконец, перечислим свойства $\overline{\lim}$ (сформулированные для ограниченных множеств; полезное упражнение — выяснить, какие из них переносятся на неограниченные множества).

Предложение.

(a) $\overline{\lim}\,(a_n+b_n)\leqslant\overline{\lim}\,a_n+\overline{\lim}\,b_n$;

(b) $\overline{\lim}\,a_nb_n\leqslant(\overline{\lim}\,a_n)(\overline{\lim}\,b_n)$, если $a_n,\ b_n\geqslant 0$;

(c) $\overline{\lim}\,(ca_n)=c\,\overline{\lim}\,a_n$, если $c>0$;

(d) $\overline{\lim}\,(ca_n)=c\,\underline{\lim}\,a_n$, если $c<0$.

I.3. Интеграл Лебега

Выше мы видели, что на $C[a,b]$ существуют две вполне естественные метрики. В § I.5 мы увидим, что $C[a,b]$ с метрикой

$$d_1(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$$

является полным метрическим пространством. С другой рассмотренной нами метрикой $d_2(f,g)=\|f-g\|_1$, где $\|h\|_1=\int\limits_a^b|h(x)|\,dx$, пространство $C[a,b]$ *неполно*. Чтобы убедиться в этом на примере $C[0,1]$, рассмотрим функцию f_n, изображенную на рис. I.3.

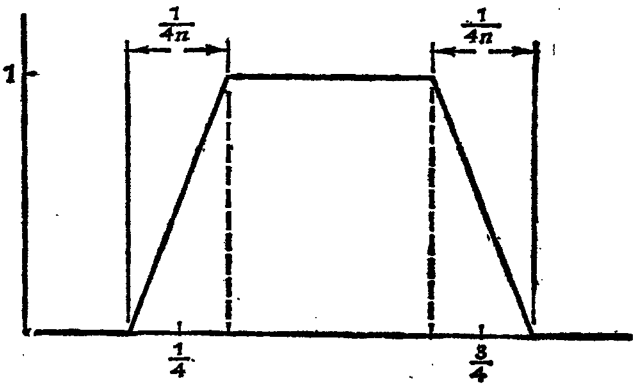

Рис. I.3. График f_n.

Нетрудно понять, что в метрике $\|\cdot\|_1$ такие функции f_n образуют последовательность Коши, которая, однако, не сходится ни к какой функции из $C[0, 1]$; напротив, в некоем *интуитивном смысле* она «сходится» к характеристической функции отрезка $[1/4, 3/4]$ (которая, конечно, не лежит в $C[0, 1]$!).

Пространство $C[a, b]$ с метрикой $\|\cdot\|_1$ всегда можно пополнить, реализуя элементы пополнения как классы эквивалентных последовательностей Коши непрерывных функций, но эта реализация отнюдь не отличается прозрачностью! Рассмотренный выше пример наводит на мысль попытаться реализовать элементы пополнения как функции. Если бы это удалось, мы сумели бы определить интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ (просто как $d_1(f, 0)$!) для любой функции из пополнения.

Простейший путь такой реализации—попробовать действовать в обратном порядке. Введем расширенное понятие интеграла на большем, чем $C[a, b]$, пространстве—назовем его $L^1[a, b]$. Затем докажем полноту $L^1[a, b]$. Тогда в соответствии с общей теорией замыкание C в L^1 будет полным (причем окажется, что $\overline{C} = L^1$).

Как же можно расширить понятие интеграла Римана? В основе обычного определения риманова интеграла лежит разбиение *области определения* f на все более и более мелкие части. Для

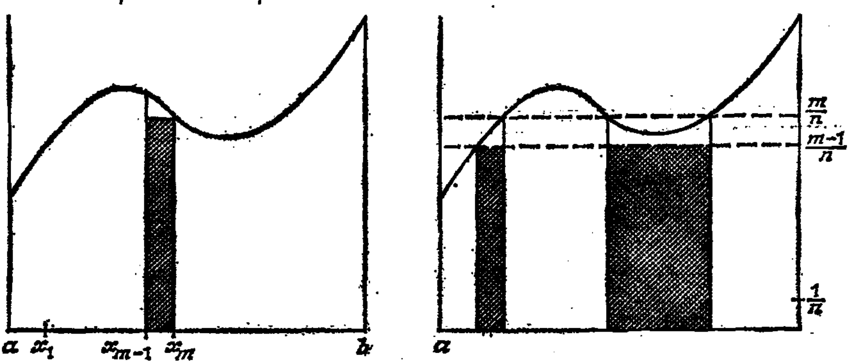

Рис. I.4. Интеграл Римана (слева) и интеграл Лебега.

«скверных» функций этот метод не подходит. Простейшее усовершенствование состоит в делении на все более мелкие части области значений f (рис. I.4). Такой метод чувствительнее к виду функций и потому в состоянии охватить большее их многообразие. Итак, мы интересуемся множествами вида $f^{-1}[a, b]$ и их размерами. Предположим, что у нас есть некая функция μ, задающая размер множеств и обобщающая функцию $\mu([a, b]) = b - a$.

Мы вскоре вернемся к этой функции и увидим, что не все множества обладают «размером». Поэтому мы ограничим тип функций f, требуя, чтобы множества $f^{-1}[a, b]$ имели «размеры». Глядя на рис. I.4, для $f \geqslant 0$ положим по определению

$$\Sigma_n(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{n} \mu \left(f^{-1} \left[\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right) \right] \right).$$

Тогда $\Sigma_{2n}(f) \geqslant \Sigma_n(f)$, так что $\lim\limits_{n \to \infty} \Sigma_{2^n}(f) = \sup\limits_n (\Sigma_{2^n}(f))$ существует (он может быть равен ∞). По определению мы полагаем $\int f\,dx$ равным этому пределу. Заметим, что для технических целей (т. е. для доказательства теорем!) принимается другое определение; оно эквивалентно данному, но доказать это нелегко. Однако при неформальных размышлениях лучше всегда иметь в виду определение с помощью $\lim \Sigma_{2^n}(f)$.

Итак, мы свели исходную задачу к проблеме расширения понятия размера. Прежде всего нужно решить, какие множества должны иметь размер. Почему не все? Существует классический пример (см. также задачу 13), который показывает, что размер не может быть определен для всех множеств в $\mathbb{R}^3$, если мы хотим, чтобы он был инвариантным относительно вращений и переносов (и не был тривиальным, например нулевым для всех множеств): можно разделить единичный шар на конечное число экзотических кусков, передвинуть эти куски с помощью вращений и переносов и, собрав их заново, получить два шара с единичным радиусом (парадокс Банаха—Тарского). Таким образом, все множества не могут обладать размером, и потому лишь некоторое их семейство $\mathcal{B}$ будет семейством «измеримых множеств». Какими же свойствами мы хотим наделить $\mathcal{B}$? Желательно, чтобы и $f^{-1}[[0, a)]$, и $f^{-1}[[a, \infty)]$ были измеримы ($f \geqslant 0$), следовательно, чтобы $\mathcal{B}$ обладало свойством: $A \in \mathcal{B}$ влечет за собой $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{B}$. Далее, когда f непрерывна, мы хотим, чтобы $f^{-1}[(a, b)]$ лежало в $\mathcal{B}$, следовательно, $\mathcal{B}$ должно содержать открытые множества. Наконец (в согласии с нашим интуитивным пониманием размера), мы хотим, чтобы

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

если A_n попарно не пересекаются, т. е. мы хотим, чтобы $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$, если каждое $A_n \in \mathcal{B}$.

Определение. **Борелевы множества** прямой $\mathbb{R}$ образуют наименьшее семейство множеств из $\mathbb{R}$ со следующими свойствами:

(i) семейство замкнуто относительно дополнений;
(ii) семейство замкнуто относительно счетных объединений;
(iii) семейство содержит каждый открытый интервал.

Наименьшее семейство с такими свойствами существует. В самом деле, если $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in A}$—совокупность семейств, обладающих свойствами (i), (ii) и (iii), то этими же свойствами обладает и $\bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{B}_\alpha$. Таким образом, пересечение всех семейств со свойствами (i)—(iii) есть наименьшее такое семейство.

Теперь определим **меру Лебега** множеств из $\mathcal{B}$—борелевых множеств в $\mathbb{R}$.

Определение. Пусть $\mathcal{I}$—семейство всех счетных объединений попарно не пересекающихся открытых интервалов (т. е. в точности семейство всех открытых множеств), и пусть

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)$$

(допускается бесконечное значение). Для любого $B\in\mathcal{B}$ положим по определению

$$\mu(B)=\inf_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ B\subset I}}\mu(I).$$

Это понятие размера имеет четыре основных свойства:

Теорема I.8. (a) $\mu(\varnothing)=0$.

(b) Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}$ и A_n попарно не пересекаются ($A_n\cap A_m=\varnothing$ при всех $m\neq n$), то $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

(c) $\mu(B)=\inf\{\mu(I)\mid B\subset I,\ I \text{ открыто}\}$.

(d) $\mu(B)=\sup\{\mu(C)\mid C\subset B,\ C \text{ компактно}\}$.

Бесконечная сумма в (b) содержит только положительные члены, поэтому она либо сходится к конечному числу, либо расходится к бесконечности, и в таком случае мы полагаем ее равной ∞. Свойства (c) и (d) говорят о том, что любое борелево множество может быть приближено «снаружи» открытыми множествами, а «изнутри»—компактными. Напоминаем читателю, что *на вещественной прямой* множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

В итоге мы расширили обычное понятие размера интервалов, и теперь понятно, как надо определить семейство функций, которые мы будем рассматривать:

Определение. Функция f называется **борелевой функцией**, если $f^{-1}[(a, b)]$—борелево множество для всех a, b.

Часто удобно разрешать функциям принимать на малых множествах значения $\pm\infty$; в таком случае мы требуем, чтобы $f^{-1}[\{\pm\infty\}]$ было борелевым.

Предложение. f—борелева функция тогда и только тогда, когда $f^{-1}[B]\in\mathscr{B}$ для всех $B\in\mathscr{B}$ (см. задачу 14).

Из этого предложения следует, что композиция двух борелевых функций является борелевой. Во многих книгах рассматривается несколько более широкий по сравнению с борелевым класс функций. В них множество M называется измеримым, если справедливо равенство $M\cup A_1=B\cup A_2$, где B—борелево и $A_i\subset B_i$, B_i борелевы и удовлетворяют условию $\mu(B_i)=0$ (т. е. к борелевым множествам добавляют и из них вычитают «несущественные» множества). Измеримая функция определяется как функция f, для которой $f^{-1}[(a, b)]$ всегда измеримо. В таком случае из измеримости f и g уже не следует измеримость композиции $f\circ g$ и возникает много технических проблем. *Во всяком случае мы имеем дело только с борелевыми множествами и функциями и пользуемся словами «борелево» и «измеримое» как синонимами.*

Множество борелевых функций замкнуто относительно многих операций.

Предложение. (a) Если f, g борелевы, то таковы же и $f+g$, fg, $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$. Если f борелева и $\lambda\in\mathbb{R}$, то и λf борелева.

(b) Если каждая f_n борелева, $n=1, 2, \ldots$ и $f_n(p)\to f(p)$ для всех p, то f борелева.

Поскольку $|f|=\max\{f, -f\}$, функция $|f|$ измерима, если f измерима.

Как мы коротко пояснили выше, имея $f\geqslant 0$, можно определить интеграл $\int f\,dx$ (для которого допускается значение ∞). Если $\int|f|\,dx<\infty$, мы пишем $f\in\mathscr{L}^1$ и по определению полагаем $\int f\,dx=\int f_+dx-\int f_-dx$, где $f_+=\max\{f, 0\}$; $f_-=\max\{-f, 0\}$. Через $\mathscr{L}^1(a, b)$ обозначается множество функций на (a, b), попадающих в $\mathscr{L}^1$, если продолжить их на всю вещественную прямую, доопределяя нулем вне (a, b). Когда $f\in\mathscr{L}^1(a, b)$, мы пишем $\int f\,dx=\int\limits_a^b f\,dx$. Тогда справедлива

Теорема I.9. Пусть f и g—измеримые функции. Тогда

(a) если $f, g\in\mathscr{L}^1(a, b)$, то этим же свойством обладают $f+g$ и λf при всех $\lambda\in\mathbb{R}$;

(b) если $|g|\leqslant f$ и $f\in\mathscr{L}^1$, то $g\in\mathscr{L}^1$;

(c) $\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$, если f и g лежат в $\mathscr{L}^1$;

(d) $\left|\int f\,dx\right| \leqslant \int |f|\,dx$, если $f \in \mathscr{L}^1$;

(e) если $f \leqslant g$, то $\int f\,dx \leqslant \int g\,dx$ при условии, что $f, g \in \mathscr{L}^1$;

(f) если f ограничена и измерима на $-\infty < a < b < \infty$, то $f \in \mathscr{L}^1$ и

$$\left|\int\limits_a^b f\,dx\right| \leqslant |b-a| \left(\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|\right).$$

Эта теорема показывает, что $\int$ обладает всеми хорошими свойствами интеграла Римана, хотя он и определен для более широкого класса функций.

Вскоре мы определим очень важное для дальнейшего пространство L^1; те свойства, благодаря которым оно полно, описываются следующими фундаментальными теоремами о сходимости:

Теорема I.10 (теорема о монотонной сходимости). Пусть функции $f_n \geqslant 0$ измеримы. Предположим, что $f_n(p) \to f(p)$ для каждого p и что $f_{n+1}(p) \geqslant f_n(p)$ для всех p и n (в таком случае мы пишем $f_n \nearrow f$). Если $\int |f_n(p)|\,dp < C$ для всех n, то $f \in \mathscr{L}^1$ и $\int |f(p) - f_n(p)|\,dp \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема I.11 (теорема о мажорированной сходимости). Пусть $f_n(p) \to f(p)$ для каждого p; предположим, что $|f_n(p)| \leqslant G(p)$ для всех n и некоторой функции $G \in \mathscr{L}^1$. Тогда $f \in \mathscr{L}^1$ и $\int |f(p) - - f_n(p)|\,dp \to 0$ при $n \to \infty$.

В последнем случае мы говорим, что G мажорирует последовательность f_n. Существование мажорирующей функции — решающее обстоятельство. Например, пусть $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n,\,n]}(x)$. Тогда $f_n(x) \to 0$ для каждого x, но $\int |f_n|\,dx = 2$, так что $\int |f_n(x)|\,dx$ не стремится к нулю. Нетрудно понять, что в этом случае $\sup\limits_n |f_n(x)| = G(x)$ не лежит в $\mathscr{L}^1$.

Казалось бы, мы уже можем определить $\mathscr{L}^1$ как метрическое пространство, положив $\rho(f, g) = \int |f-g|\,dx$. Однако пока сделать это нельзя, ибо равенство $\int |f-g|\,dx = 0$ не означает, что $f \equiv g$ (например, f и g могут отличаться в одной точке). Поэтому объясним сначала, что означает термин «почти всюду» (п. в):

Определение. Будем говорить, что свойство $C(x)$ имеет место **почти всюду** (п. в.), если $\{x \mid C(x)$ ложно$\}$ есть подмножество множества меры нуль.

Определение. Будем говорить, что две функции $f, g \in \mathscr{L}^1$ **эквивалентны**, если $f(x) = g(x)$ п. в. (т. е. $\int |f-g|\,dx = 0$).

Определение. Множество классов эквивалентности в $\mathscr{L}^1$ обозначим через L^1; L^1 с нормой $\|f\|_1 = \int |f|\,dx$ есть нормированное линейное пространство.

Таким образом, элементы L^1—это классы эквивалентности функций, равных п. в. В частности, когда $f \in L^1$, символ $f(x)$ для конкретного x не имеет смысла. Тем не менее мы продолжаем писать $f(x)$, но только в ситуациях, когда утверждения не зависят от выбора представителя класса эквивалентности. Например, утверждение: $f_n(x) \to f(x)$ *для почти всех* x—не зависит от представителей, выбранных для f и f_n. С помощью такой замены поточечной сходимости на поточечную сходимость почти всюду наши две теоремы о сходимости переносятся из $\mathscr{L}^1$ в L^1.

Предупредив читателя о том, что для $f \in L^1$ символ $f(x)$, строго говоря, бессмыслен, заметим, что в *некоторых специальных случаях* он имеет смысл. Предположим, что $f \in L^1$ имеет представитель $\tilde{f}$ (т. е. $\tilde{f}$—функция; f—класс эквивалентности функций), который непрерывен. Тогда ни один другой представитель класса f не является непрерывной функцией, так что естественно писать $f(x)$ вместо $\tilde{f}(x)$.

Важнейший факт о пространстве L^1 устанавливает следующая

Теорема I.12 (Рисс—Фишер). L^1 полно.

Доказательство. Пусть f_n—последовательность Коши в L^1. Достаточно доказать сходимость какой-нибудь ее подпоследовательности (см. задачу 3), поэтому перейдем к подпоследовательности (также обозначаемой через f_n) со свойством $\|f_n - f_{n+1}\| \leqslant 2^{-n}$. Положим

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^{m} |f_n(x) - f_{n+1}(x)|.$$

Пусть g_∞—сумма бесконечного ряда (которая может равняться ∞). Тогда $g_m \nearrow g_\infty$ и $\int |g_m|\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{m} \|f_n - f_{n+1}\| \leqslant 1$, так что по теореме о монотонной сходимости $g_\infty \in L^1$. Таким образом, $|g_\infty(x)| < \infty$ п. в. В результате

$$f_m(x) = f_1(x) - \sum_{n=1}^{m-1} (f_n(x) - f_{n+1}(x))$$

сходится поточечно п. в. к некоторой функции $f(x)$. Более того, $|f_m(x)| \leqslant |f_1(x)| + g_\infty(x) \in L^1$, так что $f_n \to f$ в L^1 в силу теоремы о мажорированной сходимости. ∎

Из этого доказательства вытекает (см. задачу 17) такое

Следствие. Если $f_n \to f$ в L^1, то некоторая *подпоследовательность* f_{n_i} сходится поточечно п. в. к f.

Наконец, сформулируем результат, который возвращает нас к нашей исходной идее.

Предложение. Пространство $C[a, b]$ плотно (по $\|\cdot\|_1$) в $L^1[a, b]$, т. е. L^1 есть пополнение C.

Доказательство. См. задачу 18.

Мы определили $L^1[a, b]$ как пространство вещественнозначных функций. Часто удобно иметь дело с комплекснозначными функциями, чьи вещественные и мнимые части лежат в $L^1[a, b]$. Когда не возникает недоразумения, мы обозначаем это пространство с нормой

$$\|f\|_1 = \int^b |f|\,dx$$

также через $L^1[a, b]$. Интеграл от комплекснозначной функции определяется соотношением

$$\int f\,dx = \int \operatorname{Re}(f)\,dx + i\int \operatorname{Im}(f)\,dx.$$

I.4. Абстрактная теория меры

Один из наиболее важных инструментов, который в сочетании с абстрактным функциональным анализом служит изучению различных конкретных моделей, — это «общая» теория меры, т. е. теория, которой мы занимались в предыдущем разделе, но расширенная до более абстрактных рамок.

Простейший способ обобщения лебегова интеграла состоит в том, чтобы обобщить используемую меру, задавая ее по-прежнему на борелевых множествах вещественной прямой; мы рассмотрим этот специальный случай абстрактной теории меры первым. Напомним, что интеграл Лебега был построен следующим способом. Мы начали с понятия размера интервала, $\mu((a, b)) = b-a$, и однозначным образом расширили его на произвольные борелевы множества. Вооружившись понятием размера борелевых множеств, мы получили интеграл от борелевых функций, измеряя множества вида $f^{-1}[(a, b)]$. Мы нашли, что векторное пространство $L^1[0, 1]$, построенное в предыдущем разделе, есть в точности пополнение $C[0, 1]$ по метрике $d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$, где для определения d_2 нужен только интеграл Римана.

Предположим теперь, что задана произвольная неубывающая функция $\alpha(x)$ (т. е. из $x > y$ вытекает $\alpha(x) \geqslant \alpha(y)$). Нетрудно видеть, что предел справа $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \alpha(x+|\varepsilon|)$ и предел слева $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \alpha(x-|\varepsilon|)$ существуют; обозначим их $\alpha(x+0)$ и $\alpha(x-0)$ соответственно. Поскольку интервал (a, b) не включает точек a и b, естественно положить $\mu_\alpha((a, b)) = \alpha(b-0) - \alpha(a+0)$. На основе такого понятия размера интервала можно построить на борелевых множествах в $\mathbb{R}$ меру μ_α, т. е. отображение μ_α: $\mathscr{B} \to [0, \infty]$ со свойствами $\mu_\alpha(\bigcup B_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_\alpha(B_i)$, если $B_i \cap B_j = \varnothing$; и $\mu_\alpha(\varnothing) = 0$. По построению эта мера обладает свойством **регулярности**

$$\mu_\alpha(B) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset B,\ C \text{ компактно}\} = \\ = \inf\{\mu(O) \mid B \subset O,\ O \text{ открыто}\}.$$

Кроме того, $\mu(C) < \infty$ для любого компактного множества C. Мера с этими двумя свойствами регулярности называется **борелевой мерой.** В частности, $\mu_\alpha([a, b]) = \alpha(b+0) - \alpha(a-0)$. Теперь можно построить интеграл $f \to \int f \, d\mu_\alpha$ (часто мы будем также писать $\int f \, d\alpha$) со свойствами (a)—(e) теоремы I.9; он называется интегралом Лебега—Стильтьеса. Пространства $L^1([a, b], d\alpha)$ и $L^1(\mathbb{R}, d\alpha)$ можно построить, как и прежде. Эти пространства классов эквивалентных функций полны в метрике $\rho(f, g) = \int |f-g| \, d\mu_\alpha$, и в них справедливы аналоги теорем о монотонной и мажорированной сходимостях. Непрерывные функции из $C[a, b]$ образуют плотное подпространство в $L^1([a, b], d\alpha)$; говоря иначе, $L^1([a, b], d\alpha)$—это пополнение $C[a, b]$ по метрике $\rho_\alpha(f, g) = \int_a^b |f-g| \, d\alpha$, где для определения ρ_α нужно использовать только интеграл Римана—Стильтьеса (см. задачу 11).

Рассмотрим три примера, иллюстрирующие разнообразие мер Лебега—Стильтьеса.

Пример 1. Пусть α—непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $\mu_\alpha((a, b)) = \int_a^b (d\alpha/dx) \, dx$, где dx—мера Лебега, так что можно ожидать (и на самом деле это так), что

$$\int f \, d\alpha = \int f \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) dx.$$

В итоге такие меры можно по существу описать с помощью меры Лебега.

Пример 2. Предположим, что $\alpha(x)$ — характеристическая функция луча $[0, \infty)$. Тогда $\mu_\alpha(a, b) = 1$, если $0 \in (a, b)$, и $= 0$, если $0 \notin (a, b)$. Легко описать меру, которая при этом возникает: $\mu_\alpha(B) = 1$, если $0 \in B$, и $\mu_\alpha(B) = 0$, если $0 \notin B$. Мы предлагаем читателю явно построить соответствующий интеграл и убедиться, что

$$\int f\,d\alpha = f(0).$$

Мера $d\alpha$ известна под именем **меры Дирака** (поскольку она в точности отвечает δ-функции). Рассмотрим $L^1(\mathbb{R}, d\alpha)$ в этом случае. В $\mathscr{L}^1$ имеем $\rho(f, g) = |f(0) - g(0)|$, т. е. $\rho(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(0) = g(0)$. В итоге мы видим, что классы эквивалентности в L^1 полностью задаются значением $f(0)$, так что $L^1(\mathbb{R}, d\alpha)$ представляет собой одномерное векторное пространство! Обратите внимание, насколько эта ситуация отличается от случая $L^1(\mathbb{R}, dx)$, где значение «функции» в одной точке не определено (поскольку элементы в L^1 — это классы эквивалентности).

Пример 3. В нашем последнем примере будет использоваться довольно патологическая функция $\alpha(x)$, которую мы сначала построим. Пусть S — следующее подмножество отрезка $[0, 1]$:

$$S = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \ldots,$$

т. е. при построении S нужно на каждом шаге добавлять к S среднюю треть каждой части, не попавшей в S на предыдущем шаге (см. рис. I.5). Лебегова мера S равна $1/3 + 2(1/9) + 4(1/27) + \ldots = 1$. Положим $C = [0, 1] \setminus S$. Лебегова мера этого

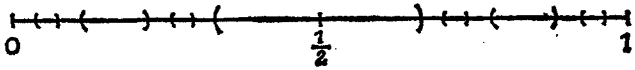

Рис. I.5. Множество Кантора.

множества равна нулю. Множество C, называемое **канторовым** множеством, легко описать, если представить каждое $x \in [0, 1]$ троичной дробью. Тогда $x \in C$ в том и только том случае, когда его троичное разложение не содержит 1. Канторово множество служит примером несчетного множества меры 0. Чтобы убедиться в этом, отобразим C взаимно однозначно *на* $[0, 1]$, заменяя все цифры 2 на 1 и истолковывая результат как двоичное разложение числа из $[0, 1]$. Построим теперь $\alpha(x)$ следующим образом: положим $\alpha(x) = 1/2$ на $(1/3, 2/3)$; $\alpha(x) = 1/4$ на $(1/9, 2/9)$; $\alpha(x) = 3/4$ на $(7/9, 8/9)$ и т. д.; см. рис. I.6. Продолжим α на $[0, 1]$, сделав ее непрерывной. Тогда α — непостоянная непрерывная функция со странным свойством: $\alpha'(x)$ существует п. в. по отношению к мере Лебега и равна нулю п. в. Теперь мы можем построить меру μ_α. Поскольку α непрерывна, $\mu_\alpha(\{p\})=0$ для любого одноточечного множества $\{p\}$. Тем не менее μ_α сосредоточена на множестве C в том смысле, что $\mu_\alpha([0, 1]\setminus C)=\mu_\alpha(S)=0$. С другой стороны, лебегова мера C равна нулю. Таким образом, μ_α и мера Лебега «проживают» на совершенно разных множествах.

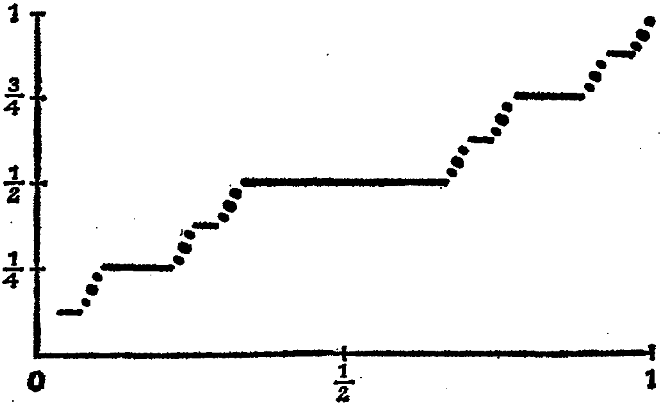

Рис. I.6. Функция Кантора.

Рассмотренные три примера моделируют (в смысле, который мы сейчас уточним) основные типы наиболее общих мер Лебега — Стильтьеса. Предположим, что μ—мера Бореля на $\mathbb{R}$. Прежде всего пусть $P=\{x\,|\,\mu(\{x\})\neq 0\}$, т. е. P—множество **чистых точек** меры μ. Поскольку μ—борелева мера [$\mu(C)<\infty$ для любого компактного C], P—счетное множество. Положим по определению

$$\mu_{pp}(X)=\sum_{x\in P\cap X}\mu(\{x\})=\mu(P\cap X).$$

Тогда μ_{pp}—мера и разность $\mu_{cont}=\mu-\mu_{pp}$ положительна. При этом μ_{cont} обладает свойством $\mu_{cont}(\{p\})=0$ для всех p, т. е. не имеет чистых точек, а μ_{pp} имеет только чистые точки в том смысле, что $\mu_{pp}(X)=\sum_{x\in X}\mu_{pp}(\{x\})$.

Определение. Борелева мера μ на $\mathbb{R}$ называется **непрерывной**, если она не имеет чистых точек. Она называется **чисто точечной мерой**, если $\mu(X)=\sum_{x\in X}\mu(x)$ для любого борелева множества X.

Таким образом, мы убедились, что справедлива

Теорема I.13. Любую борелеву меру можно единственным образом разложить в сумму $\mu=\mu_{pp}+\mu_{cont}$, где μ_{cont}—непрерывная, а μ_{pp}—чисто точечная меры.

В итоге мы обобщили пример 2, введя в рассмотрение суммы мер Дирака. Существуют ли обобщения примеров 1 и 3?

Определение. Мы говорим, что μ **абсолютно непрерывна относительно меры Лебега,** если существует функция f, локально принадлежащая L^1 (т. е. $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$ для любого конечного интервала (a, b)), такая, что

$$\int g\,d\mu = \int gf\,dx$$

для любой борелевой функции g из $L^1(\mathbb{R}, d\mu)$. В таком случае мы пишем $d\mu = f\,dx$.

Это определение обобщает пример 1; несколько ниже мы дадим другое (но эквивалентное!) определение абсолютной непрерывности.

Определение. Мы говорим, что μ **сингулярна относительно меры Лебега,** тогда и только тогда, когда $\mu(S)=0$ для некоторого множества S, такого, что $\mathbb{R}\setminus S$ имеет нулевую лебегову меру.

В число фундаментальных результатов входит следующая

Теорема I.14 (теорема Лебега о разложении). Пусть μ — борелева мера. Тогда μ единственным образом представима в виде $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$, где мера μ_{ac} абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры, а μ_{sing} сингулярна относительно лебеговой меры.

Итак, теоремы I.13 и I.14 говорят нам, что любая мера μ на $\mathbb{R}$ обладает каноническим разложением $\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sing}$, где μ_{pp} чисто точечна и сингулярна относительно меры Лебега, μ_{ac} абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а μ_{sing} — *непрерывна и сингулярна* относительно меры Лебега.

К такому же разложению приходят в квантовой механике, где любое состояние представляет собой сумму связанных состояний, состояний рассеяния и состояний, не имеющих физической интерпретации (в дальнейшем ценой значительных усилий мы продемонстрируем, что состояния последнего типа в квантовой механике не встречаются, т. е. что для некоторых определенных мер $\mu_{sing} = 0$ (см. гл. XIII)).

Это завершает наше изучение мер на $\mathbb{R}$. Следующий уровень обобщения включает в себя меры на множествах с некоторой заданной на них топологической структурой; мы вернемся к изучению такого промежуточного случая в § IV.4. А сейчас обсудим наиболее общий подход, позволяющий иметь дело с произвольными множествами. Прежде всего нам понадобится обобщение борелевых множеств.

Определение. Непустое семейство $\mathscr{R}$ подмножеств некоторого множества M называется **σ-кольцом**, если

(a) $A_i \in \mathscr{R}$, $i=1, 2, \ldots$, влечет за собой $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{R}$;

(b) если $A, B \in \mathscr{R}$, то $A \setminus B \in \mathscr{R}$.

Если $M \in \mathscr{R}$, мы говорим, что $\mathscr{R}$ есть **σ-поле.**

Определение меры очевидно!

Определение. Мера на множестве M с σ-кольцом $\mathscr{R}$ есть отображение μ: $\mathscr{R} \to [0, \infty]$ со свойствами:

(a) $\mu(\varnothing)=0$;

(b) $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Мы часто будем говорить о пространстве с мерой $\langle M, \mu\rangle$ без явного упоминания $\mathscr{R}$, но это σ-кольцо — важнейший элемент определения. Иногда мы будем писать $\langle M, \mathscr{R}, \mu\rangle$. Для некоторых патологически «больших» пространств хотелось бы использовать понятие σ-кольца, а не σ-поля, но для простоты мы будем рассматривать меры на σ-полях и будем предполагать, что все пространство не слишком велико в смысле следующего определения:

Определение. Мера μ на σ-поле $\mathscr{F}$ называется **σ-конечной** тогда и только тогда, когда $M=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $\mu(A_i)<\infty$ при всех i.

Мы предполагаем, что все наши меры σ-конечны.

Определение. Пусть M, N — множества с σ-полями $\mathscr{R}$ и $\mathscr{F}$. Отображение T: $M \to N$ называется **измеримым** (относительно $\mathscr{R}$ и $\mathscr{F}$), если $(\forall A \in \mathscr{F})$ $T^{-1}[A] \in \mathscr{R}$. Отображение f: $M \to \mathbb{R}$ называется измеримым, если оно измеримо по отношению к $\mathscr{R}$ и борелевым множествам на $\mathbb{R}$.

Имея меру μ на пространстве с мерой M, можно определить $\int f\, d\mu$ для любой положительной вещественнозначной измеримой функции на M и образовать $\mathscr{L}^1(M, d\mu)$ — множество интегрируемых функций и $L^1(M, d\mu)$ — множество классов эквивалентности равных п. в. по мере μ функций из $\mathscr{L}^1(M, d\mu)$. Так же как в случае $\langle M, d\mu\rangle=\langle \mathbb{R}, dx\rangle$, справедливы следующие важнейшие теоремы:

Теорема I.15 (теорема о монотонной сходимости). Если $f_n \in \mathscr{L}^1(M, d\mu)$, $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ и $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то $f \in \mathscr{L}^1$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1 < \infty$, и в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \|f-f_n\|_1=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1=\|f\|_1$.

Теорема I.16 (теорема о мажорированной сходимости). Если $f_n \in L^1(M, d\mu)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ п. в. по мере μ и существует функция $G \in L^1$, такая, что $|f_n(x)| \leqslant G(x)$ п. в. по мере μ для всех n, то $f \in L^1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$.

Теорема I.17 (лемма Фату). Если $f_n \in \mathscr{L}^1$, каждое $f_n(x) \geqslant 0$ и $\underline{\lim} \|f_n\|_1 < \infty$, то $f(x) = \underline{\lim} f_n(x)$ лежит в $\mathscr{L}^1$ и $\|f\|_1 \leqslant \underline{\lim} \|f_n\|_1$.

Замечание. В лемме Фату ничего не говорится о $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1$.

Теорема I.18 (теорема Рисса—Фишера). Пространство $L^1(M, d\mu)$ полно.

Понятие сингулярности также обобщается.

Определение. Пусть μ, ν—две меры на пространстве M с σ-полем $\mathscr{R}$. Говорят, что μ и ν **взаимно сингулярны**, если существует множество $A \in \mathscr{R}$, для которого $\mu(A) = 0$ и $\nu(M \setminus A) = 0$.

Полезно ввести более слабое на вид определение абсолютной непрерывности, которая по существу противоположна свойству сингулярности:

Определение. Говорят, что ν **абсолютно непрерывна относительно** μ, если $\mu(A) = 0$ влечет за собой $\nu(A) = 0$.

Эквивалентность этого определения данному ранее вытекает из следующей теоремы:

Теорема I.19 (теорема Радона—Никодима). Мера ν абсолютно непрерывна относительно μ тогда и только тогда, когда существует измеримая функция f, такая, что

$$\nu(A) = \int f(x) \chi_A(x)\, d\mu(x)$$

для любого измеримого множества A. Функция f определяется однозначно п. в. (по мере μ).

Наконец, теорема Лебега о разложении имеет следующую абстрактную форму:

Теорема I.20 (теорема Лебега о разложении). Пусть μ, ν—две меры на измеримом пространстве $\langle M, \mathscr{R}\rangle$. Тогда ν можно однозначно представить в виде $\nu = \nu_{ac} + \nu_{sing}$, где μ и ν_{sing} взаимно сингулярны, а ν_{ac} абсолютно непрерывна относительно μ.

Последний вопрос из теории меры, который мы должны рассмотреть, касается изменения порядка интегрирования в повторном интеграле. Сначала выясним, какие функции можно повторно интегрировать.

Определение. Пусть $\langle M, \mathcal{R}\rangle$, $\langle N, \mathcal{F}\rangle$ — два множества с соответствующими σ-полями. Тогда σ-поле $\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$ подмножеств в $M\times N$ определяется как наименьшее σ-поле, содержащее $\{R\times F\mid R\in\mathcal{R}, F\in\mathcal{F}\}$.

Заметим, что если функция $f\colon M\times N\to\mathbb{R}$ измерима (по отношению к $\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$), то для любого $m\in M$ функция $n\mapsto f(m, n)$ измерима (по отношению к $\mathcal{F}$). Если ν — мера на N, такая, что $\int f(m, n)\,d\nu(n)$ существует для всех m, то можно показать, что функция $m\mapsto\int f(m, n)\,d\nu(n)$ измерима (по отношению к $\mathcal{R}$). В теории интегрирования существует прямой аналог свойства абсолютно сходящихся рядов не менять суммы при перегруппировке членов ряда.

Теорема I.21 (теорема Фубини). Пусть f — измеримая функция на $M\times N$. Пусть μ — мера на M, а ν — мера на N. Тогда

$$\int_M\left(\int_N |f(m, n)|\,d\nu(n)\right)d\mu(m)<\infty$$

в том и только том случае, когда

$$\int_N\left(\int_M |f(m, n)|\,d\mu(m)\right)d\nu(n)<\infty,$$

и если один (и, следовательно, оба) из этих интегралов конечен, то

$$\int_N\left(\int_M f(m, n)\,d\mu(m)\right)d\nu(n)=\int_M\left(\int_N f(m, n)\,d\nu(n)\right)d\mu(m).$$

Из задачи 25 читатель увидит, что решающую роль здесь играет конечность интеграла от абсолютного значения.

Новые возможности использования теоремы Фубини открываются после введения понятия меры-произведения:

Теорема I.22. Пусть σ-конечная мера μ задана на $\langle M, \mathcal{R}\rangle$, а σ-конечная мера ν — на $\langle N, \mathcal{F}\rangle$. Тогда существует единственная мера $\mu\otimes\nu$ на $\langle M\times N, \mathcal{R}\otimes\mathcal{F}\rangle$, обладающая таким свойством:

$$(\mu\otimes\nu)(R\times F)=\mu(R)\,\nu(F)$$

(где $0\cdot\infty=0$). Если f — измеримая функция на $M\times N$, то

$$\int_M\left(\int_N |f(m, n)|\,d\nu(n)\right)d\mu(m)<\infty$$

тогда и только тогда, когда

$$\int_{M\times N}|f|\,d(\mu\otimes\nu)<\infty,$$

и в этом случае

$$\int\limits_{M\times N} fd(\mu\otimes\nu)=\int\limits_M\left(\int\limits_N f\,d\nu\right)d\mu.$$

Меру $\mu\otimes\nu$ можно описать совершенно явным образом. Если $M\in\mathcal{R}\times\mathcal{F}$ и $M\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R_i\times F_i$, то $(\mu\otimes\nu)(M)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(R_i)\,\nu(F_i)$. На самом деле для любого $M\in\mathcal{R}\times\mathcal{F}$

$$(\mu\otimes\nu)(M)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(R_i)\,\nu(F_i)\,\middle|\,M\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i\times F_i\right\}.$$

В частности, M можно приблизить с произвольно малой погрешностью счетным объединением прямоугольников.

I.5. Два приема доказательства сходимости

В этом разделе мы описываем два приема, которые много раз пригодятся нам в дальнейшем. Несмотря на то что они элементарны и читатель может быть с ними давно знаком, нам кажется разумным обсудить их специально.

Первый из них, который мы будем называть $\varepsilon/3$-приемом, лучше всего виден в доказательстве следующей теоремы:

Теорема I.23. Пусть $C[a, b]$ — множество непрерывных на $[a, b]$ функций с метрикой

$$d_1(f, g)=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|,$$

индуцированной нормой $\|f\|_\infty=d_1(f, 0)$. Тогда $C[a, b]$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$ полно.

Доказательство. Пусть f_n есть последовательность Коши относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$. Тогда $|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|_\infty\to 0$ при $n, m\to\infty$ для любого фиксированиого $x\in[a, b]$, так что $f_n(x)$ есть последовательность Коши вещественных чисел. Поскольку $\mathbb{R}$ полно, для каждого x существует число $f(x)$, такое, что $f_n(x)\to f(x)$. Для заданного ε найдем такое N, что $\|f_n-f_m\|_\infty\leqslant\varepsilon$ при $n, m\geqslant N$. Тогда

$$\begin{aligned}\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-f_N(x)| &= \sup_{a\leqslant x\leqslant b}\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f_N(x)|\leqslant\\ &\leqslant\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\sup_{n\geqslant N}|f_n(x)-f_N(x)|=\\ &=\sup_{n\geqslant N}\|f_n-f_N\|_\infty\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

В итоге, если показать, что $f\in C[a, b]$, то можно будет заключить, что $\|f-f_n\|_\infty\to 0$, так что $f_n\to f$ в $C[a, b]$.

Таким образом, осталось доказать, что f непрерывна, или, выражаясь иначе, что «равномерный предел непрерывных функций — непрерывная функция». Фиксируем $x \in [a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Нужно найти такое δ, что $|x-y| < \delta$ влечет за собой $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Выберем n таким, чтобы $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3$. Теперь, поскольку f_n непрерывны, подберем такое δ, чтобы из $|x-y| < \delta$ следовало $|f_n(x)-f_n(y)| < \varepsilon/3$. Тогда из $|x-y| < \delta$ вытекает

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)| < \\ < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Следовательно, f непрерывна. ∎

В чем суть $\varepsilon/3$-приема? Нам задано семейство сходящихся последовательностей $\{f_n(x) \to f(x)\}_x$ и *равномерная оценка скорости сходимости*, т. е. оценка, не зависящая от x, параметризующего семейство. Мы располагаем также некоторыми сведениями о поведении $f_n(x)$ при изменении параметра x и фиксированном n, но *эта информация не обязательно равномерна по n*. То, что мы проделали, наглядно изображено на рис. I.7; $\varepsilon/3$-прием

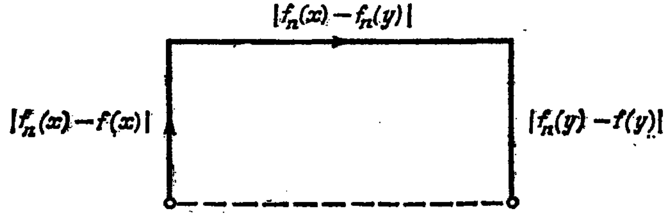

Рис. I.7. $\varepsilon/_3$-прием.

можно назвать еще доказательством «вверх, через и вокруг». В следующем разделе мы увидим, что происходит, когда нет равномерной информации о скорости сходимости, но зато можно следить (равномерно по n) за тем, как ведет себя $f_n(x)$ при изменении x; $\varepsilon/3$-прием, как мы увидим, работает и в этом случае. Дальнейшие примеры $\varepsilon/3$-приема см. в задачах 27, 29.

Другой прием, который мы назовем «методом диагональной последовательности», иллюстрируется следующей теоремой.

Теорема I.24. Пусть $f_n(m)$ — равномерно ограниченная последовательность функций на множестве положительных целых чисел, т. е. $|f_n(m)| \leqslant C$ для всех m, n. Тогда существует такая подпоследовательность $\{f_{\hat{n}(i)}(m)\}_{i=1}^{\infty}$, что $f_{\hat{n}(i)}(m)$ сходится при $i \to \infty$ для каждого фиксированного m.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $f_n(1)$. Это ограниченное множество чисел, поэтому можно найти подпоследовательность $f_{n_1(i)}$, такую, что $f_{n_1(i)}(1) \to f_\infty(1)$ для некоторого числа $f_\infty(1)$. Далее рассмотрим последовательность $f_{n_1(i)}(2)$. Можно найти подпоследовательность $f_{n_2(i)}(2) \to f_\infty(2)$ при $i \to \infty$. Действуя по индукции, можно найти идущие одна за другой подпоследовательности $f_{n_k(i)}$, такие, что (a) $f_{n_{k+1}(i)}$ — подпоследовательность в $f_{n_k(i)}$ и (b) $f_{n_k(i)}(k) \to f_\infty(k)$ при $i \to \infty$. Таким образом, в частности, $f_{n_k(i)}(j) \to f_\infty(j)$ при $i \to \infty$ для $j = 1, 2, \ldots, k$. Для того чтобы получить подпоследовательность $f_{\hat{n}(i)}$, сходящуюся для каждого j, можно попытаться взять предел горизонтальной последовательности (см. рис. I.8, *a*), но это не обязательно приведет

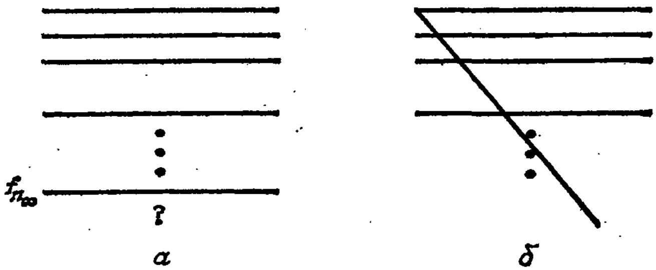

Рис. I.8. Диагональный метод.

к цели (ибо может случиться, что $n_k(1) \to \infty$). Простейший выход — взять предел диагональной последовательности $\hat{n}(k) = n_k(k)$. Тогда $f_{\hat{n}(k)}, f_{\hat{n}(k+1)}, \ldots$ — подпоследовательность $f_{n_k(i)}$, поэтому $f_{\hat{n}(i)}(k) \to f_\infty(k)$ при $i \to \infty$ для любого k. ∎

I.6. Равностепенная непрерывность

Мы уже видели, что можно следить за зависимостью $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ от x, если иметь равномерную по x информацию о законе приближения к пределу. Здесь мы изучим, что случится, когда вместо этого известна информация, равномерная по n; мы увидим, что можно не только получить сведения о зависимости предела от x, но и значительно расширить скудные исходные знания о законе приближения к пределу. Сначала уточним, что значит «следить за поведением по x равномерно по n».

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство функций из метрического пространства $\langle X, \rho \rangle$ в другое метрическое пространство $\langle Y, d \rangle$. Семейство $\mathcal{F}$ называют **равностепенно непрерывным**, если

$$(\forall \varepsilon)(\forall x \in X)(\exists \delta)(\forall f \in \mathcal{F})\ \rho(x, x') < \delta \text{ влечет за собой } d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Говорят, что $\mathscr{F}$ — **равномерно равностепенно непрерывное семейство**, если

$$(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x\in X)(\forall f\in\mathscr{F})\,\rho(x,x')<\delta \text{ влечет за собой } d(f(x), f(x'))<\varepsilon.$$

Для сравнения заметим, что утверждение о непрерывности всех $f\in\mathscr{F}$ означает, что если $(\forall\varepsilon)(\forall x\in X)(\forall f\in\mathscr{F})(\exists\delta)\,\rho(x, x')<\delta$, то $d(f(x), f(x'))<\varepsilon$. Таким образом, в случае простой непрерывности δ может зависеть от f и x (так же как и от ε), тогда как равностепенная непрерывность говорит о независимости δ от f; наконец, равномерная равностепенная непрерывность говорит о зависимости δ только от ε.

Как обещано выше, легко превратить данные о $f_n(x)$, равномерные по n, в информацию о пределе:

Теорема I.25. Пусть f_n — такая последовательность функций из одного метрического пространства в другое, что семейство $\{f_n\}$ равностепенно непрерывно. Предположим, что $f_n(x)\to f(x)$ поточечно для любого x. Тогда f непрерывна.

Доказательство. По заданным ε и x выберем такое δ, чтобы из $\rho(x, x')<\delta$ следовало $d(f_n(x), f_n(x'))<\varepsilon/2$ для всех n. Поскольку метрика d непрерывна, $d(f(x), f(x'))=\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n(x), f_n(x'))$, так что $\rho(x, x')<\delta$ влечет за собой $d(f(x), f(x'))\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$. ∎

Из доказательства ясно, что в случае, когда $\{f_{n,m}\}$ — равностепенно непрерывное семейство и $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n,m}\equiv f_m$ существует для каждого m, семейство $\{f_m\}$ равностепенно непрерывно. Равностепенная непрерывность приводит к важному следствию, которое, как мы увидим, хорошо сочетается с методом диагональной последовательности.

Теорема I.26. Пусть $\{f_n\}$ — равностепенно непрерывное семейство функций из метрического пространства $\langle X, \rho\rangle$ в полное метрическое пространство $\langle Y, d\rangle$. Предположим, что $f_n(x)$ сходится для всех x из некоторого плотного в X множества D. Тогда $f_n(x)$ сходится для всех $x\in X$. (Заметьте, что тогда по теореме I.25 предельная функция непрерывна.)

Доказательство: см. задачу 29. ∎

Теорема I.26 говорит, что в общем случае сходимость на плотном множестве в сочетании с равностепенной непрерывностью приводит к поточечной сходимости всюду. Еще более эффектный результат состоит в том, что для последовательности функций на $[0, 1]$ (см. задачу 30) из равномерной равностепенной непрерывности и поточечной сходимости следует *равномерная сходимость*.

Теорема I.27. Пусть $\{f_n\}$ — равномерно равностепенно непрерывное семейство функций на $[0, 1]$. Предположим, что $f_n(x) \to f(x)$ для каждого x из $[0, 1]$. Тогда $f_n(x) \to f(x)$ равномерно по x.

Доказательство. Пусть ε задано. Выберем такое δ, чтобы из $|x-y| < \delta$ вытекало $|f_n(x)-f_n(y)| < \varepsilon/3$ для всех n. Далее выберем такие $y_1, \ldots, y_m$, чтобы любая точка из $[0, 1]$ была в δ-окрестности некоторой точки y_i. Поскольку $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — конечное множество, можно найти такое N, чтобы из $n > N$ вытекало $|f_n(y_i)-f(y_i)| < \varepsilon/3$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $\varepsilon/3$-прием дает $\|f_n-f\|_\infty < \varepsilon$ для всех $n > N$. ∎

Каждое равностепенно непрерывное семейство функций на $[0, 1]$ является равномерно равностепенно непрерывным (задача 31).

Теоремы о сходимости (теоремы I.26 и I.27), диагональный метод § I.5 и сделанное только что замечание (задача 31) позволяют доказать следующий красивый результат.

Теорема I.28 (теорема Асколи). Пусть f_n — равномерно ограниченное равностепенно непрерывное семейство функций на $[0,1]$. Тогда некоторая подпоследовательность $f_{n(i)}$ сходится на $[0,1]$ равномерно.

Доказательство. Пусть $q_1, q_2, \ldots$ — нумерация рациональных чисел. Поскольку f_n равномерно ограничены, $|f_n(q_m)| \leqslant C$ для всех m и n. С помощью диагонального метода можно найти подпоследовательность, для которой $f_{n(i)}(q_m)$ сходятся при $i \to \infty$ для каждого m. Тогда, по теореме I.26, $f_{n(i)}$ сходятся поточечно всюду, а по теореме I.27 они сходятся равномерно. ∎

Здесь мы не будем подробно обсуждать описанных методов, однако упомянем два примера, к которым мы еще вернемся и которые демонстрируют разнообразие применений. В § V.1 определяется метрика на множестве $\mathscr{G}_D$ всех функций, аналитических в некоторой области D. В теореме V.25 мы используем равностепенную непрерывность для доказательства того, что некоторое подмножество в $\mathscr{G}_D$ компактно. В гл. XX обсуждается предел плотности свободной энергии «решеточного газа» в ящике при стремлении объема ящика к бесконечности. Наше доказательство существования такого предела для широкого класса взаимодействий проводится в три этапа. (1) Множество взаимодействий снабжается метрикой и доказывается, что взаимодействия со строго конечной областью действия в этой метрике плотны во множестве всех «допустимых» взаимодействий. (2) Плотность свободной энергии F_Λ при фиксированном объеме Λ рассматривается как функция на метрическом пространстве допустимых взаимодействий, и доказывается, что семейство $\{F_\Lambda\}$ равностепенно непрерывно. (3)

Доказывается, что $\lim\limits_{\Lambda\to\infty} F_\Lambda(\Phi)$ существует, если Φ—взаимодействие с конечной областью действия. Тогда из соображений, связанных с равностепенной непрерывностью, следует, что предел $\lim\limits_{\Lambda\to\infty} F_\Lambda(\Phi)$ существует для всех допустимых взаимодействий Φ (и непрерывен по Φ).

ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1.1. Обсуждение тонкостей, связанных с леммой Цорна, аксиомой выбора и т. д., доступное новичкам, можно найти в книге Халмоша: P. R. Halmos, Naive Set Theory, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, N.J., 1960.

§ 1.2. Дополнительное обсуждение понятий, относящихся к метрическому пространству, см. в книгах: A. Gleason, Introduction to Abstract Analysis, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966, или А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», М., 1968. По поводу нормированных линейных пространств (и в частности, приведенного нами описания риманова интеграла) см. Ж. Дьёдонне, Основы современного анализа, «Мир», М., 1964, или L. Loomis and S. Sternberg, Advanced Calculus, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

§ 1.3, 1.4. Обсуждение интегрирования по Лебегу см. в книгах: J. Williamson, Introduction to the Lebesgue Integral, Holt, New York, 1962, или У. Рудин, Основы современного анализа, изд. 2-е, стереотип., «Мир», М., 1976. При изучении абстрактной теории меры мы особенно рекомендуем книги: S. K. Berberian, Measure and Integration, Macmillan, New York, 1965, H. Royden, Real Analysis, Macmillan, New York, 1968 г. См. также П. Халмош, Теория меры, ИЛ, М., 1953; Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, т. 1, Общая теория, ИЛ, М., 1962, гл. III.

Обсуждение парадокса Банаха—Тарского см. в работах: R. Rosenblum, Elements of Mathematical Logic, Dover, New York, 1950, p. 150, или R. Robinson, *Fund. Math.*, 34 (1947), 246.

Отметим, что борелевы множества можно построить следующим образом. Начнем с открытых множеств и их дополнений—замкнутых множеств. Добавим к ним счетные объединения замкнутых множеств, называемые F_σ-множествами, и их дополнения (счетные пересечения открытых множеств), называемые G_δ-множествами. Затем возьмем счетные объединения G_δ-множеств, называемые $G_{\delta\sigma}$-множествами, и их дополнения $F_{\sigma\delta}$-множества. Затем добавим $G_{\delta\sigma\delta}$ и т. д. *После счетного числа шагов дело еще не сделано*, ибо объединение одного G_δ, одного $F_{\sigma\delta}$, одного $G_{\delta\sigma\delta}$, ... может не войти в построенную совокупность. Для завершения нужна трансфинитная индукция до первого несчетного порядкового числа.

Как видно из задач, борелевы функции образуют наименьшее семейство, замкнутое относительно поточечного предельного перехода и содержащее все непрерывные функции. Как и в случае борелевых множеств, для его построения требуется трансфинитная индукция. Однако заметим, что при любой борелевой мере μ любая борелева функция равна почти всюду относительно μ поточечному пределу непрерывных функций (задачи 18 и 19).

Отбрасывая средние трети на отрезке $[0, 1]$, можно построить замкнутое множество положительной меры с пустой внутренностью.

Подход к мерам на топологических пространствах (а не на абстрактных множествах), который мы обсуждаем в § IV.4, моден у французской школы. См. Н. Бурбаки, Интегрирование. Меры, интегрирование мер, «Наука», М., 1967; Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара, свертка и представления, «Наука» М., 1970, или (красивое и краткое обсуждение) L. Nachbin, The Haar Integral, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, N. J., 1965, Ch. I.

§ I.6. Теорему Асколи естественно формулировать для функций на произвольном компактном метрическом пространстве или, более общо, на равномерном пространстве с первой аксиомой счетности (которое на самом деле всегда метризуемо), например на компактной топологической группе.

Идея использовать равностепенную непрерывность при доказательстве существования термодинамического предела восходит по крайней мере к работе: R. B. Griffiths, A Proof that the Free Energy of a Spin System is Extensive, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 1215—1222. Доказательство, которое мы наметили для решеточных газов и которое обсуждается в гл. XX, принадлежит Галлавотти и Мираклю: G. Gallavotti and S. Miracle, Statistical Mechanics of Lattice Systems, *Commun. Math. Phys.*, 5 (1967), 317—324.

В теории аналитических функций равностепенная непрерывность лежит по существу в основе одного из доказательств теоремы Римана; см., например, L. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1953, где множества равностепенно непрерывных функций называются «нормальными семействами».

ЗАДАЧИ

1. Найдите контрпример к утверждению: каждое симметричное транзитивное отношение рефлексивно. Что неправильно в доказательстве: «из xRy и yRx в силу транзитивности вытекает xRx»?

†*2.* Проверьте, что кандидаты в метрики из примеров 1—3 § I.2 на самом деле метрики.

3. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши в метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$. Предположим, что $x_{n(i)} \xrightarrow[i\to\infty]{} x_\infty$ для некоторой подпоследовательности $x_{n(i)}$. Докажите, что $x_n \longrightarrow x_\infty$.

4. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в некотором метрическом пространстве, и пусть x_∞ — заданный элемент. Предположим, что каждая подпоследовательность из x_n имеет подпоследовательность, сходящуюся к x_∞. Докажите, что $x_n \longrightarrow x_\infty$.

†*5.* Проведите в деталях доказательство теоремы I.3.

†*6.* Докажите теоремы I.4 и I.5.

†*7.* Докажите теорему I.6.

8. Докажите: если $x_n \longrightarrow x_\infty$ в метрическом пространстве $\langle X, d\rangle$, то $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = d(x, x_\infty)$ для любого x.

†*9.* Завершите доказательство теоремы I.7.

†*10.* Докажите, что $S[a, b]$ плотно в $PC[a, b]$ по норме $\|\cdot\|_\infty$.

11. (a) Пусть α — функция на $[0, 1]$. Ее называют функцией ограниченной вариации, если существует такое C, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)| \leq C$$

для любой совокупности $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1$. Докажите, что любая монотонная функция имеет ограниченную вариацию.

(b) Определим l_α на $S[0, 1]$ равенством

$$l_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} s_i \chi_i\right)=\sum_{i=1}^{n} s_i\left[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})\right].$$

Докажите, что l_α—ограниченное линейное преобразование тогда и только тогда, когда α имеет ограниченную вариацию.

(c) Пусть α—функция ограниченной вариации на $[0, 1]$. Постройте интеграл Римана—Стильтьеса $\int f d\alpha$.

†*12*. Докажите свойства $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$, сформулированные в дополнении к § I.2.

13. Построим следующим способом множество V (множество Витали). Назовем два числа x, $y \in [0, 1)$ эквивалентными, если разность $x-y$ рациональна. Включим в V ровно по одному числу из каждого класса эквивалентности. Докажите, что V неизмеримо по Лебегу. [*Указание*: докажите, что $[0, 1)$ есть дизъюнктное объединение «трансляций» множества V.]

†*14*. (a) Пусть f—борелева функция. Докажите, что $f^{-1}[B] \in \mathscr{B}$ для любого $B \in \mathscr{B}$.

(b) Пусть f и g—борелевы функции. Докажите, что $f \circ g$ борелева.

15. (a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, где r_n, r вещественны. Докажите, что $r = \sup\limits_{m} \inf\limits_{n>m} r_n$.

(b) Докажите, что если f_n—последовательность функций и $f(x) = \inf f_n(x)$, то

$$f^{-1}[[a, \infty)] = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}[[a, \infty)], \quad f^{-1}[(a, \infty)] = \bigcup_{m=1}^{\infty} f_i^{-1}[[a+1/m, \infty)].$$

Выведите отсюда, что точная нижняя грань любой последовательности борелевых функций—борелева функция.

(c) Докажите с помощью (a) и (b), что любой поточечный предел последовательности борелевых функций есть борелева функция.

(d) Выведите с помощью (a) теорему о мажорированной сходимости из теоремы о монотонной сходимости.

•*16*. Докажите, что ограниченные борелевы функции на $[0, 1]$ образуют наименьшее семейство $\mathscr{F}$, которое включает в себя $C[0, 1]$ и обладает таким свойством: если f_n—*последовательность* равномерно ограниченных функций из $\mathscr{F}$, таких, что $f_n \longrightarrow f$ поточечно, то $f \in \mathscr{F}$.

†*17*. Докажите следствие теоремы I.12.

†*18*. (a) Докажите, что для любого открытого множества A в $[0, 1]$ функция χ_A есть L^1-предел непрерывных функций.

(b) Пусть B—борелево множество в $[0, 1]$. Докажите, что χ_B есть L^1-предел характеристических функций χ_A открытых множеств A (используйте регулярность меры Лебега).

(c) Докажите, что $C[a, b]$ L^1-плотно в $L^1[a, b]$.

•*19*. (a) Пусть $f_n \longrightarrow f$ поточечно и f_n непрерывны. Докажите, что $f^{-1}[[a, \infty)]$ является F_σ-множеством (т. е. счетным объединением замкнутых множеств). (*Указание:* используйте задачу 15a.)

(b) Докажите, что каждое борелево множество на вещественной прямой равно п. в. (относительно меры Лебега) некоторому F_σ, а также равно п. в. некоторому G_δ (т. е. счетному пересечению открытых множеств).

•*20*. Функция f называется функцией скачков, если она монотонна и непрерывна всюду, кроме счетного числа точек (скачков), и если f кусочно постоянна на дополнении к этим точкам. Функция f называется сингулярной, если f' существует п. в. и равна нулю п. в. Функция f называется абсолютно непрерывной, если для любого заданного ε можно найти такое δ, что для любого n и точек $x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1}$

$$\text{из } \sum_{i=0}^{n} |x_{2i+1}-x_{2i}| < \delta \text{ следует } \sum_{i=0}^{n} |f(x_{2i+1})-f(x_{2i})| < \varepsilon.$$

Докажите, что любая монотонная функция α на $[0, 1]$ может быть (однозначно) представлена в виде $\alpha_{pp}+\alpha_{sing}+\alpha_{ac}$, где α_{pp}—функция скачков, α_{sing} сингулярна и непрерывна, а α_{ac} абсолютно непрерывна.

21. Пусть α—монотонная функция. Предположим, что $\alpha'(x)$ существует п. в. Докажите, что $\alpha(b)-\alpha(a) \geqslant \int\limits_a^b \alpha'(x)\,dx$. Всегда ли имеет место равенство?

†*22.* Докажите, что σ-кольцо замкнуто относительно счетных пересечений.

23. (a) Пусть $\mathcal{S}$—семейство подмножеств в M. Докажите, что существует наименьшее σ-поле $\mathcal{F}$, содержащее $\mathcal{S}$. Говорят, что $\mathcal{S}$ порождает $\mathcal{F}$.
(b) Пусть $T\colon M \to N$, причем на M и N заданы σ-поля $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{S}$ порождает $\mathcal{F}$. Докажите, что T измеримо тогда и только тогда, когда $T^{-1}[S] \subset \mathcal{R}$ для всех $S \in \mathcal{S}$.

**24.* Пусть μ, ν—две конечные меры. Докажите, что ν абсолютно непрерывна относительно μ тогда и только тогда, когда $(\forall\varepsilon)(\exists\delta)$ из $\mu(A) < \delta$ вытекает $\nu(A) < \varepsilon$.

25. Рассмотрим функцию $f(x, y)$ на $\mathbf{R}^2$, определенную равенствами

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x>0,\ y>0,\ 0 \leqslant x-y \leqslant 1, \\ -1, & x>0,\ y>0,\ 0 < y-x \leqslant 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычислите $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy\right)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\right)dy$ и прокомментируйте теорему Фубини и теорему I.22.

26. Постройте последовательность непрерывных функций f_n, поточечно сходящуюся к функции f, *не являющейся* непрерывной. Дайте прямое доказательство того, что: (a) сходимость $f_n(x) \to f(x)$ неравномерна по x, (b) семейство f_n не является равностепенно непрерывным.

27. Используйте $\varepsilon/3$-прием для доказательства следующего утверждения. Пусть B—полное нормированное линейное пространство, и пусть T_n—последовательность линейных отображений $T_n\colon B \to B$ с двумя свойствами: (i) T_n равномерно ограничены по n, т. е. $\|T_n\| \leqslant C$, где C не зависит от n; (ii) $T_n x$ сходится для всех x из некоторого плотного в B множества D. Тогда $T_n x$ сходится для каждого x и предельная функция Tx задает ограниченное линейное отображение $T\colon B \to B$.

28. Постройте последовательность $f_n(x)$ ограниченных функций на $[0, 1]$, сходящуюся в L^1 к нулю, но поточечно не сходящуюся ни в одной точке из $[0, 1]$.

†*29.* Используйте $\varepsilon/3$-прием для доказательства теоремы I.26.

30. Метрическое пространство X называется *вполне ограниченным*, если для каждого ε его можно покрыть конечным числом ε-шаров. Докажите, что поточечно сходящаяся равномерно равностепенно непрерывная последовательность функций на вполне ограниченном метрическом пространстве сходится равномерно.

(a) С помощью свойства Гейне—Бореля докажите, что непрерывная на $[0, 1]$ функция равномерно непрерывна.

(b) Докажите, что равностепенно непрерывное семейство функций на $[0, 1]$ равномерно равностепенно непрерывно.

Пусть $F(x, y)$—непрерывная функция на $[0, 1]\times[0, 1]$. Рассмотрим отображение $\mathcal{F}$: $C[0, 1]\longrightarrow C[0, 1]$, задаваемое формулой

$$(\mathcal{F}f)(x)=\int_0^1 F(x, y)\, f(y)\, dy.$$

Докажите, что $\{\mathcal{F}f \mid \|f\|_\infty \leqslant 1\}$—равностепенно непрерывное семейство, так что любая заданная последовательность f_n, для которой $\|f_n\|\leqslant 1$ при всех n, содержит подпоследовательность $f_{n(i)}$ с равномерно сходящимся образом $\mathcal{F}f_{n(i)}$.

Замечание. Именно последнее свойство делает $\mathcal{F}$ отображением, известным под названием компактного (вполне непрерывного) оператора (они рассматриваются в § VI.5). Классическая фредгольмова теория интегральных уравнений основана на том, что $\mathcal{F}$—компактный оператор.

(a) Пусть D—некоторая область на комплексной плоскости. Пусть $\mathcal{F}$—такое семейство аналитических функций на D, что для любого компактного множества $C\subset D$ множество $\{|f(z)| \mid f\in\mathcal{F},\ z\in C\}$ ограничено. С помощью интегральной формулы Коши докажите, что $\mathcal{F}$—равностепенно непрерывное семейство.

(b) Докажите теорему Витали о сходимости: если D—связная область комплексной плоскости и f_n—последовательность аналитических функций на D, равномерно ограниченных на компактных подмножествах в D, и если $f_n(z)$ сходится поточечно для всех z из некоторого подмножества в D, имеющего в D предельную точку, то f_n сходится равномерно на компактных подмножествах к аналитической функции. [*Указание:* используйте задачу 4.]

(c) Докажите теорему Витали с помощью ряда Тейлора и аналитического продолжения.

Замечание. Обсуждение теоремы Витали с точки зрения пункта (c) можно найти в книге: Е. Титчмарш, Теория функций, Гостехиздат, М., 1951.

II. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Господа, в гильбертовом пространстве остается еще много места.

С. МАКЛЕЙН

II.1. Геометрия гильбертова пространства

Конечномерные векторные пространства обладают тремя типами свойств, обобщения которых мы изучим в следующих четырех главах: линейными свойствами, метрическими свойствами и геометрическими свойствами. В этой главе мы займемся векторными пространствами с внутренним произведением, которое представляет собой обобщение обычного скалярного произведения в конечномерных векторных пространствах. Геометрические свойства этих пространств связаны с понятием угла, заложенным в определении внутреннего произведения.

Определение. Комплексное векторное пространство V называется **пространством с внутренним произведением**, если существует комплекснозначная функция $(\cdot, \cdot)$ на $V \times V$, удовлетворяющая следующим четырем условиям при всех $x, y, z \in V$ и $\alpha \in \mathbb{C}$:

(i) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
(ii) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$;
(iii) $(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$;
(iv) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Функция $(\cdot, \cdot)$ называется внутренним произведением.

Заметим, что из (ii), (iii) и (iv) следует, что $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha (x, y) + \beta (x, z)$ и что $(\alpha x, y) = \bar{\alpha} (x, y)$. Предупреждаем читателя, что в некоторых учебниках пользуются условием, отличным от (iii), а именно определяют внутреннее произведение так, что оно линейно по *первому* вектору и сопряженно-линейно по *второму*.

Пример 1 ($\mathbb{C}^n$). Пусть $\mathbb{C}^n$ обозначает множество всех наборов n комплексных чисел. Для $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ и $y = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ из $\mathbb{C}^n$ положим по определению

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j y_j.$$

Пример 2. Пусть $C[a, b]$ — множество комплекснозначных непрерывных функций на интервале $[a, b]$. Для $f, g \in C[a, b]$

положим

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Теперь мы введем те геометрические понятия, которые имеют смысл в любых пространствах с внутренним произведением.

Определение. Два вектора x и y в пространстве V с внутренним произведением называются **ортогональными**, если $(x, y) = 0$. Набор $\{x_i\}$ векторов в V называется **ортонормированным множеством**, если $(x_i, x_i) = 1$ при всех i и $(x_i, x_j) = 0$, если $j \neq i$.

Введем сокращенное обозначение $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Скоро мы увидим, что $\|\cdot\|$ является на самом деле нормой.

Теорема II.1 (теорема Пифагора). Пусть $\{x_n\}_{n=1}^N$ — ортонормированное множество в пространстве V с внутренним произведением. Тогда для всех $x \in V$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |(x, x_n)|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \right\|^2.$$

Доказательство. Запишем x в виде

$$x = \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n + \left(x - \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \right).$$

Короткое вычисление, основанное на свойствах внутреннего произведения, показывает, что

$$\sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \quad \text{и} \quad x - \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n$$

ортогональны. Поэтому

$$(x, x) = \left\| \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \right\|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \right\|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^N |(x_n, x)|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \right\|^2. \blacksquare$$

Следствие (неравенство Бесселя). Пусть $\{x_n\}_{n=1}^N$ — ортонормированное множество в пространстве V с внутренним произведением. Тогда для всех $x \in V$

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^N |(x, x_n)|^2.$$

Следствие (неравенство Шварца). Если x и y — векторы в пространстве V с внутренним произведением, то

$$|(x,\ y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Доказательство. Случай $y=0$ тривиален, поэтому положим $y \neq 0$. Вектор $y/\|y\|$ сам по себе образует ортонормированное множество, так что, применяя неравенство Бесселя к любому $x \in V$, получим

$$\|x\|^2 \geqslant |(x,\ y/\|y\|)|^2 = \frac{|(x,\ y)|^2}{\|y\|^2},$$

откуда следует $|(x,\ y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. ∎

Еще одно полезное геометрическое равенство — тождество параллелограмма (задача 4):

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

В § I.2 мы определили нормированное линейное пространство и заметили, что всякое такое пространство является метрическим. Следующая теорема показывает, что всякое пространство с внутренним произведением есть нормированное линейное пространство.

Теорема II.2. Всякое пространство V с внутренним произведением есть нормированное линейное пространство с нормой $\|x\| = (x,\ x)^{1/2}$.

Доказательство. Так как V — векторное пространство, нам надо только показать, что $\|\cdot\|$ обладает всеми свойствами нормы. Все эти свойства, за исключением лишь неравенства треугольника, непосредственно следуют из свойств (i)—(iv) внутреннего произведения. Пусть $x,\ y \in V$. Тогда в силу неравенства Шварца

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x,\ x)+(x,\ y)+(y,\ x)+(y,\ y) = \\ &= (x,\ x)+2\,\mathrm{Re}\,(x,\ y)+(y,\ y) \leqslant \\ &\leqslant (x,\ x)+2\,|(x,\ y)|+(y,\ y) \leqslant \\ &\leqslant (x,\ x)+2\,(x,\ x)^{1/2}(y,\ y)^{1/2}+(y,\ y).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|x+y\|^2 \leqslant (\|x\|+\|y\|)^2,$$

что доказывает неравенство треугольника. ∎

Эта теорема показывает, что в V имеется естественная метрика

$$d(x,\ y) = \sqrt{(x-y,\ x-y)}.$$

Тем самым мы получаем понятия сходимости, полноты и плотности, определенные для метрических пространств в § I.2. В частности, мы всегда можем пополнить V до нормированного линейного пространства $\tilde{V}$, в которое V изометрически вложено как плотное подмножество. При этом $\tilde{V}$ — также пространство с внутренним произведением, поскольку внутреннее произведение может быть продолжено с V на $\tilde{V}$ по непрерывности (задача 1).

Определение. Полное пространство с внутренним произведением называется **гильбертовым пространством**. Пространства с внутренним произведением называют иногда предгильбертовыми пространствами.

Определение. Говорят, что два гильбертовых пространства $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ **изоморфны**, если существует линейный оператор U из $\mathscr{H}_1$ *на* $\mathscr{H}_2$, такой, что $(Ux, Uy)_{\mathscr{H}_2} = (x, y)_{\mathscr{H}_1}$ для всех $x, y \in \mathscr{H}_1$. Такой оператор называется **унитарным**.

Мы разовьем введенные понятия в ряде примеров и попутно познакомим читателя с разными типами гильбертовых пространств, которые ему могут встретиться.

Пример 2 (опять L^2). Определим $L^2[a, b]$ как множество комплекснозначных измеримых на конечном интервале $[a, b]$ функций, удовлетворяющих условию $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. Определим внутреннее произведение формулой

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Заметим, что такое внутреннее произведение имеет смысл, поскольку

$$|\overline{f(x)}\, g(x)| \leqslant \frac{1}{2} |f(x)|^2 + \frac{1}{2} |g(x)|^2,$$

так что $\overline{f(x)}\, g(x)$ принадлежит $L^1[a, b]$. Доказательство, аналогичное доказательству теоремы Рисса — Фишера (теорема I.12), позволяет убедиться в том, что $L^2[a, b]$ полно и есть, таким образом, гильбертово пространство. Не так трудно показать (задача 2), что $L^2[a, b]$ есть пополнение $C[a, b]$ по норме

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пример 3 (l_2). Определим l_2 как множество последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, с внутренним произведением

$$(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x}_n y_n.$$

В § II.3 мы увидим, что всякое гильбертово пространство, имеющее счетное плотное множество и не являющееся конечномерным, изоморфно l_2. В этом смысле l_2 есть канонический пример гильбертова пространства.

Пример 4 ($L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$). Пусть μ — мера Бореля в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ комплекснозначных измеримых функций на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\mu < \infty$. Тогда $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ есть гильбертово пространство с внутренним произведением

$$(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, g(x)\, d\mu.$$

Пример 5 (прямая сумма). Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства. Тогда множество пар $\langle x, y\rangle$, где $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$, есть гильбертово пространство с внутренним произведением

$$(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = (x_1, x_2)_{\mathcal{H}_1} + (y_1, y_2)_{\mathcal{H}_2}.$$

Это пространство называется **прямой суммой** пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ и обозначается $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Если μ_1 и μ_2 — взаимно сингулярные меры Бореля на $\mathbb{R}$ и $\mu = \mu_1 + \mu_2$, то $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ естественным образом изоморфно $L^2(\mathbb{R}, d\mu_1) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_2)$ (задача 3). Можно также следующим образом построить счетную прямую сумму. Пусть $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность гильбертовых пространств. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n \in \mathcal{H}_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < \infty.$$

Тогда $\mathcal{H}$ есть гильбертово пространство с естественным внутренним произведением; оно записывается в виде

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Пример 6 (векторнозначные функции). Пусть $\langle X, \mu\rangle$ есть пространство с мерой и $\mathcal{H}'$ — некоторое гильбертово пространство. Пусть $L^2(X, d\mu; \mathcal{H}')$ есть множество измеримых функций на X со значениями в $\mathcal{H}'$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_X \|f(x)\|^2_{\mathcal{H}'}\, d\mu(x) < \infty.$$

Это множество является гильбертовым пространством с внутренним произведением

$$(f, g) = \int\limits_X (f(x), g(x))_{\mathcal{H}'}\, d\mu(x).$$

Разумеется, следует еще сказать, что понимается под измеримостью для векторнозначных функций. Соответствующее определение и другие родственные вопросы обсуждаются в задаче 12 и в дополнении к § IV.5.

II.2. Лемма Рисса

В примерах § II.1 мы показали несколько различных путей построения новых гильбертовых пространств из данных. Еще один способ получается, если рассмотреть какое-нибудь замкнутое подпространство $\mathcal{M}$ данного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. С тем естественным внутренним произведением, которое оно наследует из $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$ есть гильбертово пространство. Обозначим через $\mathcal{M}^{\perp}$ множество векторов в $\mathcal{H}$, ортогональных к $\mathcal{M}$; $\mathcal{M}^{\perp}$ называется **ортогональным дополнением** $\mathcal{M}$. Из линейности внутреннего произведения следует, что $\mathcal{M}^{\perp}$ есть линейное подпространство в $\mathcal{H}$, и элементарное рассуждение (задача 6) показывает, что $\mathcal{M}^{\perp}$ замкнуто. Следовательно, $\mathcal{M}^{\perp}$ — также гильбертово пространство. Подпространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{\perp}$ имеют единственный общий элемент — нулевой. Теорема, которая приводится ниже, утверждает, что для любого замкнутого собственного подпространства существуют перпендикулярные к нему векторы. На самом деле их столько, что

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^{\perp} = \{x + y \mid x \in \mathcal{M},\ y \in \mathcal{M}^{\perp}\}.$$

Это важное геометрическое свойство — одна из главных причин, благодаря которым гильбертовы пространства проще в обращении, чем банаховы (гл. III). При доказательстве следующих леммы и теоремы читатель должен иметь в виду конечномерный пример (см. рис. II.1).

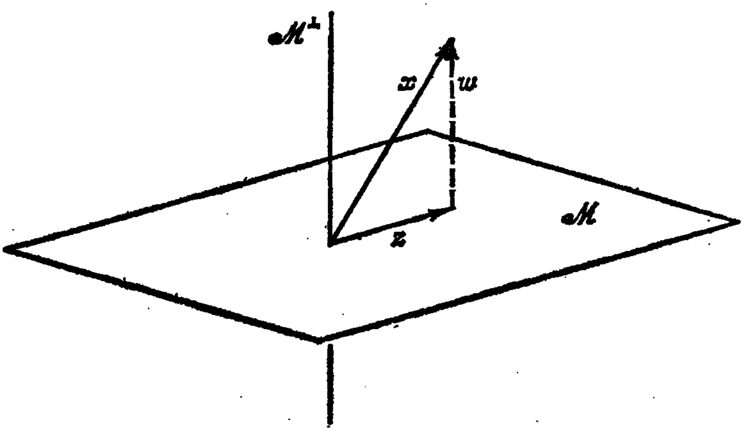

Рис. II.1. Проекция x на $\mathcal{M}$.

Лемма. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{M}$ — его замкнутое подпространство, и пусть $x \in \mathcal{H}$. Тогда в $\mathcal{M}$ существует единственный элемент z, ближайший к x.

Доказательство. Пусть $d = \inf\limits_{y \in \mathcal{M}} \|x-y\|$. Выберем последовательность $\{y_n\}$, $y_n \in \mathcal{M}$, такую, что

$$\|x-y_n\| \to d.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\|y_n-y_m\|^2 = \|(y_n-x)-(y_m-x)\|^2 = \\
&\quad = 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-\|-2x+y_n+y_m\|^2 = \\
&\quad = 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-4\|x-{}^1/_2(y_n+y_m)\|^2 \leqslant \\
&\quad \leqslant 2\|y_n-x\|^2+\|y_m-x\|^2-4d^2 \underset{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}}{\longrightarrow} 2d^2+2d^2-4d^2=0.
\end{aligned}$$

Второе равенство вытекает из тождества параллелограмма; неравенство следует из того, что ${}^1/_2(y_n+y_m) \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\{y_n\}$ — последовательность Коши и, так как $\mathcal{M}$ замкнуто, $\{y_n\}$ сходится к некоторому элементу z из $\mathcal{M}$. Отсюда непосредственно следует, что $\|x-z\| = d$. Доказательство единственности мы оставляем читателю в качестве упражнения. ∎

Теорема II.3 (теорема о проекции). Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{M}$ — его замкнутое подпространство. Тогда любой элемент $x \in \mathcal{H}$ однозначно записывается в виде $x = z + w$, где $z \in \mathcal{M}$, а $w \in \mathcal{M}^\perp$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{H}$. Тогда в силу леммы существует единственный элемент $z \in \mathcal{M}$, ближайший к x. Положим $w = x - z$; тогда мы, очевидно, имеем $x = z + w$. Пусть $y \in \mathcal{M}$ и $t \in \mathbb{R}$. Если $d = \|x-z\|$, то

$$\begin{aligned}
d^2 &\leqslant \|x-(z+ty)\|^2 = \|w-ty\|^2 = \\
&= d^2 - 2t\,\mathrm{Re}(w, y) + t^2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Значит, $-2t\,\mathrm{Re}(w, y)+t^2\|y\|^2 \geqslant 0$ при всех t, откуда следует, что $\mathrm{Re}(w, y) = 0$. Подобное рассуждение с заменой t на it показывает, что $\mathrm{Im}(w, y) = 0$. Следовательно, $w \in \mathcal{M}^\perp$. Единственность мы предлагаем читателю доказать самостоятельно. ∎

Теорема о проекции устанавливает естественный изоморфизм между $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ и $\mathcal{H}$:

$$\langle z, w\rangle \mapsto z + w.$$

Мы часто будем опускать этот изоморфизм и писать просто $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

В § I.2 мы уже определили, что подразумевается под ограниченным линейным преобразованием из одного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в другое $\mathscr{H}'$. Обозначим множество таких преобразований через $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$. Очевидно, что $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ есть векторное пространство; оно становится банаховым пространством, если ввести норму

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_{\mathscr{H}}=1} \|Tx\|_{\mathscr{H}'}.$$

Доказательство этого факта мы отложим до гл. III. Оно не трудно, но там мы сможем сделать это с большей общностью. Пока нас интересует тот специальный случай, когда $\mathscr{H}' = \mathbb{C}$.

Определение. Пространство $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ называется **сопряженным пространством** к $\mathscr{H}$ и обозначается $\mathscr{H}^*$. Элементы $\mathscr{H}^*$ называются **непрерывными линейными функционалами.**

Следующая важная теорема, характеризующая $\mathscr{H}^*$, установлена Ф. Риссом и М. Фреше.

Теорема II.4 (лемма Рисса). Для всякого $T \in \mathscr{H}^*$ существует единственный элемент $y_T \in \mathscr{H}$, такой, что $T(x) = (y_T, x)$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Кроме того, $\|y_T\|_{\mathscr{H}} = \|T\|_{\mathscr{H}^*}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{N}$ — множество таких $x \in \mathscr{H}$, что $T(x) = 0$. В силу непрерывности T множество $\mathscr{N}$ есть замкнутое подпространство. Если $\mathscr{N} = \mathscr{H}$, то $T(x) = 0 = (0, x)$ для всех x и доказательство закончено. Поэтому допустим, что $\mathscr{N}$ не совпадает с $\mathscr{H}$. Тогда, в силу теоремы о проекции, в $\mathscr{N}^{\perp}$ есть ненулевой вектор x_0. Положим $y_T = \overline{T(x_0)}\, \|x_0\|^{-2} x_0$. Покажем, что y_T обладает нужными свойствами. Во-первых, если $x \in \mathscr{N}$, то $T(x) = 0 = (y_T, x)$. Далее, если $x = \alpha x_0$, то

$$T(x) = T(\alpha x_0) = \alpha T(x_0) = (\overline{T(x_0)}\, \|x_0\|^{-2} x_0,\ \alpha x_0) = (y_T, \alpha x_0).$$

Так как функции $T(\cdot)$ и $(y_T, \cdot)$ линейны и совпадают на $\mathscr{N}$ и x_0, они должны совпадать и на пространстве, натянутом на $\mathscr{N}$ и x_0. Но $\mathscr{N}$ и x_0 порождают все $\mathscr{H}$, так как каждый элемент $y \in \mathscr{H}$ может быть записан в виде

$$y = \left(y - \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0\right) + \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0.$$

Значит, $T(x) = (y_T, x)$ для всех $x \in \mathscr{H}$.

Для доказательства равенства $\|T\|_{\mathscr{H}^*} = \|y_T\|_{\mathscr{H}}$ заметим, что

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |T(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(y_T, x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|y_T\|\, \|x\| = \|y_T\|$$

и

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |T(x)| \geqslant \left| T\left(\frac{y_T}{\|y_T\|}\right)\right| = \left(y_T, \frac{y_T}{\|y_T\|}\right) = \|y_T\|. \blacksquare$$

Заметим, что из неравенства Шварца следует утверждение, обратное к лемме Рисса. Именно, всякий элемент $y \in \mathscr{H}$ определяет непрерывный линейный функционал T_y на $\mathscr{H}$: $T_y(x) = (y, x)$.

Лемма Рисса имеет следующее важное для приложений

Следствие. Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — функция из $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям

(i) $B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z)$,

(ii) $B(\alpha x + \beta y, z) = \bar{\alpha} B(x, z) + \bar{\beta} B(y, z)$,

(iii) $|B(x, y)| \leqslant C \|x\| \|y\|$

для всех $x, y, z \in \mathscr{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда существует единственное ограниченное линейное преобразование A из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, такое, что

$$B(x, y) = (Ax, y) \text{ для всех } x, y \in \mathscr{H}.$$

Нормой A является наименьшая константа C, такая, что выполняется (iii).

Доказательство. Фиксируем x; тогда (ii) и (iii) показывают, что $B(x, \cdot)$ — непрерывный линейный функционал на $\mathscr{H}$. Следовательно, в силу леммы Рисса, существует $x' \in \mathscr{H}$, такой, что

$$B(x, y) = (x', y) \text{ для всех } y \in \mathscr{H}.$$

Положим $Ax = x'$. Нетрудно показать, что A — непрерывный линейный оператор с требуемыми свойствами (задача 8). $\blacksquare$

Функция $B(\cdot, \cdot)$ на $\mathscr{H}$, удовлетворяющая условиям (i) и (ii), называется **полуторалинейной формой**.

II.3. Ортонормированные базисы

Мы уже определили, что понимается под ортонормированным множеством векторов. В этом разделе мы разовьем дальше эту идею; в частности, мы распространим понятие «базиса», столь полезное в случае конечномерных векторных пространств, на полные пространства с внутренним произведением. Если S есть ортонормированное множество в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и не существует другого ортонормированного множества, содержащего S как собственное подмножество, то S называется **ортонормированным базисом** (или **полной ортонормированной системой**) пространства $\mathscr{H}$.

Теорема II.5. Всякое гильбертово пространство $\mathscr{H}$ имеет ортонормированный базис.

Доказательство. Рассмотрим набор $\mathscr{C}$ ортонормированных множеств в $\mathscr{H}$. Упорядочим $\mathscr{C}$ по включению, т. е. будем считать, что $S_1 \prec S_2$, если $S_1 \subset S_2$. С таким определением отношения $\prec$ множество $\mathscr{C}$ становится частично упорядоченным; оно не пусто, так как если v — любой элемент из $\mathscr{H}$, то множество, состоящее из единственного вектора $v/\|v\|$, уже есть ортонормированное множество. Пусть теперь $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — любое линейно упорядоченное подмножество из $\mathscr{C}$. Тогда $\bigcup\limits_{\alpha\in A} S_\alpha$ есть ортонормированное множество, содержащее каждое S_α и являющееся, таким образом, верхней гранью для $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Поскольку всякое линейно упорядоченное подмножество из $\mathscr{C}$ имеет верхнюю грань, мы можем применить лемму Цорна (теорема I.2) и заключить, что $\mathscr{C}$ имеет максимальный элемент, т. е. такую ортонормированную систему, которая не содержится как собственное подмножество ни в одной другой ортонормированной системе. ∎

Следующая теорема показывает, что, как и в конечномерном случае, всякий элемент гильбертова пространства может быть представлен в виде линейной комбинации (возможно, бесконечной) элементов базиса.

Теорема II.6. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и $S = \{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — его ортонормированный базис. Тогда для каждого $y \in \mathscr{H}$

$$y = \sum_{\alpha\in A} (x_\alpha, y)\, x_\alpha \tag{II.1}$$

и

$$\|y\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |(x_\alpha, y)|^2. \tag{II.2}$$

Равенство в (II.1) означает, что сумма в правой части сходится (независимо от порядка) к y в $\mathscr{H}$. И обратно — если $\sum\limits_{\alpha\in A} |c_\alpha|^2 < \infty$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, то $\sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha x_\alpha$ сходится к некоторому элементу из $\mathscr{H}$.

Доказательство. Мы уже убедились в § II.1 (неравенство Бесселя), что для любого конечного подмножества $A' \subset A$ выполняется неравенство $\sum\limits_{\alpha\in A'} |(x_\alpha, y)|^2 \leqslant \|y\|^2$. Следовательно, $(x_\alpha, y) \neq 0$ для не более чем счетного множества индексов α из A, которые мы упорядочим каким-либо образом: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Далее, поскольку $\sum\limits_{j=1}^{N} |(x_{\alpha_j}, y)|^2$ монотонно возрастает и ограничена, она сходится к конечному пределу, когда $N \to \infty$. Пусть $y_n = \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}$. Тогда при $n > m$

$$\|y_n - y_m\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j} \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |(x_{\alpha_j}, y)|^2.$$

Следовательно, $\{y_n\}$ есть последовательность Коши, и она сходится к элементу y' из $\mathscr{H}$. Заметим, что

$$(y - y', x_{\alpha_l}) = \lim_{n \to \infty} \left(y - \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}, x_{\alpha_l} \right) = \\ = (y, x_{\alpha_l}) - (y, x_{\alpha_l}) = 0.$$

А если $\alpha \neq \alpha_l$ для какого-либо l, то

$$(y - y', x_\alpha) = \lim_{n \to \infty} \left(y - \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}, x_\alpha \right) = 0.$$

Следовательно, $y - y'$ ортогонален ко всем x_α из S. Так как S — полная ортонормированная система, должно быть $y - y' = 0$. Итак,

$$y = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}$$

и (II.1) выполняется. Далее,

$$0 = \lim_{n \to \infty} \left\| y - \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j} \right\|^2 = \\ = \lim_{n \to \infty} \left(\|y\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x_{\alpha_j}, y)|^2 \right) = \\ = \|y\|^2 - \sum_{\alpha \in A} |(x_\alpha, y)|^2,$$

так что (II.2) тоже выполнено. Простое доказательство обратного утверждения мы опускаем. ▌

Заметим, что (II.2) называется равенством Парсеваля. Коэффициенты (x_α, y) часто называют **коэффициентами Фурье** элемента y относительно базиса $\{x_\alpha\}$. Причина такой терминологии скоро выяснится.

Опишем теперь процесс построения ортонормированного множества из произвольной последовательности независимых векторов (ортогонализация Грама—Шмидта). Пусть даны независимые векторы $u_1, u_2, \ldots$; положим

$$\begin{array}{ll} w_1 = u_1, & v_1 = w_1/\|w_1\|, \\ w_2 = u_2 - (v_1, u_2)\,v_1, & v_2 = w_2/\|w_2\|, \\ \vdots & \vdots \\ w_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} (v_k, u_n)\,v_k, & v_n = w_n/\|w_n\|. \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Семейство $\{v_j\}$ есть ортонормированное множество, причем оно обладает тем свойством, что для каждого m множества $\{u_j\}_{j=1}^m$ и $\{v_j\}_{j=1}^m$ порождают одно и то же пространство. В частности, множество конечных линейных комбинаций всех v_j то же, что и множество конечных линейных комбинаций всех u_j (см. рис. II.2).

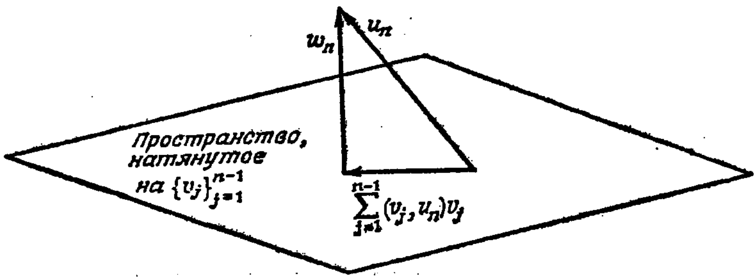

Рис. II.2. Ортогонализация Грама—Шмидта.

Заметим, что полиномы Лежандра (с точностью до постоянных множителей) получаются применением процедуры Грама — Шмидта к функциям $1, x, x^2, x^3, \ldots$ на интервале $[-1, 1]$ с обычным внутренним произведением в L^2.

Определение. Метрическое пространство, имеющее счетное плотное подмножество, называется **сепарабельным.**

Большинство гильбертовых пространств, с которыми приходится практически сталкиваться, сепарабельны. Следующая теорема характеризует их с точностью до изоморфизма.

Теорема II.7. Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно тогда и только тогда, когда оно имеет счетный ортонормированный базис S. Если S содержит $N < \infty$ элементов, то $\mathcal{H}$ изоморфно $\mathbb{C}^N$. Если S содержит счетное число элементов, то $\mathcal{H}$ изоморфно l_2 (пример 3 § II.1).

Доказательство. Допустим, что $\mathscr{H}$ сепарабельно и $\{x_n\}$ — счетное плотное множество. Выкидывая некоторые из x_n, мы можем получить подмножество независимых векторов, оболочка которых (совокупность конечных линейных комбинаций) содержит $\{x_n\}$ и, следовательно, плотна. Применяя процедуру Грама—Шмидта к этому подмножеству, мы получим счетную полную ортонормированную систему. Обратно, если $\{y_n\}$ есть полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, то из теоремы II.6 следует, что множество конечных линейных комбинаций y_n с рациональными коэффициентами плотно в $\mathscr{H}$. Так как это множество счетно, $\mathscr{H}$ — сепарабельно.

Предположим, что $\mathscr{H}$ сепарабельно и что $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система. Определим отображение $\mathscr{U}$: $\mathscr{H} \to l_2$ формулой

$$\mathscr{U}\colon x \to \{(y_n, x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Теорема II.6 показывает, что это отображение корректно определено и сюръективно. Легко показать, что оно унитарно. Доказательство того, что $\mathscr{H}$ изоморфно $\mathbb{C}^N$, если S состоит из N элементов, аналогично. ∎

Заметим, что в сепарабельном случае процедура Грама—Шмидта позволяет построить ортонормированный базис без обращения к лемме Цорна.

В заключение этого раздела приведем пример, показывающий, как гильбертовы пространства естественно возникают в задачах классического анализа. Если $f(x)$ — интегрируемая функция в интервале $[0, 2\pi]$, то мы можем определить числа

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\, dx.$$

Формальный ряд $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ называется рядом Фурье для f.

Классическая задача состоит в том, для каких f и в каком смысле ряд Фурье для f сходится к f. Эта задача, зародившаяся у Фурье в 1811 г., имеет богатую событиями историю. Целая область современной математики — абстрактный гармонический анализ — выросла из этой задачи. Некоторые из самых красивых результатов, относящихся к классическому случаю, были доказаны совсем недавно (см. Замечания). Как пример классического результата приведем следующую теорему (задачи 14 и 15):

Теорема II.8. Пусть $f(x)$ — периодическая с периодом 2π непрерывно дифференцируемая функция. Тогда функции $\sum_{-M}^{M} c_n e^{inx}$ равномерно сходятся к $f(x)$ при $M \to \infty$.

Эта теорема дает достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье. Но найти точный класс функций, ряды Фурье которых сходятся равномерно или поточечно, оказалось очень трудно. Однако можно получить простой и красивый ответ на этот вопрос, если изменить самое понятие «сходимости»; тут мы и придем к гильбертову пространству. Набор функций $\{(2\pi)^{-1/2}e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ образует ортонормированное множество в $L^2[0, 2\pi]$. Если бы мы знали, что это полное ортонормированное множество, то теорема II.6 позволяла бы заключить, что для всех функций в $L^2[0, 2\pi]$

$$f(x) = \lim_{M \to \infty} \sum_{-M}^{M} (2\pi)^{-1/2} c_n e^{inx}$$

в смысле сходимости по норме L^2. Докажем, что система $\{(2\pi)^{-1/2}e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ в самом деле полна, опираясь на приведенную выше классическую теорему.

Теорема II.9. Если $f \in L^2[0, 2\pi]$, то $\sum_{-M}^{M} c_n (2\pi)^{-1/2} e^{inx}$ сходится к f по норме L^2 при $M \to \infty$.

Доказательство. Мы должны установить, что множество $C_p^1[0, 2\pi]$ периодических непрерывно дифференцируемых функций плотно в $L^2[0, 2\pi]$. В задаче 2 от читателя требуется показать, что в $L^2[0, 2\pi]$ плотны ступенчатые функции. Но ступенчатую функцию можно аппроксимировать (в L^2) функцией из $C_p^1[0, 2\pi]$, если сгладить ее углы и изменить значение на одном конце, чтобы она стала периодической. Читатель должен убедиться, что при этом можно получить функцию, сколь угодно близкую к ступенчатой по норме L^2.

Убедимся в том, что $\{(2\pi)^{-1/2}e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ есть полное множество; достаточно показать, что из $(e^{inx}, g) = 0$ при всех n следует $g = 0$. Предположим, что $f \in C_p^1[0, 2\pi]$; тогда в силу теоремы II.8

$$\sum_{-M}^{M} c_n (2\pi)^{-1/2} e^{inx} \to f$$

равномерно, а значит, и в смысле L^2. Следовательно,

$$(f, g) = \lim_{M \to \infty} \left(\sum_{-M}^{M} c_n (2\pi)^{-1/2} e^{inx}, g \right) = 0,$$

если $(e^{inx}, g)=0$ при всех n. Но тогда g ортогональна ко всем f из плотного множества $C_p^1[0, 2\pi]$, откуда вытекает, что $g=0$. Итак, $\{(2\pi)^{-1/2} e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ есть полное ортонормированное множество, и из теоремы II.6 следует, что ряд Фурье любой функции из $L^2[0, 2\pi]$ сходится к этой функции по норме L^2. ∎

Эта теорема показывает, что естественное понятие сходимости рядов Фурье—это сходимость в L^2, и иллюстрирует один из основных принципов функционального анализа: следует выбирать абстрактное пространство и понятие сходимости, подходящие для данной задачи,—такое пространство, в котором можно доказать хорошие теоремы. Поступая таким образом, мы избегаем многих трудностей; это имеет свои преимущества, но и свои недостатки.

II.4. Тензорные произведения гильбертовых пространств

В § II.1 и II.2 мы описали некоторые способы построения новых гильбертовых пространств из данных. Теперь мы опишем тензорное произведение $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ двух гильбертовых пространств $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Мы приведем хотя и не самую красивую, зато очень ясную конструкцию, и читатель сможет без труда строить тензорные произведения $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_n$ любого конечного числа гильбертовых пространств.

Пусть $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$—гильбертовы пространства. Для любых $\varphi_1 \in \mathscr{H}_1$ и $\varphi_2 \in \mathscr{H}_2$ обозначим через $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ сопряженную билинейную форму, действующую на $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ так:

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\langle \psi_1, \psi_2 \rangle) = (\psi_1, \varphi_1)(\psi_2, \varphi_2).$$

Пусть $\mathscr{E}$—множество конечных линейных комбинаций таких сопряженных билинейных форм; определим внутреннее произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathscr{E}$, полагая

$$(\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \mu) = (\varphi, \eta)(\psi, \mu)$$

и продолжая это равенство по линейности.

Предложение 1. $(\cdot, \cdot)$ корректно определено и положительно определено.

Доказательство. Убедимся, что (λ, λ') не зависит от того, при помощи каких линейных комбинаций выражены λ и λ'. Для этого достаточно показать, что если μ—конечная сумма, с помощью которой выражена нулевая форма, то $(\eta, \mu)=0$ для всех

$\eta \in \mathcal{E}$. Положим $\eta = \sum_{i=1}^{N} c_i (\varphi_i \otimes \psi_i)$; тогда

$$(\eta, \mu) = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i (\varphi_i \otimes \psi_i), \mu \right) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(\langle \varphi_i, \psi_i \rangle) = 0,$$

поскольку μ — нулевая форма. Значит, $(\cdot, \cdot)$ определено корректно.

Предположим теперь, что $\lambda = \sum_{k=1}^{M} d_k (\eta_k \otimes \mu_k)$. Тогда $\{\eta_k\}_{k=1}^{M}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{M}$ порождают подпространства $M_1 \subset \mathcal{H}_1$ и $M_2 \subset \mathcal{H}_2$ соответственно. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_1}$ и $\{\psi_l\}_{l=1}^{N_2}$ — ортонормированные базисы для M_1 и M_2; тогда каждое η_k можно выразить через φ_j, а каждое μ_k через ψ_l. Получим

$$\lambda = \sum_{j=1,\, l=1}^{N_1,\, N_2} c_{jl} (\varphi_j \otimes \psi_l).$$

Но

$$(\lambda, \lambda) = \left(\sum c_{jl} (\varphi_j \otimes \psi_l), \sum c_{im} (\varphi_i \otimes \psi_m) \right) = \sum \overline{c_{jl}} c_{im} (\varphi_j, \varphi_i)(\psi_l, \psi_m) = \sum_{j,\, l} |c_{jl}|^2;$$

отсюда видно, что если $(\lambda, \lambda) = 0$, то все $c_{jl} = 0$ и λ — нулевая форма. Следовательно, форма $(\cdot, \cdot)$ положительно определена. ∎

Определение. Пусть $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ — пополнение $\mathcal{E}$ по определенному выше внутреннему произведению $(\cdot, \cdot)$; $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ называется **тензорным произведением** $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

Предложение 2. Если $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_l\}$ — ортонормированные базисы в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно, то $\{\varphi_k \otimes \psi_l\}$ есть ортонормированный базис в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Доказательство. Для упрощения обозначений рассмотрим случай, когда оба $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ бесконечномерны и сепарабельны (в остальных случаях ничего не меняется). Ясно, что множество $\{\varphi_k \otimes \psi_l\}$ ортонормировано, и, значит, достаточно показать, что $\mathcal{E}$ содержится в замкнутом пространстве S, натянутом на семейство $\{\varphi_k \otimes \psi_l\}$. Пусть $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{E}$. Так как $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_l\}$ — базисы, то $\varphi = \sum c_k \varphi_k$ и $\psi = \sum d_l \psi_l$, причем $\sum |c_k|^2 < \infty$ и $\sum |d_l|^2 < \infty$. Значит, $\sum_{k,\, l} |c_k d_l|^2 < \infty$. Следовательно, по теореме II.6 в S существует вектор $\mu=\sum_{k,l} c_k d_l \varphi_k \otimes \psi_l$. Прямое вычисление показывает, что

$$\left\| \varphi \otimes \psi - \sum_{\substack{k<M \\ l<N}} c_k d_l \varphi_k \otimes \psi_l \right\| \to 0$$

при $M, N \to \infty$. ∎

Покажем, каким образом естественно возникают тензорные произведения; для этого обратимся к тем гильбертовым пространствам, с которыми читатель уже знаком. Пусть сначала $\langle M_1, \mu_1\rangle$ и $\langle M_2, \mu_2\rangle$ — пространства с мерой. Предположим, что $L^2(M_1, d\mu_1)$ и $L^2(M_2, d\mu_2)$ сепарабельны (см. задачи 24 и 25 к этой главе и задачу 43 гл. IV). Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ и $\{\psi_l(y)\}$ — базисы в $L^2(M_1, d\mu_1)$ и в $L^2(M_2, d\mu_2)$ соответственно. Тогда $\{\varphi_k(x)\psi_l(y)\}$ — ортонормированное множество в $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$. Покажем, что на самом деле это базис. Допустим, что $f(x, y)\in L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$ и что

$$\iint\limits_{M_1\times M_2} \overline{f(x, y)}\, \varphi_k(x)\, \psi_l(y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y) = 0$$

для всех k и l. По теореме Фубини получаем

$$\int\limits_{M_2} \left(\int\limits_{M_1} \overline{f(x, y)}\, \varphi_k(x)\, d\mu_1(x) \right) \psi_l(y)\, d\mu_2(y) = 0.$$

Так как $\{\psi_l\}$ — базис в $L^2(M_2, d\mu_2)$, то

$$\int\limits_{M_1} \overline{f(x, y)}\, \varphi_k(x)\, d\mu_1(x) = 0$$

всюду, кроме множества $S_k\subset M_2$, для которого $\mu_2(S_k)=0$. Значит, если $y\notin \cup S_k$, то $\int\limits_{M_1} f(x, y)\, \varphi_k(x)\, d\mu_1(x)=0$ при всех k, откуда видно, что $f(x, y)=0$ п. в. по мере μ_1. Следовательно, $f(x, y)=0$ п. в. по мере $\mu_1\otimes\mu_2$. Таким образом, $\{\varphi_k(x)\psi_l(y)\}$ — базис в $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$.

Определим теперь отображение

$$U\colon\ \varphi_k\otimes\psi_l \mapsto \varphi_k(x)\, \psi_l(y).$$

Оно переводит ортонормированный базис пространства $L^2(M_1, d\mu_1)\otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ в ортонормированный базис пространства $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$ и однозначно продолжается до унитарного отображения

$$L^2(M_1, d\mu_1)\otimes L^2(M_2, d\mu_2) \text{ на } L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2).$$

Заметим, что если $f\in L^2(M_1, d\mu_1)$, $g\in L^2(M_2, d\mu_2)$, то

$$U(f\otimes g)=U\left(\sum c_k\varphi_k\otimes\sum d_l\psi_l\right)=U\left(\sum_{k,l} c_kd_l\varphi_k\otimes\psi_l\right)=$$
$$=\sum_{k,l} c_kd_l\varphi_k(x)\,\psi_l(y)=f(x)\,g(y).$$

Из-за этого свойства часто говорят, что $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$ и $L^2(M_1, d\mu_1)\otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ «естественно» изоморфны. Пусть $M_i=\mathbb{R}$ и μ_i—мера Лебега; тогда мы показали, что $L^2(\mathbb{R}^2)$ естественно изоморфно $L^2(\mathbb{R})\otimes L^2(\mathbb{R})$.

Вернемся теперь к примеру 6 § II.1: $\langle M, \mu\rangle$—пространство с мерой и $\mathcal{H}'$—сепарабельное гильбертово пространство с базисом $\{\varphi_k\}$. В задаче 12 от читателя требуется показать, что каждый элемент $g\in L^2(M, d\mu; \mathcal{H}')$ есть предел

$$g(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(\varphi_k, g(x))_{\mathcal{H}'}\varphi_k$$

конечных линейных комбинаций векторов вида $f_k(x)\varphi_k$, где $f_k(x)\in L^2(M, d\mu)$. Определим теперь отображение

$$U\colon \sum_{k=1}^{M}f_k(x)\otimes\varphi_k\to\sum_{k=1}^{N}f_k(x)\,\varphi_k.$$

Оно корректно определено и отображает плотное множество в $L^2(M, d\mu)\otimes\mathcal{H}'$ на плотное множество в $L^2(M, d\mu; \mathcal{H}')$, сохраняя норму; следовательно, U однозначно продолжается до унитарного оператора из $L^2(M, d\mu)\otimes\mathcal{H}'$ на $L^2(M, d\mu; \mathcal{H}')$. Заметим, что при этом $U(f(x)\otimes\varphi)=f(x)\varphi$ для всех $\varphi\in\mathcal{H}'$. В этом смысле U называется естественным изоморфизмом между $L^2(M, d\mu)\otimes\mathcal{H}'$ и $L^2(M, d\mu; \mathcal{H}')$. Подытожим это обсуждение в следующей теореме:

Теорема II.10. Пусть $\langle M_1, \mu_1\rangle$ и $\langle M_2, \mu_2\rangle$—пространства с мерой, такие, что $L^2(M_1, d\mu_1)$ и $L^2(M_2, d\mu_2)$ сепарабельны. Тогда:

(a) Существует единственный изоморфизм между $L^2(M_1, d\mu_1)\otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ и $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$, такой, что $f\otimes g\mapsto fg$.

(b) Если $\mathcal{H}'$—сепарабельное гильбертово пространство, то существует единственный изоморфизм между $L^2(M_1, d\mu_1)\otimes\mathcal{H}'$ и $L^2(M_1, d\mu_1; \mathcal{H}')$, такой, что $f(x)\otimes\varphi\mapsto f(x)\varphi$.

(c) Существует единственный изоморфизм между $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$ и $L^2(M_1, d\mu_1; L^2(M_2, d\mu_2))$, такой, что $f(x, y)$ переводится в функцию $x\mapsto f(x, \cdot)$.

Пример 1. Гильбертовым пространством состояний при квантово-механическом описании одной шредингеровой частицы со спином 1/2 является $L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^2)$, т. е. множество пар $\{\psi_1(x), \psi_2(x)\}$ квадратично интегрируемых функций (dx—мера Лебега).

В силу установленного выше, $L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^2)$ естественно изоморфно $L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathbb{C}^2$.

Пример 2 (пространства Фока). Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство; обозначим через $\mathcal{H}^n$ n-кратное тензорное произведение $\mathcal{H}^n=\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\ldots\otimes\mathcal{H}$. Положим $\mathcal{H}^0=\mathbb{C}$ и

$$\mathcal{F}(\mathcal{H})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}^n.$$

$\mathcal{F}(\mathcal{H})$ называется пространством Фока над $\mathcal{H}$; оно сепарабельно, если сепарабельно $\mathcal{H}$. Например, если $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$, то элемент $\psi\in\mathcal{F}(\mathcal{H})$ есть последовательность функций

$$\psi=\{\psi_0, \psi_1(x_1), \psi_2(x_1, x_2), \psi_3(x_1, x_2, x_3), \ldots\},$$

такая, что

$$|\psi_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\psi_n(x_1, \ldots, x_n)|^2\,dx_1\ldots dx_n<\infty.$$

Обычно в квантовой теории поля употребляется не само $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, а два его подпространства. Эти подпространства строятся так. Пусть $\mathcal{P}_n$ — группа перестановок n элементов, и пусть $\{\varphi_k\}$ — базис в $\mathcal{H}$. Для каждого $\sigma\in\mathcal{P}_n$ определим оператор (будем обозначать его тоже σ) на базисных элементах $\mathcal{H}^n$, полагая

$$\sigma(\varphi_{k_1}\otimes\varphi_{k_2}\otimes\ldots\otimes\varphi_{k_n})=\varphi_{k_{\sigma(1)}}\otimes\varphi_{k_{\sigma(2)}}\otimes\ldots\otimes\varphi_{k_{\sigma(n)}}.$$

Оператор σ по линейности продолжается до ограниченного (с единичной нормой) оператора на $\mathcal{H}^n$, и можно положить $S_n=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}\sigma$.

Легко показать (задача 23), что $S_n^2=S_n$ и $S_n^*=S_n$, так что S_n — ортогональный проектор (читатель, незнакомый с сопряженными операторами и с ортогональными проекторами, пусть поищет их определения и элементарные свойства в гл. VI). Область значений оператора S_n называется n-кратным симметричным тензорным произведением $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{H}^n=L^2(\mathbb{R})\otimes\ldots\otimes L^2(\mathbb{R})=L^2(\mathbb{R}^n)$, то $S_n\mathcal{H}^n$ есть подпространство в $L^2(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех функций, инвариантных относительно любых перестановок их аргументов. Положим теперь

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{H})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}S_n\mathcal{H}^n.$$

$\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ называется **симметричным пространством Фока над** $\mathcal{H}$, или **бозонным пространством Фока над** $\mathcal{H}$.

Пусть $\varepsilon(\cdot)$ — функция из $\mathcal{P}_n$ в $\{1, -1\}$, равная 1 на четных и -1 на нечетных перестановках. Положим $A_n=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}\varepsilon(\sigma)\sigma$;

тогда A_n есть ортогональный проектор в $\mathcal{H}^n$. Его область значений $A_n\mathcal{H}^n$ называется n-кратным антисимметричным тензорным произведением $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$, то $A_n\mathcal{H}^n$ есть подпространство в $L^2(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций, нечетных относительно перестановки двух координат. Подпространство

$$\mathcal{F}_a(\mathcal{H})=\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n\mathcal{H}^n$$

называется **антисимметричным пространством Фока над** $\mathcal{H}$, **или фермионным пространством Фока над** $\mathcal{H}$.

II.5. Эргодическая теория. Введение

В этом разделе мы кратко обсудим эргодическую теорию. Для этого потребуются некоторые понятия, которые мы строго определим только в гл. VI: сопряженные операторы, проекторы, ядро и область значений оператора. Читатели, еще не знакомые с этими понятиями, должны заглянуть в гл. VI. Но мы хотим привести это обсуждение именно здесь, так как эргодическая теория хорошо иллюстрирует силу и слабость методов гильбертова пространства и дает прекрасный пример взаимосвязи функционального анализа и математической физики — главной темы всего нашего курса. Как мы увидим, вопрос о том, почему макроскопическая система стремится к равновесию, очень удобно формулировать на языке абстрактных пространств, но за это приходится платить: естественный вопрос в абстрактной постановке слегка отличен от исходного, и может возникнуть соблазн удовлетвориться более слабыми результатами.

Утверждение «любая система приближается к равновесному состоянию» называют иногда нулевым началом термодинамики. С микроскопической точки зрения, пожалуй, удивительно, что любая система должна приближаться к равновесию, поскольку микроскопически нет никакого стационарного состояния и, следовательно, никакого равновесного состояния. Тем не менее любая попытка микроскопического обоснования термодинамики должна объяснить, почему нулевое начало макроскопически выполняется. Среди физиков далеко нет общего мнения по поводу того, что именно составляет обоснование нулевого начала, но мы не хотим вдаваться в обсуждение всех pro и contra многих различных подходов, которые предлагались (см., впрочем, Замечания). Подход, которым мы ниже пользуемся, в общем принимается большинством физиков.

Первая основная идея состоит в том, что термодинамические системы подвержены флуктуациям (см. задачу 17). Иными словами, в силу самой своей природы законы термодинамики — это не абсолютные утверждения о системе в некий фиксированный момент времени; они относятся к измерениям, проведенным за отрезки времени, длинные по сравнению с некоторыми характерными периодами, например временем столкновения или временем релаксации. Таким образом, термодинамика имеет дело с измерениями наблюдаемых величин, усредненными по некоторому периоду T. Поскольку времена столкновений и т. п. зависят от динамики, то можно надеяться доказать термодинамические утверждения лишь в отношении предела при $T \to \infty$. Как велико должно быть T, чтобы среднее по интервалу T было приближенно равно предельному значению, — вопрос микродинамики, но в некоторых специальных случаях можно надеятся кое-что доказать.

Пусть состояние классической механической системы изображается точкой в некотором фазовом пространстве Γ. Для каждого момента времени t существует отображение T_t: $\Gamma \to \Gamma$, где $T_t x$ — состояние, которое возникает к моменту t_0+t из состояния x в момент t_0 (мы предполагаем трансляционную инвариантность по времени, поэтому t_0 не входит в качестве аргумента). Очевидно, что $T_{t+s}=T_t T_s$. В классической механике такие наблюдаемые величины системы, как энергия или угловой момент, суть функции на фазовом пространстве. Итак, мы видим, что имеет смысл изучать

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(T_t x)\,dt.$$

Мы хотим показать, что этот предел существует, по крайней мере для непрерывных функций. Обычно Γ — метрическое пространство, так что «непрерывность» имеет смысл. Но мы хотим, чтобы предел не только существовал, но еще и не зависел от начальной точки x, или по меньшей мере зависел только от нескольких «макроскопических» наблюдаемых, которые мы можем связать с равновесным состоянием. Для систем, инвариантных относительно сдвигов по времени, энергия — сохраняющаяся величина, так что средняя энергия совпадает с начальной. Следовательно, для каждой энергии E мы рассматриваем поверхность постоянной энергии Ω_E в фазовом пространстве и надеемся, что для каждого $w \in \Omega_E$ и каждой непрерывной функции f на Ω_E

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt$$

существует и равен числу $\mu(f)$, не зависящему от w. Тогда отображение $f \mapsto \mu(f)$, очевидно, обладает такими свойствами:

(a) $\mu(1)=1$,
(b) μ линейно,
(c) $\mu(f)\geqslant 0$, если $f\geqslant 0$.

Со временем мы увидим (§ IV.4), что такое μ всегда связано с некоторой мерой $\hat{\mu}$ на Ω_E, нормированной условием $\hat{\mu}(\Omega_E)=1$, так что

$$\mu(f)=\int_{\Omega_E} f(\omega)\,d\hat{\mu}(\omega).$$

Впредь мы будем обозначать линейный функционал μ и меру $\hat{\mu}$ одной буквой μ.

Подведем итог: мы показали, что если

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t\omega)\,dt$$

существует для каждого фиксированного ω и не зависит от $\omega\in\Omega_E$, то существует мера μ на Ω_E, такая, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t\omega)\,dt=\int_{\Omega_E} f(\omega)\,d\mu(\omega). \tag{II.3}$$

Мера μ обладает одним очень важным свойством. Пусть фиксировано некоторое s, и пусть χ_F—характеристическая функция измеримого множества $F\subset\Omega_E$. Тогда

$$\frac{1}{T}\int_0^T \chi_{T_s^{-1}F}(T_t\omega)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T \chi_F(T_sT_t\omega)\,dt,$$

так что если существует $\lim\limits_{T\to\infty}$, то $\mu(T_s^{-1}F)=\mu(F)$, т. е. эта мера **инвариантна.** Или, иными словами, T **сохраняет меру.** Классические механические системы наделены естественной инвариантной мерой: если $\Gamma=\mathbb{R}^{6N}$ (N—число частиц), то мера $d^{3N}q\,d^{3N}p$, как известно, инвариантна относительно гамильтонова потока (теорема Лиувилля). Сужение этой меры на Ω_E формально задается формулой

$$\mu_E(F)=\int_F \delta(H(p,q)-E)\,d^{3N}q\,d^{3N}p,$$

где H—гамильтониан. В явном виде, если мы выберем систему ортонормированных локальных координат в $x\in\Omega_E$, скажем $Q_1,\ldots,Q_{6N-1}$, то

$$d\mu_E=Cd^{6N-1}Q\,/\,|\operatorname{grad} H|.$$

Постоянная C выбирается так, что $\mu_E(\Omega_E)=1$. Таким образом, задача обоснования нулевого начала сводится к тому, чтобы рассмотреть

$$(M_T f)(w)=\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt$$

и доказать, что в каком-то разумном смысле функция $(M_T f)(w)$ сходится при $T\to\infty$ к постоянной функции со значением

$$\int_{\Omega_E} f(w)\,d\mu_E(w).$$

Заметим, что если бы это удалось, то доказано было бы значительно больше: не только, что измерения за большие периоды времени не зависят от начальных условий (кроме энергии), но также и то, что равновесное состояние описывается мерой в фазовом пространстве и эта мера есть

$$\int_F \delta(H(p, q)-E)\,d^{3N}p\,d^{3N}q$$

— так называемый «микроканонический ансамбль».

Методы гильбертовых пространств — настолько мощный инструмент, что, коль скоро мы уже имеем меру, возникает желание попробовать переформулировать всю задачу в терминах $L^2(\Omega_E, d\mu_E)$. Итак, если $f\in L^2(\Omega_E, d\mu_E)$, определим отображение U_t: $f\mapsto f\circ T_t$, т. е.

$$(U_t f)(w)=f(T_t w).$$

Лемма (лемма Купмана). U_t есть унитарное отображение $L^2(\Omega_E, d\mu_E)$ на $L^2(\Omega_E, d\mu_E)$.

Доказательство.
$$\begin{aligned}(U_t f, U_t g) &= \int_{\Omega_E}\overline{f(T_t w)}\,g(T_t w)\,d\mu_E(w)=\\ &=\int_{\Omega_E}\overline{f(y)}\,g(y)\,d\mu_E(T_t^{-1}y)=\\ &=\int_{\Omega_E}\overline{f(y)}\,g(y)\,d\mu_E(y)=(f, g),\end{aligned}$$

где мы воспользовались инвариантностью меры μ_E. Так как $U_t U_{-t}=U_0=I$, то U обратим и, значит, унитарен. ∎

Мы хотим изучить

$$\frac{1}{T}\int_0^T (U_t f)(w)\,d\mu(w),$$

но проще рассмотреть дискретный аналог этого выражения

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} U^m f.$$

Следующий элегантный результат решает вопрос о сходимости в дискретном случае. В задаче 18 результат с дискретного случая распространяется на непрерывный.

Теорема II.11 (статистическая эргодическая теорема, или эргодическая теорема фон Неймана). Пусть U — унитарный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть P — ортогональный проектор на $\{\psi \mid \psi\in\mathscr{H},\ U\psi=\psi\}$. Тогда для любого $f\in\mathscr{H}$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f = Pf.$$

Докажем сначала элементарную техническую лемму.

Лемма. (a) Если U унитарен, то $Uf=f$ тогда и только тогда, когда $U^*f=f$.

(b) Для любого оператора на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$

$$(\operatorname{Ran} A)^{\perp}=\operatorname{Ker} A^*.$$

Доказательство. Чтобы доказать (a), заметим, что оба условия эквивалентны тому, что $f=U^{-1}f$.

Перейдем к (b). Включение $\psi\in\operatorname{Ker} A^*$ равносильно тому, что $(\varphi, A^*\psi)=0$ для всех φ из $\mathscr{H}$. Но $\psi\in(\operatorname{Ran} A)^{\perp}$ означает, что $(A\varphi,\psi)=0$ для всех $\varphi\in\mathscr{H}$. Теперь (b) следует из определения сопряженного оператора. ∎

Доказательство статистической эргодической теоремы. Положим сначала $f=g-Ug$, т. е. $f\in\operatorname{Ran}(I-U)$. Тогда

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f\right\| = \left\|\frac{1}{N}(g-U^N g)\right\| \leqslant \frac{2\|g\|}{N}\longrightarrow 0$$

при $N\longrightarrow\infty$. Далее, $\varepsilon/3$-прием дает

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f\longrightarrow 0$$

для любого $f\in\overline{\operatorname{Ran}(I-U)}$. Но в силу леммы

$$(\operatorname{Ran}(I-U))^{\perp}=\operatorname{Ker}(I-U^*)=\{\psi \mid U^*\psi=\psi\}=\{\psi \mid U\psi=\psi\}.$$

Следовательно, $Pf=0$ тогда и только тогда, когда $f\in\overline{\operatorname{Ran}(I-U)}$.

Допустим теперь, что $Pf=f$. Тогда ясно, что

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f$$

сходится к $f=Pf$. Значит, предельное утверждение выполнено на $\overline{\mathrm{Ran}\,(I-U)}$ и на $\mathrm{Ker}\,(I-U^*)$, а следовательно, и на множестве $\overline{\mathrm{Ran}\,(I-U)}\oplus\mathrm{Ker}\,(I-U^*)$, которое совпадает со всем $\mathscr{H}$ в силу теоремы о проекции и утверждения (b) леммы. ∎

Какие же функции из $L^2(\Omega_E, d\mu_E)$ удовлетворяют условию $U_t f=f$ в непрерывном случае? Очевидно, что постоянные функции инвариантны.

Определение. Преобразование (поток) T_t называется **эргодическим**, если единственные функции из $L^2(\Omega_E, d\mu_E)$, которые удовлетворяют условию $f(T_t w)=f(w)$ почти всюду, суть постоянные функции.

Из непрерывного аналога статистической эргодической теоремы (задача 18) вытекает такое

Следствие. Пусть T_t эргодичен. Тогда для любого $f\in L^2(\Omega_E, d\mu_E)$

$$L^2\text{-}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt=\int_{\Omega_E} f(y)\,d\mu_E(y). \qquad \text{(II.4)}$$

Доказательство. В этом случае $\{\psi\,|\,U\psi=\psi\}$ одномерно. Следовательно, $P\psi$ есть константа C, причем

$$C=(1,\psi)=\int_{\Omega_E}\psi(w)\,d\mu_E(w). \ ∎$$

Заметим, что если выполнено (II.4), то $P\psi$ — константа, так что T_t должен быть эргодичным; таким образом, эргодичность есть необходимое и достаточное условие выполнения (II.4).

Иногда бывает полезно выразить свойство эргодичности в терминах меры.

Предложение. Поток T_t эргодичен тогда и только тогда, когда для всех измеримых множеств $F\subset\Omega_E$ из равенства $T_t^{-1}F=F$ при всех t следует, что $\mu_E(F)=0$ или $\mu_E(F)=1$.

Доказательство. Допустим, что T_t эргодичен и $T_t^{-1}F=F$ при всех t. Тогда $f=\chi_F$ — инвариантная функция и, значит, χ_F есть константа п. в., откуда следует, что $\mu(F)=0$ или $\mu(F)=1$.

Обратно: допустим теперь, что выполнено второе условие. Тогда $\{w\,|\,f(w)<a\}$ инвариантно относительно T_t, так что $f(w)<a$

п. в. или $f(w) \geqslant a$ п. в. Так как это верно для всех a, то $f(w)$ есть константа п. в. ∎

Условие, что из $T_t^{-1}F = F$ следует $\mu_E(F) = 0$ или $\mu_E(F) = 1$, называют иногда **метрической транзитивностью.**

Итак, что же мы доказали? Мы вывели условие на поток T_t, необходимое и достаточное для того, чтобы предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_t w)\, dt$$

был именно таким, как мы хотели, но не в смысле сходимости при каждом w; вместо этого мы получили, что $\frac{1}{T} \int_0^T f(T_t w)\, dt$ сходится в смысле L^2 к постоянной функции

$$\int_{\Omega_E} f(w)\, d\mu(w).$$

Это и не удивительно, так как поточечная сходимость — чуждое L^2 понятие. Пользуясь методами гильбертова пространства, мы потеряли возможность доказать, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(T_t w)\, dt$$

сходится поточечно для каждого w при $T \to \infty$. На самом деле поточечный предел тоже существует, но это доказывается совсем иными методами. Мы сформулируем этот результат.

Теорема II.12 (индивидуальная эргодическая теорема, или эргодическая теорема Биркгофа). Пусть T — сохраняющее меру преобразование на пространстве с мерой $\langle \Omega, \mu \rangle$. Тогда для любого $f \in L^1(\Omega, d\mu)$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)$$

существует поточечно п. в. и есть некоторая функция $f^\# \in L^1(\Omega, d\mu)$, удовлетворяющая условию $f^\#(Tx) = f^\#(x)$. Если $\mu(\Omega) < \infty$, то

$$\int_\Omega f^\#(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega f(x)\, d\mu(x).$$

Далее, если μ эргодична и $\mu(\Omega)=1$, то

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_\Omega f(y)\, d\mu(y)$$

при почти всех x.

Эта теорема ближе к тому, что требуется для обоснования статистической механики, чем теорема фон Неймана, и модно говорить, что теорема фон Неймана для статистической механики не годится. Нам кажется, что это преувеличение. Имей мы только теорему фон Неймана, мы бы и с нею прекрасно прожили. В типичных ситуациях начальные условия нельзя измерить точно, поэтому можно было бы связать начальные условия с мерами $f d\mu$, такими, что $\int f\, d\mu=1$, и в этом случае теоремы фон Неймана достаточно. Однако теорема Биркгофа, к счастью, выполняется, и, конечно, удобнее пользоваться именно ею для обоснования утверждения, что средние по фазовому пространству совпадают со средними по времени.

Наконец, остается вопрос, эргодичны ли на самом деле классические механические потоки на поверхностях постоянной энергии. Об этом интересном, но трудном вопросе мало что известно. Однако, как показал недавно Синай, газ из твердых шариков в ящике является эргодической системой.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ II.1. Хорошим справочником по гильбертовым пространствам может служить первая глава книги П. Халмоша: Paul Halmos, Introduction to Hilbert Space, Chelsea, Bronx, New York, 1957. Его книга: Гильбертово пространство в задачах, «Мир», М., 1970, состоящая из задач с указаниями и решениями, трудна, но очень полезна читателю, уже приобретшему опыт. Стандартный курс Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954, содержит приложения к интегральным уравнениям.

§ II.2. Лемма Рисса была доказана независимо Ф. Риссом (F. Riesz, Sur une espèce de géométrie analytiques des systèms de fonctions sommable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1409—1411) и Фреше (M. Fréchet, Sur les ensembles des fonctions et les opérations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1414—1416). Леммой Рисса можно воспользоваться для короткого доказательства существования сопряженных операторов в случае гильбертова пространства. Общее определение сопряжения в смысле банаховых пространств дано в гл. VI.

§ II.3. Может показаться немного странным, что $L^2[0, 1]$ сепарабельно, хотя функции принимают значения в несчетном множестве точек. Но эти значения не произвольны, так как функции измеримы — это уже сильное ограничение, а вдобавок мы отождествляем те функции, которые различаются лишь на множестве нулевой меры.

Изучающих функциональный аналнз часто ставит в тупик следующий вопрос. Если все бесконечиомерные сепарабельные гильбертовы пространства одинаковы (изоморфны l_2), зачем вообще говорить о них? С какой стати специально заниматься $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$, если как гильбертово пространство оно изоморфно l_2? Ответ в том, что нас часто интересует не само пространство, но какие-то другие структуры, например некоторые ограниченные операторы на этом пространстве. Правда, при изоморфизме эти операторы переходят в ограниченные операторы на l_2, но может случиться, что их структуру легче изучать на $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$. Такая ситуация очень характерна для функционального анализа: мы стараемся подобрать такое представление рассматриваемых структур, с которым легче работать. В качестве совсем простого примера пусть читатель вспомнит теорему о главных осях (спектральную теорему) для $\mathbb{C}^n$: для данного самосопряженного преобразования можно выбрать ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$ так, чтобы матрица преобразования в этом базисе была диагональной. Это означает, что если мы выберем правильный изоморфный экземпляр $\mathbb{C}^n$ (замена базиса), то оператор станет особенно простым. Как читатель увидит, этот пример — лишь первая нота довольно длинной симфонии.

Первое доказательство сходимости рядов Фурье для широкого класса функций дал в 1829 г. Дирихле. Хорошее руководство и по классической теории и по современному подходу — книга И. Кацнельсона: Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, Wiley, New York, 1968. Недавно Карлсон доказал поразительный результат: ряды Фурье функций из $L^2[0, 2\pi]$ сходятся поточечно п. в. (On the Convergence and Growth of Partial Sums of Fourier Series, *Acta Math.*, **116** (1966), 135—157). Хант распространил этот результат на различные пространства L^p (R. Hunt, On the Convergence of Fourier Series, in «Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues» (D. Haimo, ed.), Southern Illinois Univ. Press, 1968, pp. 235—237).

§ II.4. Конечные тензорные произведения гильбертовых пространств первыми описали фон Нейман и Муррей (J. von Neumann, F. Murray, On Rings of Operators, *Ann. Math.* (2), **37** (1936), 116—229), хотя тензорные произведения конечномерных пространств были известны уже задолго до того. Современную трактовку тензорных произведений локально выпуклых пространств см. в книге: F. Trèves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, New York, 1967. То тензорное произведение, которое мы определили, соответствует π-произведению Трева.

Определение пространств, которые мы называем пространствами Фока, восходит к оригинальной статье: V. Fock, Konfigurationsraum und Zweite Quantelung, *Z. Phys.*, **75** (1932), 622—647 (перепечатано в сборнике: В. А. Фок, Работы по квантовой теории поля, Издательство ЛГУ, Л., 1957, стр. 25). В гл. X пространство Фока будет использовано для построения свободного поля — полевой теории, удовлетворяющей аксиомам Вайтмана.

§ II.5. Изложение термодинамики с нестатистической точки зрения, т. е. как науки в основном эмпирической, см. в книге: A. B. Pippard, The Elements of Classical Thermodynamics, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1957.

Обсуждение различных точек зрения на нулевое начало термодинамики, не включающих эргодическую теорему, см. у Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, Статистическая физика, «Наука», М., 1964, гл. I, или в работе F. Strocchi, Microscopic and Macroscopic Quantities in Statistical Mechanics, *Il Nuovo Cimento*, **65B** (1970), 239—265.

Доказательство теоремы Лиувилля см. в книгах: Г. Голдстайн, Классическая механика, Гостехтеориздат, М., 1957, стр. 266—268, или R. Abraham, Foundations of Mechanics, Benjamin, New York, 1967, p. 108.

Идея использования методов гильбертовых пространств для изучения систем классической механики впервые выдвинута в работе: B. O. Koopman, Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (USA), **17** (1931), 315—318.

Эргодическая теорема фон Неймана впервые доказана в работе: J. von Neumann, Proof of the Quasiergodic Hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (USA), **18** (1932), 70—82. Приведенное доказательство принадлежит Ф. Риссу (F. Riesz, Sur la théorie ergodique, *Comm. Math. Helv.*, **17** (1945), 221—239).

Эргодическая теорема Биркгофа доказана в работе: G. D. Birkhoff, Proof of the Ergodic Theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (USA), **17** (1931), 656—660. Ф. Рисс в цитированной работе предложил другое, более простое доказательство, основанное на «максимальной эргодической теореме» Винера (N. Wiener, The Ergodic Theorem, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 1—18) и Иосиды и Какутани (K. Yoshida, S. Kakutani, Birkhoff's Ergodic Theorem and the Maximal Ergodic Theorem, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 165—168). Дальнейшее упрощение доказательства максимальной эргодической теоремы см. в работе: A. M. Garsia, A Simple Proof of E. Hopf's Maximal Ergodic Theorem, *J. Math. Mech.*, **14** (1965), 381—382.

Прекрасное изложение математической стороны эргодической теории можно найти в книге П. Халмоша, Лекции по эргодической теории, ИЛ, М., 1959, а исторический обзор предмета—в статье: P. R. Halmos, Measurable Transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1948), 1015—1034.

Обсуждение статистической эргодической теоремы в рамках банахова пространства (включая L^p-статистическую эргодическую теорему при $1 < p < \infty$) см. в книге: E. Lorch, Spectral Theory, Oxford Univ. Press, London and New York, 1962, pp. 54—56.

Существуют глубокие связи между понятиями теории информации и эргодической теории; простое и хорошее изложение см. в книге: П. Биллингслей, Эргодическая теория и информация, «Мир», М., 1969.

Результат Синая об эргодичности газа из твердых шариков сформулирован в статье: Я. Синай, К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики, *ДАН СССР*, **153** (1963), 1261—1264. Набросок доказательства опубликован в статье: Ya. Sinai, Ergodicity of Boltzmann's Gas Model, in «Statistical Mechanics, Foundations and Applications» (T. Bak ed.), Benjamin, New York, 1967. В его доказательстве использованы важные идеи Крылова, Колмогорова и Аносова[1]).

Альтернативное к эргодичности свойство, приводящее к некоторым таким же следствиям, предложено Проссером (R. Prosser, Spectral Analysis of Classical Central Force Motion, *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 2233—2239). Показано, что идеальный газ без соударений обладает этим свойством.

Для многих целей требуется, чтобы термодинамические системы обладали более сильным, чем эргодичность, свойством, которое называется перемешиванием; оно выражает «необратимость» термодинамических систем, и именно это более сильное свойство доказано Синаем. Мы кратко вернемся к перемешиванию в гл. VII. Обсуждение иерархии понятий, связанных с эргодичностью, см. в книгах: V. I. Arnold and A. Avez, Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin, New York, 1968; A. S. Wightman, Statistical Mechanics and Ergodic Theory: An Expository Lecture, in «Statistical Mechanics at the Turn of the Decade» (E. Cohen ed.), Ungar, New York, 1970.

Мы, конечно, слишком решительно отнесли целиком к микродинамике вопрос о том, сколь велико должно быть T, чтобы значение

$$T^{-1}\int_0^T f(w_t)\,dt$$

[1]) Позже Синай опубликовал полное доказательство для системы, состоящей из двух частиц: Я. Синай, Динамические системы с упругим отражением, *УМН* XXV (1970), 141—192.— *Прим. перев.*

было близко к предельному. Для общей эргодической системы время достижения предела должно быть характерностическим «временем возврата», т. е. характеристическим временем, необходимым для возвращения системы достаточно близко к начальному состоянию. Обычно для макроскопических систем это время астрономически велико. Поэтому важно решить вопрос: какие свойства механической системы делают «время релаксации», т. е. время установления равновесия, гораздо меньшим времени возврата. Хотя это, бесспорно, вопрос микродинамики, но ясно, что существует какой-то дополнительный механизм, благодаря которому это происходит, и очень хотелось бы этот механизм понять.

ЗАДАЧИ

†*1.* (a) Пусть V—пространство с внутренним произведением. Докажите, что это внутреннее произведение можно расширить на $\tilde{V}$. Сначала покажите, что если $x, y \in \tilde{V}$, $x_n, y_n \in V$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$, то (x_n, y_n) сходится. Определите внутреннее произведение формулой $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ и покажите, что оно не зависит от выбора сходящихся последовательностей. Наконец, покажите, что $(\cdot, \cdot)$ обладает необходимыми свойствами.

(b) Докажите утверждение (a), дважды применяя теорему об ограниченном линейном отображении.

**2.* (a) Простой функцией называется конечная линейная комбинация характеристических функций непересекающихся измеримых множеств. Покажите, что простые функции плотны в $L^2[a, b]$.

(b) Покажите, что любая простая функция на $[a, b]$ может быть сколь угодно точно (в смысле L^2) аппроксимирована ступенчатыми.

(c) Покажите, что любая ступенчатая функция может быть аппроксимирована сколь угодно точно (в смысле L^2) непрерывной функцией, и заключите из этого, что $C[a, b]$ плотно в $L^2[a, b]$ по норме в L^2.

3. Докажите, что если μ_1 и μ_2—взаимно сингулярные меры Бореля на $\mathbb{R}$ и $\mu = \mu_1 + \mu_2$, то $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ естественно изоморфно $L^2(\mathbb{R}, d\mu_1) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_2)$. [*Указание*: пусть A—множество, для которого $\mu_1(A) = 0$ и $\mu_2(\mathbb{R}\setminus A) = 0$; замените f на $\langle(1-\chi_A)f, \chi_A f\rangle$.]

4. (a) Докажите, что внутреннее произведение можно выразить через норму с помощью **поляризационного тождества**

$$(x, y) = \frac{1}{4}\{(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\}.$$

*(b) Докажите, что нормированное линейное пространство есть пространство с внутренним произведением тогда и только тогда, когда норма удовлетворяет тождеству параллелограмма.

5. Пусть V—пространство с внутренним произведением и $\{x_n\}_{n=1}^N$—ортонормированное множество. Докажите, что

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|$$

достигает минимума при $c_n = (x_n, x)$.

†*6.* Пусть $\mathcal{M}$—любое линейное подмножество гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Докажите, что $\mathcal{M}^\perp$ есть замкнутое линейное подпространство и $\bar{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}^\perp)^\perp$.

†7. Докажите утверждения о единственности в теореме II.3 и предшествующей лемме.

†8. Завершите доказательство следствия леммы Рисса.

9. Пусть $\mathcal{M}$ — подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Пусть f: $\mathcal{M} \to \mathbf{C}$ — линейный функционал на $\mathcal{M}$ с верхней гранью C. Докажите, что существует единственное расширение f до непрерывного линейного функционала на $\mathcal{H}$ с той же гранью C. (Заметим, что часть этого утверждения, относящаяся к существованию, есть в точности теорема Хана — Банаха для гильбертовых пространств, см. § III.3.)

10. Примените процедуру Грама — Шмидта к функциям 1, x, x^2, x^3 в интервале $[-1, 1]$ с внутренним произведением L^2 и получите таким образом первые четыре полинома Лежандра (с точностью до постоянных множителей).

11. Докажите, что $L^2(\mathbf{R})$ сепарабельно. [*Указание*: см. задачу 2.]

†12. (Пример 6 § II.1.) Говорят, что векторнозначная функция f из пространства с мерой $\langle X, \mu\rangle$ в сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}'$ измерима, если $(y, f(x))_{\mathcal{H}'}$ измерима для всех $y \in \mathcal{H}'$.

(a) Покажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ — измеримые векторнозначные функции, то $\|f(x)\|^2_{\mathcal{H}'}$ и $(f(x), g(x))_{\mathcal{H}'}$ измеримы.

(b) Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в $\mathcal{H}'$. Докажите, что если $g \in L^2(X, d\mu; \mathcal{H}')$, то

$$\sum_{k=1}^{N} (\varphi_k, g(x))_{\mathcal{H}'} \varphi_k \longrightarrow g,$$

и если $f \in L^2(X, d\mu; \mathcal{H}')$, то

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X (f(x), \varphi_k)_{\mathcal{H}'} (\varphi_k, g(x))_{\mathcal{H}'} \, d\mu(x).$$

(c) Предположите, что $L^2(X, d\mu)$ сепарабельно, и докажите, что $L^2(X, d\mu; \mathcal{H}')$ сепарабельно.

13. Пользуясь прямыми суммами, постройте несепарабельное гильбертово пространство и несчетный ортонормированный базис.

*14. В этой задаче требуется показать, что ряд Фурье непрерывной функции поточечно суммируем к f по Чезаро. Рассмотрим $[0, 2\pi]$ как группу со сложением mod 2π и запишем $\int_0^{2\pi}$ как $\oint$. Пусть $f(\theta) \in L^2[0, 2\pi]$ и $c_n = (e^{in\theta}/\sqrt{2\pi}, f)$.

(a) Пусть $S_N f = \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\theta}/\sqrt{2\pi}$. Докажите, что

$$(S_N f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \oint f(\theta + x) \frac{\sin (N + 1/2) x}{\sin (x/2)} dx.$$

(b) Пусть $(\Sigma_N f)(\theta) = \frac{1}{N+1} \sum_{0}^{N} (S_n f)(\theta)$ (сумма Чезаро). Докажите, что

$$(\Sigma_N f)(\theta) = \frac{1}{2\pi (N+1)} \oint f(x + \theta) \frac{\sin^2 [(N+1)/2] x}{\sin^2 (x/2)} dx.$$

(c) Пусть

$$K_N(x)=\frac{\sin^2[(N+1)/2]\,x}{2\pi(N+1)\sin(x/2)}.$$

Докажите, что $K_N(x)\longrightarrow 0$ равномерно в $[\delta, 2\pi-\delta]$ для любого $\delta>0$.

(d) Докажите, что $(\Sigma_N f)(\theta_0)\longrightarrow f(\theta_0)$, если f ограничена и непрерывна в θ_0.

(e) Докажите, что если f непрерывна и периодична, то $(\Sigma_N f)(\theta)\longrightarrow f(\theta)$ равномерно по θ. [*Указание*: вспомните, что из непрерывности f на $[0, 2\pi]$ следует ее равномерная непрерывность.]

(f) Покажите, что $\|f-S_N f\|_2\leqslant\|f-\Sigma_N f\|_2$, и заключите отсюда, что $S_N f\xrightarrow{L_2} f$, если f непрерывна.

†*15*. Предположим, что $f\in C^1_p[0, 2\pi]$ и $c_n=(e^{inx}/\sqrt{2\pi}, f)$, $b_n=(e^{inx}/\sqrt{2\pi}, f'(x))$.

(a) Докажите, что $\sum|b_n|^2<\infty$, и заключите отсюда, что $\sum n^2|c_n|^2<\infty$.

(b) Докажите, что $\sum|c_n|<\infty$.

(c) Докажите, что $\sum\limits_{-M}^{M} c_n e^{inx}/\sqrt{2\pi}$ равномерно сходится при $M\longrightarrow\infty$.

(d) Воспользуйтесь 14(f) для вывода, что $\sum\limits_{-M}^{M} c_n e^{inx}/\sqrt{2\pi}$ равномерно сходится к f.

16. Докажите, что единичный шар в бесконечномерном гильбертовом пространстве содержит бесконечно много *неперекрывающихся* трансляций шара радиусом $\sqrt{2}/4$. Сделайте заключение, что не может быть нетривиальной трансляционно-инвариантной меры в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

17. Докажите теорему Пуанкаре о возвращении. Дано сохраняющее меру отображение T на множестве Ω меры $\mu(\Omega)<\infty$. Тогда при любом измеримом множестве $E\subset\Omega$ бесконечно часто $T^n x\in E$ для почти всех $x\in E$. Этот результат утверждает, что почти каждое состояние в процессе эволюции бесконечно часто возвращается произвольно близко к начальному состоянию (это показывает, что флуктуации не прекращаются). (*Указание*. Пусть $F=\{x\,|\,T^n x\notin E$ при любых $n>0\}$. Покажите, что $\{T^{-m}F\}$ не пересекаются и что тем самым F имеет меру нуль.)

18. Пусть T_t—однопараметрическая группа сохраняющих меру преобразований пространства с мерой $\langle\Omega, \mu\rangle$. Примените дискретную статистическую эргодическую теорему к $\int_0^1 f(T_t w)\,dt$ и докажите статистическую эргодическую теорему для $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt$.

19. Пусть V—оператор на гильбертовом пространстве, удовлетворяющий неравенству $\|V^n\|\leqslant C$ при всех n. Докажите, что $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} V^n f\longrightarrow Pf$ для всех $f\in\mathcal{H}$, где P—проектор (необязательно ортогональный) на $\{f\,|\,Vf=f\}$.

20. Рассмотрите единичную окружность $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}$ с мерой Лебега. Пусть $T(z)=e^{2\pi i\theta}z$. Покажите, что T эргодично тогда и только тогда, когда θ иррационален.

21. Пусть Ω — компактное метрическое пространство с метрикой ρ и некоторой мерой μ. Пусть T — сохраняющее меру эргодическое преобразование с дополнительным свойством $\rho(Tx, Ty) = \rho(x, y)$. (Например, отображение T задачи 20 с иррациональным θ.) Покажите, что если f — непрерывная функция на Ω, то $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n w)$ *равномерно* сходится к $\int_\Omega f\,d\mu$. [*Указание.* Докажите, что семейство

$$(M_N f)(w) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n w)$$

равномерно равностепенно непрерывно, а потом воспользуйтесь статистической эргодической теоремой и теоремой Асколи.]

**22.* Пусть $\{\eta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — множество векторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, таких, что $a_{nm} = |(\eta_n, \eta_m)|$ есть матрица (в естественном базисе) оператора A на $l_2(-\infty, \infty)$. Докажите, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(f, \eta_n)|^2 \leqslant \|A\|\,\|f\|^2$$

для любого $f \in \mathscr{H}$.

23. Пусть S_n — оператор, определенный в примере 2 § 4.
(a) Докажите, что S_n не зависит от базиса $\{\varphi_k\}$.
(b) Докажите, что $S_n^2 = S_n$ и $S_n = S_n^*$. (*Указание*: покажите, что $\sigma^* = \sigma^{-1}$.)
(c) Проделайте (a) и (b) для A_n.

**24.* Пусть $\langle M, \mathscr{R}, \mu\rangle$ — пространство с σ-конечной мерой. Пусть $\mathscr{R}_F = \{X \in \mathscr{R} \mid \mu(X) < \infty\}$. Будем называть $X, Y \in \mathscr{R}_F$ эквивалентными тогда и только тогда, когда $\mu(X \triangle Y) = 0$, где $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Пусть $\hat{\mathscr{R}}_F$ — семейство классов эквивалентности $\mathscr{R}_F$ по этому отношению.
(a) Докажите, что $\mu(X \triangle Y)$ зависит только от классов эквивалентности X и Y в $\hat{\mathscr{R}}_F$.
(b) Докажите, что $\hat{\mathscr{R}}_F$ с функцией $\rho(X, Y) = \mu(X \triangle Y)$ есть метрическое пространство.
(c) Докажите, что $L^2(M, d\mu)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $\hat{\mathscr{R}}_F$ с метрикой ρ — сепарабельное метрическое пространство.

**25.* Найдите конечное пространство с мерой (т. е. такое $\langle M, \mathscr{R}, \mu\rangle$, что $\mu(M) < \infty$), чтобы $L^2(M, d\mu)$ было несепарабельным. [*Указание.* Возьмите несчетное декартово произведение множеств вида $[0,1]$.]

26. Докажите, что утверждение (c) теоремы II.10 следует из утверждений (a) и (b).

27. Докажите теорему о проекции, пользуясь существованием ортонормированных базисов.

III. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Reductio ad absurdum — острейшее оружие математика. Это гамбит гораздо более тонкий, чем шахматный: шахматист может пожертвовать пешкой или даже фигурой, но математик предлагает в жертву всю партию.

Г. Х. ХАРДИ

III.1. Определения и примеры

В § I.2 мы определили нормированное линейное пространство. Поскольку нормированные линейные пространства суть пространства метрические, они могут обладать свойством полноты.

Определение. Полное нормированное линейное пространство называется **банаховым пространством.**

Банаховы пространства обладают многими свойствами $\mathbb{R}^n$: это векторные пространства, норма в них определяет понятие расстояния и всякая последовательность Коши имеет предел. Вообще говоря, норма не порождается внутренним произведением (см. задачу 4 гл. II), поэтому банаховы пространства не являются непременно гильбертовыми и не обладают многими хорошими геометрическими свойствами последних. Чтобы познакомить читателя с типами банаховых пространств, которые чаще всего встречаются, обсудим подробно несколько примеров.

Пример 1 ($L^\infty(\mathbb{R})$ и его подпространства). Пусть $L^\infty(\mathbb{R})$ — множество (классов эквивалентности) комплекснозначных измеримых функций на $\mathbb{R}$, таких, что $|f(x)| \leqslant M$ почти всюду по мере Лебега при некотором $M < \infty$ ($f \sim g$ означает $f(x) = g(x)$ почти всюду). Пусть $\|f\|_\infty$ — наименьшее такое M. Легко показать (задача 1), что $L^\infty(\mathbb{R})$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Ограниченные непрерывные функции составляют подпространство $C(\mathbb{R})$ в $L^\infty(\mathbb{R})$, и сужение нормы $\|\cdot\|_\infty$ на $C(\mathbb{R})$ есть обычная sup-норма, относительно которой $C(\mathbb{R})$ полно (поскольку равномерный предел непрерывных функций непрерывен). Таким образом, $C(\mathbb{R})$ — замкнутое подпространство в $L^\infty(\mathbb{R})$.

Рассмотрим множество $\varkappa(\mathbb{R})$ непрерывных функций с компактным носителем, т. е. таких непрерывных функций, которые равны нулю всюду вне некоторого замкнутого интервала. Это нормированное линейное пространство с нормой $\|\cdot\|_\infty$, но не полное. Пополнение $\varkappa(\mathbb{R})$ не совпадает со всем $C(\mathbb{R})$; например, если функция f всюду равна единице, ее нельзя аппроксимировать никакой функцией из $\varkappa(\mathbb{R})$, поскольку $\|f-g\|_\infty \geqslant 1$ для всех $g \in \varkappa(\mathbb{R})$. Пополнение $\varkappa(\mathbb{R})$ есть в точности $C_\infty(\mathbb{R})$—множество непрерывных функций, стремящихся к нулю на $\pm\infty$ (задача 5). Некоторые из самых мощных теорем функционального анализа (теоремы Рисса—Маркова, Стоуна—Вейерштрасса)—это обобщения свойств $C(\mathbb{R})$ (см. § IV.3 и IV.4).

Пример 2 (L^p-пространства). Пусть $\langle X, \mu\rangle$—пространство с мерой и $p \geqslant 1$. Обозначим через $L^p(X, d\mu)$ множество классов эквивалентности измеримых функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

Две функции эквивалентны, если они отличаются лишь на множестве меры нуль. В следующей теореме собраны многие из стандартных свойств пространств L^p.

Теорема III.1. Пусть $1 \leqslant p < \infty$; тогда:

(a) Если $f, g \in L^p(X, d\mu)$, то

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

(неравенство Минковского).

(b) $L^p(X, d\mu)$ полно (Рисс—Фишер).

(c) Пусть p, q и r—положительные числа, удовлетворяющие условиям $p, q, r \geqslant 1$ и $p^{-1}+q^{-1}=r^{-1}$. Предположим, что $f \in L^p(X, d\mu)$, $g \in L^q(X, d\mu)$; тогда $fg \in L^r(X, d\mu)$ и

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

(неравенство Гёльдера).

Доказательства этих неравенств не содержат ничего особенно поучительного, так что мы их опустим (ссылки см. в Замечаниях). Неравенство Минковского говорит о том, что $L^p(X, d\mu)$ — векторное пространство и что $\|\cdot\|_p$ удовлетворяет неравенству треугольника. В сочетании с (b) это показывает, что $L^p(X, d\mu)$ есть банахово пространство. Мы доказали (b) в случае, когда $p=1$, $X=\mathbb{R}$ и μ—мера Лебега; доказательство общего случая совершенно такое же.

Пример 3 (пространства последовательностей). Существует хороший класс пространств, который легко описать и которым мы будем часто пользоваться для иллюстрации различных понятий. В следующих ниже определениях

$$a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

всегда обозначает последовательность комплексных чисел:

$$l_\infty = \left\{a \,\middle|\, \|a\|_\infty \equiv \sup_n |a_n| < \infty\right\};$$

$$c_0 = \left\{a \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\};$$

$$l_p = \left\{a \,\middle|\, |a|_p \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} < \infty\right\},$$

$$s = \left\{a \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} n^p a_n = 0 \text{ для всех положительных целых } p\right\};$$

$$f = \{a \mid a_n = 0 \text{ для всех, кроме конечного числа } n\}.$$

Очевидно, что $f \subset s \subset l_p \subset c_0 \subset l_\infty$.

Пространства l_∞ и c_0 суть банаховы пространства с нормой $\|\cdot\|_\infty$; l_p—банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_p$ (заметим, что это следует из примера 2, так как $l_p = L^p(\mathbb{R}, d\mu)$, где μ—мера с единичной массой в положительных целых точках и нулевой массой во всех других точках). Как мы увидим ниже, s—пространство Фреше (§ V.2). Одна из причин, почему удобно иметь дело с этими пространствами, та, что f плотно в l_p (по норме $\|\cdot\|_p$, $p < \infty$) и плотно в c_0 (по норме $\|\cdot\|_\infty$). Кроме того, множество элементов f, состоящих лишь из рациональных чисел, плотно в l_p и в c_0. Поскольку это множество счетно, l_p и c_0 сепарабельны. Пространство l_∞ не сепарабельно (задача 2).

Пример 4 (ограниченные операторы). В § I.3 мы определили понятие ограниченного линейного преобразования или ограниченного оператора из одного нормированного линейного пространства X в другое Y; будем обозначать множество всех ограниченных линейных операторов из X в Y через $\mathscr{L}(X, Y)$. Можно ввести норму в $\mathscr{L}$, положив

$$\|A\| = \sup_{x\in X,\ x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Эту норму часто называют **операторной нормой**.

Теорема III.2. Если Y полно, то $\mathscr{L}(X, Y)$—банахово пространство.

Доказательство. Поскольку любая линейная комбинация ограниченных операторов есть ограниченный оператор, $\mathscr{L}(X, Y)$—векторное пространство. Легко видеть, что $\|\cdot\|$ есть норма; так, например, неравенство треугольника доказывается простым вычислением:

$$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|+\|Bx\|}{\|x\|} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|.$$

Покажем, что $\mathscr{L}(X, Y)$ полно. Для этого надо доказать, что если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши по операторной норме, то существует ограниченный линейный оператор A, такой, что $\|A_n - A\| \to 0$. Построим A следующим образом. Для любого $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность Коши в Y. Так как Y полно, $A_n x$ сходится к некоторому элементу $y \in Y$. Положим $Ax = y$. Легко проверить, что A — линейный оператор. Из неравенства треугольника вытекает, что

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leqslant \|A_n - A_m\|,$$

и, значит, $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши вещественных чисел, сходящаяся к некоторому вещественному числу C. Итак,

$$\|Ax\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_Y \leqslant \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \|x\|_X = C\|x\|_X,$$

и A — ограниченный линейный оператор. Надо еще показать, что $A_n \to A$ по операторной норме. Так как $\|(A - A_n)x\| = \lim_{m\to\infty} \|(A_m - A_n)x\|$, то

$$\frac{\|(A - A_n)x\|}{\|x\|} \leqslant \lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\|,$$

откуда следует, что

$$\|A - A_n\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A - A_n)x\|}{\|x\|} \leqslant \lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\|,$$

где правая часть произвольно мала при достаточно больших n. Неравенство треугольника показывает, что норма A на самом деле равна C. ∎

Важно иметь критерии для определения полноты нормированных линейных пространств. Такой критерий дает следующая теорема (доказательство которой составляет задачу 3). Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов нормированного линейного пространства X называется **абсолютно суммируемой**, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Она называется **суммируемой**, если $\sum_{n=1}^{N} x_n$ сходится к $x \in X$, когда $N \to \infty$.

Теорема III.3. Нормированное линейное пространство полно тогда и только тогда, когда каждая абсолютно суммируемая последовательность суммируема.

Типичное приложение этой теоремы — конструкция факторпространств в § III.4. Заключим этот вводный раздел некоторыми определениями.

Определение. Ограниченный линейный оператор из нормированного линейного пространства X в нормированное линейное пространство Y называется **изоморфизмом**, если он является непрерывной биекцией с непрерывным обратным. Если он к тому же сохраняет норму, то его иазывают **изометрией**.

Например, в § II.3 мы доказали, что все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изометричны l_2. Два изометричных банаховых пространства могут рассматриваться как одно и то же, пока они нас интересуют лишь как банаховы пространства.

На нормированном линейном пространстве часто бывают заданы две различные нормы.

Определение. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на нормированном линейном пространстве X называются **эквивалентными**, если существуют положительные константы C и C', такие, что для всех $x \in X$

$$C\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C'\|x\|_1.$$

Например, эквивалентны следующие три нормы в $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
&\|\langle x, y\rangle\|_2 = \sqrt{|x|^2+|y|^2},\\
&\|\langle x, y\rangle\|_1 = |x|+|y|,\\
&\|\langle x, y\rangle\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.
\end{aligned}$$

На самом деле все нормы в $\mathbb{R}^2$ эквивалентны (см. задачу 4). Обычная ситуация, с которой мы будем встречаться,—это неполное нормированное линейное пространство с двумя нормами. Пополнения этого пространства по каждой из двух норм изоморфны тогда и только тогда, когда нормы эквивалентны. В качестве примера можно рассмотреть пространства последовательностей из примера 3. Пополнение f по норме $\|\cdot\|_\infty$ есть c_0, а его пополнение по норме $\|\cdot\|_p$ есть l_p. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на нормированном линейном пространстве X эквивалентны тогда и только тогда, когда тождественное отображение есть изоморфизм между $\langle X, \|\cdot\|_1\rangle$ и $\langle X, \|\cdot\|_2\rangle$.

III.2. Сопряженные и вторые сопряженные пространства

Выше было доказано, что множество ограниченных линейных операторов из одного банахова пространства X в другое Y само является банаховым пространством. В случае когда Y составлено из комплексных чисел, это пространство $\mathscr{L}(X, \mathbb{C})$ обозначается X^* и называется **сопряженным** к X. Элементы X^* называются ограниченными линейными функционалами на X. В этой главе, говоря о сходимости в X^*, мы всегда имеем в виду сходимость по норме, указанной в теореме III.2. Если $\lambda \in X^*$, то

$$\|\lambda\| = \sup_{x \in X,\, \|x\| \leqslant 1} |\lambda(x)|.$$

В § IV.5 мы обсудим другое понятие сходимости в X^*.

Сопряженные пространства играют важную роль в математической физике. Во многих моделях физических систем, будь то в квантовой механике, статистической физике или квантовой теории поля, допустимым состояниям системы можно сопоставить линейные функционалы на подходящих банаховых пространствах. Кроме того, линейные функционалы играют важную роль в современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. По этим причинам, а также потому, что они интересны и сами по себе, сопряженные пространства хорошо изучены. Два главных направления исследования таковы: определение сопряженных к отдельным банаховым пространствам или поиски общих теорем, связывающих свойства банаховых пространств со свойствами их сопряженных. В этом разделе мы изучим несколько примеров, представляющих специальный интерес, и докажем одну общую теорему. Пример другой общей теоремы — теорема III.7 ниже.

Пример 1 (пространства L^p). Допустим, что $1 < p < \infty$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$ и $g \in L^q(\mathbb{R})$, то, согласно неравенству Гёльдера, fg лежит в $L^1(\mathbb{R})$. Значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\, f(x)\, dx$$

имеет смысл. Фиксируем $g \in L^q(\mathbb{R})$ и положим

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\, f(x)\, dx$$

для всякого $f \in L^p(\mathbb{R})$. Неравенство Гёльдера показывает, что $G(\cdot)$ — ограниченный линейный функционал на $L^p(\mathbb{R})$ с нормой, меньшей или равной $\|g\|_q$; фактически эта норма равна $\|g\|_q$. Справедливо также обратное утверждение. Именно, всякий ограниченный линейный функционал на L^p имеет вид $G(\cdot)$ с некоторой $g \in L^q$. Далее, различные функции в L^q порождают различные функционалы на L^p. Значит, отображение, которое каждому $g \in L^q$ ставит в соответствие свой линейный функционал $G(\cdot)$ на $L^p(\mathbb{R})$, есть (сопряженно-линейный) изометрический изоморфизм между L^q и $(L^p)^*$. В этом смысле L^q есть сопряженное к L^p. А так как p и q входят в выражение $p^{-1} + q^{-1} = 1$ симметрично, то $L^p = (L^q)^* = ((L^p)^*)^*$, т. е. сопряженное к пространству, сопряженному к L^p, есть опять L^p.

Случай $p=1$ особый. Сопряженное к $L^1(\mathbb{R})$ есть $L^\infty(\mathbb{R})$, причем элементы $L^\infty(\mathbb{R})$ действуют на функции из $L^1(\mathbb{R})$ естественным образом, задаваемым приведенным выше интегралом. Однако сопряженное к $L^\infty(\mathbb{R})$ не есть $L^1(\mathbb{R})$, но гораздо более широкое пространство (см. задачи 7 и 8). На самом деле, как мы далее докажем (гл. XVI), $L^1(\mathbb{R})$ не является сопряженным ни к какому банахову пространству. Утверждения о сопряженности этого примера выполнены и для $L^p(X, d\mu)$, где $\langle X, \mu\rangle$ — общее пространство с мерой, за тем, однако, исключением, что $L^1(X)$ может быть сопряжено к $L^\infty(X)$ лишь тогда, когда $\langle X, \mu\rangle$ тривиально мало.

Пример 2 (гильбертовы пространства). Если положить $p=2$ в примере 1, то $q=2$, и мы получим, что $L^2(\mathbb{R})=L^2(\mathbb{R})^*$, т. е. $L^2(\mathbb{R})$ — сопряженное к самому себе. Фактически мы уже показали (лемма Рисса) в § II.2, что это верно для всех гильбертовых пространств. Еще раз предупредим читателя, что отображение, отождествляющее $\mathcal{H}$ с $\mathcal{H}^*$, сопряженно-линейно. Если $g\in\mathcal{H}$, то линейный функционал, отвечающий g, есть $G(f)=(g, f)$.

Пример 3 ($l_\infty=l_1^*$, $l_1=c_0^*$). Допустим, что $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty\in l_1$. Тогда для всякого $\{a_k\}_{k=1}^\infty\in c_0$ сумма

$$\Lambda(\{a_k\}_{k=1}^\infty)=\sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k$$

сходится, и $\Lambda(\cdot)$ есть непрерывный линейный функционал на c_0 с нормой, равной $\sum_{k=1}^\infty|\lambda_k|$. Убедимся, что все непрерывные линейные функционалы на c_0 порождаются таким путем. Пусть $\lambda\in c_0^*$, и пусть e^k — такая последовательность в c_0, у которой все члены, кроме единицы на k-м месте, равны нулю. Положим $\lambda_k=\lambda(e^k)$ и $f^l=\sum_{k=1}^l(|\lambda_k|/\lambda_k)e^k$. Если какое-либо λ_k — нуль, этот член в сумме просто опускается. Тогда при каждом l имеем $f^l\in c_0$ и $\|f^l\|_{c_0}=1$. Так как

$$\lambda(f^l)=\sum_{k=1}^l|\lambda_k| \quad \text{и} \quad |\lambda(f^l)|\leqslant\|f^l\|_{c_0}\|\lambda\|_{c_0^*},$$

то

$$\sum_{k=1}^l|\lambda_k|\leqslant\|\lambda\|_{c_0^*}.$$

Но это справедливо для всех l, поэтому $\sum_{k=1}^\infty|\lambda_k|<\infty$ и

$$\Lambda(\{a_k\}_{k=1}^\infty)=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k a_k$$

— корректно определенный линейный функционал на c_0. Однако $\lambda(\cdot)$ и $\Lambda(\cdot)$ совпадают на конечных линейных комбинациях e^k. Так как эти конечные линейные комбинации плотны в c_0, мы заключаем, что $\lambda=\Lambda$. Значит, всякий функционал из c_0^* порождается некоторой последовательностью из l_1, и читатель может самостоятельно убедиться в том, что нормы в l_1 и c_0^* совпадают. Следовательно, $l_1=c_0^*$. Аналогичное доказательство позволяет убедиться в том, что $l_\infty=l_1^*$.

Так как сопряженное X^* к банахову пространству X само есть банахово пространство (теорема III.2), оно тоже имеет сопряженное к нему пространство, обозначаемое X^{**}. Это X^{**} называется **вторым сопряженным**, или **бисопряженным**, или **дважды сопряженным** к пространству X. В примере 3 l_1 — первое сопряженное к c_0, а l_∞ — второе сопряженное. A priori не очевидно, что X^* всегда ненулевое, и если $X^*=\{0\}$, то $X^{**}=\{0\}$ тоже. Однако такого не происходит; сопряженные пространства всегда содержат много линейных функционалов. Мы докажем это в следующем разделе. Воспользовавшись одним доказанным там же следствием, мы покажем, что X можно естественным образом рассматривать как подпространство в X^{**}.

Теорема III.4. Пусть X — банахово пространство. Для всякого $x\in X$ пусть $\tilde{x}(\cdot)$ — линейный функционал на X^*, который приписывает каждому $\lambda\in X^*$ число $\lambda(x)$. Тогда отображение $J: x\to\tilde{x}$ есть изометрический изоморфизм между X и (возможно, собственным) подпространством в X^{**}.

Доказательство. Поскольку

$$|\tilde{x}(\lambda)|=|\lambda(x)|\leqslant\|\lambda\|_{X^*}\|x\|_X,$$

$\tilde{x}$ — ограниченный линейный функционал на X^* с нормой $\|\tilde{x}\|_{X^{**}}\leqslant\|x\|_X$. Из теорем III.5 и III.6 следует, что для данного x можно найти такое $\lambda\in X^*$, что

$$\|\lambda\|_{X^*}=1 \quad \text{и} \quad \lambda(x)=\|x\|_X.$$

Отсюда видно, что

$$\|\tilde{x}\|_{X^{**}}=\sup_{\lambda\in X^*,\ \|\lambda\|\leqslant 1}|\tilde{x}(\lambda)|\geqslant\|x\|_X,$$

и, значит,
$$\|\tilde{x}\|_{X^{**}}=\|x\|_X.$$

Следовательно, J есть изометрия X в X^{**}. ∎

Определение. Если отображение J, определенное в теореме III.4, сюръективно, то говорят, что X **рефлексивно**.

Пространства $L^p(\mathbb{R})$ рефлексивны при $1<p<\infty$, поскольку $(L^p)^{**}=(L^q)^*=L^p$, но $L^1(\mathbb{R})$ не рефлексивно. Все гильбертовы пространства рефлексивны. Пространство c_0 не рефлексивно, так как его второе сопряженное есть l_∞. Теория рефлексивных пространств развивается далее в задачах 22 и 26 этой главы и в задаче 15 гл. V.

III.3. Теорема Хана — Банаха

При работе с банаховыми пространствами часто приходится строить линейные функционалы с некоторыми определенными свойствами. Обычно это делается в два приема: сначала этот линейный функционал определяется на каком-нибудь подпространстве банахова пространства, на котором нужные свойства легко проверить, а затем привлекается (или доказывается) общая теорема, утверждающая, что любой такой функционал можно продолжить на все пространство с сохранением требуемых свойств. Одним из основных средств для второго шага оказывается следующая теорема (ее варианты появятся еще в § V.1 и в гл. XVI).

Теорема III.5 (теорема Хана — Банаха). Пусть X — вещественное векторное пространство, p — вещественнозначная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant \alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)$ для всех x, y из X и $\alpha\in[0, 1]$. Предположим, что λ — линейный функционал, определенный на подпространстве $Y\subset X$ и удовлетворяющий неравенству $\lambda(x)\leqslant p(x)$ для всех $x\in Y$. Тогда существует линейный функционал Λ, определенный на X, такой, что $\Lambda(x)\leqslant p(x)$ для всех $x\in X$ и $\Lambda(x)=\lambda(x)$ для всех $x\in Y$.

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Сначала покажем, что если $z\in X$, но $z\notin Y$, то λ можно продолжить на пространство, натянутое на z и Y. А потом воспользуемся рассуждением по лемме Цорна и покажем, что подобный процесс позволяет продолжить λ на все пространство X.

Пусть $\tilde{Y}$ — подпространство, натянутое на Y и z. Продолжение λ на $\tilde{Y}$ (обозначим его $\tilde{\lambda}$) будет описано, коль скоро мы определим $\tilde{\lambda}(z)$, так как

$$\tilde{\lambda}(az+y)=a\tilde{\lambda}(z)+\lambda(y).$$

Пусть y_1, $y_2\in Y$; α, $\beta>0$. Тогда

$$\begin{aligned}\beta\lambda(y_1)+\alpha\lambda(y_2)&=\lambda(\beta y_1+\alpha y_2)=(\alpha+\beta)\lambda\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}y_1+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_2\right)\leqslant\\ &\leqslant(\alpha+\beta)p\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(y_1-\alpha z)+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_2+\beta z)\right)\leqslant\\ &\leqslant\beta p(y_1-\alpha z)+\alpha p(y_2+\beta z).\end{aligned}$$

Значит, для всех α, $\beta>0$ и y_1, $y_2 \in Y$

$$\frac{1}{\alpha}[-p(y_1-\alpha z)+\lambda(y_1)] \leqslant \frac{1}{\beta}[p(y_2+\beta z)-\lambda(y_2)].$$

Поэтому можно найти такое вещественное a, что

$$\sup_{\substack{y\in Y\\ \alpha>0}}\left[\frac{1}{\alpha}(-p(y-\alpha z)+\lambda(y))\right] \leqslant a \leqslant \inf_{\substack{y\in Y\\ \alpha>0}}\left[\frac{1}{\alpha}(p(y+\alpha z)-\lambda(y))\right].$$

Положим теперь $\tilde{\lambda}(z)=a$. Легко видеть, что полученное продолжение удовлетворяет неравенству $\tilde{\lambda}(x) \leqslant p(x)$ при всех $x \in \tilde{Y}$. Итак, мы показали, что λ за один шаг может быть продолжен на одно измерение.

Проведем теперь рассуждение по лемме Цорна. Пусть $\mathscr{E}$ — набор расширений e функционала λ, удовлетворяющих условию $e(x) \leqslant p(x)$ на тех подпространствах, где они определены. Введем в $\mathscr{E}$ частичное упорядочение, положив $e_1 < e_2$, если e_2 определено на бóльшем множестве, чем e_1, и $e_2(x)=e_1(x)$ там, где оба они определены. Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — линейно упорядоченное подмножество в $\mathscr{E}$; пусть X_α — то подпространство, на котором определено e_α. Определим e на $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, положив $e(x)=e_\alpha(x)$, если $x \in X_\alpha$. Очевидно, $e_\alpha < e$, так что всякое линейно упорядоченное подмножество в $\mathscr{E}$ имеет верхнюю грань. В силу леммы Цорна, $\mathscr{E}$ содержит максимальный элемент Λ, определенный на некотором множестве X' и удовлетворяющий условию $\Lambda(x) \leqslant p(x)$ при $x \in X'$. Но X' должно совпадать со всем X, так как в противном случае мы могли бы продолжить Λ на более широкое пространство, добавляя, как и выше, еще одно измерение. Поскольку это противоречит максимальности Λ, должно быть $X=X'$. Значит, расширение Λ определено всюду. ∎

В только что доказанной теореме X — вещественное векторное пространство. Распространим теперь ее на случай комплексного X.

Теорема III.6 (теорема Хана — Банаха для комплексного случая). Пусть X — комплексное векторное пространство, p — вещественнозначная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x+\beta y) \leqslant |\alpha| p(x)+|\beta| p(y)$ для всех $x, y \in X$ и таких $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, что $|\alpha|+|\beta|=1$. Пусть λ — комплексный линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий условию $|\lambda(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in Y$. Тогда существует комплексно линейный функционал Λ, определенный на X, удовлетворяющий условию $|\Lambda(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in X$ и такой, что $\Lambda(x)=\lambda(x)$ для всех $x \in Y$.

Доказательство. Положим $l(x)=\operatorname{Re}\{\lambda(x)\}$; тогда l — вещественно линейный функционал на Y, и, поскольку

$$l(ix)=\operatorname{Re}\{\lambda(ix)\}=\operatorname{Re}\{i\lambda(x)\}=-\operatorname{Im}\lambda(x),$$

мы видим, что $\lambda(x)=l(x)-il(ix)$. Так как l вещественно линеен и $p(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant \alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)$ при $\alpha\in[0,1]$, то l имеет линейное расширение L на все X, удовлетворяющее условию $L(x)\leqslant p(x)$ (по теореме III.5). Положим $\Lambda(x)=L(x)-iL(ix)$. Очевидно, что Λ есть вещественно линейное расширение λ. Далее, $\Lambda(ix)=L(ix)-iL(-x)=i\Lambda(x)$, так что Λ и комплексно линеен. Остается только показать, что $|\Lambda(x)|\leqslant p(x)$. Заметим сначала, что $p(\alpha x)=p(x)$, если $|\alpha|=1$. Положим теперь $\theta=\operatorname{Arg}\{\Lambda(x)\}$ и воспользуемся тем, что $\operatorname{Re}\Lambda=L$; мы увидим, что

$$|\Lambda(x)|=e^{-i\theta}\Lambda(x)=\Lambda(e^{-i\theta}x)=L(e^{-i\theta}x)\leqslant p(e^{-i\theta}x)=p(x). \blacksquare$$

Следствие 1. Пусть X — нормированное линейное пространство, Y — его подпространство и λ — элемент Y^*. Тогда существует функционал $\Lambda\in X^*$, продолжающий λ и удовлетворяющий условию $\|\Lambda\|_{X^*}=\|\lambda\|_{Y^*}$.

Доказательство. Выберем $p(x)=\|\lambda\|_{Y^*}\|x\|$ и применим предыдущие теоремы. $\blacksquare$

Следствие 2. Пусть y — элемент нормированного линейного пространства X. Тогда существует ненулевой $\Lambda\in X^*$, такой, что $\Lambda(y)=\|\Lambda\|_{X^*}\|y\|$.

Доказательство. Пусть Y — подпространство, состоящее из произведений y на любые скаляры; положим $\lambda(ay)=a\|y\|$. Пользуясь следствием 1, можно построить Λ с нормой $\|\Lambda\|=\|\lambda\|$, расширив λ на все X. Но, поскольку $\Lambda(y)=\|y\|$, $\|\Lambda\|=1$ и, следовательно,

$$\Lambda(y)=\|\Lambda\|_{X^*}\|y\|. \blacksquare$$

Следствие 3. Пусть Z — подпространство нормированного линейного пространства X, и пусть y — элемент X, расстояние которого от Z равно d. Тогда существует такой $\Lambda\in X^*$, что $\|\Lambda\|\leqslant 1$, $\Lambda(y)=d$ и $\Lambda(z)=0$ для всех z в Z.

Доказательство этого следствия предоставляется читателю (задача 10). Чтобы убедиться, насколько полезны эти следствия, докажем следующую общую теорему.

Теорема III.7. Пусть X — банахово пространство. Если X^* сепарабельно, то X также сепарабельно.

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\}$ — плотное множество в X^*. Выберем $x_n\in X$, $\|x_n\|=1$ так, чтобы было

$$|\lambda_n(x_n)|\geqslant\|\lambda_n\|/2.$$

Пусть $\mathcal{D}$ — множество всех конечных линейных комбинаций $\{x_n\}$ с рациональными коэффициентами. Поскольку $\mathcal{D}$ счетно, достаточно показать, что $\mathcal{D}$ плотно в X. Если $\mathcal{D}$ не плотно в X, то существуют элемент $y \in X \setminus \mathscr{D}$ и линейный функционал $\lambda \in X^*$, такие, что $\lambda(y) \neq 0$, но $\lambda(x) = 0$ для всех $x \in \mathscr{D}$ (следствие 3). Пусть $\{\lambda_{n_k}\}$ — подпоследовательность $\{\lambda_n\}$, сходящаяся к λ. Тогда

$$\begin{aligned}\|\lambda - \lambda_{n_k}\|_X \geqslant |(\lambda - \lambda_{n_k})(x_{n_k})| = \\ = |\lambda_{n_k}(x_{n_k})| \geqslant \|\lambda_{n_k}\|/2,\end{aligned}$$

откуда следует, что $\|\lambda_{n_k}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, $\lambda = 0$, и мы пришли к противоречию. Следовательно, $\mathscr{D}$ плотно и X сепарабельно. ∎

Пример пространств l_1 и l_∞ показывает, что обратная теорема не имеет места. Между прочим, теорема III.7 позволяет доказать, что l_1 не является сопряженным к l_∞, так как l_1 сепарабельно, а l_∞ нет.

III.4. Операции над банаховыми пространствами

Мы уже познакомились с несколькими способами, при помощи которых из данных банаховых пространств можно строить новые. Последовательные сопряженные банаховых пространств суть банаховы пространства, и ограниченные операторы из одного банахова пространства в другое образуют банахово пространство. Далее, любое замкнутое подпространство банахова пространства есть также банахово пространство. Есть еще два других способа построения новых банаховых пространств, которые нам потребуются: переход к прямым суммам и факторпространствам.

Пусть A — некоторое множество индексов (не обязательно счетное), и пусть X_α при каждом $\alpha \in A$ — банахово пространство. Положим

$$X = \left\{ \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \,\Big|\, x_\alpha \in X_\alpha,\ \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|_{X_\alpha} < \infty \right\}.$$

Тогда X с нормой

$$\|\{x_\alpha\}\| = \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|_{X_\alpha}$$

есть банахово пространство. Оно называется **прямой суммой** пространств X_α и часто записывается в виде $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$. Отметим, что гильбертова прямая сумма и банахова прямая сумма пространств не обязательно совпадают. Так, если мы возьмем счетное число экземпляров $\mathbb{C}$, то прямой суммой банаховых пространств будет l_1, а гильбертовых — l_2. Однако если мы возьмем *конечное* число гильбертовых пространств, то их прямые суммы как гильбертовых пространств и как банаховых пространств изоморфны в смысле § III.1.

Пусть M — замкнутое линейное подпространство банахова пространства X. Будь X гильбертовым пространством, мы могли бы писать $X = M \oplus M^{\perp}$. Мы сейчас введем банахово пространство, которое иногда может играть роль $M^{\perp}$ в случае банаховых пространств, где нет ортогональности. Если x и y — элементы X, будем считать, что $x \sim y$, когда $x - y \in M$. Тем самым определено отношение эквивалентности; обозначим множество классов через X/M. Как обычно, класс эквивалентности, содержащий x, обозначается $[x]$. Определим сложение и умножение на скаляр для классов эквивалентности:

$$\alpha [x] + \beta [y] = [\alpha x + \beta y].$$

Это определение корректно, так как класс в правой части зависит лишь от классов, из которых взяты x и y, а не от самих этих элементов. С такими операциями X/M становится комплексным векторным пространством (класс M есть нулевой элемент). Теперь положим

$$\| [x] \|_1 = \inf_{m \in M} \| x - m \|_X.$$

Нетрудно показать, что $\| \cdot \|_1$ — норма в X/M. Из $\| [x] \| = 0$ следует $[x] = 0$, так как M замкнуто. С помощью теоремы III.3 покажем, что X/M с такой нормой полно. Пусть $\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — абсолютно суммируемая последовательность в X/M, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \inf_{m \in M} \| x_n - m \| < \infty.$$

Для всякого n выберем $m_n \in M$ так, что

$$\| x_n - m_n \| \leqslant 2 \inf_{m \in M} \| x_n - m \|.$$

Тогда $\{x_n - m_n\}$ абсолютно суммируема в X. Поскольку X полно, $\{x_n - m_n\}$ суммируема. Пусть

$$y = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (x_n - m_n).$$

Тогда

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} [x_n] - [y] \right\|_1 \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - y - \sum_{n=1}^{N} m_n \right\| \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Это доказывает, что $\{[x_n]\}$ суммируема. Опять применяя теорему III.3, заключаем, что X/M полно. Оно называется **фактор-**

пространством X по M. Читатель сам разберется в деталях следующего простого примера.

Пример. Пусть $X=C[0, 1]$ и $M=\{f \mid f(0)=0\}$. Тогда $X/M=\mathbb{C}$.

III.5. Теорема Бэра о категории и ее следствия

При изучении банаховых пространств часто приходится доказывать, что некоторые множества имеют непустые множества внутренних точек. Вот пример:

Предложение. Пусть X и Y—нормированные линейные пространства. Тогда линейное отображение $T: X \to Y$ ограничено в том и лишь в том случае, если множество

$$T^{-1}[\{y \mid \|y\|_Y \leqslant 1\}]$$

имеет внутренние точки.

Доказательство. Предположим, что T дано и что интересующее нас множество содержит шар

$$\{x \mid \|x-x_0\|_X < \varepsilon\}.$$

Тогда из $\|x\| < \varepsilon$ следует, что

$$\|Tx\| \leqslant \|T(x+x_0)\| + \|Tx_0\| \leqslant 1 + \|Tx_0\|,$$

так как $x+x_0$ содержится в шаре радиуса ε вокруг точки x_0. Значит, для всех $x \in X$

$$\|Tx\| \leqslant \varepsilon^{-1}(\|Tx_0\|+1)\|x\|$$

и, следовательно, T ограничено. Обратное доказывается совсем просто. ∎

Итак, очень важно знать, когда множество внутренних точек не пусто. На этот счет для полных метрических пространств существует весьма замечательная теорема. Но сначала введем следующее определение.

Определение. Множество S в метрическом пространстве M называется **нигде не плотным,** если его замыкание $\bar{S}$ не имеет внутренних точек.

Теорема III.8 (теорема Бэра о категории). Полное метрическое пространство не может быть объединением счетного числа нигде не плотных множеств.

Доказательство. Идея доказательства проста. Предположим, что M—полное метрическое пространство и что $M=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, причем каждое A_n нигде не плотно. Затем построим такую последовательность Коши $\{x_m\}$, которая не попадает ни в одно из A_n, так что и ее предельная точка x (которая лежит в M в силу полноты) не попадает ни в одно A_n. Но это находится в противоречии с утверждением $M=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Поскольку A_1 нигде не плотно, мы можем найти $x_1 \notin \overline{A}_1$. Возьмем открытый шар B_1 вокруг x_1, такой, что $B_1 \cap A_1 = \varnothing$ и радиус B_1 меньше единицы. Так как A_2 нигде не плотно, можно найти $x_2 \in B_1 \diagdown \overline{A}_2$. Пусть B_2 — открытый шар с центром в x_2, такой, что $\overline{B}_2 \subset B_1$, $B_2 \cap A_2 = \varnothing$ и радиус B_2 меньше $^1/_2$. Продолжая по индукции, выберем $x_n \in B_{n-1} \diagdown \overline{A}_n$ и открытый шар B_n с центром в x_n, такой, что $\overline{B}_n \subset B_{n-1}$, $B_n \cap A_n = \varnothing$ и радиус B_n меньше 2^{1-n}. Тогда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность Коши, так как из $m, n > N$ следует, что $x_n, x_m \in B_N$ и, значит,

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant 2^{1-N} + 2^{1-N} = 2^{2-N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Пусть $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Так как $x_n \in B_n$ при $n \geqslant N$, то

$$x \in \overline{B}_N \subset B_{N-1}.$$

Значит, $x \notin A_{N-1}$ при любом N, что противоречит условию $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ∎

Теорема Бэра говорит о том, что если $M=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то некоторые из множеств $\overline{A}_n$ должны иметь внутренние точки. Практически редко приходится пользоваться прямо этой теоремой. Обычно пользуются одним из ее следствий. Первое из них известно под именем теоремы Банаха—Штейнгауза или принципа равномерной ограниченности.

Теорема III.9 (принцип равномерной ограниченности). Пусть X — банахово пространство. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство ограниченных линейных преобразований из X в какое-либо нормированное линейное пространство Y. Допустим, что для всякого $x \in X$ множества $\{\|Tx\|_Y \mid T \in \mathcal{F}\}$ ограничены. Тогда $\{\|T\| \mid T \in \mathcal{F}\}$ ограничено.

Доказательство. Пусть $B_n = \{x \mid \|Tx\| \leqslant n$ при всех $T \in \mathcal{F}\}$. По предположению каждый x принадлежит некоторому B_n и, значит, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Более того, каждое B_n замкнуто (так как каждое T непрерывно). По теореме Бэра о категории какое-либо B_n имеет внутренние точки. С помощью тех же рассуждений, что и в предложении в начале этого раздела, заключаем, что все $\|T\|$ равномерно ограничены. ▮

В качестве типичного применения этой теоремы приведем такое следствие (см. также задачу 13):

Следствие. Пусть X и Y—банаховы пространства, и пусть $B(\cdot,\ \cdot)$—билинейное отображение из $X\times Y$ в $\mathbb{C}$, непрерывное по каждой переменной в отдельности, т. е. $B(x,\ \cdot)$ для любого фиксированного x и $B(\cdot,\ y)$ для любого фиксированного y есть ограниченное линейное преобразование. Тогда $B(\cdot,\ \cdot)$ непрерывно по совокупности переменных, т. е. если $x_n\to 0$ и $y_n\to 0$, то $B(x_n,\ y_n)\to 0$.

Доказательство. Пусть $T_n(y)=B(x_n,\ y)$. Так как $B(x_n,\ \cdot)$ непрерывно, то всякое T_n ограничено. Так как $x_n\to 0$ и $B(\cdot,\ y)$ ограничено, $\{\|T_n(y)\|\}$ ограничено при всяком фиксированном y. Следовательно, существует такое C, что

$$\|T_n(y)\|\leqslant C\|y\|$$

при всех n. Значит,

$$\|B(x_n,\ y_n)\|=\|T_n(y_n)\|\leqslant C\|y_n\|\to 0$$

при $n\to\infty$. ▮

Заметим, что даже в $\mathbb{R}^2$ для нелинейных функций из непрерывности по каждой переменной не следует непрерывность по двум переменным. Стандартный пример:

$$f(x,\ y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad \text{если}\quad \langle x,\ y\rangle\neq\langle 0,\ 0\rangle,$$
$$f(0,\ 0)=0.$$

Второе применение теоремы Бэра о категории приводит к следующей группе результатов.

Теорема III.10 (теорема об открытом отображении). Пусть $T\colon X\to Y$—ограниченное линейное преобразование одного банахова пространства X *на* другое банахово пространство Y. Тогда если M—открытое множество в X, то $T[M]$ открыто в Y.

Доказательство. Сделаем ряд замечаний, которые упростят доказательство. Надо показать только, что для всякой окрестности N точки x множество $T[N]$ есть окрестность $T(x)$. Так как $T[x+N]=T(x)+T[N]$, то достаточно показать это лишь для $x=0$. Поскольку окрестности содержат шары, достаточно показать, что $T[B_r^X]\supset B_{r'}^Y$ для некоторого r', где

$$B_r^X=\{x\in X\mid \|x\|<r\}.$$

Однако так как $T[B_r^X]=rT[B_1^X]$, нужно только показать, что $T[B_r^X]$ есть окрестность нуля при некотором r. Наконец, принимая во внимание метод сдвига, использованный в доказательстве предложения, достаточно показать, что $T[B_r^X]$ имеет внутренние точки при некотором r.

Поскольку T сюръективно,

$$Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} T[B_n]$$

и какое-либо $\overline{T[B_n]}$ имеет непустую внутренность. Теперь начинается трудная работа, так как нам нужно, чтобы $T[B_n]$ имело непустую внутренность. При помощи растяжения и сдвига можно добиться того, чтобы B_ε содержалось в $\overline{T[B_1]}$; мы покажем, что $\overline{T[B_1]}\subset T[B_2]$, и тем самым завершим доказательство.

Пусть $y\in\overline{T[B_1]}$. Выберем $x_1\in B_1$ так, чтобы $y-Tx_1\in B_{\varepsilon/2}\subset\subset\overline{T[B_{1/2}]}$. Выберем теперь $x_2\in B_{1/2}$ так, чтобы

$$y-Tx_1-Tx_2\in B_{\varepsilon/4}.$$

По индукции выберем $x_n\in B_{2^{1-n}}$ так, чтобы

$$y-\sum_{j=1}^{n} Tx_j\in B_{\varepsilon/2^{n-1}}.$$

Тогда $x=\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ существует и лежит в B_2 и

$$y=\sum_{i=1}^{\infty} Tx_i=Tx.$$

Значит, $y\in T[B_2]$. ∎

Теорема III.11 (теорема об обратном отображении). Непрерывная биекция одного банахова пространства на другое имеет непрерывное обратное.

Доказательство. Поскольку T открыто, T^{-1} непрерывно. ∎

Задача 19 дает пример применения этого результата.

Определение. Пусть T — отображение нормированного линейного пространства X в нормированное линейное пространство Y. **График** T, обозначаемый через $\Gamma(T)$, определяется как

$$\Gamma(T)=\{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle\in X\times Y,\ y=Tx\}.$$

Теорема III.12 (теорема о замкнутом графике). Пусть X и Y — банаховы пространства и T — линейное отображение X в Y. В этом случае T ограничено тогда и только тогда, когда график T замкнут.

Доказательство. Допустим, что $\Gamma(T)$ замкнут. Тогда, поскольку T линейно, $\Gamma(T)$ есть подпространство банахова пространства $X\oplus Y$

и, следовательно, является банаховым пространством с нормой

$$\|\langle x, Tx\rangle\| = \|x\| + \|Tx\|.$$

Рассмотрим непрерывные отображения

$$\Pi_1: \langle x, Tx\rangle \to x, \quad \Pi_2: \langle x, Tx\rangle \to Tx;$$

Π_1 — биекция, и, значит, по теореме об обратном отображении Π_1^{-1} непрерывно. Но $T = \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}$, так что T непрерывно. Доказательство обратного тривиально. ∎

Во избежание путаницы в дальнейшем подчеркнем, что в этой теореме неявно предполагается, что T определено на всем X. Позже мы будем иметь дело с преобразованиями, определенными на *алгебраических* подпространствах в X (а не на всем X); такие преобразования могут иметь замкнутый график, не будучи непрерывными. Чтобы оценить, что реально может дать теорема о замкнутом графике, рассмотрим такие три утверждения:

(a) x_n сходится к некоторому x;

(b) Tx_n сходится к некоторому y;

(c) $Tx = y$.

A priori, чтобы доказать непрерывность T, следует показать, что из (a) следуют (b) и (c). Если же воспользоваться теоремой о замкнутом графике, то достаточно доказать, что из (a) и (b) следует (c).

Еще одно следствие теоремы о замкнутом графике позволяет сделать важные для математической физики выводы.

Следствие (теорема Хеллингера — Теплица). Пусть A — всюду определенный оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем $(x, Ay) = (Ax, y)$ для всех x, y из $\mathcal{H}$. Тогда A ограничен.

Доказательство. Докажем, что график $\Gamma(A)$ замкнут. Предположим, что $\langle x_n, Ax_n\rangle \to \langle x, y\rangle$. Достаточно доказать, что $\langle x, y\rangle \in \Gamma(A)$, т. е. что $y = Ax$. Но для любого $z \in \mathcal{H}$

$$(z, y) = \lim_{n\to\infty} (z, Ax_n) = \lim_{n\to\infty} (Az, x_n) = (Az, x) = (z, Ax).$$

Следовательно, $y = Ax$ и $\Gamma(A)$ замкнут. ∎

Как мы увидим, эта теорема причиняет массу технических осложнений, так как в квантовой механике есть операторы (подобные энергии), которые не ограничены, но должны в каком-нибудь смысле удовлетворять условию

$$(x, Ay) = (Ax, y).$$

Теорема Хеллингера — Теплица утверждает, что эти операторы не могут быть определены всюду. Значит, они определены на подпространствах $D(A)$ пространства $\mathcal{H}$, и поэтому часто бывает трудно сказать, что такое $A+B$ или AB. Например, $A+B$ a priori определено только на области $D(A)\cap D(B)$, которая может оказаться равной $\{0\}$ даже в том случае, когда $D(A)$ и $D(B)$ плотны. Мы вернемся к этим вопросам в гл. VIII и X.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *III.1.* Банаховы пространства названы так в честь С. Банаха, который в течение 20-х годов провел важные исследования нормированных линейных пространств, завершением которых явилась его книга: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Monografie Mat., I, Warszawa, 1932 [1]). Хорошим элементарным учебником по материалу этой главы является книга: A. Friedman, Foundations of Modern Analysis, Holt, New York, 1970. Теорема III.1 там доказана подробно, за исключением части (c), которая доказана лишь для $r=1$. Чтобы доказать общий случай, когда $p^{-1}+q^{-1}=r^{-1}$, заметим, что

$$|fg|^r=|f|^r|g|^r,$$

и воспользуемся неравенством Гёльдера для специального случая

$$\frac{1}{(p/r)}+\frac{1}{(q/r)}=1;$$

получим

$$\int|fg|^r\leqslant\left(\int|f|^{rp/r}\right)^{r/p}\left(\int|g|^{rq/r}\right)^{r/q},$$

или

$$\left(\int|fg|^r\right)^{1/r}\leqslant\left(\int|f|^p\right)^{1/p}\left(\int|g|^q\right)^{1/q}.$$

Пусть X — банахово пространство. При изучении банахова пространства $\mathcal{L}(X, X)$ операторов из X в само X можно использовать тот факт, что оно представляет собой в то же время алгебру. Тогда для исследования его структуры можно применять такие алгебраические понятия, как идеалы и коммутаторы. Некоторые важные идеалы алгебры $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, изучаются в § VI.6. Общая теория операторных алгебр и ее применения изучаются в следующих томах.

§ *III.2.* Доказательство того, что $(L^p)^*=L^q$, можно найти в книге Ройдена (см. замечания к гл. I), а можно доказать это непосредственно, пользуясь понятием равномерно выпуклого пространства (см. задачи 25 и 26 гл. III и задачу 15 гл. V). В § VI.6 обсуждаются сопряженные некоторых подалгебр алгебры $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

§ *III.3.* Теорема Хана — Банаха восходит к работам Хелли: E. Helly, Über lineare funktional Operationen, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-Nat. Kl.*, **121** IIa (1912), 265—297, и Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Monats. Math. Phys.*, **31** (1921), 60—91. Современная версия принадлежит Хану: H. Hahn, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, *J. reine angew. Math.*, **157** (1926), 214—229, и Банаху: S. Banach, Sur les fonctionelles linéaires, I, II, *Studia Math.*, **1** (1929), 211—216, 223—239. Хороший пример конкретного применения теоремы Хана — Банаха можно найти в упомянутой выше книге Фридмана. Там показано, как с помощью

[1]) Украинский перевод: С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, «Радянська школа», 1948.

теоремы Хана — Банаха доказывается существование функции Грина для двумерной задачи Дирихле.

§ *III.5.* Теорема Бэра была им доказана для вещественной прямой: R. Baire, Sur les fonctions de variables réelles, *Ann. Math.*, 3 (1899), 1—32. Современная версия доказана Куратовским: C. Kuratowski, La propriété de Baire dans les espaces métriques, *Fund. Math*, **16** (1930), 390—394, и Банахом: S. Banach, Théorèms sur les ensembles de premières catégorie, *Fund. Math.*, **16** (1930), 395—398. Теорема Банаха — Штейнгауза доказана в работе: S. Banach, H. Steinhaus, Sur le principe de la condensation des singularités, *Fund. Math.*, 9 (1927), 50—61. Обсуждение теоремы Бэра и ее следствий есть в книге Лорха (см. замечания к § II.5). Происхождение термина «категория» следующее: объединение счетного числа нигде не плотных множеств называется множеством **первой категории**. Все остальные множества — **второй категории**. Теорема Бэра утверждает, что любое полное метрическое пространство — второй категории.

Дополнения к множествам первой категории иногда называют остаточными множествами. Это множества, содержащие счетное пересечение открытых плотных множеств. Из теоремы Бэра следует, что любое остаточное множество в полном метрическом пространстве плотно в нем (задача 21).

Если в метрическом пространстве какое-то утверждение справедливо на остаточном множестве, то часто говорят, что оно «имеет место почти всюду», следовательно, множества первой категории играют роль «множеств меры нуль». Некоторые занятные результаты относительно этого понятия «почти всюду» можно найти в книге Шоке: G. Choquet, Lectures in Analysis, v. I, Benjamin, New York, 1969, pp. 120—126. Предостережение: существуют множества $X \subset [0, 1]$ первой категории меры 1! Таким образом, два понятия «почти всюду» по Лебегу и по Бэру совершенно различны.

Существуют и другие топологические пространства, кроме полных метрических, обладающие тем свойством, что остаточные множества плотны в них; такие пространства называют пространствами Бэра. Например, любое локально компактное пространство есть пространство Бэра. Дальнейшее обсуждение см. в книге Шоке на стр. 105—120.

ЗАДАЧИ

†*1.* Докажите, что $L^\infty(\mathbb{R})$ — банахово пространство.

†*2.* (a) Докажите, что l_p и c_0 сепарабельны, а l_∞ — нет.
(b) Докажите, что $s \subset l_p$ при всех p.

†*3.* Докажите, что нормированное линейное пространство полно тогда и только тогда, когда каждая абсолютно суммируемая последовательность суммируема. [*Указание:* чтобы доказать, что последовательность Коши сходится, достаточно показать, что сходится какая-либо ее подпоследовательность.]

**4.* Докажите, что все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны. [*Указание:* воспользуйтесь тем, что единичная сфера компактна в евклидовой топологии.]

†*5.* Докажите, что $C_\infty(\mathbb{R})$ есть пополнение $\varkappa(\mathbb{R})$.

6. Докажите, что если $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in l_1$, то линейный функционал на c_0, заданный формулой

$$\Lambda(\{a_k\}_{k=1}^\infty) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k,$$

имеет норму $\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|$.

7. Докажите, пользуясь теоремой Хана—Банаха, что $l_\infty = l_1^*$, но $l_\infty^* \neq l_1$.

8. (a) Докажите, что существует линейный функционал на $L^\infty(\mathbb{R})$, равный нулю на $C(\mathbb{R})$.

(b) Докажите, что существует линейный функционал λ на $L^\infty(\mathbb{R})$, такой, что $\lambda(f) = f(0)$ для всякой $f \in C(\mathbb{R})$.

9. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и λ — ограниченный линейный функционал на подпространстве $\mathcal{M}$, не обязательно замкнутом. Опишите непрерывные расширения λ.

†*10.* Докажите третье следствие теоремы Хана—Банаха.

11. Докажите, что на $l_\infty(\mathbb{R})$ существует такой линейный функционал λ, что

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \lambda(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n;$$

$l_\infty(\mathbb{R}) = \{a \mid a \in l_\infty,\ a_n \in \mathbb{R}$ при всех $n\}$.

†*12.* Докажите утверждение примера в конце § 4.

13. Воспользуйтесь принципом равномерной ограниченности, чтобы получить другое доказательство теоремы Хеллингера—Теплица.

**14.* Пусть X — банахово пространство. Приведите пример всюду определенного, но разрывного линейного функционала λ. Докажите непосредственно, что λ не замкнут.

15. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\{y_n\}$ — последовательность элементов $\mathcal{H}$. Докажите, что следующие два утверждения эквивалентны:

(a) $(x, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$;

(b) $(x_m, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при каждом $m = 1, 2, \ldots$, и $\{\|y_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

16. Подмножество S в банаховом пространстве называется **слабо ограниченным**, если $\sup\limits_{x\in S} |\lambda(x)| < \infty$ при всех $\lambda \in X^*$; S называется **сильно ограниченным**, если $\sup\limits_{x\in S} \|x\| < \infty$. Докажите, что множество сильно ограничено тогда и только тогда, когда оно слабо ограничено (см. § V.7).

17. Докажите, что раздельно непрерывный полилинейный функционал на банаховом пространстве непрерывен.

18. Распространите теорему Хеллингера—Теплица на пары операторов A, B, удовлетворяющих равенству

$$(Ax, y) = (x, By).$$

19. Пусть X — банахово пространство относительно любой из норм $\|\cdot\|_1$ или $\|\cdot\|_2$. Допустим, что $\|\cdot\|_1 \leqslant C\|\cdot\|_2$ при некотором C. Докажите, что существует D, для которого $\|\cdot\|_2 \leqslant D\|\cdot\|_1$.

20. Почему одноточечное пространство не нарушает теоремы Бэра?

**21.* Докажите, что любое счетное пересечение плотных открытых множеств в полном метрическом пространстве плотно.

22. (a) Докажите, что банахово пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно X^*. [*Указание:* если $X \neq X^{**}$, найдите ограниченный линейный функционал на X^{**}, равный нулю на X.]

(b) Докажите, что если X не рефлексивно, то и $(\ldots(X^*)^*\ldots)^*$ не рефлексивно.

23. Пусть X — гильбертово пространство и $\mathcal{M}$ — замкнутое подпространство. Покажите, что ограничение естественного отображения $\pi: X \longrightarrow X/\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}^{\perp}$ есть изоморфизм между $\mathcal{M}^{\perp}$ и $X/\mathcal{M}$.

24. Пусть l — линейный функционал на вещественном банаховом пространстве X. Докажите, что $X/\mathrm{Ker}\, l$ изоморфно $\mathbb{R}$ с обычной нормой и что естественная проекция $\pi: X \longrightarrow X/\mathrm{Ker}\, l = \mathbb{R}$ связана с l соотношением $l = \pm \| l \| \pi$.

25. Банахово пространство называется **равномерно выпуклым**, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\| x \| = \| y \| = 1$ и $\| {}^1/_2 (x+y) \| > 1-\delta$ следует $\| x-y \| < \varepsilon$; это означает, что единичный шар равномерно выпуклый. В задаче 15 гл. V мы убедимся, что всякое равномерно выпуклое пространство рефлексивно.
(a) Докажите непосредственно, что $L^1(\mathbb{R})$ и $L^\infty(\mathbb{R})$ не являются равномерно выпуклыми.
(b) Докажите, что всякое гильбертово пространство равномерно выпукло.
*(c) Докажите, что $L^p(X, d\mu)$ равномерно выпукло при $p \geqslant 2$. *Указание:* докажите, что при $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{p-1}(|\alpha|^p + |\beta|^p),$$

показав предварительно, что

$$(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p)^{1/p} \leqslant \sqrt{2}\,(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{1/2}.$$

Примечания. 1. L^p на самом деле равномерно выпукло для всех $1 < p < \infty$, но доказательство для $1 < p < \infty$ труднее; ср. G. Köthe, Topological Vector Spaces, I, Springer, 1969, pp. 358—359.

2. Равномерно выпуклые пространства были введены в работе: J. Clarkson, Uniformly convex spaces, *Trans. AMS*, 40 (1936). 396—414.

3. M. Дей привел примеры рефлексивных банаховых пространств, которые не являются равномерно выпуклыми: M. Day, Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces, *Bull. AMS*, 47 (1941), 313—317; см. также G. Köthe, pp. 360—363.

26. (a) Говорят, что два банаховых пространства X и Y **строго сопряжены**, если существует отображение $f: X \longrightarrow Y^*$, являющееся изометрией, причем индуцированное отображение $f^*: Y \longrightarrow X^*$ — тоже изометрия. Докажите, что если X и Y строго сопряжены и X рефлексивно, то $Y = X^*$ и $X = Y^*$. [*Указание:* воспользуйтесь теоремой Хана — Банаха.]
(b) Докажите, что $L^p(X, d\mu)$ и $L^q(X, d\mu)$ строго сопряжены, если $p^{-1}+q^{-1}=1$.
(c) Докажите, что $L^p(X, d\mu)^* = L^q(X, d\mu)$, если $1 < p < \infty$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. [*Указание:* воспользуйтесь задачей 25 и задачей 15 гл. V.]

*27. Докажите теорему Банаха — Шаудера: пусть T — непрерывное линейное отображение $T: E \longrightarrow F$, где E и F — банаховы пространства. Тогда либо $T[A]$ открыто в $T[E]$ для любого открытого $A \subset E$, либо $T[E]$ первой категории в $\overline{T[E]}$ (см. замечания к § 5, где определяется понятие категории).

28. (a) Докажите, что каждое факторпространство пространства l_2 по замкнутому подпространству изометрически изоморфно либо l_2, либо $\mathbb{C}^N$ с некоторым N.
(b) Докажите, что l_1 топологически не изоморфно никакому факторпространству l_2.

29. Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — плотное подмножество в единичном шаре в X. Определим отображение

$l_1 \longrightarrow X$, полагая

$$A\colon \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots \rangle \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

(a) Докажите, что A корректно определено и непрерывно.

(b) Докажите, что $\operatorname{Ker} A$ замкнуто и что A «поднимается» до непрерывного отображения $\hat{A}\colon\ l_1/\operatorname{Ker} A \longrightarrow X$.

(c) Докажите, что $\operatorname{Ran} \hat{A} = \operatorname{Ran} A$ есть все пространство X. *Указание:* при данном x с $\|x\| = 1$ выберите рекурсивно $x_{n(l)}$, требуя, чтобы

$$\left\| x - \sum_{l=1}^{k} 2^{-l+1} x_{n(l)} \right\| \leqslant 2^{-k}.$$

(d) Сделайте заключение, что любое сепарабельное банахово пространство топологически изоморфно какому-либо из факторпространств пространства l_1.

(e) Заменяя в (c) число 2 на 3, 4, ..., покажите, что на самом деле $\hat{A}$ — изометрия.

30. Пусть X — банахово пространство и Y — его замкнутое подпространство. Пусть Y° в X^* определено формулой

$$Y^\circ = \{ l \in X^* \mid l \restriction Y = 0 \}.$$

Для заданного ограниченного линейного функционала f на X/Y определим $\pi^*(f) \in X^*$, полагая $[\pi^*(f)](x) = f([x])$. Докажите, что π^* — изометрический изоморфизм $(X/Y)^*$ на Y°.

31. (a) Пусть E — банахово пространство с сепарабельным сопряженным и $\langle M, \mu \rangle$ — такое пространство с мерой, что $L^p(M, d\mu)$ сепарабельно для всех $1 < p < \infty$. Разработайте теорию пространств $L^p(M, d\mu; E)$, аналогичную теории $L^2(M, d\mu; \mathcal{H})$, обсуждавшейся в § II.1 и II.4.

(b) Докажите, что $L^p(M \times N, d\mu \otimes d\nu)$ и $L^p(M, d\mu; L^p(N, d\nu))$ естественно изоморфны.

*(c) Пусть E^{**} — сепарабельное банахово пространство и $1 \leqslant p < \infty$. Докажите, что $L^p(M, d\mu; E)^*$ естественно изометрически изоморфно $L^q(M, d\mu; E^*)$. (*Указание.* Сначала покажите, что достаточно убедиться в том, что любое ограниченное линейное преобразование T пространства E в $L^q(M, d\mu)$ имеет форму $[T(x)](m) = [f(m)](x)$ с какой-либо $f \in L^q(M, d\mu; E^*)$. Докажите это для частного случая, когда $E = l_1$. Затем воспользуйтесь задачами 29 и 30 для рассмотрения общего сепарабельного банахова пространства E.)

**32.* Пусть S — замкнутое линейное подпространство в $L^1[0, 1]$. Предположим, что из $f \in S$ следует, что $f \in L^p[0, 1]$ при некотором $p > 1$. Докажите, что тогда $S \subset L^p[0, 1]$ с некоторым $p > 1$.

IV. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Всякий знает, что такое кривая, пока не выучится математике настолько, что вконец запутается в бесчисленных исключениях.

Ф. КЛЕЙН

IV.1. Общие понятия

Абстрактные понятия предела и сходимости—это насущный хлеб функционального анализа. К сожалению, чисто метрических формулировок, которыми мы до сих пор пользовались, оказывается недостаточно, и возникает необходимость в более общих понятиях. Обобщение, называемое топологическим пространством, можно описать на языке только одной сходимости, но в результате получается ужасно неуклюжая конструкция. Вместо этого обычно определяют топологическое пространство, абстрагируя понятие открытых множеств в метрических пространствах. При этом сходимость оказывается вторичным, выводимым понятием. Мы обсудим сходимость в § IV.2.

Этот раздел состоит в основном из определений, так как здесь вводится новый язык, нужный для описания топологических понятий. Мы очень советуем читателю учить его, возвращаясь к этому разделу по мере необходимости, а не просто вызубривать на память.

Определение. **Топологическое пространство** есть множество S с выделенным семейством подмножеств $\mathcal{T}$, которые называются **открытыми множествами** и обладают следующими свойствами:

(i) $\mathcal{T}$ замкнуто относительно конечных пересечений, т. е. если A, $B \in \mathcal{T}$, то $A \cap B \in \mathcal{T}$;

(ii) $\mathcal{T}$ замкнуто относительно *произвольных* объединений, т. е. если $A_\alpha \in \mathcal{T}$ при всех α из некоторого множества индексов I, то $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$;

(iii) $\varnothing \in \mathcal{T}$ и $S \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ называется **топологией** в S. Иногда мы будем обозначать топологическое пространство символом $\langle S, \mathcal{T} \rangle$.

В отличие от борелевой структуры топологические структуры несимметричны по отношению к операциям пересечения и объединения и включают не только счетные операции, но произвольные.

Первейший пример топологического пространства — это метрическое пространство. Открытые множества в нем — это те множества, которые обладают свойством $(\forall x \in M)(\exists r > 0)\{y \mid \rho(x, y) < r\} \subset M$. После обсуждения непрерывных функций мы опишем другое семейство примеров. Упомянем, однако, уже сейчас два тривиальных примера: семейство всех подмножеств данного множества S есть топология; она называется дискретной топологией. $\mathcal{T} = \{\varnothing, S\}$ также есть топология; она называется антидискретной.

Семейство всех топологий на множестве S естественным образом упорядочено: $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, если $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ в смысле теоретико-множественного включения. Если $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, то мы говорим, что топология $\mathcal{T}_1$ **слабее** топологии $\mathcal{T}_2$. (Слово «слабее» связано с тем, что в топологии $\mathcal{T}_1$ сходится больше последовательностей, чем в $\mathcal{T}_2$, так что $\mathcal{T}_1$-сходимость — более слабое понятие, чем $\mathcal{T}_2$-сходимость.)

Определение. Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ называется **базой** топологии $\mathcal{T}$, если любое $T \subset \mathcal{T}$ имеет вид $T = \bigcup\limits_{\alpha} B_\alpha$ для некоторого семейства $\{B_\alpha\} \subset \mathcal{B}$.

Например, семейство шаров в метрическом пространстве всегда образует базу. Возьмем теперь целый ряд определений непосредственно из теории метрических пространств.

Определение. Множество N называется **окрестностью** точки x топологического пространства S, если существует открытое множество U, такое, что $x \in U \subset N$.

Семейство $\mathcal{N}$ подмножеств топологического пространства S называется **базой окрестностей** точки x, если каждое $N \in \mathcal{N}$ есть окрестность точки x и если для любой заданной окрестности M точки x существует такое $N \in \mathcal{N}$, что $N \subset M$. Иными словами, $\mathcal{N}$ есть база окрестностей точки x тогда и только тогда, когда $\{M \mid N \subset M$ для какой-либо $N \in \mathcal{N}\}$ есть семейство всех окрестностей x. Например, если $\mathcal{B}$ есть база топологии $\mathcal{T}$, то $\{N \in \mathcal{B} \mid x \in N\}$ — база окрестностей точки x. Подчеркнем, что окрестности не обязаны быть открытыми. В метрическом пространстве базы окрестностей образуют *замкнутые* шары положительного радиуса.

Определение. В топологическом пространстве S множество $C \subset S$ называется **замкнутым**, если оно является дополнением открытого множества.

Свойства семейства всех замкнутых множеств выводятся из свойств $\mathcal{T}$.

Определение. Пусть S — топологическое пространство и $A \subset S$. **Замыкание** $\bar{A}$ множества A есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A. **Внутренность** A° множества A есть наибольшее открытое множество, содержащееся в A. **Граница** множества A есть множество $\overline{A} \setminus A^\circ \equiv \overline{A} \cap [\overline{S \setminus A}]$.

Существование наименьшего замкнутого множества, содержащего A, следует из замкнутости $\mathcal{T}$ относительно произвольных объединений.

В качестве примеров рассмотрим некоторые топологии в $\mathbb{R}^2$.

Пример 1. Топология обычной метрики, называемая **метрической**.

Пример 2. Рассмотрим семейство множеств вида $\{\langle x, y\rangle \mid x \in O\}$, где *$y$ фиксировано*, а O—открытое множество в обычной топологии в $\mathbb{R}$. Это семейство множеств образует базу топологии, в которой открытыми являются такие множества C, что для всякого $y \in \mathbb{R}$ множество $\{x \mid \langle x, y\rangle \in C\}$ открыто в $\mathbb{R}$ в обычной топологии. В интуитивном смысле, который мы вскоре уточним, эта топология есть «произведение» обычной топологии в одном сомножителе и дискретной топологии во втором.

Пример 3. Пусть $\mathcal{T}$ состоит из пустого множества и всех множеств, содержащих $\langle 0, 0\rangle$. База окрестностей для $\langle x, y\rangle$ в этой топологии есть единственное (!) множество $\{\langle 0, 0\rangle, \langle x, y\rangle\}$.

Опыт обращения с метрическими пространствами подсказывает нам, что и теперь главную роль будут играть непрерывные функции.

Определение. Пусть $\langle S, \mathcal{T}\rangle$ и $\langle T, \mathcal{U}\rangle$—два топологических пространства. Функция $f\colon S \to T$ называется **непрерывной**, если $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$ при каждом $A \in \mathcal{U}$, т. е. если прообраз любого открытого множества есть открытое множество. Функция f называется **открытой**, если $f[B]$ открыто для любого $B \in \mathcal{T}$. Если f открыта и непрерывна, она называется **взаимно непрерывной**. Взаимно непрерывная биекция называется **гомеоморфизмом**.

Гомеоморфизмы—это изоморфизмы топологических пространств. Топологическое понятие—это такое понятие (или объект), которое инвариантно относительно гомеоморфизма. Так, например, интервалы $(-\infty, \infty)$ и $(-1, 1)$ гомеоморфны относительно гомеоморфизма $x \mapsto x/(1+x^2)$. Они отнюдь не изометричны в обычной метрике, и только один из них полон. Это показывает, что полнота не есть топологическое понятие. Однако большая часть метрических понятий, полезных в анализе, являются топологическими понятиями.

Для задания топологии часто пользуются непрерывностью.

Определение. Пусть $\mathcal{K}$—семейство функций из некоторого множества S в топологическое пространство $\langle T, \mathcal{U}\rangle$. Тогда

$\mathcal{K}$**-слабая** (или просто **слабая**) топология на S есть слабейшая топология, в которой все функции $f \in \mathcal{K}$ непрерывны.

Чтобы построить $\mathcal{K}$-слабую топологию, возьмем семейство всех конечных пересечений множеств вида $f^{-1}[U]$, где $f \in \mathcal{K}$ и $U \in \mathcal{U}$. Эти множества образуют базу $\mathcal{K}$-слабой топологии. Если $\mathcal{K}$ есть семейство функций на S со значениями в разных топологических пространствах, то $\mathcal{K}$-слабая топология определяется очевидным образом.

Пример 4. Рассмотрим множество $C[a, b]$ непрерывных функций на $[a, b]$. **Топология поточечной сходимости** на $C[a, b]$ есть слабая топология, задаваемая семейством функций $f \mapsto f(x)$. Именно, для каждой точки $x \in [a, b]$ положим $E_x(f) = f(x)$, так что $E_x(\cdot)$ суть отображения множества $C[a, b]$ в $\mathbb{R}$. Как мы убедимся ниже, топология поточечной сходимости есть такая топология на $C[a, b]$, в которой $f_n \longrightarrow f$ тогда и только тогда, когда $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ при каждом x.

Пример 5. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. В этом случае слабая топология — это слабейшая топология, в которой $\varphi \mapsto (\psi, \varphi)_{\mathcal{H}}$ становится непрерывным при каждом ψ из $\mathcal{H}$. База окрестностей нуля в явном виде задается множествами

$$N(\psi_1, \ldots, \psi_n; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \{\varphi \mid |(\psi_i, \varphi)| < \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где $\varepsilon_i > 0$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ произвольны и $n = 1, 2, \ldots$. Значит, окрестности в слабой топологии суть цилиндры во всех, кроме конечного числа, измерениях, т. е. существует подпространство M (ортогональное дополнение к $\psi_1, \ldots, \psi_n$), дополнение которого $M^\perp$ конечномерно и таково, что из $\varphi \in N$, $\eta \in M$ следует $\varphi + \eta \in N$.

Пример 6. Рассмотрим такие отображения π_1, π_2 на $\mathbb{R}^2$, что $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$. Слабая топология, определяемая функциями π_1 и π_2, и обычная топология на $\mathbb{R}^2$ в качестве базы соответствующих открытых множеств имеют прямоугольники $(a, b) \times (c, d)$, и, значит, эта слабая топология есть «обычная» топология на $\mathbb{R}^2$.

Пример 7. С помощью слабой топологии можно топологизировать декартовы произведения. Напомним, что если $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — некоторое семейство множеств, то $S = \mathop{\times}\limits_{\alpha \in I} S_\alpha$ есть семейство всех $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, где $x_\alpha \in S_\alpha$. Для каждого α определено отображение π_α: $S \longrightarrow S_\alpha$, именно $\pi_\alpha(\{x_\beta\}_{\beta \in I}) = x_\alpha$. Если каждое S_α наделено топологией $\mathcal{T}_\alpha$, то мы определим **топологию произведения** $\mathop{\times}\limits_{\alpha \in I} \mathcal{T}_\alpha$ как слабую топологию, порождаемую проекциями π_α.

Вернемся теперь к определениям и приведем классификацию пространств по тому признаку, насколько хорошо открытые множества разделяют точки и замкнутые множества.

Определение.

(a) Топологическое пространство называется **T_1-пространством**, если для всех x и y, $x \neq y$, существует открытое множество O, такое, что $y \in O$, $x \notin O$. Иными словами, пространство относится к типу T_1 в том и только том случае, когда $\{x\}$ замкнуто для любого x.

(b) Топологическое пространство называется **хаусдорфовым** (или T_2-пространством), если для любых x и y, $x \neq y$, существуют открытые множества O_1, O_2, такие, что $x \in O_1$, $y \in O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

(c) Топологическое пространство называется **регулярным** (или T_3-пространством), если оно типа T_1 и для всех x и всех замкнутых C, таких, что $x \notin C$, существуют открытые множества O_1, O_2, такие, что $x \in O_1$, $C \subset O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Это равносильно тому, что замкнутые окрестности любой точки образуют базу окрестностей.

(d) Топологическое пространство называется **нормальным** (или T_4-пространством), если оно типа T_1 и для всех замкнутых C_1, C_2, таких, что $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, существуют открытые множества O_1, O_2, такие, что $C_1 \subset O_1$, $C_2 \subset O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

Имеет место очевидное

Предложение. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.

Отметим, что наиболее важны понятия хаусдорфова и нормального пространства. Мы не станем пока обсуждать другой способ разделения множеств при помощи непрерывных функций. К этому вопросу относится лемма Урысона (теорема IV.7).

Рассмотрим теперь различные критерии счетности.

Определение.

(i) Топологическое пространство S **сепарабельно**, если оно имеет счетное плотное множество.

(ii) Говорят, что топологическое пространство S удовлетворяет **первой аксиоме счетности**, если всякая точка $x \in S$ имеет счетную базу окрестностей.

(iii) Говорят, что топологическое пространство S удовлетворяет **второй аксиоме счетности**, если S имеет счетную базу топологии.

Связь между этими топологическими понятиями и свойствами метрических пространств устанавливается в следующем элементарном предложении.

Предложение. (а) Всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(b) Метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.

(с) Всякое топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.

Предостережение. Существуют сепарабельные пространства, не удовлетворяющие второй аксиоме счетности (см. задачу 7). Чтобы вконец запутать все дело, некоторые авторы под сепарабельностью понимают выполнение второй аксиомы счетности. *У нас всегда сепарабельность означает существование счётного плотного множества.*

Геометрическая идея связности имеет свою топологическую формулировку:

Определение. Топологическое пространство S называется **несвязным**, если оно содержит непустое собственное подмножество C, которое одновременно открыто и замкнуто. Эквивалентная формулировка: S несвязно, если оно может быть представлено как объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств. Если S не является несвязным, оно называется **связным**.

Мы разберем понятие связности в задачах 3 и 6. Наконец, рассмотрим еще одно топологическое понятие—сужение топологии на подмножество.

Определение. Пусть $\langle S, \mathcal{T}\rangle$—топологическое пространство, и пусть $A \subset S$. **Индуцированная (относительная) топология** на A есть семейство множеств $\mathcal{T}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$. Подмножество $B \subset A$ называется **открытым в индуцированной топологии**, если $B \in \mathcal{T}_A$, **и замкнутым в индуцированной топологии**, если $A \setminus B \in \mathcal{T}_A$.

IV.2. Направленности и сходимость

В этом разделе мы рассмотрим новый объект, называемый направленностью, который нужен для того, чтобы оперировать предельными переходами в общих топологических пространствах. Хотя, на первый взгляд, понятие направленности кажется весьма замысловатым, предложения этого раздела покажут, насколько оно на самом деле естественно.

Определение. **Направленное множество** есть множество индексов I с упорядочением $<$, удовлетворяющим следующим требованиям:

(i) если α, $\beta \in I$, то существует такое $\gamma \in I$, что $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$;
(ii) $<$ есть частичное упорядочение.

Определение. **Направленность** в топологическом пространстве S есть отображение из направленного множества I в S; будем обозначать ее символом $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Если в качестве направленного множества мы возьмем натуральные числа в естественном порядке, то направленностями будут просто последовательности в S, так что направленность есть обобщение понятия последовательности. Если $P(\alpha)$ — предложение, зависящее от индекса α из направленного множества I, то мы говорим, что $P(\alpha)$ **в конце концов истинно**, если в I существует такое β, что $P(\alpha)$ истинно при $\alpha>\beta$. Мы говорим, что $P(\alpha)$ **часто истинно**, если относительно него нельзя утверждать, что оно в конце концов ложно, т. е. если при любом β существует такое $\alpha>\beta$, что $P(\alpha)$ истинно.

Определение. Говорят, что направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в топологическом пространстве S **сходится** к точке $x\in S$ (и пишут $x_\alpha\to x$), если для любой окрестности N точки x существует такое $\beta\in I$, что $x_\alpha\in N$, коль скоро $\alpha>\beta$.

Итак, $x_\alpha\to x$ тогда и только тогда, когда x_α в конце концов попадает в любую окрестность x. Если x_α часто попадает в любую окрестность x, то x называют **точкой накопления**, или **обобщенной предельной точкой** направленности $\{x_\alpha\}$. Заметим, что понятия предела и точки накопления обобщают те же понятия для последовательности в метрическом пространстве.

Теорема IV.1. Пусть A — множество в топологическом пространстве S. Тогда точка x принадлежит замыканию A в том и лишь в том случае, если существует такая направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, что $x_\alpha\in A$ и $x_\alpha\to x$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\bar{A}$ есть как раз такое множество точек x, что каждая окрестность x содержит точку из A. Это множество заведомо содержит A, и его дополнение есть наибольшее открытое множество, не содержащее ни одной точки из A. Допустим далее, что $x_\alpha\to x$, причем каждое $x_\alpha\in A$. Тогда каждая окрестность точки x содержит какие-либо x_α и, значит, какие-либо точки из A, т. е. x есть предельная точка A и, таким образом, $x\in\bar{A}$.

Обратно, допустим, что $x\in\bar{A}$. Пусть I — система окрестностей x с упорядочением $N_1<N_2$, если $N_2\subset N_1$. Для каждого $N\in I$ пусть x_N — точка, принадлежащая $A\cap N$. Тогда $\{x_N\}_{N\in I}$ есть направленность и $x_N\to x$. ∎

В пространствах, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, можно строить замыкания множеств, пользуясь лишь последовательностями. Таково положение в метрических пространствах.

На следующем примере мы убедимся, что в более общем случае одними последовательностями не обойтись.

Пример. Пусть $S=[0, 1]$, и пусть непустыми открытыми множествами будут те подмножества отрезка $[0, 1]$, дополнения которых содержат не более чем счетное множество точек. Пусть $A=[0, 1)$. Тогда $\bar{A}=S$, так как $\{1\}$ — не открытое множество. Пусть теперь $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — любая последовательность точек из $[0, 1)$. Она не может сходиться к 1, так как дополнение к $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть открытое множество, содержащее 1.

Хотя этот пример кажется искусственным, но пространства, не удовлетворяющие первой аксиоме счетности, играют важную роль в функциональном анализе. Обычно они появляются, когда рассматривают сопряженные банаховых пространств с топологией, более слабой, чем определяемая нормой (§ IV.5).

Сформулируем два результата о направленностях, доказательства которых не трудны, и мы их оставим в качестве задач:

Теорема IV.2. (a) Функция f из топологического пространства S в топологическое пространство T непрерывна в том и только в том случае, если для любой сходящейся направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в S, такой, что $x_\alpha \to x$, направленность $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ сходится в T к $f(x)$.

(b) Пусть S — хаусдорфово пространство. Тогда направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в S имеет не более чем один предел, т. е. если $x_\alpha \to x$ и $x_\alpha \to y$, то $x=y$.

Понятие, аналогичное подпоследовательности, можно ввести следующим образом:

Определение. Направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ называется **поднаправленностью** направленности $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$, если существует функция F: $I \to J$ с такими свойствами:

(i) $x_\alpha = y_{F(\alpha)}$ для каждого $\alpha\in I$;

(ii) для всякого $\beta'\in J$ существует такое $\alpha'\in I$, что из $\alpha > \alpha'$ следует $F(\alpha) > \beta'$ (т. е. $F(\alpha)$ в конце концов больше любого фиксированного $\beta\in J$).

Следующее простое предложение показывает, что приведенное определение разумно:

Предложение. Точка x в топологическом пространстве S есть точка накопления направленности $\{x_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда какая-либо поднаправленность направленности $\{x_\alpha\}$ сходится к x.

Разумеется, подпоследовательности суть поднаправленности последовательностей. Однако может случиться, что последовательность в топологическом пространстве не имеет сходящихся подпоследовательностей, но имеет сходящиеся поднаправленности (см. задачу 12).

IV.3. Компактность

Читатель, несомненно, помнит, какую роль в элементарном анализе играют замкнутые ограниченные подмножества $\mathbb{R}^n$. В этом разделе мы рассмотрим топологическую абстракцию этого понятия.

Определение. Говорят, что топологическое пространство $\langle S, \mathcal{T}\rangle$ **компактно**, если любое открытое покрытие S имеет конечное подпокрытие, т. е. если для любого семейства $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}$, такого, что $S=\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} U$, существует конечное подмножество $\{U_1, \ldots, U_n\}\subset\mathcal{U}$ со свойством $S=\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Подмножество в топологическом пространстве называется **компактным множеством**, если оно является компактным пространством в относительной топологии.

Всюду далее мы всегда будем считать, что все компактные пространства хаусдорфовы, хотя время от времени будем специально напоминать об этом условии.

Поскольку нам предстоит изложить довольно обширный материал, полезно, пожалуй, коротко сказать о содержании двух следующих разделов. После рассмотрения некоторых эквивалентных формулировок свойства компактности и кое-каких элементарных свойств компактных пространств мы обратимся к нескольким центральным столпам функционального анализа. Сначала сформулируем и обсудим теорему Тихонова. Потом перейдем к изучению непрерывных функций на компактных множествах. Убедившись, что компактное хаусдорфово пространство X обладает богатым запасом непрерывных функций (лемма Урысона), мы исследуем банахово пространство $C(X)$ непрерывных функций на X. Мы сформулируем теорему Стоуна—Вейерштрасса, а ее весьма поучительное доказательство дадим в дополнении к этому разделу. В следующем разделе будет определено сопряженное к $C(X)$ пространство. С помощью теоремы Рисса—Маркова мы докажем, что $C(X)^*$ совпадает с $\mathcal{M}(X)$—семейством не знакоопределенных мер на X.

Сначала сформулируем по-другому определение компактности, взяв дополнения к открытым множествам.

Определение. Говорят, что топологическое пространство S обладает **свойством центрированности**, если любое семейство $\mathcal{F}$

замкнутых множеств в S, такое, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$ для любого конечного подсемейства $\{F_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{F}$, удовлетворяет условию $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing$.

Предложение (критерий центрированности). S компактно тогда и только тогда, когда S обладает свойством центрированности.

Доказательство. Пусть задано $\mathcal{F}$, и пусть $\mathcal{U} = \{S \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$ в том и только том случае, когда $\mathcal{U}$ не имеет конечного подпокрытия, и свойством $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing$ в том и только том случае, когда $\mathcal{U}$ не есть покрытие. Читателю предлагается пробраться через это двойное отрицание и завершить доказательство. ∎

Несколько более глубокая эквивалентная формулировка такова:

Теорема IV.3 (теорема Больцано—Вейерштрасса). Пространство S компактно тогда и только тогда, когда каждая направленность в S имеет сходящуюся поднаправленность.

Доказательство. Предположим, что каждая направленность имеет сходящуюся поднаправленность, и пусть $\mathcal{U}$—открытое покрытие. Допустим, что $\mathcal{U}$ не имеет конечного подпокрытия, и придем к противоречию. Упорядочим конечные подсемейства $\mathfrak{S}$ семейства $\mathcal{U}$ по включению. Тогда $\mathfrak{S}$ будет направленным множеством. Для всякого $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\} \in \mathfrak{S}$ выберем $x_{\mathcal{F}} \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$. Согласно допущению, направленность $\{x_{\mathcal{F}}\}$ имеет точку накопления x. Так как $\mathcal{U}$ есть покрытие, мы можем найти то $U \in \mathcal{U}$, для которого $x \in U$. Поскольку $x_{\mathcal{F}}$ часто лежит в U, можно найти конечное подсемейство $\mathcal{G} \in \mathfrak{S}$, такое, что $\{U\} < \mathcal{G}$ и $x_{\mathcal{G}} \in U$. Так как $\{U\} < \mathcal{G}$, то $U \subset \bigcup\limits_{G \in \mathcal{G}} G$; значит, $x_{\mathcal{G}} \in \bigcup\limits_{G \in \mathcal{G}} G$, и мы пришли к противоречию.

Предположим теперь, что S компактно, и пусть $\{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — направленность. Если $\{y_\alpha\}$ не имеет точек накопления, то для любой $x \in S$ существуют открытое множество U_x, содержащее x, и такое $\alpha_x \in I$, что $y_\alpha \notin U_x$ при $\alpha > \alpha_x$. Семейство $\{U_x \mid x \in S\}$ есть открытое покрытие S, так что можно найти такие $x_1, \ldots, x_n$, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} = S$. Так как I направлено, можно найти $\alpha_0 > \alpha_{x_i}$ при $i = 1, \ldots, n$. Но $y_{\alpha_0} \notin U_{x_i}$ при $i = 1, \ldots, n$, что невозможно, так как $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} = S$. Это противоречие показывает, что $\{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ обладает точкой накопления и, значит, есть сходящаяся поднаправленность. ∎

Пространства, удовлетворяющие первой аксиоме счетности, компактны тогда и только тогда, когда всякая последовательность в них содержит сходящуюся подпоследовательность (это легко показать, рассуждая по образцу предыдущего доказательства).

Пример 1. Единичный шар в l_2 не компактен в *метрической топологии*. Ни одна подпоследовательность последовательности ортонормированных элементов не может сходиться.

Пример 2. Пусть $S=\{\{a_n\}\in l_2 \mid |a_n|\leqslant 1/n\}$. Легко видеть, что последовательность элементов из S сходится в том и только том случае, если сходится каждая компонента. Пользуясь диагональным методом, заключаем, что всякая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, в силу теоремы Больцано—Вейерштрасса, S компактно.

Предостережение. В общем банаховом пространстве компактность—не то же самое, что замкнутость и ограниченность. В самом деле, единичный шар в банаховом пространстве компактен (в топологии нормы) тогда и только тогда, когда это пространство конечномерно (см. задачу 4 гл. V).

Отметим два простых свойства компактных пространств, которые «передаются по наследству» (см. задачу 38):

Предложение. (a) Замкнутое подмножество компактного пространства компактно в относительной топологии.

(b) Непрерывный образ компактного пространства компактен.

Следствие. Любая непрерывная функция на компактном пространстве C принимает максимальное и минимальное значения. Это означает, что существуют такие $x_\pm$, что

$$f(x_+)=\sup_{x\in C} f(x) \text{ и } f(x_-)=\inf_{x\in C} f(x).$$

Часто бывает полезной такая

Теорема IV.4. Пусть S и T—компактные хаусдорфовы пространства, и пусть $f\colon S\to T$—непрерывная биекция. Тогда f—гомеоморфизм.

Для доказательства нам потребуется следующая

Лемма. Если T хаусдорфово, а $S\subset T$ компактно, то S замкнуто.

Доказательство. Пусть $x\in\overline{S}$. Можно найти такую направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в S, что $x_\alpha\to x$. Так как в хаусдорфовых пространствах предел единствен, то x — единственная точка накопления этой направленности. Но, поскольку S компактно, данная направленность имеет точку накопления в S. Значит, $x \in S$ и, следовательно, $\bar{S} = S$. ▮

Доказательство теоремы IV.4. Осталось только доказать, что f открыто, или (что то же самое, поскольку f — биекция) что $f[C]$ замкнуто, если замкнуто C. Но если $C \subset S$ замкнуто, то C компактно. В силу приведенного выше предложения $f[C]$ также компактно. Теперь результат прямо следует из леммы. ▮

Предложение. Если $\{A_i\}_{i=1}^n$ — семейство компактных множеств, то произведение $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$ компактно в топологии произведения.

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — направленность в $A = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$, причем $x_\alpha = \langle x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n \rangle$. Поскольку A_1 компактно, можно найти такую поднаправленность $\{x_{\alpha(i)}\}_{i \in D_1}$, что $\{x_{\alpha(i)}^1\}$ сходится к $x_1 \in A_1$. С помощью конечной индукции можно найти такую поднаправленность $\{x_{\alpha(i)}\}_{i \in D_n}$, что $\{x_{\alpha(i)}^j\}$ сходится к $x_j \in A_j$ для каждого j. Значит, $\{x_{\alpha(i)}\}$ сходится в A к $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ и, следовательно, по критерию Больцано — Вейерштрасса A компактно. ▮

Это не очень глубокое предложение, но глубокий факт состоит в том, что оно остается справедливым и для произвольного произведения компактных пространств.

Теорема IV.5 (теорема Тихонова). *Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство компактных пространств. Тогда $\mathop{\times}\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ компактно в топологии произведения (т. е. в слабой топологии).*

Поскольку доказательство этой теоремы довольно сложно и хорошо излагается в учебной литературе, мы отошлем читателя к книгам, которые перечислены в Замечаниях. Однако сделаем и здесь несколько замечаний. Прежде всего отметим, что именно эта теорема подкрепляет ощущение, что слабая топология — это «естественная» топология для $\mathop{\times}\limits_{\alpha} A_\alpha$. Другой априорный кандидат — «ящичная топология», порождаемая множествами вида $\mathop{\times}\limits_{\alpha} U_\alpha$, где каждое U_α открыто в A_α. Но в этой топологии теорема Тихонова не имеет места. Во-вторых, заметим, что эта теорема существенно опирается на аксиому выбора (лемму Цорна). На самом деле известно, что в теории множеств лемма Цорна следует из теоремы Тихонова. Наконец, отметим, что в частном случае счетного числа *метрических* пространств теорему IV.5

можно доказать тем же способом, что и предыдущее предложение, с привлечением диагонального метода, описанного в § I.5.

Займемся теперь функциями на компактных хаусдорфовых пространствах. Покажем сначала, что компактные хаусдорфовы пространства обладают сильными свойствами отделимости в том смысле, что замкнутые множества в них разделяются открытыми. Затем мы воспользуемся этими свойствами отделимости, чтобы построить непрерывные функции.

Теорема IV.6. Любое компактное хаусдорфово пространство X нормально (типа T_4).

Доказательство. Сначала докажем, что X регулярно (типа T_3). Пусть $p \in X$, и пусть $C \subset X$ замкнуто, причем $p \notin C$. Поскольку X хаусдорфово, при любом $y \in C$ можно найти открытые и непересекающиеся множества U_y и V_y, такие, что $y \in U_y$ и $p \in V_y$. Множества $\{U_y\}_{y \in C}$ покрывают C, которое компактно. Значит, $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$ покрывают C. Пусть $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$; $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Эти U и V открыты и не пересекаются, причем $C \subset U$ и $p \in V$. Это показывает, что X регулярно.

Пусть теперь C, D замкнуты и не пересекаются. Заменяя в предыдущем рассуждении p на D и слова «так как X хаусдорфово» на «так как X регулярно», мы докажем, что X нормально. ∎

Нормальные пространства в силу леммы Урысона всегда обладают богатым запасом непрерывных функций.

Теорема IV.7 (лемма Урысона). Пусть C и D — замкнутые непересекающиеся множества в нормальном пространстве X. Тогда существует непрерывная функция $f(x)$ из X в $\mathbb{R}$, удовлетворяющая таким условиям: $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ при всех x; $f(x) = 0$, когда $x \in C$, и $f(x) = 1$, когда $x \in D$.

Набросок доказательства. Пользуясь нормальностью X, строим по индукции для каждого диадического рационального числа r (т. е. $r = k/2^n$; k, n — целые, $0 \leqslant k \leqslant 2^n$) открытое множество U_r, такое, что $C \subset U_r \subset \overline{U}_r \subset U_s \subset \overline{U}_s \subset X \setminus D$, если $r < s$. Далее с помощью U_r определяем такую функцию f, что $f(x) < r$ тогда и только тогда, когда $x \in U_r$. Можно показать, что f непрерывна. Подробности см. в литературе, цитированной в Замечаниях. ∎

Ниже мы убедимся, что можно доказать и более сильные результаты, относящиеся к теории функций (теорема IV.11).

В качестве последнего результата об общих свойствах функций на X мы докажем, что определенные семейства функций плотны в $C_{\mathbb{R}}(X)$ — семействе всех непрерывных вещественнозначных функций на X. Сначала отметим, что наше доказательство в § I.5 для $C[a, b]$ проходит и для любого компактного множества.

Теорема IV.8. Пусть $C(X)$ — семейство всех непрерывных комплекснозначных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X, снабженное нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$. Пусть $C_{\mathbf{R}}(X) = \{f \in C(X) \mid f$ вещественнозначна$\}$. Тогда $C(X)$ есть комплексное банахово пространство, а $C_{\mathbf{R}}(X)$ — вещественное банахово пространство.

Теорема о плотном семействе, которую мы сформулируем, обобщает классическую теорему Вейерштрасса, утверждающую, что любая непрерывная вещественнозначная функция на интервале $[0, 1]$ есть равномерный (на $[0, 1]$) предел полиномов (см. задачи 19 и 20). Заметим, что в $C_{\mathbf{R}}(X)$ определено естественное умножение $(fg)(x) = f(x)g(x)$. **Подалгебра** в $C_{\mathbf{R}}(X)$ есть подпространство, замкнутое относительно умножения.

Теорема IV.9 (теорема Стоуна — Вейерштрасса). Пусть B — подалгебра в $C_{\mathbf{R}}(X)$, замкнутая по норме $\|\cdot\|_\infty$. Мы говорим, что алгебра B разделяет точки, если для любых данных $x, y \in X$ можно найти такую $f \in B$, что $f(x) \neq f(y)$. Если B разделяет точки, то либо $B = C_{\mathbf{R}}(X)$, либо $B = \{f \in C_{\mathbf{R}}(X) \mid f(x_0) = 0\}$ при некотором $x_0 \in X$. Если $1 \in B$ и B разделяет точки, то $B = C_{\mathbf{R}}(X)$.

Поучительное доказательство этой теоремы, основанное на теории решеток, мы отнесем в дополнение к этому разделу.

То, что мы имеем дело с $C_{\mathbf{R}}(X)$, а не с $C(X)$, имеет решающее значение (см. задачу 15); однако, добавив еще одно предположение, легко распространить теорему IV.9 на комплексный случай.

Теорема IV.10 (теорема Стоуна — Вейерштрасса для комплексного случая). Пусть B — подалгебра в $C(X)$, обладающая тем свойством, что если $f \in B$, то и комплексно сопряженная функция $\bar{f} \in B$. Если B замкнута и разделяет точки, то $B = C(X)$ или $B = \{f \mid f(x) = 0\}$ для некоторого фиксированного x.

Дополнительное условие о комплексно сопряженной функции играет решающую роль. Пусть, например, D — замкнутый единичный круг в комплексной плоскости. Функции, аналитические внутри D и непрерывные на всем D, составляют замкнутую подалгебру на D, содержащую единицу и разделяющую точки, но отличную от $C(D)$. Однако она не замкнута относительно комплексного сопряжения.

Как пример применения теоремы Стоуна — Вейерштрасса, а также как иллюстрацию того, в сколь мощную силу могут складываться разные теоремы функционального анализа, мы докажем одну теорему о продолжении для функций из $C(Y)$, когда

$Y \subset X$, причем X компактно, а Y замкнуто. Фактически теорема верна и тогда, когда X только нормально (задача 18).

Теорема IV.11 (теорема Титце о продолжении). Пусть X — компактное пространство, и пусть $Y \subset X$ замкнуто. Пусть f — любая вещественнозначная функция на Y. Тогда существует такая $\tilde{f} \in C_{\mathbf{R}}(X)$, что $f(y) = \tilde{f}(y)$ для всех $y \in Y$.

Доказательство. Рассмотрим отображение ρ: $C_{\mathbf{R}}(X) \to C_{\mathbf{R}}(Y)$, заданное формулой $\rho(f) = f \upharpoonright Y$. Теорема равносильна утверждению, что ρ сюръективно. Очевидно, что $\operatorname{Ran} \rho$ есть подалгебра в $C_{\mathbf{R}}(Y)$ и $1 \in \operatorname{Ran} \rho$. Более того, по лемме Урысона $\operatorname{Ran} \rho$ разделяет точки. Если удастся показать, что $\operatorname{Ran} \rho$ замкнута по норме $\|\cdot\|_{C(Y)}$, то мы сможем завершить доказательство, воспользовавшись теоремой Стоуна — Вейерштрасса.

Пусть $I = \operatorname{Ker} \rho$. Тогда I замкнуто в $C_{\mathbf{R}}(X)$, так что мы можем построить банахово факторпространство $C_{\mathbf{R}}(X)/I$. При помощи элементарных алгебраических операций ρ «поднимается» до биекции $\tilde{\rho}$: $C_{\mathbf{R}}(X)/I \to \operatorname{Ran} \rho$. Если бы можно было теперь показать, что $\|\tilde{\rho}([f])\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} = \|[f]\|_{C_{\mathbf{R}}(X)/I}$, то $\operatorname{Ran} \rho$ будет банаховым пространством и, следовательно, замкнутой подалгеброй.

Ясно, что $\|\rho(f)\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} \leqslant \|f\|_{C_{\mathbf{R}}(X)}$, поэтому $\|\tilde{\rho}([f])\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} \leqslant \leqslant \|[f]\|_{C_{\mathbf{R}}(X)/I}$. Значит, достаточно показать, что при заданном $g \in \operatorname{Ran} \rho$ мы можем найти такое $f \in C_{\mathbf{R}}(X)$, что $g = \rho(f)$ и $\|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} = \|f\|_{C_{\mathbf{R}}(X)}$ (вспомните определение факторнормы!). Так как $g \in \operatorname{Ran} \rho$, то $g = \rho(h_1)$ для некоторого $h_1 \in C_{\mathbf{R}}(X)$. Положим

$$h_2 = \min\{\|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)}, h_1\};$$

тогда $\rho(h_2) = g$ и $h_2(x) \leqslant \|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)}$ при всех x. Пусть $h_3 = \max\{-\|g\|_{C_{\mathbf{R}}(X)}, h_2\}$. Тогда $\|h_3\|_{C_{\mathbf{R}}(X)} = \|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)}$ и $\rho(h_3) = g$. Это завершает доказательство. ∎

Дополнение к § IV.3. Теорема Стоуна — Вейерштрасса

В этом дополнении мы докажем теорему IV.9 для случая, когда $1 \in B$. Общее доказательство мы оставим в качестве самостоятельного упражнения. Любопытно заметить, что первым шагом будет доказательство классической теоремы Вейерштрасса (которая является частным случаем общей теоремы!).

Лемма 1. Множество всех полиномов плотно в $C_{\mathbf{R}}[a, b]$ при любых конечных вещественных a, b.

Доказательство. См. задачи 19 и 20.

Теперь можно воспользоваться этим результатом и доказать, что B — решетка.

Определение. Подмножество $S \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ называется **решеткой**, если для всех $f, g \in S$ нижняя грань $f \wedge g = \min\{f, g\}$ и верхняя грань $f \vee g = \max\{f, g\}$ лежат в S.

Лемма 2. Любая замкнутая подалгебра B из $C_{\mathbb{R}}(X)$, такая, что $1 \in B$, есть решетка.

Доказательство. Покажем, что если $f \in B$, то и $|f| \in B$. Тогда результат будет следовать из формул $f \vee g = \frac{1}{2}|f-g| + \frac{1}{2}|f+g|$, $f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)]$. Не теряя общности, допустим, что $\|f\|_\infty \leqslant 1$. По классической теореме Вейерштрасса можно найти последовательность полиномов $P_n(x)$, равномерно сходящуюся к $|x|$ на $[-1, 1]$ и такую, например, что $|P_n(x) - |x|| < 1/n$ для всех $x \in [0, 1]$. Так как $\|f\|_\infty \leqslant 1$, то отсюда следует, что $\|P_n(f) - |f|\|_\infty < 1/n$, т. е. $|f| = \lim_{n \to \infty} P_n(f)$. Но алгебра B содержит 1, поэтому $P_n(f) \in B$. Поскольку B замкнута, $|f| \in B$. ∎

Наконец, полная теорема Стоуна — Вейерштрасса вытекает из леммы 2 и следующей теоремы, которая интересна и сама по себе:

Теорема IV.12 (теорема Какутани — Крейна). Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Любая решетка $\mathscr{L} \subset C_{\mathbb{R}}(X)$, являющаяся замкнутым подпространством, содержащая 1 и разделяющая точки, совпадает со всем пространством $C_{\mathbb{R}}(X)$.

Доказательство. Пусть $h \in C_{\mathbb{R}}(X)$, и пусть задано некоторое ε. Будем искать такое $f \in \mathscr{L}$, что $\|h - f\| < \varepsilon$. Предположим, что можно показать, что для любого $x \in X$ существует такое $f_x \in \mathscr{L}$, что $f_x(x) = h(x)$ и $h \leqslant f_x + \varepsilon$. Тогда для каждого x найдется его открытая окрестность U_x, такая, что $h(y) \geqslant f_x(y) - \varepsilon$ для всех $y \in U_x$ (в силу непрерывности $h - f_x$). Такие U_x покрывают X, и пусть $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ — некоторое конечное подпокрытие. Тогда $f = f_{x_1} \wedge \ldots \wedge f_{x_m}$ удовлетворяет условию $f(y) + \varepsilon = \min_i \{f_{x_i}(y) + \varepsilon\} \geqslant h(y)$. Более того, так как любой $y \in U_{x_i}$ при некотором i, то $f(y) - \varepsilon \leqslant f_{x_i}(y) - \varepsilon \leqslant h(y)$. Значит, $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$.

Остается найти f_x с нужными свойствами. Так как $\mathscr{L}$ разделяет точки и $1 \in \mathscr{L}$, то при любых x и y из X можно найти такую $f_{xy} \in \mathscr{L}$, что $f_{xy}(x) = h(x)$ и $f_{xy}(y) = h(y)$. Для любого y можно найти его открытую окрестность V_y, такую, что $f_{xy}(z) + \varepsilon \geqslant h(z)$ для $z \in V_y$. Из них можно выбрать конечное покрытие $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. Полагая $f_x = f_{xy_1} \vee \ldots \vee f_{xy_n}$, получаем

$f_x(x)=h(x)$ и для произвольного $z\in X$

$$f_x(z)+\varepsilon=\max_{i=1,\,\dots,\,n}\{f_{xy_i}(z)+\varepsilon\}\geqslant h(z).$$

Это завершает доказательство. ∎

IV.4. Теория меры на компактных пространствах

В этом разделе мы рассмотрим некоторые специальные аспекты теории меры на компактных пространствах. В частности, мы увидим, что сопряженное к $C(X)$ пространство можно интерпретировать как некоторое пространство мер (теорема Рисса — Маркова). Так как доказательства в теории меры по бо́льшей части мало поучительны, мы не станем приводить здесь доказательства всех теорем.

Первый вопрос, который возникает,— как выбрать σ-поле измеримых множеств. Начнем с минимального семейства. Разумеется, мы хотим, чтобы непрерывные функции $f\in C(X)$ были интегрируемы. Это наводит на мысль, что следует считать измеримыми все замкнутые (и открытые) множества, однако в этом нет необходимости.

Определение. G_δ-множество — это множество, являющееся счетным пересечением открытых множеств.

Предложение. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, и пусть $f\in C_{\mathbb{R}}(X)$. Тогда $f^{-1}([a,\infty))$ — компактное G_δ-множество.

Доказательство. Множество $f^{-1}([a,\infty))$ замкнуто и, стало быть, компактно. Так как

$$f^{-1}([a,\infty))=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}((a-1/n,\infty)),$$

то оно есть G_δ-множество. ∎

Итак, для интегрируемости непрерывных функций довольно того, чтобы σ-поле содержало компактные G_δ-множества.

Определение. σ-поле, порождаемое компактными G_δ-множествами в компактном пространстве X, называется семейством **бэровых множеств**. Функции $f\colon X\to\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), измеримые относительно этого σ-поля, называются **бэровыми функциями**. Мера на бэровых множествах называется **бэровой мерой**, если она еще конечна, т. е. $\mu(X)<\infty$.

Как и в случае конечных интервалов на вещественной прямой и лебеговой меры, имеет место

Теорема IV.13. Если μ — бэрова мера, то $C(X) \subset L^p(X, d\mu)$ при всех p и $C(X)$ плотно в $L^1(X, d\mu)$ и в любом L^p-пространстве с $p < \infty$ (но *не* в L^∞, за исключением патологических случаев, когда $C(X)$ уже есть все L^∞!).

Несмотря на то что бэровы множества — это все, что нам нужно, читателю, несомненно, захочется разделаться с G_δ-множествами и рассматривать все **борелевы** множества, т. е. σ-поле, порождаемое всеми открытыми множествами. На вопрос о расширении бэровых мер до борелевых, т. е. до мер на всех борелевых множествах, отвечают следующие замечания:

(1) Всякая бэрова мера автоматически **регулярна**, т. е.

$$\mu(Y) = \inf\{\mu(O) \mid Y \subset O,\ O \text{ открыты и бэровы}\} = \\ = \sup\{\mu(C) \mid C \subset Y,\ C \text{ компактны и бэровы}\}.$$

(2) Вообще говоря, бэрова мера обладает многими расширениями на все борелевы множества, но существует в точности одно регулярное расширение до борелевой меры. Борелева мера называется регулярной, если

$$\mu(Y) = \inf\{\mu(O) \mid Y \subset O,\ O \text{ открыто}\} = \\ = \sup\{\mu(C) \mid C \subset Y,\ C \text{ компактно и } \textit{борелево}\}.$$

Итак, существует взаимно однозначное соответствие между бэровыми мерами и *регулярными* борелевыми мерами.

(3) Если μ — борелева мера, то $C(X)$ плотно в $L^1(X, d\mu)$ тогда и только тогда, когда μ регулярна. Если μ регулярна, то всякое борелево множество почти всюду бэрово в том смысле, что для данного борелева множества Y существует бэрово множество $\tilde{Y}$, такое, что

$$\int |\chi_Y - \chi_{\tilde{Y}}|\, d\mu \equiv \mu(Y \setminus \tilde{Y}) + \mu(\tilde{Y} \setminus Y) = 0.$$

К тому же всякая борелева функция после изменения лишь на борелевом множестве меры нуль равна некоторой бэровой функции.

(4) В определенных случаях всякое компактное множество есть G_δ-множество, так что бэровы и борелевы множества совпадают. Так будет в случае, когда X — компактное метрическое пространство (см. задачу 30).

Впредь, говоря о компактных множествах X, мы будем пользоваться термином мера в смысле бэровой (или, что то же самое, регулярной борелевой) меры, если только специально не оговорено другое словоупотребление.

Пусть теперь X компактно, и пусть μ — мера на X. Рассмотрим отображение $C(X) \to \mathbb{C}$, заданное формулой $f \mapsto l_\mu(f) \equiv \int f\, d\mu$.

Очевидно, что l_μ линейно и что

$$|l_\mu(f)| \leqslant \int |f|\,d\mu \leqslant \|f\|_\infty \mu(X),$$

так что l_μ есть непрерывный линейный функционал на $C(X)$. Фактически $\|l_\mu\|_{C(X)^*} = \mu(X)$, что сразу видно, если взять $f=1$. Более того, l_μ положителен в смысле следующего определения.

Определение. **Положительный линейный функционал** на $C(X)$ есть (a priori не обязательно непрерывный) линейный функционал l, такой, что $l(f) \geqslant 0$ для всех поточечно неотрицательных f.

Положительные линейные функционалы в более общем случае появятся при изучении C^*-алгебр; см. гл. XVII. Они обладают следующим приятным свойством (другие свойства, к которым ведет положительность, см. в задаче 37).

Предложение. Пусть l — положительный линейный функционал. Тогда l непрерывен и $\|l\|_{C(X)^*} = l(1)$.

Доказательство. Допустим сначала, что f вещественна. Так как $-\|f\|_\infty \leqslant f \leqslant \|f\|_\infty$, то $-l(1)\|f\|_\infty \leqslant l(f) \leqslant l(1)\|f\|_\infty$; значит, $|l(f)| \leqslant \|f\|_\infty l(1)$. Если f произвольна, то $l(f) = e^{i\varphi}r$, причем r вещественно и положительно. Отсюда

$$|l(f)| = l(\mathrm{Re}[e^{-i\varphi}f]) \leqslant \|\mathrm{Re}(e^{-i\varphi}f)\|_\infty l(1) \leqslant l(1)\|f\|_\infty. \blacksquare$$

Мы видели, что любая бэрова мера дает пример положительного линейного функционала на $C(X)$; следующая теорема говорит, что иных и не бывает.

Теорема IV.14 (теорема Рисса—Маркова). Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Всякому положительному линейному функционалу l на $C(X)$ отвечает единственная бэрова мера μ на X, такая, что

$$l(f) = \int f\,d\mu.$$

Мы не хотим давать подробное доказательство, но давайте просто посмотрим, как μ может быть восстановлена по данному l_μ. Подобный же процесс позволяет строить меру исходя из любого положительного линейного функционала, даже если мы не знаем наперед, что он имеет вид l_μ. Так как μ внутренне регулярна (т. е. $\mu(Y) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset Y,\ C$ компактно$\}$), то, чтобы «восстановить» μ, мы должны лишь найти $\mu(C)$ для компактных C. Мы утверждаем, что $\mu(C) = \inf\{l_\mu(f) \mid f \in C(X),\ f \geqslant \chi_C\}$. Поскольку μ положительна, очевидно, что $\mu(C) \leqslant l_\mu(f)$, если $f \geqslant \chi_C$; значит, достаточно показать, что при данном ε можно найти такое $f \in C(X)$, что $\chi_C \leqslant f$ и $l_\mu(f) \leqslant \mu(C)+\varepsilon$. Поскольку μ внешне регулярна, то при данном ε можно найти такое открытое O, что $\mu(O \setminus C) < \varepsilon$ и $C \subset O$. По лемме Урысона найдется такая $f \in C(X)$, что $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f(x) = 1$, если $x \in C$, и $f(x) = 0$, если $x \in X \setminus O$. Следовательно, $l(f) \leqslant \mu(O) < \mu(C) + \varepsilon$. Так мы убедились, что μ может быть восстановлена исходя из l_μ, и потому не слишком удивительно, что из любого l можно построить некоторую меру.

Теорема Рисса—Маркова—это обычный путь, на котором в функциональном анализе возникают меры. Например, мы уже свыклись с тем, что меры на $\mathbb{R}$ ассоциируются с квантовомеханическими гамильтонианами, а эти последние в свою очередь получаются из некоторых положительных линейных функций при посредстве теоремы Рисса—Маркова (или, точнее, ее расширения на локально компактные пространства, которое мы вскоре обсудим).

В общем случае поточечный предел направленности бэровых функций не является ни бэровой, ни даже борелевой функцией (задача 13). Однако если $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ есть направленность непрерывных функций, возрастающая в том смысле, что $f_\alpha \geqslant f_\beta$, коль скоро $\alpha > \beta$, то $f = \lim\limits_\alpha f_\alpha = \sup\limits_\alpha f_\alpha$ есть борелева функция, поскольку множество

$$f^{-1}[(a, \infty)] = \bigcup_\alpha f_\alpha^{-1}[(a, \infty)]$$

открыто. Теорема о монотонной сходимости имеет следующее обобщение на направленности:

Теорема IV.15 (теорема о монотонной сходимости направленностей). Пусть μ—регулярная борелева мера на компактном хаусдорфовом пространстве X. Пусть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$—возрастающая направленность непрерывных функций. Тогда $f = \lim\limits_\alpha f_\alpha \in L^1(X, d\mu)$ в том и только том случае, когда $\sup\limits_\alpha \|f_\alpha\|_1 < \infty$, и в этом случае $\lim\limits_\alpha \|f - f_\alpha\|_1 = 0$.

Прежде чем расстаться с теорией меры на компактных пространствах, найдем сопряженное к $C(X)$. Разумеется, не всякий непрерывный линейный функционал на $C(X)$ положителен, но важный результат, к которому мы сейчас идем, состоит в том, что любой $l \in C_{\mathbb{R}}(X)^*$ есть разность двух положительных линейных функционалов. В основе этого факта лежит простой результат «теории решеток», относящийся к $C_{\mathbb{R}}(X)$.

Лемма. Пусть $f, g \in C_{\mathbb{R}}(X)$ и $f, g \geqslant 0$. Предположим, что $h \in C_{\mathbb{R}}(X)$ и $0 \leqslant h \leqslant f + g$. Тогда справедливо представление $h = h_1 + h_2$, в котором $0 \leqslant h_1 \leqslant f$ и $0 \leqslant h_2 \leqslant g$, $h_1, h_2 \in C_{\mathbb{R}}(X)$.

Доказательство. Пусть $h_1 = \min\{f, h\}$. Тогда $0 \leqslant h_1 \leqslant f$, и если $h_2 \equiv h - h_1$, то $h_2 \geqslant 0$. Более того, если $h_1(x) = h(x)$, то $h_2(x) = 0 \leqslant g(x)$, а если $h_1(x) = f(x)$, то $h_2(x) = h(x) - f(x) \leqslant f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$, так что $h_2 \leqslant g$. ∎

Теорема IV.16. Пусть $l \in C_{\mathbb{R}}(X)^*$. Тогда l можно представить в виде $l = l_+ - l_-$, где l_+ и l_- — положительные линейные функционалы. Более того, $l_+(1) + l_-(1) = \|l\|$ и l_+, l_- тем самым однозначно определены.

Доказательство. Для $f \in C(X)_+ \equiv \{f \in C(X) \mid f \geqslant 0\}$ положим $l_+(f) = \sup\{l(h) \mid h \in C(X);\ 0 \leqslant h \leqslant f\}$. Так как $|l(h)| \leqslant \|l\| \|h\|_\infty \leqslant \|l\| \|f\|_\infty$, то эта верхняя грань конечна. Очевидно, $l_+(tf) = tl_+(f)$ при любом $t > 0$ и $l_+(f) \geqslant l(0) = 0$ для всех $f \in C(X)_+$. Пусть $f, g \in C(X)_+$. Тогда по лемме

$$\begin{aligned} l_+(f+g) &= \sup\{l(h) \mid 0 \leqslant h \leqslant f+g\} = \\ &= \sup\{l(h_1) + l(h_2) \mid 0 \leqslant h_1 \leqslant f,\ 0 \leqslant h_2 \leqslant g\} = \\ &= l_+(f) + l_+(g). \end{aligned}$$

Для любого $f \in C(X)$ положим $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = -\min\{f, 0\}$, так что $f = f_+ - f_-$. Пусть $l_+(f) = l_+(f_+) - l_+(f_-)$. Легко показать, что l_+ линеен на $C(X)$. По определению $l_+(f) \geqslant l(f)$, если $f \geqslant 0$, так что $l_-(f) \equiv l_+(f) - l(f)$ — положительный линейный функционал. Итак, мы записали l в виде разности положительных линейных функционалов: $l = l_+ - l_-$.

Докажем теперь, что $l_+(1) + l_-(1) = \|l\|$. Сначала заметим, что $\|l\| \leqslant \|l_+\| + \|l_-\| = l_+(1) + l_-(1)$. Чтобы получить противоположное неравенство, перепишем l_- симметрично относительно l_+. Для $f \geqslant 0$

$$\begin{aligned} l_-(f) &= \sup\{l(h) - l(f) \mid 0 \leqslant h \leqslant f\} = \\ &= \sup\{l(k) \mid -f \leqslant k \leqslant 0\}, \end{aligned}$$

где $k = h - f$. Следовательно,

$$\begin{aligned} l_+(1) - l_-(1) &= \sup\{l(h) \mid 0 \leqslant h \leqslant 1\} + \sup\{l(k) \mid -1 \leqslant k \leqslant 0\} = \\ &= \sup\{l(g) \mid -1 \leqslant g \leqslant 1\} \leqslant \\ &\leqslant \|l\| \sup\{\|g\|_\infty \mid -1 \leqslant g \leqslant 1\} = \|l\|. \end{aligned}$$

Доказательство единственности мы оставляем читателю (задача 31). ∎

Определение. **Комплексная бэрова мера есть конечная линейная комбинация бэровых мер с комплексными коэффициентами.**

Вот простое следствие теорем IV.14 и IV.16:

Теорема IV.17. Пусть X — компактное пространство. Тогда $C(X)^*$ (сопряженное к $C(X)$) есть пространство всех комплексных мер Бэра.

Определение. Будем писать $\mathcal{M}(X)=C(X)^*$, $\mathcal{M}_+(X) = \{l \in \mathcal{M}(X) \mid l$ — положительный линейный функционал$\}$ и $\mathcal{M}_{+,1}(X)=\{l \in \mathcal{M}_+(X) \mid \|l\|=1\}$.

В ряде случаев полезно представлять себе меры не просто как индивидуальные объекты, но, напротив, как элементы $\mathcal{M}(X)$. Чтобы дать читателю представление о такого рода рассуждениях, мы закончим наше обсуждение пространства $\mathcal{M}(X)$ простой теоремой о выпуклости.

Определение. Множество A в векторном пространстве Y называется **выпуклым**, если из $x \in A$, $y \in A$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ следует, что $tx+(1-t)y \in A$. Иными словами, A выпукло, если отрезок прямой между x и y принадлежит A, коль скоро x и y принадлежат A (рис. IV.1). Множество A называется **конусом**, если из

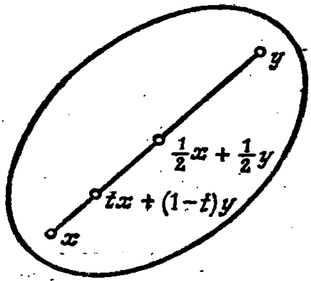

Рис. IV.1. Выпуклое множество.

$x \in A$ следует, что $tx \in A$ при всех $t>0$. Если A выпукло и представляет собой конус, то оно называется **выпуклым конусом.**

Предложение. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Тогда $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ выпукло, а $\mathcal{M}_+(X)$ — выпуклый конус.

Доказательство. Выпуклая комбинация положительных линейных функционалов есть, очевидно, положительный линейный функционал. Более того, $\|l\|=l(1)$, если l — положительный линейный функционал, так что $\|tl_1+(1-t)l_2\|=1$, если l_1, $l_2 \in \mathcal{M}_{+,1}$. ∎

На первый взгляд этот геометрический факт может показаться несколько странным, потому что читатель привык представлять себе единичную сферу $\{x \mid \|x\|=1\}$ «круглой», а здесь утверждается, что целый ее кусок — совершенно плоский! Суть дела в том, что не всякая норма — евклидова (из закона параллелограмма следует, что в гильбертовом пространстве если $\|x\|=\|y\|=1$ и $x \neq y$, то $\|tx+(1-t)y\|<1$). На самом деле в $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ единичная сфера имеет плоские грани (см. рис. IV.2). Это не случайное совпадение;

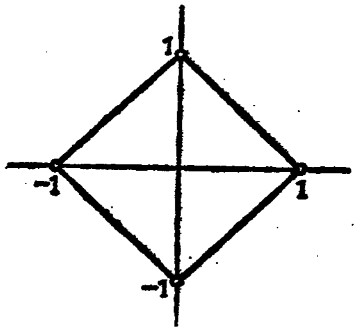

Рис. IV.2. Единичная сфера в $\mathbb{R}^2$, когда $\|\langle x, y\rangle\| = |x| + |y|$.

$\{1, \ldots, n\}$ есть компактное множество в дискретной топологии, а $\mathbb{R}^n$ с рассмотренной нормой есть в точности $\mathcal{M}(\{1, \ldots, n\})$.

Теперь мы хотим распространить «топологическую теорию меры» на более широкий класс пространств.

Определение. Топологическое пространство X называется **локально компактным**, если всякая точка $p \in X$ имеет компактную окрестность.

Из сравнения с мерой Лебега на $\mathbb{R}$ становится понятно, что надо ослабить условие $\mu(X) < \infty$, которое накладывалось для компактных X. Сначала определим бэровы множества в локально компактном пространстве X как σ-кольцо, порождаемое компактными G_δ-множествами. Заметим, что, вообще говоря, само X может не быть множеством из $\mathcal{B}$. Однако если X σ-компактно, т. е. является счетным объединением компактных множеств, то $X \in \mathcal{B}$.

Определение. **Мера Бэра** на локально компактном пространстве X есть такая мера на бэровых множествах, что $\mu(C) < \infty$ для любого компактного бэрова множества C.

Если заданы мера Бэра μ на X и компактное G_δ-множество $C \subset X$, то существует индуцированная сужением мера Бэра μ_C на C. Обратно, легко видеть, что семейство мер $\{\mu_C\}$, по одной для каждого G_δ-множества, обладающих тем свойством, что $\mu_C(Y) = \mu_D(Y)$, если $Y \subset C \cap D$, определяет меру Бэра. Эти наводящие соображения позволяют доказывать теоремы для локально компактного случая, опираясь на аналогию с компактным случаем.

Определение. Пусть X — локально компактное пространство. Алгебра $\varkappa(X)$ **непрерывных функций с компактным носителем** есть множество функций, исчезающих вне некоторого компактного множества (вообще говоря, своего для каждой функции). Алгебра $C_\infty(X)$ непрерывных функций, исчезающих на ∞, есть множество функций $f \in C(X)$, обладающих тем свойством, что при любом $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $D_\varepsilon \subset X$, такое, что $|f(x)| < \varepsilon$, если $x \notin D_\varepsilon$. Таким образом,

$$\varkappa(X) \subset C_\infty(X) \subset C(X).$$

Из теоремы IV.14 следует

Теорема IV.18 (теорема Рисса—Маркова). Пусть X — локально компактное пространство. Положительный линейный функционал на $\varkappa(X)$ имеет вид $l(f) = \int f\,d\mu$ с некоторой мерой Бэра μ. Положительные линейные функционалы на $C_\infty(X)$ порождаются мерами μ с конечной полной массой, т. е. $\sup\limits_{A \in \mathcal{B}} \mu(A) < \infty$.

В следующей главе мы найдем топологию на $\varkappa(X)$, в которой сопряженное к $\varkappa(X)$ будет в точности пространством комплексных бэровых мер. Заметим, что эта топология *не* задается нормой $\|\cdot\|_\infty$. Пространство $\varkappa(X)$ не полно по норме $\|\cdot\|_\infty$; его пополнением будет $C_\infty(X)$, а его сопряженным по норме $\|\cdot\|_\infty$ — пространство *конечных* мер.

IV.5. Слабые топологии на банаховых пространствах

Определение. Пусть X — банахово пространство и X^* — его сопряженное. **Слабой топологией** на X называется слабейшая топология на X, в которой непрерывен каждый функционал l из X^*.

Таким образом, база окрестностей нуля для слабой топологии задается множествами вида

$$N(l_1, \ldots, l_n; \varepsilon) = \{x \mid |l_i(x)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\},$$

т. е. окрестности нуля содержат цилиндры с конечномерными открытыми основаниями. Направленность $\{x_\alpha\}$ слабо сходится к x (записывается $x_\alpha \xrightarrow{w} x$) тогда и только тогда, когда $l(x_\alpha) \to l(x)$ для всех $l \in X^*$.

В бесконечномерных банаховых пространствах слабая топология не порождается никакой метрикой. Это одна из главных причин, по которым мы ввели топологические пространства. Прежде чем перейти к примерам, укажем три элементарных свойства слабой топологии.

Предложение. (а) Слабая топология слабее, чем топология нормы, и, значит, всякое слабо открытое множество открыто по норме.

(b) Всякая слабо сходящаяся *последовательность* ограничена по норме.

(c) Слабая топология хаусдорфова.

Доказательство. (а) следует из неравенства $|l(x)|\leqslant\|l\|\|x\|$; (b) есть следствие принципа равномерной ограниченности; (c) вытекает из теоремы Хана—Банаха. Детали мы оставляем читателю. ∎

Подчеркнем, что (b) справедливо только для последовательностей. В задаче 39 от читателя требуется построить контрпример для соответствующего утверждения о направленностях.

Рассмотрим два примера; в каждом из них будет сказано, что это означает, что последовательность сходится. Это *не описывает* топологию полностью, но дает читателю возможность получить общее впечатление о соответствующей топологии.

Пример 1. Пусть $\mathscr{H}$—гильбертово пространство. Пусть $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$—ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Для заданной *последовательности* $\psi_n\in\mathscr{H}$ пусть $\psi_n^{(\alpha)}=\langle\varphi_\alpha,\psi_n\rangle$— координаты ψ_n. Мы утверждаем, что $\psi_n\to\psi$ в слабой топологии тогда и только тогда, когда (i) $\psi_n^{(\alpha)}\to\psi^{(\alpha)}$ при каждом α и (ii) $\{\|\psi_n\|\}$ ограничено. Действительно, пусть $\psi_n\xrightarrow{w}\psi$; тогда (i) следует из определения, а (ii) вытекает из свойства (b). С другой стороны, пусть выполняются (i) и (ii), и пусть $F\subset\mathscr{H}$—подпространство конечных линейных комбинаций элементов φ_α. В силу (i), $\langle\varphi,\psi_n\rangle\to\to\langle\varphi,\psi\rangle$, если $\varphi\in F$. Пользуясь тем, что F плотно в $\mathscr{H}$, свойством (ii) и $\varepsilon/3$-приемом, можно доказать слабую сходимость.

Пример 2. Пусть X—компактное хаусдорфово пространство. Рассмотрим слабую топологию на $C(X)$. Пусть $\{f_n\}$—последовательность в $C(X)$. Мы утверждаем, что $f_n\to f$ в слабой топологии тогда и только тогда, когда (i) $f_n(x)\to f(x)$ для любого $x\in X$ и (ii) $\|f_n\|$ ограничена. В самом деле, если $f_n\xrightarrow{w}f$, то (i) выполняется, так как $f\mapsto f(x)$ есть элемент $C(X)^*$, а (ii) следует из свойства (b). С другой стороны, если выполнены (i) и (ii), то $|f_n(x)|\leqslant\sup\limits_n\|f_n\|_\infty$, где правая часть принадлежит L^1 при любой бэровой мере μ. Значит, по теореме о мажорированной сходимости для любой $\mu\in\mathscr{M}_+(X)$ интеграл $\int f_n\,d\mu\to$

$\to \int f\,d\mu$. Поскольку любая $l \in \mathcal{M}(X)$ есть линейная комбинация мер из $\mathcal{M}_+$, заключаем, что $f_n \xrightarrow{w} f$.

Мы видели, что слабая топология слабее топологии нормы. Она действительно очень слабая! Чтобы понять это, заметим, что если у нас мало открытых множеств, то тем самым мало и замкнутых, а это означает, что замыкания очень велики. В задаче 40 читатель увидит, что в любом бесконечномерном банаховом пространстве X слабое замыкание единичной сферы $\{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ в X есть единичный шар $\{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

Вскоре мы начнем изучать общие «сопряженные» топологии, а сейчас в качестве частного случая теоремы IV.20 приведем следующее утверждение:

Теорема IV.19. Линейный функционал l на банаховом пространстве слабо непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен по норме.

Хотя эта теорема следует из теоремы IV.20, она имеет очень простое прямое доказательство (задача 42).

Наконец, мы хотим сказать несколько слов о $*$-слабой топологии и доказать одну часто применяемую теорему о компактности. Пусть $Y = X^*$ есть сопряженное какого-либо банахова пространства X. Тогда $Y^* = X^{**}$ индуцирует слабую топологию на Y, однако вместо нее можно рассмотреть топологию, порождаемую X на пространстве X^*.

Определение. Пусть X^*—сопряженное некоторого банахова пространства X. Тогда **$*$-слабая топология** есть слабейшая топология на X^*, в которой все функции $l \mapsto l(x)$, $x \in X$, непрерывны.

Заметим, что $*$-слабая топология еще слабее, чем слабая топология. Как и можно было ожидать, X рефлексивно тогда и только тогда, когда слабая и $*$-слабая топологии совпадают. Многие условия рефлексивности опираются на соотношения между слабой и $*$-слабой топологиями.

Чтобы избежать путаницы и иметь возможность сформулировать следующую теорему в естественной постановке, введем еще одно новое понятие.

Определение. Пусть X—векторное пространство, и пусть Y—семейство линейных функционалов на X, разделяющее точки X. Тогда **Y-слабая топология на** X (обозначается $\sigma(X, Y)$) есть слабейшая топология на X, в которой все функционалы из Y непрерывны.

Поскольку Y, по предположению, разделяет точки, $\sigma(X, Y)$ есть хаусдорфова топология на X. Например, слабая топология на X есть $\sigma(X, X^*)$, в то время как $\sigma(X^*, X)$ есть $*$-слабая топология на X^*.

Пример. $*$-слабую топологию на $\mathcal{M}(X)$, где X — компактное хаусдорфово пространство, часто называют **грубой** топологией. Чтобы представить себе, насколько она слаба, покажем, что линейные комбинации точечных масс $*$-слабо плотны в $\mathcal{M}(X)$. В задаче 41 от читателя требуется показать, что на самом деле они даже замкнуты по норме. Предположим, что μ — заданная мера. Следует показать, что каждая слабая окрестность μ содержит сумму точечных мер, или, иными словами, что если заданы $f_1, \ldots, f_n$ и ε, то можно найти такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $x_1, \ldots, x_m$, что

$$\left|\mu(f_i) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_i(x_j)\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Действительно, тогда $\sum \alpha_j \delta_{x_j}$ попадает в грубую окрестность $N(f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) + \mu$. Без ограничения общности можно предположить, что $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы. Для каждого x рассмотрим вектор $\mathbf{f}_x = \langle f_1(x), \ldots, f_n(x)\rangle \in \mathbb{R}^n$. Если $\{\mathbf{f}_x\}$ не порождают все $\mathbb{R}^n$, то в $\mathbb{R}^n$ существует $\mathbf{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \neq \mathbf{0}$, такой, что $\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}_x = 0$ для всех x, т. е. $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$, что противоречит линейной независимости. Значит, $\mathbf{f}_x$ порождают все пространство $\mathbb{R}^n$. Тогда можно найти такие $x_1, \ldots, x_n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что

$$\langle \mu(f_1), \ldots, \mu(f_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{f}_{x_i}.$$

Но при этом $\mu(f_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_i(x_j)$, что и доказывает утверждение.

Топология $\sigma(X^*, X)$, разумеется, слабее, чем топология нормы на X^*, так что все $\sigma(X^*, X)$-непрерывные линейные функционалы лежат в X^{**}. Однако, вообще говоря, не все функционалы из X^{**} $*$-слабо непрерывны на X^*; в самом деле, имеет место

Теорема IV.20. Непрерывные в топологии $\sigma(X, Y)$ линейные функционалы на X составляют в точности Y; в частности, единственные $*$-слабо непрерывные функционалы на X^* суть элементы X.

Доказательство. Предположим, что l есть $\sigma(X, Y)$-непрерывный функционал на X. Тогда $\{x \mid |l(x)| < 1\} \supset \{x \mid |y_i(x)| < \varepsilon;\ i = 1, \ldots, n\}$ для некоторого ε и некоторых $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Допустим теперь, что $y_i(x)=0$ при $i=1, \ldots, n$. Тогда $|l(\varepsilon^{-1}x)|<1$ для всех $\varepsilon>0$, откуда следует, что $l(x)=0$. В результате l поднимается до функционала $\tilde{l}$ на X/K, где $K=\{x \mid y_i(x)=0,\ i=1, \ldots, n\}$. Элементарные абстрактно-алгебраические рассуждения показывают, что $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ порождают пространство, сопряженное к X/K. Значит, $\tilde{l}=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{y}_i$, и, таким образом, $l=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in Y$. ∎

И наконец, в заключение этого раздела мы приведем самый важный в нем результат, который представляет собой, пожалуй, наиболее существенное следствие теоремы Тихонова.

Теорема IV.21 (теорема Банаха—Алаоглу). Пусть X^*—сопряженное некоторого банахова пространства X. Тогда единичный шар в X^* компактен в $*$-слабой топологии.

Доказательство. Пусть $B_x=\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant \|x\|\}$ для всякого $x \in X$. Каждое B_x компактно, значит, по теореме Тихонова $B=\underset{x \in X}{\times} B_x$ компактно в топологии произведения. Но что такое B? Каждый элемент из B приписывает число $b(x) \in B_x$ всякому x из X, т. е. b есть функция из X в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию $|b(x)| \leqslant \|x\|$. В частности, единичный шар $(X^*)_1$ есть подмножество в B, состоящее именно из тех $b \in B$, которые линейны. Что такое относительная топология, индуцированная в $(X^*)_1$ топологией произведения в B? Это в точности слабейшая топология, в которой $l \mapsto l(x)$ непрерывны при всяком x, т. е. $*$-слабая топология.

Итак, остается показать, что $(X^*)_1$ замкнут в топологии произведения. Предположим, что l_α—направленность в $(X^*)_1$, причем $l_\alpha \to l$. Так как $|l(x)| \leqslant \|x\|$, то достаточно показать, что l линеен. Но это просто; если $x, y \in X$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то

$$
\begin{aligned}
l(\lambda x+\mu y) &= \lim_\alpha l_\alpha(\lambda x+\mu y)=\lim_\alpha (\lambda l_\alpha(x)+\mu l_\alpha(y))= \\
&= \lambda l(x)+\mu l(y). \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

ДОПОЛНЕНИЕ К § IV.5. СЛАБАЯ И СИЛЬНАЯ ИЗМЕРИМОСТЬ

В § II.1 мы упоминали вкратце о векторнозначных измеримых функциях, принимающих значения в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Функция f была названа измеримой (см. задачу 12 гл. II), если $(y, f(\cdot))$—комплекснозначная измеримая функция для любого $y \in \mathscr{H}$. Это свойство можно назвать **слабой измеримостью**. Другое естественное определение измеримости, a priori более сильное,— это требование, чтобы $f^{-1}[C]$ было измеримо при любом открытом множестве $C \subset \mathscr{H}$. *Всюду в этой книге, говоря о векторнозначной измеримой функции, мы будем иметь в виду функцию, измеримую в слабом смысле.* Однако, чтобы удовлетворить естественное любопытство читателя, мы здесь кратко остановимся на сравнении различных понятий измеримости векторнозначных функций.

Определение. Пусть f—функция на пространстве с мерой $\langle M, \mu, \mathscr{R}\rangle$, принимающая значения в банаховом пространстве E.

(i) f называется **сильно измеримой**, если существует последовательность функций f_n, такая, что $f_n(x) \to f(x)$ по норме при почти всех $x \in M$, и всякая f_n принимает только конечное число значений, причем каждое значение принимается на некотором множестве из $\mathscr{R}$.

(ii) f называется **измеримой по Борелю**, если $f^{-1}[C] \in \mathscr{R}$ для любого открытого C в E (в топологии метрического пространства на E).

(iii) f называется **слабо измеримой**, если $l(f(x))$ есть комплекснозначная измеримая функция при любом $l \in E^*$.

Предложение. (a) Поточечный предел последовательности функций, измеримых по Борелю, есть функция, измеримая по Борелю.

(b) Пусть f—функция из M в E. Если f сильно измерима, то она измерима по Борелю.

(c) Пусть f—функция из M в E. Если f измерима по Борелю, то она слабо измерима.

Доказательство. (a) Пусть $f_n \to f$ поточечно по норме. Пусть C — открытое множество в E. Тогда $f(x) \in C$ в том и только в том случае, когда существует такое n, что $f_m(x) \in C$, коль скоро $m > n$. Значит,

$$f^{-1}[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m>n} f_m^{-1}[C],$$

и потому f измеримо по Борелю.

(b) прямо следует из (a) и определений.

(c) Композиция борелевых функций сама борелева. ∎

Теорема IV.22. Пусть $\mathscr{H}$—сепарабельное гильбертово пространство. Пусть f—функция из пространства с мерой $\langle M, \mu, \mathscr{R}\rangle$ в $\mathscr{H}$. Тогда следующие три свойства эквивалентны:

(a) f сильно измерима;

(b) f измерима по Борелю;

(c) f слабо измерима.

Доказательство. Вследствие последнего предложения нужно только показать, что (a) следует из (c). Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Пусть $a_n = (\psi_n, f(x))$. Каждое a_n есть комплекснозначная измеримая функция. Легко построить конечнозначные $a_{n,m}(x)$, такие, что $|a_{n,m}(x)| < |a_n(x)|$ при всех x и $\lim\limits_{m\to\infty} a_{n,m}(x) = a_n(x)$ при всех $x \in X$. Положим $f_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_{n,N}(x)\psi_n$. Тогда f_N конечнозначна и $f_N \to f$ по норме, так что f сильно измерима. ∎

Пример. Пусть C_t — экземпляр множества комплексных чисел C, и пусть $\mathscr{H} = \bigoplus\limits_{t\in\mathbf{R}} \mathrm{C}_t$, т. е. $\mathscr{H}$ состоит из функций φ на $\mathbf{R}$, отличных от нуля лишь в счетном числе точек t и таких, что $\sum\limits_{t\in\mathbf{R}} |\varphi(t)|^2 < \infty$. Пусть φ_s задано формулой

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t = s, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\{\varphi_s\}_{s\in\mathbf{R}}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Пусть $f\colon \mathbf{R} \to \mathscr{H}$ определено равенством $f(s) = \varphi_s$. Для всякой $\psi \in \mathscr{H}$ имеем $(\psi, f(s)) = 0$, за исключением счетного множества, так что $(\psi, f(s))$ измерима. Значит, $f(s)$ слабо измерима. Но f не является сильно измеримой. В самом деле, если $f = \lim f_n$ поточечно по норме, то $\operatorname{Ran} f \in \overline{\bigcup \operatorname{Ran} f_n}$. Но если бы каждая f_n была конечнозначной, то $\operatorname{Ran} f$ должно было бы быть сепарабельным, а это не так.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *IV.1.* Читателю, который захочет глубже проникнуть в область общей теоретико-множественной топологии, мы очень рекомендуем книгу: Дж. Келли, Общая топология, «Наука», М., 1968. Лучше всего читать эту книгу, решая все задачи; конечно, это отнимает много времени, но если читатель может это время потратить, его усилия будут вознаграждены. Из других курсов, описывающих как элементарные, так и более сложные топологические понятия, назовем следующие: К. Куратовский, Топология, т. 1, «Мир», М., 1966; W. Pervin, Foundations of General Topology, Academic Press, New York, 1964; W. Thron, Topological Structures, Holt, New York, 1966.

Само понятие топологических пространств выросло из работ Фреше и Хаусдорфа. Классификация пространств по типам T_1—T_4 восходит к Александрову и Хопфу: P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie I, Berlin, 1935.

Понятие последовательности Коши нельзя распространить на произвольные топологические пространства. Однако можно добавить к топологической структуре еще некую «равномерную структуру» и получить тогда пространства, в которых последовательность Коши и полнота имеют смысл. Обычно подразумевается, что окрестности x описывают близость к x. Чтобы иметь понятие «близости к x», равномерное по x, требуется семейство $\mathscr{U}$ подмножеств $X \times X$, каждое из которых содержит множество $\Delta = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$. Следует еще наложить на $\mathcal{U}$ условия, которые обеспечат, чтобы $\mathcal{U}_x = \{U_x \mid U \in \mathcal{U}\}$, где $U_x = \{y \mid \langle x, y\rangle \in U\}$, была системой окрестностей для некоторой топологии. Канонический пример состоит в том, чтобы выбрать в качестве $\mathcal{U}$ семейство всех множеств в $X \times X$, содержащих множество вида $\{\langle x, y\rangle \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$, где ρ — некоторая метрика. Если G есть топологическая группа (в частности, если G — топологическое векторное пространство), то существует также естественная однородная структура, задаваемая семейством $\mathcal{U} = \{U_N \mid N \in \eta\}$, где η — семейство окрестностей единичного элемента, а $U_N = \{\langle x, y\rangle \mid xy^{-1} \in N\}$. Пусть задана равномерная структура $\mathcal{U}$; направленность $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ называется направленностью Коши, если для каждого $U \in \mathcal{U}$ существует такое $\alpha_0 \in D$, что из $\alpha, \beta > \alpha_0$ следует $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle \in U$.

Понятие равномерного пространства было впервые формализовано А. Вейлем: A. Weil, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Actualités Sci. Ind., 551, Paris, 1937. Современное изложение теории равномерных пространств см. у Келли, гл. 6, или у Шоке (G. Choquet, Lectures on Analysis, Benjamin, New York, 1969, § 5).

§ *IV.2*. Направленности были впервые введены в статье: E. H. Moore and H. L. Smith, A General Theory of Limits, *Amer. J. Math.*, 44 (1922), 102. В более старых работах иногда говорится о сходимости Мура — Смита. Более подробно об этом см. у Келли, гл. 2.

Существует другой подход к вопросу о сходимости в топологических пространствах, пропагандируемый Н. Бурбаки. Это так называемая *теория фильтров*; она рассматривается у Шоке, § 4, а также у Бурбаки, Общая топология, гл. I. Теория сходимости, построенная на понятии фильтров, кажется нам совершенно не отвечающей интуитивным представлениям, и мы предпочитаем во всех случаях пользоваться направленностями.

§ *IV.3*. Первым, кто осознал важность топологии произведения (и доказал свою известную теорему), был А. Н. Тихонов; см. две его фундаментальные статьи: Über die topologische Erweiterung von Raumen, *Math. Ann.*, 102 (1929), 544—556, и Über einen Funktionenraum, *Math. Ann.*, 111 (1935), 762—766. Обычное доказательство теоремы Тихонова (см., например, Келли) использует свойство центрированности и довольно сложно. Проще выглядит доказательство, опирающееся на теорию фильтров и ультрафильтров, которая как будто специально создана для этого доказательства (см. Шоке). Но это доказательство можно перевести на язык направленностей. Ниже мы приводим набросок такого доказательства. (1) Направленность $\{x_\alpha\}$ в пространстве X называется *универсальной*, если для любого $A \subset X$ в конце концов $x_\alpha \in A$ или $x_\alpha \in X \setminus A$. Заметим, что A произвольно и в определении универсальной направленности ничего не говорится о топологии. (2) Если x — точка накопления универсальной направленности, то $x_\alpha \to x$, ибо если часто $x_\alpha \in A$, то обязательно в конце концов $x_\alpha \in A$. (3) Любая направленность имеет универсальную поднаправленность. В техническом отношении это центральный пункт доказательства. В нем используется аксиома выбора. (4) X компактно тогда и только тогда, когда каждая универсальная направленность сходится. Когда (3) предполагается выполненным, это в точности теорема Больцано — Вейерштрасса. (5) Для доказательства теоремы Тихонова допустим, что $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ — универсальная направленность в $\underset{i \in I}{\times} A_i$, где каждое A_i компактно. Напишем $x_\alpha = \{x_\alpha^{(i)}\}_{i \in I}$, причем $x_\alpha^{(i)} \in A_i$. Поскольку $\{x_\alpha\}$ универсальна, $\{x_\alpha^{(i)}\}_{i \in I}$ тоже универсальна при всяком i. Так как A_i компактно, то $x_\alpha^{(i)} \to x^{(i)}$ при некотором $x^{(i)} \in A_i$. Пусть x — элемент $\{x^{(i)}\}_{i \in I}$ в $\underset{i \in I}{\times} A_i$. Тогда $x_\alpha \to x$, так что каждая универсальная направленность сходится. Мы впервые узнали это доказательство из лекций Ланфорда: O. E. Lanford, III, Les Houches lectures, 1970.

В каких случаях топология в топологическом пространстве задается метрикой? В общем случае на этот вопрос не существует простого ответа, однако для компактных хаусдорфовых пространств известно, что X метризуемо (имеет топологию, задаваемую метрикой) тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет первой аксиоме счетности. В § V.2 мы увидим, что подобный результат имеет место и для топологических векторных пространств. Факты, относящиеся и к компактным, и к векторным пространствам, наиболее понятны в общем контексте равномерных пространств; см. Келли, гл. 6.

Данное Вейерштрассом доказательство его теоремы о приближении полиномами находится на стр. 5 третьего тома его трудов: K. Weierstrass, Mathematische Werke, Mayer und Müller, Berlin, 1903. Обобщение Стоуна впервые появилось в работе: M. H. Stone, Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41 (1937), 325—481; он же дал упрощенное доказательство в своей классической статье: The Generalized Weierstrass Approximation Theorem, *Math. Mag.*, 21 (1947/48), 167—184, 237—254.

§ *IV.4*. В качестве краткого и простого изложения теории меры на компактных пространствах мы очень рекомендуем первую главу книги: L. Nachbin, The Haar Integral, Van Nostrand — Reinhold, Princeton, N. J., 1965. Более полное изложение можно найти у Бурбаки, Интегрирование, гл. I—IV.

Большая часть того, что мы говорили о положительных линейных функционалах, относится и к векторным пространствам, на которых задано упорядочение, допускающее взятие конечных нижних и верхних граней, т. е. к векторным решеткам. Глубокая связь между понятиями порядка и топологией рассмотрена в книге: L. Nachbin, Topology and Order, Van Nostrand — Reinhold, Princeton, N. J., 1965.

Дополнительно о теории меры на локально компактных пространствах см. в указанных книгах Нахбина и Бурбаки или (ближе к принятому здесь подходу) в книге Шоке (см. замечания к § IV.1).

§ *IV.5*. Далее мы докажем более сильный результат, чем наше утверждение, что линейные комбинации мер Дирака грубо плотны в $\mathcal{M}(X)$. На самом деле мы покажем, что линейные комбинации в $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ грубо плотны в $\mathcal{M}_{+,1}(X)$. Поэтому любая положительная мера μ, $\mu(X)=1$, может быть грубо приближена мерами $\sum_{n=1}^{N} t_n\delta_{x_n}$, где $0\leqslant t_n\leqslant 1$, $\sum t_n=1$. Это будет следовать из теоремы Крейна — Мильмана, которая приводится в § XVI.1. Теорема Банаха — Алаоглу была доказана в работе: L. Alaoglu, Weak Topologies of Normed Linear Spaces, *Ann. Math.*, 41 (1940), 252—267.

Теорему IV.22 можно распространить на произвольное сепарабельное банахово пространство. В более общем случае имеет место теорема Петтиса: векторнозначная функция сильно измерима тогда и только тогда, когда она слабо измерима и почти сепарабельнозначна (в том смысле, что после изменения f на множестве меры нуль $\operatorname{Ran} f$ станет сепарабельным). Эта теорема впервые доказана в работе: B. J. Pettis, On Integration in Vector Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 44 (1938), 277—304.

Интеграл от сильно измеримой функции можно определить при помощи методов, вполне аналогичных тем, которые употребляются для вещественнозначных функций. Этот *интеграл Бохнера* обсуждается в книге: К. Иосида, Функциональный анализ, «Мир», М., 1970, и во многих других учебниках. Он был введен Бохнером в работе: S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Wert die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fund. Math.*, 20 (1933), 262—276. Интеграл Бохнера удовлетворяет теореме о мажорированной сходимости с оценкой по норме. Всюду в этой книге мы пользуемся слабым интегралом, определяемым как $l\left(\int f(x)\,d\mu\right)=\int l(f(x))\,d\mu$. Интеграл Бохнера обладает лучшими свойствами, чем этот слабый интеграл, но нам эти дополнительные свойства не потребуются, так что мы удовлетворимся более простым слабым интегралом.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что семейство всех топологий на некотором пространстве образует полную решетку, т. е. что любое семейство топологий обладает наименьшей верхней гранью и наибольшей нижней гранью.

2 (аксиомы замыкания Куратовского). Покажите, что операция $A \mapsto \bar{A}$ в топологическом пространстве обладает следующими свойствами:

(i) $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$;
(ii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
(iii) $A \subset \bar{A}$;
(iv) $\bar{\varnothing} = \varnothing$.

Напротив, допустим, что задана операция $^-$: $2^X \longrightarrow 2^X$ ($2^X \equiv$ все подмножества множества X), удовлетворяющая условиям (i)—(iv). Покажите, что семейство множеств B, таких, что $\overline{X \setminus B} = X \setminus B$, образует топологию, для которой $^-$ есть операция замыкания.
Литература: Келли, стр. 67—69.

3. (a) Пусть 2—топологическое пространство $\{0, 1\}$ с дискретной топологией. Докажите, что топологическое пространство X связно тогда и только тогда, когда любая непрерывная функция f: $X \longrightarrow 2$ постоянна.
(b) Докажите, что любое произведение связных пространств связно.
(c) Пусть S—топологическое пространство. Допустим, что $A, B \subset S$ связны в относительной топологии и $A \cap B \neq \varnothing$; $A \cup B = S$. Покажите, что S связно.
(d) Пусть S—топологическое пространство. Предположим, что $S = \bar{D}$ и D связно. Докажите, что S связно.
(e) Докажите, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен.
(f) Докажите теорему о промежуточном значении из элементарного анализа: если f—непрерывная функция на $[a, b]$, то для любого $f(a) < x < f(b)$ существует такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = x$.
Указание. Воспользуйтесь (a) для доказательства (b)—(e).

4. (a) Топологическое пространство X называется **пространством Линделёфа**, если любое его открытое покрытие имеет счетное подпокрытие. Докажите, что любое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, есть пространство Линделёфа.
(b) Докажите, что любое регулярное (т. е. T_3-) пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, нормально (т. е. T_4).
Литература: Келли, стр. 76, 77.

5. (a) Докажите, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны при любом $n > 1$.
(b) Докажите, что $\mathbb{R} \neq X \times X$ ни для какого топологического пространства X.
Указание. Что случится с $\mathbb{R}$, если изъять из него одну точку?

6. Топологическое пространство X называется **линейно связным**, если при заданных x, $y \in X$ существует непрерывная функция (дуга) $f:[0, 1] \longrightarrow X$, такая, что $f(0) = x$, $f(1) = y$.
(a) Покажите, что если X линейно связно, то оно связно.

(b) Пусть X_0 — график функции $y = \sin 1/x$ на пространстве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, снабженном относительной топологией как подмножество плоскости. Пусть $X = X_0 \cup \{\langle x, y\rangle \mid x = 0\}$. Покажите, что X связно, но не линейно связно.

7. Пусть на $X = \mathbb{R}$ задана топология $\mathcal{T}$, порождаемая всеми множествами вида $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, образующими на самом деле базу для $\mathcal{T}$. Докажите, что:
(a) $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ сепарабельно;
(b) $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ удовлетворяет первой аксиоме счетности;
(c) $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ *не удовлетворяет* второй аксиоме счетности.

8. Докажите, что любое подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно.

9. Пусть Y есть $\mathbb{R}^2$ с топологией произведения, задаваемой топологией $\mathcal{T}$ задачи 7 на каждом множителе. Докажите, что:
(a) Y сепарабельно;
(b) прямая $x + y = 1$ не сепарабельна в относительной топологии.

10. Пусть X — любое несчетное множество, и пусть $\mathcal{T}$ — топология, состоящая из $\varnothing$ и дополнений конечных множеств. Докажите, что:
(a) X сепарабельно;
(b) X счетно;
(c) X есть T_1-пространство и *не есть* T_2;
(d) X не удовлетворяет ни первой, ни второй аксиомам счетности.

†*11.* Докажите теорему IV.2.

12. Пусть X — банахово пространство l_∞; рассмотрим последовательность δ_1, δ_2, ... в X^*, заданную равенством

$$\delta_n(\{c_k\}_{k=1}^{\infty}) = c_n.$$

Докажите, что $\{\delta_n\}$, ... не имеет $*$-слабо сходящихся подпоследовательностей, но имеет $*$-слабо сходящуюся поднаправленность.

13. Приведите пример, показывающий, что поточечный предел *направленности* борелевых функций на $\mathbb{R}$ может не быть борелевой функцией.

14. Покажите, что пространство примера в § IV.2 не компактно, но линделёфово (см. задачу 4).

15. Пусть $\mathcal{A}$ — семейство непрерывных функций на $[0, 2\pi]$ со свойством $\int_0^{2\pi} e^{ikx} f(x)\, dx = 0$, если k — отрицательное целое. Докажите, что $\mathcal{A}$ — замкнутая разделяющая точки алгебра, $1 \in \mathcal{A}$, однако $\mathcal{A} \neq C[0, 2\pi]$.

†*16.* Докажите заключительное утверждение теоремы Стоуна — Вейерштрасса для случая, когда не предполагается, что $1 \in B$.

**17.* Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый идеал в $C_{\mathbb{R}}(X)$. Пусть, далее, $Y = \{x \in X \mid f(x) = 0$ при всех $f \in \mathcal{B}\}$. Докажите, что Y замкнуто и что $\mathcal{B} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(X) \mid f = 0$ на $Y\}$.

18. Докажите теорему Титце для случая, когда предполагается только, что X нормально. (См. указания, которые дает Келли, гл. 7, задача О.)

19. Пусть f — непрерывная функция на $[-1/2, 1/2]$, причем $f(1/2) = f(-1/2) = 0$. Пусть $s_k(X)$ — последовательность функций, таких, что $\int_{-1}^{1} s_k(x)\, dx = 1$ и каждая $s_k \geqslant 0$, так что при любом $\delta > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{1 \geqslant |x| \geqslant \delta} s_k(x) = 0.$$

Докажите, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{-1/2}^{1/2} s_k(x-y)\, f(y)\, dy = f(x)$$

для любого $x \in [-1/2, 1/2]$ и что сходимость равномерная.

20. Пусть $s_k(x) = (I_k)^{-1}(1-x^2)^k$, где $I_k = \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^k\, dx$. Пользуясь результатами задачи 19, докажите, что любая непрерывная функция на $[-1/4, 1/4]$ есть равномерный предел полиномов на $[-1/4, 1/4]$.

21. Пользуясь теоремой Стоуна — Вейерштрасса, докажите, что:

(a) $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ образуют полную *ортогональную* систему в $L^2[0, 2\pi]$;

(b) полиномы Лежандра образуют полную *ортогональную* систему в $L^2[-1, 1]$;

*(c) сферические гармоники образуют полную ортонормированную систему в пространстве L^2 на сфере.

(*Указание*: воспользуйтесь тем, что вам известно о коэффициентах Клебша — Гордона!)

22. Докажите следующую *теорему Дини*. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Пусть f_n — монотонно убывающее семейство функций и $f_n(x) \to f(x)$ поточечно. Тогда f_n сходится равномерно в том и только том случае, когда f непрерывна.

23. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство. Рассмотрим $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, где ∞ — это «точка», не принадлежащая X. Назовем $O \subset \hat{X}$ открытым, если либо $\infty \notin O$ и O открыто в X, либо $\infty \in O$ и $\hat{X} \setminus O$ компактно. Докажите, что $\hat{X}$ — компактное хаусдорфово пространство. Оно называется **одноточечной компактификацией** пространства X.

24. Докажите теорему Стоуна — Вейерштрасса для локально компактного пространства X: если $\mathcal{A}$ есть замкнутая подалгебра из $C_\infty(X)$ — пространства непрерывных вещественнозначных функций, исчезающих на ∞, и если $\mathcal{A}$ разделяет точки и для всякого $x \in X$ существует такая $f \in \mathcal{A}$, что $f(x) \neq 0$, то $\mathcal{A} = C_\infty(X)$.

25. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство. Докажите, что для $C, D \subset X$, где D — замкнуто, а C компактно, существует такая непрерывная функция f, $0 \leqslant f \leqslant 1$, на X, что $f[C] = 0$, $f[D] = 1$.

Замечание. Для решения задач 24 и 25 воспользуйтесь пространством $\hat{X}$ задачи 23.

26. (a) Докажите, что любое локально компактное хаусдорфово пространство есть T_3-пространство.

(b) Докажите, что любое локально компактное хаусдорфово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, нормально.

(c) Докажите, что любое σ-компактное локально компактное хаусдорфово пространство нормально.

Замечание. Существуют локально компактные пространства, которые хаусдорфовы, но не нормальны. См. *Келли, гл. 4, задача Е.*

27. Группа G, наделенная топологией, называется топологической группой, если $\langle x, y\rangle \mapsto xy^{-1}$ — отображение $G\times G \longrightarrow G$ — непрерывно. Функция f на топологической группе G называется равномерно непрерывной, если для любого ε можно найти такую окрестность N_ε единицы $e\in G$, что $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, когда $xy^{-1}\in N_\varepsilon$. Докажите, что любая непрерывная функция на компактной топологической группе равномерно непрерывна.

*28. (a) Пусть A — алгебра вещественнозначных ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, разделяющая точки и замкнутая по норме $\|\cdot\|_\infty$. Образуем $X_A = \times_{f\in A}\{x\in\mathbb{R} \mid |x| \leqslant \|f\|_\infty\}$ с топологией произведения. Отобразим $\mathbb{R}\longrightarrow X_A$ так, что точка x переходит в точку с координатами $\{f(x)\}_{f\in A}$. Докажите, что образ $\mathbb{R}$ в X_A гомеоморфен $\mathbb{R}$ и что его замыкание компактно.

(b) Топологическое пространство X с отображением f: $\mathbb{R}\longrightarrow X$ называется **компактификацией** $\mathbb{R}$, если f есть гомеоморфизм между $\mathbb{R}$ и его образом, если этот образ плотен в X и если X — компактное хаусдорфово пространство. Две компактификации f: $\mathbb{R}\longrightarrow X$ и g: $\mathbb{R}\longrightarrow Y$ отождествляются, если существует такой гомеоморфизм h: $X\longrightarrow Y$, что $h\circ f = g$. Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между компактификациями $\mathbb{R}$ и алгебрами $A\subset C_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющими условиям пункта (a).

(c) Если выбрать $A = C(\mathbb{R})$, то та компактификация, которая получается с помощью конструкции пункта (a), называется **компактификацией Стоуна — Чеха** и обозначается $\check{\mathbb{R}}$. Докажите, что $\check{\mathbb{R}}$ есть универсальная компактификация $\mathbb{R}$ в следующем смысле: если даны любая компактификация f: $\mathbb{R}\longrightarrow X$ и компактификация Стоуна — Чеха g: $\mathbb{R}\longrightarrow\check{\mathbb{R}}$, то можно найти непрерывное и сюръективное отображение h: $\check{\mathbb{R}}\longrightarrow X$, такое, что $h\circ g = f$.

29. Пусть $\langle X, d\rangle$ — метрическое пространство без изолированных точек. Предположим, что всякая непрерывная функция на X равномерно непрерывна. Покажите, что X компактно.

30. (a) Докажите, что всякое метрическое пространство нормально.
(b) Докажите, что всякое замкнутое множество в метрическом пространстве есть G_δ-множество.

†31. Докажите утверждение о единственности теоремы IV.16.

32. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность чисел с таким свойством: если $\sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n \geqslant 0$ при всех $x\in[0, 1]$, то $\sum_{n=0}^{N}\alpha_n a_n \geqslant 0$. Докажите, что существует единственная (положительная) мера μ на $[0, 1]$, такая, что $a_n = \int_0^1 x^n\, d\mu$.

33. Пусть X — векторное пространство, а Y — семейство функционалов на нем, разделяющих точки. Докажите, что если топология $\sigma(X, Y)$ порождается метрикой, то Y имеет счетную *алгебраическую* размерность. **Алгебраический базис** в Y есть подмножество, *конечные* линейные комбинации которого порождают Y. **Алгебраическая размерность** — это число элементов минимального алгебраического базиса.

34. Пусть X — вещественное банахово пространство и C — единичный шар в X^* со $*$-слабой топологией. Докажите, что любая непрерывная функция

на C может быть равномерно приближена полиномами от элементов X, действующими как линейные функционалы на X^*.

35. Пусть X — банахово пространство и X^* — его сопряженное. Пусть L_n, $n \geqslant 1$, — элементы X^* и $L_n \to L \in X^*$ в $*$-слабом смысле. Пусть $x_n \to x$ по норме. Всегда ли $L_n(x_n) \to L(x)$?

36. Докажите, что X плотно в X^{**} в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$.

37. Пусть $T\colon C(X) \to C(Y)$ линейно. Говорят, что T сохраняет положительность (или положительно), если $Tf \geqslant 0$, коль скоро $f \geqslant 0$. Если T положительно, мы пишем $T \geqslant 0$. Если $S - T \geqslant 0$, то мы пишем $T \leqslant S$.
(a) Докажите, что любое $T \geqslant 0$ автоматически непрерывно и что $\|T\| = \|T1\|_\infty$.
(b) Пусть S_n — возрастающее семейство отображений. Докажите, что S_n сходится по операторной норме тогда и только тогда, когда $S_n 1$ сходится по функциональной норме.

†*38.* Докажите первое предложение § IV. 2.

†*39.* Найдите банахово пространство и слабо сходящуюся направленность, которая не ограничена по норме.

†*40.* Пусть X — бесконечномерное банахово пространство со слабой топологией. Докажите, что замыкание единичной сферы есть единичный шар.

†*41.* Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Докажите, что множество сходящихся бесконечных линейных комбинаций точечных мер замкнуто по норме в $\mathcal{M}(X)$.

†*42.* Дайте прямое доказательство теоремы IV.19.

**43.* (a) Пусть X — компактное множество со счетной базой. Пусть μ — бэрова мера на X. Докажите, что $L^p(X, d\mu)$ сепарабельно при всех $p < \infty$. (*Указание.* Пусть A_n — счетная база топологии X. Для всех n, m, таких, что $\bar{A}_n \cap \bar{A}_m = \varnothing$, найдите такие $f_{n,m} \in C(X)$, что $f = 0$ на A_n и $f = 1$ на A_m. Воспользуйтесь этими $f_{n,m}$ для построения счетного плотного множества в $C(X)$. Далее используйте то, что $C(X)$ плотно в $L^p(X, d\mu)$.)
(b) Распространите результат пункта (a) на тот случай, когда X лишь локально компактно. (*Указание:* докажите, что X σ-компактно.)

**44.* Решите любые пятьдесят задач из книги Келли.

V. ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Математики, как французы: все что вы им говорите, они переводят на свой язык, и это тотчас же становится чем-то совершенно иным.

И. В. ГЁТЕ

V.1. Общие свойства

При изучении слабых топологий в § IV.5 мы уже обсудили несколько топологий, не порождаемых нормой. Мы также упомянули, что бэровы меры на локально компактном топологическом пространстве X образуют пространство, сопряженное множеству $\varkappa(X)$ непрерывных функций с компактным носителем, если наделить последнее подходящей ненормируемой топологией. Цель этой главы—обсуждение общего класса топологических векторных пространств, в котором содержатся пространства этих примеров, а также пространства обобщенных функций, встречающихся в самых разнообразных задачах функционального анализа и во многих физических приложениях.

Идея, лежащая в основе обсуждаемых топологий, очень проста. Предположим, что вместо одной нормы у нас есть семейство норм $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где A—некоторое множество индексов. Мы хотели бы иметь топологию, в которой направленность $\{x_\beta\}$ сходилась бы к x тогда и только тогда, когда $\rho_\alpha(x_\beta-x)\to 0$ при каждом фиксированном $\alpha\in A$. Однако хорошо было бы ослабить одно из условий на норму. Напомним, что $\|x\|=0$ влечет за собой $x=0$ и что это условие необходимо для единственности пределов, т. е. для того, чтобы индуцированная топология была хаусдорфовой. Предположим, что $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$—семейство объектов, подчиненных всем условиям на нормы, кроме условия обращения x в нуль, когда $\rho_\alpha(x)=0$ для какого-то α. Взамен предположим, что $x=0$, если $\rho_\alpha(x)=0$ для всех α; тогда легко понять, что в топологии, в которой сходимость означает, что $\rho_\alpha(x_\beta-x)\to 0$ при каждом фиксированном α, пределы единственны. Введем поэтому такое

Определение. **Полунорма** на векторном пространстве V есть отображение ρ: $V\to[0, \infty)$ со свойствами:

(i) $\rho(x+y)\leqslant\rho(x)+\rho(y)$;

(ii) $\rho(\alpha x)=|\alpha|\rho(x)$ для $\alpha\in\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$).

Семейство полунорм $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется **разделяющим точки**, если

(iii) из условия $\rho_\alpha(x)=0$ для всех $\alpha\in A$ следует, что $x=0$.

Определение. **Локально выпуклое пространство** есть векторное пространство X (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с семейством полунорм $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$, разделяющим точки. **Естественная топология** на локально выпуклом пространстве есть слабейшая топология, в которой непрерывны все ρ_α и в которой непрерывна операция сложения.

Отложим временно обсуждение примеров и объяснение термина «локально выпуклое». Отметим только, что многие авторы в определении не требуют, чтобы полунормы разделяли точки, а при формулировке утверждений вводят это условие как дополнительное. Значение этого условия в том, что из него следует (задача 6а) такое

Предложение. Естественная топология локально выпуклого пространства (при нашем определении!) хаусдорфова.

База окрестностей нуля в естественной топологии задается множествами $\{N_{\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n;\ \varepsilon} \mid \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n\in A;\ \varepsilon>0\}$, где

$$N_{\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n;\ \varepsilon}=\{x \mid \rho_{\alpha_i}(x)<\varepsilon,\ i=1,\ \dots,\ n\}.$$

Таким образом, направленность $x_\beta\to x$ тогда и только тогда, когда $\rho_\alpha(x_\beta-x)\to 0$ для всех $\alpha\in A$. Естественным путем расширяется и понятие полноты.

Определение. Направленность $\{x_\beta\}$ в локально выпуклом пространстве X называется **направленностью Коши**, если для всех $\varepsilon>0$ и для каждой полунормы ρ_α существует такое β_0, что $\rho_\alpha(x_\beta-x_\gamma)<\varepsilon$, когда $\beta,\ \gamma>\beta_0$. Пространство X называется **полным**, если в нем каждая направленность Коши сходится.

Важной структурой на локально выпуклом пространстве является скорее естественная топология, чем конкретные полунормы, которые ее порождают. Назовем два семейства полунорм $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{d_\beta\}_{\beta\in B}$ на векторном пространстве X **эквивалентными**, если они порождают одну и ту же естественную топологию. Часто полезно иметь в виду следующий результат (задача 6b).

Предложение. Пусть $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{d_\beta\}_{\beta\in B}$ — два семейства полунорм. Следующие условия равносильны:

(a) Рассматриваемые семейства полунорм эквивалентны.

(b) Каждая ρ_α непрерывна в d-естественной топологии, а каждая d_β непрерывна в ρ-естественной топологии.

(c) Для каждого $\alpha\in A$ существуют $\beta_1,\ \dots,\ \beta_n\in B$ и $C>0$, такие, что для всех $x\in X$

$$\rho_\alpha(x)\leqslant C\,(d_{\beta_1}(x)+\ \dots\ +d_{\beta_n}(x)),$$

и для каждого $\beta\in B$ существуют $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_m\in A$ и $D>0$, такие, что для всех $x\in X$

$$d_\beta(x)\leqslant D\,(\rho_{\alpha_1}(x)+\dots+\rho_{\alpha_m}(x)).$$

Появление в теории локально выпуклых пространств выражений типа $C(d_{\beta_1}(x)+\ldots+d_{\beta_n}(x))$ носит совершенно общий характер. Поэтому полезно рассмотреть семейства полунорм со следующим специальным свойством.

Определение. Семейство $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ полунорм на векторном пространстве V называется **направленным**, если для всех $\alpha, \beta\in A$ существуют $\gamma\in A$ и C, такие, что для всех $x\in V$

$$\rho_\alpha(x)+\rho_\beta(x)\leqslant C\rho_\gamma(x).$$

Значит, по индукции, для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n\in A$ существуют такие γ и D, что для всех $x\in V$

$$\rho_{\alpha_1}(x)+\ldots+\rho_{\alpha_n}(x)\leqslant D\rho_\gamma(x).$$

Если, например, $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$—направленное семейство, то $\{\{x\mid\rho_\alpha(x)<\varepsilon\}\mid\alpha\in A,\ \varepsilon>0\}$—база окрестностей нуля. Направленные семейства полунорм существуют всегда:

Предложение. В каждом локально выпуклом пространстве существует направленное семейство полунорм, эквивалентное семейству, определяющему топологию пространства.

Доказательство. Если $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ определяет исходную топологию, то пусть B—множество конечных подмножеств в A. Если $F\in B$, то пусть $d_F=\sum_{\alpha\in F}\rho_\alpha$. Тогда семейство $\{d_F\}_{F\in B}$ направлено и эквивалентно исходному семейству. ∎

Рассмотрим кратко два примера. Дальше в § V.3 и § V.4 мы обсудим несколько других примеров; в частности, тем из читателей, кто хочет набраться опыта в обращении с эквивалентными полунормами и направленными семействами полунорм, полезно познакомиться с дополнением к § V.3, носящим технический характер.

Пример 1. Пусть X—векторное пространство, и пусть Y—множество разделяющих точки линейных функционалов на X. В § IV.5 мы ввели топологию $\sigma(X, Y)$. Это как раз локально выпуклая топология, порождаемая полунормами $\{\rho_l\mid l\in Y\}$, где $\rho_l(x)=|l(x)|$. Эта топология задается полунормами, но не определяется никакими нормами, если Y имеет бесконечную алгебраическую размерность (задача 2).

Пример 2. Пусть D—область комплексной плоскости, т. е. связное и открытое множество. Пусть $\mathscr{G}_D$—векторное пространство всех (однозначных) аналитических функций в D. Пусть $\rho_C(f)=\sup_{z\in C}|f(z)|$ для любого компактного $C\subset D$. Множество $\mathscr{G}_D$, наделенное топологией, определяемой полунормами ρ_C, есть полное локально выпуклое пространство. Действительно, предположим, что f_α является ρ_C-направленностью Коши для всех C. Тогда $f_\alpha(z)\to f(z)$ равномерно на компактных множествах. По классической теореме Вейерштрасса функция f аналитична (в основном из-за того, что f аналитична тогда и только тогда, когда для нее справедлива интегральная формула Коши, которая сохраняется при равномерном предельном переходе). Пусть

$$\rho_C^{(2)}(f)=\iint\limits_{x+iy\in C}|f(x+iy)|^2\,dx\,dy.$$

Семейства $\{\rho_C^{(2)}\}$ и $\{\rho_C\}$ эквивалентны (задача 7).

Теперь мы готовы к обсуждению вопроса о том, почему локально выпуклое пространство так называется и какие геометрические идеи и построения с этим связаны. Специальными геометрическими свойствами обладают прежде всего окрестности $N_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n;\ \varepsilon}$.

Определение. Множество C в векторном пространстве V называется **выпуклым**, если из $x, y\in C$ и $0\leqslant t\leqslant 1$ вытекает, что $tx+(1-t)y\in C$; **уравновешенным** (или **закругленным**), если из $x\in C$ и $|\lambda|\leqslant 1$ вытекает, что $\lambda x\in C$; **поглощающим** (или **поглотителем**), если $\bigcup\limits_{t>0} tC=V$, т. е. если для каждого $x\in V$ существует такое $s>0$, что $sx\in C$.

Если C выпукло и V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, то уравновешенность означает только, что $-x\in C$, когда $x\in C$; если V — векторное пространство над $\mathbb{C}$, то уравновешенность означает, что $e^{i\theta}x\in C$, когда $\theta\in[0, 2\pi)$ и $x\in C$ (так что закругленность — более подходящий термин).

Путем элементарного применения определений легко убедиться в том, что $N_{\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n;\ \varepsilon}$ выпуклы.

Предложение. Если $\rho_{\alpha_1},\ \dots,\ \rho_{\alpha_n}$ — полунормы на векторном пространстве V, то $\{x\mid |\rho_{\alpha_1}(x)|<\varepsilon,\ \dots,\ |\rho_{\alpha_n}(x)|<\varepsilon\}$ — уравновешенное, выпуклое, поглощающее множество.

Это предложение — половина следующей основной теоремы:

Теорема V.1. Пусть V — векторное пространство с хаусдорфовой топологией, в которой сложение и умножение на скаляры раздельно непрерывны. Тогда V — локально выпуклое пространство (т. е. имеет топологию, заданную семейством полунорм) в том и только том случае, когда нуль обладает базой окрестностей, состоящей из уравновешенных, выпуклых, поглощающих множеств.

Доказательство второй половины теоремы: V имеет топологию, порождаемую полунормами, если нуль обладает базой окрестностей, состоящей из уравновешенных выпуклых поглощающих множеств,— покоится на следующей лемме.

Определение. Пусть C — поглощающее подмножество векторного пространства V с дополнительным свойством: если $x \in C$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $tx \in C$. **Функционал Минковского** (или **калибровка**) на множестве C есть отображение ρ: $V \to [0, \infty)$, задаваемое формулой

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \inf\{\lambda \mid x \in \lambda C\} = \\ &= [\sup\{\mu \mid \mu x \in C\}]^{-1}.\end{aligned}$$

Лемма. (a) Если $t \geqslant 0$, то $\rho(tx) = t\rho(x)$ для любой калибровки и любого C.

(b) Если C выпукло, то $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$.

(c) Если C закруглено, то $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$.

(d) $\{x \mid \rho(x) < 1\} \subset C \subset \{x \mid \rho(x) \leqslant 1\}$.

Доказательство этой красивой леммы мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Доказательство теоремы V.1. Пусть $\mathcal{U}$ — база окрестностей нуля, содержащая только выпуклые, уравновешенные, поглощающие множества; для каждого $U \in \mathcal{U}$ пусть ρ_U — калибровка на U. В силу пунктов (b) и (c) леммы ρ_U — полунорма, а в силу (d) окрестности нуля в исходной топологии те же, что и в локально выпуклой топологии, задаваемой полунормами $\{\rho_U \mid U \in \mathcal{U}\}$. Поскольку сложение раздельно непрерывно в обеих топологиях, окрестности любой точки в этих топологиях совпадают. ∎

В нормированных линейных пространствах линейное отображение из X в Y непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено. Похожий результат справедлив и в локально выпуклых пространствах (задача 9):

Теорема V.2. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства с семействами полунорм $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$. Линейное отображение T: $X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для всех $\beta \in B$ существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ и $C > 0$, такие, что

$$d_\beta(Tx) \leqslant C(\rho_{\alpha_1}(x) + \ldots + \rho_{\alpha_n}(x)).$$

Если $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ направлено, то T непрерывно тогда и только тогда, когда для всех $\beta \in B$

$$d_\beta(Tx) \leqslant D\rho_\alpha(x)$$

при некоторых $\alpha \in A$ и $D > 0$.

В заключение этого вводного раздела обсудим два применения теоремы Хана—Банаха (теоремы III.5) к локально выпуклым пространствам. Первое дает

Теорема V.3. Пусть X—локально выпуклое пространство, и пусть Y—его подпространство. Пусть l: $Y \to \mathbb{R}$ (или $\to \mathbb{C}$, если X комплексное) линейно и непрерывно. Тогда существует непрерывное линейное отображение L: $X \to \mathbb{R}$ (или $\to \mathbb{C}$), такое, что $L \restriction Y = l$.

Доказательство. Относительная топология на Y задается сужением непрерывных полунорм. Таким образом, $|l(x)| \leqslant C\rho(x)$ для некоторой непрерывной полунормы. Применяя теорему III.5 или III.6, получаем нужный результат. ∎

Итак, на локально выпуклых пространствах существует много непрерывных линейных функционалов; на самом деле их достаточно для разделения точек. Обозначим через X^* семейство непрерывных линейных функционалов на X и назовем его **топологическим сопряженным.**

Второе применение теоремы Хана—Банаха более геометрично и связано с идеей размещения замкнутой гиперплоскости между

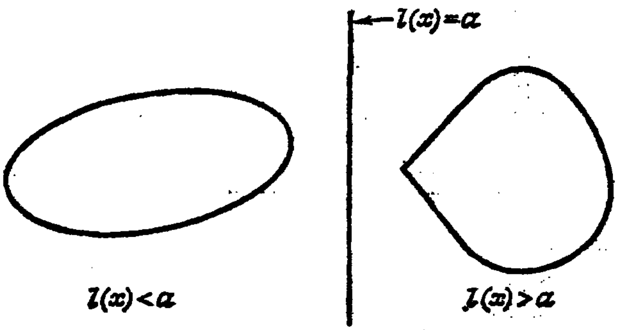

Рис. V.1.

непересекающимися выпуклыми множествами (рис. V.1). **Гиперплоскость** есть множество точек, для которых $l(x)=a$, где $l(x)$ — некоторый *вещественнозначный* (даже в комплексном случае) непрерывный линейный функционал.

Определение. Будем говорить, что два множества A и B в локально выпуклом пространстве **разделены гиперплоскостью**, если существуют непрерывный вещественнозначный функционал l и число $a \in \mathbb{R}$, такие, что $l(x) \leqslant a$ для $x \in A$ и $l(x) \geqslant a$ для $x \in B$. Если $l(x) < a$ для $x \in A$ и $l(x) > b$ для $x \in B$, будем говорить, что A и B **строго разделены.**

Теорема V.4 (теорема о разделяющей гиперплоскости). Пусть A и B — непересекающиеся выпуклые множества в локально выпуклом пространстве X. Тогда

(a) если A открыто, то A и B могут быть разделены гиперплоскостью;

(b) если A и B оба открыты, то они могут быть строго разделены гиперплоскостью;

(c) если A компактно, а B замкнуто, то A и B могут быть строго разделены гиперплоскостью.

Доказательство. (a) Выберем $-x \in A - B = \{y - z \mid y \in A,\ z \in B\}$. Пусть $C = A - B + \{x\}$. Тогда C — открытое и, значит, поглощающее, выпуклое, $0 \in C$ и $x \notin C$, поскольку A и B не пересекаются. Пусть ρ_C — функционал Минковского для C. Тогда $\rho_C(z+y) \leqslant \rho_C(z) + \rho_C(y)$ и $\rho_C(az) = a\rho_C(z)$, если $a > 0$. Определим l на $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ равенством $l(\lambda x) = \lambda$. Поскольку $x \notin C$, имеем $\rho_C(x) \geqslant 1$, и потому $l(x) \leqslant \rho_C(x)$. Таким образом, по теореме III.5, l продолжается на все X, причем $l(y) \leqslant \rho_C(y)$. Так как $C \cap (-C) \subset l^{-1}[-1,\ 1]$, функционал l непрерывен. В силу неравенства, $l(y) \leqslant 1$, если $y \in C$. В итоге $l(a) \leqslant l(b) + (1 - l(x))$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Так как $l(x) = 1$, то

$$\sup_{a \in A} l(a) \leqslant \inf_{b \in B} l(b),$$

и, значит, l разделяет A и B.

(b) Легко видеть, что если l — ненулевой линейный функционал и A открыто, то $l[A]$ открыто. Поскольку $l[A]$ и $l[B]$ открыты и могут пересекаться не более чем в одной точке, они вообще не пересекаются.

(c) Для каждого $a \in A$ найдем выпуклую окрестность нуля U_a, такую, что $(a + U_a) \cap B = \varnothing$. Множества $a + U_a$ покрывают A. Выберем конечное покрытие $a_1 + U_{a_1}, \ldots, a_n + U_{a_n}$. Пусть $U = U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_n}$. Тогда $A + {}^1/_2 U$ и $B - {}^1/_2 U$ открыты и выпуклы, а $(A + {}^1/_2 U) \cap (B - {}^1/_2 U) = \varnothing$. В силу (b), $A + {}^1/_2 U$ и $B - {}^1/_2 U$ строго разделены, поэтому строго разделены A и B. ∎

В гл. XVI мы обсудим «алгебраическую теорему Хана — Банаха», т. е. такую форму теоремы о разделении, в которой не упоминаются ни открытые множества, ни непрерывные функции.

V.2. Пространства Фреше

Как мы видели в § III.5, полные метрические пространства обладают специальными свойствами, которые в случае банаховых пространств приводят к весьма сильным результатам. Поэтому интересно выделить те локально выпуклые пространства, которые одновременно являются полными метрическими пространствами. Прежде всего нужно выяснить, какие локально выпуклые пространства метризуемы, т. е. имеют топологию, порождаемую метрикой. Это, конечно, не только те пространства, топология которых задается нормой, ибо если ρ — метрика, то $\rho(x, 0)$ — не обязательно норма, так как $\rho(\lambda x, 0)$ не обязательно равно $\lambda\rho(x, 0)$.

Теорема V.5. Пусть X — локально выпуклое пространство. Следующие условия равносильны:

(a) X метризуемо;

(b) нуль имеет счетную базу окрестностей;

(c) топология на X порождается некоторым счетным семейством полунорм.

Доказательство. Покажем, что (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) есть свойство любого метрического пространства.

(b) $\Rightarrow$ (c) вытекает из следующих двух фактов: если $\mathcal{U}$ — любая база окрестностей, состоящая из выпуклых уравновешенных множеств, то калибровки множеств $U \in \mathcal{U}$ порождают исходную топологию; в случае когда нуль имеет счетную базу окрестностей, можно найти счетную же базу окрестностей, состоящую из выпуклых уравновешенных множеств.

(c) $\Rightarrow$ (a). Пусть $\{\rho_n\}_{n=1, 2, \ldots}$ — семейство полунорм, порождающих топологию. Определим ρ на $X \times X$ равенством

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left[\frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)}\right]. \tag{V.1}$$

Поскольку $a/(1+a) < 1$ для любого $a > 0$, имеем $\rho(x, y) < \infty$. Легко видеть, что ρ — метрика и что она порождает ту же топологию, что и $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ (задача 10 a). ∎

В метризуемом пространстве два понятия полноты совпадают (задача 10 b):

Предложение. Направленность $\{x_\alpha\}$ есть направленность Коши в метрике ρ из (V.1) тогда и только тогда, когда она есть направленность Коши в каждой ρ_n. Таким образом, метризуемое локально выпуклое пространство X полно как метрическое пространство тогда и только тогда, когда оно полно как локально выпуклое пространство.

Определение. Полное метризуемое локально выпуклое пространство называется **пространством Фреше.**

Пространство Фреше как полное метрическое пространство удовлетворяет теореме Бэра о категории, и потому для него можно доказать аналоги теорем, установленных в § III.5.

Теорема V.6. Если X и Y — пространства Фреше и $f\colon X \to Y$ — непрерывная биекция, то f — открытое отображение.

Теорема V.7. Пусть X и Y — пространства Фреше; пусть $\mathcal{F}$ — семейство непрерывных отображений из X в Y, такое, что для каждой непрерывной полунормы ρ на Y и каждого $x \in X$ множество $\{\rho(F(x)) \mid F \in \mathcal{F}\}$ ограничено. Тогда для каждой ρ на Y существуют непрерывная полунорма d на X и $C > 0$, такие, что

$$\rho(Fx) \leqslant Cd(x)$$

для всех $x \in X$ и $F \in \mathcal{F}$.

О применениях теоремы V.6 см. задачу 12. Обращаясь к применению теоремы V.7, прежде всего отметим, что сюда без изменений переносится следствие теоремы III.9:

Следствие. Если X — пространство Фреше, то любой раздельно непрерывный билинейный функционал B непрерывен, т. е. $|B(f, g)| \leqslant C\rho_1(f)\rho_2(g)$ для некоторых непрерывных полунорм ρ_1, ρ_2.

Другое следствие теоремы V.7 можно рассматривать как замаскированную теорему I.27:

Теорема V.8. Пусть X — пространство Фреше, и пусть $f_n \in X^*$ — *последовательность*, сходящаяся к $f \in X^*$ в топологии $\sigma(X^*, X)$. Тогда $f_n \to f$ равномерно на компактных подмножествах в X.

Доказательство. Поскольку $f_n(x)$ сходится, она ограничена, поэтому можно найти непрерывную полунорму ρ на X, такую, что $|f_n(x)| \leqslant C\rho(x)$. Если заданы компактное подмножество $D \subset X$ и некоторое ε, выберем конечное покрытие D множествами $U_1, \ldots, U_m$, такое, чтобы из $x, y \in U_k$ вытекало $\rho(x-y) \leqslant \varepsilon/3C$. Далее, выберем такие $x_k \in U_k$ и N, чтобы при $n > N$ было $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon/3$ для $i = 1, \ldots, m$. Тогда $\varepsilon/3$-прием даст

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ если } n > N. \blacksquare$$

V.3. Быстро убывающие функции и обобщенные функции умеренного роста

Здесь мы хотим обсудить очень удобное пространство функций — пространство $\mathcal{S}$ быстро убывающих функций и его сопряженное — пространство обобщенных функций умеренного роста. Для того чтобы определение прошло гладко, введем сначала некоторые обозначения. Функцию на $\mathbb{R}^n$ будем записывать просто как $f(x)$, $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Множество всех наборов из n неотрицательных целых чисел $\alpha = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ обозначим через I_+^n; $I_+^1 = I_+$.

Положим $|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$. Далее, пусть D^α обозначает $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, а $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$.

Определение. Множество **быстро убывающих функций** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ есть множество бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^n$, для которых при всех α, $\beta\in I_+^n$

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|<\infty.$$

Таким образом, функции из $\mathscr{S}$—это те функции, которые вместе со своими производными убывают быстрее любого обратного полинома.

Теорема V.9. Векторное пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ вместе с естественной топологией, задаваемой полунормами $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, есть пространство Фреше.

Доказательство. Читатель легко проверит, что $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$—полунормы. Поскольку их счетное число, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ метризуемо (теорема V.5). Следовательно, остается показать, что $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ полно. Предположим, что f_m—последовательность Коши по каждой $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$. Тогда $x^\alpha D^\beta f_m\longrightarrow g_{\alpha,\beta}$ равномерно при $m\longrightarrow\infty$, поскольку $C(\mathbb{R}^n)$ полно. Если удастся показать, что $g=g_{0,0}$—функция класса C^∞ и $g_{\alpha,\beta}=x^\alpha D^\beta g$, то g будет лежать в $\mathscr{S}$, а $\lim\limits_{m\to\infty}f_m$ в топологии пространства $\mathscr{S}$ будет равен g. Докажем, что g—класса C^1 и $dg/dx=g_{0,1}$ в случае $n=1$. Общий случай рассматривается аналогично. Известно, что

$$f_n(x)=f_n(0)+\int_0^x f_n'(t)\,dt.$$

Поскольку $f_n'\longrightarrow g_{0,1}$ равномерно, имеем

$$g(x)=g(0)+\int_0^x g_{0,1}(t)\,dt.$$

Таким образом, g принадлежит классу C^1 и $g'=g_{0,1}$. ∎

По техническим причинам часто удобно иметь направленное семейство полунорм, поэтому для k, $m\in I_+$ и $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ мы полагаем

$$\|f\|_{k,m}=\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant k\\|\beta|\leqslant m}}\|f\|_{\alpha,\beta}.$$

Определение. Топологическое сопряженное пространство к $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, обозначаемое через $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, называется **пространством**

обобщенных функций (распределений) умеренного роста.

Для того чтобы линейный функционал T на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ принадлежал $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, он должен быть непрерывным. По теореме V.2 это эквивалентно существованию полунормы $\|\cdot\|_{k,m}$ со свойством $|T(\varphi)| \leqslant C\|\varphi\|_{k,m}$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Обсудим несколько примеров, ограничиваясь случаем $n=1$; читатель сможет легко обобщить их на случай произвольного n.

Пример 1 ($\mathcal{S}$). Пусть $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$; определим функционал $g(\cdot)$ на $\mathcal{S}$ формулой

$$g(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\,dx. \tag{V.2}$$

Ясно, что $g(\cdot)$ линеен и

$$|g(\varphi)| \leqslant \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\|\varphi\|_\infty,$$

а $\|\cdot\|_\infty$ — непрерывная полунорма. Более того, если $g_1 \neq g_2$ как функции из $\mathcal{S}$, то $g_1(\cdot) \neq g_2(\cdot)$ как элементы в $\mathcal{S}'$, ибо $\mathcal{S}$ плотно в L^2 и из $g_1 \neq g_2$ в $\mathcal{S}$ вытекает, что $g_1 \neq g_2$ в L^2, откуда следует, что $g_1 \neq g_2$ в $(L^2)^*$, а потому $g_1 \neq g_2$ в $\mathcal{S}'$.

Итак, мы видим, что $\mathcal{S}$ допускает естественное вложение в $\mathcal{S}'$. Если $\mathcal{S}'$ снабжено топологией $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, то это вложение непрерывно, поскольку, как мы увидим дальше, $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ — непрерывная полунорма на $\mathcal{S}$. Более того, $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{S}'$ в топологии $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ (см. задачи 16 и 19 или следствие 1 теоремы V.14 в дополнении к этому разделу). Это обстоятельство подсказывает такой способ продолжения непрерывных отображений $T\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ на все $\mathcal{S}'$: поскольку естественное вложение $\iota\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ непрерывно, отображение $\iota \circ T\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ тоже непрерывно. Так как $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{S}'$, существует по крайней мере одно непрерывное продолжение $\iota \circ T\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. Чтобы найти это непрерывное продолжение, нужен какой-нибудь способ строить непрерывные отображения из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$. Один простой способ состоит в следующем. Предположим, что $S\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ непрерывно. Определим **сопряженное отображение** $S'\colon l \mapsto S'(l)$, $l \in \mathcal{S}'$, равенством $[S'(l)](g) = l(Sg)$ для всех $g \in \mathcal{S}$. Очевидно, что если $l_\alpha \to l$ в топологии $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, то $S'(l_\alpha) \to S'(l)$ в той же топологии. Таким образом, для продолжения T мы ищем такое отображение $S\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, чтобы $S' \restriction \mathcal{S} = T$, и тогда продолжаем T с помощью S'. В случае когда не возникает недоразумений, мы обозначаем это продолжение тем же символом T. Дальнейшее обсуждение сопряженных отображений проводится в § VI.2.

Изложенная идея станет яснее после рассмотрения приводимых ниже примеров. Другая топология на $\mathcal{S}'$ вводится в § V.7

(топология $\beta(\mathscr{S}', \mathscr{S}) \equiv \tau(\mathscr{S}', \mathscr{S})$), и там мы увидим, что сопряженное отображение S' непрерывно, если такая топология вводится и на области определения, и на области значений (см. задачу 17).

Пример 2 (L^p). Множество $\mathscr{S}$ — это подмножество каждого $L^p(\mathbb{R})$, и тождественное отображение $\mathscr{S}$ в L^p непрерывно, ибо при $p=1$

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1}[(1+x^2)|f|]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \pi(\|f\|_\infty + \|x^2 f\|_\infty),$$

а при произвольном p

$$\|f\|_p \leqslant \|\,|f|^{1/p}|f|^{1-1/p}\|_p \leqslant \|f\|_1^{1/p}\|f\|_\infty^{1-1/p}.$$

Если $g \in L^q$, $q^{-1}+p^{-1}=1$ и $\varphi \in \mathscr{S}$, то

$$\left|\int g(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \|g\|_q\|\varphi\|_p.$$

Следовательно, $\varphi \mapsto \int g(x)\varphi(x)\,dx$ — непрерывное отображение $\mathscr{S}$ в $\mathbb{C}$, и тем самым определено непрерывное вложение L^q в $\mathscr{S}'$.

Итак, $\mathscr{S}'$ содержит образы различных пространств функций при естественных вложениях. Обычно вложения игнорируются и говорят просто о функциях $g(x)$ из $\mathscr{S}'$.

Пример 3 (дельта-функция). Пусть $b \in \mathbb{R}$. Определим линейный функционал δ_b равенством $\delta_b(\varphi)=\varphi(b)$. Поскольку $|\delta_b(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_{0,0}$, имеем $\delta_b(\cdot) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. *Функции* $g(x)$, такой, что $\delta_b(\varphi)=\int g(x)\varphi(x)\,dx$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}$, не существует, хотя существует мера μ_b (чисто точечная), для которой

$$\delta_b(\varphi) = \int \varphi(x)\,d\mu_b(x).$$

Однако символика (V.2) из примера 1 так соблазнительна, что часто пишут

$$\delta_b(\varphi) = \int \varphi(x)\,\delta(x-b)\,dx, \qquad \text{(V.3)}$$

где $\delta(x-b)$ — не функция; (V.3) нужно рассматривать просто как символическую запись. Символ $\delta(x-b)$ называют **дельта-функцией в точке** b.

Пример 4 (полиномиально ограниченные меры). Предположим, что ν — любая конечная мера. Тогда $f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\nu$ — линейный функционал на $\mathscr{S}$, и поскольку $\left|\int f\,d\nu\right| \leqslant \nu(\mathbb{R})\|f\|_\infty$, этот функционал лежит в $\mathscr{S}'$. В общем случае, если ν — такая мера на $\mathbb{R}$, что $\nu([-D, D]) \leqslant C(D^n+1)$ для некоторых C и n и всех $D \in \mathbb{R}_+$, то $f \mapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} f d\nu$ лежит в $\mathscr{S}'$.

Пример 5 (производная от $\delta(x)$). Для того чтобы убедиться, что не всякий элемент $g \in \mathscr{S}'$ отвечает линейной комбинации мер, рассмотрим $\delta'(f) = -f'(0)$. Это непрерывный линейный функционал, но он не отвечает никакой мере (задача 21).

Пример 6 ($\mathscr{P}(1/x)$). Главное значение интеграла в смысле Коши задается формулой

$$\mathscr{P}\left(\frac{1}{x}\right):\ f \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{1}{x} f(x)\, dx.$$

Для того чтобы убедиться, что правая часть конечна для любой $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, а все соотношение задает распределение, заметим, что

$$\int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{1}{x} f(x)\, dx = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)-f(-x)}{x}\, dx.$$

Поскольку $[f(x)-f(-x)]/x \to 2f'(0)$ при $x \to 0$, можно написать

$$\mathscr{P}\left(\frac{1}{x}\right)(f) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(x)-f(-x)}{x}\, dx,$$

откуда и следует конечность. Далее,

$$\left|\frac{1}{x}[f(x)-f(-x)]\right| \leqslant \frac{1}{x} \int\limits_{-x}^{x} |f'(t)|\, dt \leqslant 2\|f'\|_\infty,$$

и потому

$$\left|\mathscr{P}\left(\frac{1}{x}\right)(f)\right| \leqslant 2\int\limits_{0}^{1} \|f'\|_\infty dx + \left|\int\limits_{1}^{\infty} (xf(x))\frac{dx}{x^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|f\|_{1,0} + \|f\|_{0,1}.$$

Следовательно, $\mathscr{P}(1/x)$ — распределение. При этом выполняется известная формула:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{x-x_0+i\varepsilon} = \mathscr{P}\left(\frac{1}{x-x_0}\right) - i\pi\delta(x-x_0), \qquad \text{(V.4)}$$

в которой все величины рассматриваются как распределения, а $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}$ понимается в топологии $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$ (задача 22).

Пример 7 (O_M^n). Пусть O_M^n — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, которые полиномиально ограничены вместе со своими производными, т. е. $f \in O_M^n$ означает, что f класса C^∞ и что для каждого $\alpha \in I_+^n$ существуют $N(\alpha)$ и $C(\alpha)$, такие, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \leqslant C[1+x^2]^N,$$

где $x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Ясно, что $O_M^n \subset \mathscr{S}'$.

Множество O_M полезно по ряду причин. Если $F \in O_M$, то нетрудно видеть, что $Ff \in \mathscr{S}$, когда $f \in \mathscr{S}$, и $f \mapsto Ff$ — непрерывное отображение $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$ (задача 23a). На самом деле измеримая функция F определяет непрерывное отображение $f \mapsto Ff$ множества $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ тогда и только тогда, когда $F \in O_M$ (задача 23b).

Пусть $F \in O_M$. Умножение на F переводит $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ непрерывно. Это дает первый способ проверки идеи, изложенной вслед за примером 1. Можно ли найти отображение S: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, такое, чтобы для любых $f, g \in \mathscr{S}$ было $(Ff)(g) = (S'f)(g) = f(Sg)$, т. е. чтобы $\int F(x) f(x) g(x)\,dx = \int f(x)(Sg)(x)\,dx$? Ответ очевиден: надо взять $(Sg)(x) = F(x) g(x)$.

Операция 1. Пусть $F \in O_M^n$, и пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Определяем $FT \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$(FT)(\varphi) = T(F\varphi).$$

Пространство $\mathscr{S}$ было выбрано, в частности, для того, чтобы $f \mapsto D^\alpha f$ было непрерывным. Заметим, что $\|D^\alpha f\|_{\gamma,\delta} = \|f\|_{\gamma,\delta+\alpha}$, где $\delta+\alpha = \langle \delta_1+\alpha_1, \ldots, \delta_n+\alpha_n \rangle$. Для продолжения D^α на $\mathscr{S}'$ мы ищем такое S: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, чтобы для $f, g \in \mathscr{S}$ было $(D^\alpha f)(g) = f(Sg)$, т. е. $\int (D^\alpha f)(x) g(x)\,dx = \int f(x)(Sg)(x)\,dx$. На первый взгляд это кажется трудным, но интегрирование по частям дает $\int (D^\alpha f) g = (-1)^{|\alpha|} \int f(D^\alpha g)$, поэтому мы полагаем $S = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$.

Операция 2. Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in I_+^n$. **Слабая производная** $D^\alpha T$, или **производная в смысле обобщенных функций**, определяется соотношением

$$(D^\alpha T)(f) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha f).$$

В символическом виде

$$\int (D^\alpha T)(x) f(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int T(x) \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)\,dx.$$

Таким образом, мы определили производную, которая на O_M^n совпадает с обычной производной и для которой по определению интегрирование по частям не дает граничных членов на бесконечности.

Пример 8. Пусть

$$g(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Тогда g непрерывна, но дифференцируема в классическом смысле не везде. Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\varphi(x)\,dx\leqslant\|x\varphi\|_{L^1}$, функция $g\in\mathscr{S}'$, так что она имеет производную в $\mathscr{S}'$. По определению

$$\left(\frac{d}{dx}g\right)(\varphi)=-g\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=-\int\limits_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx=\int\limits_0^{\infty}\varphi(x)\,dx.$$

Следовательно, $dg(x)/dx=H(x)$, где H — **функция Хевисайда**:

$$H(x)=\begin{cases} 1, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Функция H даже не непрерывна, но она тоже имеет производную в $\mathscr{S}'$, задаваемую соотношением

$$\left(\frac{dH}{dx}\right)(\varphi)=-H\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=-\int\limits_0^{\infty}\varphi'(x)\,dx=\varphi(0),$$

так что $dH/dx=\delta$. Но и δ-функция имеет производную; она описана в примере 5.

Последний пример показывает, что даже вообще не функция δ-функция является второй производной от непрерывной функции. И это типично для обобщенных функций умеренного роста, ибо справедлива

Теорема V.10 (теорема регулярности для обобщенных функций). Пусть $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда $T=D^\beta g$ для некоторой полиномиально ограниченной непрерывной функции g при некотором $\beta\in I_+^n$, т. е. для всех $\varphi\in\mathscr{S}$

$$T(\varphi)=\int(-1)^{|\beta|}g(x)\,(D^\beta\varphi)(x)\,d^nx.$$

Доказательство дано в дополнении к этому разделу (см. также задачи 24 и 25).

Операция иного типа порождается переносами. Пусть U_a: $\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ задано правилом $(U_af)(x)=f(x-a)$. Тогда $\int(U_af)(x)\,g(x)\,dx=\int f(x)\,(U_{-a}g)(x)\,dx$, если f, $g\in\mathscr{S}$. В итоге получается

Операция 3 (перенос). При $T \in \mathcal{S}'$ функционал $U_a T$ определяется соотношением

$$(U_a T)(\varphi) = T(U_{-a}\varphi).$$

Аналогично, если A — обратимое линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то равенство $(V(A)f)(x) = f(A^{-1}x)$ определяет отображение $V(A)$: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. В результате приходим к следующему определению:

Операция 4 (линейная замена координат). Если $T \in \mathcal{S}'$, то $V(A)T$ задается равенством

$$[V(A)T](\varphi) = |\det A|\, T(V(A^{-1})\varphi).$$

Этим $V(A)$ продолжается с $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}'$ (см. задачу 28а).

В гл. IX мы обсудим две другие операции на $\mathcal{S}'$: свертку и преобразование Фурье.

Говорить о равенстве распределения нулю в какой-то точке x бессмысленно, но равенство нулю в окрестности x имеет смысл.

Определение. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ **равно нулю в** Ω, если $T(\varphi) = 0$ для всех φ, имеющих носитель в Ω (т. е. для φ, равных нулю вне Ω). **Носитель** T (обозначается $\operatorname{supp} T$) есть дополнение наибольшего открытого множества, на котором T равно нулю. Если $T - S$ равно нулю на Ω, говорят, что $T = S$ на Ω.

Введенные понятия обобщают понятия, относящиеся к обычным функциям $\varphi \in \mathcal{S}$ (задача 28b). Сверх того, справедлив следующий простой и интуитивно ясный результат (задача 29):

Теорема V.11. Пусть $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} T = \{0\}$. Тогда

$$T = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha (D^\alpha \delta)$$

с подходящими c_α и m.

Пример 9 (перенормировка функционала $(1/x)_+$). Рассмотрим функцию $(1/x)_+ = H(x)x^{-1}$. Поскольку $\int\limits_0^1 (1/x)\,dx = \infty$, функция $(1/x)_+$ *не определяет* распределения. Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R} \setminus 0) = \{f \in \mathcal{S} \mid \operatorname{supp} f \subset \mathbb{R} \setminus 0\}$. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \setminus 0)$, то $\int (1/x)_+ f(x)\,dx$ имеет смысл. Следовательно, $(1/x)_+$ определяет линейный функционал на $\mathcal{S}(\mathbb{R} \setminus 0)$, который, как мы увидим ниже, непрерывен. В силу теоремы Хана — Банаха этот функционал, заданный на $\mathcal{S}(\mathbb{R} \setminus 0)$, имеет продолжения на все пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, которые мы называем «перенормировками $(1/x)_+$». В качестве явных примеров продолжений рассмотрим

$$\left(\frac{1}{x}\right)_{+,M}(f)=\int_0^M \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx+\int_M^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Поскольку эти отображения непрерывны на $\mathscr{S}$, функционал $(1/x)_+$ непрерывен на $\mathscr{S}(\mathbb{R}\diagdown 0)$. Каков произвол в перенормировке? Если T и S — две перенормировки функционала $(1/x)_+$, их разность $T-S$ равна нулю на $\mathscr{S}(\mathbb{R}\diagdown 0)$ и, таким образом, имеет носитель, равный $\{0\}$; поэтому $T-S=\sum_{|\alpha|<m} c_\alpha D^\alpha\delta$. Например,

$$\left(\frac{1}{x}\right)_{+,M}-\left(\frac{1}{x}\right)_{+,N}=-\ln\left(\frac{M}{N}\right)\delta(x).$$

При принятом определении перенормированный функционал $(1/x)_+$ содержит бесконечное число свободных констант. Однако можно доказать, что $\int_0^\infty [f(x)/x]\,dx<\infty$, если $f\in\mathscr{S}$ и $f(0)=0$; поэтому на самом деле имеет смысл продолжить $(1/x)_+$ с множества $\{f\in\mathscr{S}\mid f(0)=0\}$ на $\mathscr{S}$. Если принять такое условие, то единственной перенормировкой функционала $(1/x)_+$ будет $(1/x)_{+,M}$, причем она содержит только одну свободную константу (о связи между этими двумя определениями см. задачу 32).

Именно в духе примера 9 интерпретировали Боголюбов и Хепп перенормировки диаграмм Фейнмана в x-пространстве; перенормировочные константы, например перенормированные масса и заряд, выступают у них как свободные константы, аналогичные $\ln(M/N)$ в примере 9. Детали см. в ссылках, указанных в Замечаниях.

В заключение еще одна полезная теорема о $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$. Для того чтобы оценить ее значение, давайте рассмотрим сначала случай пространства L^p, где аналогичная теорема не справедлива. Предположим, что $p^{-1}+q^{-1}=1$, $p<\infty$, $q<\infty$ и $F\in L^q(\mathbb{R}^2)=[L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R})]^*$. Пусть $f, g\in L^p(\mathbb{R})$; тогда $f(x)g(y)\in L^p(\mathbb{R}^2)$, так что

$$F(f, g)=\int F(x, y)f(x)g(y)\,dx\,dy<\infty.$$

Более того,

$$|F(f, g)|\leqslant\|F\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\|f\|_p\|g\|_p,$$

и потому F определяет непрерывную билинейную форму на L^p. Конечно, не каждая билинейная форма относится к такому типу. Например, если $p=2$, билинейная форма $(\bar{f}, g)=\int f(x)g(x)\,dx$ не может быть представлена в виде $(\bar{f}, g)=\int F(x, y)f(x)g(y)\,dx\,dy$, где $F\in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Ситуация в $\mathcal{S}(\mathrm{R})$ и $\mathcal{S}(\mathrm{R}\times\mathrm{R})^* = \mathcal{S}'(\mathrm{R}^2)$ совершенно иная:

Теорема V.12 (теорема о ядре). Пусть $B(f, g)$ — раздельно непрерывный билинейный функционал на $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n) \otimes \mathcal{S}(\mathrm{R}^m)$. Тогда существует единственное распределение $T \in \mathcal{S}'(\mathrm{R}^{n+m})$, такое, что $B(f, g) = T(f \otimes g)$, где

$$(f \otimes g)(x_1, \ldots, x_{n+m}) = f(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}).$$

То, что раздельная непрерывность влечет за собой непрерывность, вытекает из того, что $\mathcal{S}$ — пространство Фреше (теорема V.9), и из следствия теоремы V.7. А то, что непрерывный функционал имеет требуемую форму, доказано в дополнении к этому разделу (следствие 4 теоремы V.14). Теорему V.12 можно расширить на полилинейные функционалы (задачи 34 и 35).

Дополнение к § V.3. N-представление для $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$

В этом дополнении доказано несколько теорем о пространствах $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$. Доказательства основаны на реализации $\mathcal{S}$, а значит, и $\mathcal{S}'$ как пространств последовательностей (а именно в виде пространства s из § III.1). Такое построение в свою очередь разбивается на два шага. Первый шаг — это задание топологии в $\mathcal{S}$ с помощью эквивалентного исходному семейства L^2-норм. Для того чтобы решительно отличать эти новые нормы от норм $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, мы вместо $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ будем писать

$$\|f\|_{\alpha,\beta,\infty} = \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty$$

и определим

$$\|f\|_{\alpha,\beta,2} = \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^2(\mathrm{R}^n)}.$$

Тогда справедлива

Лемма 1. Семейства полунорм $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,\infty}\}$ и $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2}\}$ на $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n)$ эквивалентны.

Доказательство. Чтобы не усложнять обозначений, проведем доказательство для случая $n=1$. Поскольку $(1+x^2)^{-1} \in L^2$, имеем $\|f\|_2 \leqslant \|(1+x^2)^{-1}\|_2 \|(1+x^2) f\|_\infty$, так что

$$\|f\|_{\alpha,\beta,2} \leqslant C(\|f\|_{\alpha,\beta,\infty} + \|f\|_{\alpha+2,\beta,\infty}).$$

С другой стороны, $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f'(t)\,dt$, так что

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_1 \leqslant \|(1+x^2) f'\|_2 \|(1+x^2)^{-1} f\|_2,$$

и, поскольку $(x^\alpha D^\beta f)' = \alpha x^{\alpha-1} D^\beta f + x^\alpha D^{\beta+1} f$, получаем

$$\|f\|_{\alpha,\beta,\infty} \leqslant C(\alpha\|f\|_{\alpha-1,\beta,2} + \|f\|_{\alpha,\beta+1,2} + \alpha\|f\|_{\alpha+1,\beta,2} + \|f\|_{\alpha+2,\beta+1,2}). \blacksquare$$

На втором шаге используются специальные свойства функций Эрмита (собственных функций гармонического осциллятора). Рассмотрим отображения A: $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ и $A^\dagger$: $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$, определяемые равенствами

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right), \qquad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right),$$

и $N = A^\dagger A$. Тогда $\|f\|_n \equiv \|(N+1)^n f\|_2$ — полунорма на $\mathscr{S}$.

Лемма 2. Полунормы $\{\|\cdot\|_n\}$ образуют на $\mathscr{S}$ направленное семейство, эквивалентное семейству полунорм $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2}\}$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться неравенством $\|A_1^\# \ldots A_m^\# f\|_2 \leqslant \|(N+m)^{m/2} f\|_2$, где $A^\#$ означает либо A, либо $A^\dagger$. Детали мы оставляем читателю (задача 36). ∎

Рассмотрим теперь функцию ϕ_0, определенную требованиями $A\phi_0 = 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\phi_0)^2 dx = 1$, т. е. $\phi_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$, и пусть

$$\phi_n = (n!)^{-1/2} (A^\dagger)^n \phi_0 = (2^n n!)^{-1/2} (-1)^n \pi^{-1/4} e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

Функции $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называются **функциями Эрмита**, или волновыми функциями гармонического осциллятора, поскольку

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\phi_n = (2n+1)\phi_n.$$

Имеет место такая

Лемма 3. Множество $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. См. задачи 40 или 41 гл. IX или задачу 20 гл. XIII. ∎

Отметим, что $N\phi_n = n\phi_n$. Предположим теперь, что $f \in \mathscr{S}$, и рассмотрим L^2-сходящееся разложение $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n$, где $a_n = (\phi_n, f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi_n(x)} f(x)\, dx$. Поскольку N^m: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, функция $N^m f$ лежит в $\mathscr{S}$ и, следовательно, в L^2. Но $N^m f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n^m \phi_n$, так что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 n^{2m} < \infty$. В частности, $\sup\limits_n |a_n| n^m < \infty$. Таким образом доказана первая часть следующей теоремы:

Теорема V.13 (теорема об N-представлении для $\mathscr{S}$). Пусть s_k — множество мультипоследовательностей $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I_+^k}$, таких, что

$$\sup_{\alpha \in I_+^k} |a_\alpha| \, |\alpha|^m < \infty$$

для каждого m. Введем топологию на s_k при помощи полунорм

$$\|\{a_\alpha\}\|_\beta^2 = \sum_\alpha (\alpha+1)^{2\beta} |a_\alpha|^2,$$

где $\beta \in I_+^k$ и $(\alpha+1)^{2\beta} = \prod_{i=1}^k (\alpha_i+1)^{2\beta_i}$. Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^k)$. Тогда последовательность $\{a_\alpha = (\phi_\alpha, f)\}$, где $\phi_\alpha(x) = \prod_{i=1}^k \phi_{\alpha_i}(x_i)$, лежит в s_k и отображение $f \mapsto \{a_\alpha\}$ — топологический изоморфизм. **Разложение Эрмита** $f = \sum_\alpha a_\alpha \phi_\alpha$ сходится в $\mathscr{S}$. Числа $\{a_\alpha\}$ называются **коэффициентами Эрмита.**

Доказательство. Рассмотрим случай $k=1$. В силу предшествующего обсуждения, если $f \in \mathscr{S}$ и $a_n = (\phi_n, f)$, то $\{a_n\} \in s$. Сверх того, в обозначениях леммы 2, $\|\{a_n\}\|_m = \|f\|_m$. Поскольку $\|\cdot\|_m$ — нормы на $\mathscr{S}$, отображение $f \mapsto \{a_n\}$ инъективно. Пусть теперь $\{a_n\}_{n=0}^\infty \in s$, и пусть $f_N = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n$. Простое вычисление показывает, что

$$\|f_N - f_M\|_m^2 = \sum_{n=N+1}^M |a_n|^2 (n+1)^{2m} \to 0$$

при $N, M \to \infty$. Таким образом, f_N — последовательность Коши для каждой из $\|\cdot\|_m$, а значит, последовательность Коши в $\mathscr{S}$ (в силу лемм 1 и 2). Но $\mathscr{S}$ полно, поэтому $f_N \to f$ для некоторой $f \in \mathscr{S}$. Но тогда $f_N \to f$ в L^2, так что $(\phi_n, f) = a_n$. В итоге образ $\mathscr{S}$ при нашем отображении $\mathscr{S} \to s$ есть все s. Эквивалентность топологий следует из равенства норм $\|\cdot\|_m$ на $\mathscr{S}$ и на s. ∎

Теперь с пространством последовательностей можно отождествить и $\mathscr{S}'$.

Теорема V.14 (теорема об N-представлении для $\mathscr{S}'$). Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^k)$ и $b_\alpha = T(\phi_\alpha)$ для каждого $\alpha \in I_+^k$. Тогда $|b_\alpha| \leqslant C(\alpha+1)^\beta$ для некоторого $\beta \in I_+^k$ и всех α. Обратно, если $|b_\alpha| \leqslant C(\alpha+1)^\beta$ для всех α, то существует единственное $T \in \mathscr{S}'$, такое, что $T(\phi_\alpha) = b_\alpha$. Если $T \in \mathscr{S}'$ и $b_\alpha = T(\phi_\alpha)$ — его **коэффициенты Эрмита**, то $\sum_\alpha b_\alpha \phi_\alpha$ сходится в топологии $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$ к T.

Доказательство. Опять мы рассмотрим только случай $k=1$. Пусть $T\in\mathcal{S}'$. Тогда $|T(\phi)|\leqslant C\|\phi\|_m$ для некоторых m и C, поскольку $\{\|\cdot\|_m\}$ — направленное множество. Так как $\|\phi_n\|_m=(n+1)^m$, то $|b_n|\leqslant C(n+1)^m$. Обратно, предположим, что $|b_n|\leqslant C(n+1)^m$. Для $\{a_n\}\in s$ определим $B(\{a_n\})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_na_n$. Тогда

$$|B(\{a_n\})|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|b_n||a_n|\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^m|a_n|\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2m+2}|a_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-2}\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\pi^2}{6}C\|\{a_n\}\|_{m+1}.$$

В итоге B определяет непрерывный линейный функционал на s. В силу связи между $\mathcal{S}$ и s, в $\mathcal{S}'$ существует такое T, что $T\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_n$; в частности, $T(\phi_n)=b_n$. Слабую сходимость $\sum\limits_n b_n\phi_n$ к T установить легко. ∎

Теперь с помощью описанной техники мы в состоянии доказать ряд интересных теорем о свойствах $\mathcal{S}$. В основе доказательств лежат *два* важных упрощения: (1) по сравнению с функциями последовательности удобнее в обращении; (2) два требования на $\mathcal{S}$ — убывание на бесконечности и принадлежность классу C^∞, в случае s заменяются *одним* условием убывания.

Следствие 1. $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{S}'$ в топологии $\sigma(\mathcal{S}',\mathcal{S})$.

Доказательство. Если $b_\alpha=T(\phi_\alpha)$, то сумма $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N}b_\alpha\phi_\alpha$ принадлежит $\mathcal{S}$ и слабо сходится к $T\in\mathcal{S}'$ при $N\to\infty$. ∎

Следствие 2. $\mathcal{S}$ сепарабельно в топологии Фреше. $\mathcal{S}'$ сепарабельно в топологии $\sigma(\mathcal{S}',\mathcal{S})$ (и в топологии $\tau(\mathcal{S}',\mathcal{S})$, которая вводится в § V.7).

Следствие 3. Справедлива теорема о регулярности распределений — теорема V.10.

Доказательство. Опять-таки рассмотрим только случай $k=1$. Поскольку $\|f\|_\infty\leqslant C\|(1+x^2)f'\|_2$, то с помощью A, $A^\dagger$ и оценок из доказательства леммы 2 можно вывести, что $\|\phi_n\|_\infty\leqslant\leqslant C'(n+1)^{3/2}$. (Более детальное изучение ϕ_n показывает, что $\|\phi_n\|_\infty\sim D(n+1)^{-1/12}$.) Пусть $T\in\mathcal{S}'$ и $\{b_n\}$ — его коэффициенты Эрмита. Тогда $|b_n|\leqslant E(n+1)^m$ при некотором m. Пусть $a_n==(n+1)^{-m-3}b_n$. Тогда $\sum|a_n|\|\phi_n\|_\infty\leqslant E\sum(n+1)^{-3/2}<\infty$ и $\sum a_n\phi_n$

равномерно сходится к некоторой непрерывной функции F на $\mathbb{R}$. Функция F (как элемент $\mathscr{S}'$) имеет коэффициенты Эрмита $\{a_n\}$. Продолжим A, $A^\dagger$ и $N=\frac{1}{2}(-d^2/dx^2+x^2-1)$ на $\mathscr{S}'$. Тогда

$$T=(N+1)^{m+3}F=\frac{1}{2^{m+3}}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2+1\right)^{m+3}F.$$

Поэтому T можно записать как сумму полиномов, умноженных на слабые производные от полиномиально ограниченных непрерывных функций. Простые рассуждения (задача 37) позволяют завершить доказательство. ∎

Следствие 4 (теорема о ядре). Каждый непрерывный билинейный функционал $B(\cdot,\ \cdot)$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ имеет вид $B(f,\ g)=$ $=T(f\otimes g)$ с некоторым $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Доказательство. Поскольку B непрерывен, $|B(f,\ g)|\leqslant C\|f\|_r\|g\|_s$ для некоторых $r\in I_+^n$, $s\in I_+^m$. Отсюда

$$|B(\phi_\alpha,\phi_\beta)|\leqslant C(\alpha+1)^r(\beta+1)^s=C[\langle\alpha,\ \beta\rangle+1]^{\langle r,\ s\rangle},$$

где

$$\langle\alpha,\ \beta\rangle=\langle\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_m\rangle\in I_+^{n+m}.$$

В результате $b_{\langle\alpha,\ \beta\rangle}\equiv B(\phi_\alpha,\ \phi_\beta)$ — коэффициенты Эрмита распределения $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, такого, что $T(\phi_{\langle\alpha,\ \beta\rangle})\equiv T(\phi_\alpha\otimes\phi_\beta)=b_{\langle\alpha,\ \beta\rangle}$. Пусть $f=\sum a_\alpha\phi_\alpha$, $g=\sum c_\beta\phi_\beta$. Так как эти разложения сходятся в $\mathscr{S}$, то

$$T(f\otimes g)=\sum_{\alpha,\ \beta}a_\alpha c_\beta T(\phi_\alpha\otimes\phi_\beta)=\sum_{\alpha,\ \beta}a_\alpha c_\beta b_{\langle\alpha,\ \beta\rangle}=B(f,\ g). \ ∎$$

V.4. Индуктивные пределы: обобщенные функции и слабые решения дифференциальных уравнений в частных производных

В интуитивном смысле ясно, что распределения, рассмотренные в предыдущем разделе, характеризуются тем, что они полиномиально ограничены на бесконечности. Более точно об этом говорится в теореме V.10, которая гласит, что любое $T\in\mathscr{S}'$ является производной от полиномиально ограниченной функции. Рост распределения $T\in\mathscr{S}'$ в некотором смысле противоположен степени убывания функций $f\in\mathscr{S}$. Это наводит на мысль построить обобщенные функции, не имеющие ограничений на рост в бесконечности, определив их как элементы пространства, сопряженного к пространству функций с очень резким убыванием на бесконечности, т. е. равных нулю вне компактного множества. Иными словами, мы хотим топологизировать множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем так, чтобы оно стало полным локально выпуклым пространством. Если K — компактное множество в $\mathbb{R}^n$, множество $C_0^\infty(K)$ функций класса C^∞ с носителем в K обладает естественной топологией, задаваемой нормами $\|f\|_{\alpha,\infty} \equiv \sup_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f|$. Однако при наделении $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ нормами $\{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\}_{\alpha\in I_+^n}$ оно *не становится* полным, несмотря на то что пространства $C_0^\infty(K)$ полны для каждого компактного K (см. задачу 38). Нам хотелось бы считать $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ объединением $\bigcup_m C_0^\infty(K_m)$, где $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ — некоторое семейство компактных множеств, такое, что $\bigcup_m K_m = \mathbb{R}^n$, и наделить его некоторой «предельной» топологией. Для того чтобы сделать это, опишем одну общую конструкцию.

Теорема V.15. Пусть X — комплексное (или вещественное) векторное пространство. Пусть X_n — семейство подпространств со свойствами $X_n \subseteq X_{n+1}$, $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$. Предположнм, что каждое X_n обладает локально выпуклой топологией, такой, что ее сужение из X_{n+1} на X_n совпадает с заданной топологией на X_n. Пусть $\mathcal{U}$ — совокупность уравновешенных поглощающих выпуклых множеств $\mathcal{O}$ в X, таких, что $\mathcal{O} \cap X_n$ открыто в X_n для каждого n. Тогда:

(a) $\mathcal{U}$ есть база окрестностей нуля некоторой локально выпуклой топологии;

(b) топология, порождаемая совокупностью $\mathcal{U}$, — сильнейшая локально выпуклая топология на X, в которой непрерывны вложения $X_n \to X$;

(c) сужение топологии из X на каждое X_n совпадает с заданной топологией на X_n;

(d) если каждое X_n полно, то полно и X.

Для доказательства теоремы V.15 нам нужна одна техническая

Лемма. Пусть X — локально выпуклое пространство, и пусть X_1 — подпространство с относительной топологией, которая автоматически локально выпукла. Пусть V — открытое выпуклое уравновешенное подмножество в X_1. Тогда в X существует открытое выпуклое уравновешенное подмножество Z, такое, что $Z \cap X_1 = V$.

Доказательство. Поскольку на X_1 задана относительная топология, в X можно найти такое открытое множество $\mathcal{O}$, что $\mathcal{O} \cap X_1 = V$. Так как $\mathcal{O}$ — окрестность нуля в X и X локально компактно, можно найти уравновешенное выпуклое $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, открытое в X. Пусть

$$Z = \{\alpha x + \beta y \mid x \in \mathcal{O}_1,\ y \in V,\ |\alpha| + |\beta| = 1\} = \bigcup_{y\in V,\ |\alpha|+|\beta|=1} (\beta y + |\alpha| \mathcal{O}_1).$$

Будучи объединением открытых множеств, Z открыто. Поскольку $V \subset Z$, имеем $V \subset (Z \cap X_1)$, но если $\alpha x + \beta y \in X_1 \cap Z$, то $x \in X_1 \cap \mathcal{O}_1 \subset X_1 \cap \mathcal{O} = V$, так что $\alpha x + \beta y \in V$, т. е. $Z \cap X_1 \subset V$. Это и доказывает лемму. ∎

Доказательство теоремы V.15. Семейство $\mathcal{U}$ замкнуто относительно конечных пересечений и растяжений, поэтому для доказательства (a) нужно только показать, что порождаемая им топология хаусдорфова. Но если мы докажем утверждение (c), то из него будет следовать хаусдорфовость X, ибо если точка $x \in X_n$ задана, то можно найти содержащее нуль открытое в X_n множество $\mathcal{O}$, не содержащее x, а тогда, при условии что (c) доказано, можно найти такое открытое в X множество U, что $U \cap X_n = \mathcal{O}$. Таким образом, из (c) следует (a). По заданной окрестности $\mathcal{O}_1$ нуля в X_n найдем уравновешенное выпуклое открытое множество $N_n \subset \mathcal{O}_1$. Затем, пользуясь леммой, найдем выпуклое уравновешенное и открытое в X_{n+1} подмножество $N_{n+1} \subset X_{n+1}$, такое, что $N_{n+1} \cap X_n = N_n$, и далее по индукции — такие множества N_k $(k > n)$, что N_k выпуклы, уравновешены, открыты в X_k и $N_k \cap X_{k-1} = N_{k-1}$. Положим $N_\infty = \bigcup\limits_{k \geqslant n} N_k$. Легко видеть, что $N_\infty \in \mathcal{U}$ и $N_\infty \cap X_k \subset \mathcal{O}_1$. Таким образом, $\mathcal{O}_1$ — окрестность в относительной топологии. То что относительная топология сильнее, чем заданная, следует из определения $\mathcal{U}$. Это доказывает (c), а следовательно, и (a). Нетрудно доказать (b). Относительно (d) см. ссылки в Замечаниях. ∎

Определение. Локально выпуклое пространство X, построенное в теореме V.15, называется **строгим индуктивным пределом** пространств X_n.

Заметим, что если каждое X_n есть собственное замкнутое подпространство в X_{n+1}, то пространство X неметризуемо (задача 45). Одно из приятных свойств строгого индуктивного предела отражено в следующей теореме:

Теорема V.16. Пусть X — строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Линейное отображение T из X в локально выпуклое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно каждое из сужений $T \restriction X_n$.

Доказательство. Если T непрерывно, то и каждое сужение непрерывно. Обратно, предположим, что каждое сужение непрерывно. Пусть N — уравновешенное выпуклое открытое множество в Y. Тогда $T^{-1}[N] \cap X_n = (T \restriction X_n)^{-1}[N]$ открыто в X_n, поскольку $T \restriction X_n$ непрерывно. Так как $T^{-1}[N]$ уравновешено и выпукло, оно открыто, и потому T непрерывно. ∎

Пример 1. Пусть $\varkappa(\mathbb{R})$ — множество непрерывных функций на $\mathbb{R}$, имеющих компактный носитель. Пусть $\varkappa_n$ — множество функций из $\varkappa(\mathbb{R})$ с носителем в $[-n, n]$, нормированное при помощи $\|\cdot\|_\infty$. Снабдим $\varkappa$ топологией индуктивного предела. В силу последней теоремы, сопряженное к $\varkappa$ в этой топологии образует в точности множество комплексных мер Бэра на $\mathbb{R}$. Такая же конструкция возможна и в случае $\varkappa(X)$, когда X — любое σ-компактное локально компактное пространство.

Пусть теперь Ω — открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$, а $C_0^\infty(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω. Пусть K_n — возрастающее семейство компактных множеств, такое, что $\bigcup_n K_n = \Omega$. Зададим на $C_0^\infty(K_n)$ топологию Фреше, порождаемую нормами $\|D^\alpha f\|_\infty$. Обозначим множество $C_0^\infty(\Omega)$ с топологией индуктивного предела, получаемой с помощью $\bigcup_n C_0^\infty(K_n)$, через $\mathcal{D}_\Omega$. Эта топология не зависит от выбора K_n (задача 46). В $\mathcal{D}_\Omega$ довольно просто ввести *секвенциальную* сходимость.

Теорема V.17. Предположим, что $X = \bigcup X_n$ снабжено топологией строгого индуктивного предела и что каждое X_n — замкнутое собственное подпространство в X_{n+1}. *Последовательность* $f_m \in X$ сходится к $f \in X$ тогда и только тогда, когда все f_m лежат в некотором X_n и $f_m \to f$ в топологии этого X_n. В частности, *последовательность* $f_m \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ сходится к f тогда и только тогда, когда все f_m и f имеют носитель внутри некоторого фиксированного компакта K и $D^\alpha f_m$ равномерно сходится к $D^\alpha f$ для каждого мультииндекса α.

Доказательство. Пусть $f_m \to f$, и пусть для каждого n существует $f_m \notin X_n$. Тогда легко построить подпоследовательность из f_m, скажем $g_i = f_{m(i)}$, и подпоследовательность из X_n, скажем $Y_i = X_{n(i)}$, такие, что $g_i \in Y_{i+1} \setminus Y_i$. Так как Y_i замкнуты, то в силу теоремы Хана — Банаха найдутся такие $l_i \in X^*$, что $l_i \equiv 0$ на Y_i и $l_n(g_n) = n - \sum_{k=1}^{n-1} l_k(g_n)$. Пусть $l = \sum_{n=1}^{\infty} l_n$. На любом X_n эта сумма конечна, следовательно, функционал l на каждом X_n непрерывен, а потому, в силу теоремы V.16, он непрерывен на X. Поскольку $g_m \to f$ и $l \in X^*$, $l(g_m)$ сходится. Но $l(g_m) = m$, и полученное противоречие доказывает, что все f_m лежат в некотором X_n. ∎

Теперь у нас есть все, чтобы определить обобщенные функции на Ω.

Определение. **Обобщенная функция** (или **распределение**) — это непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}_\Omega$. Пространство всех непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{D}_\Omega$ обозначается через $\mathscr{D}'_\Omega$. Символы $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ будут обозначать соответственно $\mathscr{D}_{\mathbb{R}^n}$ и $\mathscr{D}'_{\mathbb{R}^n}$.

Теорема V.16 прямо переводится в такое

Следствие. Линейный функционал T на $\mathscr{D}$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого компакта $K\subset\mathbb{R}^n$ существуют постоянная C и целое число j, такие, что для всех $\varphi\in C_0^\infty(K)$

$$|T(\varphi)|\leqslant C\sum_{|\alpha|<j}\|D^\alpha\varphi\|_\infty.$$

Пример 2. Пусть f — произвольная непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$. Определим $D^\alpha f$ равенством

$$(D^\alpha f)(\varphi)=(-1)^{|\alpha|}\int f(x)(D^\alpha\varphi)(x)\,dx.$$

Тогда для каждого компактного множества K и $\varphi\in C_0^\infty(K)$

$$|(D^\alpha f)(\varphi)|\leqslant C\|D^\alpha\varphi\|_\infty\sup_{x\in K}|f(x)|,$$

так что $D^\alpha f\in\mathscr{D}'$. Следовательно, $\mathscr{D}'$ содержит слабые производные всех непрерывных функций.

Пример 3. Рассмотрим $\mathscr{D}$. Пусть $\delta^n(x-a)\colon\mathscr{D}\to\mathbb{C}$ задается равенством $\delta^n(x-a)(f)=D^nf(a)$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta^n(x-n)=T$ лежит в $\mathscr{D}'$. В самом деле, если $\varphi\in C_0^\infty[-m,m]$, то

$$|T(\varphi)|=\left|\sum_{n=0}^{m}(D^n\varphi)(n)\right|\leqslant\sum_{n=0}^{m}\|D^n\varphi\|_\infty.$$

Этот пример показывает, что $\mathscr{D}'$ содержит обобщенные функции T, которые *не являются* α-й производной никакой непрерывной функции. Поэтому для $\mathscr{D}'$ не существует прямого аналога теоремы V.10, хотя и справедлива локальная теорема регулярности (задача 26). Для $\mathscr{D}$ справедлива также теорема о ядре (см. задачи 59, 60).

В $\mathscr{D}'$ с помощью метода, использованного в § V.3, можно перенести операции, заданные на $\mathscr{D}$. Так, например, если $p(x_1,\ldots,x_n)$ — полином от n переменных степени k, т. е. $p(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant K}a_\alpha x^\alpha$, то дифференциальный оператор в частных производных $p(D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha D^\alpha$ продолжается на $\mathscr{D}'$ формулой

$$(p(D)T)(\varphi)=T\left[\sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha\varphi)\right].\qquad\text{(V.5)}$$

Формулу (V.5) можно использовать и в случае, если a_α суть функции от x класса C^∞.

Продолжение дифференциальных операторов в частных производных на $\mathscr{D}'$ особенно полезно для теории дифференциальных уравнений в частных производных. Пусть f — непрерывная функция. Непрерывно дифференцируемую k раз функцию u (мы пишем $u \in C^k$), для которой $p(D)u = f$, назовем **классическим решением.** Если $T \in \mathscr{D}'$ и $p(D)T = f$, где $p(D)T$ определено формулой (V.5), то T назовем **слабым решением** дифференциального уравнения в частных производных. Различие между классическими и слабыми решениями заключено только в их гладкости, ибо справедливо такое

Предложение. Если $u \in C^k$, то $p(D)u$, определенное формулой (V.5), совпадает с классическим значением $p(D)u$. В частности, если $u \in C^k$ и f — непрерывная функция, то u является слабым решением уравнения $p(D)u = f$ тогда и только тогда, когда u есть классическое решение.

Доказательство проводится элементарным интегрированием по частям. ∎

Следующий пример показывает, что не каждое слабое решение является классическим.

Пример. Пусть $f(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0, 1]$. Покажем, что $u(x, t) = f(x - ct)$ — слабое решение уравнения $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. При этом, вместо того чтобы прямо использовать определение (V.5) (что может служить полезным упражнением), воспользуемся тем фактом, что оператор $p(D)$ в (V.5) непрерывен на $\mathscr{D}'$. Поскольку $f \in L^1(\mathbb{R})$, в $\mathscr{D}$ можно найти последовательность f_n, сходящуюся в $L^1(\mathbb{R})$ к f. Тогда легко видеть, что $u_n(x, t) = f_n(x - ct) \to u(x, t)$ в топологии $\sigma(\mathscr{D}', \mathscr{D})$. Но $p(D)u_n$ можно вычислить в классическом смысле, т. е.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n(x, t) = c^2 f_n''(x - ct), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x, t) = f_n''(x - ct),$$

так что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0.$$

В задаче 47 мы обсудим распределения, зависящие только от $x - ct$, и докажем, что любое такое распределение T удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T = 0.$$

Концепция слабых решений полезна, в частности, тем, что часто легко доказать существование именно слабого решения (случай уравнений с постоянными коэффициентами см. § IX.5). В случае эллиптических уравнений (см. § IX.6) можно доказать теорему регулярности, которая утверждает, что при определенных условиях каждое слабое решение есть решение классическое. Сочетание двух этих техник позволяет делать выводы о существовании сильных решений у эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотренный выше пример показывает, что в случае гиперболических уравнений дело обстоит не так просто.

V.5. Теоремы о неподвижной точке

В связи с большим разнообразием приложений мы хотим рассмотреть решения уравнений вида $x = Tx$. Например, неоднородное интегральное уравнение $f(x) = g(x) + \int K(x, y) f(y)\, dy$ имеет вид $f = Tf$ с аффинным линейным отображением $Tf = g + Kf$. Известные уравнения «бутстрапа», предложенные в физике элементарных частиц, имеют вид $S = T(S)$, где S есть S-матрица, а T — некоторый очень сложный оператор. Условие лоренц-инвариантности вакуумных средних имеет вид

$$W_n(x_1, \ldots, x_n) = W_n(\Lambda x_1, \ldots, \Lambda x_n),$$

где Λ — фиксированное преобразование Лоренца.

Здесь мы хотим обсудить разновидности теорем существования для таких уравнений — так называемые теоремы о неподвижной точке, а в § V.6 — некоторые приложения. Мы делаем это именно здесь по той причине, что некоторые из этих теорем наиболее естественно формулируются на языке локально выпуклых пространств. Сначала рассмотрим «нелинейные» теоремы, т. е. теоремы, в которых не предполагается линейность отображения T, а затем — одну простую теорему, использующую линейность.

Определение. Пусть $T\colon X \to X$ — некоторое отображение. Точка $x \in X$, для которой $Tx = x$, называется **неподвижной точкой** отображения T.

Первая нелинейная теорема очень проста и, скорее всего, знакома читателю.

Определение. Пусть $\langle S, \rho\rangle$ — метрическое пространство. Отображение $T\colon S \to S$, для которого $\rho(Tx, Ty) \leqslant \rho(x, y)$, называется **сжимающим**. Если существует $K < 1$, при котором $\rho(Tx, Ty) \leqslant K\rho(x, y)$, то T называется **строго сжимающим**.

Теорема V.18 (принцип сжимающих отображений). Строго сжимающее отображение полного метрического пространства имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Прежде всего докажем единственность. Если $Tx=x$, $Ty=y$, то $\rho(Tx, Ty)=\rho(x, y)\leqslant K\rho(x, y)$; поскольку $K<1$ и $\rho(x, y)\geqslant 0$, заключаем, что $\rho(x, y)=0$, т. е. $x=y$. Для доказательства существования заметим сначала, что T автоматически непрерывно, ибо если $\rho(x, y)<K^{-1}\varepsilon$, то $\rho(Tx, Ty)<\varepsilon$. Далее, пусть x_0 произвольно, и пусть $T^n x_0=x_n$. Покажем, что $\{x_n\}$ — последовательность Коши. Имеем

$$\rho(x_n, x_{n+1})=\rho(Tx_{n-1}, Tx_{n-2})\leqslant K\rho(x_{n-1}, x_{n-2})\leqslant$$
$$\leqslant K^2\rho(x_{n-2}, x_{n-3})\leqslant\ldots\leqslant K^{n-1}\rho(x_1, x_0).$$

Таким образом, если $n>m$, то при $m\to\infty$

$$\rho(x_n, x_m)\leqslant\sum_{j=m+1}^{n}\rho(x_j, x_{j-1})\leqslant K^m(1-K)^{-1}\rho(x_0, x_1)\to 0.$$

Итак, $\{x_n\}$ — последовательность Коши, значит, $x_n\to x$ для некоторого x. Поскольку T непрерывно, $Tx=\lim Tx_n=\lim x_{n+1}=x$, что и доказывает теорему. ∎

Доказательство второй теоремы значительно сложнее, и мы не намерены приводить его здесь (см. Замечания); она обобщает известную теорему Брауэра о неподвижной точке: всякое непрерывное отображение замкнутого единичного шара из $\mathbb{R}^n$ в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку. Уже сама эта теорема достаточно глубока.

Теорема V.19 (теорема Лере—Шаудера—Тихонова). Пусть C — непустое компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X. Пусть T: $C\to C$ — непрерывное отображение. Тогда T обладает неподвижной точкой.

В качестве подготовки к нашей последней общей теореме о неподвижной точке докажем теорему V.19 в одном частном случае (см. следующую ниже лемму).

Определение. Пусть X и Y — векторные пространства и C — выпуклое подмножество в X. Отображение T: $C\to Y$ называется **аффинным отображением** множества C, если

$$T(tx+(1-t)y)=tTx+(1-t)Ty$$

для всех x, $y\in C$ и всех $0\leqslant t\leqslant 1$.

В отличие от линейных функционалов, заданных на подпространстве, непрерывные аффинные функционалы на выпуклых множествах могут не иметь продолжения на все X (задача 49).

Лемма. Пусть T — непрерывное аффинное отображение C в себя, где C — компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X. Тогда T обладает неподвижной точкой.

Доказательство. Положим

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x_0,$$

где x_0 взято из C. Поскольку C выпукло, $x_n \in C$ при всех n. Далее, C компактно, и потому некоторая поднаправленность $x_{n(\alpha)}$ сходится к пределу x. Мы хотим показать, что $Tx = x$. В силу теоремы Хана — Банаха достаточно показать, что $l(Tx) = l(x)$ для любого $l \in X^*$. Так как C компактно, то $\sup\limits_{x \in C} |l(x)| \equiv M_l < \infty$ для любого фиксированного l. В итоге

$$|l(Tx_n - x_n)| = \left| l\left(\frac{1}{n} T^n x_0 - \frac{1}{n} x_0\right)\right| \leqslant \frac{2}{n} M_l \to 0$$

при $n \to \infty$, так что $l(Tx - x) = \lim\limits_{\alpha} l(Tx_{n(\alpha)} - x_{n(\alpha)}) = 0$. ∎

Последняя из рассматриваемых теорем о неподвижной точке имеет дело с целым семейством отображений.

Определение. Говорят, что семейство $\mathcal{F}$ отображений некоторого множества X в себя обладает **общей неподвижной точкой**, если существует такое $x \in X$, что $Tx = x$ для всех $T \in \mathcal{F}$.

Теорема V.20 (теорема Маркова — Какутани). Пусть $\mathcal{F}$ — семейство *коммутирующих* непрерывных аффинных отображений C в себя, где C — компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства, т. е. $TSx = STx$ для всех $S, T \in \mathcal{F}$ и $x \in C$. Тогда $\mathcal{F}$ имеет общую неподвижную точку.

Доказательство. Для каждого конечного подмножества $F \subset \mathcal{F}$ положим $f_F = \{x \in C \mid Tx = x$ для всех $T \in F\}$. Так как все T непрерывны, то каждое f_F замкнуто и, кроме того, $f_{F_1} \cap f_{F_2} = f_{F_1 \cup F_2}$. Таким образом, если показать, что каждое f_F непусто, то $\bigcap f_F \neq \varnothing$ в силу критерия центрированности, и, следовательно, найдется x со свойством $Tx = x$ для всех $T \in \mathcal{F}$. Поскольку $T \in \mathcal{F}$ аффинны и линейны, каждое f_F выпукло. Условие $x \in f_F$ влечет за собой $Sx \in f_F$ для каждого $S \in \mathcal{F}$, ибо если $T \in F$, то $T(Sx) = S(Tx) = Sx$, когда $Tx = x$. Так как f_F выпукло и компактно и S: $f_F \to f_F$, в f_F существует x со свойством $Sx = x$, т. е. $f_{F \cup \{S\}} \neq \varnothing$, если $f_F \neq \varnothing$. По индукции получаем, что каждое f_F непусто и, следовательно, $\bigcap\limits_F f_F \neq \varnothing$. Отсюда, как уже отмечено выше, вытекает наличие у $\mathcal{F}$ общей неподвижной точки. ∎

В гл. XVI мы вернемся к специальным свойствам компактных выпуклых подмножеств локально выпуклых пространств; в частности, в § XVI.5 мы распространим теорему V.20 на различные некоммутирующие семейства (см. также задачу 50).

V.6. Приложения теорем о неподвижной точке

А. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть F — непрерывная функция из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Нас интересует решение дифференциального уравнения $\dot{y}\equiv dy/dt=F(t, y)$ с начальными условиями, т. е. по заданному $y_0\in\mathbb{R}^n$ мы хотим найти непрерывно дифференцируемую функцию $y(t)$ на $\mathbb{R}$, такую, что $y(0)=y_0$ и $\dot{y}(t)=F(t, y(t))$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Мы обсудим, как можно применять теоремы § V.5 о неподвижной точке при доказательстве существования *локальных* решений, т. е. как по заданному y_0 можно найти некоторое δ и функцию $y(t)$ на $(-\delta, \delta)$, такие, что $y(0)=y_0$ и $\dot{y}(t)=F(t, y(t))$ при всех $|t|<\delta$. Отметим, что уравнение p-го порядка $y^{(p)}=F(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(p-1)})$ на $\mathbb{R}^k$ сводится к уравнению первого порядка на $\mathbb{R}^{kp}$ с помощью перехода к вектор-столбцам:

$$Y=\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}; \qquad \dot{Y}=\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ F(t, y_1, \ldots, y_p) \end{pmatrix}.$$

Дифференцирование делает функции менее гладкими, и обычно его нельзя определить как отображение пространства в себя, если только последнее не состоит из функций класса C^∞. Интегрирование — более гладкая операция, оно переводит множество непрерывных функций на интервале в себя. По этой причине удобно переписать дифференциальное уравнение в интегральной форме:

$$y(t)=y_0+\int_0^t F(s, y(s))\, ds. \tag{V.6}$$

Легко видеть, что непрерывная функция $y(t)$ на $(-\delta, \delta)$ удовлетворяет (V.6) тогда и только тогда, когда она является локальным решением уравнения $\dot{y}(t)=F(t, y(t))$ с начальным условием $y(0)=y_0$.

Итак, имея y_0 и δ, рассмотрим отображение G: $C[-\delta, \delta]\to$ $\to C[-\delta, \delta]$, заданное на множестве непрерывных функций из

$[-\delta, \delta]$ в $\mathbb{R}^n$ формулой

$$[G(g)](t) = y_0 + \int_0^t F(s, g(s))\, ds.$$

Тогда решить уравнение (V.6) — это то же самое, что найти неподвижную точку для G!

Рассмотрим сначала случай, когда F удовлетворяет условию Липшица, т. е. когда при заданном y_0 существуют такие K, ε и δ, что из $\|y-y_0\| < \varepsilon$, $|t| < \delta$ вытекает $\|F(t, y) - F(t, z)\| \leqslant K\|y-z\|$, если $\|z-y_0\| < \varepsilon$. Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма на $\mathbb{R}^n$. Уменьшая δ, можно добиться того, чтобы было

$$\delta \max_{\substack{|t|<\delta \\ \|y-y_0\|<\varepsilon}} \|F(t, y)\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \delta K < 1/2.$$

Пусть теперь

$$S = \{g \in C[-\delta, \delta] \mid \|g(t) - y_0\| \leqslant \varepsilon/2 \quad \forall t \in (-\delta, \delta)\};$$

S с нормой $\|\cdot\|_\infty$ есть полное метрическое пространство, и из неравенства $\delta \max \|F(t, y)\| < \varepsilon$ следует, что $G(g) \in S$, если $g \in S$. Когда $\delta K < 1/2$ и $\|F(t, y) - F(t, z)\| \leqslant K\|y-z\|$, имеем $\|G(g_1) - G(g_2)\|_\infty < {}^1/_2\|g_1 - g_2\|_\infty$, если $g_1, g_2 \in S$. Следовательно, G — строго сжимающее отображение на S, и по теореме V.18 существует *единственное* $g \in S$, удовлетворяющее (V.6). Нетрудно понять, что любое решение (V.6) должно обладать свойством $\|g(t) - y_0\| \leqslant \varepsilon/2$ при малых t и потому должно совпадать с этим единственным решением из S, когда t мало. В итоге для рассматриваемого случая локальное существование и единственность доказаны.

Теперь предположим, что F только непрерывна. По заданному y_0 выберем такое δ, чтобы

$$\max_{\substack{|t|<\delta \\ \|y-y_0\|<1}} |F(t, y)| < \delta^{-1}.$$

Положим

$$C_0 = \{g \in C[-\delta, \delta] \mid \|g(t) - y_0\| \leqslant 1 \ \forall t \in (-\delta, \delta)\}.$$

Тогда $G(g) \in C_0$, если $g_0 \in C_0$. На самом деле можно утверждать больше. Пусть

$$C_1 = \{g \in C_0 \mid \|g(t) - g(s)\| \leqslant |t-s| \max_{\substack{|t|<\delta \\ \|y-y_0\|<1}} |F(t, y)| \quad \forall t, s \in (-\delta, \delta)\}.$$

Тогда $g \in C_0$ влечет за собой $G(g) \in C_1$. Таким образом, $G\colon C_1 \to C_1$. Отображение G непрерывно, а множество C_1 выпукло и компактно в силу соображений, связанных с равностепенной непрерывностью. Следовательно, по теореме V.19, G обладает неподвижной точкой. ∎

Отметим, что второй метод доказательства дает только существование локального решения, но не его единственность. И в самом деле, когда F непрерывна, но условие Липшица не выполнено, единственность может не иметь места: например, если $F(t, y) = 2\sqrt{y}$, то уравнение $\dot{y} = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$, имеет два решения: $y(t) \equiv 0$ и $y(t) = t^2$, которые различаются в любой окрестности $t = 0$. Компактность C_1 связана с конечномерностью $\mathbb{R}^n$, где компактен единичный шар. Однако свойство сжимаемости для функций, удовлетворяющих условию Липшица, выполнено и без требования компактности, и потому немедленно переносится на обыкновенные дифференциальные уравнения для функций со значениями в банаховом пространстве.

Вопрос о том, когда локальное решение может быть продолжено до глобального, значительно деликатнее.

B. Мера Хаара на коммутативных компактных группах

При помощи теоремы Маркова—Какутани легко построить инвариантную меру на компактной абелевой группе. Пусть G — компактное топологическое пространство, которое в то же время является абелевой группой, и предположим, что все групповые операции непрерывны. Мы хотим построить такую меру $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(G)$, чтобы $\int f\,d\mu = \int f_g\,d\mu$ для всех $g \in G$ и $f \in C(G)$, где f_g — сдвиг функции f, т. е. $f_g(h) = f(h-g)$. Для любой $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(G)$ определим $T_g\mu$ соотношением $T_g\mu(f) = \mu(f_g)$. Тогда T_g отображает $\mathcal{M}_{+,1}(G)$ в себя и непрерывно в грубой (*-слабой) топологии. Множество $\mathcal{M}_{+,1}$ выпукло и, в силу теоремы Банаха—Алаоглу, компактно. Различные T_g коммутируют, поскольку G — абелева группа. Кроме того, они аффинны, поэтому, как утверждает теорема V.20, существует общая неподвижная точка μ_{Haar} с нужным свойством инвариантности. В этом случае теорема о неподвижной точке дает только существование; единственность доказывается с помощью аргументов другого сорта.

C. Уравнения «бутстрапа»

Не входя ни в технические, ни в физические детали, опишем применение теоремы Лере—Шаудера—Тихонова в доказательстве самосогласованности некоторых схем бутстрапа.

Для того чтобы описать идею бутстрапа, обратимся к потенциальному рассеянию, где по сравнению с теорией поля существенно меньше различных усложнений. Рассмотрим рассеяние двух частиц одинаковой массы. Поскольку полный импульс $\mathbf{P}$ сохраняется и мы предполагаем, что все силы зависят только от относительных положений частиц, можно описывать рассеяние в системе координат, где $\mathbf{P}=0$ (рис. V.2). Возьмем для простоты

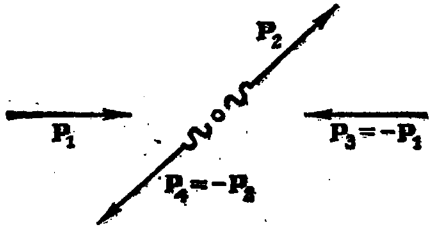

Рис. V.2. Рассеяние при $\mathbf{P}=0$.

$m=1/2$, где m — масса частиц. Естественные переменные в нерелятивистском случае — это энергия $E=P_1^2=P_2^2$ и угол рассеяния θ, но, имея в виду релятивистский случай, возьмем вместо них $s=4E$ и переданный импульс $t=-(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)^2=2E(\cos\theta-1)$.

В квантовой механике рассеяние представляет собой существенно волновое явление, и потому описывается величиной рассеянной волны и ее фазой относительно падающей волны, т. е. комплексным числом A_{phys} — амплитудой рассеяния, обсуждаемой в § XII.6. Она определена в области $E\geqslant 0$, $-1\leqslant\cos\theta\leqslant 1$, или, что то же самое, $0\leqslant s<\infty$, $-s\leqslant t\leqslant 0$. Как мы увидим в § XII.7, амплитуда $A_{\text{phys}}(s, 0)$ для самых разнообразных потенциалов является граничным значением некоторой функции,

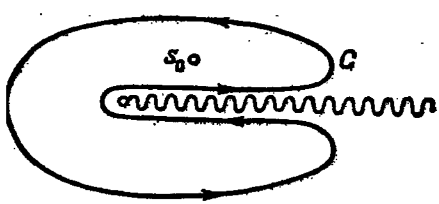

Рис. V.3. Контур C в s-плоскости с разрезом.

аналитической в s-плоскости с разрезом (рис. V.3). В общем случае на отрицательной полуоси могут быть полюса, которые мы для простоты исключаем. Таким образом,

$$A_{\text{phys}}(s, 0)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} A(s+i\varepsilon, 0)\equiv A(s+i0, 0)$$

с некоторой функцией, аналитической в $\{s\in\mathbb{C}\mid \arg s\neq 0\}$. Более того, $A(s, 0)$ вещественна при $s<0$, поэтому, согласно принципу симметрии Шварца, физическая амплитуда обладает свойством

$$\operatorname{Im} A(s+i0,\ 0)=\frac{1}{2i}[A(s+i0,\ 0)-A(s-i0,\ 0)].$$

Предположим, опять-таки для простоты, что $A(s, 0)\to 0$ на бесконечности. В общем случае это неверно, и следующее ниже рассуждение надо подправить с помощью процедуры, известной как процедура вычитаний (§ XII.7). Тогда, в силу интегральной теоремы Коши,

$$A(s_0,\ 0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{A(s,\ 0)}{s-s_0}\,ds,$$

где C — контур, изображенный на рис. V.3. Если теперь делать радиус большого круга все больше и больше, вклад от него будет исчезать, ибо мы предположили, что $A(s, 0)\to 0$ при $s\to\infty$. Приближая прямолинейные участки пути к вещественной оси, найдем, что

$$A(s,\ t_0=0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{D(s,\ t_0=0)}{s-s_0}\,ds, \tag{V.7a}$$

где $D(s,\ t_0=0)=\frac{1}{2i}[A(s+i0,\ 0)-A(s-i0,\ 0)]=\operatorname{Im} A(s+i0,\ 0)$ — «скачок» A.

Для узкого класса потенциалов это «дисперсионное соотношение» может быть доказано при $t=t_0$ для всех вещественных положительных t_0. Этот класс включает в себя суммы юкавских потенциалов, которые считаются нерелятивистским аналогом ядерных сил. Более того, в этом случае $D(s_0,\ t)$ при фиксированном s_0 является граничным значением функции, аналитической в плоскости с разрезом от $t=\sigma(s)$ до ∞. Функция $\sigma(s)$, зависящая от потенциала, известна в явном виде и называется мандельстамовской границей. Можно написать дисперсионное соотношение для D:

$$D(s,\ t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma(s)}^\infty \frac{\rho(s,\ t)}{t-t_0}\,dt,$$

где

$$\rho(s,\ t)=\frac{1}{2i}[D(s,\ t+i0)-D(s,\ t-i0)]$$

называется «двойной спектральной функцией».

Собирая два наших дисперсионных соотношения вместе, получаем «мандельстамовское представление» для A:

$$A(s,\ t)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\infty ds'\int\limits_{\sigma(s')}^\infty dt'\,\frac{\rho(s',\ t')}{(s'-s)(t'-t)}. \tag{V.7b}$$

Это *линейное* соотношение, в сущности, есть утверждение об аналитических свойствах A.

Второй элемент схемы бутстрапа—«унитарность S-матрицы». Давайте временно вернемся к переменным E, θ и к обозначению $A(E, \theta)$ для амплитуды при $s=4E$ и $t=-2E(1-\cos\theta)$. Унитарность есть отражение того факта, что число частиц, входящих в область рассеяния, равно числу частиц, ее покидающих (более глубокое обсуждение см. в § XII.5). С квантовомеханической точки зрения, уменьшение числа частиц в пучке вызвано интерференцией между рассеянной и нерассеянной волнами. Эта интерференция пропорциональна $\operatorname{Im} A(E, 0)$, тогда как количество частиц, покинувших пучок, пропорционально $|A|^2$. Таким образом приходим к *нелинейному* соотношению

$$\operatorname{Im} A(E, 0) = c\int |A(E, \theta)|^2\, d\Omega,$$

где $c(E)$—функция от E, зависящая от нормировки A, а $d\Omega$—угловая мера на сфере. Можно продолжить это соотношение на ненулевые θ и получить нелинейное интегральное соотношение между $D(s, t)$ и $A(s', t')$ (квадратичное по A). Взяв скачок D и использовав представление Мандельстама, найдем соотношение

$$\rho = T(\rho),$$

где T—некоторая явная, хотя и сложная, функция от ρ. Если ρ обладает свойством $\rho = T(\rho)$ и имеет правильное убывание, достаточное для сходимости некоторых интегралов, то можно показать, что A, определяемая соотношением (V.7b), удовлетворяет условию унитарности. Таким образом, существование $A(s, t)$ с правильными свойствами аналитичности и унитарности эквивалентно существованию неподвижных точек у T. В нерелятивистском случае существование таких ρ известно, поскольку можно показать, что амплитуда рассеяния для суперпозиции юкавских потенциалов обладает правильными свойствами аналитичности и унитарности.

В релятивистском случае, например при $\pi^0\pi^0$-рассеянии, возникают два дополнительных усложнения:

(i) *Кроссинг-симметрия*. Заменим импульсы $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ на рис. V.1 на 4-векторы энергии-импульса $p_i = \langle\sqrt{\mu^2+\mathbf{p}_i^2}, \mathbf{p}_i\rangle$, где μ—масса пионов. Имея 4-вектор $a=\langle a_0, \mathbf{a}\rangle$, определим $a^2=a_0^2-\mathbf{a}^2$; например, $p_i^2=\mu^2$, что выражает релятивистское соотношение между энергией и импульсом. Определим далее мандельстамовские переменные $s=(p_1+p_2)^2=4(p^2+\mu^2)$, если p—импульс в системе центра масс, $t=(p_1-p_2)^2=\frac{1}{2}(s-4\mu^2)(\cos\theta-1)$ и $u=(p_1-p_4)^2=$ $=\frac{1}{2}(s-4\mu^2)(-\cos\theta-1)$. Конечно, s, t и u зависимы, ибо $s+t+u=4\mu^2$. Кроссинг-симметрия выражает глубокий факт релятивистской квантовой теории, а именно то, что аналитическое продолжение амплитуды, скажем, процесса рассеяния $\pi^0\pi^0 \to \pi^0\pi^0$, является симметричной функцией s и t, а после замены переменных $\langle s, t\rangle \to \langle s, u\rangle$, сделанной с помощью соотношения $u = 4\mu^2 - s - t$, — симметричной функцией s и u. Это автоматически ведет к существованию дополнительных разрезов в области определения функции $A(s, t)$. Например, аналогом разреза от $E=0$ до $E=\infty$ в области определения нерелятивистской амплитуды является разрез для $A(s, 0)$, идущий от $s=4\mu^2$ до $s=\infty$. Кроссинг-симметрия предполагает, что должен быть еще разрез от $u=4\mu^2$ до $u=\infty$, или, так как $t=0$, от $s=0$ до $s=-\infty$. Аналог нерелятивистской мандельстамовской аналитичности тогда выражается релятивистским мандельстамовским соотношением:

$$A(s_0, t_0) = \frac{1}{\pi^2}\int_{4\mu^2}^{\infty} ds \int_{\sigma(s)}^{\infty} dt\,\rho(s, t)\left[\frac{1}{(s-s_0)(t-t_0)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(s-s_0)(t+s_0+t_0-4\mu^2)} + \frac{1}{(s+s_0+t_0-4\mu^2)(t-t_0)}\right].$$

В этой формуле

$$\sigma(s) = \min\left\{\frac{4s}{s-16\mu^2}, \frac{16s}{s-4\mu^2}\right\}$$

и ρ должно обладать свойством $\rho(s, t) = \rho(t, s)$. Последние два члена после замены переменных равны

$$\frac{\rho(s, u)}{(s-s_0)(u-u_0)} \quad \text{и} \quad \frac{\rho(t, u)}{(t-t_0)(u-u_0)}.$$

Мандельстамовское соотношение как раз и выражает свойство кроссинг-симметрии вместе с определенными свойствами аналитичности.

(ii) *Неупругие процессы*. Для релятивистских систем характерно то, что при наличии достаточной энергии в них может рождаться большое число частиц. Например, если $s > 16\mu^2$, возможна реакция $\pi^0 + \pi^0 \to \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$. Унитарность возникает из связи между интерференцией рассеянной и нерассеянной волн и полным рассеянием во *всех* процессах. Она, таким образом, дает связь между $A(s, 0)$ и суммой членов, один из которых отвечает процессу $\pi^0 + \pi^0 \to \pi^0 + \pi^0$. Даже в случае, когда $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 16\mu^2$, возможен неупругий процесс $\pi^0 + \pi^0 \to \pi^+ + \pi^-$ ($\pi^\pm$ — заряженные π-мезоны). Полное рассмотрение потребовало бы учета всех амплитуд рассеяния $\pi + \pi \to \pi + \pi$. Для простоты мы ограничимся моделью, где нет π^+ и π^-. Унитарность, таким образом, представляет собой нелинейное соотношение для A только тогда, когда $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 16\mu^2$.

«Гипотеза бутстрапа», предложенная Чью и Мандельстамом, — это идея о существовании для всех процессов только одного набора амплитуд, обладающих «обычными» свойствами аналитичности и удовлетворяющих уравнениям унитарности (связывающим различные процессы). На практике эти уравнения аппроксимируют, заменяя, например, связанные в систему уравнения унитарности неравенствами, когда $s \geqslant 16\mu^2$, как это было сделано выше. Независимо от того, принимаем ли мы идеи бутстрапа или нет, различные уравнения бутстрапа представляют интерес, поскольку на них можно смотреть как на дополнительные условия, налагаемые на амплитуду унитарностью, кроссинг-симметрией и аналитичностью. Даже если они не определяют $A(s, t)$ (а мы не разделяем идей бутстрапа), эти требования налагают суровые ограничения иа амплитуду. A priori вообще не ясно, существует ли хоть какая-нибудь функция $A(s, t)$, обладающая требуемыми свойствами аналитичности, кроссинг-симметрии, унитарности в области упругого рассеяния при $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 16\mu^2$ и удовлетворяющая неравенствам унитарности при $s \geqslant 16\mu^2$.

Существование таких функций было установлено Аткинсоном с помощью красивого применения теоремы Лере—Шаудера—Тихонова. Основная идея доказательства такова. Ищем функцию $\rho(s, t)$, которую надо подставить в представление Мандельстама. Если A удовлетворяет требованию упругой унитарности везде, то

$$\rho(s, t) = (T^{\mathrm{el}} \rho)(s, t),$$

где T^{el} — сложное нелинейное отображение. Поскольку упругая унитарность выполняется только в определенных областях, и это равенство справедливо только в определенных областях s, t-плоскости. В общем случае $\rho(s, t) = (T^{\mathrm{el}} \rho)(s, t) + v(s, t)$, где условие $v = 0$ в определенных областях эквивалентно условию упругой унитарности. Если v удовлетворяет некоторым другим условиям, то любое решение уравнения $\rho = T^{\mathrm{el}}\rho + v$ удовлетворяет определенным условиям интегрируемости, приводящим к тому, что A удовлетворяет требованиям упругой унитарности при $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 16\mu^2$ и неравенствам неупругой унитарности при $s \geqslant 16\mu^2$. В итоге существование решений таких приближенных уравнений бутстрапа было бы доказано, если бы уравнение $\rho = T\rho$ имело решение со свойством $T\rho = T^{\mathrm{el}}\rho + v$. Аткинсон построил зависящее от v выпуклое множество S_v равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций, компактное в $\|\cdot\|_\infty$-топологии и такое, что $T\colon S_v \to S_v$ непрерывно. В таких условиях теорема Лере—Шаудера—Тихонова обеспечивает существование решений приближенных уравнений бутстрапа.

D. Определение фазы амплитуды рассеяния

Согласно квантовой теории рассеяния (см. гл. XII), «дифференциальное» сечение рассеяния при фиксированной энергии дается функцией

$$D(\theta) = |F(\theta)|^2,$$

где $F(\theta)$ — комплекснозначная функция угла рассеяния θ. При энергиях, при которых идет только упругое рассеяние, F должна удовлетворять нелинейному «соотношению унитарности»

$$\operatorname{Im} F(\theta) = \int \overline{F(\theta_1)}\, F(\theta_2) \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1,$$

где θ_2 — функция от θ, θ_1 и φ_1, определяемая сферической геометрией (рис. V.4). Величина $z_2 = \cos\theta_2$ выражается через $z = \cos\theta$,

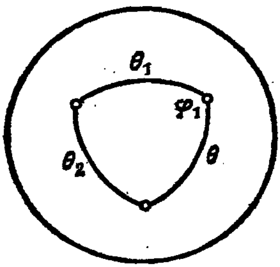

Рис. V.4. Угол θ_2.

$z_1 = \cos\theta_1$ и φ_1 следующим образом:

$$z_2 = zz_1 + \sqrt{(1-z^2)(1-z_1^2)} \cos\varphi_1.$$

В экспериментах измеряют $D(\theta)$, тогда как для теории большой интерес представляет $F(\theta)$. Здесь хочется немедленно задать два вопроса: (1) налагает ли условие унитарности какие-либо ограничения на возможные функции $D(\theta)$, порождаемые функциями F, удовлетворяющими этому условию? (2) Определяется ли F по заданной функции D условием $|F(\theta)| = \sqrt{|D(\theta)|}$ и условием унитарности? Читатель уже должен понимать, что на самом деле это две стороны одного вопроса: речь идет о существовании и единственности.

Введем переменные $z_i = \cos\theta_i$. Пусть $K(z_1, z_2; z)$ — якобиан преобразования от $\langle z_1, \varphi_1\rangle$ к $\langle z_1, z_2\rangle$. Пусть $B(z) = \sqrt{|D(\theta)|}$ задано; положим $F(\theta) = B(z)\, e^{i\varphi(z)}$. Тогда

$$\sin\varphi(z) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K(z_1, z_2; z) \frac{B(z_1)\, B(z_2)}{B(z)} e^{-i(\varphi(z_1)-\varphi(z_2))}\, dz_1\, dz_2,$$

или

$$\varphi(z)=\arcsin\left[\iint K(z_1,\ z_2;\ z)\frac{B(z_1)B(z_2)}{B(z)}\cos[\varphi(z_1)-\varphi(z_2)]\,dz_1\,dz_2\right]. \tag{V.8}$$

Пусть

$$M=\iint|K(z_1,\ z_2;\ z)|\frac{B(z_1)B(z_2)}{B(z)}dz_1\,dz_2.$$

Предположим, что $M<1$. Тогда для любой непрерывной функции $\varphi(z)$ на $[-1,\ 1]$ корректно определена функция $\mathscr{F}\varphi$, заданная равенством

$$(\mathscr{F}\varphi)(z)=\arcsin\left[\iint K(z_1,\ z_2;\ z)\frac{B(z_1)B(z_2)}{B(z)}\times\right.$$
$$\left.\times\cos[\varphi(z_1)-\varphi(z_2)]\,dz_1\,dz_2\right].$$

Ответ на вопрос (1) утвердителен тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}$ обладает неподвижной точкой. Вопрос (2) следующим образом связан с единственностью: пусть $\mu=\arcsin M$. Прежде всего заметим, что если выбрана такая ветвь arcsin, что $-\pi/2<\arcsin x\leqslant\pi/2$, то $\mathscr{F}$ переводит множество функций φ на $[-1,\ 1]$ с $\|\varphi\|_\infty\leqslant\mu$ в себя. Далее, если φ удовлетворяет (V.8), непрерывна и $|\varphi(0)|<\pi/2$, то $\|\varphi\|_\infty\leqslant\mu$. Наконец, заметим, что $\varphi(z)$ удовлетворяет (V.8) тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}(z)=\pi-\varphi(z)$ тоже удовлетворяет (V.8). Таким образом, $\mathscr{F}\varphi=\varphi$ имеет в точности два решения тогда и только тогда, когда существует только одно решение с $|\varphi(z)|\leqslant\mu$ для всех z.

При $M<0{,}79$ Мартен показал, что $\mathscr{F}$ — сжимающее отображение множества

$$\{\varphi\,|\,\|\varphi\|_\infty\leqslant\mu;\ \varphi\ \text{непрерывна}\}$$

с подходящей метрикой. Отсюда следуют единственность и существование. В общем случае $M<1$ существование доказано с помощью теоремы Лере—Шаудера—Тихонова, а единственность — нет.

E. Существование корреляционных функций при низкой плотности

В заключение мы кратко обсудим применение одной очень простой теоремы о неподвижной точке в статистической механике. Теорема такова (задача 51):

Теорема V.21. Пусть K — линейное отображение банахова пространства на себя, причем $\|K\|<1$. Тогда для любого g уравнение $f=g+Kf$ имеет *единственное* решение $f=\sum_{n=0}^{\infty}K^ng$. Пусть K_m —

последовательность таких отображений, причем $\|K_m - K\| \to 0$ и $\|K_m\| < 1$. Если $g_m \to g$, $f_m = g_m + K_m f_m$ и $f = g + Kf$, то $f_m \to f$.

В равновесной статистической механике вводятся «корреляционные функции» $\rho_1(x_1)$, $\rho_2(x_1, x_2)$, ..., $\rho_n(x_1, \ldots, x_n)$, ... В бесконечном объеме, где граничные эффекты перестают играть роль, $\rho_n(x_1, \ldots, x_n)$ — это *плотность* вероятности нахождения частиц в точках $x_1, \ldots, x_n$. Так, например, $\rho_1(x)$ должно равняться постоянной, совпадающей с плотностью.

В случае ящика конечного размера Λ элементарная статистическая механика дает явную формулу для корреляционных функций $\rho_n^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_n; \beta, z)$, где $\beta = (kT)^{-1}$ — обратная температура, $z = e^{\beta\mu}$ — активность, а μ — химический потенциал. Когда мала плотность, т. е. когда система представляет собой газ, z мало. Одна из целей классической статистической механики — доказать существование

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \rho_n^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_n; \beta, z)$$

по крайней мере для малых z и/или β, т. е. для высоких температур и/или низких плотностей, когда система находится в газообразном состоянии, так что не возникает осложнений, связанных с разными фазовыми состояниями. Это можно сделать с помощью теоремы V.21. Сначала доказывается, что в конечном ящике функции $\{\rho_n^{(\Lambda)}\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют системе зацепляющихся интегральных уравнений (уравнениям Кирквуда — Зальцбурга):

$$\rho_1^{(\Lambda)}(x_1) = g_1^{(\Lambda)}(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \int dy_1 \ldots dy_n K_{1,n}^{(\Lambda)}(x_1; y_1, \ldots, y_n) \times \rho_n^{(\Lambda)}(y_1, \ldots, y_n),$$

$$\rho_m^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_m) = g_m^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_m)\,\rho_{m-1}^{(\Lambda)}(x_2, \ldots, x_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \int dy_1 \ldots dy_n K_{m,n}^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n) \times \rho_{n+m-1}^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n).$$

Вводя вектор $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots)$, их схематически можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\rho}^{(\Lambda)} = \mathbf{g}^{(\Lambda)} + \mathbf{K}^{(\Lambda)}\boldsymbol{\rho}^{(\Lambda)}.$$

Оказывается, на множестве векторов $\boldsymbol{\rho}$ можно так ввести норму, что $\mathbf{K}^{(\Lambda)}$ станет ограниченным оператором. Для малых z и/или β при переходе к бесконечному объему $\mathbf{g}^{(\Lambda)} \to \mathbf{g}$ и $\mathbf{K}^{(\Lambda)} \to \mathbf{K}$, причем нормы всех $\mathbf{K}^{(\Lambda)}$ и $\mathbf{K}$ меньше единицы. Тогда, в силу теоремы V.21, $\boldsymbol{\rho}^{(\Lambda)}$ сходится к единственному решению уравнений Кирквуда — Зальцбурга в бесконечном объеме.

Что касается последних трех примеров, то пусть читатель не думает, что он получил какое-то представление о технических деталях. Мы лишь пытались грубо объяснить, какое отношение имеют ко всему этому теоремы о неподвижной точке, но вся основная черная работа заключается в выборе «подходящих» норм или пространств и доказательстве ограниченности или непрерывности отображений, а этого мы совсем не касались.

V.7. Топологии на локально выпуклых пространствах: теория двойственности и сильная сопряженная топология

В этом разделе мы хотим рассмотреть соотношения между различными локально выпуклыми топологиями на векторном пространстве X. Эти топологии не используются до гл. XVI, но их изучение развивает полезную интуицию и проясняет выбор топологий на $\mathscr{S}$ и $\mathscr{D}$.

Пусть X — векторное пространство и Y — разделяющее точки пространство линейных функционалов на X; такая пара $\langle X, Y\rangle$ называется **дуальной парой.** Мы уже знаем, что на X определена локально выпуклая топология $\sigma(X, Y)$, в которой топологическое сопряженное к X есть в точности Y (теорема IV.20). Прежде всего мы хотим выяснить, каковы другие локально выпуклые топологии на X, порождающие Y как топологическое сопряженное пространство.

Определение. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. **Топология Макки** $\tau(X, Y)$ на X — это топология равномерной сходимости на $\sigma(Y, X)$-компактных выпуклых множествах в Y; это означает, что $x_\alpha \xrightarrow{\tau(X,Y)} x$ тогда и только тогда, когда $y(x_\alpha) \to y(x)$ равномерно для всех y из любого фиксированного $\sigma(Y, X)$-компактного выпуклого подмножества в Y.

С другой стороны, для каждого $\sigma(Y, X)$-компактного выпуклого подмножества C в Y определим ρ_C на X соотношением

$$\rho_C(x) = \sup_{y\in C} |y(x)|.$$

Семейство полунорм $\{\rho_C | C$ есть $\sigma(Y, X)$-компактное выпуклое подмножество в $Y\}$ на X порождает топологию $\tau(X, Y)$. Если C компактно, то

$$\tilde{C} = \{\lambda y \,|\, |\lambda| \leqslant 1,\ y \in C\}$$

тоже компактно (поскольку $\{\lambda \,|\, |\lambda| \leqslant 1\}$ компактно) и $\rho_C = \rho_{\tilde{C}}$. Таким образом, достаточно рассматривать только уравновешенные выпуклые $\sigma(Y, X)$-компактные множества C.

Поскольку отдельные точки в Y образуют компактные в слабой топологии множества, то из $x_\alpha \xrightarrow{\tau(X, Y)} x$ вытекает, что $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X, Y)} x$, т. е. слабая топология слабее топологии Макки.

Пример 1. Пусть X — банахово пространство, а X^* — его сопряженное. Мы утверждаем, что топология $\tau(X, X^*)$ есть в точности топология нормы на X. Действительно, по теореме Банаха — Алаоглу (теорема IV.21) единичный шар X_1^* в X^* $\sigma(X^*, X)$-компактен, так что

$$\rho_{X_1^*}(x) = \sup_{y \in X_1^*} |y(x)|$$

— полунорма Макки, а по теореме Хана — Банаха, $\rho_{X_1^*}(x) = \|x\|_X$. С другой стороны, если множество $C \subset X^*$ $\sigma(X^*, X)$-компактно, то для любого $x \in X$ отображение $y \mapsto y(x)$ ограничено на C, так что $C \subset \{y \mid \|y\| \leqslant m\}$ для некоторого m в силу принципа Банаха — Штейнгауза. В итоге $\rho_C(x) \leqslant m \|x\|_X$. Это показывает, что топология Макки порождается нормой $\|\cdot\|_X$.

Пример 2. Из задачи 52 мы увидим, что любое пространство Фреше X допускает топологию Макки $\tau(X, X^*)$. Любой *строгий* индуктивный предел пространств Фреше также допускает топологию Макки (задачи 52a, d). В частности, топологию Макки допускают пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Вернемся к вопросу об отыскании всех топологий, **согласованных с двойственностью** между X и Y. Так мы называем локально выпуклую топологию $\mathscr{T}$ на X, если топологическое сопряженное к $\langle X, \mathscr{T} \rangle$ совпадает с Y.

Основная теорема двойственности, описывающая все дуальные топологии, гласит:

Теорема V.22 (теорема Макки — Аренса). Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара. Локально выпуклая топология $\mathscr{T}$ на X согласована с двойственностью между X и Y тогда и только тогда, когда

$$\sigma(X, Y) \subseteq \mathscr{T} \subseteq \tau(X, Y).$$

Доказательство. Геометрическое доказательство см. в дополнении к этому разделу. ∎

Итак, дуальные топологии — это в точности те топологии, которые заключены между слабой топологией и топологией Макки (включая последние).

Мы уже видели, как выразить топологию нормы на банаховом пространстве X в терминах дуальной пары $\langle X, X^* \rangle$. А как обстоит дело с топологией нормы на X^*? Она не совпадает с топологией $\tau(X^*, X)$, если X не рефлексивно, ибо $\tau(X^*, X)$-сопряженное к X^* есть X. Ясно, что топология нормы на X^* — это топология равномерной сходимости на единичном шаре в X, и потому нам нужно описание в терминах локальной выпуклости множеств, содержащихся в шарах. Эта потребность удовлетворяется понятием ограниченного множества. Перед тем как определить это понятие, отметим следующую теорему:

Теорема V.23. Пусть E — локально выпуклое пространство с сопряженным F. Для множества $A \subset E$ следующие условия равносильны:

(a) для любой окрестности U нуля $0 \in E$ имеем $A \subset nU = \{nx \mid x \in U\}$ при некотором n;

(b) поляра A° множества A (определение см. в дополнении к этому разделу) — поглощающее множество;

(c) $\sup\limits_{x \in A} \rho(x) < \infty$ для любой непрерывной полунормы ρ на E;

(d) $\sup\limits_{x \in A} |l(x)| < \infty$ для любого $l \in F$.

Доказательство. Эквивалентность (a) и (c) и (b) и (d), по сути дела,— вопрос определений. Теорема V.4 говорит о том, что из (c) следует (d). Поэтому предположим, что (d) выполнено и непрерывная полунорма ρ задана. Пусть $K_\rho = \{x \in E \mid \rho(x) = 0\}$ и E_ρ — векторное пространство E/K_ρ. Тогда ρ «поднимается» в норму на E_ρ. Пусть π — каноническое отображение $E \longrightarrow E_\rho$ и $A_\rho = \pi[A]$. Легко видеть, что $\sup\limits_{x \in A} \rho(x) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{x \in A_\rho} \rho(x) < \infty$. Пусть $\overline{E}_\rho$ — пополнение E_ρ. Пространство $\overline{E}_\rho$ банахово. Пусть $l \in (E_\rho)^*$. Тогда $l \circ \pi \in E^*$ и

$$\sup_{x \in A} |l(x)| = \sup_{x \in A} |(l \circ \pi)(x)| < \infty.$$

Таким образом, $\sup\limits_{x \in A_\rho} \rho(x) < \infty$ в силу принципа Банаха—Штейнгауза. ∎

Определение. Множество $A \subset E$ локально выпуклого пространства E называется **ограниченным**, если выполнено какое-нибудь одно, а следовательно, и все условия (a)—(d) теоремы V.23.

Из условия (d) видно, что понятие ограниченности одинаково для всех топологий, согласованных с двойственностью между E и F, и, следовательно, это понятие наиболее естественно связано именно с этой двойственностью, а не с какой-то одной топологией на E.

Пример 3. Если X — банахово пространство, то $A \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{x \in A} \|x\| < \infty$, а последнее выполняется тогда и только тогда, когда A содержится в некотором кратном единичного шара. Таким образом, для любого ограниченного линейного отображения на X справедливо неравенство

$$\sup_{x \in A} \| Tx \| \leqslant C_A \| T \|.$$

Пример 4. Пусть X — строгий индуктивный предел пространств X_n, причем каждое X_n — собственное замкнутое подпространство в X_{n+1}. Если x_n — последовательность, для которой $x_n \notin X_n$, то с помощью конструкции, использованной при доказательстве теоремы V.17, можно найти линейный функционал $l \in X^*$, такой, что $\sup_n l(x_n) = \infty$. В итоге любое ограниченное множество $A \subset X$ должно быть на самом деле ограниченным подмножеством некоторого X_n. Таким образом, например, $A \subset \mathscr{D}_\Omega$ ограничено тогда и только тогда, когда (i) существует компакт $K \subset \Omega$, такой, что $\operatorname{supp} f \subset K$, если $f \in A$; (ii) $\sup_{x \in A} \| D^\alpha f \|_\infty < \infty$ для любого $\alpha \in I_+^n$.

Первый пример подсказывает нам, как обобщить топологию нормы на X^*.

Определение. Пусть E — локально выпуклое пространство и F — его сопряженное. **Сильная топология** $\beta(F, E)$ на F — это топология равномерной сходимости на ограниченных подмножествах E, т. е. топология, порождаемая полунормами $\{\rho_A \mid A \subset E$ ограничены$\}$, где $\rho_A(f) = \sup_{x \in A} | f(x) |$.

Любое $\sigma(E, F)$-компактное множество C в E ограничено, потому что $f \in F$ — непрерывные функционалы на C. Следовательно, *сильная топология* $\beta(F, E)$ *сильнее топологии Макки.*

Мы уже обнаружили, что топология $\beta(F, E)$ зависит только от дуальной пары $\langle F, E \rangle$, так что топология нормы на X^* является топологией $\beta(X^*, X)$, если X — банахово пространство. Имея локально выпуклое пространство E, можно образовать его сопряженное E^* и задать на последнем топологию $\beta(E^*, E)$. Сопряженное к E^* в этой топологии называется **вторым сопряженным** пространства E и обозначается E^{**} при наделении его топологией $\beta(E^{**}, E^*)$. Пространство E можно отобразить в E^{**} с помощью канонического отображения ρ: $E \to E^{**}$, задаваемого равенством $\rho(x)(l) = l(x)$. Это отображение *не всегда* непрерывно (задача 54). Если оно является *топологическим* изоморфизмом, то говорят, что E **рефлексивно**, т. е. E рефлексивно, если

(i) $\beta(E^*, E)$-сопряженное к E^* есть E;
(ii) топология $\beta(E, E^*)$ на E совпадает с исходной.

Часто полезен следующий критерий рефлексивности:

Лемма. Пусть E — локально выпуклое пространство. Оно рефлексивно тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

(a) каждое $\sigma(E, E^*)$-замкнутое ограниченное множество в E $\sigma(E, E^*)$-компактно;

(b) каждое $\sigma(E^*, E)$-замкнутое ограниченное множество в E^* $\sigma(E^*, E)$-компактно;

(c) E обладает топологией Макки $\tau(E, E^*)$.

Доказательство. Нетрудно видеть (задача 55), что (a) выполняется тогда и только тогда, когда топологии $\beta(E^*, E)$ и $\tau(E^*, E)$ совпадают, а (b) говорит о том, что $\beta(E, E^*)$ и $\tau(E, E^*)$ одинаковы. Пусть теперь E рефлексивно. Поскольку $E = E^{**}$, топология $\beta(E^*, E)$ согласована с двойственностью, так что $\beta(E^*, E) \subset \tau(E^*, E)$ в силу теоремы Макки — Аренса; но $\tau \subset \beta$, поэтому $\beta(E^*, E) = \tau(E^*, E)$. Аналогично ввиду того, что сопряженное к E есть E^* и E обладает топологией $\beta(E, E^*)$, $\beta(E, E^*) = \tau(E, E^*)$ и E обладает топологией Макки. Обратно, пусть (a) — (c) выполнены. В силу (a), $E = E^{**}$ как векторные пространства, поскольку в этом случае $\beta(E^*, E) = \tau(E^*, E)$, а по теореме V.22 топология Макки согласована с двойственностью. В силу (b) и (c), E обладает топологией $\beta(E, E^*)$. Следовательно, E рефлексивно. ∎

С помощью этой леммы можно доказать (задачи 56, 57), что справедлива

Теорема V.24. Пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{D}_\Omega$ и $\mathscr{E}_D$ рефлексивны.

В общем случае топология Макки намного сильнее слабой топологии, поэтому множеств, компактных в топологии Макки, значительно меньше, чем слабо компактных. Например, единичный шар в бесконечномерном банаховом пространстве никогда не компактен по норме (задача 4), но слабо компактен, если X рефлексивно. Следовательно, общие теоремы о компактности в топологии Макки являются особенно сильными результатами. Вот наиболее полезный из них:

Теорема V.25. В пространствах $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{D}_\Omega$ и $\mathscr{E}_D$ любое замкнутое ограниченное множество компактно (в обычной топологии Фреше).

Доказательство. Пусть $C \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ замкнуто и ограничено. Так как $\sup\limits_{f \in C} \| f' \|_\infty \equiv E < \infty$, то $|f(x) - f(y)| \leqslant E\,|x - y|$ всякий раз, когда $f \in C$. В результате C — равномерно равностепенно непрерывное семейство равномерно ограниченных функций. Аналогично, семейство

$$\{x^\alpha D^\beta f \mid f \in C\}$$

равномерно равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. С помощью теоремы Асколи и диагонального метода можно вывести, что любая последовательность в C имеет сходящуюся подпоследовательность. Поскольку C замкнуто, а топология метрическая, это доказывает компактность C. Доказательства в случае $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{S}_D$ аналогичны. В случае $C \subset \mathscr{D}_\Omega$ заметим, что, поскольку C ограничено, $C \subset C^\infty(K)$ при некотором K и, следовательно, можно использовать приведенные выше соображения. ∎

Особенно полезным следствием последней теоремы и теоремы V.8 является

Теорема V.26. *Последовательность* в $\mathscr{S}'$, $\mathscr{D}'$ или $\mathfrak{S}'_D$ сходится в слабой топологии тогда и только тогда, когда она сходится в сильной топологии.

Доказательство. Для $\mathscr{S}'$ и $\mathfrak{S}'_D$ это прямо следует из теорем V.8 и V.25. В случае $\mathscr{D}'$ заметим, что любое ограниченное множество $C \subset \mathscr{D}$ лежит в пространстве $C_0^\infty(K)$, являющемся пространством Фреше, и потому применимы теоремы V.8 и V.25. ∎

Несмотря на то что теорема V.26 по сути является следствием теоремы V.25, мы сформулировали ее как отдельную теорему по той причине, что она весьма полезна в приложениях. Мы призываем читателя обратить внимание на слово *последовательность*. Для направленностей теорема не верна.

Дополнение к § V.7. Поляры и теорема Макки — Аренса

В этом дополнении, которое носит технический характер, доказывается теорема Макки—Аренса и для этого вводится аппарат полярных множеств.

Определение. Пусть $\langle E, F\rangle$—дуальная пара и $A \subset E$. **Полярой** A° множества A называется множество $\{f \in F \mid |f(e)| \leqslant 1 \ \forall e \in A\}$. Если мы хотим явно выделить F, мы пишем $(A)_F^\circ$.

Примеры. (1) Пусть $\mathscr{H}$—гильбертово пространство, сопряженное самому себе. Если A—его подпространство, то $A^\circ \equiv A^\perp$.

(2) Если E—банахово пространство и F—его сопряженное, то

$$\{x \mid \|x\|_E \leqslant k\}^\circ = \{y \mid \|y\|_F \leqslant k^{-1}\}.$$

Легко доказать следующие простые свойства поляр.

Лемма 1. Пусть $\langle E, F\rangle$—дуальная пара. Тогда:

(а) A° выпукла, уравновешена и $\sigma(F, E)$-замкнута;

(b) если $A \subset B$, то $B^\circ \subset A^\circ$;
(c) если $\lambda \neq 0$, то $(\lambda A)^\circ = |\lambda|^{-1} A^\circ$;
(d) $\left(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha\right)^\circ = \bigcap\limits_\alpha A_\alpha^\circ$.

Поляры следующим образом связаны с сопряженными пространствами:

Теорема V.27. Пусть E — локально выпуклое пространство и $\mathcal{U}$ — база окрестностей нуля. Рассмотрим дуальную пару $\langle E, E^*_{\mathrm{alg}}\rangle$, где E^*_{alg} — алгебраическое сопряженное, т. е. множество всех линейных функционалов из E в $\mathbb{C}$. Тогда топологическое сопряженное пространства E есть $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U^\circ$, где поляры взяты относительно E^*_{alg}.

Доказательство. Функционал $l \in E^*_{\mathrm{alg}}$ непрерывен тогда и только тогда, когда $|l(x)| \leqslant 1$ для всех x из некоторого $U \in \mathcal{U}$, т. е. тогда и только тогда, когда $l \in U^\circ$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$. ∎

Теорема V.28 (теорема о биполяре). Пусть E и F — дуальная пара. Тогда в топологии $\sigma(E, F)$ на E справедливо равенство

$$E^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{a.c.h.}\,(E)},$$

где a.c.h. (E) — абсолютно выпуклая оболочка E, т. е. наименьшее уравновешенное выпуклое множество, содержащее E:

$$\mathrm{a.c.h.}\,(E) = \left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \in E,\ \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n| = 1,\ N = 1, 2, \ldots \right\},$$

и замыкание взято в топологии $\sigma(E, F)$.

Доказательство. Пусть $E_C = \overline{\mathrm{a.c.h.}\,(E)}$. Ясно, что $E \subset E^{\circ\circ}$, и, поскольку $(E^\circ)^\circ$ выпукло, уравновешено и $\sigma(E, F)$-замкнуто, $E_C \subset (E^\circ)^\circ$. С другой стороны, если $x \notin E_C$, то можно найти $l \in F$, такой, что $\mathrm{Re}\, l(e) \leqslant 1$ для $e \in E_C$ и $\mathrm{Re}\, l(x) > 1$ (теорема V.4). Поскольку E_C уравновешено, $\sup\limits_{e \in E_C} |l(e)| \leqslant 1$, так что $l \in E^\circ$. Но тогда из $|l(x)| > 1$ вытекает, что $x \notin E^{\circ\circ}$. ∎

Лемма 2. Топология Макки согласована с двойственностью.

Доказательство. Используем теорему V.27 для того, чтобы вычислить $\tau(E, F)$-сопряженное к E. Полунормы $\{\rho_C\}$, где C пробегает все $\sigma(F, E)$-компактные абсолютно выпуклые множества в F, порождают топологию $\tau(E, F)$. Рассмотрим $C \subset F \subset E^*_{\mathrm{alg}}$. Поскольку сужение топологии $\sigma(E^*_{\mathrm{alg}}, E)$ на F есть $\sigma(F, E)$, множество C $\sigma(E^*_{\mathrm{alg}}, E)$-компактно, и потому $\sigma(E^*_{\mathrm{alg}}, E)$-замкнуто в E^*_{alg}. Таким образом, по теореме V.28 $(C^\circ)^\circ_{E^*_{\mathrm{alg}}} = C$. Но

$C^{\circ}=\{x\,|\,|\rho_C(x)|\leqslant 1\}$. Поэтому множества

$$\{C^{\circ}\,|\,C\text{—выпуклое уравновешенное } \sigma(F, E)\text{-компактное подмножество в } F\}$$

образуют в E базу окрестностей нуля топологии $\tau(E, F)$. Следовательно,

$$E_{\tau}^{*}=\bigcup_{C}(C^{\circ})^{\circ}_{E^{*}_{\mathrm{alg}}}=\bigcup_{C} C=F. \blacksquare$$

Лемма 3 (теорема Бурбаки—Алаоглу). Пусть $U\subset E$—уравновешенная выпуклая окрестность нуля некоторой топологии, согласованной с двойственностью между E и F. Тогда U°_{F} есть $\sigma(F, E)$-компактное множество в F.

Доказательство. По существу это другая формулировка теоремы Бурбаки—Алаоглу (теоремы IV.21); см. задачу 58. ■

Лемма 4. Каждая топология, согласованная с двойственностью, слабее топологии Макки.

Доказательство. Пусть ρ—полунорма на E с некоторой топологией, согласованной с двойственностью. Покажем, что $\rho=\rho_C$ для некоторого $\sigma(F, E)$-компактного выпуклого подмножества C в F. Пусть $U=\{x\,|\,|\rho(x)|\leqslant 1\}$. Тогда U уравновешено, выпукло и $\sigma(E, F)$-замкнуто в силу теоремы V.4 (см. задачу 20с). Следовательно, по теореме о биполяре $(U^{\circ})^{\circ}=U$. Пусть $C=U^{\circ}\subset F$. В силу леммы 3 подмножество C $\sigma(F, E)$-компактно и выпукло. Но по определению $(U^{\circ})^{\circ}=\{x\,|\,|\rho_C(x)|\leqslant 1\}=U$, так что $\rho_C=\rho$. ■

Теперь мы готовы привести

Доказательство теоремы V.22. Поскольку топологии $\sigma(E, F)$ и $\tau(E, F)$ согласованы с двойственностью (лемма 2 и теорема IV.20), любая топология $\mathcal{T}$ «между ними» также согласована с двойственностью. Но по определению $\sigma(E, F)$—слабейшая из таких топологий, а по лемме 4 $\tau(E, F)$—сильнейшая из них. ■

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *V.1.* Общую теорию локально выпуклых пространств см. в следующих книгах: Choquet (см. замечания к § IV.1); J. Kelley and I. Namioka, Linear Topological Spaces, Van Nostrand—Reinhold, Princeton, N. J., 1963; G. Köthe, Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1969; А. Робертсон, В. Робертсон, Топологические векторные пространства, «Мир», М., 1967; X. Шефер, Топологические векторные пространства, «Мир», М., 1971.

Книга Робертсонов—прекрасная маленькая монография; из остальных наиболее подходящей для чтения нам кажется книга Кёте. Тем, кто любит задачи, порекомендуем книгу Келли—Намиока, содержащую их в большом количестве, однако заметим, что в целом она не столь хороша, как книга Келли по топологии.

Первая формулировка теоремы Хана—Банаха в терминах разделяющих выпуклых множеств содержится в работе: S. Mazur, Über konvexe Mengen in linearen normierten Raumen, *Studia Math.*, 4 (1933), 70—84. В более современной форме (теорема V.4) ее доказали Эйдельхейт и Какутани: M. Eidelheit, Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Raumen, *Studia Math.*, 6 (1936), 104—111; S. Kakutani, Ein Beweis der Satzes von M. Eidelheit über konvexe Mengen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 13 (1937), 93—94.

Локально выпуклые пространства—это топологические векторные пространства, в которых выполняется теорема Хана—Банаха, и потому они обладают обширными топологическими сопряженными. Пространства L^p при $0 < p < 1$ служат примером пространств, на которых нет ни одного непрерывного линейного функционала; см. Кёте, стр. 156—158.

§ *V.2.* Термин «пространство Фреше» ввел Банах в своей классической книге. Теорема V.5—это частный случай общей теоремы о метризуемости равномерных пространств; см. Дж. Келли, Общая топология, стр. 246.

§ *V.3* и *V.4*. Теория обобщенных функций, включая распределения умеренного роста, была развита Л. Шварцем и очень хорошо описана в его классической книге Théorie des distributions, v. I—II, Hermann, Paris, 1957, 1959. Весьма удачны также пять томов, написанных И. М. Гельфандом, Г. Е. Шиловым и др. и изданных Государственным издательством физико-математической литературы в 1959—1962 гг. под общим названием «Обобщенные функции». Неформально многие из понятий теории обобщенных функций обсуждались уже в 30-е годы Бохнером, Фридрихсом и Соболевым.

Упомянутая в § V.3 процедура перенормировок фейнмановских амплитуд принадлежит Н. Н. Боголюбову и О. С. Парасюку: Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder, *Acta Math.*, 97 (1957), 227—266; см. также K. Hepp, Proof of the Bogoliubov—Parasiuk Theorem on Renormalization, *Commun. Math. Phys.*, 2 (1966), 301—326; E. Speer, Generalized Feynman Amplitudes, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1969.

Теорема о ядре (теорема V.12) служит начальной точкой общего обсуждения пространств, для которых справедливы такие теоремы. Теория ядерных пространств впервые построена в работе: A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., № 16, 1955; см. также Шефер, Гельфанд, т. 4, и F. Trèves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, New York, 1967.

В дополнении к § V.3 мы следовали работе: B. Simon, Distributions and Their Hermite Expansions, *J. Math. Phys.*, 12 (1971), 140—148. Представление пространства $\mathcal{S}$ целыми функциями, тоже позволяющее провести доказательство теоремы о ядре, обсуждается в статье: V. Bargmann, On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform; II: A Family of Related Function Spaces, Application to Distribution Theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (1967), 1—102.

Понятие индуктивного предела впервые систематически разрабатывалось французской школой: Л. Шварцем, Ж. Дьедонне, А. Гротендиком. Существует обобщение понятия строгого индуктивного предела, при котором от инъекции $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ требуется только непрерывность (вместо непрерывности и открытости). Кроме того, при определении такого «индуктивного предела» семейство индексов может быть любым направленным множеством. Дополнительное обсуждение см. у Кёте, стр. 215—233, или у Робертсонов, стр. 114—144, 185—189. В частности, пункт (d) теоремы V.15 доказан у Робертсонов на стр. 186.

Дополнительное обсуждение слабых решений уравнений в частных производных читатель может найти в следующих книгах (перечисляем в порядке требуемого уровня искушенности): I. Stakgold, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, v. 1, 2, Macmillan, New York, 1968; A. Friedman, Partial Differential Equations, Holt, New York, 1969; S. Agmon, Lectures on

Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, N.J., 1965; Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.

§ V.5. Общее обсуждение теорем о неподвижной точке в случае нелинейных отображений см. в книге: T. L. Saaty, J. Bram, Nonlinear Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1964, или: М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1956. Особый интерес представляют попытки применить понятия алгебраической топологии к бесконечномерным пространствам; по этому поводу см. A. Granas, Introduction to Topology of Functions Spaces, Univ. of Chicago Math. Notes, 1961, или J. Cronin, Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1964. Доказательство теоремы V.19 можно найти в книге Н. Данфорда и Дж. Шварца, Линейные операторы, т. I, ИЛ, М., 1962, стр. 490—495. Наиболее глубокая часть теоремы основывается на теореме Брауэра о замкнутом единичном шаре—«аналитическое доказательство» этой теоремы можно найти на стр. 506—508 книги Данфорда и Шварца. Более «естественное» доказательство с точки зрения алгебраической топологии см. в любой книге по теории гомологий, например: П. Хилтон и С. Уайли, Теория гомологий, «Мир», М., 1966.

Тот факт, что теорема Брауэра обобщается на некоторые бесконечномерные пространства, впервые отмечен Дж. Д. Биркгофом и О. Д. Келлогом в статье: G. D. Birkhoff, O. D. Kellogg, Invariant Points in Function Space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **23** (1922), 96—115. В двух статьях Шаудера: J. Schauder, Zur Theorie Stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, *Math. Z.*, **26** (1927), 47—65, 417—431; Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.*, **2** (1930), 171—180, теорема доказана в случае банаховых пространств. Общая теорема доказана А. Н. Тихоновым: Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.*, **111** (1935), 767—776.

Теорему Маркова—Какутани впервые доказал А. А. Марков в работе: Некоторые теоремы об абелевых множествах, *ДАН СССР*, **10** (1936), 311—314, используя теорему Тихонова о произведении компактных множеств. Доказательство, которое привели мы, дал Какутани: S. Kakutani, Two Fixed-Point Theorems Concerning Bicompact Convex Sets, *Proc. Imp. Akad. Tokyo*, **14** (1938), 242—245.

Существует обширная литература, касающаяся различных теорем о неподвижной точке. Например: E. Begle, A Fixed Point Theorem, *Ann. Math.*, **51** (1950), 544—550; H. Bohenhwst, S. Karlin, On a Theorem of Ville, in «Contributions to the Theory of Games» ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton Univer. Press, Princeton, N. J., 1950; F. Browder, Asymptotic Fixed Point Theorems, *Math. Ann.*, **185** (1970), 38—61; S. Eilenberg, D. Montgomery, Fixed Point Theorems for Multi-valued Transformations, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 214—222; K. Fin, A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem, *Math. Ann.*, **142** (1961), 305—310; I. Glicksberg, A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Applications to Nash Equilibrium Points, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 170—174; W. Horn, Some Fixed Point Theorems for Compact Maps and Flows in Banach Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **149** (1970), 391—404; S. Kakutani, A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 457—459; J. Leray, Théorie des points fixés, indice total et nombre de Lefschetz, *Bull. Soc. Math. France*, **87** (1959), 221—223; R. Nussbaum, Some Fixed Point Theorems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77** (1971), 360—365.

§ V.6. Обсуждение приложений теорем о неподвижной точке в теории обыкновенных дифференциальных уравнений см. в книге: L. Loomis, S. Sternberg, Advanced Calculus, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968, pp. 226—304, где рассматривается также применение в дифференциальном исчислении тео-

ремы о сжимающем отображении (pp. 166—167; 230—234); см. также G. Goffman, Preliminaries to Functional Analysis, in «Studies in Modern Analysis» (ed. by R. C. Buck), Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962, pp. 149—150, 153—154. Гофман дает доказательство приведенной в тексте теоремы существования, используя равностепенную непрерывность и теорему Стоуна—Вейерштрасса, но не ссылаясь на теорему Лере—Шаудера—Тихонова.

Интеграл Хаара мы обсуждаем более подробно в гл. XIV. Его историю см. в замечаниях к той же главе.

Общие идеи бутстрапа обсуждаются в книге Дж. Чью, Аналитическая теория S-матрицы, «Мир», М., 1968.

Представление Мандельстама было впервые предложено им в статье: S. Mandelstam, Determination of the Pion—Nucleon Scattering Amplitude from Dispersion Relations and Unitarity, General Theory, *Phys. Rev.*, **112** (1958), 1344—1360. В теории потенциального рассеяния оно впервые было доказано в работе: R. Blankenbecker, M. L. Goldberger, N. N. Khuri, S. A. Treiman, Mandelstam Representation for Potential Scattering, *Ann. Phys.*, **10** (1960), 62—93. Дополнительное обсуждение случая потенциального рассеяния можно найти в книге В. де Альфаро и Т. Редже, Потенциальное рассеяние, «Мир», М., 1966.

Работу Аткинсона, которую мы обсуждали в § V.6c, можно найти в журнале *Nucl. Phys.*, **B7** (1968), 375—408; **B8** (1968), 377—390; **B13** (1969), 415—436; **B23** (1970), 397—412, где опубликованы статьи: D. Atkinson, A Proof of the Existence of Functions that Satisfy Exactly Both Crossing and Unitarity. Дополнительное обсуждение теорем о неподвижной точке в применении к интегральным уравнениям физики высоких энергий см. в работах: C. Lovelace, Uniqueness and Symmetry Breaking in S-Matrix Theory, *Commun. Math. Phys.*, **4** (1967), 261—302; J. Kupsch, Scattering Amplitudes that Satisfy a Mandelstam Representation with One Subtraction and Unitarity, *Nucl. Phys.*, **B11** (1969), 573—587; R. L. Warnock, Nonlinear Analysis Applied to S-matrix Theory, Boulder Lectures in Theoretical Physics, 1968, Benjamin, New York, 1969, pp. 72—86.

Результаты Мартена об определении фазы амплитуды рассеяния по ее величине и условию унитарности можно найти в статье: A. Martin, Construction of the Scattering Amplitude from Differential Cross Sections, *Nuovo Cimento*, **59A** (1969), 131—151. Обсуждение результатов Мартена и некоторых результатов Аткинсона, относящихся к бутстрапу, основанное только на теореме о сжимающем отображении, содержится в работе: D. Atkinson, Introduction to the Use of Non-Linear Techniques in S-Matrix Theory, *Acta Phys. Austriaca Suppl.*, 7 (1970), 32—70. Первым, кто использовал теоремы о неподвижной точке при изучении вопроса о фазе амплитуды рассеяния, видимо, следует считать Р. Дж. Ньютона, см. R. G. Newton, Determination of the Amplitude from the Differential Cross Section by Unitarity, *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 2050—2055. Примеры дифференциальных сечений, для которых амплитуды определяются неоднозначно (и для которых $M > 1$ в обозначениях примера (d)), построены в работе: J. Crichton, Phase-Shift Ambiguities for Spin-Independent Scattering, *Nuovo Cimento*, **45A** (1966), 256—258.

Применение теорем о неподвижной точке в статистической механике можно найти в следующих источниках: Д. Рюэль, Статистическая механика, «Мир», М., 1971; J. Groenveld, Two Theorems on Classical Many-Particle Systems, *Phys. Lett.*, **3** (1962), 50—51; O. Penrose, Convergence of Fugacity Expansions for Fluids and Lattice Gases, *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 1312—1320; D. Ruelle, Correlation Functions of Classical Gases, *Ann. Phys.*, **25** (1963), 109—120; G. Gallavotti, S. Miracle-Sole, Correlation Functions of a Lattice System, *Commun. Math. Phys.*, 7 (1968), 274—288.

§ V.7. Понятие дуальной пары восходит к работам Ж. Дьедонне и Дж. Макки. Теорема Макки—Аренса впервые была доказана Макки: G. Mackey, On Convex Topological Linear Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946), 519—

537, и Аренсом: R. F. Arens, Duality in Linear Spaces, *Duke Math. J.*, 14 (1947), 787—794.

Пространство, в котором каждое замкнутое выпуклое уравновешенное поглощающее множество является окрестностью нуля, называется *бочечным*. По теореме Бэра каждое пространство Фреше бочечно, и путем элементарных рассуждений можно показать, что строгий индуктивный предел пространств Фреше—также бочечное пространство. Бочечное пространство, в котором каждое замкнутое ограниченное множество компактно, называется *монтелевым*. Таким образом, теорема V.25 утверждает, что определенные пространства являются монтелевыми. Монтелевы пространства автоматически рефлексивны (поэтому теорема V.24 следует из теоремы V.25), а их сопряженные при наделении сильной топологией Макки также становятся монтелевыми. Подробнее см. в книге Кёте, стр. 369—372. Монтелевы, в частности, пространства $\mathscr{S}'$ и $\mathscr{D}'$.

Поляра A° часто определяется так: $A^\circ=\{f\in F \mid \operatorname{Re} f(e)\geqslant -1$ для всех $e\in A\}$. Если A выпукло и уравновешено, то это определение совпадает с данным нами. Но в случае, когда A—конус, новое определение значительно полезнее. Например, при определении, приведенном в тексте, поляра множества $\{f\in C(X) \mid f\geqslant 0\}$ равна $\{0\}$, тогда как при новом определении полярой оказывается множество всех положительных мер.

ЗАДАЧИ

1. (a) Докажите, что локально выпуклое пространство имеет топологию, задаваемую одной нормой, если эта топология порождается конечным числом полунорм.
(b) Докажите, что локально выпуклое пространство имеет топологию, порождаемую одной нормой, тогда и только тогда, когда нуль обладает ограниченной окрестностью.

2. Пусть X—бесконечномерное локально выпуклое пространство и X^*—его сопряженное. Докажите, что ни одна $\sigma(X, X^*)$-непрерывная полунорма не является нормой, так что переход к полунормам существен.

3. (a) Пусть $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$—семейство полунорм, такое, что некоторая конечная сумма $\rho_{\alpha_1}+\ldots+\rho_{\alpha_n}$ является нормой. Докажите, что $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ эквивалентно некоторому семейству норм.
(b) Докажите, что любая локально выпуклая топология на $\mathbb{R}^n$ совпадает с обычной топологией. [*Указание*. Используйте эквивалентность всех норм на $\mathbb{R}^n$ и следующее построение. Возьмем полунорму $\rho_1\neq 0$ и положим $V_1=\{x \mid \rho_1(x)=0\}$; $\dim V_1\leqslant n-1$. Если $V_1\neq\{0\}$, возьмем такие $x_1\in V_1$ и ρ_2, чтобы $\rho_2(x_1)\neq 0$. Положим $V_2=\{x \mid (\rho_1+\rho_2)(x)=0\}$; $\dim V_2\leqslant n-2$; и т. д.]
(c) Пусть X—локально выпуклое пространство. Покажите, что любой линейный функционал, определенный на конечномерном подпространстве в X, имеет непрерывное продолжение на все X.
(d) Докажите, что любое конечномерное подпространство локально выпуклого пространства замкнуто.

4. В этой задаче требуется доказать, что каждое локально компактное локально выпуклое пространство конечномерно.
(a) Пусть U—компактная окрестность нуля. Покажите, что можно найти такие $x_1, \ldots, x_n$, что $U\subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i+{}^1/_2U)$, и, следовательно, такое конечномерное пространство M, что $U\subset M+{}^1/_2U$.
(b) Докажите, что $U\subset M+(1/2)^m U$ для любого m.

(c) Докажите, что $U \subset \overline{M}$.

(d) Выведите отсюда, что $\overline{M} = X = M$.

5. Пусть X — банахово пространство, X^* и X^{**} — его сопряженное и второе сопряженное. Пусть X_1 — единичный шар в X, а X_1^{**} — единичный шар в X^{**}. Докажите, что

(a) X_1 $\sigma(X^{**}, X^*)$-плотно в X_1^{**}. [*Указание*: воспользуйтесь теоремой V.6 (c) применительно к X^* с топологией $\sigma(X^{**}, X^*)$.]

(b) X рефлексивно тогда и только тогда, когда его единичный шар $\sigma(X, X^*)$-компактен.

†*6*. Докажите три предложения в начале § V.1.

†*7*. Докажите, что семейства $\{\rho_C^{(2)}\}$ и $\{\rho_C\}$ на $\mathcal{G}_D$ эквивалентны. [*Указание*: используйте интегральную формулу Коши, проинтегрированную по кольцевой области.]

†*8*. Пусть C — поглощающее подмножество в V, такое, что $tx \in C$, если $x \in C$ и $0 \leqslant t < 1$. Пусть ρ — функционал Минковского для C. Докажите, что:

(a) $\rho(tx) = t\rho(x)$, если $t \geqslant 0$;

(b) $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$ тогда и только тогда, когда $t(^1/_2\, x + {}^1/_2\, y) \in C$ для всех x, $y \in C$ и $0 \leqslant t < 1$;

(c) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$ тогда и только тогда, когда $\lambda u \in C$ для всех $u \in C$ и таких λ, что $|\lambda| < 1$;

(d) $\{x \mid \rho(x) < 1\} \subset C \subset \{x \mid \rho(x) \leqslant 1\}$.

†*9*. Докажите теорему V.2.

†*10*. (a) Завершите доказательство теоремы V.5.

(b) Докажите предложение, следующее за теоремой V.5.

11. Пусть A и B — поглощающие множества, обладающие таким свойством: если $x \in A$ (соответственно B) и $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $tx \in A$ (соответственно B). Пусть ρ_A, ρ_B — функционалы Минковского. Докажите, что:

(a) $\rho_B \leqslant \rho_A$ тогда и только тогда, когда $tA \subset B$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$;

(b) $\rho_{A \cap B} = \max(\rho_A, \rho_B)$;

(c) $\rho_{A \cup B} = \min(\rho_A, \rho_B)$.

12. В теории функций нескольких комплексных переменных встречаются открытые в $\mathbf{C}^n$ множества O, O', $O \subset O'$, обладающие тем свойством, что любая аналитическая в O функция имеет продолжение в O'. В таком случае пусть $K \subset O$ — компакт, и пусть $\hat{K} = \{z \in O' \mid |f(z)| \leqslant \sup_{w \in K} |f(w)|$ для всех f, аналитических в $O'\}$. В этой теории доказывается полезная теорема о том, что

$$\bigcup_{\substack{K \subset O \\ K \text{ компактное}}} \hat{K} = O'.$$

(a) Покажите, что равенство $\bigcup \hat{K} = O'$ следует из совпадения топологий равномерной сходимости на компактных подмножествах в O и на компактах в O'.

(b) Используйте теорему V.6 для доказательства совпадения топологий, упомянутых в пункте (a).

13. Пусть Z — метрическое пространство. Пусть X^* — сопряженное к некоторому пространству Фреше. Предположим, что $f: Z \to X^*$ непрерывно, когда X^* наделено топологией $\sigma(X^*, X)$. Докажите, что это отображение непрерывно и тогда, когда X^* наделено топологией $\tau(X^*, X)$. [*Указание*: используйте теорему V.8.]

14. Как изменятся выводы задачи 13, если в ней заменить Z на произв льное топологическое пространство?

15. В этой задаче требуется доказать, что каждое равномерно выпуклое банахово пространство (определение равномерной выпуклости см. в задаче 25 гл. III) рефлексивно.

(a) Пусть X равномерно выпукло и $x, y \in X$, $l \in X^*$. Докажите, что $\|x-y\| < \varepsilon$, если $\|x\| = \|y\| = \|l\| = 1$, $\operatorname{Re} l(x) > 1-\delta(\varepsilon)$ и $\operatorname{Re} l(y) > 1-\delta(\varepsilon)$.

(b) Пусть X равномерно выпукло. Предположим, что $\{x_\alpha\}$—такая направленность в X, что $x_\alpha \to x \in X^{**}$ в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$. Предположим, что $\|x\| = 1$, $\|x_\alpha\| \leqslant 1$ для всех α. Используя (a), докажите, что x_α—направленность Коши относительно $\|\cdot\|$.

(c) Докажите, что $X = X^{**}$. (Используйте задачу 5a.)

Замечание. Теорему, сформулированную в задаче 15, доказали Д. П. Мильман (О некоторых признаках регулярности пространств типа (B), *ДАН СССР*, **20** (1938), 243—246) и Петтис (B. J. Pettis, A proof that every uniformly convex space is reflexive, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 249—253).

16. (a) Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$ и φ_y—функция на $\mathcal{S}$, определяемая равенством $\varphi_y(x) = \varphi(x-y)$. Докажите, что отображение $y \mapsto \varphi_y$ есть бесконечно дифференцируемая функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ со свойством $D^\alpha(\varphi_y) = (-1)^\alpha (D^\alpha \varphi)_y$. Сказать, что $y \mapsto \varphi_y$ обладает производной $\partial\varphi_y/\partial y_j$ как функция со значениями в $\mathcal{S}$,—это значит утверждать, что

$$\lim_{y \to y_0} |y-y_0|^{-1} \left[\varphi_y - \varphi_{y_0} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_j} (\varphi_y) \cdot (y-y_0)_j \right] = 0$$

в топологии $\mathcal{S}$. Докажите также, что $|y|^n D^\alpha \varphi_y \to 0$ для всех α, n при $y \to \infty$.

(b) Пусть $T \in \mathcal{S}'$. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$. Определим функцию T^φ равенством $T^\varphi(y) = T(\varphi_y)$. Докажите, что $T^\varphi \in \mathcal{S}$.

(c) Пусть $\varphi_n \in \mathcal{S}$ и $\varphi_n \to \delta$ в слабой топологии на $\mathcal{S}'$. Докажите, что $T^{\varphi_n} \to T$ для всех $T \in \mathcal{S}'$ в слабой топологии на $\mathcal{S}'$.

(d) Докажите, что $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{S}'$.

17. Пусть X и Y—локально выпуклые пространства, и пусть X^*, Y^*—их топологические сопряженные. Предположим, что $T: X \to Y$ линейно и непрерывно. Определим сопряженное отображение $T': Y^* \to X^*$ равенством $[T'(y^*)](x) = y^*(Tx)$. Докажите, что:

(a) если X^* и Y^* снабжены топологиями $\sigma(X^*, X)$ и $\sigma(Y^*, Y)$, то T' непрерывно;

(b) если X и Y снабжены топологиями $\sigma(X, X^*)$ и $\sigma(Y, Y^*)$, то T непрерывно;

(c) если X^* и Y^* снабжены топологиями $\tau(X^*, X)$ и $\tau(Y^*, Y)$, то T' непрерывно (используйте (b));

(d) отображение T переводит ограниченные подмножества X в ограниченные подмножества Y;

(e) если X^* и Y^* снабжены топологиями $\beta(X^*, X)$ и $\beta(Y^*, Y)$, то T' непрерывно.

18. Пусть X, Y—локально выпуклые пространства и $T: X \to Y$—непрерывное линейное отображение. Зададим на X^* и Y^* слабые топологии, так что $(X^*)^* = X$; $(Y^*)^* = Y$.

(a) Докажите, что в этом случае $(T')' = T$.

(b) Выведите отсюда, что T непрерывно, когда X и Y наделены топологиями $\tau(X, X^*)$ и $\tau(Y, Y^*)$.

(c) Выведите отсюда, что T непрерывно, когда X и Y наделены топологиями $\beta(X, X^*)$ и $\beta(Y, Y^*)$.

19. Пусть X, Y — локально выпуклые пространства и T: $X \longrightarrow Y$ — непрерывное линейное отображение. Пусть T' — сопряженное отображение из Y^* в X^*. Докажите, что:

(a) отображение T' инъективно тогда и только тогда, когда $\overline{\operatorname{Ran} T} = Y$;

(b) отображение T инъективно тогда и только тогда, когда $\overline{\operatorname{Ran} T'} = X^*$ в топологии $\sigma(X^*, X)$ или $\tau(X^*, X)$.

(c) Пусть ι: $\mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}'$ — естественное вложение $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}'$; тогда ι непрерывно, если $\mathscr{S}$ наделено топологией $\sigma(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$, а $\mathscr{S}'$ наделено топологией $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$.

(d) Докажите, что $\iota' = \iota$!

(e) Покажите, что $\iota(\mathscr{S})$ плотно в $\mathscr{S}'$ в топологиях $\tau(\mathscr{S}', \mathscr{S})$ и $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$.

20. Пусть X — локально выпуклое пространство с сопряженным $X^* = Y$.

(a) Докажите, что любое замкнутое подпространство в X $\sigma(X, X^*)$-замкнуто в нем.

(b) Докажите, что все топологии, согласованные с двойственностью между X и Y, обладают одинаковыми замкнутыми подпространствами.

(c) Пусть C — замкнутое выпуклое подмножество в X. Докажите, что C замкнуто в топологии $\sigma(X, X^*)$. [*Указание*: воспользуйтесь теоремой о разделении.]

(d) Докажите, что все топологии, согласованные с двойственностью между X и Y, обладают одинаковыми замкнутыми выпуклыми множествами.

(e) Верно ли предыдущее утверждение для компактных выпуклых множеств?

†*21*. Докажите непосредственно, что δ' (пример 5 § V.3) лежит в $\mathscr{S}'$. Докажите, что δ' не порождается никакой мерой.

†*22*. (a) Докажите, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+\varepsilon^2} = \mathscr{P}\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$$

в слабой топологии на $\mathscr{S}'$.

(b) Пусть φ_n — последовательность ограниченных функций на $\mathbb{R}$, таких, что $\varphi_n \longrightarrow 0$ равномерно на компактах множества $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $\varphi_n(x) \geqslant 0$ и $\int \varphi_n(x)\,dx = c$ не зависит от n. Докажите, что $\varphi_n \longrightarrow c\delta(x-x_0)$ в топологии $\mathscr{S}'$.

(c) Докажите, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{(x-x_0)^2+\varepsilon^2} = \pi\delta(x-x_0).$$

(d) Докажите формулу (V.4).

†*23*. (a) Пусть $F \in O_M$. Докажите, что $f \mapsto Ff$ — ограниченное отображение $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$.

(b) Пусть F — измеримая функция, такая, что $Ff \in \mathscr{S}$ для всех $f \in \mathscr{S}$. Докажите, что $F \in C^\infty$.

(c) Докажите, что $F \in O_M$, если отображение $f \mapsto Ff$ непрерывно.

24. Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ и $|T(f)| \leqslant C \sum\limits_{\alpha, \beta=0}^{n} \left\| x^\alpha \left(\frac{d}{dx}\right)^\beta f \right\|_\infty$. Отобразим $\mathscr{S}$ в $C_n(\mathbb{R}) \oplus \ldots \oplus C_n(\mathbb{R})$ ($(n+1)$ раз) с помощью функции $f \mapsto \langle f, f', \ldots, f^{(n)} \rangle$; здесь $C_n(\mathbb{R})$ — банахово пространство непрерывных функций f, для которых $\sup \|x^\alpha f\|_\infty < \infty$ для $\alpha = 1, \ldots, n$, с нормой $\|f\|^{(n)} = \sum_{\alpha=0}^{n} \|x^\alpha f\|_\infty$. С помощью теорем Хана—Банаха и Рисса—Маркова докажите, что T представимо в виде

$$Tf = \sum_{\beta=0}^{n} \int D^\beta f \, d\mu_\beta,$$

где $\mu_0, \ldots, \mu_n$—комплексные меры полиномиального роста.

25. (a) Пусть μ—полиномиально ограниченная мера и $F(x) = \int_0^x d\mu$; $G(x) = \int_0^x F(y)\,dy$. Докажите, что в смысле обобщенных функций $\mu = G''$.
(b) С помощью задач 24 и 25a докажите теорему регулярности для $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

26. Подражая задачам 24 и 25, докажите теорему локальной регулярности для $\mathscr{D}'$: для заданных $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и компактного множества $C \subset \mathbb{R}^n$ существуют непрерывная функция F на C и α, такие, что $Tf = (-1)^\alpha \int F(x)(D^\alpha f)(x)\,dx$ для всех $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ с носителем в C.

27. Пусть U_a—действующий в $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ оператор сдвига на a. Пусть d/dx—операция дифференцирования на $\mathscr{S}'$. Докажите, что $(U_a - 1)a^{-1}$ поточечно сходится в топологии $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$ к d/dx.

†28. (a) Докажите, что $V(A)$, определенное операцией 4 в § V.3, совпадает с $(V(A)\varphi)(x) = \varphi(A^{-1}x)$, если $\varphi \in \mathscr{S}$ рассматривается как элемент $\mathscr{S}'$.
(b) Покажите, что носитель функции $\varphi \in \mathscr{S}$, рассматриваемой как распределение, совпадает с $\{x \mid \varphi(x) \neq 0\}$.

†29. (a) Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi(0) = 0$. Докажите, что существуют $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{S}$, для которых $0 \notin \operatorname{supp}\varphi_k$ при всех k, такие, что $\|x^\alpha(\varphi_k - \varphi)\|_\infty \to 0$ при всех $\alpha \in I_+^n$.
(b) Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $(D^\beta\varphi)(0) = 0$ для всех $\beta \in I_+^n$ с $|\beta| \leqslant m$. Докажите, что существуют $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{S}$, для которых $0 \notin \operatorname{supp}\varphi_k$ при всех k, такие, что $\|x^\alpha D^\beta(\varphi_k - \varphi)\|_\infty \to 0$ при всех $\alpha \in I_+^n$ и β с $|\beta| \leqslant m$.
(c) Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и

$$|T(f)| \leqslant C \sum_{\substack{|\beta| < m \\ |\alpha| < n}} \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty.$$

Предположим, что $\operatorname{supp} T = \{0\}$, и пусть $\varphi \in \mathscr{S}$ и $(D^\beta\varphi)(0) = 0$ для $|\beta| \leqslant m$. Докажите, что $T(\varphi) = 0$.
(d) Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет требованию

$$|T(\cdot)| \leqslant C \sum_{\substack{|\beta| < m \\ |\alpha| < n}} \|x^\alpha D^\beta \cdot\|_\infty.$$

Пусть $\operatorname{supp} T = \{0\}$. Найдите постоянные $\{C_\beta\}_{|\beta| < m}$, такие, чтобы

$$T(\psi) = \sum_{|\beta| < m} (-1)^\beta C_\beta (D^\beta\psi)(0)$$

для всех $\psi \in \mathscr{S}$. [*Указание*: возьмите $\eta \in \mathscr{S}$, равную тождественно 1 вблизи 0, и положите

$$\varphi = \psi - \eta \sum_{|\beta| < m} \frac{x^\beta}{\beta!} (D^\beta \psi)(0).]$$

(e) Докажите теорему V.11.

30. Пусть $F \in O_M(\mathbb{R})$, $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Пусть $'$ обозначает дифференцирование в $\mathscr{S}'$. Используя определения умножения и $'$, докажите, что $(FT)' = F'T + FT'$.

31. Отображение $S: \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ называют **локальным**, если $\operatorname{supp} S\varphi \subset \Omega$, когда $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$. Отображение $S: \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S}'$ называют **локальным**, если $\operatorname{supp} ST \subset \Omega$, когда $\operatorname{supp} T \subset \Omega$.
(a) Пусть $S: \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ локально. Докажите, что $S': \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S}'$ локально.
(b) Какие из операций 1—4 локальны?

**32.* Говорят, что порядок распределения $T \in \mathscr{S}'$ не превосходит n, если

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ |\beta| \leqslant n}} \| x^\alpha D^\beta \varphi \|$$

при некоторых C и k. Говорят, что порядок распределения не превосходит $n-$, если для некоторого фиксированного j и любого $D > 0$ существуют такие k и C, что

$$|T(\varphi)| \leqslant D \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant j \\ |\beta| = n}} \| x^\alpha D^\beta \varphi \| + C \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ |\beta| \leqslant n-1}} \| x^\alpha D^\beta \varphi \|.$$

Мы говорим, что T имеет **порядок** n, если T есть распределение порядка, не превосходящего n, но не является распределением порядка, не превосходящего $n-$. Аналогично, мы говорим, что T имеет **порядок** $n-$, если T есть распределение порядка, не превосходящего $n-$, но не является распределением порядка, не превосходящего $n-1$.
(a) Докажите, что перенормировки $(1/x)_{+;M}$ из примера 9 имеют порядок $1-$.
(b) Докажите, что любая другая перенормировка $(1/x)_+$ имеет порядок, не меньший 1.

**33.* Докажите, что на $L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ не всякая билинейная форма имеет вид $F(f, g) = \int F(x, y) f(x) g(y)\, dx\, dy$ при некотором $F(x, y) \in L^q(\mathbb{R}^2)$.
[*Указание*: если $p \geqslant 2$, пусть $F(f, g) = \int G(x) f(x) g(x)\, dx$ для некоторого $G \in L^r$, $1/r + 2/p = 1$; если $1 < p \leqslant 2$, пусть $F(f, g) = \int G(x-y) f(x) g(y)\, dx\, dy$ с $G \in L^r$, $1/r = 2(1 - 1/p)$.]

Замечания. 1) Пример, данный в указании при $1 < p \leqslant 2$, требует применения неравенства Юнга, которое мы докажем в § IX.4.
2) Для $L^1(\mathbb{R})$ справедлива теорема о ядре, т. е. каждая билинейная форма на $L^1(\mathbb{R})$ имеет вид $F(f, g) = \int F(x, y) f(x) g(y)\, dx\, dy$ с некоторой функцией $F \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Интересное упражнение—доказать это исходя из теоремы Данфорда—Петтиса, которая гласит: пусть E—сепарабельное банахово пространство и $T: E \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$; тогда существует измеримая функция g на $\mathbb{R}$ со значениями в E^*, такая, что $\sup_{x \in \mathbb{R}} \| g(x) \| = \| T \|$ и

$T(e)=\int [g(x)](e)\,dx$. Доказательство этой теоремы см. у Трева (ссылка в замечаниях к § V.3), стр. 469—473.

†34. Докажите, что раздельно непрерывная мультилинейная форма на $F_1\times\ldots\times F_n$ непрерывна, если все F_i суть пространства Фреше.

†35. Распространите доказательство теоремы о ядре, данное в дополнении к § V.3, на мультилинейные функционалы; точнее, докажите, что если $B(f_1, \ldots, f_k)$ — раздельно непрерывный k-линейный функционал на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n_1})\times\ldots\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n_k})$, то существует такое $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k})$, что

$$B(f_1, \ldots, f_k)=T(f_1\otimes\ldots\otimes f_k).$$

†36. Разберитесь в деталях доказательства леммы 2 в дополнении к § V.3.

†37. Закончите доказательство следствия 3 в дополнении к § V.3.

38. Определим множество $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^n)=\{f\mid f$ — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$, лежащая со своими производными в $L^\infty(\mathbb{R}^n)\}$. Наделим $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^n)$ полунормами $\{\|\cdot\|_{\alpha,\,\infty}\}$, где $\|f\|_{\alpha,\,\infty}=\|D^\alpha f\|_\infty$.
(a) Докажите, что $\mathscr{D}_{L^\infty}$ полно.
(b) Докажите, что $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ не замкнуто в $\mathscr{D}_{L^\infty}$, и найдите его замыкание.

39. Пусть $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)=\{f\mid f$ — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n\}$. Пусть для любого целого m и $\alpha\in I_+^n$

$$\|f\|_{(m),\,\alpha}=\sup_{|x|\leqslant m}|(D^\alpha f)(x)|.$$

Снабдим $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ полунормами $\{\|\cdot\|_{(m),\,\alpha}\mid\alpha\in I_+^n,\ m\in I_+\}$.
(a) Докажите, что $\mathscr{E}$ полно.
(b) Докажите, что естественное вложение $\iota:\mathscr{D}\subset\mathscr{E}$ непрерывно, так что естественным образом $\iota':\mathscr{E}'\subset\mathscr{D}'$.
(c) Докажите, что $T\in\mathscr{D}'$ принадлежит $\mathscr{E}'$ тогда и только тогда, когда T имеет компактный носитель.

40. Докажите, что естественное вложение $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}$ непрерывно, и выведите отсюда, что $\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'$ естественным образом. Докажите, что $\mathscr{E}'\subset\mathscr{S}'$.

†41. Докажите часть (b) теоремы V.15.

42. Обобщив лемму 1 дополнения к § V.3, докажите, что семейства полунорм $\{\|\cdot\|_{\alpha,\,\beta,\,\infty}\}$ и $\{\|\cdot\|_{\alpha,\,\beta,\,p}\}$ эквивалентны при любом фиксированном $1\leqslant p<\infty$, если $\|f\|_{\alpha,\,\beta,\,p}=\|x^\alpha D^\beta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

43. *(a) Докажите, что s_m и s_n изоморфны, т. е. существует непрерывная линейная биекция T: $s_m\longrightarrow s_n$ с непрерывной обратной.
(b) Докажите, что $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ топологически изоморфны.

44. Докажите, что семейства $\{\|\cdot\|_\beta\}$ и $\{\|\cdot\|_{\beta;\,p}\}$ норм на s_m эквивалентны, если $\|a\|_{\beta;\,p}^p=\sum_\alpha(\alpha+1)^\beta|a_\alpha|^p$.

45. Пусть X — строгий индуктивный предел последовательности X_n, в которой каждое X_n — собственное замкнутое подпространство в X. Предположим, что $\{U_n\}$ — счетное убывающее семейство окрестностей нуля. Возьмем $x_n\in U_n\setminus X_n$.
(a) Докажите, что $\{x_n\}$ не ограничена.

(b) Покажите, что $\{x_n\}$ была бы ограничена, если бы U_n составляли базу окрестностей.
(c) Выведите отсюда, что X неметризуемо.

†46. (a) Предположим, что X — строгий индуктивный предел пространств X_n. Предположим, что $\{Y_n\}$ — возрастающее семейство подпространств из X, такое, что для любого n существует N, при котором $X_n \subset Y_N$. Докажите, что X — строгий индуктивный предел Y_n.
(b) Пусть $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем K компактно, а Ω открыто. Докажите, что если $\mathcal{D}_\Omega$ наделено топологией, задаваемой некоторым семейством $\{K_n\}$, то сужение этой топологии на $C_0^\infty(K)$ задается нормами $\|D^\alpha f\|_\infty$.
(c) Докажите, что топология на $\mathcal{D}_\Omega$ не зависит от выбора возрастающего семейства K_n компактных множеств.

†47. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — координаты в $\mathbb{R}^n$. Мы говорим, что распределение $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ не зависит от $y_{k+1}, \ldots, y_n$ или что T — функция $y_1, \ldots, y_k$, если для любого сдвига

$$U_{a_{k+1}, \ldots, a_n}: (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}+a_{k+1}, \ldots, y_n+a_n)$$

имеем

$$U_{a_{k+1}, \ldots, a_n} T = T.$$

(a) Пусть F — измеримая функция на $\mathbb{R}^k$, которая локально принадлежит L^1. Пусть T — распределение, порождаемое функцией $F(y_1, \ldots, y_k)$ на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что T не зависит от $y_{k+1}, \ldots, y_n$.
(b) Пусть T не зависит от $y_{k+1}, \ldots, y_n$. Докажите, что $(\partial T/\partial y_i) = 0$ при $i = k+1, \ldots, n$. [*Указание*: см. задачу 27.]
(c) Пусть T — распределение в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, которое есть функция только $x - ct = y_1$. Докажите, что это определение не зависит от того, как выбрана вторая независимая координата y_2.
(d) Пусть T такое же, как в (c). Докажите, что $(\partial T/\partial t) = -c(\partial T/\partial x)$ и что $\partial T/\partial t$ — тоже распределение, зависящее только от $x - ct$.
(e) Выведите отсюда, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T = 0.$$

†48. Пусть T и S — коммутирующие отображения метрического пространства в себя. Пусть $f_T = \{x \mid Tx = x\}$.
(a) Докажите, что $Sx \in f_T$, если $x \in f_T$.
(b) Предположим, что T — строго сжимающее отображение. Докажите, что S имеет неподвижную точку.
(c) Пусть T^n — строго сжимающее отображение при некотором n. Докажите, что T имеет единственную неподвижную точку.

†49. Пусть $X = \{\{x_n\} \in l_2 \mid |x_n| \leq 1/3^n\}$.
(a) Докажите, что X — компактное выпуклое подмножество l_2.
(b) Пусть $f\colon X \to \mathbb{C}$ задано равенством $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_n$. Докажите, что f — непрерывное аффинное линейное отображение на X.
(c) Докажите, что f не имеет непрерывных продолжений на все пространство l_2.

50. Пусть G — группа с абелевой подгруппой N, такой, что G/N абелева (например, семейство вращений и переносов в $\mathbb{R}^2$). Пусть C — компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X. Пусть для каждого $g \in G$ задано T_g — аффинное линейное отображение C в C, такое, что $T_g T_h = T_{gh}$.

(a) Положим $C_N = \{x \in C \mid T_n x = x$ для всех $n \in N\}$. Докажите, что C_N компактно, выпукло и непусто.

(b) Предположим, что g_1, g_2 лежат в одном смежном классе в G/N. Докажите, что $T_{g_1} \restriction C_N = T_{g_2} \restriction C_N$.

(c) Докажите, что существует такое $x \in C$, что $T_g x = x$ для всех $g \in G$.

51. Дайте прямое доказательство теоремы V.21.

52. Локально выпуклое пространство X называется **пространством Макки**, или **борнологическим пространством**, если для любого локально выпуклого пространства Y любое линейное отображение T: $X \longrightarrow Y$, переводящее ограниченные множества в ограниченные, непрерывно.

(a) Пусть X — пространство Макки. Докажите, что оно имеет топологию Макки $\tau(X, X^*)$. [*Указание*: рассмотрите id: $X \longrightarrow \langle X, \tau \rangle$.]

(b) Пусть $x_n \longrightarrow 0$ в метризуемом локально выпуклом пространстве. Докажите, что существует $\{\rho_n\} \subset \mathbb{R}$, $\rho_n \longrightarrow \infty$, такая, что $\rho_n x_n \longrightarrow 0$. [*Указание*. Пусть U_n — счетная база окрестностей, $U_{n+1} \subset U_n$. Выберем такое n_k, что из $n \geqslant n_k$ следует $x_n \in \frac{1}{k} U_k$. Положим $\rho_n = k$, если $n_k \leqslant n < n_{k+1}$.]

(c) Докажите, что любое метризуемое локально выпуклое пространство есть пространство Макки. [*Указание:* используйте (b) и учтите ограниченность сходящейся последовательности.]

(d) Докажите, что строгий индуктивный предел $X = \bigcup X_n$, где X_n — собственные замкнутые подпространства X_{n+1}, будет пространством Макки, если каждое X_n — пространство Макки.

(e) Докажите, что строгий индуктивный предел пространств Фреше есть пространство Макки.

(f) Докажите, что естественные топологии на $\mathcal{S}$ и $\mathcal{D}$ суть топологии Макки.

53. Пусть E — локально выпуклое пространство. Определим **естественную топологию** $\eta(E^{**}, E)$ на E^{**} следующим образом. Пусть $\mathcal{U}$ — семейство всех уравновешенных выпуклых окрестностей нуля в E. Для каждого $U \in \mathcal{U}$ пусть $\tilde{U}$ есть E^{**}-поляра множества $U^\circ \subset E^*$. Множество всех $\tilde{U}$ порождает естественную топологию. Докажите, что:

(a) Естественная топология слабее топологии $\beta(E^{**}, E^*)$. [*Указание:* каждое U° ограничено.]

(b) Сужение естественной топологии с E^{**} на E совпадает с исходной топологией на E, т. е. отображение ρ: $E \longrightarrow \langle E^{**}, \eta \rangle$ непрерывно и открыто.

(c) Отображение, *обратное* к естественному вложению ρ: $E \longrightarrow \langle E^{**}, \eta \rangle$, действующее из $\operatorname{Ran} \rho$ в E, всегда непрерывно.

54. Пусть E — банахово пространство со *слабой* топологией. Докажите, что инъекция ρ: $E \longrightarrow \langle E^{**}, \beta \rangle$ *всегда* разрывна, если E бесконечномерно.

†*55*. Пусть $\langle E, F \rangle$ — дуальная пара. Докажите, что каждое $\sigma(E, F)$-замкнутое ограниченное множество в E $\sigma(E, F)$-компактно тогда и только тогда, когда топологии $\tau(F, E)$ и $\beta(F, E)$ на F совпадают.

**56*. (a) Пусть E — пространство Фреше. Докажите, что любое $\sigma(E^*, E)$-замкнутое ограниченное множество в E^* $\sigma(E^*, E)$-компактно. [*Указание:* подражайте доказательству теоремы Банаха — Алаоглу и в критическом месте воспользуйтесь принципом равномерной ограниченности.]

(b) Докажите (a), когда E — строгий индуктивный предел пространств Фреше.

†57. Объединив задачи 52 и 56 с теоремой V.25, докажите теорему V.24.

†58. Докажите лемму 3 в дополнении к § V.7.

59. Пусть $[-a, a] \subset \mathbb{R}$. Пусть $\varphi_n(x) = (2C)^{-1/2} \exp(\pi i n x/C)$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Предположим, что задана $f \in L^2[-a, a]$, и пусть $a_n = (\varphi_n, f)$. Докажите, что $f \in \overline{C_0^\infty}[-a, a]$ тогда и только тогда, когда $n^k a_n \longrightarrow 0$ для всех k (при $n \longrightarrow \infty$). Найдите неравенства для норм, при помощи которых можно доказать, что s и $\overline{C_0^\infty}[-a, a]$ изоморфны. Докажите, что замыкание $C_0^\infty[-a, a]$ лежит в $\mathcal{D}$.

60. (a) Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — раздельно непрерывный билинейный функционал на $C_0^\infty[-a, a]$. Подражая доказательству, приведенному в дополнении к § V.3, и используя задачу 59, докажите, что в $C_0^\infty([-a, a] \times [-a, a])^*$ существует T, для которого $B(f, g) = T(f \otimes g)$.

(b) Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — раздельно непрерывный билинейный функционал на $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. Докажите, что в $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}^2}$ существует T, для которого $B(f, g) = T(f \otimes g)$.

61. Докажите, что $C_0^\infty(\mathbb{R})$ не пусто, т. е. постройте явную бесконечно дифференцируемую функцию с компактным носителем. [*Указание:* сначала покажите, что функция $f(x) = \chi_{(0, \infty)}(x) e^{-1/x}$ бесконечно дифференцируема; здесь $\chi_{(0, \infty)}$ — характеристическая функция интервала $(0, \infty)$.]

VI. ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Я посетил также математическую школу, где учитель преподает по такому методу, какой едва ли возможно представить себе у нас в Европе. Каждая теорема с доказательством тщательно переписывается на тоненькой облатке чернилами, составленными из микстуры против головной боли. Ученик глотает облатку натощак и в течение следующих трех дней не ест ничего, кроме хлеба и воды. Когда облатка переваривается, микстура поднимается в его мозг, принося с собой туда же теорему.

ДЖОНАТАН СВИФТ, «ПУТЕШЕСТВИЯ ГУЛЛИВЕРА»[1])

VI.1. Топологии на множестве ограниченных операторов

Мы уже ввели банахово пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ операторов из одного банахова пространства в другое. В этой главе мы изучаем его более подробно. Особо отметим случай, с которым в дальнейшем мы будем сталкиваться наиболее часто, именно $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Теорема III.2 показывает, что $\mathcal{L}(X, Y)$ — банахово пространство с нормой

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Индуцированная ею топология на $\mathcal{L}(X, Y)$ называется **равномерной операторной топологией** (или **топологией нормы**). В этой топологии отображение $\langle A, B\rangle \mapsto BA$ пространства $\mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z)$ в $\mathcal{L}(X, Z)$ непрерывно по совокупности переменных.

Введем теперь на $\mathcal{L}(X, Y)$ еще две топологии: слабую и сильную операторные топологии. На $\mathcal{L}(X, Y)$ можно задать и другие интересные и полезные топологии, но мы отложим это до тех пор, пока они нам понадобятся (в III томе) (см., однако, обсуждение в конце § 6 и Замечания).

Сильная операторная топология — это слабейшая топология на $\mathcal{L}(X, Y)$, в которой отображения

$$E_x\colon \mathcal{L}(X, Y) \to Y,$$

заданные равенством $E_x(T) = Tx$, непрерывны для всех $x \in X$. База окрестностей нуля задается множествами вида

$$\{S \mid S \in \mathcal{L}(X, Y),\ \|Sx_i\|_Y < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где $\{x_i\}_{i=1}^n$ — конечный набор элементов из X, а $\varepsilon > 0$. В этой топологии направленность операторов $\{T_\alpha\}$ сходится к оператору T (обозначается $T_\alpha \xrightarrow{s} T$) тогда и только тогда, когда

[1]) Изд-во «Художественная литература», М., 1967, стр. 219.— *Прим. ред.*

$\|T_\alpha x - Tx\| \to 0$ для всех $x \in X$. Если X, Y, Z бесконечномерны, то отображение $\langle A, B\rangle \mapsto BA$ непрерывно по каждой переменной, но не по их совокупности (см. задачу 6a, b). Мы иногда обозначаем сильные пределы символом s-lim.

Слабая операторная топология на $\mathscr{L}(X, Y)$ — это слабейшая топология, в которой отображения

$$E_{x,l}: \mathscr{L}(X, Y) \to \mathbf{C},$$

заданные равенством $E_{x,l}(T) = l(Tx)$, непрерывны для всех $x \in X$ и $l \in Y^*$. База окрестностей нуля задается множествами вида

$$\{S \mid S \in \mathscr{L}(X, Y), \ |l_i(Tx_j)| < \varepsilon, \ i = 1, \ \ldots, \ n, \ j = 1, \ \ldots, \ m\},$$

где $\{x_i\}_{i=1}^n$ и $\{l_j\}_{j=1}^m$ — конечные семейства элементов из X и Y^* соответственно. Направленность $\{T_\alpha\}$ сходится к оператору T в слабой операторной топологии (обозначается $T_\alpha \xrightarrow{w} T$) тогда и только тогда, когда $|l(T_\alpha x) - l(Tx)| \to 0$ для каждого $l \in Y^*$ и $x \in X$. Отметим, что в случае $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ слабая сходимость $T_\gamma \xrightarrow{w} T$ в точности означает сходимость «матричных элементов» $(y, T_\gamma x)$ к (y, Tx). Если X, Y и Z бесконечномерны, то в слабой операторной топологии отображение $\langle A, B\rangle \mapsto BA$ непрерывно по каждой переменной, но не по совокупности (см. задачу 6c).

Замечание. Читателю не следует путать слабую операторную топологию на $\mathscr{L}(X, Y)$ со слабой топологией, заданной на $\mathscr{L}(X, Y)$ как на банаховом пространстве. Первая из них — это слабейшая топология, в которой непрерывны ограниченные линейные функционалы на $\mathscr{L}(X, Y)$ вида $l(\cdot x)$ для всех $x \in X$ и $l \in Y^*$. Вторая — это слабейшая топология, в которой непрерывны *все* ограниченные линейные функционалы на $\mathscr{L}(X, Y)$ (см. § VI.6).

Отметим, что слабая операторная топология слабее сильной операторной топологии, которая слабее равномерной операторной топологии. В общем случае слабая и сильная операторные топологии на $\mathscr{L}(X, Y)$ не удовлетворяют первой аксиоме счетности, и потому вопросы компактности, сходимости направленностей и секвенциальной сходимости достаточно сложны. Следующий простой пример демонстрирует различные топологии на $\mathscr{L}(l_2)$.

Пример. Рассмотрим ограниченные операторы на l_2:

(i) Определим T_n равенством

$$T_n(\xi_1, \xi_2, \ldots) = \left(\frac{1}{n}\xi_1, \frac{1}{n}\xi_2, \ldots\right).$$

Тогда $T_n \to 0$ равномерно.

(ii) Определим S_n равенством

$$S_n(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\underbrace{0, \ \ldots, \ 0}_{n \text{ мест}}, \ \xi_{n+1}, \ \xi_{n+2}, \ \ldots).$$

Тогда $S_n \to 0$ сильно, но не равномерно.

(iii) Определим W_n равенством

$$W_n(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\underbrace{0, \ \ldots, \ 0}_{n \text{ мест}}, \ \xi_1, \ \xi_2, \ \ldots).$$

Тогда $W_n \to 0$ в слабой операторной топологии, но не в сильной и не в равномерной топологиях.

В случае гильбертова пространства иногда полезен следующий результат, представляющий собой красивое приложение теоремы о равномерной ограниченности.

Теорема VI.1. Пусть $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ — множество ограниченных операторов на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть T_n — *последовательность* ограниченных операторов, и предположим, что $(T_n x, y)$ сходится при $n \to \infty$ для каждых $x, y \in \mathscr{H}$. Тогда существует такой $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, что $T_n \xrightarrow{w} T$.

Доказательство. Начнем с демонстрации того, что $\sup\limits_n \|T_n x\| < \infty$ для каждого x. Поскольку $(T_n x, y)$ сходится для любого $x \in \mathscr{H}$, имеем

$$\sup_n |(T_n x, y)| < \infty.$$

Далее, $T_n x \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ для каждого n, и так как $\sup\limits_n |(T_n x)(y)|_{\mathbb{C}} < \infty$, то из теоремы о равномерной ограниченности вытекает равномерная ограниченность операторных норм $T_n x$ как элементов в $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$. Но норма элемента $T_n x$ как оператора в $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ совпадает с его нормой в $\mathscr{H}$; таким образом, $\|T_n x\|_{\mathscr{H}}$ равномерно ограничены.

Теперь используем теорему о равномерной ограниченности еще раз. Так как

$$\sup_n \|T_n x\|_{\mathscr{H}} < \infty,$$

то

$$\sup_n \|T_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} < \infty.$$

Положим $B(x, y) = \lim\limits_n (T_n x, y)$. Тогда легко проверить, что форма $B(x, y)$ полуторалинейна и

$$|B(x, y)| \leqslant \overline{\lim_n} |(T_n x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\| \left(\sup_n \|T_n\|\right).$$

Таким образом, $B(x, y)$ — ограниченная полуторалинейная форма на $\mathscr{H}$, и потому в силу следствия леммы Рисса существует ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, для которого $B(x, y) = (Tx, y)$. Ясно, что $T_n \xrightarrow{w} T$. ∎

Если *последовательность* операторов T_n на гильбертовом пространстве такова, что $T_n x$ сходится для каждого $x \in \mathscr{H}$, то существует такой $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, что $T_n \xrightarrow{s} T$. В задаче 3 читателю предлагается доказать эту теорему и ее различные обобщения.

Пусть $T \in \mathscr{L}(X; Y)$. Множество векторов $x \in X$, для которых $Tx = 0$, называется **ядром** T и обозначается $\operatorname{Ker} T$. Множество векторов $y \in Y$, таких, что $y = Tx$ для какого-нибудь $x \in X$, называется **областью значений** T и обозначается $\operatorname{Ran} T$. Отметим, что и $\operatorname{Ker} T$, и $\operatorname{Ran} T$ — подпространства, причем $\operatorname{Ker} T$ всегда замкнуто, но $\operatorname{Ran} T$ может и не быть замкнутым (задача 7).

VI.2. Сопряженные

В этом разделе мы определяем операторы, сопряженные к ограниченным операторам на банаховых и гильбертовых пространствах. С самого начала читатель должен иметь в виду, что гильбертов сопряженный оператора $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ не совпадает с его банаховым сопряженным, хотя и тесно с ним связан.

Определение. Пусть X и Y — банаховы пространства и T — ограниченный линейный оператор из X в Y. **Банаховым сопряженным** к T (обозначается T') называется ограниченный линейный оператор из Y^* в X^*, определяемый равенством

$$(T'l)(x) = l(Tx)$$

для всех $l \in Y^*$ и $x \in X$.

Пример. Пусть $X = l_1 = Y$, и пусть T — оператор правого сдвига

$$T(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Тогда T': $l_\infty \to l_\infty$ — это оператор, действующий так:

$$T'(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

В этом примере $\|T\| = 1 = \|T'\|$. На самом деле нормы T и T' равны всегда:

Теорема VI.2. Пусть X и Y — банаховы пространства. Тогда $T \mapsto T'$ изометрически изоморфно отображает $\mathscr{L}(X, Y)$ в $\mathscr{L}(Y^*, X^*)$.

Доказательство. Отображение $T \mapsto T'$ линейно. Тот факт, что T' ограничен и что это отображение — изометрия, следует из прямых вычислений:

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathscr{L}(X,\,Y)} &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|_Y = \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\Big(\sup_{\|l\|\leqslant 1}|l(Tx)|\Big) = \qquad (l\in Y^*)\\ &= \sup_{\|l\|\leqslant 1}\Big(\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(T'l)(x)|\Big) = \\ &= \sup_{\|l\|\leqslant 1}\|T'l\| = \|T'\|_{\mathscr{L}(Y^*,\,X^*)}.\end{aligned}$$

Второе равенство основано на следствии теоремы Хана—Банаха. ∎

Больше всего нас интересует случай, когда T—ограниченное линейное преобразование гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в себя. Банахово сопряженное оператора T в этом случае является отображением $\mathscr{H}^*$ в $\mathscr{H}^*$. Пусть C: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}^*$—отображение, ставящее в соответствие каждому $y\in\mathscr{H}$ ограниченный линейный функционал $(y,\ \cdot)$ в $\mathscr{H}^*$. Отображение C есть *сопряженно-линейная* изометрия, которая в силу леммы Рисса сюръективна. Определим отображение T^*: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ соотношением

$$T^* = C^{-1}T'C.$$

Тогда

$$(x,\ Ty) = (Cx)(Ty) = (T'Cx)(y) = (C^{-1}T'Cx,\ y) = (T^*x,\ y).$$

Отображение T^* называется **гильбертовым сопряженным** оператора T, но обычно мы будем называть его просто сопряженным оператором и обозначать T^* в отличие от T'. Отметим, что соответствие $T\mapsto T^*$ *сопряженно-линейно*, т. е. $\alpha T\mapsto\bar\alpha T^*$. Это получается из-за того, что C сопряженно-линейно. Суммируем свойства соответствия $T\mapsto T^*$.

Теорема VI.3. (a) $T\mapsto T^*$—сопряженно-линейный изометрический изоморфизм $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ на себя.

(b) $(TS)^* = S^*T^*$.

(c) $(T^*)^* = T$.

(d) Если T обладает ограниченным обратным T^{-1}, то T^* обладает ограниченным обратным и $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(e) Соответствие $T\mapsto T^*$ всегда непрерывно в слабой и равномерной операторных топологиях, но в сильной операторной топологии оно непрерывно только тогда, когда $\mathscr{H}$ конечномерно.

(f) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Доказательство. (a) следует из теоремы IV.1 и из того, что C—изометрия. (b) и (c) легко проверить. Далее, так как $T^{-1}T = I = TT^{-1}$, то из (b) вытекает, что

$$T^*(T^{-1})^* = I^* = I = I^* = (T^{-1})^*T^*,$$

что и доказывает (d).

Проверка непрерывности $T \mapsto T^*$ в слабой и равномерной операторных топологиях тривиальна. В случае $\mathscr{H} = l_2$ существует контрпример, показывающий, что $T \mapsto T^*$ не непрерывно в сильной операторной топологии. Общий бесконечномерный случай аналогичен. Пусть W_n—оператор правого сдвига в l_2 на n шагов. Тогда W_n слабо (но не сильно) сходится к нулю. Однако $W_n^* = S_n$ сходится к нулю сильно. Таким образом, $S_n \xrightarrow{s} 0$, но $S_n^* = W_n$ не сходится к нулю сильно.

(f) выводится из задачи 9 с помощью следующего соотношения:

$$\|T^*T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} (T^*Tx, x) = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2. \blacksquare$$

Определение. Ограниченный оператор T на гильбертовом пространстве называется **самосопряженным**, если $T = T^*$.

Самосопряженные операторы играют важную роль в функциональном анализе и математической физике, и большую часть времени мы будем изучать именно их. Глава VII посвящена доказательству структурной теоремы для ограниченных самосопряженных операторов. В гл. VIII мы введем неограниченные самосопряженные операторы и продолжим их изучение в гл. X. Напомним читателю, что на $\mathbf{C}^n$ линейное преобразование самосопряжено тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе не меняется при отражении относительно диагонали, сопровождаемом комплексным сопряжением.

Важный класс операторов на гильбертовом пространстве образуют проекторы.

Определение. Если $P \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ и $P^2 = P$, то P называется **проектором.** Если, кроме того, $P = P^*$, то P называется **ортогональным проектором.**

Отметим, что область значений проектора—всегда замкнутое подпространство, на котором P действует как тождественный оператор. Если P еще и ортогонален, то он действует как нулевой оператор на $(\operatorname{Ran} P)^\perp$. Если $x = y + z$, где $y \in \operatorname{Ran} P$, а $z \in (\operatorname{Ran} P)^\perp$,—разложение, гарантируемое теоремой о проектировании, то $Px = y$. Такой оператор P называется ортогональным проектором на $\operatorname{Ran} P$. Таким образом, теорема о проектировании устанавливает взаимно однозначное соответствие между ортогональными проекторами и замкнутыми подпространствами. Поскольку ортогональные проекторы встречаются чаще, чем неортогональные, мы обычно используем слово проектор, имея в виду ортогональный проектор.

VI.3. Спектр

Если T — линейное преобразование на $\mathbb{C}^n$, то собственные значения T — это комплексные числа λ, для которых детерминант $\lambda I - T$ равен нулю. Множество таких λ называется спектром T. Оно может состоять не более чем из n точек, поскольку $\det(\lambda I - T)$ есть полином степени n. Если λ не есть собственное значение, то оператор $\lambda I - T$ имеет обратный, поскольку $\det(\lambda I - T) \neq 0$.

Спектральная теория операторов на бесконечномерных пространствах сложнее, интереснее и очень важна для понимания основных свойств самих операторов.

Определение. Пусть $T \in \mathcal{L}(X)$. Говорят, что комплексное число λ лежит в **резольвентном множестве** $\rho(T)$ оператора T, если $\lambda I - T$ есть биекция с ограниченным обратным. **Резольвентой** T в точке λ называют оператор $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$. Если $\lambda \notin \rho(T)$, то говорят, что λ лежит в **спектре** $\sigma(T)$ оператора T.

Отметим, что по теореме об обратном отображении оператор $\lambda I - T$ автоматически обладает обратным, если он биективен. Мы различаем два подмножества в спектре.

Определение. Пусть $T \in \mathcal{L}(X)$.

(a) Вектор $x \in X$, удовлетворяющий условию $Tx = \lambda x$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$, называется **собственным вектором** T; число λ называется соответствующим **собственным значением**. Если λ — собственное значение, то $\lambda I - T$ не инъективен, так что λ лежит в спектре T. Множество всех собственных значений называется **точечным спектром** оператора T.

(b) Если λ не есть собственное значение и если $\operatorname{Ran}(\lambda I - T)$ не плотно в X, то говорят, что λ лежит в **остаточном спектре**.

В конце этого раздела мы приведем пример, иллюстрирующий спектры такого типа. Остаточный спектр выделяют по той причине, что у широкого класса операторов, например у самосопряженных операторов, он отсутствует (см. теорему VI.8).

Спектральный анализ операторов очень важен для математической физики. Например, в квантовой механике гамильтониан — это неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Точечный спектр гамильтониана соответствует уровням энергии связанных состояний системы. Остальной спектр играет важную роль в теории рассеяния в системе (см. гл. XII).

Мы вскоре докажем, что резольвентное множество $\rho(T)$ открыто и что $R_\lambda(T)$ — аналитическая операторнозначная функция на $\rho(T)$. Этот факт позволяет использовать при изучении $R_\lambda(T)$ комплексный анализ и таким способом извлекать информацию о T. Начнем с краткого отступления о векторнозначных аналитических функциях.

Пусть X — банахово пространство, и пусть D — область комплексной плоскости, т. е. связное открытое подмножество в $\mathbb{C}$. Функция $x(\cdot)$, определенная на D, со значениями в X называется **сильно аналитической в** $z_0 \in D$, если в X существует предел отношения $(x(z_0+h)-x(z_0))/h$ при h, стремящемся к нулю в $\mathbb{C}$. Начав с такого определения, можно развить теорию векторнозначных аналитических функций, почти полностью аналогичную обычной теории; в частности, сильно аналитическая функция разлагается в сходящийся по норме ряд Тейлора. Мы не будем повторять здесь соответствующие построения; см. ссылки в Замечаниях. Обсудим только один важный момент. Существует другой естественный способ определения банаховозначных аналитических функций. Именно: функция $x(\cdot)$ на D со значениями в X называется **слабо аналитической**, если $l(x(\cdot))$ — комплекснозначная аналитическая функция на D для каждого $l \in X^*$. Хотя второе определение аналитичности выглядит a priori слабее первого, на самом деле эти определения эквивалентны, что мы сейчас докажем. Это очень важно, поскольку слабую аналитичность часто легче установить.

Лемма. Пусть X — банахово пространство. Тогда $\{x_n\}$ — последовательность Коши в том и только том случае, когда $\{l(x_n)\}$ — последовательность Коши равномерно по $l \in X^*$, $\|l\| \leqslant 1$.

Доказательство. Если $\{x_n\}$ — последовательность Коши, то $|l(x_n)-l(x_m)| \leqslant \|x_n-x_m\|$ для всех l с $\|l\| \leqslant 1$, так что $\{l(x_n)\}$ — последовательность Коши равномерно по всем l с $\|l\| \leqslant 1$. Обратно,

$$\|x_n-x_m\| = \sup_{\|l\| \leqslant 1} |l(x_n-x_m)|.$$

Следовательно, если $\{l(x_n)\}$ — последовательность Коши равномерно по всем l с $\|l\| \leqslant 1$, то $\{x_n\}$ — последовательность Коши. ∎

Теорема VI.4. Каждая слабо аналитическая функция сильно аналитична.

Доказательство. Пусть $x(\cdot)$ слабо аналитична на D со значениями в X. Пусть $z_0 \in D$, и пусть Γ — окружность в D, содержащая z_0 и окружающая область, лежащую в D. Если $l \in X^*$, то $l(x(z))$ аналитична и

$$l\left(\frac{x(z_0+h)-x(z_0)}{h}\right) - \frac{d}{dz} l(x(z_0)) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-(z_0+h)} - \frac{1}{z-z_0}\right) - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right] l(x(z))\, dz.$$

Поскольку $l(x(z))$ непрерывна на Γ и Γ компактна, $|l(x(z))| \leqslant C_l$ для всех $z \in \Gamma$. Рассматривая $x(z)$ как семейство отображений $x(z)$: $X^* \to \mathbb{C}$, легко понять, что $x(z)$ поточечно ограничены на каждом l и потому, в силу теоремы о равномерной ограниченности, $\sup\limits_{z \in \Gamma} \|x(z)\| \leqslant C < \infty$. Таким образом,

$$\left| l\left(\frac{x(z_0+h)-x(z_0)}{h}\right) - \frac{d}{dz} l(x(z_0)) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \|l\| (\sup_{z \in \Gamma} \|x(z)\|) \oint_\Gamma \left| \frac{1}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2} \right| dz.$$

Эта оценка показывает, что $[x(z_0+h)-x(z_0)]/h$ есть последовательность Коши равномерно для всех l с $\|l\| \leqslant 1$. В силу леммы, $[x(z_0+h)-x(z_0)]/h$ сходится в X, что и доказывает сильную аналитичность $x(\cdot)$. ∎

Теперь докажем обещанную теорему о резольвенте.

Теорема VI.5. Пусть X — банахово пространство и $T \in \mathscr{L}(X)$. Тогда $\rho(T)$ — открытое подмножество в $\mathbb{C}$ и $R_\lambda(T)$ — аналитическая $\mathscr{L}(X)$-значная функция на каждой компоненте (максимальном связном подмножестве) $\rho(T)$. Для любых двух точек $\lambda, \mu \in \rho(T)$ операторы $R_\lambda(T)$ и $R_\mu(T)$ коммутируют и

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\mu(T) R_\lambda(T). \tag{VI.1}$$

Доказательство. Начнем со следующего формального вычисления, временно игнорируя вопросы сходимости. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$. Имеем

$$\frac{1}{\lambda - T} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0 + (\lambda_0 - T)} = \frac{1}{\lambda_0 - T} \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - T}\right)} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_0 - T}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - T}\right)^n\right].$$

Это наталкивает на мысль определить

$$\tilde{R}_\lambda(T) = R_{\lambda_0}(T)\left\{I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n [R_{\lambda_0}(T)]^n\right\}.$$

Поскольку

$$\|[R_{\lambda_0}(T)]^n\| \leqslant \|R_{\lambda_0}(T)\|^n,$$

ряд в правой части сходится в равномерной операторной топологии, если

$$|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}.$$

Для таких λ отображение $\tilde{R}_\lambda(T)$ корректно определено, и легко проверить, что

$$(\lambda I - T)\tilde{R}_\lambda(T) = I = \tilde{R}_\lambda(T)(\lambda I - T).$$

Это доказывает, что $\lambda \in \rho(T)$, если $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$, и что $\tilde{R}_\lambda(T) = R_\lambda(T)$. Таким образом, $\rho(T)$ открыто. Поскольку $R_\lambda(T)$ разлагается в степенной ряд, она аналитична.

Соотношение

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu I - T)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda I - T)R_\mu(T)$$

доказывает (VI.1). Перестановка μ и λ показывает, что $R_\lambda(T)$ и $R_\mu(T)$ коммутируют. ∎

Уравнение (VI.1) называют **первой резольвентной формулой.** Красивый пример использования комплексно-аналитических методов дает доказательство такого следствия:

Следствие. Пусть X — банахово пространство, $T \in \mathscr{L}(X)$. Тогда спектр T не пуст.

Доказательство. Формально

$$\frac{1}{\lambda - T} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{1 - T/\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right),$$

откуда для больших $|\lambda|$ получаем

$$R_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right). \tag{VI.2}$$

Если $|\lambda| > \|T\|$, то ряд в правой части сходится по норме, и легко убедиться, что для таких λ его сумма на самом деле обратна $(\lambda I - T)$. Таким образом, $\|R_\lambda(T)\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Если бы $\sigma(T)$ было пустым, $R_\lambda(T)$ была бы целой ограниченной аналитической функцией. По теореме Лиувилля $R_\lambda(T)$ тогда была бы нулем, что приводит к противоречию. Итак, $\sigma(T)$ не пусто. ∎

Ряд (VI.2) называется **рядом Неймана** для $R_\lambda(T)$. Доказательство следствия показывает, что $\sigma(T)$ содержится в замкнутом круге радиуса $\|T\|$. В действительности о $\sigma(T)$ можно сказать больше.

Определение. Величина

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

называется **спектральным радиусом** оператора T.

Теорема VI.6. Пусть X—банахово пространство, $T \in \mathscr{L}(X)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ существует и равен $r(T)$. Если X—гильбертово пространство и A—самосопряженный оператор, то $r(A) = \|A\|$.

Доказательство. Читатель может проверить, искусно следуя соображениям субаддитивности, приведенным в задаче 11, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ существует. Решающее место доказательства этой теоремы—установить, что радиус сходимости разложения Лорана для $R_\lambda(T)$ около ∞ есть как раз $r(T)^{-1}$. Прежде всего отметим, что этот радиус сходимости не может быть меньше $r(T)^{-1}$, поскольку мы доказали, что $R_\lambda(T)$ аналитична на $\rho(T)$ и $\{\lambda \mid |\lambda| > r(T)\} \subset \rho(T)$. С другой стороны, ряд (VI.2) представляет собой разложение Лорана около ∞, и мы уже видели, что там, где он сходится абсолютно, $R_\lambda(T)$ существует. Но так как ряд Лорана абсолютно сходится внутри своего круга сходимости, можно заключить, что радиус сходимости не может быть больше $r(T)^{-1}$. Равенство $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ следует из векторного варианта теоремы Адамара, которая утверждает, что радиус сходимости ряда (VI.2) есть величина, обратная

$$\overline{\lim_{n}} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Наконец, если X—гильбертово пространство и оператор A самосопряжен, то $\|A\|^2 = \|A^2\|$ в силу пункта (f) теоремы VI.3. Это дает $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$, так что

$$r(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \lim_{n\to\infty} \|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|A\|. \quad \blacksquare$$

При определении спектра иногда полезна следующая

Теорема VI.7 (Филлипс). Пусть X—банахово пространство, $T \in \mathscr{L}(X)$. Тогда $\sigma(T) = \sigma(T')$ и $R_\lambda(T') = R_\lambda(T)'$. Если $\mathscr{H}$—гильбертово пространство, то $\sigma(T^*) = \{\lambda \mid \bar{\lambda} \in \sigma(T)\}$ и $R_{\bar{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*$.

Заметим, что утверждение, относящееся к гильбертову пространству, следует из пункта (d) теоремы VI.3.

Рассмотрим теперь подробно пример, иллюстрирующий различные типы спектров.

Пример. Пусть T—оператор в l_1, действующий так:

$$T(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

Его сопряженный T' действует в l_∞ так:

$$T'(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Сначала заметим, что $\|T\| = \|T'\| = 1$, так что все λ с $|\lambda| > 1$ лежат в $\rho(T)$ и $\rho(T')$. Предположим, что $|\lambda| < 1$. Тогда вектор $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \in l_1$ удовлетворяет уравнению $(\lambda I - T) x_\lambda = 0$. Значит, все такие λ принадлежат точечному спектру оператора T. Поскольку спектр — замкнутое множество, $\sigma(T) = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$. По теореме VI.7 это множество есть спектр оператора T'.

Мы хотим показать, что T' точечного спектра не имеет. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ и $(\lambda I - T')\{\xi_n\} = 0$. Тогда

$$\lambda\xi_0 = 0,$$
$$\lambda\xi_1 - \xi_0 = 0,$$
$$\cdots\cdots$$

Все эти уравнения вместе показывают, что $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty = 0$, так что $\lambda I - T'$ — взаимно однозначное отображение и T' не имеет точечного спектра. Предположим теперь, что $|\lambda| < 1$. Тогда для всех $L \in l_\infty$

$$[(\lambda I - T') L](x_\lambda) = L((\lambda I - T) x_\lambda) = 0,$$

где $x_\lambda \in l_1$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ. В силу теоремы Хана — Банаха в l_∞ существует линейный функционал, не обращающийся в нуль на x_λ, так что область значений оператора $\lambda I - T'$ не плотна. Следовательно, $\{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$ — остаточный спектр оператора T'.

Остается рассмотреть границу $|\lambda| = 1$. Пусть $|\lambda| = 1$ и $(\lambda I - T)\{\xi_n\} = 0$ для некоторой последовательности $\{\xi_n\} \in l_1$. Тогда

$$\xi_1 = \lambda\xi_0,$$
$$\xi_2 = \lambda\xi_1,$$
$$\cdots$$

так что $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty = \xi_0\{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\}$ не лежит в l_1. Следовательно, λ не принадлежит точечному спектру. Если бы область значений $\lambda I - T$ была не плотна, в l_∞ существовал бы ненулевой L, такой, что $L[(\lambda I - T) x] = 0$ для всех $x \in l_1$. Но тогда $[(\lambda I - T') L](x) = 0$, что означало бы, что λ лежит в точечном спектре T', которого, как мы доказали, нет. Следовательно, $\{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ не лежит ни в точечном, ни в остаточном спектре T.

Наконец, докажем, что $\{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ принадлежит остаточному спектру T', явно найдя открытый шар, не пересекающийся с

$\operatorname{Ran}(\lambda I - T')$. Если $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\} \in l_\infty$ и $a = (\lambda I - T')b$, то

$$a_0 = \lambda b_0,$$
$$\vdots$$
$$a_n = \lambda b_n - b_{n-1},$$

так что $b_n = (\bar\lambda)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} \lambda^m a_m$. Пусть $c = \{c_n\}$, где $c_n = \bar\lambda^n$, и предположим, что $d \in l_\infty$ и $\|d - c\|_\infty \leqslant 1/2$. Тогда

$$\operatorname{Re}\{\lambda^n d_n\} \geqslant \operatorname{Re}\{\lambda^n c_n\} - \|d - c\|_\infty \geqslant 1/2.$$

Таким образом, если $(\lambda - T')e = d$ при некотором $e \in l_\infty$, то, поскольку

$$e_n = (\bar\lambda)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} \lambda^m d_m,$$

$|e_n| \geqslant n/2$, что невозможно. Следовательно, $\operatorname{Ran}(\lambda I - T')$ не пересекает шар радиуса 1/2 с центром в c, так что λ лежит в остаточном спектре. В итоге получаем следующую картину:

Оператор	Спектр	Точечный спектр	Остаточный спектр
T	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\lvert\lambda\rvert < 1$	$\varnothing$
T'	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\varnothing$	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$

Точно так же, как в рассмотренном примере, можно доказать общее

Предложение. Пусть X — банахово пространство и $T \in \mathscr{L}(X)$. Тогда

(a) если λ лежит в остаточном спектре T, то λ лежит в точечном спектре T';

(b) если λ лежит в точечном спектре T, то λ лежит либо в точечном, либо в остаточном спектре T'.

Наконец, имеет место

Теорема VI.8. Пусть T — самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда

(a) T не имеет остаточного спектра;

(b) $\sigma(T)$ — подмножество в $\mathbb{R}$;

(c) собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям T, ортогональны.

Доказательство. (a) следует из последнего предложения и того, что точечный и остаточный спектры не пересекаются по определению. Если λ и μ вещественны, то

$$\|[A - (\lambda + i\mu)]x\|^2 = (x, (A - \lambda + i\mu)(A - \lambda - i\mu)x) =$$
$$= \|(A - \lambda)x\|^2 + \mu^2\|x\|^2.$$

Таким образом, если $\mu\neq 0$, то $\|(A-(\lambda+i\mu))x\|\geqslant|\mu|\|x\|$. Это означает, что $A-(\lambda+i\mu)$ — инъекция, обладающая ограниченным обратным, заданным на области значений, которая замкнута. Поскольку A не имеет остаточного спектра, $\operatorname{Ran} A=\mathcal{H}$. Следовательно, $(\lambda+i\mu)\in\rho(T)$, если $\mu\neq 0$, так что $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$ и (b) доказано. Легкое доказательство (c) оставляем в качестве упражнения (задача 8). ▮

VI.4. Положительные операторы и полярное разложение

Мы хотим доказать существование специального разложения операторов на *гильбертовом пространстве*, аналогичного представлению $z=|z|e^{i\arg z}$ для комплексных чисел. Для этого мы должны прежде всего описать подходящий аналог положительных чисел.

Определение. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Оператор $B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ называется **положительным**, если $(Bx, x)\geqslant 0$ для всех $x\in\mathcal{H}$. Мы пишем $B\geqslant 0$, если B положителен, и $A\geqslant B$, если $A-B\geqslant 0$.

Каждый ограниченный положительный оператор на *комплексном* гильбертовом пространстве самосопряжен. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $(x, Ax)=\overline{(x, Ax)}=(Ax, x)$, если (Ax, x) принимает только вещественные значения. В силу поляризационного тождества (задача 4, гл. II), $(Ax, y)=(x, Ay)$, если $(Ax, x)=(x, Ax)$ для всех x. Итак, если A положителен, то он самосопряжен. В случае вещественного гильбертова пространства это неверно, потому что в нем, зная (x, Ax) при всех x, нельзя восстановить (x, Ay).

Для любого $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеем $A^*A\geqslant 0$, поскольку $(A^*Ax, x)=\|Ax\|^2\geqslant 0$. По аналогии с формулой $|z|=\sqrt{\bar{z}z}$ мы хотели бы определить $|A|$ как $\sqrt{A^*A}$. Чтобы сделать это, надо показать, что из положительных операторов можно извлекать квадратные корни. Начнем с такой леммы:

Лемма. Разложение функции $\sqrt{1-z}$ в степенной ряд около нуля сходится абсолютно для всех комплексных чисел z, удовлетворяющих неравенству $|z|\leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $\sqrt{1-z}=1+c_1z+c_2z^2+\dots$ — такое разложение. Так как функция $\sqrt{1-z}$ аналитична при $|z|<1$, ряд сходится в этой области абсолютно. Далее, производные функции $\sqrt{1-z}$ в нуле все отрицательны, поэтому c_i отрицательны при

$i \geqslant 1$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| = 2 - \sum_{n=0}^{N} c_n = 2 - \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \leqslant 2 - \lim_{x \to 1-} \sqrt{1-x} = 2,$$

где $\lim\limits_{x \to 1-}$ означает предел при стремлении x к единице снизу. Поскольку это справедливо для всех N, имеем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| \leqslant 2$, что доказывает абсолютную сходимость при $|z| = 1$. ∎

Теорема VI.9 (лемма о квадратном корне). Пусть $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ и $A \geqslant 0$. Тогда существует единственный оператор $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, такой, что $B \geqslant 0$ и $B^2 = A$. Более того, B коммутирует с любым ограниченным оператором, коммутирующим с A.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\|A\| \leqslant 1$. Поскольку

$$\|I - A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |((I - A)\varphi, \varphi)| \leqslant 1,$$

из леммы следует, что ряд $I + c_1(I - A) + c_2(I - A)^2 + \ldots$ сходится по норме к некоторому оператору B. В силу абсолютной сходимости, можно возвести этот ряд в квадрат и перегруппировать его члены так, чтобы получилось $B^2 = A$. Более того, так как $0 \leqslant I - A \leqslant I$, то $0 \leqslant (\varphi, (I - A)^n \varphi) \leqslant 1$ для всех $\varphi \in \mathscr{H}$ с $\|\varphi\| = 1$. Следовательно,

$$(\varphi, B\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi, (I - A)^n \varphi) \geqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \geqslant 0,$$

где использован тот факт, что $c_n < 0$, и оценка, приведенная в лемме. Таким образом, $B \geqslant 0$. В силу абсолютной сходимости ряда для B, он коммутирует с любым оператором, коммутирующим с A.

Предположим теперь, что существует такой B', что $B' \geqslant 0$ и $B'^2 = A$. Тогда, ввиду того что

$$B'A = (B')^3 = AB',$$

B' коммутирует с A и, следовательно, с B. Значит,

$$(B - B')B(B - B') + (B - B')B'(B - B') = (B^2 - B'^2)(B - B') = 0. \tag{VI.3}$$

Поскольку оба члена в левой части (VI.3) положительны, они оба должны равняться нулю, так что их разность $(B - B')^3 = 0$. Так как $B - B'$ — самосопряженный оператор, $\|B - B'\|^4 = \|(B - B')^4\| = 0$, и потому $B - B' = 0$. ∎

Теперь мы готовы определить $|A|$.

Определение. Пусть $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Тогда $|A| = \sqrt{A^*A}$ называется абсолютной величиной оператора A.

Читателю следует остерегаться эмоций, вызываемых другими значениями символа $|\cdot|$. В то время как равенство $|\lambda A|=|\lambda||A|$ справедливо для всех $\lambda\in\mathbb{C}$, в общем случае *не верно*, что $|AB|=|A||B|$ или что $|A|=|A^*|$. Более того, в общем случае неверно, что $|A+B|\leqslant|A|+|B|$ (задача 16). Действительно, в то время как отображение $|\cdot|$ непрерывно по норме (см. задачу 15), оно не всегда удовлетворяет условию Липшица, т. е. не всегда $\||A|-|B|\|\leqslant c\|A-B\|$ при некоторой постоянной c (см. задачу 17).

Найти аналог комплексных чисел, равных по модулю единице, несколько сложнее. На первый взгляд можно было бы ожидать, что для этого вполне подойдут унитарные операторы, но следующий пример показывает, что это не так.

Пример. Пусть A — оператор правого сдвига в l_2. Тогда $|A|=\sqrt{A^*A}=I$, так что если мы запишем $A=U|A|$, то мы должны получить $U=A$. Однако A не может быть унитарным, поскольку вектор $(1, 0, 0, \ldots)$ не принадлежит $\operatorname{Ran} A$.

Определение. Оператор $U\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ называется **изометрическим**, если $\|Ux\|=\|x\|$ для всех $x\in\mathcal{H}$. Оператор U называется **частично изометрическим**, если U изометричен после сужения на замкнутое подпространство $(\operatorname{Ker} U)^\perp$.

Таким образом, если U частично изометричен, то $\mathcal{H}$ можно представить в виде $\mathcal{H}=\operatorname{Ker} U\oplus(\operatorname{Ker} U)^\perp$ и $\mathcal{H}=\operatorname{Ran} U\oplus\oplus(\operatorname{Ran} U)^\perp$ и U — унитарный оператор, действующий из **начального подпространства** $(\operatorname{Ker} U)^\perp$ оператора U в его **конечное подпространство** $\operatorname{Ran} U$. Нетрудно видеть, что U^* — частичная изометрия из $\operatorname{Ran} U$ в $(\operatorname{Ker} U)^\perp$, которая действует как отображение, обратное к U: $(\operatorname{Ker} U)^\perp\to\operatorname{Ran} U$.

Предложение. Пусть U — частично изометрический оператор. Тогда $P_i=U^*U$ и $P_f=UU^*$ — проекторы соответственно на начальное и конечное подпространства оператора U. Обратно, если для оператора $U\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ произведения U^*U и UU^* суть проекторы, то U частично изометричен.

Доказательство этого предложения мы оставляем как задачу 18. Теперь мы готовы к доказательству существования аналога разложения $z=|z|e^{i\arg z}$.

Теорема VI.10 (полярное разложение). Пусть A — ограниченный линейный оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Существует частичная изометрия U, такая, что $A=U|A|$. Оператор U однозначно определяется условием $\operatorname{Ker} U=\operatorname{Ker} A$. Более того, $\operatorname{Ran} U=\overline{\operatorname{Ran} A}$.

Доказательство. Определим отображение U: $\operatorname{Ran}|A| \to \operatorname{Ran} A$ равенством $U(|A|\psi) = A\psi$. Поскольку

$$\||A|\psi\|^2 = (\psi, |A|^2\psi) = (\psi, A^*A\psi) = \|A\psi\|^2,$$

оператор U определен корректно, т. е. если $|A|\psi = |A|\varphi$, то $A\psi = A\varphi$. При этом U изометричен и потому продолжается до изометрии из $\overline{\operatorname{Ran}|A|}$ в $\overline{\operatorname{Ran} A}$. Продолжим U на все $\mathscr{H}$, определив его нулем на $(\operatorname{Ran}|A|)^\perp$. Так как $|A|$—самосопряженный оператор, $(\operatorname{Ran}|A|)^\perp = \operatorname{Ker}|A|$. Более того, $|A|\psi = 0$ тогда и только тогда, когда $A\psi = 0$, так что $\operatorname{Ker}|A| = \operatorname{Ker} A$. В итоге $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} A$. Доказательство единственности оставляем читателю. ∎

В задаче 20 гл. VII читателю будет предложено доказать, что U есть сильный предел полиномов по A и A^*, так что U принадлежит «алгебре фон Неймана», порождаемой оператором A.

VI.5. Компактные операторы

Многие задачи классической математической физики можно упростить, если сформулировать их на языке интегральных уравнений. Знаменитый пример—задача Дирихле, обсуждаемая в конце этого раздела. А сейчас рассмотрим простой оператор K, определяемый в $C[0, 1]$ формулой

$$(K\varphi)(x) = \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy, \tag{VI.4}$$

где функция $K(x, y)$ непрерывна на квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Функция $K(x, y)$ называется **ядром интегрального оператора** K. В силу неравенства

$$|(K\varphi)(x)| \leqslant \Big(\sup_{0\leqslant x,\, y\leqslant 1} |K(x, y)|\Big)\Big(\sup_{0\leqslant y\leqslant 1} |\varphi(y)|\Big),$$

имеем

$$\|K\varphi\|_\infty \leqslant \Big(\sup_{0\leqslant x,\, y\leqslant 1} |K(x, y)|\Big)\|\varphi\|_\infty,$$

так что K—ограниченный оператор на $C[0, 1]$. Оператор K обладает и другим очень важным свойством. Пусть B_M—множество функций φ в $C[0, 1]$, таких, что $\|\varphi\|_\infty \leqslant M$. Поскольку функция $K(x, y)$ непрерывна на квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, а этот квадрат компактен, $K(x, y)$ равномерно непрерывна, т. е. по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $|K(x, y) - K(x', y)| < \varepsilon$ для всех $y \in [0, 1]$, как только $|x - x'| < \delta$. Следовательно, если $\varphi \in B_M$, то

$$|(K\varphi)(x) - (K\varphi)(x')| \leqslant \Big(\sup_{y\in[0, 1]} |K(x, y) - K(x', y)|\Big)\|\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon M.$$

Таким образом, функции $K[B_M]$ равностепенно непрерывны. Поскольку они, кроме того, равномерно ограничены константой $\|K\| M$, с помощью теоремы Асколи (теоремы I.28) можно заключить, что для любой последовательности $\varphi_n \in B_M$ последовательность $K\varphi_n$ содержит сходящуюся подпоследовательность (предел которой может не лежать в $K[B_M]$). Это можно выразить по-другому, сказав, что множество $K[B_M]$ **предкомпактно**, т. е. что его замыкание компактно в $C[0, 1]$. Ясно, что выбор M не важен, и, следовательно, мы показали, что K переводит ограниченные множества в предкомпактные. Именно благодаря этому свойству для хороших интегральных уравнений типа (VI.4) выполняется так называемая альтернатива Фредгольма. Этот раздел мы посвящаем изучению таких операторов.

Определение. Пусть X и Y—банаховы пространства. Оператор $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ называется **компактным** (или вполне непрерывным), если он переводит ограниченные множества из X в предкомпактные множества в Y. Эквивалентно, T компактен тогда и только тогда, когда для любой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ последовательность $\{Tx_n\}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся в Y.

Интегральный оператор (VI.4)—пример компактного оператора. Другой класс примеров таков:

Пример (операторы конечного ранга). Предположим, что область значений оператора T конечномерна, т. е. каждый вектор из $\operatorname{Ran} T$ можно представить в виде $Tx = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i$, где $\{y_i\}_{i=1}^{N}$—некоторое фиксированное семейство в Y. Если x_n—любая ограниченная последовательность из X, то ограничены и соответствующие семейства α_i^n, поскольку ограничен T. Обычным образом из $\{Tx_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, что и доказывает компактность T.

Важное свойство компактных операторов описывается следующей теоремой (ср. с задачей 34):

Теорема VI.11. Компактные операторы отображают слабо сходящиеся *последовательности* в равномерно сходящиеся.

Доказательство. Предположим, что $x_n \xrightarrow{w} x$. По теореме о равномерной ограниченности совокупность $\|x_n\|$ ограничена. Пусть $y_n = Tx_n$. Тогда $l(y_n) - l(y) = (T'l)(x_n - x)$ для любого $l \in Y^*$. Таким образом, y_n в Y слабо сходится к $y = Tx$. Предположим теперь, что y_n не сходится к y равномерно. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ в $\{y_n\}$, что $\|y_{n_k} - y\| \geqslant \varepsilon$. Поскольку последовательность $\{x_{n_k}\}$ ограничена, а T компактен, в $\{y_{n_k}\}$ содержится подпоследовательность, слабо сходящаяся к $\tilde{y} \neq y$. Но в таком случае и сама $\{y_{n_k}\}$ должна слабо сходиться к $\tilde{y}$, чего не может быть, так как $\{y_n\}$ слабо сходится к y. Следовательно, y_n сходится к y равномерно. ∎

Отметим, что для рефлексивных пространств X справедлива обратная теорема (задача 20). Следующая теорема важна, поскольку она позволяет установить компактность оператора, если он является равномерным пределом последовательности компактных операторов или сопряженным к компактному оператору.

Теорема VI.12. Пусть X и Y—банаховы пространства, $T \in \mathscr{L}(X, Y)$.

(a) Если $\{T_n\}$ компактны и $T_n \to T$ равномерно, то T компактен.

(b) T компактен тогда и только тогда, когда компактен T'.

(c) Если $S \in \mathscr{L}(Y, Z)$, где Z—банахово пространство, и T *или* S компактен, то ST компактен.

Доказательство. (a) Пусть $\{x_m\}$—последовательность в единичном шаре из X. Поскольку T_n компактен при каждом n, с помощью диагонального метода § I.5 можно найти подпоследовательность в $\{x_m\}$, обозначим ее $\{x_{m_k}\}$, такую, что $T_n x_{m_k} \to y_n$ для каждого n при $k \to \infty$. Так как $\|x_{m_k}\| \leqslant 1$ и $\|T_n - T\| \to 0$, то $\varepsilon/3$-прием показывает, что $\{y_n\}$ есть последовательность Коши. В итоге $y_n \to y$. С помощью $\varepsilon/3$-приема нетрудно доказать, что и $Tx_{m_k} \to y$. Следовательно, T компактен.

(b) См. Замечания и задачу 36.

(c) Доказательство элементарно (задача 37). ∎

Нас больше всего интересует случай компактных операторов из сепарабельного гильбертова пространства в себя, поэтому мы не будем дальше заниматься общим случаем (см., однако, обсуждение в Замечаниях). Интересующее нас банахово пространство компактных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве мы обозначим через $\mathrm{Com}(\mathscr{H})$. Как следует из приведенного выше примера и теоремы VI.12, равномерный предел последовательности операторов конечного ранга есть компактный оператор. В случае гильбертова пространства справедливо и обратное.

Теорема VI.13. Пусть $\mathscr{H}$—сепарабельное гильбертово пространство. Тогда любой компактный оператор на $\mathscr{H}$ есть равномерный предел последовательности операторов конечного ранга.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$—ортонормированное множество в $\mathscr{H}$. Определим

$$\lambda_n = \sup_{\substack{\psi \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]^{\perp} \\ \|\psi\|=1}} \|T\psi\|.$$

Ясно, что $\{\lambda_n\}$ монотонно убывает и потому сходится к некоторому пределу $\lambda \geqslant 0$. Покажем сначала, что $\lambda = 0$. Выберем последовательность $\psi_n \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]^{\perp}$, $\|\psi_n\| = 1$, для которой $\|T\psi_n\| \geqslant \lambda/2$. Так как $\psi_n \xrightarrow{w} 0$, то по теореме VI.11 $T\psi_n \to 0$. Следовательно, $\lambda = 0$. В результате

$$\sum_{j=1}^{n} (\varphi_j, \cdot) T\varphi_j \to T$$

равномерно, поскольку λ_n как раз равно норме разности правой и левой частей этого соотношения. ∎

Мы уже отметили широкое разнообразие свойств компактных операторов, но до сих пор еще не указали ни одного свойства, объясняющего наш особый интерес к ним. Основной факт, делающий компактные операторы важными,—это альтернатива Фредгольма: если A компактен, то либо уравнение $A\psi = \psi$ имеет решение, либо существует $(I-A)^{-1}$. Это свойство отнюдь не присуще каждому ограниченному линейному преобразованию. Например, если A—оператор вида $(A\varphi)(x) = x\varphi(x)$ на $L^2[0, 2]$, то $A\varphi = \varphi$ не имеет решений, но $(I-A)^{-1}$ не существует (как ограниченный оператор). В терминах «разрешимых уравнений» альтернатива Фредгольма особенно красива. Она гласит: если для любого φ существует хотя бы одно решение уравнения $\psi = \varphi + A\psi$, то это решение единственно. Таким образом, компактность и единственность вместе влекут за собой существование решения; в качестве примера см. в конце раздела обсуждение задачи Дирихле.

Поскольку альтернатива Фредгольма справедлива для конечномерных матриц, можно ожидать, что для компактных операторов (в гильбертовом пространстве) ее удается доказать путем представления компактного оператора A в виде $A = F + R$, где F—оператор конечного ранга, а R имеет малую норму. Но компактность очень хорошо сочетается с аналитичностью, поэтому сначала мы докажем один элегантный результат, который весьма полезен и сам по себе (см. § XII.7 и XIII.4).

Теорема VI.14 (аналитическая теорема Фредгольма). Пусть D—открытое связное подмножество в $\mathbb{C}$. Пусть f: $D \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$—аналитическая операторнозначная функция, такая, что $f(z)$—компактный оператор для каждого $z \in D$. Тогда либо

(a) $(I - f(z))^{-1}$ не существует ни для какого $z \in D$, либо

(b) $(I-f(z))^{-1}$ существует для всех $z \in D \setminus S$, где S — дискретное подмножество в D (т. е. множество, не имеющее предельных точек в D). В этом случае $(I-f(z))^{-1}$ мероморфна в D, аналитична в $D \setminus S$, ее вычеты в полюсах — операторы конечного ранга, и если $z \in S$, то уравнение $f(z)\psi=\psi$ имеет ненулевое решение в $\mathscr{H}$.

Доказательство. Мы докажем, что либо (a), либо (b) выполняется вблизи любой точки z_0. Тогда простые соображения, основанные на связности D, позволят перенести результат на все D (задача 21). По заданному $z_0 \in D$ выберем такое r, что если $|z-z_0|<r$, то $\|f(z)-f(z_0)\|<1/2$, и возьмем оператор конечного ранга F со свойством

$$\|f(z_0)-F\|<1/2.$$

Тогда для $z \in D_r$ (где D_r — круг радиуса r с центром z_0) имеем $\|f(z)-F\|<1$. Пользуясь разложением в геометрическую прогрессию, легко увидеть, что $(I-f(z)+F)^{-1}$ существует и аналитична.

Так как F конечного ранга, то существуют независимые векторы $\psi_1, \ldots, \psi_N$, такие, что $F(\varphi)=\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\varphi)\psi_i$. Коэффициенты $\alpha_i(\cdot)$ суть ограниченные линейные функционалы на $\mathscr{H}$, и потому по лемме Рисса существуют векторы $\phi_1, \ldots, \phi_N$, такие, что $F(\varphi)=\sum_{i=1}^{N}(\phi_i, \varphi)\psi_i$ для всех $\varphi \in \mathscr{H}$. Пусть

$$\phi_n(z)=((I-f(z)+F)^{-1})^{*}\phi_n,$$

$$g(z)=F(I-f(z)+F)^{-1}=\sum_{n=1}^{N}(\phi_n(z), \cdot)\psi_n.$$

Записав

$$(I-f(z))=(I-g(z))(I-f(z)+F),$$

мы видим, что оператор $I-f(z)$ обратим при $z \in D_r$ тогда и только тогда, когда обратим $I-g(z)$, и что уравнение $\psi=f(z)\psi$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда его имеет $\varphi=g(z)\varphi$.

Если $g(z)\varphi=\varphi$, то $\varphi=\sum_{n=1}^{N}\beta_n\psi_n$ и β_n удовлетворяют уравнению

$$\beta_n=\sum_{m=1}^{N}(\phi_n(z), \psi_m)\beta_m. \qquad \text{(VI.5a)}$$

Обратно, если (VI.5a) имеет решение $\langle\beta_1, \ldots, \beta_N\rangle$, то $\varphi=\sum_{n=1}^{N}\beta_n\psi_n$ — решение для $g(z)\varphi=\varphi$. Таким образом, уравнение

$g(z)\varphi=\varphi$ имеет решение тогда и только тогда, когда

$$d(z)=\det\{\delta_{nm}-(\phi_n(z),\ \psi_m)\}=0.$$

Поскольку $(\phi_n(z),\psi_m)$ аналитична в D_r, такова же и функция $d(z)$. Это означает, что либо $S_r=\{z\mid z\in D_r,\ \ d(z)=0\}$ — дискретное множество в D_r, либо $S_r=D_r$. Предположим теперь, что $d(z)\neq 0$. Тогда по заданному ψ можно построить решение уравнения $(I-g(z))\varphi=\psi$, положив $\varphi=\psi+\sum\limits_{n=1}^{N}\beta_n\psi_n$ и найдя β_n, удовлетворяющие уравнению

$$\beta_n=(\phi_n(z),\ \psi)+\sum_{m=1}^{N}(\phi_n(z),\ \psi_m)\,\beta_m. \qquad \text{(VI.5b)}$$

Но ведь $d(z)\neq 0$ и, следовательно, это уравнение имеет решение. Итак, $(I-g(z))^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $z\notin S_r$.

Мероморфность $(I-f(z))^{-1}$ и конечность рангов вычетов следуют из явной формулы для β_n, известной из линейной алгебры. ∎

Эта теорема имеет четыре важных следствия.

Следствие (альтернатива Фредгольма). Если A — компактный оператор на $\mathscr{H}$, то либо существует $(I-A)^{-1}$, либо имеет решение уравнение $A\psi=\psi$.

Доказательство. Достаточно взять $f(z)=zA$ и применить последнюю теорему при $z=1$. ∎

Теорема VI.15 (теорема Рисса — Шаудера). Пусть A — компактный оператор на $\mathscr{H}$; тогда $\sigma(A)$ — дискретное множество, не имеющее предельных точек, кроме, быть может, $\lambda=0$. Далее, любое ненулевое $\lambda\in\sigma(A)$ является собственным значением конечной кратности (т. е. соответствующее пространство собственных векторов конечномерно).

Доказательство. Пусть $f(z)=zA$. Тогда $f(z)$ — аналитическая на всей комплексной плоскости функция со значениями в множестве компактных операторов. Таким образом, $\{z\mid zA\psi=\psi$ имеет решение $\psi\neq 0\}$ — дискретное множество, и если $1/\lambda$ не лежит в этом дискретном множестве, то

$$(\lambda-A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}$$

существует. То что ненулевые собственные значения имеют конечную кратность, немедленно следует из компактности A. ∎

Теорема VI.16 (теорема Гильберта — Шмидта). Пусть A — самосопряженный компактный оператор на $\mathscr{H}$. Тогда в $\mathscr{H}$ существует полный ортонормированный базис $\{\phi_n\}$, такой, что $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$ и $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Выберем в множестве собственных векторов, отвечающих каждому собственному значению A, ортонормированный базис. Объединение всех таких векторов $\{\phi_n\}$ есть ортонормированное множество, так как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Пусть $\mathcal{M}$ — замыкание линейной оболочки $\{\phi_n\}$. Поскольку A самосопряжен и A: $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, имеем A: $\mathcal{M}^\perp \to \mathcal{M}^\perp$. Пусть $\tilde{A}$ — сужение A на $\mathcal{M}^\perp$. Тогда оператор $\tilde{A}$ самосопряжен и компактен, ибо таков A. По теореме Рисса—Шаудера любое $\lambda \neq 0$, лежащее в $\sigma(\tilde{A})$, есть собственное значение оператора $\tilde{A}$ и, значит, оператора A. Отсюда следует, что спектральный радиус $\tilde{A}$ равен нулю, так как собственные векторы A лежат в $\mathcal{M}$. Тогда из самосопряженности $\tilde{A}$ с учетом теоремы VI.6 вытекает, что $\tilde{A}$ — нулевой оператор на $\mathcal{M}^\perp$. Таким образом, $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$, ибо если $\varphi \in \mathcal{M}^\perp$, то $A\varphi = 0$, т. е. $\varphi \in \mathcal{M}$. Следовательно, $\mathcal{M} = \mathcal{H}$.

Тот факт, что $\lambda_n \to 0$, есть следствие первой части теоремы Рисса—Шаудера, утверждающей, что каждое ненулевое собственное значение имеет конечную кратность, а единственной предельной точкой последовательности λ_n может быть лишь нуль. ∎

Теорема VI.17 (каноническая форма компактного оператора). Пусть A — компактный оператор на $\mathcal{H}$. Тогда существуют (не обязательно полные) ортонормированные множества $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ и $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ и положительные вещественные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$, такие, что

$$A = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\psi_n, \cdot) \phi_n. \tag{VI.6}$$

Сумма в (VI.6), которая может быть конечной или бесконечной, равномерно сходится. Числа $\{\lambda_n\}$ называются **сингулярными числами** оператора A.

Доказательство. Поскольку A компактен, таков и A^*A (теорема VI.12). Следовательно, A^*A компактен и самосопряжен. По теореме Гильберта—Шмидта существует ортонормированное множество $\{\psi_n\}_{n=1}^N$, такое, что $A^*A\psi_n = \mu_n \psi_n$, где $\mu_n \neq 0$, и такое, что A^*A — нулевой оператор на подпространстве, ортогональном к $\{\psi_n\}_{n=1}^N$. Поскольку A^*A положителен, каждое $\mu_n > 0$. Пусть λ_n — положительный квадратный корень из μ_n и $\phi_n = A\psi_n/\lambda_n$. Короткое вычисление показывает, что ϕ_n ортонормированы и

$$A\psi = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\psi_n, \psi) \phi_n. \ ∎$$

Это доказательство показывает, что сингулярные числа оператора A — это в точности собственные значения $|A|$.

Закончим этот раздел классическим примером.

Пример (задача Дирихле). Главным стимулом к изучению компактных операторов служит возможность использовать интегральные уравнения при решении классических граничных задач математической физики. Мы кратко опишем этот метод. Пусть D — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой граничной поверхностью ∂D. Задача Дирихле для уравнения Лапласа формулируется так: задана непрерывная функция f на ∂D; найти функцию u, дважды дифференцируемую в D, непрерывную на $\overline{D}$ и такую, что

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, \quad x \in D, \\ u(x) &= f(x), \quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

Пусть $K(x, y) = (x-y, n_y)/2\pi |x-y|^3$, где n_y — внешняя нормаль к ∂D в точке $y \in \partial D$. Тогда $K(x, y)$ как функция от x удовлетворяет уравнению $\Delta_x K(x, y) = 0$ во внутренности области, что наводит на мысль записать u как суперпозицию

$$u(x) = \int_{\partial D} K(x, y)\, \varphi(y)\, dS(y),$$

где $\varphi(y)$ — некоторая непрерывная функция на ∂D, а dS — обычный элемент площади. В самом деле, при $x \in D$ интеграл имеет точный смысл и $\Delta u(x) = 0$ в D. Более того, если x_0 — любая точка в ∂D и $x \to x_0$ *изнутри* D, то можно доказать, что

$$u(x) \to -\varphi(x_0) + \int_{\partial D} K(x_0, y)\, \varphi(y)\, dS(y).$$

Хотя это и не очевидно сразу, но можно убедиться, что

$$\int_{\partial D} K(x_0, y)\, \varphi(y)\, dS(y)$$

существует и является непрерывной функцией на ∂D, если φ — непрерывная функция на ∂D. В доказательстве используется гладкость границы области D, благодаря которой $(x-y, n_y) \approx \approx c|x-y|^2$ для $x, y \in \partial D$ при $x \to y$.

Поскольку мы хотим, чтобы $u(x) = f(x)$ на ∂D, весь вопрос сводится к тому, сможем ли мы найти такое φ, чтобы

$$f(x) = -\varphi(x) + \int_{\partial D} K(x, y)\, \varphi(y)\, dS(y), \quad x \in \partial D.$$

Пусть $T\colon C(\partial D) \to C(\partial D)$ задано равенством

$$(T\varphi)(x) = \int_{\partial D} K(x, y)\, \varphi(y)\, dS(y).$$

Оператор T не только ограничен, но и (как будет скоро показано) компактен. Следовательно, согласно альтернативе Фредгольма, либо $\lambda=1$ принадлежит точечному спектру T и в этом случае существует функция $\psi \in C(\partial D)$, такая, что $(I-T)\psi=0$, либо $-f=(I-T)\varphi$ обладает единственным решением для каждой функции $f\in C(\partial D)$. Но первое невозможно, поскольку в силу принципа максимума решение исходной задачи, если оно существует, единственно. Таким образом, имеет место второй вывод, т. е. компактность интегрального оператора и априорное знание единственности привели к доказательству существования решения.

Идея доказательства компактности такова. Пусть

$$K_\delta(x, z)=\frac{(x-z,\ n_z)}{|x-z|^3+\delta}.$$

Если $\delta>0$, то ядро K_δ непрерывно и, подобно тому как это пояснялось в начале этого раздела, можно доказать, что интегральные операторы T_δ компактны. Для доказательства компактности T достаточно установить, что $\|T-T_\delta\|\to 0$ при $\delta\to 0$. Ввиду оценки

$$|(T_\delta f)(x)-(Tf)(x)|\leqslant\|f\|_\infty \int_{\partial D}|K(x, z)-K_\delta(x, z)|\,dS(z)$$

для этого нужно лишь доказать, что интеграл сходится к нулю равномерно по x при $\delta\to 0$. Разделим область интегрирования на множество, где $|x-z|\geqslant\varepsilon$, и его дополнение. В первой области при фиксированном ε ядра сходятся равномерно. Вклад второй области благодаря интегрируемости K может быть сделан произвольно малым для достаточно малых ε.

VI.6. Операторы со следом и идеал операторов Гильберта — Шмидта

В предыдущем разделе мы видели, что компактные операторы обладают рядом привлекательных свойств и полезны в приложениях. По этой причине важно располагать эффективным критерием компактности заданного оператора или, еще лучше, общими утверждениями о целых классах операторов. В этом разделе мы докажем, что интегральный оператор

$$(Tf)(x)=\int_M K(x, y)\,f(y)\,d\mu(y)$$

на $L^2(M, d\mu)$ компактен, если $K(\cdot,\ \cdot)\in L^2(M\times M,\ d\mu\otimes d\mu)$. Сначала мы разовьем понятие следа — вспомогательное средство, представляющее и большой самостоятельный интерес. Теорема VI.12 показывает, что $\mathrm{Com}(\mathcal{H})$ — множество компактных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ — образует банахово пространство. В конце раздела мы вычислим сопряженное и второе сопряженное к $\mathrm{Com}(\mathcal{H})$. Эти вычисления проиллюстрируют разницу между слабой банаховой и слабой операторной топологиями на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ и дадут первое представление о строении абстрактных алгебр фон Неймана, которые мы будем изучать позднее.

След — это обобщение обычного понятия суммы диагональных элементов матрицы, но из-за бесконечности сумм не все операторы обладают следом. Построение следа аналогично построению интеграла Лебега, когда сначала определяют $\int f\,d\mu$ для $f \geqslant 0$; в таком случае интеграл принимает значения на полупрямой $[0, \infty]$, включая ∞. Затем определяют $\mathcal{L}^1$ как множество тех f, для которых $\int |f|\,d\mu < \infty$. Оно оказывается векторным пространством, а $f \mapsto \int f\,d\mu$ — линейным функционалом. Подобным образом мы сначала определим след $\mathrm{tr}(\cdot)$ на положительных операторах; отображение $A \mapsto \mathrm{tr}\,A$ тогда будет принимать значения в $[0, \infty]$. Затем мы определим **класс операторов со следом** $\mathfrak{I}_1$ как множество всех $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, таких, что $\mathrm{tr}\,|A| < \infty$. Наконец, мы покажем, что $\mathrm{tr}(\cdot)$ — линейный функционал на $\mathfrak{I}_1$ с правильными свойствами.

Теорема VI.18. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в нем. Тогда для любого положительного оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ определим $\mathrm{tr}\,A = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A\varphi_n)$. Число $\mathrm{tr}\,A$ называется **следом** A и не зависит от выбора ортонормированного базиса. След обладает такими свойствами:

(a) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B$;
(b) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}\,A$ для всех $\lambda \geqslant 0$;
(c) $\mathrm{tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{tr}\,A$ для любого унитарного оператора U;
(d) если $0 \leqslant A \leqslant B$, то $\mathrm{tr}\,A \leqslant \mathrm{tr}\,B$.

Доказательство. Для заданного ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ определим $\mathrm{tr}_\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A\varphi_n)$. Если $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — другой ортонормированный базис, то

$$\operatorname{tr}_\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \| A^{1/2} \varphi_n \|^2 =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} | (\psi_m, A^{1/2}\varphi_n) |^2 \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | (A^{1/2} \psi_m, \varphi_n) |^2 \right) =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \| A^{1/2} \psi_m \|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} (\psi_m, A\psi_m) = \operatorname{tr}_\psi(A).$$

Перестановка порядка суммирования допустима, поскольку все члены положительны.

Свойства (a), (b) и (d) очевидны. Для доказательства (c) заметим, что если $\{\varphi_n\}$—ортонормированный базис, то и $\{U\varphi_n\}$ — тоже. Следовательно,

$$\operatorname{tr}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}_{(U\varphi)}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}_\varphi(A) = \operatorname{tr}(A). \blacksquare$$

Определение. Оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ назовем **оператором со следом**, если $\operatorname{tr}|A| < \infty$. Семейство всех таких операторов обозначим через $\mathscr{I}_1$.

Основные свойства $\mathscr{I}_1$ описывает следующая

Теорема VI.19. $\mathscr{I}_1$ есть $*$-идеал в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, т. е.

(a) $\mathscr{I}_1$—векторное пространство;
(b) если $A \in \mathscr{I}_1$ и $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, то $AB \in \mathscr{I}_1$ и $BA \in \mathscr{I}_1$;
(c) если $A \in \mathscr{I}_1$, то и $A^* \in \mathscr{I}_1$.

Доказательство. (a) Так как $|\lambda A| = |\lambda||A|$ для $\lambda \in \mathbf{C}$, то $\mathscr{I}_1$ замкнуто относительно умножения на скаляры. Предположим теперь, что A и $B \in \mathscr{I}_1$; мы хотим доказать, что $A+B \in \mathscr{I}_1$. Пусть U, V и W—частичные изометрии, возникающие при полярном разложении $A+B$, A и B:

$$A+B = U|A+B|,$$
$$A = V|A|,$$
$$B = W|B|.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{N} (\varphi_n, |A+B|\varphi_n) = \sum_{n=1}^{N} (\varphi_n, U^*(A+B)\varphi_n) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} |(\varphi_n, U^*V|A|\varphi_n)| + \sum_{n=1}^{N} |(\varphi_n, U^*W|B|\varphi_n)|.$$

Однако

$$\sum_{n=1}^{N} |(\varphi_n, U^*V|A|\varphi_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2} V^*U\varphi_n \| \, \| |A|^{1/2} \varphi_n \| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2} V^*U\varphi_n \|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2} \varphi_n \|^2 \right)^{1/2}.$$

Следовательно, если мы сможем показать, что

$$\sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2} V^*U\varphi_n \|^2 \leqslant \operatorname{tr}|A|, \tag{VI.7}$$

то сможем заключить, что

$$\sum_{n=1}^{N} (\varphi_n, |A+B|\varphi_n) \leqslant \operatorname{tr}|A| + \operatorname{tr}|B| < \infty$$

и что $A+B \in \mathfrak{I}_1$. Для доказательства (VI.7) нужно только убедиться, что

$$\operatorname{tr}(U^*V|A|V^*U) \leqslant \operatorname{tr}|A|.$$

Выбирая ортонормированный базис $\{\varphi_n\}$ так, чтобы каждый φ_n лежал либо в $\operatorname{Ker} U$, либо в $(\operatorname{Ker} U)^\perp$, увидим, что $\operatorname{tr}(U^*(V|A|V^*)U) \leqslant \operatorname{tr}(V|A|V^*)$. Аналогично, выбирая ортонормированный базис $\{\psi_m\}$, где ψ_m лежит в $\operatorname{Ker} V^*$ или в $(\operatorname{Ker} V^*)^\perp$, найдем, что $\operatorname{tr}(V|A|V^*) \leqslant \operatorname{tr} A$.

(b) В силу доказываемой ниже леммы, каждый оператор $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ может быть записан как линейная комбинация четырех унитарных операторов, поэтому с учетом (a) нам остается только показать, что при унитарном U из $A \in \mathfrak{I}_1$ вытекает $UA \in \mathfrak{I}_1$ и $AU \in \mathfrak{I}_1$. Но $|UA| = |A|$ и $|AU| = |U^{-1}AU|$, поэтому, в силу пункта (c) теоремы VI.18, AU и UA лежат в $\mathfrak{I}_1$.

(c) Пусть $A = U|A|$ и $A^* = V|A^*|$—полярные разложения A и A^*. Тогда $|A^*| = V^*|A|U^*$. Если $A \in \mathfrak{I}_1$, то $|A| \in \mathfrak{I}_1$ и потому, в силу пункта (b), $|A^*| \in \mathfrak{I}_1$ и $A^* = V|A^*| \in \mathfrak{I}_1$. ∎

Для завершения доказательства пункта (b) нужна следующая лемма, которая будет применяться и в других местах:

Лемма. Каждый оператор $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ можно записать как линейную комбинацию четырех унитарных операторов.

Доказательство. Поскольку оператор $B = \frac{1}{2}(B+B^*) - \frac{i}{2}[i(B-B^*)]$, его можно записать как линейную комбинацию двух самосопряженных операторов. Итак, предположим, что A самосопряжен, и, не ограничивая общности, будем считать, что

$\|A\| \leqslant 1$. Тогда $A \pm i\sqrt{I-A^2}$ унитарны и $A = \frac{1}{2}(A+i\sqrt{I-A^2}) + \frac{1}{2}(A-i\sqrt{I-A^2})$. ∎

Доказательство следующей теоремы мы оставляем читателю (задача 23).

Теорема VI.20. Пусть норма $\|\cdot\|_1$ задана на $\mathfrak{I}_1$ равенством $\|A\|_1 = \operatorname{tr}|A|$. Тогда $\mathfrak{I}_1$—банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_1$ и $\|A\| \leqslant \|A\|_1$.

Отметим, что множество $\mathfrak{I}_1$ *не замкнуто* относительно операторной нормы $\|\cdot\|$.

Опишем теперь простую связь между $\mathfrak{I}_1$ и множеством компактных операторов:

Теорема VI.21. Каждый оператор $A \in \mathfrak{I}_1$ компактен. Компактный оператор A лежит в $\mathfrak{I}_1$ тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$—сингулярные числа A.

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{I}_1$, то $|A|^2 \in \mathfrak{I}_1$ и $\operatorname{tr}(|A|^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2 < \infty$ для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\psi \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_N]^{\perp}$ и $\|\psi\| = 1$; тогда

$$\|A\psi\|^2 \leqslant \operatorname{tr}(|A|^2) - \sum_{n=1}^{N} \|A\varphi_n\|^2,$$

поскольку $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N, \psi\}$ всегда можно дополнить до ортонормированного базиса. Таким образом,

$$\sup\{\|A\psi\| \mid \psi \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_N]^{\perp}, \|\psi\| = 1\} \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{N} (\varphi_n, \cdot) A\varphi_n$ равномерно сходится к A, т. е. A компактен. Вторая часть теоремы легко выводится с использованием канонической формы, описанной в теореме VI.17 (задача 24). ∎

Следствие. Множество операторов конечного ранга $\|\cdot\|_1$-плотно в $\mathfrak{I}_1$.

Второй класс операторов, который мы обсудим,— это множество операторов Гильберта—Шмидта, аналог $\mathscr{L}^2$.

Определение. Оператор $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ называется **оператором Гильберта—Шмидта**, если $\operatorname{tr} T^*T < \infty$. Класс всех таких операторов обозначим через $\mathfrak{I}_2$.

С помощью тех же рассуждений, что и в случае $\mathcal{J}_1$, можно доказать, что справедлива

Теорема VI.22. (a) Множество $\mathcal{J}_2$ есть $*$-идеал.

(b) Если $A, B \in \mathcal{J}_2$, то для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A^*B\varphi_n)$$

абсолютно суммируем и его предел, обозначаемый через $(A, B)_2$, не зависит от выбора ортонормированного базиса.

(c) $\mathcal{J}_2$, снабженное внутренним произведением $(\cdot, \cdot)_2$, есть гильбертово пространство.

(d) Если $\|A\|_2 = \sqrt{(A, A)_2} = (\operatorname{tr}(A^*A))^{1/2}$, то

$$\|A\| \leqslant \|A\|_2 \leqslant \|A\|_1 \quad \text{и} \quad \|A\|_2 = \|A^*\|_2.$$

(e) Каждый оператор $A \in \mathcal{J}_2$ компактен, а компактный оператор A лежит в $\mathcal{J}_2$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$, где λ_n — сингулярные числа A.

(f) Множество операторов конечного ранга $\|\cdot\|_2$-плотно в $\mathcal{J}_2$.

(g) $A \in \mathcal{J}_2$ тогда и только тогда, когда $\{\|A\varphi_n\|\} \in l_2$ для некоторого ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}$.

(h) $A \in \mathcal{J}_1$ тогда и только тогда, когда $A = BC$, где $B, C \in \mathcal{J}_2$.

Отметим, что $\mathcal{J}_2$ не замкнут по $\|\cdot\|_2$. Важный факт о $\mathcal{J}_2$ состоит в том, что, когда $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$, множество $\mathcal{J}_2$ имеет конкретную функциональную реализацию.

Теорема VI.23. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой и $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$. Тогда $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ есть оператор Гильберта — Шмидта тогда и только тогда, когда существует функция

$$K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu),$$

такая, что

$$(Af)(x) = \int K(x, y) f(y)\, d\mu(y).$$

Более того,

$$\|A\|_2^2 = \int |K(x, y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Доказательство. Пусть функция $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$ и A_K — ассоциированный с ней интегральный оператор. Легко видеть (задача 25), что A_K корректно определен на $\mathcal{H}$ и что

$$\|A_K\| \leqslant \|K\|_{L^2}. \tag{VI.8}$$

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$—ортонормированный базис в $L^2(M, d\mu)$. Тогда $\{\varphi_n(x)\overline{\varphi_m(y)}\}_{n,m=1}^{\infty}$—ортонормированный базис в пространстве $L^2(M\times M, d\mu\otimes d\mu)$, так что

$$K=\sum_{n,m=1}^{\infty}\alpha_{n,m}\varphi_n(x)\overline{\varphi_m(y)}.$$

Пусть

$$K_N=\sum_{n,m=1}^{N}\alpha_{n,m}\varphi_n(x)\overline{\varphi_m(y)}.$$

Тогда каждая функция K_N есть интегральное ядро оператора конечного ранга. Действительно, $A_{K_N}=\sum_{n,m=1}^{N}\alpha_{n,m}(\varphi_m, \cdot)\varphi_n$. Поскольку $\|K_N-K\|_{L^2}\to 0$, с учетом (VI.8) имеем, что $\|A_K-A_{K_N}\|\to 0$ при $N\to\infty$. Следовательно, A_K—компактный оператор и

$$\operatorname{tr}(A_K^*A_K)=\sum_{n=1}^{\infty}\|A_K\varphi_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha_{n,m}|^2=\|K\|_{L^2}.$$

Таким образом, $A_K\in\mathcal{I}_2$ и $\|A_K\|_2=\|K\|_{L^2}$.

Мы уже показали, что отображение $K\mapsto A_K$—это изометрия пространства $L^2(M\times M, d\mu\otimes d\mu)$ в $\mathcal{I}_2$, поэтому ее область значений замкнута. Но операторы конечного ранга очевидным образом можно получить из ядер, а поскольку они плотны в $\mathcal{I}_2$, область значений отображения $K\mapsto A_K$ есть все $\mathcal{I}_2$. ∎

Эта теорема дает простое достаточное условие компактности оператора и потому весьма полезна. Отметим, что ее условие не является необходимым. Одновременно у нас появилось достаточное условие того, что оператор на $\mathcal{H}=L^2(M, d\mu)$ является интегральным оператором. Это условие также не необходимо. Вернемся теперь к определению следа на $\mathcal{I}_1$.

Теорема VI.24. Если $A\in\mathcal{I}_1$ и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$—любой ортонормированный базис, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n, A\varphi_n)$ сходится абсолютно и его сумма не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Запишем A в виде $U|A|^{1/2}|A|^{1/2}$. Тогда

$$|(\varphi_n, A\varphi_n)|\leqslant\||A|^{1/2}U^*\varphi_n\|\,\||A|^{1/2}\varphi_n\|.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(\varphi_n, A\varphi_n)|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\||A|^{1/2}U^*\varphi_n\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\||A|^{1/2}\varphi_n\|^2\right)^{1/2},$$

и, поскольку $|A|^{1/2}U^*$ и $|A|^{1/2}$ принадлежат $\mathcal{I}_2$, ряд сходится. Доказательство независимости от выбора базиса дословно то же, что и для $\operatorname{tr} A$, когда $A \geqslant 0$. ∎

Определение. Отображение $\operatorname{tr}\colon \mathcal{I}_1 \to \mathbb{C}$, задаваемое равенством $\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A\varphi_n)$, где $\{\varphi_n\}$ — любой ортонормированный базис, называется **следом**.

Отметим, что утверждение: «если $\sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi_n, A\varphi_n)| < \infty$ для некоторого ортонормированного базиса, то $A \in \mathcal{I}_1$» — неверно, ибо для того чтобы $A \in \mathcal{I}_1$, сумма должна быть конечной для всех ортонормированных базисов. Спектральная теорема, которая будет доказана в следующей главе, утверждает, что любой самосопряженный оператор A записывается в виде $A_+ - A_-$, где A_+ и A_- положительны и $A_+A_- = 0$. Поэтому неудивительно, что $A \in \mathcal{I}_1$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} A_+ < \infty$, $\operatorname{tr} A_- < \infty$, и в этом случае $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A_+ - \operatorname{tr} A_-$. Подытожим основные свойства следа:

Теорема VI.25. (a) $\operatorname{tr}(\cdot)$ — линейное отображение;

(b) $\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}$;

(c) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, если $A \in \mathcal{I}_1$ и $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Доказательство. (a) и (b) очевидны. Для доказательства (c) достаточно рассмотреть лишь унитарные B, ибо любой ограниченный оператор есть сумма четырех унитарных. Но в таком случае

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, AB\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (B^*\psi_n, A\psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, BA\psi_n) = \operatorname{tr} BA,$$

где $\psi_n = B\varphi_n$ для всех n. ∎

Если $A \in \mathcal{I}_1$, то отображение $B \mapsto \operatorname{tr} AB$ есть линейный функционал на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Этим, конечно, не исчерпываются все непрерывные линейные функционалы на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, однако такие функционалы полностью составляют сопряженное к $\operatorname{Com}(\mathcal{H})$ — пространству компактных операторов. Можно зафиксировать $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и получить линейный функционал на $\mathcal{I}_1$, задаваемый отображением $A \mapsto \operatorname{tr} BA$. Множество таких функционалов образует сопряженное к $\mathcal{I}_1$, снабженному топологией операторной нормы. Сформулируем это утверждение как теорему; интересующиеся доказательством могут найти его набросок в задаче 30.

Теорема VI.26. (a) $\mathcal{I}_1 = [\operatorname{Com}(\mathcal{H})]^*$. Иначе говоря, отображение $A \mapsto \operatorname{tr}(A\,\cdot)$ есть изометрический изоморфизм между $\mathcal{I}_1$ и $[\operatorname{Com}(\mathcal{H})]^*$.

(b) $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{I}_1^*$. Иначе говоря, отображение $B \mapsto \operatorname{tr}(B\,\cdot)$ — изометрический изоморфизм между $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{I}_1^*$.

Теперь вернемся к обсуждению различия между слабой операторной топологией на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ (см. § VI.1) и слабой банаховой топологией, т. е. $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \mathscr{L}(\mathscr{H})^*)$. Если $\mathscr{F}$ — семейство операторов конечного ранга, то $\mathscr{F} \subset \mathfrak{I}_1$ и каждый оператор $F \in \mathscr{F}$ может быть реализован как линейный функционал на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ посредством сопряженного действия $\mathfrak{I}_1$ на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Топология, порождаемая этими функционалами на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, т. е. топология $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \mathscr{F})$, и есть как раз слабая операторная топология. Множество $\mathscr{F}$ не замкнуто относительно $\mathscr{L}(\mathscr{H})^*$-нормы. На самом деле $\mathscr{L}(\mathscr{H})^*$-норма на $\mathscr{F}$ есть в точности $\|\cdot\|_1$, так что замыкание $\mathscr{F}$ в этой норме есть в точности $\mathfrak{I}_1$. Слабая топология на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, порождаемая всеми функционалами из $\mathfrak{I}_1$, т. е. топология $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \mathfrak{I}_1)$, называется **ультраслабой топологией** на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Отметим, что она сильнее слабой операторной топологии, поскольку относительно нее большее число функционалов должно быть непрерывным, но слабее, чем слабая банахова топология на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, поскольку $\mathfrak{I}_1$ не есть все сопряженное к $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. На самом деле, поскольку $\mathscr{L}(\mathscr{H}) = \mathfrak{I}_1^*$, ультраслабая топология на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ в точности совпадает со $*$-слабой топологией. Реализация пространства $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ как сопряженного к банахову пространству линейных функционалов, непрерывных в топологии $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \overline{\mathscr{F}})$, возможна для широкого класса алгебр, а не только для $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. В задаче 31 приведен другой пример: мультипликаторная алгебра L^∞ на L^2. Подробно мы будем изучать такие алгебры в гл. XVIII.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *VI.1*. Читатель, возможно, смущен обилием топологий, введенных нами на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$: слабая, сильная, равномерная операторные топологии, слабая банахова, ультраслабая (§ VI.6). Дальше мы встретим еще и ультрасильную топологию. Зачем нужно вводить все эти топологии? Оказывается, многие интересные операторы задаются как тот или иной предел более простых операторов. И очень важно знать точный смысл предельного перехода и понимать, какие свойства последовательности передаются предельным операторам, подобно тому, как мы знаем, что равномерный предел компактных операторов компактен. Более того, при изучении какой-нибудь проблемы не всегда заранее известно, в каком смысле будут существовать пределы, и потому полезно иметь широкий выбор топологий. Вообще говоря, в т. I и II важны слабая, сильная и равномерная топологии. Ультраслабая и ультрасильная топологии будут играть роль при изучении алгебр фон Неймана. Слабая, сильная и ультрасильная операторные топологии были введены в работе фон Неймана: J. von Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 370—427.

§ *VI.2*. Спектральная теорема для самосопряженных операторов на конечномерных векторных пространствах прекрасно изложена П. Халмошем в книге: Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.

§ *VI.3*. Определения различных типов спектра будут использованы и в случае неограниченных операторов. Теорема VI.5 выполняется, если потребовать, чтобы T был замкнутым оператором. Если T ограничен, он, конечно, автоматически замкнут.

Теория аналитических функций со значениями в банаховом пространстве весьма подробно излагается в монографии Э. Хилле и Р. С. Филлипса: Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962. Они обсуждают и более сложное понятие аналитической функции из одного банахова пространства в другое. Доказательство теоремы VI.7 можно найти в книге К. Иосиды: Функциональный анализ, «Мир», М., 1967.

Некоторые авторы (например, Иосида или Хилле и Филлипс) используют термин «непрерывный спектр» для обозначения тех $\lambda \in \sigma(T)$, которые не принадлежат ни точечному, ни остаточному спектру. Другие (такие, как Като или Рисс и Надь) используют то определение, которое мы даем в § VII.2. Важное различие этих определений состоит в том, что при нашем определении непрерывная и точечная части спектра могут пересекаться.

§ VI.4. Полярное разложение для линейных преобразований на $\mathbb{R}^n$ имеет простой геометрический смысл. Любое такое преобразование A можно записать в виде $A = OS$, где O — ортогональное, а S — самосопряженное преобразования. В силу спектральной теоремы S может быть сжатием, растяжением или аннулированием вдоль определенных ортогональных направлений.

Понятие положительности естественно обобщается на операторные алгебры и будет играть важную роль в наших исследованиях в следующих томах.

Утверждение о том, что неравенство треугольника не выполняется для $|\cdot|$, т. е. что $|A+B|$ может превосходить $|A|+|B|$ (см. задачу 16), — это утверждение о том, что $f(x) = |x|$ не есть выпуклая операторнозначная функция, т. е. неравенство $f(tA+(1-t)B) \leqslant tf(A)+(1-t)f(B)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ может не иметь места для общих операторов A и B, несмотря на то, что $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$ при вещественных x и y и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Вопрос о том, какие именно матрицы и операторнозначные функции выпуклы, был изучен в работах: F. Krauss, Über konvexe Matrixfunktionen, *Math. Z.*, **41** (1936), 18—42; J. Bendat, S. Sherman, Monotone and Convex Operator Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 58—71.

§ VI.5. Доказательство второй части теоремы VI.12 можно найти в книге Иосиды; оно представляет собой красивое применение теорем Асколи — Арцела и Алаоглу (см. также задачу 36).

Теория компактных операторов в прямом смысле берет начало от великой работы Фредгольма об интегральных операторах: I. Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.*, **27** (1903), 365—390. Фредгольм рассматривал уравнения вида

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy,$$

где g и K — заданные непрерывные функции и $-\infty < a < b < \infty$. Он показал, что существуют явная целая функция $d(\lambda)$, не равная тождественно нулю, и явная функция $D_\lambda(x, y)$, целая по λ и непрерывная по x и y, такие, что если $d(\lambda) \neq 0$, то функция $f(x) = g(x) + d(\lambda)^{-1} \int_a^b D_\lambda(x, y)\, g(y)\, dy$ удовлетворяет исходному уравнению. Более того, он показал, что когда $d(\lambda) = 0$, тогда

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy$$

имеет решение $f \neq 0$. Таким образом, работа Фредгольма содержала теорему VI.15 и сформулированное перед ней следствие теоремы VI.14, относящиеся к этому частному случаю. Хорошие изложения теории Фредгольма: W. Lovitt, Linear Integral Equations, Dover, New York, 1950; F. Smithies, Integral Equations, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1958.

Работа Фредгольма вызвала заметный интерес у Гильберта и его школы и привела к выделению многих абстрактных понятий теории гильбертовых пространств. Первоначальное определение вполне непрерывных операторов, данное Гильбертом, на современном языке звучит как критерий теоремы VI.11: D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearer Integralgleichungen, I — VI, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* (1904), 49—91; (1905), 213—259, 307—388; (1906), 157—222, 439—480; (1910), 355—417; особенно IV. Распространение понятия компактного оператора на произвольные банаховы пространства с помощью критерия предкомпактности принадлежит Ф. Риссу: F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, 41 (1918), 71—98.

Теорема VI.12b принадлежит Шаудеру: J. Schauder, Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, *Studie Math.*, 2 (1930), 183—196.

Идея использовать теорему VI.13 для развития общей теории высказана Шмидтом: E. Schmidt, Autlösung der allgemeinen linearen Integralgleichung, *Math. Ann.*, 64 (1907), 161—174. Вопрос о том, является ли каждый компактный оператор в общем банаховом пространстве равномерным пределом операторов конечного ранга, открыт. Современное обсуждение этой проблемы см. в работе: I. Singer, Bases in Banach Spaces, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.

Теорема VI.14, ее следствие и теорема VI.15 справедливы в произвольном банаховом пространстве. Их доказательства в этом случае даны у Н. Данфорда и Дж. Шварца, Линейные операторы, т. I, ИЛ, М., 1962. Техника нашего доказательства теоремы VI.14 заимствована из приложения к работе: W. Hunziker, On the Spectra of Schrödinger Multiparticle Hamiltonians, *Helv. Phys. Acta*, 39 (1966), 451—462. Аналогичный подход можно найти в приложении к статье: G. Tiktopolous, Analytic Continuation in Complex Angular Momentum and Integral Equations, *Phys. Rev.*, 133B (1964), 1231—1238. Одна часть теоремы VI.14 для общего случая Данфордом и Шварцем не доказана; обсуждение этого вопроса можно найти в работе S. Steinberg, Meromorphic Families of Compact Operators, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 31 (1968), 372—379. По поводу распространения теории на локально выпуклые пространства см.: J. Leray, Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes, *Acta Sci. Math. Szegal*, 12, Part B (1950), 177—186.

Теорема VI.15 была впервые установлена Риссом и Шаудером в цитированных выше работах (Шаудер восполнил некоторые детали общего случая), а теорема VI.16 принадлежит Гильберту и Шмидту и содержится в указанных выше работах этих авторов.

Обсуждение использования интегральных уравнений при решении задачи Дирихле см. в книге: Ivor Stakgold, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, v. 2, Macmillan, New York, 1968 (особенно разделы 6.4 и 6.5).

§ VI.6. Обсуждение $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ и аналогичных множеств $\mathcal{I}_p$ проведено в книге: R. Schatten, Norm Ideals of Completely Continuous Operators, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1960. Множество $\mathcal{I}_p$ определяется как совокупность таких A, для которых $\mathrm{Tr}(|A|^p) < \infty$; оно состоит из тех и только тех компактных операторов, для которых $\sum |\lambda_n|^p < \infty$.

Понятие норм-идеалов было распространено на другие множества операторов, допускающих введение следа (алгебры фон Неймана), и на более общие объекты Сигалом: I. Segal, A Non-commutative Extension of Abstract Integration, *Ann. Math.*, 57 (1953), 401—457; 58 (1953), 595—596, и Кунце: R. A. Kunze, L_p Fourier Transforms on Locally Compact Unimodular Groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 89 (1958), 519. При этом использовались методы, подчеркивающие аналогию с L^p.

ЗАДАЧИ

†*1*. Докажите, что слабая операторная топология слабее сильной операторной топологии, которая в свою очередь слабее равномерной операторной топологии.

†*2*. Докажите утверждения примера в § VI.1.

3. (a) Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что если $T_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ и $\{T_n x\}$ — последовательность Коши для каждого $x \in X$, то в $\mathscr{L}(X, Y)$ существует такой T, что $T_n \longrightarrow T$ сильно.

*(b) Верно ли утверждение (a), когда вместо T_n рассматривается направленность T_α?

4. (a) Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что теорема, аналогичная теореме V.1, справедлива и для $\mathscr{L}(X, Y)$, если Y слабо секвенциально полно (это означает, что каждая слабая последовательность Коши имеет слабый предел).

(b) Докажите, что если банахово пространство рефлексивно, то оно слабо секвенциально полно.

5. (a) Пусть T_t: $\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x+t)$ — оператор на $L^2(\mathbb{R})$. Какова норма T_t? К какому оператору сходится T_t, когда $t \longrightarrow \infty$, и в какой топологии?

(b) Ответьте на те же вопросы для T_t, действующих в $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

6. (a) Пусть $\mathscr{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство. Предположим, что заданы ε, ψ и ортонормированные векторы $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Покажите, что существуют такие A и B, что $\|A\psi_i\| < \varepsilon$, $\|B\psi_i\| = \varepsilon$; $i = 1, \ldots, n$, но $\|AB\psi\| > 1$.

(b) Докажите, что умножение как операция из $\mathscr{L}(\mathscr{H}) \times \mathscr{L}(\mathscr{H})$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ не непрерывно, когда $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ наделено сильной топологией.

(c) Предположим, что $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — *направленности*. Пусть $A_\alpha^* \xrightarrow{s}$ $\xrightarrow{s} A^*$, $B_\alpha \xrightarrow{s} B$. Докажите, что $A_\alpha B_\alpha \xrightarrow{w} AB$.

(d) Пусть A_n, B_n — *последовательности*, такие, что $A_n \xrightarrow{s} A$, $B_n \xrightarrow{s} B$. Докажите, что $A_n B_n \xrightarrow{s} AB$.

(e) Пусть A_n, B_n — *последовательности*, такие, что $A_n \xrightarrow{w} A$, $B_n \xrightarrow{w} B$. Приведите пример, когда утверждение $A_n B_n \xrightarrow{w} AB$ *неверно*.

7. Приведите пример, показывающий, что область значений ограниченного оператора может не быть замкнутой. Докажите, что если T ограничен, задан всюду и изометричен, то $\operatorname{Ran} T$ замкнута.

†*8*. (a) Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве. Докажите, что его собственные значения вещественны и что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

(b) Выведите из доказательства теоремы VI.8 универсальную (но зависящую от λ) оценку нормы резольвенты самосопряженного оператора при невещественных $\lambda \in \mathbb{C}$.

9. (a) Пусть A — самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Докажите, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Указание. Сначала заметьте, что

$$\operatorname{Re}(\psi, A\phi) = {}^1/_4\,[(\psi+\phi, A(\psi+\phi)) - (\psi-\phi, A(\psi-\phi))].$$

Затем, используя неравенство

$$|(\eta, A\eta)| \leqslant \|\eta\|^2 \sup_{\|\eta\|=1} |(\eta, A\eta)|$$

и тождество параллелограмма, докажите, что

$$|(\psi, A\phi)| \leqslant \sup_{\|\eta\|=1} |(\eta, A\eta)|,$$

если $\|\phi\| = \|\psi\| = 1$.

(b) Найдите пример, показывающий, что утверждение пункта (a) может быть неверно, если A не самосопряжен.

10. Покажите, что спектральный радиус интегрального оператора Вольтерра

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy,$$

рассматриваемого как отображение $C[0, 1]$ в себя, равен нулю. Какова норма T?

†*11.* Пусть $T \in \mathcal{L}(X)$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ существует и равен $\inf\limits_n \|T^n\|^{1/n}$; действуйте следующим образом:

(a) Положите $a_n = \log\|T^n\|$ и докажите, что $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$.

(b) Для фиксированного натурального m положите $n = mq + r$, где q и r — натуральные числа и $0 \leqslant r \leqslant m-1$. С помощью (a) выведите, что

$$\overline{\lim_n}\, \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_m}{m}.$$

(c) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/n) = \inf\limits_n (a_n/n)$, т. е. требуемое равенство.

†*12.* Докажите предложение в конце § VI.3.

13. (a) Дайте пример, показывающий, что линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^n$ может быть положительным, несмотря на то что все его матричные элементы не положительны.

*(b) Выведите необходимое и достаточное условие положительности $n\times n$-матрицы.

14. (a) Докажите, что если $A_n \geqslant 0$, $A_n \to A$ по норме, то $\sqrt{A_n} \to \sqrt{A}$ по норме.

(b) Предположим, что $\{A_n \geqslant 0\}$ — последовательность и $A_n \to A$ сильно. Докажите, что $\sqrt{A_n} \to \sqrt{A}$ сильно.

15. (a) Пусть $A_n \to A$ по норме. Докажите, что $|A_n| \to |A|$ по норме.

(b) Пусть $\{A_n\}$ — последовательность, и $A_n \to A$, $A_n^* \to A^*$ сильно. Докажите, что $|A_n| \to |A|$ сильно.

(c) Найдите пример, показывающий, что отображение $|\cdot|$ не является слабо непрерывным на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

16. Пусть $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Докажите, что неравенство

$$|(\sigma_3+1) + (\sigma_1-1)| \leqslant |(\sigma_3+1)| + |(\sigma_1-1)|$$

неверно. *Замечание*: этот пример принадлежит Э. Нельсону.

17. Докажите, что неравенство

$$\| |A| - |B| \| \leqslant \| A - B \|$$

не обязательно верно. [*Указание*: см. задачу 16.]

†*18.* (a) Докажите предложение, предшествующее теореме VI.10.
(b) Докажите единственность, утверждаемую теоремой VI.10.

19. Запишите матрицу $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ как произведение вращения и положительной симметричной матрицы.

**20.* Предположим, что X — рефлексивное банахово пространство и что T: $X \longrightarrow X$ — ограниченный линейный оператор. Докажите, что если T переводит слабо сходящуюся последовательность в равномерно сходящуюся, то T компактен.

†*21.* Завершите доказательство теоремы VI.14, распространнв доказанный в тексте результат на все пространство D.

22. С помощью теоремы Стоуна—Вейерштрасса докажите, что любой интегральный оператор Фредгольма на $C[a, b]$

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy,$$

где K — непрерывная функция, есть равномерный предел операторов конечного ранга.

†*23.* (a) Докажите, что $\| A \| \leqslant \| A \|_1$.
(b) Предположим, что $\{A_n\}$ — последовательность Коши относительно $\|\cdot\|_1$. Покажите, что $\{A_n\}$ имеет $\|\cdot\|$-предел A и что $\operatorname{tr} |A| < \infty$. После этого завершите доказательство теоремы VI.20, показав, что A есть $\|\cdot\|_1$-предел $\{A_n\}$.

†*24.* (a) Используя каноническую форму, данную в теореме VI.17, докажите второе утверждение теоремы VI.21.
(b) Докажите следствие теоремы VI.21.

†*25.* Пусть $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$, и пусть A_K — интегральный оператор

$$(A_K \varphi)(x) = \int_M K(x, y) \varphi(y)\, d\mu(y).$$

Докажите, что A_K корректно определен и что $\| A_K \| \leqslant \| K \|_{L^2}$.

26. (a) Докажите, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(A\varphi_n, \varphi_n)| < \infty$ для всех ортонормированных базисов, то $A \in \mathcal{J}_1$.
(b) Найдите такой $A \notin \mathcal{J}_1$, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(A\varphi_n, \varphi_n)| < \infty$ для некоторого фиксированного ортонормированного базиса.

27. Докажите, что $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, если $A, B \in \mathcal{J}_2$.

28. Докажите, что (a) $\| AB \|_1 \leqslant \| A \| \, \| B \|_1$,
(b) $\| AB \|_2 \leqslant \| A \| \, \| B \|_2$,
(c) $\| AB \|_1 \leqslant \| A \|_2 \, \| B \|_2$.

†29. Докажите, что $A \in \mathcal{J}_1$ тогда и только тогда, когда $A = BC$, где $B, C \in \mathcal{J}_2$.

†30. Цель этой задачи — доказательство теоремы VI.26.

(a) Пусть f — ограниченный линейный функционал на $\mathrm{Com}(\mathcal{H})$. Пусть $(\psi, \cdot)\phi$ — оператор на $\mathcal{H}$, переводящий η в $(\psi, \eta)\phi$. Покажите, что существует ограниченный линейный оператор B, такой, что
$$(\psi, B\phi) = f[(\psi, \cdot)\phi].$$

(b) Используя равенство
$$\sum_{n=1}^{N} (\phi_n, | B | \phi_n) = f\left[\sum_{n=1}^{N} (U\phi_n, \cdot)\phi_n\right],$$
докажите, что $B \in \mathcal{J}_1$ и $\|B\|_1 \leqslant \|f\|_{\mathrm{Com}(\mathcal{H})^*}$.

(c) Докажите, что $A \mapsto \mathrm{tr}(BA)$ — ограниченный линейный функционал на $\mathrm{Com}(\mathcal{H})$, равный на самом деле $f(\cdot)$.

(d) Докажите, что $\|B\|_1 = \|f\|_{\mathrm{Com}(\mathcal{H})^*}$.

(e) Пусть g — ограниченный линейный функционал на $\mathcal{J}_1$. Покажите, что существует единственный ограниченный линейный оператор B, такой, что
$$(\psi, B\phi) = g[(\psi, \cdot)\phi].$$

(f) Докажите, что $A \mapsto \mathrm{tr}(BA)$ — ограниченный линейный функционал на $\mathcal{J}_1$, который совпадает с g, и что $\|g\|_{\mathcal{J}_1^*} = \|B\|$.

31. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой и $L^\infty(M, d\mu)$ действует на $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$ в том смысле, что
$$(T_f\varphi)(x) = f(x)\varphi(x).$$
Докажите, что топология на L^∞, индуцированная слабой операторной топологией на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, тождественна $*$-слабой топологии, индуцированной на L^∞ пространством L^1.

32. Пусть $C[0, 1]$ действует на $L^2[0, 1]$, как в задаче 31. Найдите последовательность в $C[0, 1]$, сходящуюся в слабой операторной топологии на $C[0, 1]$ к $f \in C[0, 1]$, но не сходящуюся в слабой банаховой топологии на $C[0, 1]$.

33. Рассмотрим $\mathcal{J}_2$ как гильбертово пространство с внутренним произведением $(A, B)_2 = \mathrm{tr}(A^*B)$. Пусть $A \mapsto L_A$ и $A \mapsto R_A$ — отображения $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ в $\mathcal{L}(\mathcal{J}_2)$, определяемые формулами
$$L_A(B) = AB, \qquad R_A(B) = BA^*.$$

(a) Докажите, что $A \mapsto L_A$ — гомоморфизм $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ в $\mathcal{L}(\mathcal{J}_2)$.

(b) Докажите, что $A \mapsto R_A$ — сопряженно-линейный гомоморфизм $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ в $\mathcal{L}(\mathcal{J}_2)$.

(c) Предположим, что $C \in \mathcal{L}(\mathcal{J}_2)$ и удовлетворяет условию $CL_A = L_AC$ для всех $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Докажите, что $C = R_B$ для некоторого $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

*34. Покажите, что в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ отображение $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ непрерывно из слабой топологии в равномерную (т. е. $Tx_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$, если $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ для произвольной *направленности*) тогда и только тогда, когда T имеет конечный ранг! (Ср. с теоремой VI.11.)

35. (a) Предположим, что T — оператор на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, такой, что если $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, то $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$. Докажите, что T ограничен (так что $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$).

(b) Опишите непрерывные линейные отображения $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ в себя, если и область определения, и область значений наделены слабой топологией.

36. Докажите пункт (b) теоремы VI.12, когда $X = Y$ — гильбертово пространство, используя пункт (c) теоремы VI.12 и полярное разложение.

†*37.* Докажите пункт (c) теоремы VI.12.

38. Пусть P и Q — ортогональные проекторы на подпространства $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Предположим, что $PQ = QP$.

(a) Докажите, что $1-P$, $1-Q$, PQ, $P+Q-PQ$ и $P+Q-2PQ$ — ортогональные проекторы.

(b) Как области значений проекторов из (a) связаны с $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$?

**39.* Пусть P и Q — ортогональные проекторы на подпространства $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Докажите, что $\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\,(PQ)^n$ существует и есть ортогональный проектор на $\mathscr{M} \cap \mathscr{N}$.

**40.* Пусть $\mathfrak{I}$ — равномерно (т. е. по норме $\|\cdot\|$) замкнутый идеал в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, $\mathfrak{I} \neq 0$. Докажите, что $\mathrm{Com}(\mathscr{H}) \subset \mathfrak{I}$, показав, что любой оператор конечного ранга лежит в $\mathfrak{I}$.

Замечание. Как мы увидим далее (задача 31 гл. VII), в случае, когда $\mathscr{H}$ — сепарабельное пространство, единственными равномерно замкнутыми идеалами являются $\{0\}$, $\mathrm{Com}(\mathscr{H})$, $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

41. Найдите неортогональный проектор, действующий на $\mathbb{R}^2$.

42. Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$. Докажите, что множество таких λ, что $\lambda \in \sigma(A)$, но не является собственным значением, а $\mathrm{Ran}(\lambda I - A)$ замкнута, но не совпадает со всем X, открыто в $\mathbb{C}$.

43. Пусть M и N — такие подпространства банахова пространства X, что $M + N = X$ и $M \cap N = \{0\}$. Пусть P — проектор пространства X на M. Докажите, что P ограничен тогда и только тогда, когда и M и N замкнуты.

44. (a) Определим числовую область значений $N(T)$ ограниченного оператора T на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ соотношением $N(T) = \{(\psi, T\psi) \mid \psi \in \mathscr{H}, \|\psi\| = 1\}$. Докажите, что $\sigma(T) \subset \overline{N(T)}$. [*Указание.* Сначала покажите, что $\lambda \in N(T)$, если λ — собственное значение T или T^*; затем докажите, что в случае, когда $\lambda \in \sigma(T)$, но λ не есть собственное значение T или T^*, можно найти такую последовательность $\psi_n \in \mathscr{H}$, что $\|(T-\lambda)\psi_n\| \to 0$.]

(b) Найдите пример оператора, у которого область $N(T)$ незамкнута и $\sigma(T) \not\subset N(T)$.

(c) Найдите пример оператора, для которого $\sigma(T) \neq N(T) = \overline{N(T)}$.

Замечание. Глубокий результат Хаусдорфа утверждает, что $N(T)$ — выпуклое множество.

45. (a) Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть A — такой оператор, что

$$\sup_{\substack{\psi \in [\phi_1, \ldots, \phi_n]^{\perp} \\ \|\psi\| = 1}} \|A\psi\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Докажите, что A — компактный оператор.

(b) Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и A — компактный оператор. Докажите, что

$$\sup_{\psi \in [\phi_1, \ldots, \phi_n]^{\perp}} \|A\psi\| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty.$$

(a) Пусть A — компактный оператор и $A \geqslant 0$. Докажите, что $A^{1/2}$ — тоже компактный оператор. (*Указание:* используйте задачу 45.)
(b) Пусть $0 \leqslant A \leqslant B$. Докажите, что A — компактный оператор, если B компактен. (*Указание:* с помощью задачи 45 и пункта (a) докажите, что компактен оператор $A^{1/2}$.)

Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ — два гильбертовых пространства. Если T — ограниченное линейное отображение из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}'$, то определим T^*: $\mathscr{H}' \longrightarrow \mathscr{H}$ равенством $(T^*\psi, \phi)_{\mathscr{H}} = (\psi, T\phi)_{\mathscr{H}'}$. Оператор T называется *оператором Гильберта—Шмидта*, если T^*T: $\mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ — оператор со следом. Пусть T — оператор Гильберта—Шмидта. Докажите, что существуют вещественные числа $\lambda_n > 0$ и ортонормированные множества $\{\phi_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathscr{H}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{N} \in \mathscr{H}'$, такие, что

$$T\phi = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\phi_n, \phi) \psi_n.$$

Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ — два гильбертовых пространства и $\mathscr{I}_2(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ — множество операторов Гильберта—Шмидта из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}'$.

(a) Докажите, что множество $\mathscr{I}_2(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$, снабженное внутренним произведением

$$(S, T) = \operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}(S^*T),$$

есть гильбертово пространство.
(b) Для заданных $\psi \in \mathscr{H}$, $\phi \in \mathscr{H}'$ и любого $l \in \mathscr{H}^*$ зададим отображение $I(\psi, \phi) \in \mathscr{I}_2(\mathscr{H}^*, \mathscr{H}')$ равенством $I(\psi, \phi)\, l = l(\psi)\, \phi$. Докажите, что отображение $\mathscr{I}$, переводящее $\psi \otimes \phi$ в $I(\psi, \phi)$, определено корректно и продолжается до изометрии между $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}'$ и $\mathscr{I}_2(\mathscr{H}^*, \mathscr{H}')$.
(c) Покажите, что для заданного $\eta \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}'$ существуют вещественные числа $\lambda_n > 0$ и ортонормированные множества $\{\phi_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathscr{H}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathscr{H}'$ с конечным или бесконечным N, такие, что

$$\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 = \|\eta\|^2 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \phi_n \otimes \psi_n = \eta.$$

VII. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Математические доказательства, как алмазы, тверды и прозрачны и поддаются лишь самой строгой логике.

ДЖОН ЛОКК, «ВТОРОЙ ОТВЕТ ЕПИСКОПУ ВУСТЕРСКОМУ»

VII. 1. Функциональное исчисление непрерывных функций

В этой главе мы обсудим спектральную теорему в ее многочисленных обличьях. Эта структурная теорема дает конкретное описание всех самосопряженных операторов. Есть несколько на вид различных формулировок спектральной теоремы, но в каком-то смысле все они эквивалентны.

Мы предпочитаем ту из них, которая утверждает, что каждый ограниченный самосопряженный оператор есть оператор умножения. (Здесь подчеркивается слово «ограниченный», так как неограниченными самосопряженными операторами мы специально займемся в следующей главе. Для них также имеет место спектральная теорема, которую мы обсудим в § VIII.3.) Это означает, что для любого ограниченного самосопряженного оператора на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ можно найти меру μ на пространстве с мерой M и унитарный оператор U: $\mathscr{H} \to L^2(M, d\mu)$, такие, что

$$(UAU^{-1}f)(x) = F(x) f(x),$$

где F — некоторая ограниченная вещественнозначная измеримая функция на M.

Очевидно, что это — обобщение конечномерной теоремы, утверждающей, что произвольная самосопряженная $n \times n$-матрица приводится к диагональному виду, или в абстрактной форме: для любого самосопряженного оператора A на n-мерном комплексном пространстве V существуют унитарный оператор U: $V \to \mathbb{C}^n$ и вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, такие, что

$$(UAU^{-1}f)_i = \lambda_i f_i$$

для любого $f = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ в $\mathbb{C}^n$.

Практически множество M будет объединением какого-то числа экземпляров вещественной прямой $\mathbb{R}$, а F будет совпадать с x, так что решающим моментом доказательства окажется построение соответствующих мер. Это будет проделано в § VII.2 при помощи теоремы Рисса — Маркова. Сейчас мы выясним смысл выражения $f(A)$, где f — непрерывная функция. А в следующем разделе рассмотрим меры, порождаемые функционалами $f \mapsto \langle\psi, f(A)\psi\rangle$, где ψ—заданный вектор из $\mathscr{H}$.

Пусть дан оператор A. Для каких функций f можно определить $f(A)$? Предположим сначала, что A—произвольный ограниченный оператор. Прежде всего желательно, чтобы в случае, когда f—полином, т. е. когда $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$, выполнялось равенство $f(A)=\sum\limits_{n=0}^{N} a_n A^n$. Далее, если $f(x)$ представляется в виде степенного ряда $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ с радиусом сходимости R и если для нормы оператора A выполняется неравенство $\|A\|<R$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ сходится в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, и естественно положить $f(A)=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n$. При этом, очевидно, функция f аналитична в области, включающей весь спектр $\sigma(A)$. И в общем случае можно дать разумное определение величины $f(A)$, если f аналитична в некоторой окрестности спектра оператора A (см. Замечания).

Функциональное исчисление, о котором мы говорили до сих пор, применимо в случае любого оператора в произвольном банаховом пространстве. Специальное отличие самосопряженных операторов (или, более общо, нормальных операторов; см. задачи 3, 5) состоит в том, что $\|P(A)\|=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)}|P(\lambda)|$ для любого полинома P; это позволяет пользоваться теоремой об ограниченном линейном отображении для расширения функционального исчисления на непрерывные функции. В этом разделе наша главная цель—доказать следующую теорему:

Теорема VII.1 (функциональное исчисление непрерывных функций). Пусть A—самосопряженный ограниченный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существует *единственное* отображение ϕ: $C(\sigma(A))\to\mathscr{L}(\mathscr{H})$ со следующими свойствами:

(a) отображение ϕ есть алгебраический $*$-гомоморфизм, т. е.

$$\phi(fg)=\phi(f)\phi(g),\qquad \phi(\lambda f)=\lambda\phi(f),$$
$$\phi(1)=I,\qquad \phi(\bar{f})=\phi(f)^*;$$

(b) отображение ϕ непрерывно, т. е. $\|\phi(f)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}\leqslant C\|f\|_\infty$;

(c) если $f(x)=x$, то $\phi(f)=A$.

Кроме того, ϕ имеет ряд дополнительных свойств:

(d) если вектор $\psi\in\mathscr{H}$ таков, что $A\psi=\lambda\psi$, то $\phi(f)\psi=f(\lambda)\psi$;

(e) $\sigma[\phi(f)]=\{f(\lambda)\mid\lambda\in\sigma(A)\}$ (теорема о спектре отображения);

(f) если $f\geqslant 0$, то $\phi(f)\geqslant 0$;

(g) $\|\phi(f)\|=\|f\|_\infty$ (усиление свойства (b)).

В дальнейшем, чтобы подчеркнуть зависимость отображения $\phi(f)$ от A, мы вместо $\phi(f)$ иногда будем писать $\phi_A(f)$ или $f(A)$.

Идея приводимого ниже доказательства весьма проста. Свойства (a) и (c) однозначно определяют значение $\phi(P)$ для любого полинома $P(X)$. По теореме Вейерштрасса множество полиномов плотно в $C(\sigma(A))$. Таким образом, главное в доказательстве — проверить равенство

$$\| P(A) \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} = \| P(x) \|_{C(\sigma(A))} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} | P(\lambda) |.$$

После этого существование и единственность отображения ϕ будут следовать из теоремы об ограниченном линейном отображении.

Для доказательства этого важного равенства мы предварительно докажем один частный случай свойства (e) (справедливый, однако, для произвольных ограниченных операторов).

Лемма 1. Пусть задан полином $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, и пусть $P(A) = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n$. Тогда $\sigma(P(A)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Так как $x = \lambda$ — корень полинома $P(x) - P(\lambda)$, то существует полином $Q(x)$, такой, что $P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda) Q(x)$. Следовательно, $P(A) - P(\lambda) = (A - \lambda) Q(A)$. Так как оператор $(A - \lambda)$ не имеет обратного, это же справедливо и для $P(A) - P(\lambda)$, т. е. $P(\lambda) \in \sigma(P(A))$.

Обратно, пусть $\mu \in \sigma(P(A))$, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни полинома $P(x) - \mu$, т. е. $P(x) - \mu = a(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \notin \sigma(A)$, то существует оператор

$$(P(A) - \mu)^{-1} = a^{-1}(A - \lambda_1)^{-1} \ldots (A - \lambda_n)^{-1},$$

что противоречит исходному предположению. Таким образом, некоторые λ_i принадлежат $\sigma(A)$, т. е. существуют такие $\lambda \in \sigma(A)$, что $\mu = P(\lambda)$. ∎

Лемма 2. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда

$$\| P(A) \| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} | P(\lambda) |.$$

Доказательство.
$$\begin{aligned}
\| P(A) \|^2 &= \| P(A)^* P(A) \| = \\
&= \| (\bar{P}P)(A) \| = \\
\text{(по теореме VI.6)} \quad &= \sup_{\lambda \in \sigma((\bar{P}P)(A))} | \lambda | = \\
\text{(по лемме 1)} \quad &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} | (\bar{P}P)(\lambda) | = \left(\sup_{\lambda \in \sigma(A)} | P(\lambda) | \right)^2. \ ∎
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы VII.1. Положим $\phi(P)=P(A)$. Тогда $\|\phi(P)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}=\|P\|_{C(\sigma(A))}$, так что отображение ϕ имеет единственное линейное продолжение на замыкание множества полиномов в $C(\sigma(A))$. Так как полиномы образуют алгебру, содержащую единицу, замкнутую относительно комплексного сопряжения и разделяющую точки спектра, то такое замыкание по теореме Стоуна—Вейерштрасса для комплексного случая (теорема IV.10) дает все пространство $C(\sigma(A))$. Свойства (a), (b), (c) и (g) очевидны. Если некоторое отображение $\tilde{\phi}$ удовлетворяет условиям (a), (b) и (c), то оно совпадает с ϕ на полиномах, а тогда, по непрерывности, и на $C(\sigma(A))$. Свойство (d) выводится также с помощью непрерывности из равенства $\phi(P)\psi=P(\lambda)\psi$. Чтобы доказать свойство (f), заметим, что если $f\geqslant 0$, то $f=g^2$, где g—вещественная функция и $g\in C(\sigma(A))$. Отсюда $\phi(f)=\phi(g)^2$, где оператор $\phi(g)$—самосопряженный, а значит, $\phi(f)\geqslant 0$. Доказательство свойства (e) мы оставляем читателю (задача 8). ∎

Прежде чем обратиться к примерам, сделаем несколько замечаний.

(1) $\phi(f)\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $f\geqslant 0$ (задача 9).

(2) Множество $\{f(A)\,|\,f\in C(\sigma(A))\}$ образует абелеву алгебру, инвариантную относительно сопряжения, так как для любых f и g имеем $fg=gf$. В силу равенства $\|f(A)\|=\|f\|_\infty$ и полноты пространства $C(\sigma(A))$, множество $\{f(A)\,|\,f\in C(\sigma(A))\}$ замкнуто по норме. Таким образом, оно является **абелевой C^*-алгеброй** операторов.

(3) $\operatorname{Ran}\phi$ совпадает с **C^*-алгеброй, порождаемой оператором** A, т. е. наименьшей C^*-алгеброй, содержащей A (задача 10).

(4) Утверждение об изометрической изоморфности $C(\sigma(A))$ и C^*-алгебры, порождаемой оператором A, в действительности является частным случаем теоремы Гельфанда—Наймарка для коммутативных алгебр, рассматриваемой в гл. XV.

(5) Легко показать, что свойство (b) следует из (a) и несложного абстрактного утверждения (задача 11). Итак, уже (a) и (c) однозначно определяют отображение ϕ.

В заключение мы рассмотрим два конкретных примера $\phi(f)$.

Пример 1. Как следствие мы получаем новое доказательство леммы о квадратном корне (теоремы VI.9) в той части, где говорится о существовании. Действительно, если $A\geqslant 0$, то $\sigma(A)\subset[0,\infty)$ (задача 12), и если $f(x)=x^{1/2}$, то $f(A)^2=A$.

Пример 2. Из пункта (g) теоремы VII.1 очевидно, что $\|(A-\lambda)^{-1}\|=[\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(A))]^{-1}$, если A ограничен и самосопряжен, а $\lambda\notin\sigma(A)$.

VII.2. Спектральные меры

Теперь мы готовы ввести те меры, о которых уже несколько раз говорили выше. Пусть задан некоторый ограниченный самосопряженный оператор A, и пусть $\psi \in \mathscr{H}$. Тогда отображение $f \mapsto (\psi, f(A)\psi)$ является положительным линейным функционалом на $C(\sigma(A))$. Таким образом, по теореме Рисса—Маркова (теорема IV.14) существует единственная мера μ_ψ на компактном множестве $\sigma(A)$, такая, что $(\psi, f(A)\psi) = \int\limits_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_\psi$.

Определение. Мера μ_ψ называется **спектральной мерой, ассоциированной с вектором** ψ.

Первое и простейшее применение меры μ_ψ—это возможность расширения функционального исчисления на множество $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ ограниченных борелевых функций на $\mathbb{R}$. Пусть $g \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Естественно определить $g(A)$ так, чтобы $(\psi, g(A)\psi) = \int\limits_{\sigma(A)} g(\lambda)\, d\mu_\psi(\lambda)$. Матричный элемент $(\psi, g(A)\phi)$ может быть вычислен теперь с помощью поляризационного тождества, а лемма Рисса позволяет построить оператор $g(A)$. «Правила» такого «функционального исчисления измеримых функций» дает следующая

Теорема VII.2 (спектральная теорема в терминах функционального исчисления). Пусть A—ограниченный самосопряженный оператор на $\mathscr{H}$. Существует единственное отображение $\hat{\phi}\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathscr{H})$, такое, что

(a) $\hat{\phi}$—алгебраический $*$-гомоморфизм;
(b) $\hat{\phi}$ непрерывно по норме: $\|\hat{\phi}(f)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} \leqslant \|f\|_\infty$;
(c) если $f(x) = x$, то $\hat{\phi}(f) = A$;
(d) если $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ для любого x, а совокупность норм $\|f_n\|_\infty$ ограничена, то $\hat{\phi}(f_n) \longrightarrow \hat{\phi}(f)$ *сильно*.

Кроме того, отображение $\hat{\phi}$ обладает следующими свойствами:

(e) если $A\psi = \lambda\psi$, то $\hat{\phi}(f)\psi = f(\lambda)\psi$;
(f) если $f \geqslant 0$, то $\hat{\phi}(f) \geqslant 0$;
(g) если $BA = AB$, то $\hat{\phi}(f)B = B\hat{\phi}(f)$.

В задаче 13 мы предлагаем читателю самостоятельно доказать эту теорему. После того как доказана теорема VII.1, единственная нетривиальная часть—проверка пункта (d), которая требует применения теоремы о мажорированной сходимости. Отображение $\hat{\phi}$ расширяет ϕ, и, как и выше, мы будем писать $\hat{\phi}(f) = f(A)$.

Как и в функциональном исчислении непрерывных функций, справедливо равенство $f(A)g(A)=g(A)f(A)$.

Поскольку $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — наименьшее семейство, замкнутое относительно сходимости, использованной в пункте (d), и содержащее все $C(\mathbb{R})$, мы знаем, что всевозможные $\hat{\phi}(f)$ лежат в наименьшей C^*-алгебре, содержащей оператор A, которая также сильно замкнута. Такие алгебры называются алгебрами фон Неймана, или W^*-алгебрами. Когда мы в гл. XVIII займемся алгебрами фон Неймана, мы увидим, что приведенное утверждение следует из (g).

Равенство норм, указанное в теореме VII.1, можно расширить, если определить норму $\|f\|'_\infty$ как L^∞-норму по отношению к должным образом введенному понятию «почти всюду» (п.в.). Действительно, выберем какой-либо ортонормированный базис $\{\psi_n\}$ в $\mathcal{H}$ и будем говорить, что некоторое свойство имеет место п.в., если оно имеет место почти всюду по *каждой* мере μ_{ψ_i}. Тогда $\|\hat{\phi}(f)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}=\|f\|'_\infty$.

В следующем разделе мы обратимся к операторам $\chi_\Omega(A)$, где χ_Ω — характеристическая функция. Это наиболее важный набор операторов в функциональном исчислении измеримых, но не непрерывных функций. А сейчас мы займемся построением пространств L^2 с помощью спектральных мер. Прежде всего введем такое

Определение. Вектор $\psi\in\mathcal{H}$ называется **циклическим вектором** оператора A, если множество конечных линейных комбинаций элементов $\{A^n\psi\}_{n=0}^\infty$ плотно в $\mathcal{H}$.

Не все операторы имеют циклические векторы (задача 14), но если такой вектор существует, то выполняется

Лемма 1. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор с циклическим вектором ψ. Тогда существует унитарный оператор $U\colon \mathcal{H}\longrightarrow L^2(\sigma(A),\ d\mu_\psi)$, такой, что

$$(UAU^{-1}f)(\lambda)=\lambda f(\lambda),$$

причем равенство здесь понимается в смысле $L^2(\sigma(A),\ d\mu_\psi)$.

Доказательство. Определим отображение U формулой $U\phi(f)\psi\equiv f$, где f непрерывна. По существу, U обратно к отображению ϕ из теоремы VII.1. Чтобы показать, что U корректно определено, вычислим

$$\|\phi(f)\psi\|^2=(\psi,\ \phi^*(f)\phi(f)\psi)=(\psi,\ \phi(\bar{f}f)\psi)=$$
$$=\int|f(\lambda)|^2\,d\mu_\psi.$$

Следовательно, если $f=g$ п.в. по отношению к μ_ψ, то $\phi(f)\psi=$ $=\phi(g)\psi$. Итак, U корректно определено на $\{\phi(f)\psi\mid f\in C(\sigma(A))\}$

и сохраняет норму. Так как ψ цикличен, т.е. $\overline{\{\phi(f)\psi \mid f \in C(\sigma(A))\}} = \mathcal{H}$, то по теореме об ограниченном линейном отображении U расширяется до изометрического отображения $\mathcal{H}$ в $L^2(\sigma(A), d\mu_\psi)$. Поскольку $C(\sigma(A))$ плотно в L^2, то $\operatorname{Ran} U = L^2(\sigma(A), d\mu_\psi)$. Наконец, если $f \in C(\sigma(A))$, то

$$(UAU^{-1}f)(\lambda) = [UA\phi(f)](\lambda) = [U\phi(xf)](\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

По непрерывности это равенство продолжается с $f \in C(\sigma(A))$ на $f \in L^2$. ∎

Чтобы расширить эту лемму на произвольные A, надо воспользоваться тем, что A имеет порождающее $\mathcal{H}$ семейство инвариантных подпространств, такое, что A цикличен на каждом подпространстве:

Лемма 2. Пусть A—самосопряженный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существует разложение в прямую сумму $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{N} \mathcal{H}_n$, где $N = 1, 2, \ldots$ *или* ∞, такое, что

(a) A оставляет каждое $\mathcal{H}_n$ **инвариантным**, т. е. из $\psi \in \mathcal{H}_n$ следует $A\psi \in \mathcal{H}_n$;

(b) для любого n существует $\phi_n \in \mathcal{H}_n$, который цикличен для сужения $A \upharpoonright \mathcal{H}_n$, т. е. $\mathcal{H}_n = \overline{\{f(A)\phi_n \mid f \in C(\sigma(A))\}}$.

Доказательство. Простое применение леммы Цорна (задача 15).

Теперь, сочетая леммы 1 и 2, докажем спектральную теорему в той форме, которая нам кажется самой прозрачной:

Теорема VII.3 (спектральная теорема в терминах оператора умножения). Пусть A—ограниченный самосопряженный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существуют меры $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}$ ($N = 1, 2, \ldots$ или ∞) на $\sigma(A)$ и унитарный оператор

$$U\colon \mathcal{H} \longrightarrow \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n),$$

такой, что

$$(UAU^{-1}\psi)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda),$$

где мы записали элемент $\psi \in \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$ как набор $\langle\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_N(\lambda)\rangle$. Эта реализация оператора A называется **спектральным представлением**.

Доказательство. Воспользуемся леммой 2, чтобы найти разложение, а затем леммой 1 для каждой компоненты. ∎

Эта теорема показывает, что любой ограниченный самосопряженный оператор есть оператор умножения на подходящем пространстве с мерой. При изменении оператора изменяются лишь соответствующие меры, а именно имеет место такое

Следствие. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существуют пространство с *конечной* мерой $\langle M, \mu \rangle$, ограниченная функция F на M и унитарный оператор $U: \mathscr{H} \to L^2(M, d\mu)$, такие, что

$$(UAU^{-1}f)(m) = F(m) f(m).$$

Доказательство. Выберем циклические векторы ϕ_n так, чтобы $\|\phi_n\| = 2^{-n}$. Пусть $M = \bigcup_{n=1}^{N} \mathbb{R}$, т. е. объединение N экземпляров $\mathbb{R}$. Зададим μ условием, что ее сужение на n-й экземпляр $\mathbb{R}$ есть μ_n. Так как $\mu(M) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n(\mathbb{R}) < \infty$, то μ конечна. ∎

Отметим также, что доказанная теорема есть в сущности строгая форма обычных в физике дираковых обозначений. Действительно, положив $\psi_n(x) = \psi(x; n)$, мы в «новом представлении, заданном оператором U» найдем

$$(\psi, \phi) = \sum_n \int d\mu_n \overline{\psi(\lambda; n)}\, \phi(\lambda; n),$$

$$(\psi, A\phi) = \sum_n \int d\mu_n \overline{\psi(\lambda; n)}\, \lambda\phi(\lambda; n).$$

Это и есть знакомые физикам формулы с той лишь разницей, что формальные суммы заменены интегралами по спектральным мерам. Здесь мы ввели такое

Определение. Меры $d\mu_n$ называются **спектральными мерами**; они совпадают с $d\mu_\psi$ при подходящих ψ.

Эти меры определены *не* однозначно, и позже мы обсудим это. Сначала, однако, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть A — самосопряженная $n \times n$-матрица. «Обычная» конечномерная спектральная теорема утверждает, что A имеет полную ортонормированную систему собственных векторов $\psi_1, \ldots, \psi_n$, где $A\psi_i = \lambda_i \psi_i$. Предположим сначала, что собственные значения различны. Рассмотрим сумму дираковых мер $\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta(x - \lambda_i)$. Тогда $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ совпадает с $\mathbb{C}^n$, так как $f \in L^2$ задается набором $f = \langle f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n) \rangle$. Ясно, что функция λf соответствует набору $\langle \lambda_1 f(\lambda_1), \ldots, \lambda_n f(\lambda_n) \rangle$, так что A — умножение на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Если мы выберем $\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta(x - \lambda_i)$, где

$a_1, \ldots, a_n > 0$, то A снова может быть представлен как оператор умножения на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\tilde{\mu})$. Таким образом, в этом случае мы въявь сталкиваемся с неединственностью меры. Легко также понять, когда требуется более чем одна мера (в смысле числа слагаемых в разложении теоремы VII.3): конечномерный самосопряженный оператор может быть представлен как оператор умножения на пространстве $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ с одной мерой тогда и только тогда, когда A не имеет повторяющихся собственных значений.

Пример 2. Пусть A компактен и самосопряжен. Теорема Гильберта—Шмидта гласит, что существует полная ортонормированная система собственных векторов $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $A\psi_n = \lambda_n\psi_n$. Если нет повторяющихся собственных значений, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\delta(x-\lambda_n)$ служит спектральной мерой.

Пример 3. Пусть $\mathcal{H} = l^2(-\infty, \infty)$, т. е. множество последовательностей $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенству $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Зададим L: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ формулой $(La)_n = a_{n+1}$; иными словами, L — левый сдвиг. При этом $L^* = R$, где $(Ra)_n = a_{n-1}$. Рассмотрим самосопряженный оператор $A = R + L$. Можно ли представить A как оператор умножения? Отобразим $\mathcal{H}$ в $L^2[0, 1]$ оператором U: $\{a_n\} \to \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$. Тогда ULU^{-1} — умножение на $e^{-2\pi i x}$, а URU^{-1} — умножение на $e^{2\pi i x}$, так что UAU^{-1} — оператор умножения на $2\cos(2\pi x)$. Построение преобразований, необходимых для представления A как умножения на x, на $L^2(\mathbb{R}, d\mu_1) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_2)$, мы отнесем к задачам. Меры μ_1 и μ_2 имеют носитель в $[-2, 2]$.

Пример 4. Рассмотрим $i^{-1}d/dx$ в $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Это неограниченный оператор и, строго говоря, он не относится к этому разделу. Но в § VIII.3 мы докажем аналог теоремы VII.3. Итак, мы разыскиваем оператор U и меру $d\mu$ (оказывается, необходима лишь одна мера μ), U: $L^2(\mathbb{R}, dx) \to L^2(\mathbb{R}, d\mu(k))$, такие, что

$$U\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}f\right)(k) = k(Uf)(k).$$

Преобразование Фурье $(Uf)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-ikx}dx$, рассматриваемое в гл. IX, как раз и осуществляет такой переход. Следовательно, фурье-образ представляет собой пример спектрального представления.

Исследуем теперь связь между спектральными мерами и спектром.

Определение. **Носителем** семейства мер $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ называется дополнение наибольшего открытого множества B, такого, что $\mu_n(B)=0$ для всех n, т. е.

$$\operatorname{supp}\{\mu_n\}=\overline{\bigcup_{n=1}^{N}\operatorname{supp}\mu_n}.$$

Предложение. Пусть A — самосопряженный оператор и $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ — семейство спектральных мер. Тогда

$$\sigma(A)=\operatorname{supp}\{\mu_n\}_{n=1}^N.$$

Существует также простое описание $\sigma(A)$ при помощи более общих операторов умножения, обсуждавшихся после теоремы VII.3.

Определение. Пусть F — вещественнозначная функция на пространстве с мерой $\langle M, \mu\rangle$. Мы говорим, что λ принадлежит **существенной области значений** функции F, если для всех $\varepsilon>0$

$$\mu\{m\,|\,\lambda-\varepsilon<F(m)<\lambda+\varepsilon\}>0.$$

Предложение. Пусть F — ограниченная вещественнозначная функция на пространстве с мерой $\langle M, \mu\rangle$. Пусть T_F — оператор в $L^2(M, d\mu)$, заданный формулой

$$(T_F g)(m)=F(m)\,g(m).$$

Тогда $\sigma(T_F)$ — существенная область значений F.

Доказательство. См. задачу 17b.

Теперь видно, какая именно информация содержится в спектре. **Унитарным инвариантом** самосопряженного оператора A является такое свойство P, что $P(A)=P(UAU^{-1})$ для всех унитарных U. Таким образом, унитарные инварианты суть «внутренние» свойства самосопряженных операторов, т. е. свойства, не зависящие от «представления». Примером такого унитарного инварианта и является спектр $\sigma(A)$. Однако спектр — бедный инвариант: например, умножение на x на $L^2([0, 1], dx)$ и оператор с полной системой собственных функций, имеющий в качестве собственных значений все рациональные числа отрезка $[0, 1]$, весьма различны, хотя спектры обоих равны $[0, 1]$.

В конце этого раздела мы увидим, что существует канонический выбор «спектральных мер», который дает полный набор унитарных инвариантов, т. е. набор свойств, различающих два любых самосопряженных оператора A и B, кроме тех, для которых $A=UBU^{-1}$ при некотором унитарном U. Это объясняет, почему $\sigma(A)$ — такой плохой инвариант: ведь меры различного типа могут иметь один и тот же носитель. Если мы хотим найти инварианты получше и при этом проще, чем меры, то разумно сначала разложить спектральные меры каким-нибудь естественным образом и только потом перейти к носителям. Вспомним теорему I.13, которая утверждает, что любая мера μ на $\mathbb{R}$ имеет единственное разложение в сумму $\mu=\mu_{pp}+\mu_{ac}+\mu_{sing}$, где мера μ_{pp} чисто точечная, μ_{ac} абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега, а μ_{sing} непрерывна и сингулярна по отношению к мере Лебега. Эти три компоненты взаимно сингулярны, так что

$$L^2(\mathbb{R}, d\mu)=L^2(\mathbb{R}, d\mu_{pp})\oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac})\oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{sing}).$$

Легко видеть (задача 18), что произвольное $\psi\in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ приводит к абсолютно непрерывной спектральной мере $d\mu_\psi$ тогда и только тогда, когда $\psi\in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac})$, и то же справедливо для чисто точечной и сингулярной мер. Если $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ — семейство спектральных мер, мы можем построить сумму $\bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, d\mu_{n;\,ac})$, применяя такое

Определение. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор на $\mathcal{H}$. Положим $\mathcal{H}_{pp}=\{\psi\mid\mu_\psi$ чисто точечна$\}$, $\mathcal{H}_{ac}=\{\psi\mid\mu_\psi$ абсолютно непрерывна$\}$, $\mathcal{H}_{sing}=\{\psi\mid\mu_\psi$ непрерывна и сингулярна$\}$.

Таким образом, нами доказана

Теорема VII.4. $\mathcal{H}=\mathcal{H}_{pp}\oplus\mathcal{H}_{ac}\oplus\mathcal{H}_{sing}$. Каждое из этих подпространств инвариантно относительно A. Сужение $A\restriction\mathcal{H}_{pp}$ имеет полную систему собственных векторов, $A\restriction\mathcal{H}_{ac}$ имеет только абсолютно непрерывные спектральные меры и $A\restriction\mathcal{H}_{sing}$ имеет только непрерывные сингулярные спектральные меры.

Определение. $\sigma_{pp}(A)=\{\lambda\mid\lambda$ — собственное значение $A\}$,

$$\sigma_{cont}(A)=\sigma(A\restriction\mathcal{H}_{cont}\equiv\mathcal{H}_{sing}\oplus\mathcal{H}_{ac}),$$
$$\sigma_{ac}(A)=\sigma(A\restriction\mathcal{H}_{ac}),$$
$$\sigma_{sing}(A)=\sigma(A\restriction\mathcal{H}_{sing}).$$

Эти множества называются соответственно: **чисто точечным, непрерывным, абсолютно непрерывным** и **сингулярным** (или **непрерывно сингулярным**) **спектром**.

Может оказаться, что $\sigma_{ac}\cup\sigma_{sing}\cup\sigma_{pp}\neq\sigma$, но это только потому, что мы определили σ_{pp} не как $\sigma(A\restriction\mathcal{H}_{pp})$, а как фактическое множество собственных значений.

Предложение. $\sigma_{cont}(A)=\sigma_{ac}(A)\cup\sigma_{sing}(A)$,

$$\sigma(A)=\overline{\sigma_{pp}(A)}\cup\sigma_{cont}(A).$$

Однако эти множества могут пересекаться. Необходимо предостеречь читателя, что $\sigma_{\text{sing}}(A)$ может иметь ненулевую лебегову меру (задача 7). В ряде случаев именно такое разбиение спектра позволяет получить полезные сведения. В § VII.3 мы введем другое разбиение, которое тоже очень полезно.

Как уже говорилось в замечаниях к § VI.3, некоторые авторы пользуются понятием «непрерывного спектра», отличным от приведенного выше. Именно, они определяют непрерывный спектр как множество таких $\lambda \in \sigma(T)$, которые не принадлежат ни точечному, ни остаточному спектрам. Чтобы показать разницу между этими двумя определениями, положим $\mathscr{H} = \mathbb{C} \oplus L^2[0, 1]$ и определим A: $\langle \alpha, f(x) \rangle \longrightarrow \langle \alpha/2, xf(x) \rangle$. По нашему определению точка $\lambda = 1/2$ входит как в чисто точечный, так и в непрерывный спектры. Другие же авторы относят $\lambda = 1/2$ к точечному спектру, а непрерывный спектр по их определению есть $[0, 1/2) \cup \cup (1/2, 1]$.

Теперь мы обратимся к проблеме канонического выбора спектральных мер, т. е. к тому, что называется «теорией кратностей». Мы приведем без доказательств основные результаты.

1. Операторы с простым спектром

Прежде всего зададимся вопросом: когда оператор A унитарно эквивалентен умножению на x на $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, т. е. когда можно обойтись лишь одной мерой? Пример 1 показывает, что в конечномерном случае это возможно лишь тогда, когда A не имеет повторяющихся собственных значений. Поэтому мы введем такое

Определение. Ограниченный самосопряженный оператор A называется **оператором с простым спектром**, если A унитарно эквивалентен оператору умножения на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ для некоторой меры μ.

Несколько интересных внутренних характеристик «простого спектра» дает следующая

Теорема VII.5. Следующие утверждения эквивалентны:

(a) A имеет простой спектр;
(b) A обладает циклическим вектором;
(c) $\{B \mid AB = BA\}$ есть абелева алгебра.

2. Классы мер

Теперь зададимся вопросом о единственности меры в случае простого спектра. Ситуация с простым спектром в конечномерном случае была продемонстрирована в примере 1: «приемлемыми» мерами были суммы $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \delta(\lambda - \lambda_n)$ с любыми $\alpha_n \neq 0$. Здесь возможно естественное обобщение. Предположим, что на $\mathbb{R}$ задана μ, и пусть F—измеримая функция, которая положительна, не равна нулю п. в. по отношению к мере μ и локально принадлежит $L^1(\mathbb{R}, d\mu)$, т. е. $\int_C |F|\, d\mu < \infty$ для любого компактного множества $C \subset \mathbb{R}$. Тогда $d\nu = F d\mu$—борелева мера и отображение

$$U\colon\ L^2(\mathbb{R}, d\nu) \to L^2(\mathbb{R}, d\mu),$$

заданное формулой $(Uf)(\lambda) = \sqrt{F(\lambda)}\, f(\lambda)$, унитарно (это отображение «на», поскольку $F \neq 0$ п. в.) и $\lambda(Uf) = U(\lambda f)$. Таким образом, оператор A со спектральным представлением в терминах μ с тем же успехом может быть представлен мерой ν. По теореме Радона—Никодима равенство $d\nu = F d\mu$, где F п. в. не равна нулю, выполняется тогда и только тогда, когда ν и μ имеют совпадающие множества нулевой меры. Поэтому разумно ввести следующее

Определение. Две борелевы меры μ и ν называются **эквивалентными**, если они имеют одни и те же множества нулевой меры. Класс эквивалентности $\langle \mu \rangle$ называется **классом мер**[1]).

Тогда решение проблемы неединственности дает следующее

Предложение. Пусть μ и ν—борелевы меры на $\mathbb{R}$ с ограниченными носителями. Пусть A_μ—оператор на $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, определенный формулой $(A_\mu f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, и A_ν—аналогичный оператор на $L^2(\mathbb{R}, d\nu)$. Операторы A_μ и A_ν унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда μ и ν—эквивалентные меры.

3. *Операторы однородной кратности*

Если необходимо каким-либо стандартным способом перечислить все собственные значения некоторой матрицы, то естественно выписать все собственные значения кратности один, все собственные значения кратности два и т. д. Поэтому удобно различать операторы однородной кратности два, три и т. д. Введем такое

Определение. Ограниченный самосопряженный оператор A называется оператором **однородной кратности** m, если A унитарно эквивалентен умножению на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\mu) \oplus \ldots \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, где сумма содержит m членов, а μ—некоторая борелева мера.

Разумность этого определения демонстрирует следующее

[1]) Иногда такой класс мер называют спектральным типом, а вводимые ниже дизъюнктные классы — независимыми спектральными типами.—*Прим. перев.*

Предложение. Если A унитарно эквивалентен умножению на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\mu)\oplus\ldots\oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ (m раз) и на $L^2(\mathbb{R}, d\nu)\oplus\ldots\oplus L^2(\mathbb{R}, d\nu)$ (n раз), то $m=n$, а μ и ν — эквивалентные меры.

4. Дизъюнктные классы мер

При перечислении собственных значений кратности один, два, три и т. д. в конечномерном случае необходимо наложить условие, которое не позволит нам рассматривать собственное значение кратности три как собственное значение кратности один и собственное значение кратности два. В конечномерном случае мы избегаем этой «ошибки», требуя, чтобы разные «списки» собственных значений не пересекались. По аналогии для мер вводим такое

Определение. Два класса мер $\langle\mu\rangle$ и $\langle\nu\rangle$ называются **дизъюнктными**, если любые $\mu_1\in\langle\mu\rangle$ и $\nu_1\in\langle\nu\rangle$ взаимно сингулярны.

5. Теорема о кратности

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема VII.6 (коммутативная теорема о кратности). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существует разложение $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2\oplus\ldots\oplus\mathscr{H}_\infty$, такое, что

(a) A оставляет каждое $\mathscr{H}_m$ инвариантным;

(b) $A\restriction\mathscr{H}_m$ — оператор однородной кратности m;

(c) классы мер $\langle\mu_m\rangle$, ассоциированных со спектральным разложением $A\restriction\mathscr{H}_m$, взаимно дизъюнктны.

Более того, подпространства $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_m, \ldots, \mathscr{H}_\infty$ (некоторые из них могут быть нулевыми) и *классы мер* $\langle\mu_1\rangle, \ldots, \langle\mu_m\rangle, \ldots, \langle\mu_\infty\rangle$ определены условиями (a) — (c) однозначно.

Спектральная теорема, дополненная теорией кратностей, — одна из жемчужин математики: это структурная теорема, т. е. теорема, которая описывает все объекты определенного вида с точностью до естественной эквивалентности. Каждый ограниченный самосопряженный оператор A описывается семейством взаимно дизъюнктных классов мер на $[-\|A\|, \|A\|]$; два оператора унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их спектральные классы мер *совпадают*.

VII. 3. Спектральные проекторы

В предыдущем разделе мы построили функциональное исчисление $f\mapsto f(A)$ для любой борелевой функции f и любого ограниченного самосопряженного оператора A. Важнейшие функции, приобретенные при переходе от непрерывных функций к борелевым, — это характеристические функции множеств.

Определение. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор, а Ω — борелево множество в $\mathbb{R}$. Оператор $P_\Omega \equiv \chi_\Omega(A)$ называется **спектральным проектором** оператора A.

Как следует из определения, P_Ω — ортогональный проектор, ибо поточечно $\chi_\Omega^2 = \chi_\Omega = \overline{\chi}_\Omega$. Свойства семейства проекторов $\{P_\Omega \mid \Omega$ — произвольное борелево множество$\}$ задаются при помощи следующего элементарного перевода с языка функционального исчисления (задача 22).

Предложение. Семейство P_Ω спектральных проекторов ограниченного самосопряженного оператора A обладает следующими свойствами:

(a) каждый P_Ω — ортогональный проектор;

(b) $P_\varnothing = 0$, $P_{(-a,\, a)} = I$ для некоторого a;

(c) если $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, причем $\Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ для всех $n \neq m$, то

$$P_\Omega = \underset{N\to\infty}{\text{s-lim}} \left(\sum_{n=1}^{N} P_{\Omega_n} \right);$$

(d) $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.

Условие (c) очень напоминает условие, определяющее меру. И действительно, так и вводится

Определение. Семейство проекторов, удовлетворяющих условиям (a) — (c), называется (ограниченной) **проекторнозначной мерой**.

Отметим, что абстрактные рассуждения (задача 22) позволяют вывести (d) из (a) и (c).

Как и следовало ожидать, по проекторнозначной мере можно интегрировать. Если P_Ω — проекторнозначная мера, то $(\phi, P_\Omega \phi)$ — обычная мера при любом ϕ. Для обозначения интегрирования по этой мере мы будем пользоваться символом $d(\phi, P_\lambda \phi)$. Стандартный метод с применением леммы Рисса показывает, что существует единственный оператор B, такой, что $(\phi, B\phi) = \int f(\lambda)\, d(\phi, P_\lambda \phi)$. Итак, справедлива

Теорема VII.7. Если P_Ω — проекторнозначная мера и f — ограниченная борелева функция на $\operatorname{supp} P_\Omega$, то существует единственный оператор B, который мы обозначаем $\int f(\lambda)\, dP_\lambda$, такой, что

$$(\phi, B\phi) = \int f(\lambda)\, d(\phi, P_\lambda \phi) \qquad \forall \phi \in \mathscr{H}.$$

Пример. Если A — ограниченный самосопряженный оператор и $\{P_\Omega\}$ — соответствующая ему проекторнозначная мера, то легко видеть (задача 23), что $f(A)=\int f(\lambda)\,dP_\lambda$. В частности, $A=\int \lambda\,dP_\lambda$.

Предположим теперь, что задана ограниченная проекторнозначная мера P_Ω, и построим $A=\int \lambda\,dP_\lambda$. Не удивительно (задача 23), что P_Ω — это как раз проекторнозначная мера, ассоциированная с A. Итог нашим построениям подводит

Теорема VII.8 (спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер). Существует взаимно однозначное соответствие между (ограниченными) самосопряженными операторами A и (ограниченными) проекторнозначными мерами $\{P_\Omega\}$, задаваемое формулами:

$$A\mapsto\{P_\Omega\}=\{\chi_\Omega(A)\},$$

$$\{P_\Omega\}\mapsto A=\int \lambda\,dP_\lambda.$$

Как раз при помощи этой теоремы и ее обобщения на неограниченные операторы вводятся самосопряженные операторы в квантовую механику, поскольку наблюдаемые естественно представлять себе как проекторнозначные меры (обобщение приведено в § VIII.3, а квантовомеханические пояснения — в замечаниях к § VIII.11).

Спектральными проекторами можно воспользоваться для изучения спектра оператора A.

Предложение. $\lambda\in\sigma(A)$ тогда и только тогда, когда $P_{(\lambda-\varepsilon,\,\lambda+\varepsilon)}(A)\neq 0$ при любом $\varepsilon>0$.

Важная часть доказательства (детали которого мы опускаем; см. задачу 24) — равенство $\|(A-\lambda)^{-1}\|=[\operatorname{dist}(\lambda,\,\sigma(A))]^{-1}$.

Это предложение позволяет различать два следующих типа спектров:

Определение. Мы говорим, что $\lambda\in\sigma_{ess}(A)$ — **существенному спектру** оператора A, тогда и только тогда, когда проектор $P_{(\lambda-\varepsilon,\,\lambda+\varepsilon)}(A)$ бесконечномерен для всех $\varepsilon>0$. Если $\lambda\in\sigma(A)$, но $P_{(\lambda-\varepsilon,\,\lambda+\varepsilon)}(A)$ конечномерен для некоторого $\varepsilon>0$, мы говорим, что $\lambda\in\sigma_{disc}(A)$ — **дискретному спектру** оператора A. Проектор P называется бесконечномерным, если бесконечномерно $\operatorname{Ran} P$.

Итак, мы имеем еще одно разбиение спектра $\sigma(A)$. В отличие от первого это разбиение на два непересекающихся подмножества. Отметим, что σ_{disc} не обязательно замкнуто, однако справедлива

Теорема VII.9. Спектр $\sigma_{ess}(A)$ всегда замкнут.

Доказательство. Пусть $\lambda_n \to \lambda$, причем каждое $\lambda_n \in \sigma_{ess}(A)$. Поскольку любой открытый интервал I вокруг λ содержит интервал вокруг некоторого λ_n, проектор $P_I(A)$ бесконечномерен. ∎

Следующие три теоремы дают другие описания σ_{disc} и σ_{ess}. Их доказательства мы оставляем читателю (задача 26).

Теорема VII.10. $\lambda \in \sigma_{disc}$ тогда и только тогда, когда *одновременно* выполнены следующие условия:

(a) λ — изолированная точка $\sigma(A)$, т. е. для некоторого ε имеем $(\lambda-\varepsilon,\ \lambda+\varepsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$;

(b) λ — собственное значение конечной кратности, т. е. множество $\{\psi \mid A\psi = \lambda\psi\}$ имеет конечную размерность.

Теорема VII.11. $\lambda \in \sigma_{ess}$ тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере *одно* из следующих условий:

(a) $\lambda \in \sigma_{cont}(A) \equiv \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A)$;

(b) λ — предельная точка $\sigma_{pp}(A)$;

(c) λ — собственное значение бесконечной кратности.

Теорема VII.12 (критерий Вейля). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда $\lambda \in \sigma(A)$ в том и только том случае, когда существует последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что $\|\psi_n\| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|(A-\lambda)\psi_n\| = 0$. При этом $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\psi_n\}$ может быть выбрана ортогональной.

Как и следовало ожидать, существенный спектр невозможно изменить конечномерными возмущениями. В § XIII.3 мы докажем общую теорему, из которой следует, что $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$, если $A-B$ — компактный оператор.

В заключение мы обсудим одну полезную формулу, связывающую резольвенту и спектральные проекторы. Положим

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \left(\frac{1}{x-\lambda-i\varepsilon} - \frac{1}{x-\lambda+i\varepsilon}\right) d\lambda.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$f_\varepsilon(x) \to \begin{cases} 0, & x \notin [a,\ b], \\ 1/2, & x = a \text{ или } x = b, \\ 1, & x \in (a,\ b), \end{cases}$$

при $\varepsilon \downarrow 0$. Более того, $|f_\varepsilon(x)|$ равномерно ограничен по ε, так что из функционального исчисления получается

Теорема VII.13 (формула Стоуна). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор; тогда

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left(\frac{1}{A-\lambda-i\varepsilon} - \frac{1}{A-\lambda+i\varepsilon} \right) d\lambda = \frac{1}{2} [P_{[a,\, b]} + P_{(a,b)}].$$

VII.4. Снова об эргодической теории. Купманизм

В § II.5 мы ввели понятие эргодичности для сохраняющего меру биективного отображения $T: \Omega \to \Omega$, где Ω — пространство с конечной мерой μ и $\mu(T^{-1}(M)) = \mu(M)$ для любого измеримого множества $M \subset \Omega$. Как следовало из леммы Купмана, оператор U, заданный формулой $(Uf)(w) = f(Tw)$, унитарен на $L^2(\Omega, d\mu)$. Мы называли отображение T эргодичным тогда и только тогда, когда 1 — его простое собственное значение (т. е. собственное значение кратности один). В этом разделе мы хотим подробнее рассмотреть идею Купмана о том, что важные свойства T можно описать на языке спектральных свойств оператора U.

Чтобы лучше ощутить нужное для этого понятие перемешивания, которое мы вскоре введем, рассмотрим сначала пример.

Пример 1. Пусть Ω — поверхность тора, которую можно представлять себе как множество пар чисел $\langle x, y \rangle$, где $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$, наделенное такой топологией, что окрестности нуля содержат точки вблизи 1. Две пары $\langle x, y \rangle$ и $\langle z, w \rangle$ вещественных чисел рассматриваются как эквивалентные, если $x - z$ и $y - w$ — целые. Тогда Ω является множеством всех классов эквивалентности пар. Определим двупараметрическое семейство отображений $T_{a,\, b}: \Omega \to \Omega$ формулой $T_{a,\, b}\langle x, y \rangle = \langle x+a, y+b \rangle$. Отображение $T_{a,\, b}$ сохраняет лебегову меру. Когда оно эргодично по отношению к этой мере? Если пользоваться определением эргодичности, которое требует, чтобы не существовало инвариантных множеств с мерой, отличной от 1 или 0, то не ясно, какие $T_{a,\, b}$ эргодичны. Однако, если обратиться к оператору $U_{a,\, b}$: $(U_{a,\, b}f)(x, y) = f(x+a, y+b)$, то видно, что он имеет полную систему собственных векторов $\varphi_{n,\, m}(x, y) = \exp[2\pi i(nx+my)]$. В самом деле, $U_{a,\, b}\varphi_{n,\, m} = \exp[2\pi i(na+mb)]\varphi_{n,\, m}$. Когда 1 — простое собственное значение? Очевидно, тогда и только тогда, когда $na+mb=k$ не имеет целых решений n, m и k, за исключением $n=m=0$ (например, при $a=\pi$, $b=\sqrt{2}$).

Итак, $T_{\pi, \sqrt{2}}$ эргодично, и в этом случае средние по пространству равны средним по времени. Но произошло это скорее потому, что образы $\{T^n w \mid w \in \Omega\}$ образуют в Ω плотное и достаточно равномерное множество, чем потому, что T^n «размазывает» некоторую малую окрестность точки w на все Ω, как на рис. VII.1. Действительно, ведь T^n здесь — «преобразование, сохраняющее форму», а «необратимость» должна была бы приводить к тому, что соседние точки w и u перестают быть таковыми после многократных итераций T.

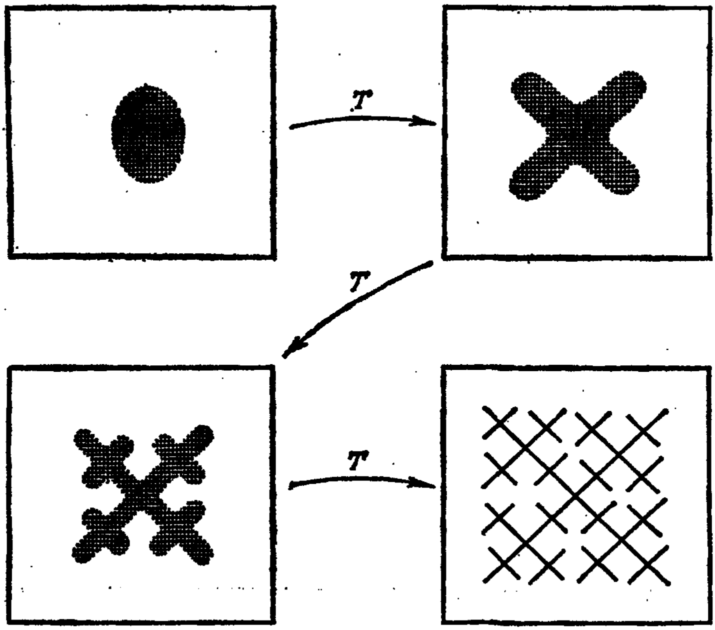

Рис. VII.1. Иллюстрация интуитивной идеи о термодинамическом поведении в фазовом пространстве.

Как описать тот факт, что какое-то множество M «равномерно» размазывается итерациями? Следует, видимо, считать, что точка «забывает», в какой момент она начала движение из A, т. е. что вероятность нахождения одновременно в T^nA и в некотором другом множестве B стремится к не зависящему от n пределу.

Определение. Сохраняющее меру преобразование $T: \Omega \longrightarrow \Omega$ на пространстве с мерой $\langle \Omega, \mu \rangle$, где $\mu(\Omega) = 1$, называется **перемешивающим**, если для всех измеримых множеств A и B из Ω:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(T^nA \cap B) = \mu(A)\,\mu(B).$$

Если T эргодично, то по статистической эргодической теореме

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\mu(T^m A\cap B)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(U^{-m}\chi_A,\ \chi_B)=(\chi_A,\ 1)(1,\ \chi_B)=$$
$$=\mu(A)\mu(B).$$

Таким образом, эргодичность эквивалентна существованию перемешивающего предела в смысле Чезаро, так что перемешивание влечет за собой эргодичность. Можно убедиться в этом и непосредственно. Если $T[A]=A$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(T^nA\cap A)=\mu(A)$, так что в случае перемешивания $\mu(A)^2=\mu(A)$, т. е. $\mu(A)=0$ или 1. Прежде чем сформулировать утверждение о том, что перемешивание имеет своим следствием эргодичность, введем одно промежуточное понятие.

Определение. Сохраняющее меру преобразование $T\colon \Omega\to\Omega$ на пространстве с мерой $\langle\Omega,\ \mu\rangle$, где $\mu(\Omega)=1$, называется **слабо перемешивающим**, если для любых измеримых множеств A и B из Ω:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|\mu(T^mA\cap B)-\mu(A)\mu(B)|=0.$$

Теперь очевидно следующее

Предложение. Перемешивание $\Rightarrow$ слабое перемешивание $\Rightarrow$ эргодичность.

Рассмотрим сначала преобразование, которое, как мы вскоре покажем, является примером перемешивания. Мы увидим также, что преобразование примера 1 *не* перемешивающее.

Пример 2 (преобразование пекаря). Пусть Ω — поверхность тора. Положим

$$T\langle x,\ y\rangle=\begin{cases}\langle 2x,\ y/2\rangle, & \text{если } 0\leqslant x<1/2,\\ \langle 2x-1,\ 1/2+y/2\rangle, & \text{если } 1/2\leqslant x<1\end{cases}$$

(рис. VII.2). Ясно видно, как T «разрывает» и «разбрасывает по Ω» части исходного множества.

Слабое перемешивание и перемешивание имеют простое описание при помощи ассоциированного унитарного оператора U.

Теорема VII.14. Пусть T — измеримое преобразование и U — ассоциированный унитарный оператор. Тогда

(а) T — перемешивающее тогда и только тогда, когда

$$\operatorname*{w-lim}_{n\to\infty}U^n=P_1,$$

где P_1—проектор на константы, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty}(f,\ U^n g) = (f,\ 1)(1,\ g);$$

(b) T—слабо перемешивающее тогда и только тогда, когда U не имеет собственных значений, отличных от единицы, причем единица—простое собственное значение.

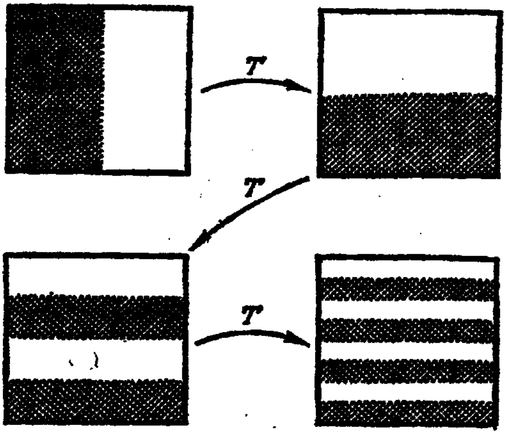

Рис. VII.2. Преобразование пекаря.

Доказательство. (a) То, что T—перемешивающее, очевидно, следует из условия $(f,\ U^n g) \to (f,\ 1)(1,\ g)$, ибо можно взять $f = \chi_A$ и $g = \chi_B$. Обратно, когда T—перемешивающее, предельное равенство справедливо, если f и g—характеристические функции, а значит, и конечные линейные комбинации характеристических функций. Поскольку последние плотны, $\|U^n\| = 1$ и $\|P_1\| = 1$, отсюда следует результат.

(b) См. литературу, указанную в Замечаниях. ∎

Преобразование в примере 1 *не* перемешивающее, так как $U\psi = \lambda\psi$ влечет за собой $\text{w-lim}\, U^n\psi \neq P_1\psi$ при $\lambda \neq 1$.

Существует спектральное условие на U, которое часто бывает полезно при доказательстве свойств перемешивания. Заметим, что спектральную теорему можно доказать для нормальных (а следовательно, и для унитарных) операторов (задачи 3 и 5), поэтому имеет смысл понятие абсолютно непрерывного спектра.

Теорема VII.15. Пусть T—сохраняющее меру преобразование и U—ассоциированный унитарный оператор. Тогда

(a) если U имеет только абсолютно непрерывный спектр на $\{1\}^{\perp}$, т. е. если $\mathscr{H}_{ac}=\left\{f \middle| (f,\ 1)=\int f\,d\mu=0\right\}$, то T — перемешивающее;

(b) если $\{1\}^{\perp}$ имеет ортонормированный базис $\{\varphi_{n,m}\}$, $-\infty<n<\infty$, $1\leqslant m<N+1$, где N конечно или бесконечно, такой, что $U\varphi_{n,m}=\varphi_{n+1,m}$, то U имеет на $\{1\}^{\perp}$ лишь абсолютно непрерывный спектр и T — перемешивающее.

Доказательство. (a) Легко видеть, что $U^n \xrightarrow{w} P_1$ тогда и только тогда, когда $(f,\ U^n g)\to 0$ для всех $f,\ g\in\{1\}^{\perp}$. Предположим, что U имеет только абсолютно непрерывный спектр. Тогда мы можем найти функции $\{F_m\}_{m=1}^{N}$ и реализацию вектора $f\in\{1\}^{\perp}$ в виде $f=\langle f_1(\theta),\ \ldots,\ f_m(\theta),\ \ldots\rangle$, такие, что

$$(f,\ U^n g)=\sum_{m=1}^{N}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\overline{f_m(\theta)}\,g_m(\theta)\,F_m(\theta)\,d\theta=$$
$$=\int_0^{2\pi} e^{in\theta}Q(\theta)\,d\theta,$$

где $\int_0^{2\pi}|Q(\theta)|\,d\theta<\infty$. По лемме Римана—Лебега, которую мы докажем в § IX.2, $(f,\ U^n g)\to 0$.

(b) На $\{1\}^{\perp}$ оператор U — это просто N экземпляров правого сдвига на пространстве $l_2(-\infty,\ \infty)$. Мы уже рассмотрели оператор сдвига в примере 4 § VII.2 и показали, что он имеет абсолютно непрерывный спектр. ∎

Пример 2 (*продолжение*). Интуитивно вполне разумно допустить, что преобразование пекаря перемешивающее, но теперь мы располагаем средствами для доказательства, что это действительно так. Дадим новое определение оператора T. Запишем $\langle x,\ y\rangle\in\Omega$ в двоичной системе $x=0{,}x_1x_2\ \ldots$, $y=0{,}y_1y_2\ \ldots$, причем каждое $x_i=0$ или 1 и каждое $y_i=0$ или 1. Тогда

$$T\colon\ (0{,}x_1x_2\ \ldots,\quad 0{,}y_1y_2\ \ldots)\to(0{,}x_2x_3\ \ldots,\quad 0{,}x_1y_1y_2\ \ldots),$$

т. е. если мы представим точку в Ω как $(\ldots,\ y_3,\ y_2,\ y_1,\ x_1,\ x_2,\ldots)$, то T есть не что иное, как левый сдвиг. Предостережение: это совсем не то же самое, что сказать, что U — левый сдвиг! Это подсказывает наши дальнейшие действия. Определим функции $\chi_n(x,\ y)$ на Ω следующим образом: если $n>0$ и $x_n=0$, то $\chi_n(x,\ y)=1$, а если $x_n=1$, то $\chi_n(x,\ y)=-1$; если $n\leqslant 0$ и $y_{-n+1}=0$, то $\chi_n(x,\ y)=1$, а если $y_{-n+1}=1$, то $\chi_n(x,\ y)=-1$. Если $\{n_1,\ \ldots,\ n_m\}$ — конечный набор целых чисел, положим

$$\chi_{\{n_1,\ \ldots,\ n_m\}}(x,\ y)=\prod_{k=1}^{m}\chi_{n_k}(x,\ y).$$

Положим $\chi_\varnothing = 1$. Тогда

(a) $\chi_A \chi_B = \chi_{A \triangle B}$, где $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

(b) $\int \chi_A \, dx \, dy = \begin{cases} 0, & \text{если } A \neq \varnothing, \\ 1, & \text{если } A = \varnothing; \end{cases}$

(c) в силу (a) и (b), χ_A образуют ортонормированную систему;

(d) если m, n, k и j—целые, такие, что $0 < m \leqslant 2^n$, $0 < k \leqslant 2^j$, то характеристическая функция множества

$$\left(\frac{m-1}{2^j}, \frac{m}{2^j}\right] \times \left(\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right]$$

может быть представлена как конечное произведение $\prod_{m=1}^{N} (1 \pm \chi_{n_m})$ с некоторыми целыми $n_1, \ldots, n_m$;

(e) χ_A образуют ортонормированный базис в $L^2(\Omega, dx \otimes dy)$, поскольку линейные комбинации введенных в (d) характеристических функций плотны;

(f) $U\chi_{\{n_1, \ldots, n_m\}} = \chi_{\{n_1+1, \ldots, n_m+1\}}$. Таким образом, $\{1\}^\perp$ обладает ортонормированным базисом $\psi_{n, m}$, причем $U\psi_{n, m} = \psi_{n+1, m}$. Параметр m пробегает счетное множество.

Итак, отображение примера 2 перемешивающее.

Эргодичность, перемешивание и спектральные понятия важны не только в статистической механике, но и при исследовании других задач. Пусть, например, $\langle M, \mu \rangle$ и $\langle N, \nu \rangle$—пространства с мерой, и пусть $T: M \to M$ и $S: N \to N$—измеримые, обратимые и сохраняющие меру преобразования. Когда они эквивалентны? Иными словами, когда существует такое отображение $R: M \to N$, что $T = R^{-1}SR$? При этом требуется, чтобы R было биективным почти всюду (т. е. $\mu\{x \mid Ry = Rx$ для некоторых $y \neq x\} = 0$ и $\mu\{N \setminus \operatorname{Ran} R\} = 0$) и сохраняющим меру. Эта задача аналогична проблеме унитарной эквивалентности для самосопряженных операторов, которая решена теоремами о кратности, однако решена *не* полностью. В задаче 29 мы построим различные отображения, эквивалентные преобразованию пекаря.

Проблема унитарной эквивалентности для самосопряженных операторов была решена путем нахождения *полного* множества инвариантов. Купманизм немедленно дает целое семейство инвариантов для сохраняющих меру отображений, поскольку если $T: M \to M$ и $S: N \to N$ эквивалентны, то индуцированные унитарные операторы унитарно эквивалентны. Для заданного сохраняющего меру преобразования T классы мер одной кратности ассоциированного унитарного оператора являются инвариантами, т. е. если S и T связаны посредством $T = R^{-1}SR$, то их классы совпадают. Поскольку эргодичность и перемешивание могут быть выражены в терминах индуцированных купмановских унитарных операторов, они не являются дополнительными инвариантами. Образуют ли эти инварианты, ассоциированные с индуцированными унитарными операторами, полную систему? Иными словами, если индуцированные унитарные операторы унитарно эквивалентны, то следует ли отсюда, что существует такое R, что $T = R^{-1}SR$? При некоторых дополнительных предположениях ответ утвердителен.

Теорема VII.16 (Халмош, фон Нейман). Пусть $T\colon M \longrightarrow M$ и $S\colon N \longrightarrow N$ — сохраняющие меру эргодические преобразования, U_S и V_T — индуцированные унитарные операторы. Предположим, что U_S и V_T имеют только чисто точечный спектр. Тогда T и S эквивалентны в смысле теории меры в том и только в том случае, когда U_S и V_T унитарно эквивалентны.

С другой стороны, Колмогоров и Синай построили инвариант (называемый энтропией) для некоторого класса перемешивающих измеримых преобразований — так называемых K-систем. На $\{1\}^{\perp}$ существует ортонормированный базис $\{\psi_{n,m}\}_{n,m=-\infty}^{\infty}$, такой, что для унитарного оператора U, индуцированного K-системой, $U\psi_{n,m} = \psi_{n+1,m}$. Таким образом, все унитарные операторы, индуцированные K-системами, унитарно эквивалентны. Тем не менее существуют K-системы с различной энтропией, так что инварианты индуцированных унитарных операторов не полностью характеризуют все преобразования, сохраняющие меру.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ VII.1. Доказательство и обсуждение конечномерной спектральной теоремы см. в книге: П. Р. Халмош, Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.

Подобное, но несколько отличающееся доказательство теоремы VII.1 приведено в книге: E. Nelson, Topics in Dynamics, v.I, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1969.

Общее функциональное исчисление $A \mapsto f(A)$ для функций f, аналитических в окрестности $\sigma(A)$, о котором мы упоминали, часто называют *функциональным исчислением Данфорда* после появления статьи: N. Dunford, Spectral Theory I, Convergence to Projections, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 185—217. Основная идея состоит в том, чтобы выбрать контур C в области определения f так, чтобы $\sigma(A)$ содержался внутри C. Затем полагают $f(A) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)(z-A)^{-1}\,dz$. Тогда, например, из тождества Гильберта $(z-A)^{-1}(w-A)^{-1} = (w-z)^{-1}\cdot[(z-A)^{-1} - (w-A)^{-1}]$ вытекает свойство $(fg)(A) = f(A)\,g(A)$. Дальнейшее обсуждение см. в книге: Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, т. 1, ИЛ, М., 1962, стр. 605—624 (см. также задачу 1).

§ VII.2. Обзор истории спектральной теоремы см. в статье: E. Hellinger, O. Toeplitz, *Encyklop. Math. Wiss.* II C, 13 (1928), 1335—1616.

Вывод спектральной теоремы в терминах функционального исчисления обсуждается также в книге: J. Dixmier, Les Algèbres d'Opérateurs dans l'Espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969, Appendix. Спектральная теорема в терминах оператора умножения обсуждается в книге Нельсона (см. замечания к § VII. 1), стр. 66—74.

Появилась обширная литература о «строгих» дираковых обозначениях, стремящаяся полнее использовать все преимущества бра- и кет-векторов. Первоначальные обозначения приведены в монографии П. А. М. Дирака: Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960. Строгие модификации в терминах «оснащенных гильбертовых пространств» см. в книге К. Морена (K. Maurin, General Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups, Polish Scientific Publ., 1968) и в статьях: J. Roberts, The Dirac Bra and Ket Formalism, *J. Math. Phys.*, **7** (1966), 1097—1104; Rigged Hilbert Spaces in Quantum Mechanics, *Commun. Math. Phys.*, **3** (1966), 98—119; J. P. Antoine, Dirac Formalism and Symmetry Problems in Quantum Mechanics I, II, *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 53—69, 2277—2290. Мы должны подчеркнуть, что, по нашему мнению, спектральной теоремы достаточно для любых рассуждений, где нестрогий подход может основываться на технике Дирака. Поэтому мы можем рекомендовать абстрактный подход на базе оснащенных пространств лишь тем читателям, которым жаль расстаться с формализмом Дирака.

Дополнительное исследование спектров σ_{ac}, σ_{sing}, σ_{pp} приведено в монографии Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972, стр. 637—643.

Теория кратностей самосопряженных операторов восходит к статьям: H. Hahn, Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalin varianten der quadratischen Formen von unendlich Veränderlichen, *Monatsh. Math. Phy.*, **23** (1912), 161—224; E. Hellinger, Neuer Begründung der Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, *J. Reine Angew. Math.*, **136** (1907), 210—271. Более современное изложение можно найти в книге Нельсона (см. замечания к § VII.1), стр. 77—97. Понятие класса мер часто является точным непрерывным аналогом понятия подмножества дискретного множества. Эту мысль особенно подчеркивает Макки (G. W. Mackey, in Group Representations and Applications, Oxford Lectures, pp. 48—80).

Почти вся рассмотренная спектральная теория допускает разумное обобщение на несепарабельный случай. Только ради удобства и краткости мы рассматривали лишь сепарабельные пространства.

§ VII.3. Спектральная теорема в двух родственных формах: в терминах проекторнозначных мер и в терминах разложения единицы — рассматривается в книгах: М. А. Наймарк, Нормированные кольца, «Наука», М., 1968, или L. Lorch, Spectral Theory, Oxford Univ. Press, London and New York, 1962. Метод Лорха тесно связан с данфордовым функциональным исчислением и формулой Стоуна. Похожая точка зрения принята в книге Като (см. замечания к § VII.2).

Формула Стоуна восходит к классической монографии М. Стоуна (M. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1932).

Термин «существенный спектр» возник в знаменитой работе Г. Вейля о сингулярных дифференциальных операторах (H. Weyl, Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen Willkurlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 220—269). Например, если $H=-d^2/dx^2+V$ отвечает случаю предельной точки на бесконечности, а операторы H_λ — различные расширения H в $L^2(0, \infty)$ с различными граничными условиями, то Вейль называет $\bigcap \sigma(H_\lambda)$ существенным спектром, т. е. спектром, не зависящим от граничных условий. Оказывается, что $\sigma_{ess}(H_\lambda)$ один и тот же для каждого λ и, таким образом, как раз и является существенным спектром Вейля. Обсуждение этого совпадения приведено в § XIII.3.

§ VII.4. Купманизм восходит к фундаментальной статье Купмана (см. замечания к § II.4). Большая часть обсуждаемых здесь вопросов содержится в обзорной статье Вайтмана и книгах Авеца—Арнольда и Халмоша (замечания к § II.4). В частности, доказательства теорем VII.14 (b) и VII.16 можно найти в книге Халмоша.

Перемешивание ввел Е. Хопф в своей заметке: E. Hopf, Complete Transitivity and the Ergodic Principle, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 18 (1932), 204—209.

Теорема Халмоша и фон Неймана (теорема VII.16) впервые доказана в работе: J. von Neumann, Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik, *Ann. Math.*, 33 (1932), 587—642. Упрощения и дополнения можно найти в статье: P. R. Halmos and J. von Neumann, Operator Methods in Classical Mechanics, II, *Ann. Math.*, 43 (1942), 332—350. Халмош и фон Нейман также доказали, что всевозможные дискретные спектры эргодических преобразований суть все счетные подгруппы окружности.

Энтропия для К-систем была введена в статье А. Н. Колмогорова: Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов, *ДАН СССР*, 124 (1959), 754—755. Она обобщает одну идею К. Шеннона (C. Shannon, A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Tech. J.*, 27 (1948), 379—423, 623—656) и дальше рассматривается в работе Я. Г. Синая: Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром, I, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 25 (1961), 899—924. Хорошее введение в эту теорию см. в книге П. Биллингслея: Эргодическая теория и информация, «Мир», М., 1969.

В важной серии статей Орнстейн выяснил, в какой степени энтропия — различающий инвариант. Основная статья этой серии: D. Ornstein, Bernoulli Shifts with the Same Entropy are Isomorphic, *Advan. Math.*, 4 (1970), 337—352.

ЗАДАЧИ

**1.* Пусть f аналитична в окрестности $\sigma(A)$, где A—ограниченный оператор, и пусть C—контур, показанный на рис. VII.3. Определим $f(A)$ формулой

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-A)^{-1}dz.$$

Докажите, что $fg(A)=f(A)g(A)$.

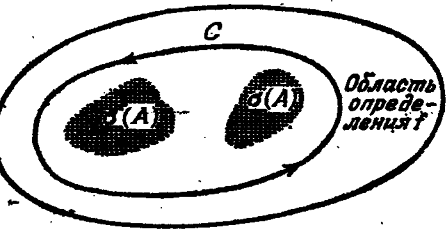

Рис. VII.3. Контур C.

2. Предположим, что $\sigma(A)$ не связен, скажем $\sigma(A)=\sigma_1\cup\sigma_2$, где σ_1 и σ_2 не пересекаются и замкнуты. Рассмотрим функцию f, которая равна 1 в окрестности σ_1 и 0 в окрестности σ_2. Докажите, что оператор $P=f(A)$, определенный как в задаче 1, есть проектор и что $PA=AP$. Докажите, что $\mathscr{H}_1=\operatorname{Ran}P$—инвариантное подпространство для A и что $\sigma(A\restriction\mathscr{H}_1)=\sigma_1$.

3. (a) Докажите, что если A нормален, т. е. $AA^*=A^*A$, то

$$\|A\|=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|=r(A).$$

Указание: используйте формулы $\|A\|^2=\|A^*A\|$ и $r(A)=\lim\|A^n\|^{1/n}$.

(b) Докажите, что для любого полинома P и любого нормального оператора A: $\|P(A)\|=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)}|P(\lambda)|$.

**4.* Пусть $A_1, \ldots, A_n$—*коммутирующие* ограниченные самосопряженные операторы на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

(a) Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$—борелевы множества в $\mathbb{R}$. Докажите, что все $P_{\Omega_1}(A_1), P_{\Omega_2}(A_2), \ldots, P_{\Omega_n}(A_n)$ коммутируют.

(b) Пусть f — функция на $\mathbb{R}^n$, являющаяся линейной комбинацией характеристических функций прямоугольников (т. е. множеств вида $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$). Покажите, что f можно представить в виде

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\Omega^{(i)}}, \text{ где } \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)} = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

(c) Для f приведенного выше вида определите

$$f(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i P_{\Omega_1^{(i)}}(A_1) \ldots P_{\Omega_n^{(i)}}(A_n),$$

где $\Omega^{(i)} = \Omega_1^{(i)} \times \ldots \times \Omega_n^{(i)}$.

(d) Используя теорему об ограниченном линейном отображении, постройте функциональное исчисление $f(A_1, \ldots, A_n)$ для непрерывных функций на $[-\|A_1\|, \|A_1\|] \times \ldots \times [-\|A_n\|, \|A_n\|]$.

(e) Постройте борелево функциональное исчисление.

(f) Докажите существование оператора $U: \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$ для некоторого пространства с конечной мерой $\langle M, \mu \rangle$ и ограниченных вещественнозначных борелевых функций $F_1(m), \ldots, F_n(m)$ на M, таких, что

$$[(UA_iU^{-1}) f](m) = F_i(m) f(m).$$

5. Пусть A — нормальный оператор. Докажите, что

(a) $A = B + iC$, где B и C — коммутирующие самосопряженные операторы;

(b) существуют оператор $U: \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$ для некоторой конечной меры μ на некотором пространстве M и ограниченная борелева функция $F(m)$ (вообще говоря, комплекснозначная), такие, что

$$(UAU^{-1}f)(m) = F(m) f(m).$$

Литература к задачам 4, 5: Нельсон (см. замечания к § VII.1).

**6.* Расширьте задачу 4 на случай счетного числа A_n. *Указание:* используйте топологию произведения на $\times[-\|A_n\|, \|A_n\|]$.

†7. Найдите самосопряженный оператор A, для которого $[0, 1] \subset \sigma_{\rm sing}(A)$. [*Указание:* выберите A с простым спектром так, чтобы его спектральная мера была бесконечной взвешенной суммой сдвигов канторовых мер.]

†8. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор, и пусть f — непрерывная функция на $\sigma(A)$.

(a) Если $\lambda \notin \operatorname{Ran} f$, положим $g = (f - \lambda)^{-1}$. Докажите, что

$$\phi(g) = (\phi(f) - \lambda)^{-1}.$$

(b) Пусть $\lambda \in \operatorname{Ran} f$. Докажите, что существуют такие $\psi \in \mathcal{H}$, что $\|\psi\| = 1$ и норма $\|(\phi(f) - \lambda)\psi\|$ произвольно мала, так что $\lambda \in \sigma(\phi(f))$.

(c) Завершите доказательство пункта (e) теоремы VII.1.

†9. Предположим, что f непрерывна и не неотрицательна на $\sigma(A)$, где A — ограниченный самосопряженный оператор. Покажите, что тогда существует $\psi \in \mathcal{H}$, удовлетворяющий условию $(\psi, \phi(f)\psi) < 0$.

†10. Докажите, что в случае, когда A самосопряжен (теорема VII.1) или нормален (задача 5), образом множества непрерывных функций при отображении ϕ является C^*-алгебра, порождаемая оператором A.

11. Предположим, что $\phi: C(X) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — алгебраический $*$-гомоморфизм, X — компактное хаусдорфово пространство.

(a) Докажите, что $\phi(f) \geqslant 0$, если $f \geqslant 0$.

(b) Докажите, что $\|\phi(f)\| \leqslant \|f\|_\infty$.

†*12.* Пусть $A \geqslant 0$. Докажите, что $(A-\lambda)^{-1}$ существует при $\lambda < 0$.

†*13.* Восполните детали доказательства теоремы VII.2.

14. Докажите, что самосопряженный оператор на конечномерном пространстве имеет циклический вектор тогда и только тогда, когда у него нет повторяющихся собственных значений.

†*15.* **Докажите лемму 2, нужную для доказательства теоремы VII.3.**

16. Завершите сведение оператора из примера 3 § VII.2 к оператору умножения. Имеет ли этот оператор однородную кратность? Какую?

†*17.* (a) Докажите, что $\sigma(A) = \operatorname{supp}\{\mu_n\}_{n=1}^N$, если $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ — спектральные меры. (Первое предложение после теоремы VII.3.)
(b) Пусть T_F — оператор умножения на F — вещественнозначную ограниченную измеримую функцию. Докажите, что $\sigma(T_F)$ — существенная область значений F.

†*18.* Пусть A — умножение на x на $L^2(\mathbb{R}, d\mu) = L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{pp}) \oplus \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{sing})$. Пусть $\psi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Докажите, что $d\mu_\psi$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда $\psi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac})$.

**19.* Можно ли построить меру на $[0, 1]$, абсолютно непрерывную по отношению к dx, с носителем $[0, 1]$, но не эквивалентную dx; иными словами, является ли $\operatorname{supp}\langle\mu\rangle$ различающим инвариантом для классов мер, абсолютно непрерывных по отношению к dx?

20. Пусть $A = U|A|$ — полярное разложение A. Пусть f_n определяется так: $f_n(x) = 1/x$ при $x \geqslant 1/n$ и $f_n(x) = 1/n$ при $x \leqslant 1/n$. Докажите, что $U = \text{s-lim}\, Af_n(|A|)$. Заключите отсюда, что U принадлежит алгебре фон Неймана, порождаемой оператором A, т. е. наименьшей сильно замкнутой $*$-алгебре, содержащей A.

†*21.* (a) Докажите, что условия (a) и (b) теоремы VII.5 равносильны.
*(b) Докажите, что условие (a) теоремы VII.5 влечет за собой в общем случае условие (c). [*Указание:* докажите, что $\{B \mid AB = BA\} = L^\infty(M, d\mu)$.]
(c) Докажите, что (c) влечет за собой (a) в конечномерном случае.

†*22.* (a) Докажите, что свойства (a) — (d) проекторнозначных мер выполняются для спектральных проекторов оператора A.
(b) Докажите, что условие (d) для проекторнозначных мер следует из (a) и (c).

†*23.* (a) Воспроизведите детали доказательства теоремы VII.7.
(b) Докажите, что $f(A) = \int f(\lambda)\, dP_\lambda$, если $P_\Omega = \chi_\Omega(A)$.
(c) Если $A = \int \lambda\, dP_\lambda$, докажите, что $P_\Omega = \chi_\Omega(A)$.

†*24.* Докажите, что $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда $P_{(\lambda-\varepsilon,\, \lambda+\varepsilon)}(A) \neq 0$ для всех ε.

25. Рассматривая компактные операторы, покажите, что σ_{disc} не всегда замкнут.

†*26.* (a) Докажите теорему VII.10.
(b) Докажите теорему VII.11.

27. Пусть C — самосопряженный компактный оператор. Что представляет собой $\sigma_{ess}(C)$? Как это связано со свойством инвариантности σ_{ess}, отмеченным в конце § VII.3?

28. (a) Предположим, что μ — мера единичной массы, обладающая таким свойством: для заданного $0 < x < 1$ существует такое множество $N \subset M$, что $\mu(N) = x$. Пусть $T: M \longrightarrow M$ сохраняет меру и $T^k = I$ для некоторого k. Докажите, что T не эргодичен.

(b) Докажите непосредственно, что $T_{a,b}$ из примера 1 § VII.4 не эргодичен, если $na + mb = r$ имеет решение при целом r и $\langle n, m\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$ (т. е. докажите это, не обращаясь к унитарному оператору U).

29. Покажите, что каждое из следующих измеримых преобразований эквивалентно преобразованию пекаря:

(a) $M = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n$, где каждое A_n — двухточечное множество, $\{O_n, P_n\} = A_n$ [Орел, Решка]; μ — произведение мер, $\mu = \bigotimes\limits_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n$, где $\mu_n(\{O_n\}) = 1/2 = \mu_n(\{P_n\})$. Определим $T: M \longrightarrow M$ как правый сдвиг. (Это называется пространством честной игры в орлянку.)

(b) $M = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{n=-\infty}^{\infty} B_n$, где каждое B_n — трехточечное множество, $B_n = \{0, 1, 2\}$; μ — произведение мер, $\mu = \bigotimes\limits_{n=-\infty}^{\infty} \nu_n$, где $\nu_n(\{0\}) = 1/2 = \nu_n(\{2\})$, $\nu_n(\{1\}) = 0$; T — правый сдвиг.

(c) M — квадрат, мера — произведение канторовой меры на себя; T задано так:

$$T\langle x, y\rangle = \begin{cases} \langle 3x, y/3\rangle, & \text{если } 0 \leqslant x < 1/3, \\ \langle 3x-1, y/3+1/3\rangle, & \text{если } 1/3 \leqslant x < 2/3, \\ \langle 3x-2, y/3+2/3\rangle, & \text{если } 2/3 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

30. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой и $T: M \longrightarrow M$. Определим $T \otimes T: M \times M \longrightarrow M \times M$ формулой $(T \otimes T)\langle x, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$.

(a) Покажите, что $\mu \otimes \mu$ — инвариантная мера для $T \otimes T$, если μ — инвариантная мера для T.

(b) Найдите пример, который показывает, что $T \otimes T$ не обязано быть эргодическим для $\langle M \times M, \mu \otimes \mu\rangle$, даже если T эргодичен для $\langle M, \mu\rangle$. [*Указание*: обратите внимание на пример 1 § VII.4.]

(c) Покажите, что $T \otimes T$ — перемешивающее для $\langle M \times M, \mu \otimes \mu\rangle$, если T — перемешивающее для $\langle M, \mu\rangle$.

(d) Покажите еще раз, используя (c), что преобразование примера 1 не перемешивающее.

Замечание: известно, что $T \otimes T$ эргодично тогда и только тогда, когда T — слабо перемешивающее.

31. Докажите, что замкнутыми $*$-идеалами в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, где $\mathscr{H}$ сепарабельно, являются только $\{0\}$, $\mathrm{Com}(\mathscr{H})$ и $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. *Указание.* Если идеал $\mathfrak{I}$ строго содержит $\mathrm{Com}(\mathscr{H})$, найдите самосопряженный некомпактный оператор $A \in \mathfrak{I}$. Покажите, что для любого интервала (a, b), такого, что $0 \notin (a, b)$, $P_{(a,b)}(A) \in \mathfrak{I}$. Выведите отсюда, что $\mathfrak{I}$ содержит бесконечномерный проектор и что, таким образом, $I \in \mathfrak{I}$.

32. (a) Пусть A — самосопряженный, а U_λ — частично изометрический оператор в разложении $U_\lambda |A - \lambda| = A - \lambda$. Докажите, что $U_\lambda = P_{(\lambda, \infty)} - P_{(-\infty, \lambda)}$ и что $P_{(-\infty, \lambda)} = \lim\limits_{\mu \uparrow \lambda} (1 - U_\mu)/2$ и $P_{(-\infty, \lambda]} = \lim\limits_{\mu \downarrow \lambda} (1 - U_\mu)/2$.

(b) Для заданного самосопряженного оператора, используя полярное разложение и формулу пункта (a), докажите спектральную теорему без обращения к функциональному исчислению.

VIII. НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Занятия математикой, говорю я им, превосходное средство против вожделений плоти.

ТОМАС МАНН, «ВОЛШЕБНАЯ ГОРА»

VIII. 1. Области определения, графики, сопряженные операторы и спектр

Неограниченность многих из наиболее важных операторов, встречающихся в математической физике,— непреложный факт. В этой главе мы введем некоторые основные понятия и докажем ряд теорем, необходимых для работы с неограниченными операторами в гильбертовых пространствах. Как утверждает теорема Хеллингера—Теплица (см. § III.5), оператор A, определенный на всем пространстве и удовлетворяющий условию $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$, с необходимостью есть ограниченный оператор; тем самым произвольный неограниченный оператор T определен лишь на плотном линейном подмножестве гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Итак, **оператор** на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$—это линейное отображение из его области определения (линейного подпространства $\mathscr{H}$) в $\mathscr{H}$. За исключением специально оговоренных случаев, мы всегда будем предполагать, что эта область плотна. Такое подпространство, обозначаемое $D(T)$, называется **областью определения** оператора T. Таким образом, чтобы задать неограниченный оператор на гильбертовом пространстве, необходимо сначала определить область, на которой он действует, а потом указать, как он действует на этом подпространстве.

Пример 1 (оператор координаты). Пусть $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$, и пусть $D(T)$—множество функций φ из $L^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi(x)|^2\,dx < \infty$. Для $\varphi \in D(T)$ положим $(T\varphi)(x) = x\varphi(x)$. Очевидно, что T неограничен, поскольку, выбирая носитель φ достаточно близко к плюс или минус бесконечности, мы можем сделать норму $\|T\varphi\|$ сколь угодно большой, сохраняя при этом $\|\varphi\| = 1$. Конечно, даже при $\varphi \notin D(T)$ произведение $x\varphi(x)$—корректно определенная функция, однако она не принадлежит $L^2(\mathbb{R})$. Итак, если мы хотим работать только с гильбертовым пространством $L^2(\mathbb{R})$, мы обязаны ограничить область определения оператора T. Выбранная нами область—наибольшая, для которой значения оператора лежат в $L^2(\mathbb{R})$.

Пример 2. Пусть $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R})$ и $D(T)=\mathscr{S}(\mathbb{R})$. На $D(T)$ положим $T\psi(x)=-\psi''(x)+x^2\psi(x)$. Если $\varphi_n(x)$ есть n-я функция Эрмита (см. дополнение к § V.3), то $\varphi_n(x)\in D(T)$ и $T\varphi_n(x)=(2n+1)\varphi_n(x)$. Таким образом, T обязан быть неограниченным, потому что он имеет сколь угодно большие собственные значения.

При изучении неограниченных операторов очень полезно введенное фон Нейманом понятие графика линейного преобразования.

Определение. **График** $\Gamma(T)$ линейного преобразования T есть множество пар

$$\{\langle\varphi, T\varphi\rangle \mid \varphi\in D(T)\}.$$

Следовательно, $\Gamma(T)$ является подмножеством пространства $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ — гильбертова пространства с внутренним произведением

$$(\langle\varphi_1, \psi_1\rangle, \langle\varphi_2, \psi_2\rangle)=(\varphi_1, \varphi_2)+(\psi_1, \psi_2).$$

Оператор T называется **замкнутым**, если $\Gamma(T)$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$.

Определение. Пусть T_1 и T — операторы в $\mathscr{H}$. Если $\Gamma(T_1)\supset\Gamma(T)$, то T_1 называется **расширением** оператора T; в таком случае мы пишем $T_1\supset T$. Иными словами, $T_1\supset T$ тогда и только тогда, когда $D(T_1)\supset D(T)$ и $T_1\varphi=T\varphi$ для всех $\varphi\in D(T)$.

Определение. Говорят, что оператор T **допускает замыкание** (**замыкаем**), если он имеет замкнутое расширение. Каждый замыкаемый оператор имеет наименьшее замкнутое расширение, называемое **замыканием** и обозначаемое $\overline{T}$.

Естественно попытаться построить замкнутое расширение оператора T путем замыкания его графика в $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$. Но здесь нас подстерегает опасность: множество $\overline{\Gamma(T)}$ не обязано быть графиком какого-либо оператора (см., например, задачу 1). Однако большей частью мы будем иметь дело с симметрическими операторами (вводимыми в § VIII.2), а они, как мы увидим, всегда имеют замкнутое расширение.

Предложение. Если T допускает замыкание, то $\Gamma(\overline{T})=\overline{\Gamma(T)}$.

Доказательство. Предположим, что S — замкнутое расширение T. Тогда $\overline{\Gamma(T)}\subset\Gamma(S)$, так что если $\langle 0, \psi\rangle\in\overline{\Gamma(T)}$, то $\psi=0$. Определим оператор R на $D(R)=\{\psi \mid \langle\psi, \phi\rangle\in\overline{\Gamma(T)}$ для некоторого $\phi\}$ формулой $R\psi=\phi$, где $\phi\in\mathscr{H}$ — тот самый вектор, для которого $\langle\psi, \phi\rangle\in\overline{\Gamma(T)}$. Отсюда $\Gamma(R)=\overline{\Gamma(T)}$, так что R — замкнутое расширение T. Но $R\subset S$, где S — произвольное замкнутое расширение. Следовательно, $R=\overline{T}$. ∎

Следующий пример иллюстрирует только что введенные понятия.

Пример 3. Пусть $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R})$, $D(T)=C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $D(T_1)=C_0^1(\mathbb{R})$ — множество непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем. Пусть $Tf=if'(x)$, если $f\in D(T)$, и $T_1f=if'(x)$, если $f\in D(T_1)$. Тогда T_1 — расширение T. Покажем, что $\overline{\Gamma(T)}\supset\Gamma(T_1)$. Тогда, доказав, что T — симметрический оператор и потому допускает замыкание, мы получим, что $\overline{T}$ расширяет T_1. Введем сначала «аппроксимативную единицу» $\{j_\varepsilon(x)\}$. Пусть $j(x)$ — некоторая положительная бесконечно дифференцируемая функция с носителем на $(-1, 1)$, такая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} j(x)dx=1$. Положим $j_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}j(x/\varepsilon)$. Для $\varphi\in D(T_1)$ положим

$$\varphi_\varepsilon(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}|\varphi_\varepsilon(x)-\varphi(x)| &\leqslant \int j_\varepsilon(x-t)\,|\varphi(t)-\varphi(x)|\,dt\leqslant\\ &\leqslant\Big(\sup_{\{t\mid |x-t|<\varepsilon\}}|\varphi(t)-\varphi(x)|\Big)\int\limits_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(x-t)\,dt=\\ &=\sup_{\{t\mid |x-t|<\varepsilon\}}|\varphi(t)-\varphi(x)|.\end{aligned}$$

Поскольку φ имеет компактный носитель, она равномерно непрерывна, что влечет за собой равномерную сходимость $\varphi_\varepsilon\to\varphi$. Так как носитель φ_ε лежит в фиксированном компактном множестве, то $\varphi_\varepsilon\to\varphi$ в $L^2(\mathbb{R})$. Аналогично

$$\begin{aligned}i\frac{d}{dx}\varphi_\varepsilon(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} i\frac{d}{dx}j_\varepsilon(x-t)\,\varphi(t)\,dt=\\ &=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(-i\frac{d}{dt}j_\varepsilon(x-t)\Big)\varphi(t)\,dt=\\ &=\int\limits_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x-t)\,i\frac{d}{dt}\varphi(t)\,dt\xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} i\frac{d}{dx}\varphi(x).\end{aligned}$$

Поскольку функция $j_\varepsilon(x)$ имеет компактный носитель и бесконечно дифференцируема, $\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Итак, $\varphi_\varepsilon\in D(T)$ при любом $\varepsilon>0$. Таким образом, выше показано, что $\varphi_\varepsilon\xrightarrow{L^2(\mathbb{R})}\varphi$ и $T\varphi_\varepsilon\xrightarrow{L^2(\mathbb{R})}T_1\varphi$ для любого $\varphi\in D(T_1)$. Следовательно, замыкание графика T содержит график T_1.

Понятие сопряженного оператора можно распространить и на случай неограниченных операторов.

Определение. Пусть T — плотно определенный линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $D(T^*)$ — множество $\varphi \in \mathcal{H}$, для которых существуют такие $\eta \in \mathcal{H}$, что

$$(T\psi, \varphi) = (\psi, \eta) \text{ для всех } \psi \in D(T). \qquad \text{(VIII.1)}$$

Для каждого $\varphi \in D(T^*)$ положим $T^*\varphi = \eta$. Оператор T^* называется **сопряженным** к T. По лемме Рисса $\varphi \in D(T^*)$ тогда и только тогда, когда $|(T\psi, \varphi)| \leqslant C\|\psi\|$ для всех $\psi \in D(T)$.

Отметим, что $S \subset T$ влечет за собой $T^* \subset S^*$.

Отметим также, что для того, чтобы η однозначно определялось формулой (VIII.1), необходимо, чтобы область $D(T)$ была плотной. В отличие от случая ограниченных операторов область определения T^*, как показывает следующий пример, может и не быть плотной. В частности, может оказаться, что $D(T^*) = \{0\}$.

Пример 4. Предположим, что f — ограниченная измеримая функция, не лежащая в $L^2(\mathbb{R})$. Пусть $D(T) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int |f(x)\psi(x)|\,dx < < \infty\}$. Область $D(T)$ заведомо содержит все функции из L^2 с компактными носителями, так что $D(T)$ плотна в $L^2(\mathbb{R})$. Пусть ψ_0 — некоторый фиксированный вектор в $L^2(\mathbb{R})$. Введем T, положив по определению $T\psi = (f, \psi)\psi_0$ для $\psi \in D(T)$. Предположим, что $\varphi \in D(T^*)$; тогда

$$\begin{aligned}(\psi, T^*\varphi) &= (T\psi, \varphi) = ((f, \psi)\psi_0, \varphi) = \\ &= \overline{(f, \psi)}(\psi_0, \varphi) = (\psi, (\psi_0, \varphi) f)\end{aligned}$$

для всех $\psi \in D(T)$. Отсюда $T^*\varphi = (\psi_0, \varphi) f$. Поскольку $f \notin L^2(\mathbb{R})$, имеем $(\psi_0, \varphi) = 0$. Следовательно, любой $\varphi \in D(T^*)$ ортогонален к ψ_0, так что $D(T^*)$ не плотна. В действительности $D(T^*)$ есть в точности множество векторов, перпендикулярных ψ_0, и на этой области определения T^* — нулевой оператор.

Если область определения T^* плотна, то можно ввести $T^{**} = (T^*)^*$. Существует простая связь между понятиями сопряженного оператора и замыкания.

Теорема VIII.1. Пусть T — плотно определенный оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда

(a) T^* замкнут;

(b) T допускает замыкание тогда и только тогда, когда $D(T^*)$ плотна, причем в этом случае $\overline{T} = T^{**}$;

(c) если T допускает замыкание, то $(\overline{T})^* = T^*$.

Доказательство. Определим на $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ унитарный оператор V:

$$V\langle\phi, \psi\rangle=\langle-\psi, \phi\rangle.$$

В силу унитарности V имеем: $V[E^{\perp}]=(V[E])^{\perp}$ для любого подпространства E. Пусть T — линейный оператор в $\mathscr{H}$ и $\langle\phi, \eta\rangle\in\mathscr{H}\times\mathscr{H}$. Тогда $\langle\phi, \eta\rangle\in V[\Gamma(T)]^{\perp}$ в том и только том случае, когда $(\langle\phi, \eta\rangle, \langle-T\psi, \psi\rangle)=0$ для всех $\psi\in D(T)$, что выполняется тогда и только тогда, когда $(\phi, T\psi)=(\eta, \psi)$ для всех $\psi\in D(T)$, т. е. тогда и только тогда, когда $\langle\phi, \eta\rangle\in\Gamma(T^*)$. Итак, $\Gamma(T^*)=V[\Gamma(T)]^{\perp}$. Поскольку $V[\Gamma(T)]^{\perp}$ — всегда замкнутое подпространство в $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$, отсюда следует (a).

Чтобы доказать (b), отметим, что $\Gamma(T)$ — линейное подмножество в $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$, так что

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma(T)}&=(\Gamma(T)^{\perp})^{\perp}=\\&=(V^2\Gamma(T)^{\perp})^{\perp}=\\&=(V(V\Gamma(T))^{\perp})^{\perp}=\\&=(V\Gamma(T^*))^{\perp}.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом доказательства пункта (a) при плотно определенном T^* следует, что $\overline{\Gamma(T)}$ — график T^{**}.

Обратно, предположим, что $D(T^*)$ не плотна и что $\psi\in D(T^*)^{\perp}$. Простое вычисление показывает, что $\langle 0, \psi\rangle\in[\Gamma(T^*)]^{\perp}$, так что $V[\Gamma(T^*)]^{\perp}$ не является графиком (однозначного) оператора. Поскольку $\overline{\Gamma(T)}=(V\Gamma(T^*))^{\perp}$, мы видим, что T не допускает замыкания.

Чтобы доказать (c), заметим, что если T замыкаем, то

$$T^*=\overline{(T^*)}=T^{***}=(\overline{T})^*.\ \blacksquare$$

Определение. Пусть T — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Комплексное число λ принадлежит **резольвентному множеству** $\rho(T)$, если оператор $\lambda I-T$ является биекцией $D(T)$ на $\mathscr{H}$ с ограниченным обратным. Если $\lambda\in\rho(T)$, то $R_\lambda(T)=(\lambda I-T)^{-1}$ называется **резольвентой** оператора T в точке λ.

Для того чтобы точка принадлежала резольвентному множеству оператора T, должно быть выполнено несколько условий. Не все эти условия независимы. Например, если $\lambda I-T$ — биекция $D(T)$ на $\mathscr{H}$, то по теореме о замкнутом графике обратный оператор автоматически ограничен. Другие связи указаны в задаче 2.

Определения **спектра, точечного спектра** и **остаточного спектра** для неограниченных операторов такие же, как и для ограниченных. Иногда мы будем говорить о спектре незамкнутого, но замыкаемого оператора. В этом случае всегда будет иметься в виду спектр замыкания.

Теорема VIII.2. Пусть T — замкнутый плотно определенный линейный оператор. Тогда резольвентное множество T — открытое подмножество комплексной плоскости, на котором резольвента является аналитической операторнозначной функцией. Более того,

$$\{R_\lambda(T) \mid \lambda \in \rho(T)\}$$

— семейство коммутирующих ограниченных операторов, удовлетворяющих соотношению

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\mu(T) R_\lambda(T). \qquad \text{(VIII.2)}$$

Доказательство этой теоремы в точности такое же, как и в ограниченном случае (теорема VI.5).

Читателю может показаться, что заботы об областях определения и замыканиях неограниченных операторов вносят технические неудобства, и нужно выбрать любую достаточно малую плотную область определения, на которой неограниченный оператор имеет смысл, чтобы от них избавиться. Однако выбор подходящей области определения часто тесно связан с физической сущностью описываемой ситуации (см., например, обсуждение в § X.1). Далее, многие важные характеристики операторов очень чувствительны к выбору области определения. Следующий пример показывает, что спектр — одна из таких характеристик. В этом примере мы используем понятие абсолютно непрерывной функции и соответствующую фундаментальную теорему анализа. Читатель, не знакомый с определением и теоремой, может найти их в Замечаниях (см. также задачу 20 гл. I).

Пример 5. Обозначим через $AC[0, 1]$ множество абсолютно непрерывных функций на $[0, 1]$, производные которых лежат в $L^2[0, 1]$. Пусть T_1 и T_2 — операция $i\, d/dx$ с областями определения

$$D(T_1) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1]\},$$
$$D(T_2) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1] \text{ и } \varphi(0) = 0\}.$$

Как $D(T_1)$, так и $D(T_2)$ плотны в $L^2[0, 1]$, и соответствующие операторы замкнуты. Однако

(a) спектр T_1 есть $\mathbb{C}$;
(b) спектр T_2 пуст.

Доказательство замкнутости T_1 и T_2 мы оставляем в качестве упражнения (задача 3). Чтобы убедиться, что спектр T_1 — вся плоскость, заметим, что

$$(\lambda I - T_1) e^{-i\lambda x} = 0 \quad \text{и} \quad e^{-i\lambda x} \in D(T_1)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Что касается T_2, то оператор

$$(S_\lambda g)(x) = i \int_0^x e^{-i\lambda(x-s)} g(s)\, ds$$

удовлетворяет равенству $(\lambda I - T_2) S_\lambda = I$, а $S_\lambda (\lambda I - T_2)$ — тождественный оператор на $D(T_2)$. Более того,

$$\begin{aligned}\|S_\lambda g\|_2^2 &= \int_0^1 |(S_\lambda g)(x)|^2\,dx \leqslant \\ &\leqslant \Big(\sup_{x\in[0,1]} |(S_\lambda g)(x)|\Big)^2 \leqslant \\ &\leqslant \Big(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |e^{-i\lambda(x-s)} g(s)|\,ds\Big)^2 \leqslant \\ &\leqslant \Big(\sup_{x\in[0,1]} \Big(\int_0^x |e^{-i\lambda(x-s)}|^2\,ds\Big)\Big)\Big(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |g(s)|^2\,ds\Big) \leqslant \\ &\leqslant C(\lambda)\|g\|_2^2,\end{aligned}$$

так что S_λ ограничен. В соответствии с замечанием, сделанным сразу после определения резольвентного множества, для доказательства ограниченности S_λ достаточно показать, что $\lambda I - T_2$ — биекция. Это позволило бы избежать предыдущих вычислений.

VIII.2. Симметрические и самосопряженные операторы. Основной критерий самосопряженности

Определение. Плотно определенный оператор T в гильбертовом пространстве называется **симметрическим** (или **эрмитовым**), если $T \subset T^*$, т. е. если $D(T) \subset D(T^*)$ и $T\varphi = T^*\varphi$ для всех $\varphi \in D(T)$. Равносильное условие: T симметричен тогда и только тогда, когда

$$(T\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi) \text{ для всех } \varphi, \psi \in D(T).$$

Определение. Оператор T называется **самосопряженным**, если $T = T^*$, т. е. тогда и только тогда, когда T симметричен и $D(T) = D(T^*)$.

Симметрический оператор всегда допускает замыкание, поскольку $D(T^*) \supset D(T)$, а значит, область $D(T^*)$ плотна в $\mathscr{H}$. Если T симметричен, то T^* — замкнутое расширение T, поэтому наименьшее замкнутое расширение T^{**} оператора T должно содержаться в T^*. Итак, для симметрического оператора имеем

$$T \subset T^{**} \subset T^*.$$

Для замкнутого симметрического оператора

$$T = T^{**} \subset T^*,$$

а для самосопряженного оператора

$$T = T^{**} = T^*.$$

Отсюда видно, что замкнутый симметрический оператор T самосопряжен тогда и только тогда, когда T^* симметричен.

Различие между замкнутыми симметрическими операторами и самосопряженными операторами очень существенно. Именно для *самосопряженных* операторов выполняется спектральная теорема (см. § VIII.3), и только для *самосопряженных* операторов могут быть построены экспоненты, задающие однопараметрические группы унитарных операторов (см. § VIII.4), описывающие динамику в квантовой механике. Изучению методов доказательства самосопряженности операторов посвящена гл. X. Здесь же мы ограничимся доказательством основного критерия самосопряженности. Введем сначала полезное понятие самосопряженности в существенном.

Определение. Симметрический оператор T называется **в существенном самосопряженным**, если его замыкание $\bar{T}$ самосопряжено. Если T замкнут, то подмножество $D \subset D(T)$ называется **существенной областью (определения)** оператора T, когда $\overline{T \upharpoonright D} = T$.

Если T в существенном самосопряжен, то он имеет одно и только одно самосопряженное расширение. В самом деле, предположим, что S — самосопряженное расширение T. Тогда S замкнут и, следовательно, из $S \supset T$ следует $S \supset T^{**}$. Поэтому $S = S^* \subset (T^{**})^* = T^{**}$, и, значит, $S = T^{**}$. Справедливо и обратное утверждение, а именно, если T имеет одно и только одно самосопряженное расширение, то T в существенном самосопряжен (см. § X.1). Поскольку $T^* = \bar{T}^* = T^{***}$, оператор T в существенном самосопряжен тогда и только тогда, когда

$$T \subset T^{**} = T^*.$$

Самосопряженность в существенном часто помогает в тех случаях, когда задан незамкнутый симметрический оператор T. Если удается доказать его самосопряженность в существенном, то ему однозначно соответствует самосопряженный оператор $\bar{T} = T^{**}$. Иначе говоря, если A — самосопряженный оператор, то для его однозначного задания не обязательно давать точное описание области определения (что часто сложно), достаточно описать какую-либо существенную область A.

Предположим теперь, что T — самосопряженный оператор и что существует такое $\varphi \in D(T^*) = D(T)$, что $T^*\varphi = i\varphi$. Тогда $T\varphi = i\varphi$ и

$$-i(\varphi, \varphi) = (i\varphi, \varphi) = (T\varphi, \varphi) = (\varphi, T^*\varphi) = (\varphi, T\varphi) = i(\varphi, \varphi),$$

так что $\varphi = 0$. Аналогично доказывается, что и $T^*\varphi = -i\varphi$ не имеет решений. Обратное утверждение о том, что если T — замкнутый симметрический оператор и уравнения $T^*\varphi = \pm i\varphi$ не имеют решений, то T самосопряжен, и является основным признаком самосопряженности.

Теорема VIII.3 (основной критерий самосопряженности). Пусть T — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:

(a) T самосопряжен;
(b) T замкнут и $\operatorname{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$;
(c) $\operatorname{Ran}(T \pm i) = \mathcal{H}$.

Доказательство. Как мы только что видели, (a) влечет за собой (b). Предположим, что имеет место (b), и докажем (c). Поскольку $T^*\varphi = -i\varphi$ не имеет решений, множество $\operatorname{Ran}(T - i)$ должно быть плотным в $\mathcal{H}$. В противном случае для $\psi \in \operatorname{Ran}(T - i)^{\perp}$ мы имели бы $((T - i)\varphi, \psi) = 0$ при всех $\varphi \in D(T)$, а тогда $\psi \in D(T^*)$ и $(T - i)^*\psi = (T^* + i)\psi = 0$, что невозможно, так как $T^*\psi = -i\psi$ не имеет решений. (Обращая это построение, можно показать, что если $\operatorname{Ran}(T - i)$ — плотное множество, то ядро $T^* + i$ есть $\{0\}$.) В силу плотности $\operatorname{Ran}(T - i)$, нам необходимо доказать лишь его замкнутость, и тогда можно заключить, что $\operatorname{Ran}(T - i) = \mathcal{H}$. Но для всех $\varphi \in D(T)$

$$\|(T - i)\varphi\|^2 = \|T\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2.$$

Тогда если $\varphi_n \in D(T)$ и $(T - i)\varphi_n \to \psi_0$, то φ_n сходится к некоторому вектору φ_0 и $T\varphi_n$ также сходится. Поскольку T замкнут, $\varphi_0 \in D(T)$ и $(T - i)\varphi_0 = \psi_0$. Отсюда $\operatorname{Ran}(T - i)$ замкнут, а поэтому $\operatorname{Ran}(T - i) = \mathcal{H}$. Аналогично $\operatorname{Ran}(T + i) = \mathcal{H}$.

Покажем, наконец, что из (c) следует (a). Пусть $\varphi \in D(T^*)$. Поскольку $\operatorname{Ran}(T - i) = \mathcal{H}$, существует такое $\eta \in D(T)$, что $(T - i)\eta = (T^* - i)\varphi$. Но $D(T) \subset D(T^*)$, поэтому $\varphi - \eta \in D(T^*)$ и

$$(T^* - i)(\varphi - \eta) = 0.$$

Но $\operatorname{Ran}(T + i) = \mathcal{H}$, поэтому $\operatorname{Ker}(T^* - i) = \{0\}$, так что $\varphi = \eta \in D(T)$. Это доказывает, что $D(T^*) = D(T)$, т. е. что T самосопряжен. ∎

Следствие. Пусть T — симметрический оператор в гильбертовом пространстве. Тогда следующие утверждения равносильны:

(a) T в существенном самосопряжен;
(b) $\operatorname{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$;
(c) множества $\operatorname{Ran}(T^* \pm i)$ плотны.

В заключение приведем пример, показывающий, что симметрический оператор может иметь много самосопряженных расширений. Чтобы не ввести читателя в заблуждение, отметим, что симметрический оператор может и *совсем не иметь* самосопряженных расширений (см. задачу 4 и § X.1).

Пример. Пусть $T = i\, d/dx$ и

$$D(T) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1],\ \varphi(0) = 0 = \varphi(1)\}.$$

Простое интегрирование по частям показывает, что T — симметрический оператор в $L^2[0, 1]$. Начнем с определения T^*. Пусть j_ε — функция, введенная в примере 3 § VIII.1. Зафиксируем $0 < \alpha < \beta < 1$ и положим

$$f_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x) = j_\varepsilon(x-\beta) - j_\varepsilon(x-\alpha),$$
$$g_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x f_\varepsilon^{\alpha,\beta}(t)\, dt.$$

Пусть $\psi \in D(T^*)$. Если ε достаточно мало, то $g_\varepsilon^{\alpha,\beta} \in D(T)$, так что

$$(Tg_\varepsilon^{\alpha,\beta}, \psi) = (g_\varepsilon^{\alpha,\beta}, T^*\psi). \tag{VIII.3}$$

При $\varepsilon \to 0$ последовательность $g_\varepsilon^{\alpha,\beta}$ сходится к характеристической функции интервала (α, β) в $L^2(0, 1)$, откуда

$$(g_\varepsilon^{\alpha,\beta}, T^*\psi) \to -\int_\alpha^\beta (T^*\psi)(x)\, dx.$$

Основная оценка примера 3 показывает, что

$$J_\varepsilon\varphi = \int_0^1 j_\varepsilon(x-t)\, \varphi(t)\, dt$$

сходится в L^2 к φ, если φ непрерывна. Более того, каждый оператор J_ε ограничен и имеет норму, не большую единицы, так как если $\psi \in L^2(0, 1)$, то

$$\begin{aligned} |(\psi, J_\varepsilon\varphi)| &\leqslant \iint j_\varepsilon(x-t)\,|\varphi(t)|\,|\psi(x)|\, dx\, dt = \\ &= \iint j_\varepsilon(y)\,|\varphi(t)|\,|\psi(y+t)|\, dy\, dt \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi\|\,\|\psi\| \int j_\varepsilon(y)\, dy = \\ &= \|\varphi\|\,\|\psi\|. \end{aligned}$$

Используя $\varepsilon/3$-прием, имеем: $J_\varepsilon\varphi \xrightarrow{L^2} \varphi$ для всех $\varphi \in L^2[0, 1]$. Таким образом, левая часть (VIII.3) при $\varepsilon \to 0$ сходится в смысле среднего квадратичного к $-i(\psi(\beta) - \psi(\alpha))$. Итак, для почти всех α, β

$$i(\psi(\beta) - \psi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta (T^*\psi)(x)\, dx.$$

Это означает, что ψ абсолютна непрерывна (см. замечания к § VIII.1) и

$$i\frac{d}{dx}\psi(x)=(T^*\psi)(x).$$

Итак, $\psi\in AC[0,1]$ и $T^*\psi=i\,d\psi(x)/dx$. Обратно, интегрирование по частям показывает, что любой $\psi\in AC[0,1]$ лежит в области определения T^* и $T^*\psi=i\,d\psi/dx$. Следовательно, $T^*=i\,d/dx$ на $D(T^*)=AC[0,1]$.

Легко видеть, что T не есть в существенном самосопряженный оператор, поскольку

$$e^{\pm x}\in D(T^*)\ \text{ и }\ i\,de^{\pm x}/dx=\pm ie^{\pm x}.$$

Оператор T замкнут (задача 6), и, таким образом, T служит примером замкнутого симметрического, но не самосопряженного оператора.

Имеет ли T самосопряженные расширения? Да, и притом несчетное число различных! Пусть $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$ и положим $T_\alpha=i\,d/dx$ на

$$D(T_\alpha)=\{\varphi\mid\varphi\in AC[0,1],\ \varphi(0)=\alpha\varphi(1)\}.$$

Каждый из операторов T_α — самосопряженное расширение T, и при разных α расширения различны (задача 7). Конечно, каждый из T_α в свою очередь расширяется оператором T^*. Эти расширения изображены на рис. VIII.1. Почему различные расширения образуют именно окружность, будет объяснено в § X.1.

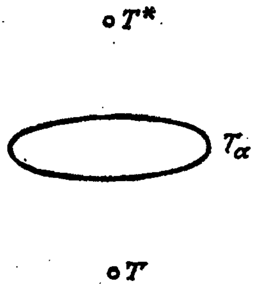

Рис. VIII.1. Самосопряженные расширения T.

VIII.3. Спектральная теорема

Хорошее определение должно быть посылкой теоремы.

ДЖ. ГЛИММ

В этом разделе мы покажем, как обобщить на неограниченные самосопряженные операторы спектральную теорему для ограниченных самосопряженных операторов, изложенную в гл. VII. Чтобы пояснить, к чему мы стремимся, докажем сначала следующее

Предложение 1. Пусть $\langle M,\mu\rangle$ — пространство с конечной мерой μ. Предположим, что f — измеримая, вещественнозначная функция на M, конечная п.в. по мере μ. Тогда оператор $\varphi\xrightarrow{T_f}f\varphi$

на $L^2(M, d\mu)$ с областью определения

$$D(T_f)=\{\varphi \mid f\varphi \in L^2(M, d\mu)\}$$

самосопряжен, и $\sigma(T_f)$—существенная область значений f.

Доказательство. Оператор T_f, очевидно, симметричен. Предположим, что $\psi \in D(T_f^*)$, и пусть

$$\chi_N(m)=\begin{cases} 1, & \text{если } |f(m)| \leqslant N, \\ 0 & \text{во всех других случаях.}\end{cases}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости имеем

$$\begin{aligned}\|T_f^*\psi\| &= \lim_{N\to\infty}\|\chi_N T_f^*\psi\| = \\ &= \lim_{N\to\infty}\Big(\sup_{\|\varphi\|=1}|(\varphi, \chi_N T_f^*\psi)|\Big) = \\ &= \lim_{N\to\infty}\Big(\sup_{\|\varphi\|=1}|(T_f\chi_N\varphi, \psi)|\Big) = \\ &= \lim_{N\to\infty}\Big(\sup_{\|\varphi\|=1}|(\varphi, \chi_N f\psi)|\Big) = \\ &= \lim_{N\to\infty}\|\chi_N f\psi\|.\end{aligned}$$

Итак, $f\psi \in L^2(M, d\mu)$, так что $\psi \in D(T_f)$ и поэтому T_f самосопряжен. Последнее утверждение доказывается, как в ограниченном случае (задача 17 гл. VII). ∎

Если об f знать больше, то что-то можно сказать и об области, на которой T_f в существенном самосопряжен.

Предложение 2. Пусть f и T_f удовлетворяют условиям предложения 1. Предположим также, что $f \in L^p(M, d\mu)$ при $2<p<\infty$. Пусть D—произвольное плотное множество в $L^q(M, d\mu)$, где $q^{-1}+p^{-1}=1/2$. Тогда D—существенная область T_f.

Доказательство. Докажем сначала, что L^q—существенная область T_f. В силу неравенства Гёльдера, $\|g\|_2 \leqslant \|1\|_p \|g\|_q$ и $\|fg\|_2 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$, так что $L^q \subset D(T_f)$. Более того, если $g \in D(T_f)$, то пусть g_n—функции, равные нулю, когда $|g(m)|>n$, и равные g в противном случае. По теореме о мажорированной сходимости $g_n \to g$ и $fg_n \to fg$ в L^2. Так как каждое g_n лежит в L^q, мы заключаем, что L^q—существенная область T_f.

Пусть теперь D плотно в L^q, и пусть $g \in L^q$. Выберем такие $g_n \in D$, что $g_n \to g$ в L^q. Из $\|g_n-g\|_2 \leqslant \|1\|_p \|g_n-g\|_q$ и $\|T_f(g_n-g)\|_2 \leqslant \|f\|_p \|g_n-g\|_q$ следует, что $g \in D(\overline{T_f \upharpoonright D})$. Итак, $L^q \subset D(\overline{T_f \upharpoonright D})$, а значит, D—существенная область. ∎

За исключением случая, когда $f \in L^\infty(M, d\mu)$, оператор T_f, описанный в предложениях 1 и 2, неограничен. Таким образом, мы нашли большой класс неограниченных самосопряженных операторов. На самом деле все они входят в этот класс.

Теорема VIII.4 (спектральная теорема в терминах операторов умножения). Пусть A — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с областью определения $D(A)$. Тогда существуют: пространство $\langle M, \mu\rangle$ с конечной мерой μ, унитарный оператор $U\colon \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$ и вещественнозначная конечная п.в. функция f на M, такие, что

(a) $\psi \in D(A)$ тогда и только тогда, когда $f(\cdot)(U\psi)(\cdot) \in \in L^2(M, d\mu)$;

(b) если $\varphi \in U[D(A)]$, то $(UAU^{-1}\varphi)(m) = f(m)\varphi(m)$.

Доказательство. При доказательстве теоремы VIII.3 было показано, что $A+i$ и $A-i$ — взаимно однозначные отображения и $\operatorname{Ran}(A \pm i) = \mathcal{H}$. Поскольку $A \pm i$ замкнуты, то и $(A \pm i)^{-1}$ замкнуты и, следовательно, ограничены (теорема III.12). По теореме VIII.2 $(A+i)^{-1}$ и $(A-i)^{-1}$ коммутируют. Равенство

$$((A-i)\psi,\ (A+i)^{-1}(A+i)\varphi) = ((A-i)^{-1}(A-i)\psi,\ (A+i)\varphi)$$

и тот факт, что $\operatorname{Ran}(A \pm i) = \mathcal{H}$, показывают, что $((A+i)^{-1})^* = = (A-i)^{-1}$. Таким образом, $(A+i)^{-1}$ нормален.

Теперь используем несложное обобщение спектральной теоремы для ограниченных самосопряженных операторов на ограниченные нормальные операторы. Доказательство этого обобщения вынесено в задачи 3, 4 и 5 гл. VII. Тогда заключаем, что существуют пространство с конечной мерой $\langle M, \mu\rangle$, унитарный оператор $U\colon \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$ и измеримая ограниченная комплекснозначная функция $g(m)$, такие, что $(U(A+i)^{-1}U^{-1}\varphi)(m) = = g(m)\varphi(m)$ для всех $\varphi \in L^2(M, d\mu)$.

Так как множество $\operatorname{Ker}(A+i)^{-1}$ пусто, то $g(m) \neq 0$ п.в. по мере μ, так что функция $f(m) = g(m)^{-1} - i$ конечна п.в. по мере μ. Предположим теперь, что $\psi \in D(A)$. Тогда $\psi = (A+i)^{-1}\varphi$ для некоторого $\varphi \in \mathcal{H}$ и $U\psi = gU\varphi$. Из ограниченности fg заключаем, что $f(U\psi) \in L^2(M, d\mu)$. Обратно, если $f(U\psi) \in L^2(M, d\mu)$, то существует такое $\varphi \in \mathcal{H}$, что $U\varphi = (f+i)U\psi$. Таким образом, $gU\varphi = = g(f+i)U\psi = U\psi$, так что $\psi = (A+i)^{-1}\varphi$, т. е. $\psi \in D(A)$. Это доказывает (a).

Для доказательства (b) заметим, что если $\psi \in D(A)$, то $\psi = (A+i)^{-1}\varphi$ для некоторого $\varphi \in \mathcal{H}$ и $A\psi = \varphi - i\psi$. Поэтому

$$\begin{aligned}(UA\psi)(m) &= (U\varphi)(m) - i(U\psi)(m) = \\ &= (g(m)^{-1} - i)(U\psi)(m) = \\ &= f(m)(U\psi)(m).\end{aligned}$$

Наконец, если $\operatorname{Im} f > 0$ на множестве ненулевой меры, то существует ограниченное множество B в верхней полуплоскости, такое, что $S=\{x\mid f(x)\in B\}$ имеет ненулевую меру. Если χ — характеристическая функция множества S, то $f\chi\in L^2(M, d\mu)$ и $\operatorname{Im}(\chi, f\chi)>0$. Это противоречит тому, что оператор умножения на f самосопряжен (так как он унитарно эквивалентен A). Следовательно, f вещественнозначна. ▮

Только что доказанная теорема дает естественный способ построения функций от самосопряженных операторов. Для заданной ограниченной борелевой функции h на $\mathbb{R}$ положим по определению

$$h(A)=U^{-1}T_{h(f)}U,$$

где $T_{h(f)}$ — оператор на $L^2(M, d\mu)$, действующий как умножение на функцию $h(f(m))$. При таком определении из теоремы VIII.4 легко получается следующая

Теорема VIII.5 (спектральная теорема в терминах функционального исчисления). Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. Тогда существует единственное отображение $\hat{\phi}$ ограниченных борелевых функций на $\mathbb{R}$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, такое, что

(a) $\hat{\phi}$ — алгебраический $*$-гомоморфизм;

(b) $\hat{\phi}$ непрерывно по норме, т. е. $\|\hat{\phi}(h)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}\leqslant\|h\|_\infty$;

(c) если $\{h_n(x)\}$ — последовательность ограниченных борелевых функций, такая, что $h_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ для каждого x и $|h_n(x)|\leqslant|x|$ для всех x и n, то $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\phi}(h_n)\psi=A\psi$ для любого $\psi\in D(A)$;

(d) если $h_n(x)\to h(x)$ поточечно, а последовательность $\|h_n\|_\infty$ ограничена, то $\hat{\phi}(h_n)\to\hat{\phi}(h)$ сильно.

Кроме того,

(e) если $A\psi=\lambda\psi$, то $\hat{\phi}(h)\psi=h(\lambda)\psi$;

(f) если $h\geqslant 0$, то $\hat{\phi}(h)\geqslant 0$.

Функциональное исчисление очень полезно. Например, оно позволяет определить экспоненту e^{itA} и легко доказать многие ее свойства как функции от t (см. следующий раздел). В случае когда A ограничен, для определения экспоненты не требуется функциональное исчисление, поскольку она может быть задана сходящимся по норме степенным рядом.

Функциональное исчисление используется также для построения спектральных мер и теории спектральных кратностей, аналогичной соответствующей теории для ограниченных самосопряженных операторов. Вектор ψ называется **циклическим** для оператора A, если множество $\{g(A)\psi\mid g\in C_\infty(\mathbb{R})\}$ плотно в $\mathscr{H}$. Если ψ — циклический вектор, то $\mathscr{H}$ можно представить как $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$, причем так, чтобы A перешел в оператор умножения на x. Здесь μ_ψ — мера, удовлетворяющая соотношению

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\mu_\psi(x) = (\psi, g(A)\psi).$$

В общем случае $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму циклических подпространств, поэтому пространство с мерой M в теореме VIII.4 можно представить как объединение некоторого количества экземпляров $\mathbb{R}$. Как и в случае ограниченных операторов, мы можем ввести $\sigma_{ac}(A)$, $\sigma_{pp}(A)$, $\sigma_{sing}(A)$ и соответствующим образом разложить $\mathcal{H}$.

Наконец, из функционального исчисления легко вывести спектральную теорему в терминах проекторнозначных мер. Пусть P_Ω — оператор $\chi_\Omega(A)$, где χ_Ω — характеристическая функция измеримого множества $\Omega \subset \mathbb{R}$. Семейство операторов $\{P_\Omega\}$ обладает следующими свойствами:

(a) каждый P_Ω — ортогональный проектор;

(b) $P_\varnothing = 0$, $P_{(-\infty, \infty)} = I$;

(c) если $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, причем $\Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ при $n \neq m$,

то $P_\Omega = \text{s-}\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} P_{\Omega_n}$;

(d) $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.

Такое семейство называется **проекторнозначной мерой.** Это определение обобщает понятие ограниченной проекторнозначной меры, введенное в гл. VII, поскольку мы требуем только, чтобы $P_{(-\infty, \infty)} = I$, вместо $P_{(-a, a)} = I$ для некоторого a. Для $\varphi \in \mathcal{H}$ среднее $(\varphi, P_\Omega\varphi)$ — корректно определенная борелева мера на $\mathbb{R}$, которую мы, так же как в гл. VII, обозначим через $d(\varphi, P_\lambda\varphi)$. Комплексная мера $d(\varphi, P_\lambda\psi)$ определяется поляризационным тождеством. Итак, для заданной ограниченной борелевой функции g мы можем определить $g(A)$ условием

$$(\varphi, g(A)\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, d(\varphi, P_\lambda\varphi). \tag{VIII.4}$$

Нетрудно показать, что это отображение $g \mapsto g(A)$ обладает свойствами (a)—(d) теоремы VIII.5, так что $g(A)$, определенное по (VIII.4), совпадает с $g(A)$, данным в теореме VIII.4. Предположим теперь, что g — неограниченная комплекснозначная борелева функция, и пусть

$$D_g = \left\{ \varphi \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2\, d(\varphi, P_\lambda\varphi) < \infty \right\}. \tag{VIII.5}$$

Тогда область D_g плотна в $\mathscr{H}$ и оператор $g(A)$ определен на D_g формулой

$$(\varphi,\ g(A)\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,d(\varphi,\ P_\lambda\varphi).$$

Как и в гл. VII, мы будем использовать символическую запись

$$g(A)=\int g(\lambda)\,dP_\lambda.$$

В частности, если $\varphi,\ \psi\in D(A)$, то

$$(\varphi,\ A\psi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,d(\varphi,\ P_\lambda\psi).$$

Если g вещественнозначна, то оператор $g(A)$ самосопряжен на D_g. Наши построения резюмирует

Теорема VIII.6 (спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер). Существует взаимно однозначное соответствие между самосопряженными операторами A и проекторнозначными мерами $\{P_\Omega\}$ на $\mathscr{H}$, задаваемое равенством

$$A=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dP_\lambda.$$

Если $g(\cdot)$—вещественнозначная борелева функция на $\mathbb{R}$, то оператор

$$g(A)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)\,dP_\lambda,$$

определенный на D_g [см. (VIII.5)], самосопряжен. Если функция g ограничена, то $g(A)$ совпадает с $\hat{\phi}(g)$ теоремы VIII.5.

В заключение сделаем несколько замечаний. Во-первых, формула Стоуна, данная в теореме VII.13, связывает резольвенту и проекторнозначную меру любого самосопряженного оператора. Доказательство проходит так же, как и в ограниченном случае.

Спектр неограниченного самосопряженного оператора—неограниченное подмножество вещественной оси. Можно определить дискретный и существенный спектры, и они по-прежнему характеризуются теоремами VII.9, VII.10 и VII.11. Теорема VII.12 (критерий Вейля) также выполняется, если потребовать, чтобы векторы $\{\psi_n\}$ лежали в области определения A.

Наконец, отметим, что пространство с мерой в теореме VIII.4 всегда можно выбрать так, чтобы было применимо предложение 2.

Предложение 3. Пусть A — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда пространство с мерой $\langle M, \mu\rangle$ и функция f из теоремы VIII.4 могут быть выбраны так, что $f \in L^p(M, d\mu)$ для всех p, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Из теоремы VIII.4 мы знаем, что A унитарно эквивалентен T_f на некотором пространстве с мерой $\langle M, \nu\rangle$ с $\nu(M) < \infty$. Пусть μ — мера, заданная соотношением

$$d\mu = e^{-f^2}\, d\nu.$$

Тогда T_f на $L^2(M, d\mu)$ унитарно эквивалентен T_f на $L^2(M, d\nu)$, и эта унитарная связь осуществляется оператором $V\colon L^2(M, d\nu) \to L^2(M, d\mu)$, который задается равенством $Vg(m) = (e^{+f^2/2}g)(m)$. Более того, $f \in L^p(M, d\mu)$ для любого $1 \leqslant p < \infty$. ∎

VIII.4. Теорема Стоуна

В этом разделе доказывается теорема Стоуна, которая, подобно спектральной теореме, играет важную роль в квантовой механике. Предположим, что A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. Если A ограничен, то экспоненту от A можно определить при помощи ряда

$$e^{itA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n A^n}{n!},$$

поскольку он сходится по норме. Если оператор A самосопряжен, но неограничен, то использовать степенной ряд непосредственно нельзя, однако для определения e^{itA} в этом случае можно использовать развитое в предыдущем разделе функциональное исчисление.

Теорема VIII.7. Пусть A — самосопряженный оператор; положим $U(t) = e^{itA}$. Тогда

(a) для любого $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t)$ унитарен и $U(t+s) = U(t)U(s)$ при всех $s, t \in \mathbb{R}$;

(b) если $\varphi \in \mathscr{H}$ и $t \to t_0$, то $U(t)\varphi \to U(t_0)\varphi$;

(c) для $\psi \in D(A)$ имеем: $\dfrac{U(t)\psi - \psi}{t} \to iA\psi$ при $t \to 0$;

(d) если $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{U(t)\psi - \psi}{t}$ существует, то $\psi \in D(A)$.

Доказательство. (a) немедленно следует из функционального исчисления и соответствующих утверждений для комплекснозначной функции $e^{it\lambda}$. Для доказательства (b) отметим, что

$$\| e^{itA}\varphi - \varphi \|^2 = \int_{\mathbb{R}} | e^{it\lambda} - 1 |^2\, d(P_\lambda \varphi, \varphi).$$

Поскольку $|e^{it\lambda}-1|^2$ мажорируется интегрируемой функцией $g(\lambda)=2$ и поскольку

$$|e^{it\lambda}-1|^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ для любого } \lambda\in\mathbb{R},$$

мы заключаем, что $\|U(t)\varphi-\varphi\|^2\to 0$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Итак, $t\mapsto U(t)$ сильно непрерывно в $t=0$, откуда в силу группового свойства вытекает сильная непрерывность этого отображения всюду. Доказательство (c), использующее снова теорему о мажорированной сходимости и оценку $|e^{ix}-1|\leqslant|x|$, мы оставляем читателю (задача 11). Чтобы доказать (d), положим

$$D(B)=\left\{\psi\,\middle|\,\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\psi-\psi}{t} \text{ существует}\right\},$$

и пусть $iB\psi=\lim\limits_{t\to 0}[U(t)\psi-\psi]/t$. Простые вычисления показывают, что B — симметрический оператор. Согласно (c), $B\supset A$, поэтому $B=A$. ∎

Определение. Операторнозначная функция $U(t)$, удовлетворяющая (a) и (b), называется **сильно непрерывной однопараметрической унитарной группой.**

Следующая теорема гласит, что каждая сильно непрерывная унитарная группа есть семейство экспонент некоторого самосопряженного оператора.

Теорема VIII.8 (теорема Стоуна). Пусть $U(t)$ — сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существует самосопряженный оператор A в $\mathscr{H}$, такой, что $U(t)=e^{itA}$.

Доказательство. Пункт (d) теоремы VIII.7 наводит на мысль о том, что A можно получить дифференцированием $U(t)$ при $t=0$. Мы покажем, что это можно сделать на плотной области, состоящей из особенно хороших векторов, а затем, используя основной критерий самосопряженности, покажем, что предельный оператор в существенном самосопряжен. И наконец, мы докажем, что экспонента этого предельного оператора даст $U(t)$.

Пусть $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$; для каждого $\varphi\in\mathscr{H}$ введем

$$\varphi_f=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,U(t)\,\varphi\,dt.$$

Так как группа $U(t)$ сильно непрерывна, то интеграл можно рассматривать как риманов. Пусть D — множество конечных линейных комбинаций всех таких φ_f для $\varphi\in\mathscr{H}$ и $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Если $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица, введенная в § VIII.1, то

$$\|\varphi_{j_\varepsilon}-\varphi\|=\left\|\int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(t)\,(U(t)\varphi-\varphi)\,dt\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(t)\,dt\right)\sup_{t\in[-\varepsilon,\,\varepsilon]}\|U(t)\varphi-\varphi\|.$$

Поскольку $U(t)$ сильно непрерывна, D плотна в $\mathscr{H}$. Мы использовали здесь неравенство $\left\|\int h(t)\,dt\right\|\leqslant\int\|h(t)\|\,dt$ для непрерывных функций на вещественной прямой со значениями в банаховом пространстве (это неравенство можно доказать с помощью частичных сумм точно так же, как и в вещественнозначном случае).

При $\varphi_f\in D$ получим

$$\left(\frac{U(s)-I}{s}\right)\varphi_f=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{U(s+t)-U(t)}{s}\right)\varphi\,dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau-s)-f(\tau)}{s}\,U(\tau)\varphi\,d\tau\longrightarrow$$
$$\longrightarrow-\int f'(\tau)\,U(\tau)\varphi\,d\tau=$$
$$=\varphi_{-f'},$$

так как $[f(\tau-s)-f(\tau)]/s$ равномерно сходится к $-f'(\tau)$. Для $\varphi_f\in D$ положим $A\varphi_f=i^{-1}\varphi_{-f'}$. Отметим, что $U(t)$: $D\longrightarrow D$, A: $D\longrightarrow D$ и $U(t)A\varphi_f=AU(t)\varphi_f$ при $\varphi_f\in D$. Более того, если φ_f, $\varphi_g\in D$, то

$$(A\varphi_f,\ \varphi_g)=\lim_{s\to 0}\left(\left(\frac{U(s)-I}{is}\right)\varphi_f,\ \varphi_g\right)=$$
$$=\lim_{s\to 0}\left(\varphi_f,\ \left(\frac{I-U(-s)}{is}\right)\varphi_g\right)=$$
$$=(\varphi_f,\ i^{-1}\varphi_{-g'})=$$
$$=(\varphi_f,\ A\varphi_g),$$

так что A — симметрический.

Теперь покажем, что A в существенном самосопряжен. Предположим, что имеется такой $u\in D(A^*)$, что $A^*u=iu$. Тогда для любого $\varphi\in D(A)=D$:

$$\frac{d}{dt}(U(t)\varphi,\ u)=(iAU(t)\varphi,\ u)=$$
$$=-i\,(U(t)\varphi,\ A^*u)=$$
$$=-i\,(U(t)\varphi,\ iu)=$$
$$=(U(t)\varphi,\ u).$$

Итак, комплекснозначная функция $f(t)=(U(t)\varphi, u)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $f'=f$, и поэтому $f(t)=f(0)e^t$. Поскольку $U(t)$ имеет единичную норму, модуль $|f(t)|$ ограничен, откуда следует, что $f(0)=(\varphi, u)=0$. Так как D плотна, то $u=0$. Аналогичное доказательство показывает, что и $A^*u=-iu$ не имеет ненулевых решений. Отсюда, в силу следствия из теоремы VIII.3, A в существенном самосопряжен на D.

Пусть $V(t)=e^{it\bar{A}}$. Остается показать, что $U(t)=V(t)$. Пусть $\varphi\in D$. Так как $\varphi\in D(\bar{A})$, то, в силу пункта (c) теоремы VIII.7, $V(t)\varphi\in D(\bar{A})$ и $V'(t)\varphi=-i\bar{A}V(t)\varphi$. Мы уже знаем, что $U(t)\varphi\in D\subset D(\bar{A})$ при всех t. Пусть $w(t)=U(t)\varphi-V(t)\varphi$. Тогда $w(t)$ — сильно дифференцируемая векторнозначная функция и

$$w'(t)=iAU(t)\varphi-i\bar{A}V(t)\varphi=i\bar{A}w(t).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2=-i(\bar{A}w(t), w(t))+i(w(t), \bar{A}w(t))=0,$$

и так как $w(0)=0$, то $w(t)=0$ для всех t. Отсюда получаем равенство $U(t)\varphi=V(t)\varphi$ для всех $t\in\mathbb{R}$, $\varphi\in D$, а так как D плотна, то $U(t)=V(t)$. ∎

Определение. Если $U(t)$ — сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа, то самосопряженный оператор A, такой, что $U(t)=e^{itA}$, называется **инфинитезимальным генератором** $U(t)$.

Предположим, что $U(t)$ — *слабо* непрерывная однопараметрическая унитарная группа. Тогда

$$\|U(t)\varphi-\varphi\|^2=\|U(t)\varphi\|^2-(U(t)\varphi, \varphi)-(\varphi, U(t)\varphi)+\|\varphi\|^2\to$$
$$\to 2\|\varphi\|^2-2\|\varphi\|^2=0$$

при $t\to 0$. Итак, $U(t)$ в действительности *сильно* непрерывна. На самом деле для заключения о сильной непрерывности $U(t)$ достаточно доказать лишь слабую измеримость $U(t)$, т. е. что функция $(U(t)\varphi, \psi)$ измерима при любых φ и ψ. Этот замечательный результат, доказанный фон Нейманом, полезен в приложениях, поскольку $(U(t)\varphi, \psi)$ часто оказывается пределом последовательности непрерывных функций. Тогда функция $(U(t)\varphi, \psi)$ измерима, а группа $U(t)$ по теореме фон Неймана сильно непрерывна.

Теорема VIII.9 (фон Нейман). Пусть $U(t)$ — однопараметрическая группа унитарных операторов на *сепарабельном* гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Предположим, что для всех φ, $\psi \in \mathscr{H}$ функция $(U(t)\psi, \varphi)$ измерима. Тогда $U(t)$ сильно непрерывна.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathscr{H}$. Тогда для всех $\varphi \in \mathscr{H}$ функция $(U(t)\psi, \varphi)$ ограничена и измерима, а отображение

$$\varphi \mapsto \int_0^a (U(t)\psi, \varphi)\,dt$$

— линейный функционал на $\mathscr{H}$, норма которого меньше или равна $a\|\psi\|$. В таком случае по лемме Рисса существует такой $\psi_a \in \mathscr{H}$, что

$$(\psi_a, \varphi) = \int_0^a (U(t)\psi, \varphi)\,dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(U(b)\psi_a, \varphi) &= (\psi_a, U(-b)\varphi) = \\ &= \int_0^a (U(t)\psi, U(-b)\varphi)\,dt = \\ &= \int_0^a (U(t+b)\psi, \varphi)\,dt = \\ &= \int_b^{a+b} (U(t)\psi, \varphi)\,dt.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|(U(b)\psi_a, \varphi) - (\psi_a, \varphi)| = \left|\int_0^b (U(t)\psi, \varphi)\,dt\right| + \left|\int_a^{a+b} (U(t)\psi, \varphi)\,dt\right| \leqslant \leqslant 2b\|\varphi\|\|\psi\|.$$

Поэтому

$$\lim_{b \to 0} (U(b)\psi_a, \varphi) = (\psi_a, \varphi),$$

так что $U(b)$ слабо и, следовательно, сильно непрерывна на множестве векторов вида $\{\psi_a \mid \psi \in \mathscr{H}\}$. Остается только показать, что это множество плотно, поскольку при помощи $\varepsilon/3$-приема тогда можно будет заключить, что $t \mapsto U(t)$ сильно непрерывно на $\mathscr{H}$. Предположим, что $\varphi \in \{\psi_a \mid \psi \in \mathscr{H}, a \in \mathbb{R}\}^\perp$, и пусть $\{\psi^{(n)}\}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Тогда для любого n

$$0 = (\psi_a^{(n)}, \varphi) = \int_0^a (U(t)\psi^{(n)}, \varphi)\,dt$$

при всех a, откуда $(U(t)\psi^{(n)}, \varphi)=0$ для всех t, кроме принадлежащих S_n—множеству нулевой меры. Выберем $t_0 \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Тогда $(U(t_0)\psi^{(n)}, \varphi)=0$ при всех n, откуда $\varphi=0$, в силу унитарности $U(t_0)$. ∎

Из доказательства самосопряженности в существенном в теореме VIII.8 непосредственно вытекает следующий критерий самосопряженности:

Теорема VIII.10. Предположим, что $U(t)$—сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа. Пусть D—плотная область, инвариантная относительно $U(t)$, на которой $U(t)$ сильно дифференцируема. Тогда произведение i^{-1} на сильную производную $U(t)$ при $t=0$ в существенном самосопряжено на D, а его замыкание—инфинитезимальный генератор $U(t)$.

Существует другая формулировка этой теоремы, достаточно важная, чтобы выделить ее в качестве самостоятельной теоремы:

Теорема VIII.11. Пусть A—самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$ и D—плотное линейное множество, содержащееся в $D(A)$. Если e^{itA}: $D \to D$ при всех t, то D—существенная область A.

Наконец, справедливо следующее обобщение теоремы Стоуна.

Теорема VIII.12. Пусть $\mathbf{t} \to U(\mathbf{t}) = U(t_1, \ldots, t_n)$—сильно непрерывное отображение $\mathbb{R}^n$ в множество унитарных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющее условиям $U(\mathbf{t}+\mathbf{s})=U(\mathbf{t})U(\mathbf{s})$ и $U(0)=I$. Пусть D—множество конечных линейных комбинаций векторов вида

$$\varphi_f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{t})\, U(\mathbf{t})\varphi\, dt, \quad \varphi \in \mathscr{H}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Тогда D—область самосопряженности в существенном для каждого из генераторов A_j однопараметрических подгрупп $U(0, \ldots, t_j, \ldots, 0)$; при этом каждый A_j отображает D в себя и все A_j коммутируют, $j=1, \ldots, n$. Более того, существует проекторнозначная мера P_Ω на $\mathbb{R}^n$, такая, что для всех $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$

$$(\varphi, U(\mathbf{t})\psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\lambda}}\, d(\varphi, P_{\boldsymbol{\lambda}}\psi).$$

Доказательство. Пусть A_j—инфинитезимальный генератор группы $U_j(t_j)=U(0, \ldots, t_j, \ldots, 0)$. Построение, использованное при доказательстве теоремы VIII.8, показывает, что $D \subset D(A_j)$, A_j: $D \to D$ и $U_j(t_j)$: $D \to D$. Из теоремы VIII.11 видно, что A_j в существенном самосопряжен на D. В силу соотношения $U(\mathbf{t}+\mathbf{s})=U(\mathbf{t})U(\mathbf{s})$, $U_j(t_j)$ коммутирует с $U_i(t_i)$ при всех t_i,

$t_j \in \mathbb{R}$. Поэтому, как вытекает из теоремы VIII.13, A_i и A_j коммутируют в смысле определения из следующего раздела, т. е. коммутируют их спектральные проекторы.

Пусть P^j_Ω—проекторнозначная мера на $\mathbb{R}$, соответствующая A_j. Определим проекторнозначную меру P_Ω на $\mathbb{R}^n$, задав ее сначала на прямоугольниках $r=(a_1, b_1)\times \ldots \times(a_n, b_n)$ формулой $P_r = P^1_{(a_1, b_1)} P^2_{(a_2, b_2)} \ldots P^n_{(a_n, b_n)}$, а затем считая P_Ω единственным расширением на наименьшую σ-алгебру, содержащую прямоугольники, а именно на борелевы множества. Отметим, что по теореме VIII.13 операторы $P^j_{\Omega_j}$ коммутируют, поскольку коммутируют группы U_j. Для любых $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ величина $(\varphi, P_\Omega\psi)$ является комплекснозначной мерой с конечной массой. Эту меру мы обозначим через $d(\varphi, P_\lambda\psi)$. Применяя теорему Фубини, легко получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\cdot\lambda} d(\varphi, P_\lambda\psi) = (\varphi, U_1(t_1) \ldots U_n(t_n)\psi) = (\varphi, U(\mathbf{t})\psi). \blacksquare$$

VIII.5. Опасности, таящиеся в формальных манипуляциях. Пример Нельсона

Теоремы, доказанные в последних двух разделах, могут создать у читателя впечатление, что неограниченные операторы очень похожи на ограниченные, и нужно лишь немного заботиться об областях определения. Но, во-первых, иногда трудно указать точную область определения самосопряженного оператора и не всегда достаточно проверить утверждения на существенной области. А, во-вторых, формальные вычисления могут вводить в заблуждение. Эти соображения мы проиллюстрируем на проблеме коммутативности и на одном удивительном примере Нельсона; тогда будет понятно, как трудно иметь дело с неограниченными операторами.

Предположим, что A и B—два неограниченных самосопряженных оператора в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Мы хотели бы придать смысл утверждению: «A и B коммутируют». Это нельзя сделать непосредственно, поскольку разность $AB-BA$ может не иметь смысла ни на одном векторе из $\mathscr{H}$. Например, может оказаться, что $(\operatorname{Ran} A) \cap D(B) = \{0\}$, и тогда BA не имеет смысла. Это наводит на мысль найти прежде всего эквивалентную формулировку свойства коммутативности ограниченных самосопряженных операторов. Спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов A и B показывает, что для них $AB-BA=0$ тогда и только тогда, когда коммутируют все их проекторы $\{P_\Omega^A\}$ и $\{P_\Omega^B\}$. Примем это в качестве определения в неограниченном случае.

Определение. Два (возможно, неограниченных) самосопряженных оператора A и B называются **коммутирующими**, если коммутируют все проекторы соответствующих им проекторнозначных мер.

Спектральная теорема показывает, что если A и B коммутируют, то коммутируют и все ограниченные борелевы функции от A и B. В частности, коммутируют резольвенты $R_\lambda(A)$ и $R_\mu(B)$ и унитарные группы e^{itA} и e^{isB}. Справедливо и обратное утверждение, и, значит, данное выше определение коммутативности разумно.

Теорема VIII.13. Пусть A и B — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:

(a) A и B коммутируют;

(b) если $\operatorname{Im}\lambda$ и $\operatorname{Im}\mu$ не равны нулю, то $R_\lambda(A)R_\mu(B) = R_\mu(B)R_\lambda(A)$;

(c) $e^{itA}e^{isB} = e^{isB}e^{itA}$ для всех $s,\ t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Тот факт, что (a) влечет за собой (b) и (c), следует из функционального исчисления. Тот факт, что (b) влечет за собой (a), легко следует из формулы, выражающей спектральные проекторы операторов A и B как сильные пределы резольвент (формула Стоуна), и равенства

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0} i\varepsilon R_{a+i\varepsilon}(A) = P^A_{\{a\}}.$$

Для доказательства того, что (c) влечет за собой (a), используем некоторые простые свойства преобразования Фурье, доказываемые в § IX.1. Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Тогда по теореме Фубини

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{itA}\varphi,\ \psi)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\,d(P_\lambda^A\varphi,\ \psi)\right)dt =$$

$$= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)\,d(P_\lambda^A\varphi,\ \psi) =$$

$$= \sqrt{2\pi}\,(\varphi,\ \hat{f}(A)\psi).$$

Итак, используя (c) и еще раз теорему Фубини, имеем

$$(\varphi,\ \hat{f}(A)\hat{g}(B)\psi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(s)(\varphi,\ e^{-itA}e^{-isB}\psi)\,ds\,dt =$$

$$= (\varphi,\ \hat{g}(B)\hat{f}(A)\psi),$$

так что $\hat{f}(A)\hat{g}(B)-\hat{g}(B)\hat{f}(A)=0$ для всех $f, g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Так как преобразование Фурье отображает $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то $f(A)g(B)=g(B)f(A)$ при любых $f, g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Но характеристическая функция $\chi_{(a,b)}$ может быть построена как поточечный предел последовательности f_n равномерно ограниченных функций из $\mathcal{S}$. В силу функционального исчисления,

$$f_n(A)\xrightarrow{s} P^A_{(a,b)}.$$

Аналогично находим равномерно ограниченные $g_n\in\mathcal{S}$, сходящиеся поточечно к $\chi_{(c,d)}$ так, что

$$g_n(B)\xrightarrow{s} P^B_{(c,d)}.$$

Поскольку f_n и g_n равномерно ограничены и

$$f_n(A)g_n(B)=g_n(B)f_n(A)$$

при любом n, мы заключаем, что $P^A_{(a,b)}$ и $P^B_{(c,d)}$ коммутируют откуда следует (а). ∎

Хотя, как показывает эта теорема, данное определение коммутативности разумно, с ним не всегда легко иметь дело. На практике A и B обычно заданы на множествах $D_0(A)$ и $D_0(B)$ самосопряженности в существенном, и может оказаться, что построить спектральные проекторы, резольвенты или группы, соответствующие $\bar{A}$ и $\bar{B}$, очень трудно. Поэтому хотелось бы иметь критерий коммутативности в терминах самих операторов. В задаче 13 читателю предлагается найти непересекающиеся области самосопряженности в существенном для операторов x и x^2 в $L^2(\mathbb{R})$. Это означает, что подобный критерий коммутативности не может давать необходимое условие, но при некоторых ограничениях можно получить достаточные условия. Вот две догадки, которые кажутся разумными, но которые *неверны*:

1. Пусть D — плотное подпространство в $\mathcal{H}$, содержащееся в областях определения A и B. Предположим далее, что $A\colon D\to D$ и $B\colon D\to D$. Тогда, если $AB\varphi-BA\varphi=0$ для любого $\varphi\in D$, то A и B коммутируют (*НЕВЕРНО!*).

2. Пусть D — плотная область самосопряженности в существенном для A и B. Предположим также, что $A\colon D\to D$ и $B\colon D\to D$. Тогда, если $AB\varphi-BA\varphi=0$ для всех $\varphi\in D$, то A коммутирует с B (*НЕВЕРНО!*).

Оба эти утверждения *неверны*, их посылки *недостаточны*, чтобы гарантировать коммутативность. Это удивительно в силу целого ряда причин. Во-первых, условия кажутся разумными. Во-вторых, D в условии (2) по предположению является областью самосопряженности в существенном как для A, так и для B, поэтому действие A и B на D должно было бы давать достаточно информации для выяснения вопроса о коммутативности A и B. Наконец, формально

$$\begin{aligned} e^{itA} &\approx I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(itA)^n}{n!}, \\ e^{isB} &\approx I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(isB)^n}{n!}. \end{aligned} \tag{VIII.6}$$

Поскольку из условий (1) и (2) следует, что $A^nB^m\varphi-B^mA^n\varphi=0$ для любых $\varphi\in D$, можно ожидать, что e^{itA} и e^{isB} коммутируют при всех s и t. По теореме VIII.13 отсюда вытекало бы, что коммутируют A и B. Недостаток этой аргументации состоит в том, что выражения (VIII.6) не более чем формальны, и, в силу неограниченности A и B, могут не иметь смысла ни на одном векторе из D. Конечные суммы имеют смысл на D и

$$\left(I+\sum_{n=1}^{N}\frac{(itA)^n}{n!}\right)\left(I+\sum_{m=1}^{M}\frac{(isB)^m}{m!}\right)\varphi=\left(I+\sum_{m=1}^{M}\frac{(isB)^m}{m!}\right)\left(I+\sum_{n=1}^{N}\frac{(itA)^n}{n!}\right)\varphi,$$

но отсюда нельзя заключить, что e^{itA} и e^{isB} коммутируют. Следующий пример принадлежит Нельсону.

Пример 1. Предположим, что M—риманова поверхность функции $\sqrt{z}$ и $\mathcal{H}=L^2(M)$ с лебеговой мерой (локально). Пусть $A=-i\partial/\partial x$ и $B=-i\partial/\partial y$ на области определения D, состоящей из всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, не содержащими нуля. Тогда

(a) A и B в существенном самосопряженны на D;
(b) $A\colon D\to D$, $B\colon D\to D$;
(c) $AB\varphi=BA\varphi$ для $\varphi\in D$;
(d) $e^{it\bar{A}}$ и $e^{is\bar{B}}$ не коммутируют.

Доказательства (b) и (c) очевидны. Для доказательства (a) отметим сначала, что интегрированием по частям можно убедиться в симметричности A и B. Пусть $D_x\subset D$—множество функций из D, носители которых не содержат оси x ни на одном из листов. Оно также плотно в $L^2(M)$. На D_x определим $(U(t)\varphi)(x,y)=\varphi(x+t,\ y)$. Тогда $U(t)$—сохраняющее норму отображение с плотной областью значений, поэтому его можно продолжить до унитарного оператора на $L^2(M)$. В силу сильной непрерывности $U(t)$ на D_x, оно сильно непрерывно и на $L^2(M)$. Далее, преобразование $U(t)$ сильно дифференцируемо на D_x, и его сильная производная, умноженная на i^{-1}, равна A. Значит, по теореме VIII.10 A в существенном самосопряжен на D_x, а следовательно, и на D (задача 14), а его замыкание порождает $U(t)$. Аналогично доказывается, что замыкание B — это инфинитезимальный генератор трансляций в направлении оси y, определенный как продолжение из области D_y. Тем самым доказано (а).

Для доказательства (d) выберем бесконечно дифференцируемую функцию φ с носителем, содержащимся в некотором малом круге с центром в точке $(-1/2, -1/2)$ на первом листе. Тогда

$$U(1)V(1)\varphi \neq V(1)U(1)\varphi,$$

поскольку функции, стоящие в разных частях этого неравенства, имеют носители около $(1/2, 1/2)$, но на разных листах. ∎

Пример 2 (канонические коммутационные соотношения). Говорят, что пара P, Q самосопряженных операторов «удовлетворяет» **каноническим коммутационным соотношениям**, если

$$PQ - QP = -iI. \tag{VIII.7}$$

Операторы P и Q не могут оба быть ограниченными, ибо если бы это было так, то из соотношения $PQ^n - Q^nP = -inQ^{n-1}$ [вытекающего непосредственно из (VIII.7)] следовало бы, что

$$n\|Q\|^{n-1} = n\|Q^{n-1}\| \leqslant 2\|P\|\|Q\|^n,$$

т. е. $2\|P\|\|Q\| \geqslant n$ при всех n, а это противоречит ограниченности. Итак, или P, или Q, или оба эти оператора одновременно должны быть неограниченными, поэтому нельзя обсуждать (VIII.7), не заботясь об областях определения. Стандартная реализация, или «представление», используемое в квантовой механике, — это **представление Шредингера**, при котором $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$, а P и Q — замыкания операторов дифференцирования $i^{-1}d/dx$ и умножения на x, заданных на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. При этом $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ — область самосопряженности в существенном для $i^{-1}d/dx$ и x,

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad x\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}),$$

и для всех $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ имеем

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx}(x\varphi) - x\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\varphi\right) = -i\varphi.$$

Вопрос в следующем: в каком смысле шредингерово представление — «единственно возможное» представление соотношения (VIII.7). Один из способов исследования (VIII.7) состоит в переходе к унитарным группам. Если $U(t) = e^{itP}$ и $V(s) = e^{isQ}$, то *формальные* вычисления, использующие (VIII.7) и формальные разложения в степенные ряды для e^{itP} и e^{isQ}, дают

$$U(t)V(s) = e^{its}V(s)U(t). \tag{VIII.8}$$

Читатель не должен удивляться тому, что две проблемы: разрешение соотношения (VIII.7) и разрешение соотношения (VIII.8), связанные формальным вычислением, — *не эквивалентны*. Рассмотрим сначала более легкую проблему (VIII.8), в которой приходится иметь дело лишь с ограниченными операторами. Если две непрерывные однопараметрические группы $U(t)$ и $V(s)$ удовлетворяют соотношениям (VIII.8), то говорят, что они удовлетворяют **соотношениям Вейля**. Читатель легко может убедиться, что в шредингеровом представлении группы e^{itP} и e^{isQ} *действительно* удовлетворяют соотношениям Вейля. Оператор e^{itP} есть не что иное, как левый сдвиг на t, а e^{isQ} — умножение на e^{isx}. Следующая теорема утверждает, что с точностью до кратности и унитарной эквивалентности соотношения Вейля имеют единственное решение (доказательство см. в гл. XIV или в задаче 30 гл. X).

Теорема VIII.14 (фон Нейман). Пусть $U(t)$ и $V(s)$ — однопараметрические непрерывные унитарные группы на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющие соотношениям Вейля. Тогда существуют такие замкнутые подпространства $\mathscr{H}_l$, что

(a) $\mathscr{H} = \bigoplus\limits_{l=1}^{N} \mathscr{H}_l$ (N — целое положительное или ∞);

(b) $U(t)$: $\mathscr{H}_l \to \mathscr{H}_l$, $V(s)$: $\mathscr{H}_l \to \mathscr{H}_l$ для всех s, $t \in \mathbb{R}$;

(c) для каждого l существует такой унитарный оператор T_l: $\mathscr{H}_l \to L^2(\mathbb{R})$, что $T_l U(t) T_l^{-1}$ — левый сдвиг на t, а $T_l V(s) T_l^{-1}$ — умножение на e^{isx}.

Следствие. Пусть $U(t)$ и $V(s)$ — непрерывные однопараметрические унитарные группы, удовлетворяющие соотношениям Вейля на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть P — генератор $U(t)$, Q — генератор $V(s)$. Тогда существует плотная область $D \subset \mathscr{H}$, такая, что

(a) P: $D \to D$, Q: $D \to D$;

(b) $PQ\varphi - QP\varphi = -i\varphi$ для всех $\varphi \in D$;

(c) P и Q в существенном самосопряженны на D.

Это следствие (простое доказательство которого предлагается в качестве задачи 36) показывает, что любое решение соотношений Вейля обладает инфинитезимальными генераторами, удовлетворяющими каноническим коммутационным соотношениям в смысле выполнения (a), (b) и (c). Обратное утверждение не верно, как показывает следующее небольшое видоизменение примера Нельсона. Пусть $\mathscr{H} = L^2(M)$, как в примере 1,

$$P = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad Q = x + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$$

на области определения D, введенной там же. Операторы P и Q обладают свойствами (a), (b) и (c). Доказательство самосопряженности подобно доказательству в примере 1. Но порождаемые ими группы не удовлетворяют соотношениям Вейля.

В этом разделе мы хотели продемонстрировать ошибочные результаты, к которым можно прийти путем формального обращения с формальным разложением e^{itA} в степенной ряд. Отсюда, однако, не следует, что при неограниченном A формальный ряд для e^{itA} ничего не дает. Действительно, предположим, что A — неограниченный самосопряженный оператор, а P_Ω — соответствующая проекторнозначная мера. Тогда множество D_c векторов вида $P_{[-M,\, M]}\varphi$, где $\varphi \in \mathscr{H}$, а M — произвольное, но конечное число, плотно и содержится в $D(A^n)$ при всех n, а оператор A в существенном самосопряжен на D_c. Более того, если $\psi = P_{[-M,\, M]}\varphi$, то $\|A^n\psi\| \leqslant M^n \|\psi\|$, так что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A^n\psi\|}{n!} < \infty \qquad \text{(VIII.9)}$$

для всех t. Поэтому, если $\psi \in D_c$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (it)^n A^n\psi/n!$ сходится. Векторы $\psi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$, удовлетворяющие (VIII.9) при некотором $t > 0$, называются **аналитическими векторами** оператора A. На таких векторах степенной ряд для $e^{itA}\psi$ имеет смысл и сходится к $e^{itA}\psi$ при достаточно малых t. Мы вернемся к аналитическим векторам в § X.4, где доказывается теорема Нельсона о том, что если симметрический оператор A имеет плотное множество аналитических векторов в своей области определения D, то он в существенном самосопряжен.

VIII.6. Квадратичные формы

Одно из следствий леммы Рисса состоит в том, что существует взаимно однозначное соответствие между ограниченными квадратичными формами и ограниченными операторами: любое полуторалинейное отображение q: $\mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее условию $|q(\varphi, \psi)| \leqslant M \|\varphi\| \|\psi\|$, имеет вид $q(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ для некоторого ограниченного оператора A. Как и следовало ожидать, после отказа от условия ограниченности ситуация усложняется. В этом разделе мы вкратце рассмотрим связь между неограниченными формами и неограниченными операторами.

Определение. **Квадратичная форма** есть отображение q: $Q(q) \times Q(q) \to \mathbb{C}$, где $Q(q)$ — плотное линейное подмножество в $\mathscr{H}$, называемое **областью определения формы**, такое, что $q(\cdot, \psi)$ сопряженно-линейно, а $q(\varphi, \cdot)$ линейно при $\varphi, \psi \in Q(q)$. Если $q(\varphi, \psi)=\overline{q(\psi, \varphi)}$, то мы называем форму q **симметрической**. Если $q(\varphi, \varphi)\geqslant 0$ для всех $\varphi\in Q(q)$, то q называется **положительной формой**, а если $q(\varphi, \varphi)\geqslant -M\|\varphi\|^2$ для некоторого M, то мы говорим, что форма q **полуограничена**.

Отметим, что на комплексном $\mathcal{H}$ полуограниченная форма q автоматически симметрична.

Пример 1. Пусть $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$, $Q(q)=C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $q(f, g)=\bar{f}(0)g(0)$. Тогда q — положительная квадратичная форма. Поскольку $q(f, g)=\delta(\bar{f}g)$, то можно *формально* записать $q(f, g)=(f, Ag)$, где A: $g\mapsto\delta(x)g(x)$. Так как умножение на $\delta(x)$ не является оператором, то q дает пример квадратичной формы, которой, по всей видимости, не соответствует никакой оператор.

Пример 2. Пусть A — самосопряженный оператор на $\mathcal{H}$. Перейдем к его спектральному представлению, так чтобы A стал оператором умножения на x в пространстве $\bigoplus\limits_{n=1}^{N}L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$. Пусть

$$Q(q)=\left\{\{\psi_n(x)\}_{n=1}^N \;\middle|\; \sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}|x||\psi_n(x)|^2\,d\mu_n<\infty\right\}$$

и для всех $\psi, \varphi\in Q(q)$ положим

$$q(\varphi, \psi)=\sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}x\overline{\varphi_n(x)}\,\psi_n(x)\,d\mu_n.$$

Мы называем q **квадратичной формой, порожденной оператором** A, и пишем $Q(q)=Q(A)$; $Q(A)$ называется **областью определения формы, порожденной оператором** A. Для $\psi, \varphi\in Q(A)$ мы часто будем писать $q(\varphi, \psi)=(\varphi, A\psi)$, хотя A определен не на всех $\psi\in Q(A)$. В некотором смысле $Q(A)$ — наибольшая область, на которой может быть определена форма q.

Чтобы исследовать глубокую связь между самосопряженностью и полуограниченностью квадратичных форм, необходимо распространить на формы понятие «замкнутости». Оператор A замкнут тогда и только тогда, когда замкнут его график, т. е. $D(A)$ полно относительно нормы $\|\psi\|_A=\|A\psi\|+\|\psi\|$ (задача 15). По аналогии введем

Определение. Пусть q — полуограниченная квадратичная форма, $q(\psi, \psi)\geqslant -M\|\psi\|^2$. Форма q называется **замкнутой**, если $Q(q)$ полно относительно нормы

$$\|\psi\|_{+1}=\sqrt{q(\psi, \psi)+(M+1)\|\psi\|^2}.$$

Если q замкнута и $D \subset Q(q)$ плотна в $Q(q)$ по норме $\|\cdot\|_{+1}$, то D называется **существенной областью формы** q.

Отметим, что $\|\psi\|_{+1}$ порождается внутренним произведением

$$(\psi, \varphi)_{+1} = q(\psi, \varphi) + (M+1)(\psi, \varphi).$$

Нетрудно видеть (задача 15), что q замкнута тогда и только тогда, когда из $\varphi_n \in Q(q)$, $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{H}} \varphi$ и $q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$ следует: $\varphi \in Q(q)$ и $q(\varphi_n - \varphi, \varphi_n - \varphi) \to 0$. Этот критерий и теорема о мажорированной сходимости показывают, что форма q, порождаемая полуограниченным самосопряженным оператором (пример 2), замкнута. Более того, любая существенная область оператора A является существенной областью формы q (задача 16).

Пусть теперь $q(f, g) = \bar{f}(0) g(0)$, как в примере 1, и φ_n—функции из C_0^∞, показанные на рис. VIII.2. Тогда $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{H}} 0$ и $q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) \to 0$, но $q(\varphi_n, \varphi_n) \to 1 \neq q(0, 0)$, что доказывает

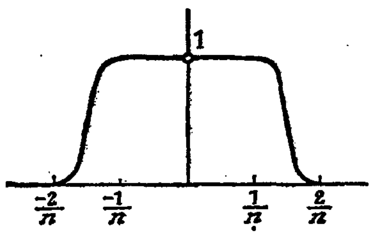

Рис. VIII.2. График φ_n.

отсутствие замкнутых расширений для q. Поэтому, хотя q положительна (и потому симметрична), не существует такого полуограниченного самосопряженного оператора A, что $q(f, g) = (f, Ag)$ для всех $f, g \in C_0^\infty$.

Важным свойством полуограниченных квадратичных форм является то, что *в отличие* от операторов они не могут быть замкнутыми и симметрическими, но не самосопряженными.

Теорема VIII.15. Всякая замкнутая полуограниченная квадратичная форма q порождается некоторым однозначно определенным самосопряженным оператором.

Доказательство. Не теряя общности, можно предположить, что q положительна. Тогда, так как q замкнута и симметрична, то $Q(q)$—гильбертово пространство (обозначим его через $\mathscr{H}_{+1}$) с внутренним произведением

$$(\varphi, \psi)_{+1} = q(\varphi, \psi) + (\varphi, \psi).$$

Обозначим через $\mathscr{H}_{-1}$ пространство ограниченных сопряженно-линейных функционалов на $\mathscr{H}_{+1}$. Пусть j: $\psi \mapsto (\cdot, \psi)$ — линейное вложение $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}_{-1}$. Тогда $j(\psi)$ ограничено, так как

$$|[j(\psi)](\varphi)| \leqslant \|\varphi\| \|\psi\| \leqslant \|\varphi\|_{+1} \|\psi\|.$$

Поскольку тождественное отображение i вкладывает $\mathscr{H}_{+1}$ в $\mathscr{H}$, мы имеем «шкалу пространств»

$$\mathscr{H}_{+1} \xrightarrow{i} \mathscr{H} \xrightarrow{j} \mathscr{H}_{-1}.$$

Используем теперь лемму Рисса. Пусть $\Phi \in \mathscr{H}_{+1}$. Обозначим через $\hat{B}\Phi$ элемент из $\mathscr{H}_{-1}$, заданный соотношением

$$[\hat{B}\Phi](\varphi) = q(\varphi, \Phi) + (\varphi, \Phi).$$

По лемме Рисса $\hat{B}$ — изометрический изоморфизм между $\mathscr{H}_{+1}$ и $\mathscr{H}_{-1}$. Пусть $D(B) = \{\psi \in \mathscr{H}_{+1} \mid \hat{B}\psi \in \operatorname{Ran} j\}$. Определим B на $D(B)$, полагая $B = j^{-1}\hat{B}$. Имеем

$$\mathscr{H} \supset \mathscr{H}_{+1} \xrightarrow{\hat{B}} \mathscr{H}_{-1} \xleftarrow{j} \mathscr{H}.$$

Докажем сначала, что область значений j плотна в $\mathscr{H}_{-1}$. Если бы это было не так, то существовал бы такой $\lambda \in \mathscr{H}^*_{-1}$, что $\lambda \neq 0$ и $\lambda[j(\psi)] = 0$ для любого $\psi \in \mathscr{H}$. Тогда по лемме Рисса существует такой вектор $\varphi_\lambda \neq 0$ в $\mathscr{H}_{+1}$, что $0 = \lambda[j(\psi)] = [j(\psi)](\varphi_\lambda) = (\varphi_\lambda, \psi)$ для всех $\psi \in \mathscr{H}$. Так как $\varphi_\lambda \neq 0$, то мы пришли к противоречию. Следовательно, область $\operatorname{Ran} j$ плотна в $\mathscr{H}_{-1}$. Поскольку B — изометрический изоморфизм, то $D(B)$ плотна в $\mathscr{H}_{+1}$ по норме $\|\cdot\|_{+1}$. Далее, так как $\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_{+1}$ и $\mathscr{H}_{+1}$ плотно по норме в $\mathscr{H}$, то и $D(B)$ плотна в $\mathscr{H}$ по его норме.

Предположим, что $\varphi, \psi \in D(B)$. Тогда

$$\begin{aligned}(\varphi, B\psi) &= q(\varphi, \psi) + (\varphi, \psi) = \\ &= \overline{q(\psi, \varphi) + (\psi, \varphi)} = \\ &= \overline{(\psi, B\varphi)} = (B\varphi, \psi).\end{aligned}$$

Итак, B — плотно определенный симметрический оператор.

Докажем самосопряженность B. Пусть $C = \hat{B}^{-1}j$; C отображает $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, всюду определен и симметричен. По теореме Хеллингера — Теплица C — ограниченный самосопряженный оператор. Более того, он инъективен. Простое применение спектральной теоремы в терминах оператора умножения показывает, что C^{-1}: $\operatorname{Ran} C \to \mathscr{H}$ — самосопряженный оператор. Но $C^{-1} = B$.

Введем теперь $A = B - I$. Тогда A тоже самосопряжен на $D(A) = D(B)$ и $(\varphi, A\psi) = q(\varphi, \psi)$ для $\varphi, \psi \in D(A)$. Так как $D(A)$ $\|\cdot\|_{+1}$-плотна в $\mathscr{H}_{+1}$, то q — квадратичная форма, порождаемая оператором A. Доказательство единственности мы оставляем в качестве задачи. ∎

Итак, имеется интересное различие между полуограниченными симметрическими операторами и полуограниченными квадратичными формами. Для симметрических операторов нахождение замкнутых расширений не составляет проблемы. Всегда существует наименьшее замкнутое расширение (второй сопряженный оператор), но возможно, что ни одно из замкнутых расширений не самосопряженно. С другой стороны, полуограниченные формы не обязательно имеют замкнутые расширения, но если такие расширения существуют и полуограничены, то они порождаются самосопряженными операторами.

Читателя подстерегают несколько ловушек.

(1) Если A и B — самосопряженные операторы и $D(A) \subset D(B)$, причем $B \restriction D(A) = A$, то $A = B$. Однако может оказаться, что a и b — замкнутые полуограниченные квадратичные формы и $b \restriction Q(a) \times Q(a) = a$, но $a \neq b$.

(2) Пусть A — симметрический полуограниченный оператор. Пусть q — квадратичная форма $q(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$, причем $Q(q) = D(A)$. Предположим, что q имеет замыкание (это всегда так, см. § X.3) $\hat{q}$, т. е. наименьшую замкнутую форму, расширяющую q. Тогда самосопряженный оператор $\hat{A}$, порождающий $\hat{q}$ (по теореме VIII.15), может быть шире, чем операторное замыкание A, т. е. $\hat{A} \supset \overline{A}$ и $\hat{A} \neq \overline{A}$.

(3) Хотя общая квадратичная форма может не иметь замкнутых расширений, формы, порождаемые полуограниченными операторами, всегда имеют замыкания, а, следовательно, полуограниченные операторы всегда имеют самосопряженные расширения (см. § X.3).

Следующий пример демонстрирует первые два из этих явлений.

Пример 3. Пусть $AC^2[0, 1]$ обозначает множество функций $f \in L^2[0, 1]$, таких, что f дифференцируема, f' абсолютно непрерывна и $f'' \in L^2[0, 1]$. Положим

$$D_0 = \{f \mid f \in AC^2[0, 1],\ f(0) = f(1) = 0 = f'(0) = f'(1)\},$$
$$D_{a,b} = \{f \mid f \in AC^2[0, 1],\ af(0) + f'(0) = 0 = bf(1) + f'(1)\},$$
$$D_{\infty,\infty} = \{f \mid f \in AC^2[0, 1],\ f(0) = 0 = f(1)\},$$
$$D = \{f \mid f \in AC^2[0, 1]\},$$

и пусть T_0, $T_{a,b}$, $T_{\infty,\infty}$ и T — операция $-d^2/dx^2$ с областями определения соответственно D_0, $D_{a,b}$, $D_{\infty,\infty}$ и D. Тогда

(a) Операторы T_0, $T_{a,b}$, $T_{\infty,\infty}$ и T замкнуты. Оператор T_0 симметричен, но не самосопряжен; его сопряженный есть T.

(b) $T_{a,b}$ $(-\infty < a < \infty,\ -\infty < b < \infty)$ и $T_{\infty,\infty}$ суть различные самосопряженные расширения T_0 (но есть и другие!).

(c) Если $t_0(\varphi, \psi) = (\varphi, T_0\psi)$ для $\varphi, \psi \in D_0$, то форма t_0 имеет наименьшее замкнутое расширение t_0. Это расширение — форма, порождаемая оператором $T_{\infty, \infty}$, что иллюстрирует замечание (2).

(d) Форма $t_{a,b}$, порождаемая $T_{a,b}$, имеет область определения $Q(t_{a,b})$, содержащую область определения $Q(t_{\infty,\infty})$ формы $t_{\infty,\infty}$, порождаемой $T_{\infty,\infty}$, и $t_{a,b} \restriction Q(t_{\infty,\infty}) = t_{\infty,\infty}$. Это иллюстрирует замечание (1).

Распространим, наконец, некоторые из этих идей на несимметрические формы. Термины «секториальная» и «аккретивная» используются ниже не совсем в стандартном смысле (см. Замечания).

Определение. Квадратичная форма q называется **строго** $\mathfrak{m}$**-аккретивной**, если

(i) q замкнута в том смысле, что если $\varphi_n \in Q(q)$, $\varphi_n \to \varphi$ и

$$\lim_{n, m \to \infty} q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = 0,$$

то $\varphi \in Q(q)$ и $q(\varphi_n - \varphi, \varphi_n - \varphi) \to 0$;

(ii) существует такое θ, $0 < \theta < \pi/2$, что $|\arg[q(\varphi, \varphi)]| \leqslant \theta$ для всех $\varphi \in Q(q)$.

Предположим теперь, что q строго $\mathfrak{m}$-аккретивна. Определим новую квадратичную форму R_q формулой

$$R_q(\varphi, \psi) = \frac{1}{4}\Big\{\mathrm{Re}[q(\varphi+\psi, \varphi+\psi)] - \mathrm{Re}[q(\varphi-\psi, \varphi-\psi)] + \\ + \frac{1}{i}\mathrm{Re}[q(\varphi+i\psi, \varphi+i\psi)] - \frac{1}{i}\mathrm{Re}[q(\varphi-i\psi, \varphi-i\psi)]\Big\}.$$

Отметим, что $R_q(\varphi, \varphi) = \mathrm{Re}[q(\varphi, \varphi)]$, так что R_q — замкнутая положительная форма. Ее можно использовать теперь для построения шкалы пространств $\mathscr{H}_{+1} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_{-1}$, как при доказательстве теоремы VIII.15, и для нахождения отображения $\hat{T}$: $\mathscr{H}_{+1} \to \mathscr{H}_{-1}$, такого, что $[\hat{T}\Phi](\varphi) = \overline{q(\Phi, \varphi)}$. При помощи доказательства теоремы VIII.15, выбирая T как подходящее сужение $\hat{T}$, можно получить следующую теорему:

Теорема VIII.16. Пусть q — строго $\mathfrak{m}$-аккретивная квадратичная форма. Тогда существует единственный оператор T в $\mathscr{H}$, такой, что

(a) T замкнут;

(b) $D(T) \subset Q(q)$, и если $\varphi, \psi \in D(T)$, то $q(\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi)$; при этом $D(T)$ — существенная область формы q;

(c) $D(T^*) \subset Q(q)$, и если $\varphi, \psi \in D(T^*)$, то $q(\varphi, \psi) = (T^*\varphi, \psi)$. Кроме того, $D(T^*)$ — существенная область формы q.

Единственный оператор T, определенный предыдущей теоремой, называется **оператором, порождающим форму** q. Естественно, T называется **строго m-аккретивным оператором**. Спектральные свойства таких операторов определяются свойствами порождаемых ими форм.

Лемма. Пусть T — строго m-аккретивный оператор. Тогда любое λ, такое, что $\operatorname{Re}\lambda < 0$, лежит в $\rho(T)$ и $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leqslant (-\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\lambda = \mu + i\nu$ и $\mu < 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda)\varphi\|^2 &= ((T-\lambda)\varphi, (T-\lambda)\varphi) = \\ &= (\|T\varphi\|^2 - 2\nu \operatorname{Im}(\varphi, T\varphi) + \nu^2\|\varphi\|^2) - \\ &\qquad - 2\mu \operatorname{Re}(\varphi, T\varphi) + \mu^2\|\varphi\|^2 \geqslant \\ &\geqslant \mu^2\|\varphi\|^2,\end{aligned}$$

так как $\operatorname{Re}(\varphi, T\varphi) \geqslant 0$ и

$$\begin{aligned}\|T\varphi\|^2 - 2\nu \operatorname{Im}(\varphi, T\varphi) + \nu^2\|\varphi\|^2 &\geqslant \\ \geqslant \|T\varphi\|^2 - 2|\nu|\,\|T\varphi\|\,\|\varphi\| + \nu^2\|\varphi\|^2 &\geqslant 0.\end{aligned}$$

В результате получаем, что $T-\lambda$ инъективно и $\operatorname{Ran}(T-\lambda)$ замкнута. Аналогично,

$$\|(T-\lambda)^*\varphi\| \geqslant \mu^2\|\varphi\|^2,$$

так что $(\operatorname{Ran}(T-\lambda))^{\perp} = \operatorname{Ker}(T-\lambda)^* = 0$. Итак, $T-\lambda$ обратим и

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leqslant (-\mu)^{-1}. \blacksquare$$

Прежде чем сформулировать теорему, несколько обобщающую эту лемму, расширим понятие аккретивности.

Определение. Форма q называется **строго m-секториальной**, если существуют комплексные числа z и $e^{i\alpha}$, где α вещественно, такие, что $e^{i\alpha}q + z$ строго m-аккретивна. Оператор T, порождающий q, также называется **строго m-секториальным.**

Отметим, что если q строго m-секториальна, то значения $q(\varphi, \varphi)$ лежат в секторе

$$S_q = \{\omega \mid \theta_0 \leqslant \arg(\omega - z) \leqslant \theta_1, \text{ где } |\theta_1 - \theta_0| < \pi\};$$

S_q называется **сектором формы** q.

Теорема VIII.17. Пусть q — строго m-секториальная форма, S_q — сектор q и T — порождающий оператор. Если $\lambda \notin S_q$, то $\lambda \in \rho(T)$ и $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leqslant [\operatorname{dist}(\lambda, S_q)]^{-1}$.

Идея доказательства состоит в том, чтобы сдвинуть и повернуть S_q так, чтобы расстояние $\operatorname{dist}(\lambda, S_q)$ было сколь угодно близко к вещественной части сдвига λ (рис. VIII.3).

Пример 4. Пусть H_0 и V — положительные самосопряженные операторы, такие, что область $Q(h)=Q(H_0)\cap Q(V)$ плотна. Для заданного $\beta\in\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0)$ положим $h(\varphi, \psi)=(\varphi, H_0\psi)+$ $+\beta(\varphi, V\psi)$. Тогда h — замкнутая и строго m-секториальная форма, так что для получения сведений об $H=H_0+\beta V$ можно использовать теорему VIII.17.

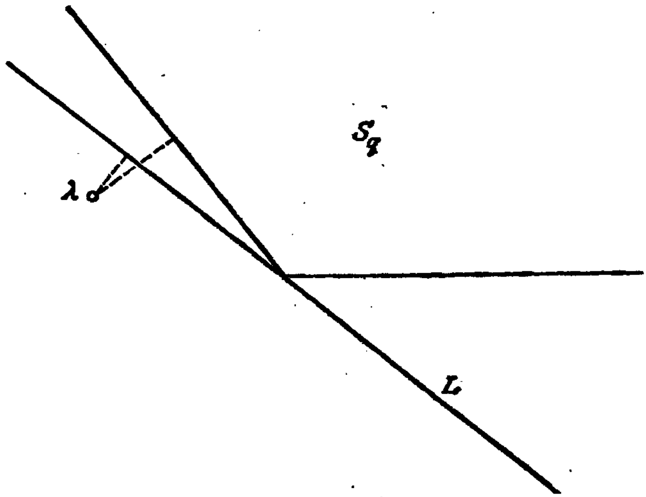

Рис. VIII.3.

Ранее символ $A+B$ понимался как операторная сумма, определенная на $D(A)\cap D(B)$, или, быть может, ее операторное замыкание. В примере 4 плюс в $H_0+\beta V$ означает оператор, порождающий сумму *форм*, определенную на $Q(H_0)\cap Q(V)$. В дальнейшем, в тех случаях когда не может возникнуть путаницы, мы будем писать $A+B$, не поясняя явно смысл знака $+$.

VIII.7. Сходимость неограниченных операторов

Одна из основных трудностей, связанных с неограниченными операторами, состоит в том, что они заданы не всюду, а лишь на плотном множестве. Эта трудность особенно заметна, когда нужно ввести понятие сходимости для последовательности $A_n\to A$ неограниченных операторов, поскольку общая часть областей определения операторов A_n может состоять из одного нуля. Например, если $A_n=(1-1/n)x$ на $L^2(\mathbb{R})$, то ясно, что в каком-то смысле $A_n\to A=x$, однако в качестве областей определения $D(A_n)$ и $D(A)$ могут быть заданы области самосопряженности в существенном для этих операторов, а они не имеют ненулевых общих векторов (задача 19). Конечно, в этом простом случае одну и ту же область определения имеют замыкания A_n и A, но, вообще говоря, это не так, и вдобавок часто приходится иметь дело с областями самосопряженности в существенном, поскольку замыкания операторов иногда трудно вычислить. Вполне естественно считать самосопряженные операторы «близкими», если «близки» некоторые ограниченные функции от них. Большая часть этого раздела посвящена такому подходу. Кроме того, мы введем граф-пределы—понятие, разрабатываемое в дальнейшем в § X.8.

Определение. Пусть A_n, $n=1, 2, \ldots$, и A—самосопряженные операторы. Говорят, что A_n сходятся к A **в смысле равномерной резольвентной сходимости** (или **обобщенной равномерной сходимости**, или **обобщенной сходимости по норме**), если $R_\lambda(A_n) \to R_\lambda(A)$ равномерно при всех λ, для которых $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Говорят, что A_n сходится к A в смысле **сильной резольвентной сходимости** (или **обобщенной сильной сходимости**), если $R_\lambda(A_n) \to$ $\to R_\lambda(A)$ сильно при всех λ, для которых $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

Мы не вводим понятие слабой резольвентной сходимости, поскольку слабая резольвентная сходимость влечет за собой сильную резольвентную сходимость (задача 20). Следующая теорема показывает, что равномерная резольвентная сходимость — разумное обобщение равномерной сходимости для ограниченных самосопряженных операторов. Такой же результат имеет место и для сильной резольвентной сходимости (см. задачу 28), однако аналогичное утверждение для слабой сходимости неверно (задача 30).

Теорема VIII.18. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A—семейство равномерно ограниченных самосопряженных операторов. Тогда $A_n \to A$ в смысле равномерной резольвентной сходимости в том и только том случае, когда $A_n \to A$ равномерно.

Доказательство. Пусть $A_n \to A$ по норме. Тогда если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то $(A_n - A)(A-\lambda)^{-1} \to 0$ равномерно. Поскольку

$$(A_n-\lambda)^{-1} = (A-\lambda)^{-1}(I+(A_n-A)(A-\lambda)^{-1})^{-1},$$

находим, что $(A_n-\lambda)^{-1} \to (A-\lambda)^{-1}$ по норме.

Обратно, предположим, что $A_n \to A$ в смысле равномерной резольвентной сходимости. Тогда, так как

$$A_n - A = (A_n - i)\,[(A-i)^{-1} - (A_n - i)^{-1}]\,(A-i)$$

и $\sup\|A_n\| < \infty$, заключаем, что

$$\|A_n - A\| \leqslant (\sup\|A_n\|+1)\,\|(A-i)^{-1}-(A_n-i)^{-1}\|\,(\|A\|+1) \to$$
$$\to 0 \text{ при } n\to\infty. \ \blacksquare$$

Следующая теорема показывает, что для доказательства обобщенной сходимости достаточно убедиться в сходимости резольвент лишь в какой-либо одной точке вне вещественной оси.

Теорема VIII.19. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A—самосопряженные операторы, и пусть λ_0—точка из $\mathbb{C}$.

(а) Если $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$ и $\|R_{\lambda_0}(A_n)-R_{\lambda_0}(A)\| \to 0$, то $A_n \to A$ в смысле равномерной резольвентной сходимости.

(b) Если $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$ и если $R_{\lambda_0}(A_n)\varphi - R_{\lambda_0}(A)\varphi \to 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{H}$, то $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле.

Доказательство. (а) Как $R_\lambda(A)$, так и $R_\lambda(A_n)$ аналитичны в полуплоскости, содержащей λ_0, и разлагаются в степенные ряды вокруг λ_0:

$$R_\lambda(A) = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0-\lambda)^m [R_{\lambda_0}(A)]^{m+1},$$

$$R_\lambda(A_n) = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0-\lambda)^m [R_{\lambda_0}(A_n)]^{m+1},$$

сходящиеся по норме в круге $|\lambda-\lambda_0| < |\operatorname{Im}\lambda_0|^{-1}$. Так как $R_{\lambda_0}(A_n) \to R_{\lambda_0}(A)$ равномерно, то $R_\lambda(A_n) \to R_\lambda(A)$ равномерно для λ из этого круга. Следовательно, повторяя этот процесс, мы получаем сходимость для всех λ в полуплоскости, содержащей λ_0. Далее, так как

$$\begin{aligned}\|R_{\bar\lambda_0}(A_n)-R_{\bar\lambda_0}(A)\| &= \|(R_{\lambda_0}(A_n)-R_{\lambda_0}(A))^*\| = \\ &= \|R_{\lambda_0}(A_n)-R_{\lambda_0}(A)\| \to \\ &\to 0 \text{ при } n\to\infty,\end{aligned}$$

те же рассуждения показывают, что резольвенты сходятся по норме в полуплоскости, содержащей $\bar\lambda_0$.

(b) Доказательство то же, что и для (а), за исключением двух моментов. Во-первых, рассматриваются *векторнозначные* функции $R_\lambda(A_n)\varphi$ и $R_\lambda(A)\varphi$. Во-вторых, поскольку отображение $T \to T^*$ не является непрерывным в сильной топологии, необходимо специальное обоснование для перехода из одной полуплоскости в другую. Предположим, что λ_0 лежит в нижней полуплоскости. Тогда, как и в (а), получаем сходимость всюду в нижней полуплоскости и, в частности, при $\lambda=-i$. На основе равенства

$$\begin{aligned}&(A_n-i)^{-1}-(A-i)^{-1} = \\ &\quad = [(A_n+i)(A_n-i)^{-1}][(A_n+i)^{-1}-(A+i)^{-1}][(A+i)(A-i)^{-1}],\end{aligned}$$

которое получается путем элементарных вычислений, можно доказать сильную сходимость $(A_n-i)^{-1}$ к $(A-i)^{-1}$. А тогда приведенное выше рассуждение показывает, что $R_\lambda(A_n)$ сильно сходится к $R_\lambda(A)$ всюду в верхней полуплоскости. ∎

Иные способы доказательства того, что из сильной сходимости $R_\lambda(A_n) \xrightarrow{s} R_\lambda(A)$ в одной полуплоскости следует сильная сходимость в другой полуплоскости, приведены в теореме VIII.26 и задаче 20b.

Исследуем некоторые свойства обобщенной сходимости. Во-первых, мы выясним, как резольвентная сходимость связана со сходимостью других ограниченных функций от A_n и A. Во-вторых, изучим связь между спектрами A_n и спектром A, если $A_n \to A$ в обобщенном смысле. Наконец, сформулируем непосредственно в терминах операторов A_n, A условие, достаточное, чтобы гарантировать обобщенную сходимость A_n к A.

Теорема VIII.20. Пусть A_n и A — самосопряженные операторы.

(a) Если $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле и f — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, исчезающая на ∞, то $\|f(A_n) - f(A)\| \to 0$.

(b) Если $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле и f — ограниченная функция на $\mathbb{R}$, то $f(A_n)\varphi \to f(A)\varphi$ для всех $\varphi \in \mathscr{H}$.

Доказательство. По теореме Стоуна — Вейерштрасса полиномы по $(x+i)^{-1}$ и $(x-i)^{-1}$ плотны в $C_\infty(\mathbb{R})$ — множестве непрерывных функций, исчезающих на бесконечности. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такой полином $P(s, t)$, что

$$\|f(x) - P((x+i)^{-1}, (x-i)^{-1})\|_\infty \leqslant \varepsilon/3.$$

Поэтому

$$\|f(A_n) - P((A_n+i)^{-1}, (A_n-i)^{-1})\| \leqslant \varepsilon/3$$

и

$$\|f(A) - P((A+i)^{-1}, (A-i)^{-1})\| \leqslant \varepsilon/3.$$

Если $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле, то

$$P((A_n+i)^{-1}, (A_n-i)^{-1}) \to P((A+i)^{-1}, (A-i)^{-1})$$

по норме при $n \to \infty$, а, следовательно, $\|f(A_n) - f(A)\| \leqslant \varepsilon$ для достаточно больших n. Это доказывает (a).

Чтобы доказать (b), отметим сначала, что точно так же, как выше, можно показать, что если $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле и $h \in C_\infty(\mathbb{R})$, то $h(A_n)\varphi \to h(A)\varphi$. Пусть заданы $\psi \in \mathscr{H}$ и $\varepsilon > 0$; положим $g_m(x) = \exp(-x^2/m)$. Так как $g_m(x) \uparrow 1$ поточечно, то $g_m(A)\psi \to \psi$ по теореме VIII.5, следовательно, можно найти такое m, что $\|g_m(A)\psi - \psi\| \leqslant \varepsilon(6\|f\|_\infty)^{-1}$. Более того, так как $g_m \in C_\infty(\mathbb{R})$, то $g_m(A_n)\psi \to g_m(A)\psi$ по сделанному выше замечанию, и можно найти такое N_0, что при $n \geqslant N_0$

имеем $\|g_m(A_n)\psi - g_m(A)\psi\| \leqslant \varepsilon(6\|f\|_\infty)^{-1}$. Следовательно, если $n \geqslant N_0$, то

$$\|g_m(A_n)\psi - \psi\| \leqslant \varepsilon(3\|f\|_\infty)^{-1}.$$

Поскольку fg_m непрерывна и стремится к нулю на ∞, то существует такое N_1, что при $n \geqslant N_1$

$$\|f(A_n)g_m(A_n)\psi - f(A)g_m(A)\psi\| \leqslant \varepsilon/3.$$

Пусть $N = \max\{N_0, N_1\}$. Тогда при $n \geqslant N$

$$\begin{aligned}\|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| \leqslant \|f(A_n)g_m(A_n)\psi - f(A)g_m(A)\psi\| + \\ + \|f(A_n)\|\|g_m(A_n)\psi - \psi\| + \\ + \|f(A)\|\|g_m(A)\psi - \psi\| \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

В силу произвольности ψ и ε, это доказывает (b). ∎

Применим часть (a) к случаю, когда $\{A_n\}$ и A — положительные самосопряженные операторы. Тогда если $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле, то e^{-tA_n} сходится равномерно к e^{-tA} при любом положительном t. Часть (a) не распространяется на все пространство $C(\mathbb{R})$. В самом деле, в $L^2(\mathbb{R})$ операторы $A_n = (1-1/n)x$ сходятся к оператору $A = x$ в равномерном резольвентном смысле, но $\|e^{iA_n} - e^{iA}\| = 2$ при всех n.

Очень важным приложением части (b) является следующая

Теорема VIII.21 (Троттер). Пусть $\{A_n\}$ и A — самосопряженные операторы. Тогда $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле в том и только в том случае, когда e^{itA_n} сильно сходится к e^{itA} при всех t.

Доказательство. Поскольку e^{itx} — ограниченная непрерывная функция от x, из теоремы VIII.20 следует, что если $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле, то $e^{itA_n} \to e^{itA}$ сильно при любом t.

Для доказательства обратного утверждения выведем сначала одну полезную формулу для резольвенты самосопряженного оператора A. Предположим, что $\operatorname{Im}\mu < 0$. Тогда в соответствии с функциональным исчислением

$$(\psi,\ R_\mu(A)\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right)d(\psi,\ P_\lambda\varphi)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(i\int_0^{\infty}e^{-it\mu}e^{it\lambda}\,dt\right)d(\psi,\ P_\lambda\varphi)=$$
$$=i\int_0^{\infty}e^{-it\mu}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,d(\psi,\ P_\lambda\varphi)\right)dt=$$
$$=i\int_0^{\infty}e^{-it\mu}(\psi,\ e^{itA}\varphi)\,dt=$$
$$=\left(\psi,\ i\int_0^{\infty}e^{-it\mu}e^{itA}\varphi\,dt\right).$$

Следовательно,

$$R_\mu(A)\varphi=i\int_0^{\infty}e^{-it\mu}e^{itA}\varphi\,dt, \tag{VIII.9}$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Третий шаг вычислений основан на теореме Фубини. Применяя (VIII.9) к операторам A_n и A, имеем

$$\|R_\mu(A_n)\varphi-R_\mu(A)\varphi\|\leqslant\int_0^{\infty}e^{(\mathrm{Im}\,\mu)\,t}\|e^{itA_n}\varphi-e^{itA}\varphi\|\,dt,$$

так что если $e^{itA_n}\varphi\to e^{itA}\varphi$ при всех t, то

$$\|R_\mu(A_n)\varphi-R_\mu(A)\varphi\|\to 0$$

по теореме о мажорированной сходимости. Используя формулу, аналогичную (VIII.9), тем же способом находим, что

$$\|R_\mu(A_n)\varphi-R_\mu(A)\varphi\|\to 0 \text{ при } \mathrm{Im}\,\mu>0. \ \blacksquare$$

Отметим, что (задача 21) если $A_n\to A$ в сильном резольвентном смысле, то $e^{itA_n}\varphi\to e^{itA}\varphi$ при каждом φ *равномерно* по t в любом конечном интервале. Теперь будет доказана родственная предыдущей

Теорема VIII.22 (Троттер—Като). Пусть A_n—последовательность самосопряженных операторов. Предположим, что существуют такие точки λ_0 в верхней полуплоскости и μ_0 в нижней, что $R_{\lambda_0}(A_n)\varphi$ и $R_{\mu_0}(A_n)\varphi$ сходятся для каждого $\varphi\in\mathcal{H}$. Предположим далее, что один из предельных операторов T_{λ_0} или

T_{μ_0} имеет плотную область значений. Тогда существует самосопряженный оператор A, такой, что $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле.

Доказательство. Поскольку $\| R_{\lambda_0}(A_n) \| \leqslant |\operatorname{Im} \lambda_0|^{-1}$, имеем $\| T_{\lambda_0} \| \leqslant |\operatorname{Im} \lambda_0|^{-1}$, а тогда

$$T_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (T_{\lambda_0})^{n+1}$$

корректно определен при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant |\operatorname{Im} \lambda_0|^{-1}$.

Более того, так как $R_{\lambda_0}(A_n)\varphi \to T_{\lambda_0}\varphi$, то $R_\lambda(A_n)\varphi \to T_\lambda\varphi$ в этом же круге. Продолжая таким же образом, можно определить аналитическую операторнозначную функцию T_λ в полуплоскости, содержащей λ_0, которая есть сильный предел $R_\lambda(A_n)$. Но полуплоскость односвязна, поэтому значение T_λ в точке λ не зависит от выбранного пути от λ_0 к λ. То же построение для полуплоскости, содержащей μ_0, показывает, что можно расширить определение T_λ на эту полуплоскость так, чтобы

$$T_\lambda \varphi = \lim_{n \to \infty} R_\lambda(A_n)\varphi \text{ при всех } \lambda, \text{ для которых } \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$

Такие T_λ коммутируют, удовлетворяют тождеству Гильберта и $T_\lambda^* = T_{\bar\lambda}$, так как эти свойства справедливы для любого $R_\lambda(A_n)$. Из тождества Гильберта и коммутативности следует, что области значений всех T_λ совпадают. Обозначим эту общую область через D. По предположению D плотна, а отсюда следует, что ядро T_λ пусто, так как $\operatorname{Ker} T_\lambda = (\operatorname{Ran} T_\lambda^*)^\perp = (\operatorname{Ran} T_{\bar\lambda})^\perp = D^\perp = \{0\}$. Поэтому можно положить $A = \lambda I - T_\lambda^{-1}$ на D и показать (при помощи короткого вычисления с использованием тождества Гильберта), что это определение не зависит от того, какое λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$) выбрано. Поскольку $\operatorname{Ran}(A \pm i) = \operatorname{Ran}(-T_{\mp i}^{-1}) = \mathscr{H}$, то A самосопряжен. Очевидно, что резольвентой A является T_λ. ∎

Отметим, что в теореме Троттера—Като нам необходима сходимость в *двух* точках, одна из которых находится в верхней, а другая в нижней полуплоскости. Действительно, мы не можем использовать теорему VIII.19b до тех пор, пока не убедимся в самосопряженности предельного оператора, а доказательство самосопряженности опирается на сходимость в обеих полуплоскостях.

Теорема Троттера—Като хороша тем, что в ней a priori не предполагается существования предельного оператора A. Ее можно использовать для доказательства существования обобщенного предела последовательности самосопряженных операторов. То же можно сделать и с помощью однопараметрических групп (см. задачу 23). Чтобы понять, почему для доказательства таких теорем существования приходится использовать резольвенты или группы, а не сами операторы, рассмотрим следующий пример. Пусть A — замкнутый симметрический оператор, не самосопряженный, но имеющий самосопряженное расширение $\tilde{A}$. Пусть P_n — спектральный проектор $\tilde{A}$, соответствующий интервалу $[-n, n]$. Тогда $P_n\tilde{A}P_n$ — ограниченные самосопряженные операторы (и, следовательно, в существенном самосопряженные на $D(A)$), такие, что для всех $\varphi \in D(A)$

$$P_n\tilde{A}P_n\varphi \longrightarrow \tilde{A}\varphi = A\varphi.$$

Таким образом, $P_n\tilde{A}P_n$ в существенном самосопряженны на $D(A)$ и сильный предел существует, но не самосопряжен в существенном.

Одним из наиболее полезных свойств обобщенной сходимости является то, что спектры и проекторы A_n связаны со спектром и проекторами A. Приложения двух следующих теорем приведены в § X.2 и XI.5.

Теорема VIII.23. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A — самосопряженные операторы, и пусть $A_n \longrightarrow A$ в равномерном резольвентном смысле. Тогда

(a) если $\mu \notin \sigma(A)$, то $\mu \notin \sigma(A_n)$ для достаточно больших n и

$$\| R_\mu(A_n) - R_\mu(A) \| \longrightarrow 0;$$

(b) если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и $a \in \rho(A)$, $b \in \rho(A)$, то

$$\| P_{(a,b)}(A_n) - P_{(a,b)}(A) \| \longrightarrow 0.$$

Доказательство. (a) Следует рассмотреть лишь случай, когда μ вещественно. Поскольку $\mu \in \rho(A)$, существует такое $\delta > 0$, что $(\mu - \delta, \mu + \delta) \cap \sigma(A) = \varnothing$. Тогда, в силу функционального исчисления, $\| R_{\mu + i\delta/3}(A) \| \leqslant 1/\delta$ и можно найти такое N, что

$$\| R_{\mu + i\delta/3}(A_n) \| \leqslant 2/\delta$$

при $n \geqslant N$, откуда следует, что степенной ряд для $R_\lambda(A_n)$ вблизи $\mu + i\delta/3$ имеет радиус сходимости не менее $\delta/2$. Известно, что когда этот ряд сходится, он дает обратный оператор к $A_n - \lambda$. Тогда $\mu \in \rho(A_n)$ при $n \geqslant N$ и

$$\| R_\mu(A_n) - R_\mu(A) \| \longrightarrow 0.$$

Докажем (b). Поскольку $a, b \in \rho(A)$, существуют такие $\varepsilon < (b - a)/2$ и N, что

$$\sup_{n \geqslant N} \{ \| (A_n - a)^{-1} \|, \| (A_n - b)^{-1} \| \} \leqslant 1/\varepsilon.$$

Следовательно, в соответствии с функциональным исчислением $\sigma(A_n)\cap(a, b)\subset(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ при $n\geqslant N$. Пусть f — непрерывная функция, равная единице на $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ и нулю вне (a, b). Тогда

$$P_{(a,b)}(A_n)=f(A_n),\quad P_{(a,b)}(A)=f(A),$$

а, следовательно, по теореме VIII.20

$$\|P_{(a,b)}(A_n)-P_{(a,b)}(A)\|\to 0. \blacksquare$$

Теорема VIII. 24. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A — самосопряженные операторы, и предположим, что $A_n\to A$ в сильном резольвентном смысле. Тогда

(a) если $a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$ и $(a, b)\cap\sigma(A_n)=\varnothing$ для всех n, то $(a, b)\cap\sigma(A)=\varnothing$, т. е. если $\lambda\in\sigma(A)$, то существуют такие $\lambda_n\in\sigma(A_n)$, что $\lambda_n\to\lambda$;

(b) если $a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$ и $a, b\notin\sigma_{pp}(A)$, то $P_{(a,b)}(A_n)\varphi\to P_{(a,b)}(A)\varphi$ для всех $\varphi\in\mathscr{H}$.

Доказательство. В силу функционального исчисления равенство $(a, b)\cap\sigma(A)=\varnothing$ эквивалентно неравенству

$$\|(A-\lambda_0)^{-1}\|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{b-a},$$

где

$$\lambda_0=\frac{a+b}{2}+i\left(\frac{b-a}{2}\right).$$

Но $(A_n-\lambda_0)^{-1}$ сильно сходится к $(A-\lambda_0)^{-1}$, так что

$$\|(A-\lambda_0)^{-1}\|\leqslant\varliminf_n\|(A_n-\lambda_0)^{-1}\|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{b-a}.$$

Тем самым доказано (a).

Докажем (b). Выберем равномерно ограниченные последовательности непрерывных функций f_n и g_n, такие, что $0\leqslant f_n\leqslant\chi_{(a,b)}$, $f_n(x)\nearrow\chi_{(a,b)}(x)$ поточечно и $\chi_{[a,b]}\leqslant g_n$, $g_n(x)\searrow\chi_{[a,b]}(x)$ поточечно. Тогда $f_n(A)\to P_{(a,b)}(A)$ и $g_n(A)\to P_{[a,b]}(A)$ сильно. Поскольку $a, b\notin\sigma_{pp}(A)$, имеем $P_{[a,b]}(A)=P_{(a,b)}(A)$, а это означает, что по заданным ψ и $\varepsilon>0$ можно найти непрерывные функции f, g, такие, что $f\leqslant\chi_{(a,b)}\leqslant\chi_{[a,b]}\leqslant g$ и $\|f(A)\psi-g(A)\psi\|\leqslant\varepsilon/5$. По теореме VIII.20 (b) найдется такое N, что при $n\geqslant N$

$$\|f(A_n)\psi-f(A)\psi\|\leqslant\varepsilon/5,\qquad\|g(A_n)\psi-g(A)\psi\|\leqslant\varepsilon/5;$$

тогда $\varepsilon/3$-прием дает

$$\|f(A_n)\psi-g(A_n)\psi\|\leqslant 3\varepsilon/5.$$

Из функционального исчисления следует, что

$$\| f(A)\psi - P_{(a,b)}(A)\psi \| \leqslant \| f(A)\psi - g(A)\psi \|;$$

поэтому, еще раз применяя $\varepsilon/3$-прием, получаем

$$\| P_{(a,b)}(A_n)\psi - P_{(a,b)}(A)\psi \| \leqslant \varepsilon. \blacksquare$$

Часть (а) теоремы VIII.24 гласит, что спектр предельного оператора не может неожиданно расшириться. Однако он может сжиматься, причем, как показывает следующий пример, весьма сильно. Пусть $A_n = x/n$ на $L^2(\mathbb{R})$; тогда A_n сходится к нулевому оператору в сильном резольвентном смысле. Для каждого n спектр $\sigma(A_n) = \mathbb{R}$, но спектр предельного оператора содержит лишь точку нуль. Как простое применение части (а) получаем утверждение, что если A_n положительны и $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле, то и A положителен.

Если A_n сходится к A в *равномерном* резольвентном смысле, то теорема VIII.23 утверждает, что спектр предельного оператора не может неожиданно сжаться: если $\lambda \in \sigma(A_n)$ для достаточно больших n, то $\lambda \in \sigma(A)$. Отметим, что в приведенном выше примере $A_n = x/n$, операторы A_n не сходятся к A в равномерном резольвентном смысле.

Принцип несжимаемости спектра при равномерной резольвентной сходимости остается справедливым, даже если A_n и A не самосопряжены. Принцип же нерасширяемости спектра в сильном резольвентном пределе не всегда справедлив для общих (не обязательно самосопряженных) операторов. Действительно, существует *равномерно* сходящаяся последовательность равномерно ограниченных операторов $A_n \to A$, для которой $\sigma(A_n)$ — единичная окружность в $\mathbb{C}$ при каждом n, а $\sigma(A)$ — весь единичный круг. Поэтому применять теорему VIII.24 можно только в самосопряженном случае.

В приложениях обычно заданы операторы $\{A_n\}$ и A на областях самосопряженности или самосопряженности в существенном, а не резольвенты, и вычисление последних может оказаться очень сложным. Поэтому для применения теорем VIII.23 и VIII.24 необходимо иметь условие непосредственно на операторы A_n, A, которое обеспечивает равномерную или сильную резольвентную сходимость.

Теорема VIII.25. (a) Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A — самосопряженные операторы, и предположим, что D — общая существенная область для всех A_n, A. Если $A_n\varphi \to A\varphi$ для каждого $\varphi \in D$, то $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле.

(b) Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A — самосопряженные операторы с общей областью определения D. Введем в D норму $\|\varphi\|_A = \|A\varphi\| + \|\varphi\|$.

Если

$$\sup_{\|\varphi\|_A=1} \|(A_n-A)\varphi\| \to 0,$$

то $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле.

(c) Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A — положительные самосопряженные операторы с общей областью определения форм $\mathscr{H}_{+1}$, которая наделена нормой

$$\|\psi\|_{+1} = \sqrt{(\psi, A\psi)+(\psi, \psi)}.$$

Если $A_n \to A$ по норме в смысле отображений из $\mathscr{H}_{+1}$ в $\mathscr{H}_{-1}$, т. е. если

$$\sup_{0\neq\psi,\ \varphi\in D} \frac{|(\varphi, (A-A_n)\psi)|}{\|\varphi\|_{+1}\|\psi\|_{+1}} = \sup_{0\neq\psi\in D} \frac{|(\psi, (A-A_n)\psi)|}{(\psi, (A+1)\psi)} \to 0,$$

то $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле.

Доказательство. (a) Пусть $\varphi \in D$, $\psi = (A+i)\varphi$; тогда

$$[(A_n+i)^{-1}-(A+i)^{-1}]\psi = (A_n+i)^{-1}(A-A_n)\varphi$$

сходится к нулю при $n \to \infty$, поскольку $(A-A_n)\varphi \to 0$ и операторы $(A_n+i)^{-1}$ равномерно ограничены. Так как D — существенная область для A, то множество таких ψ плотно, поэтому

$$(A_n+i)^{-1}\varphi \to (A+i)^{-1}\varphi \text{ для всех } \varphi \in \mathscr{H}.$$

Аналогичное доказательство проходит и для $(A_n-i)^{-1}$.

Опишем в общих чертах доказательства (b) и (c). Для (b) сначала доказывается, что предположения равносильны сходимости $(A_n-A)(A+i)^{-1} \to 0$ по обычной $\mathscr{H}$-операторной норме. Тогда $(I+(A_n-A)(A+i)^{-1})^{-1}$ существует и равномерно сходится к I при $n \to \infty$. Имеем

$$(A_n+i)^{-1} = (A+i)^{-1}(I+(A_n-A)(A+i)^{-1})^{-1} \to (A+i)^{-1}$$

равномерно. Аналогично $(A_n-i)^{-1} \to (A-i)^{-1}$.

Чтобы доказать (c), сначала доказываем, что предположения равносильны условию

$$(A+I)^{-1/2}(A_n-A)(A+I)^{-1/2} \to 0$$

по обычной операторной норме. Используя равенство

$$(A_n+I)^{-1} =$$
$$=(A+I)^{-1/2}(I+(A+I)^{-1/2}(A_n-A)(A+I)^{-1/2})^{-1}(A+I)^{-1/2},$$

поступаем дальше так же, как и при доказательстве (b). ∎

Введем, наконец, понятие граф-пределов и сравним их с обобщенными пределами. Далее мы еще раз вернемся к граф-пределам в § X.8.

Определение. Пусть A_n — последовательность операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Мы говорим, что $\langle\psi, \varphi\rangle \in \mathscr{H}\times\mathscr{H}$ лежит **в сильном граф-пределе** A_n, если можно найти такие $\psi_n \in D(A_n)$, что $\psi_n \to \psi$, $A_n\psi_n \to \varphi$. Множество пар, принадлежащих сильному граф-пределу, обозначим Γ_∞^s. Если Γ_∞^s — график некоторого оператора A, то мы говорим, что A — **сильный граф-предел** A_n, и записываем $A = \text{st.gr.-lim}\, A_n$.

Рассмотрим сначала случай, когда все A_n самосопряжены *и A тоже самосопряжен*.

Теорема VIII.26. Предположим, что $\{A_n\}$ и A — самосопряженные операторы. Тогда $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле в том и только в том случае, когда $A = \text{st.gr.-lim}\, A_n$.

Доказательство. Предположим сначала, что $(A_n+i)^{-1} \to (A+i)^{-1}$ сильно. Пусть $\varphi \in D(A)$. Тогда $\varphi_n \equiv (A_n+i)^{-1}(A+i)\varphi \to \varphi$ и $A_n\varphi_n = (A+i)\varphi - i\varphi_n \to A\varphi$, так что $\langle\varphi, A\varphi\rangle \in \Gamma_\infty^s$. Итак, $\Gamma(A) \subset \Gamma_\infty^s$. С другой стороны, пусть $\varphi_n \in D(A_n)$, $\varphi_n \to \varphi$ и $A_n\varphi_n \to \psi$. Если положить $\eta_n = (A+i)^{-1}(A_n+i)\varphi_n \in D(A)$, то

$$\begin{aligned}\eta_n - \varphi_n &= [(A+i)^{-1} - (A_n+i)^{-1}][(A_n+i)\varphi_n] = \\ &= [(A+i)^{-1} - (A_n+i)^{-1}][(A_n+i)\varphi_n - \psi - i\varphi] + \\ &\quad + [(A+i)^{-1} - (A_n+i)^{-1}][\psi + i\varphi] \to \\ &\to 0 \text{ при } n \to \infty.\end{aligned}$$

Итак, $\eta_n \to \varphi$ и $A\eta_n = (A_n+i)\varphi_n - i\eta_n \to \psi$, так что, в силу замкнутости A, $\langle\varphi, \psi\rangle \in \Gamma(A)$. Следовательно, $\Gamma(A) = \Gamma_\infty^s$.

Обратно, предположим, что $A = \text{st.gr.-lim}\, A_n$. Пусть $\varphi \in D(A)$. Тогда существуют такие $\varphi_n \in D(A_n)$, что $\varphi_n \to \varphi$ и $A_n\varphi_n \to A\varphi$. Значит,

$$\begin{aligned}&[(A_n+i)^{-1} - (A+i)^{-1}](A+i)\varphi = \\ &\quad = (A_n+i)^{-1}[(A+i)\varphi - (A_n+i)\varphi_n] - (\varphi - \varphi_n) \to \\ &\quad \to 0 \text{ при } n \to \infty,\end{aligned}$$

так как $\|(A_n+i)^{-1}\| \leqslant 1$, $(A_n+i)\varphi_n \to (A+i)\varphi$ и $\varphi_n \to \varphi$. Поскольку $\operatorname{Ran}(A+i) = \mathscr{H}$, отсюда следует сильная сходимость $(A_n+i)^{-1}$ к $(A+i)^{-1}$. ∎

Итак, мы видим, что *если предел самосопряжен*, то сильная граф-сходимость и сильная резольвентная сходимость — одно и то же. Сильные граф-пределы особенно интересны именно в том случае, когда a priori не известна самосопряженность предела. Например, в § X.8 мы увидим, что существование граф-предела в сочетании с некоторой дополнительной информацией можно иногда использовать для доказательства самосопряженности предельного оператора.

Теорема VIII.27. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность симметрических операторов.

(a) Пусть $D^s_\infty = \{\psi \mid \langle\psi, \varphi\rangle \in \Gamma^s_\infty$ для некоторого $\varphi\}$. Если D^s_∞ плотно, то Γ^s_∞ — график некоторого оператора.

(b) Предположим, что D^s_∞ плотно, и пусть $A = \text{st.gr.-lim}\, A_n$. Тогда A симметрический и замкнутый.

Доказательство. Мы докажем (a), а доказательство (b) оставим в качестве упражнения (задача 24). Предположим, что $\varphi_n, \varphi_n' \in D(A_n)$ и $\varphi_n \to \varphi$, $\varphi_n' \to \varphi$, $A_n\varphi_n \to \psi$ и $A_n\varphi_n' \to \psi'$. Пусть $\eta \in D^s_\infty$. Тогда существуют такие $\eta_n \in D(A_n)$, что $\eta_n \to \eta$ и $A_n\eta_n \to \rho$. Отсюда

$$(\psi - \psi', \eta) = \lim_{n\to\infty} (A_n(\varphi_n - \varphi_n'), \eta_n) = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n - \varphi_n', A_n\eta_n) = 0,$$

так что $\psi = \psi'$, в силу плотности D^s_∞. ∎

Можно ввести еще слабый граф-предел. Мы дадим определение и сформулируем одну теорему.

Определение. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность операторов в $\mathscr{H}$. Мы говорим, что $\langle\psi, \varphi\rangle \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ лежит в **слабом граф-пределе** Γ^w_∞, если можно найти такие $\psi_n \in D(A_n)$, что $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \psi$, а $A_n\psi_n \to \varphi$ слабо. Если Γ^w_∞ — график некоторого оператора A, то говорят, что A — **слабый граф-предел** A_n; $A = \text{w.gr.-lim}\, A_n$.

Теорема VIII.28. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность симметрических операторов. Если область

$$D^w_\infty = \{\psi \mid \langle\psi, \varphi\rangle \in \Gamma^w_\infty \text{ при некотором } \varphi\}$$

плотна, то Γ^w_∞ — график симметрического оператора.

Наконец, отметим, что если A_n — равномерно ограниченная последовательность операторов, то $A = \text{w.gr.-lim}\, A_n$ тогда и только тогда, когда $A_n \to A$ в слабой операторной топологии (задача 26). Этот факт вместе с задачами 20 и 28 показывает, что понятия слабого граф-предела и слабой резольвентной сходимости различны. Вопрос о том, замкнут ли граф-предел, если каждый A_n симметричен, остается открытым.

VIII.8. Формула Троттера для произведения

В этом разделе мы докажем одну полезную теорему об аппроксимации $\exp t(A+B)$ при помощи $\exp tA$ и $\exp tB$. Чтобы пояснить идею, рассмотрим сначала конечномерные матрицы, для которых имеется классическая теорема Ли.

Теорема VIII.29 (формула Ли для произведения). Пусть A и B — конечномерные матрицы. Тогда

$$\exp(A+B)=\lim_{n\to\infty}[\exp(A/n)\exp(B/n)]^n.$$

Доказательство. Пусть $S_n=\exp[(A+B)/n]$, $T_n=\exp(A/n)\times\exp(B/n)$. Тогда

$$S_n^n-T_n^n=\sum_{m=0}^{n-1}S_n^m(S_n-T_n)T_n^{n-1-m},$$

так что

$$\|S_n^n-T_n^n\|\leqslant n(\max\{\|S_n\|,\ \|T_n\|\})^{n-1}\|S_n-T_n\|\leqslant$$
$$\leqslant n\|S_n-T_n\|\exp(\|A\|+\|B\|).$$

Так как

$$\|S_n-T_n\|=$$
$$=\left\|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{A+B}{n}\right)^m-\left(\sum_{=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{A}{n}\right)^m\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{B}{n}\right)^m\right)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant C/n^2\ (C \text{ зависит от } \|A\| \text{ и } \|B\|),$$

то $\|S_n^n-T_n^n\|\to 0$. ∎

Эту теорему *и ее доказательство* можно распространить на случай, когда A и B — неограниченные самосопряженные операторы и $A+B$ *самосопряжен* на $D=D(A)\cap D(B)$.

Теорема VIII.30. Пусть A и B — самосопряженные операторы в $\mathscr{H}$, и предположим, что $A+B$ самосопряжен на $D=D(A)\cap\cap D(B)$. Тогда

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty}[e^{itA/n}e^{itB/n}]^n=e^{it(A+B)}.$$

Доказательство. Пусть $\psi\in D$. Тогда

$$s^{-1}(e^{isA}e^{isB}-I)\psi=s^{-1}(e^{isA}-I)\psi+s^{-1}e^{isA}(e^{isB}-I)\psi\to iA\psi+iB\psi$$

и

$$s^{-1}(e^{is(A+B)}-I)\psi\to i(A+B)\psi$$

при $s\to 0$. Полагая $K(s)=s^{-1}(e^{isA}e^{isB}-e^{is(A+B)})$, видим, что $K(s)\psi\to 0$ при $s\to 0$ и любом $\psi\in D$. Так как $A+B$ самосопряжен на D, то D — банахово пространство относительно нормы

$$\|\psi\|_{A+B}=\|(A+B)\psi\|+\|\psi\|.$$

Каждое из отображений $K(s)$: $D\to\mathscr{H}$ ограничено и $K(s)\psi\xrightarrow{\mathscr{H}}0$ при $s\to 0$ или ∞ для каждого $\psi\in D$. Таким образом, по теореме о равномерной ограниченности, $K(s)$ равномерно ограничены, т. е. существует такая постоянная C, что

$$\|K(s)\psi\| \leqslant C\|\psi\|_{A+B} \text{ для всех } s\in\mathbb{R} \text{ и } \psi\in D.$$

Тогда при помощи $\varepsilon/3$-приема убеждаемся, что $K(s)\psi\to 0$ равномерно на $\|\cdot\|_{A+B}$-компактных подмножествах D.

В силу самосопряженности $A+B$ на D, вектор $e^{is(A+B)}\psi\in D$, если $\psi\in D$. Более того, $s\to e^{is(A+B)}\psi$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}$ в D, когда D снабжено топологией нормы $\|\cdot\|_{A+B}$. Итак, $\{e^{is(A+B)}\psi \mid s\in[-1, 1]\}$ есть $\|\cdot\|_{A+B}$-компактное множество в D при каждом заданном ψ.

Далее можно скопировать доказательство формулы Ли. Известно, что

$$t^{-1}\left[e^{itA}e^{itB}-e^{it(A+B)}\right]e^{is(A+B)}\psi\to 0$$

равномерно по $s\in[-1, 1]$. Следовательно,

$$\left[(e^{itA/n}e^{itB/n})^n-(e^{it(A+B)/n})^n\right]\psi=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(e^{itA/n}e^{itB/n})^k\left[e^{itA/n}e^{itB/n}-e^{it(A+B)/n}\right]\cdot\left[e^{it(A+B)/n}\right]^{n-1-k}\psi.$$

Норма правой части не превосходит

$$|t|\max_{|s|<t}\left\|\left(\frac{t}{n}\right)^{-1}\left(e^{it(A+B)/n}-e^{itA/n}e^{itB/n}\right)e^{is(A+B)}\psi\right\|,$$

а отсюда вытекает, что

$$(e^{itA/n}e^{itB/n})^n\psi\xrightarrow{\mathscr{H}}e^{it(A+B)}\psi \text{ при } n\to\infty, \text{ если } \psi\in D.$$

Поскольку D плотно, а операторные экспоненты ограничены единицей, это утверждение справедливо на всем $\mathscr{H}$. ∎

Из этого доказательства видно, что на фиксированном векторе сходимость равномерна по t в некотором компактном подмножестве из $\mathbb{R}$.

Тот же прием можно использовать для демонстрации того, что

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}(e^{-tA/n}e^{-tB/n})^n=e^{-t(A+B)},$$

если A и B удовлетворяют тем же предположениям и вдобавок полуограничены. Следующий результат значительно сильнее, чем теорема VIII.30, поскольку он предполагает лишь самосопряженность *в существенном* оператора $A+B$ на $D(A)\cap D(B)$. Доказательство сильно отличается от доказательства теоремы VIII.30 (литературные ссылки приведены в Замечаниях).

Теорема VIII.31 (формула Троттера для произведения). Если A и B — самосопряженные операторы и $A+B$ в существенном самосопряжен на $D(A) \cap D(B)$, то

$$\underset{n \to \infty}{\text{s-lim}} \left(e^{itA/n} e^{itB/n}\right)^n = e^{i(A+B)t}.$$

Более того, если A и B ограничены снизу, то

$$\underset{n \to \infty}{\text{s-lim}} \left(e^{-tA/n} e^{-tB/n}\right)^n = e^{-t(A+B)}.$$

Приложения формулы Троттера для произведения читатель может найти в § X.10 (фейнмановские интегралы по путям), § X.7 (гиперсжимающие полугруппы) или в гл. XIX (раздел, посвященный конструктивной квантовой теории поля).

VIII.9. Полярное разложение замкнутых операторов

В § VI.4 мы видели, что произвольный ограниченный оператор T может быть представлен как $T = U|T|$, где $|T|$ положителен и самосопряжен, а U частично изометричен. Более того, условие $\mathrm{Ker}\,|T| = \mathrm{Ker}\,T$ и требование совпадения начального пространства U с $(\mathrm{Ker}\,T)^\perp$ однозначно определяют $|T|$ и U. В этом разделе мы хотим обобщить этот результат на *замкнутые* неограниченные операторы. Как и в ограниченном случае, U легко построить, как только построен $|T|$, и, как в ограниченном случае, мы положим $|T| = \sqrt{T^*T}$. Раньше трудность состояла в построении квадратного корня. Теперь же у нас есть спектральная теорема, и $\sqrt{T^*T}$ легко построить, если доказать, что T^*T — положительный самосопряженный оператор. Но именно это и представляет основную трудность в неограниченном случае. Заранее не очевидно, что множество $\{\psi \mid \psi \in D(T)$ и $T\psi \in D(T^*)\}$ отлично от $\{0\}$. В действительности это множество плотно (задача 45), но наш подход, использующий теорию полуограниченных квадратичных форм, не требует доказательства этого факта.

Теорема VIII.32 (полярное разложение). Пусть T — произвольный замкнутый оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существуют положительный самосопряженный оператор $|T|$, $D(|T|) = D(T)$, и частично изометрический оператор U с начальным пространством $(\mathrm{Ker}\,T)^\perp$ и конечным пространством $\overline{\mathrm{Ran}\,T}$, такие, что $T = U|T|$. Операторы $|T|$ и U однозначно определяются этим свойством и дополнительным условием $\mathrm{Ker}(|T|) = \mathrm{Ker}\,T$.

Доказательство. Определим квадратичную форму s на $D(T)$, полагая $s(\psi, \phi) = (T\psi, T\phi)$. Она, очевидно, положительна. Предположим теперь, что задана такая последовательность $\{\psi_n\}$, что

$\|\psi_n-\psi_m\|_{+1}\to 0$, т. е. $\|\psi_n-\psi_m\|\to 0$ и $\|T(\psi_n-\psi_m)\|\to 0$. Поскольку T замкнут, то существует такое $\psi\in D(T)$, что $\|\psi_n-\psi\|+\|T(\psi_n-\psi)\|\to 0$, т. е. $\|\psi_n-\psi\|_{+1}\to 0$. Итак, s — замкнутая форма. Следовательно, по теореме VIII.15 существует единственный положительный самосопряженный оператор S, такой, что $Q(S)=D(T)$ и $s(\psi,\phi)=(\psi, S\phi)$ в смысле форм. Пусть $|T|=S^{1/2}$. Тогда $D(|T|)=Q(S)=D(T)$ и по построению $\||T|\psi\|^2=s(\psi,\psi)=\|T\psi\|^2$, так что $\operatorname{Ker}|T|=\operatorname{Ker}T$. Определим U: $\operatorname{Ran}|T|\to\operatorname{Ran}T$ формулой $U|T|\psi=T\psi$. Поскольку $\||T|\psi\|=\|T\psi\|$, оператор U корректно определен и сохраняет норму. Таким образом, U расширяется до частичной изометрии из $\overline{\operatorname{Ran}|T|}$ в $\overline{\operatorname{Ran}T}$. Наконец, в силу самосопряженности $|T|$, $\overline{\operatorname{Ran}|T|}=(\operatorname{Ker}|T|)^\perp=(\operatorname{Ker}T)^\perp$. Доказательство единствениости мы оставляем читателю (задача 44). ∎

VIII.10. Тензорные произведения

В этом разделе мы рассматриваем некоторые аспекты теории тензорных произведений операторов в гильбертовых пространствах. Пусть A и B — плотно определенные операторы в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно. Обозначим через $D(A)\otimes D(B)$ множество конечных линейных комбинаций векторов вида $\phi\otimes\psi$, где $\phi\in D(A)$ и $\psi\in D(B)$. Оно плотно в $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$. Зададим $A\otimes B$ на $D(A)\otimes D(B)$ формулой

$$(A\otimes B)(\phi\otimes\psi)=A\phi\otimes B\psi$$

и продолжим его по линейности.

Предложение. Оператор $A\otimes B$ определен корректно. Более того, если A и B замыкаемы, то замыкаем и $A\otimes B$.

Доказательство. Предположим, что $\sum c_i\phi_i\otimes\psi_i$ и $\sum d_j\phi'_j\otimes\psi'_j$ — два представления одного и того же вектора $f\in D(A)\otimes D(B)$. Используя ортогонализацию Грама—Шмидта, получаем базисы $\{\eta_k\}$ и $\{\theta_l\}$ для пространств, натянутых соответственно на $\{\phi_i\}\cup\{\phi'_i\}$ и $\{\psi_j\}\cup\{\psi'_j\}$, причем $\eta_k\in D(A)$ и $\theta_l\in D(B)$. Векторы $\phi_i\otimes\psi_i$ и $\phi'_j\otimes\psi'_j$ можно представить как

$$\phi_i\otimes\psi_i=\sum\alpha^i_{kl}\eta_k\otimes\theta_l,$$

$$\phi'_j\otimes\psi'_j=\sum\beta^j_{kl}\eta_k\otimes\theta_l.$$

Поскольку эти два выражения для f дают один и тот же вектор, $\sum_i c_i \alpha^i_{kl} = \sum_j d_j \beta^j_{kl}$ для каждой пары $\langle k, l\rangle$. Отсюда

$$\begin{aligned}(A \otimes B) \sum c_i (\phi_i \otimes \psi_i) &= \sum_{k,l} \left(\sum_i c_i \alpha^i_{kl}\right) (A\eta_k \otimes B\theta_l) = \\ &= \sum_{k,l} \left(\sum_j d_j \beta^j_{kl}\right) (A\eta_k \otimes B\theta_l) = \\ &= (A \otimes B) \sum d_j (\phi'_j \otimes \psi'_j),\end{aligned}$$

так что $A \otimes B$ определен корректно.

Если g — произвольный вектор из $D(A^*) \otimes D(B^*)$, то $(A \otimes Bf, g) = (f, A^* \otimes B^* g)$, и поэтому

$$D(A^*) \otimes D(B^*) \subset D((A \otimes B)^*).$$

Если A и B замыкаемы, то $D(A^*)$ и $D(B^*)$ плотны. Следовательно, в этом случае $(A \otimes B)^*$ плотно определен, откуда вытекает замыкаемость $A \otimes B$. ∎

Аналогично, если A и B замыкаемы, то допускает замыкание и оператор $A \otimes I + I \otimes B$, определенный на $D(A) \otimes D(B)$.

Определение. Пусть A и B — замыкаемые операторы в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Их **тензорное произведение** — это замыкание оператора $A \otimes B$, определенного на $D(A) \otimes D(B)$. Мы будем обозначать замыкание также через $A \otimes B$. Обычно $A + B$ будет обозначать замыкание оператора $A \otimes I + I \otimes B$, определенного на $D(A) \otimes D(B)$.

Предложение. Пусть A и B — ограниченные операторы на гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Тогда $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$.

Доказательство. Пусть $\{\phi_k\}$ и $\{\psi_l\}$ — ортонормированные базисы для $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$; предположим, что $\sum c_{kl} \phi_k \otimes \psi_l$ — конечная сумма. Тогда

$$\begin{aligned}\|(A \otimes I) \sum c_{kl} (\phi_k \otimes \psi_l)\|^2 &= \sum_l \left\|\sum_k c_{kl} A\phi_k\right\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \sum_l \|A\|^2 \sum_k |c_{kl}|^2 = \\ &= \|A\|^2 \left\|\sum c_{kl} \phi_k \otimes \psi_l\right\|^2.\end{aligned}$$

Поскольку множество таких конечных сумм плотно в $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ (§ II.4, предложение 2), получаем, что $\|A \otimes I\| \leqslant \|A\|$. Итак,

$$\|A \otimes B\| \leqslant \|A \otimes I\| \|I \otimes B\| \leqslant \|A\| \|B\|.$$

Обратно, для заданного $\varepsilon > 0$ существуют единичные векторы $\phi \in \mathscr{H}_1$, $\psi \in \mathscr{H}_2$, такие, что $\|A\phi\| \geqslant \|A\| - \varepsilon$ и $\|B\psi\| \geqslant \|B\| - \varepsilon$.

Тогда

$$\|(A\otimes B)(\phi\otimes\psi)\| = \|A\phi\|\|B\psi\| \geqslant$$
$$\geqslant \|A\|\|B\| - \varepsilon\|A\| - \varepsilon\|B\| + \varepsilon^2.$$

Так как $\varepsilon > 0$ и произвольно, то $\|A\otimes B\| \geqslant \|A\|\|B\|$, что завершает доказательство. ∎

Отметим, что оба приведенные выше предложения допускают естественное обобщение на произвольное конечное тензорное произведение операторов. Это можно доказать непосредственно или путем использования ассоциативности тензорного произведения гильбертовых пространств.

Вернемся теперь к проблемам самосопряженности и спектра. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^N$ — семейство самосопряженных операторов A_k в $\mathscr{H}_k$. Обозначим замыкание $I_1\otimes\ldots\otimes A_k\otimes\ldots\otimes I_N$ на $D=\otimes D(A_k)$ также через A_k. Пусть $P(x_1, \ldots, x_N)$ — полином степени n_k по x_k с вещественными коэффициентами. Тогда оператор $P(A_1, \ldots, A_N)$ имеет смысл на $\bigotimes_k D(A_k^{n_k})$, так как $D(A_k^{n_k})\subset D(A_k^l)$ для всех $l\leqslant n_k$. На самом деле P в существенном самосопряжен на этой области.

Теорема VIII.33. Пусть A_k — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}_k$. Пусть $P(x_1, \ldots, x_N)$ — полином степени n_k по k-й переменной с вещественными коэффициентами, и пусть D_k^e — область самосопряженности в существенном для $A_k^{n_k}$. Тогда

(a) $P(A_1, \ldots, A_N)$ в существенном самосопряжен на

$$D^e = \bigotimes_{k=1}^N D_k^e;$$

(b) спектр $\overline{P(A_1, \ldots, A_N)}$ есть замыкание области значений P на произведении спектров A_k. Иными словами,

$$\sigma(\overline{P(A_1, \ldots, A_N)}) = \overline{P(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_N))}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что $P(A_1, \ldots, A_N)$ в существенном самосопряжен на $D=\bigotimes_{k=1}^N D(A_k^{n_k})$. По спектральной теореме существует пространство с мерой $\langle M_k, \mu_k\rangle$, такое, что A_k унитарно эквивалентен умножению на вещественнозначную измеримую функцию f_k в $L^2(M_k, d\mu_k)$. В силу предложения 3 § VIII.3, можно считать, что μ_k конечна и что $f_k\in \bigcap_{1<p<\infty} L^p(M_k, d\mu_k)$. Более того, по теореме II.10 (a), $\bigotimes_{k=1}^N L^2(M_k, d\mu_k)$ естественно изоморфно $L^2\left(\mathop{\times}_{k=1}^N M_k, \bigotimes_{k=1}^N d\mu_k\right)$. При этом изоморфизме

$P(A_1, \ldots, A_N)$ соответствует умножению на $P(f_1, \ldots, f_N)$, а D соответствует множеству конечных линейных комбинаций функций $\phi_1(m_1)\phi_2(m_2)\ldots\phi_N(m_N)$, таких, что $f_k^{n_k}\phi_k \in L^2(M_k, d\mu_k)$.

Для доказательства самосопряженности в существенном используем предложение 2 § VIII.3. Во-первых, поскольку μ_k конечна и $f_k^{n_k} \in L^p(M_k, d\mu_k)$, имеем $f_k^l \in L^p(M_k, d\mu_k)$ при $1 \leqslant p < \infty$. Отсюда немедленно следует, что $P(f_1, \ldots, f_N)$ лежит в L^p при всех таких p; в частности, $P(f_1, \ldots, f_N) \in L^4\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k, \bigotimes\limits_{k=1}^{N} d\mu_k\right)$. Так как оператор умножения на $f_k^{n_k}$ самосопряжен на D_k, то D_k содержит характеристические функции измеримых множеств из M_k. Таким образом, D содержит все конечные линейные комбинации характеристических функций прямоугольников. Замечания о произведениях мер в конце § I.4 показывают, что характеристическая функция любого измеримого множества из $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k$ равна такой конечной линейной комбинации с точностью до множества сколь угодно малой $\bigotimes\limits_{k=1}^{N} d\mu_k$-меры. Итак, простые функции на $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k$ могут быть приближены в смысле L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ элементами из D. В частности, D плотно в $L^4\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k, \bigotimes\limits_{k=1}^{N} d\mu_k\right)$. Самосопряженность в существенном следует теперь из предложения 2 § VIII.3.

Чтобы показать, что P в существенном самосопряжен на D^e, достаточно показать (в силу задачи 14), что $\overline{P \restriction D^e}$ есть расширение $P \restriction D$. Допустим, что $\bigotimes\limits_{k=1}^{N} \phi_k \in D$. Тогда $\phi_k \in D(A_k^{n_k})$, так что, поскольку D_k^e—область самосопряженности в существенном для $A_k^{n_k}$, существует такая последовательность $\{\phi_k^l\}_{l=1}^{\infty}$, что $\phi_k^l \to \phi_k$ и $A_k^{n_k}\phi_k^l \to A_k^{n_k}\phi_k$. Простая оценка показывает, что тогда $A_k^m\phi_k^l \to A_k^m\phi_k$ для всех $1 \leqslant m \leqslant n_k$. Следовательно,

$$\bigotimes_{k=1}^{N} \phi_k^l \longrightarrow \bigotimes_{k=1}^{N} \phi_k$$

и

$$P(A_1, \ldots, A_n)\left(\bigotimes_{k=1}^{N} \phi_k^l\right) \longrightarrow P(A_1, \ldots, A_n)\left(\bigotimes_{k=1}^{N} \phi_k\right).$$

То же рассуждение проходит для конечных линейных комбинаций векторов вида $\bigotimes\limits_{k=1}^{N} \phi_k$, поэтому $\overline{P \restriction D^e}$ расширяет $P \restriction D$. Это завершает доказательство (а).

Чтобы доказать (b), предположим, что $\lambda \in \overline{P(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_N))}$. Если I — произвольный открытый интервал, содержащий λ, то $P^{-1}(I)$ содержит произведение $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} I_k$ открытых интервалов, таких, что $I_k \cap \sigma(A_k) \neq \varnothing$. Поскольку $\sigma(A_k) = \text{ess range}\, f_k^{n_k}$, то $\mu_k[(f_k^{n_k})^{-1}(I_k)] \neq 0$, так что

$$\mu[P(f_1, \ldots, f_N)^{-1}(I)] \neq 0.$$

Другими словами, $\lambda \in \text{ess range}\, P(f_1, \ldots, f_N)$, но $\text{ess range}\, P(f_1, \ldots, f_N) = \sigma(\overline{P(A_1, \ldots, A_N)})$, в силу первого предложения из § VIII.3. Обратно, если $\lambda \notin \overline{P(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_N))}$, то $(\lambda - P(f_1, \ldots, f_N))^{-1}$ ограничен п. в. на $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k$, так что $\lambda \in \rho(\overline{P(A_1, \ldots, A_N)})$. ∎

Если $A_1, \ldots, A_N$ ограничены, то $P(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_N))$ замкнуто, но в общем случае это не так (задача 43). Два наиболее важных частных случая теоремы VIII.33 выделяет такое

Следствие. Пусть $A_1, \ldots, A_N$ — самосопряженные операторы в $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$, и пусть D_k — область самосопряженности в существенном для A_k при любом k. Тогда

(а) операторы $A_\Pi = A_1 \otimes \ldots \otimes A_N$ и $A_\Sigma = A_1 + \ldots + A_N$ в существенном самосопряженны на $D = \bigotimes\limits_{k=1}^{N} D_k$;

(b) $\sigma(A_\Pi) = \overline{\prod\limits_{k=1}^{N} \sigma(A_k)}$ и $\sigma(A_\Sigma) = \overline{\sum\limits_{k=1}^{N} \sigma(A_k)}$.

Пример 1. Предположим, что $V(x)$ — потенциал, так что $H_1 = -\Delta_x + V(x)$ в существенном самосопряжен на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Тогда $H_2 = (-\Delta_x + V(x)) + (-\Delta_y + V(y))$ в существенном самосопряжен на множестве конечных сумм произведений $\phi(x)\psi(y)$, где $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Кроме того, $\sigma(H_2) = \overline{\sigma(H_1) + \sigma(H_1)}$.

Пример 2 (вторичное квантование свободного гамильтониана). Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ — ассоциированное пространство Фока (см. § II.4). Предположим, что A — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ с областью самосопряженности в существенном D. Каждому такому A можно поставить в соответствие оператор $d\Gamma(A)$ на $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ следующим образом. Пусть $A^{(n)} = A \otimes I \otimes \ldots \otimes I + I \otimes A \otimes \ldots \otimes I + \ldots + I \otimes \ldots \otimes A$ на $\bigotimes\limits_{k=1}^{n} D$. Пусть $D_A \subset \mathcal{F}(\mathcal{H})$ — множество векторов $\psi = \{\psi_0, \psi_1, \ldots\}$, таких, что $\psi_n = 0$ для достаточно больших n и $\psi_n \in \bigotimes_{k=1}^{n} D$ для каждого n. Множество D_A плотно в $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, так как D плотно в $\mathcal{H}$. Положим $A^{(0)} = 0$ и $d\Gamma(A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}$. Оператор $d\Gamma(A)$ имеет смысл на D_A и, как легко видеть, симметричен. По теореме VIII.33, $A^{(n)}$ в существенном самосопряжен на $\bigotimes_{k=1}^{n} D$. Таким образом, $A^{(n)} + \mu i$ имеет плотную область значений на $\bigotimes_{k=1}^{n} D$, если $\mu \in \mathbb{R}$ и $\mu \neq 0$. Отсюда немедленно следует, что $d\Gamma(A) \pm i$ имеет плотную область значений на D_A. Итак, $d\Gamma(A)$ в существенном самосопряжен на D_A. Если A — квантовомеханический оператор, соответствующий энергии свободной частицы, то $d\Gamma(A)$ называется *вторично квантованным* оператором энергии свободной частицы. Он коммутирует с проекторами на симметричное и антисимметричное пространства Фока, откуда следует, что $d\Gamma(A) \restriction \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ и $d\Gamma(A) \restriction \mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ в существенном самосопряженны на $D \cap \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ и $D \cap \mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ соответственно.

Часть (b) теоремы VIII.33 выполняется и в том случае, когда $A_1, \ldots, A_N$ — произвольные ограниченные операторы. По техническим причинам мы отложим доказательство до гл. XIII, где обсудим также некоторые случаи, когда $A_1, \ldots, A_N$ не ограничены и не самосопряжены.

VIII.11. Три математические проблемы квантовой механики

В этом небольшом разделе мы хотим кратко описать математическую модель квантовой механики и три возникающие здесь математические проблемы.

В Замечаниях мы обсудим возможности «вывода» этой модели из различных аксиоматических схем.

Квантовомеханические системы описываются операторами и векторами в сепарабельных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}$. Каждому вектору единичной длины из $\mathcal{H}$ отвечает некоторое физическое состояние. Два таких вектора соответствуют одному и тому же состоянию тогда и только тогда, когда они отличаются лишь комплексным множителем, равным по модулю единице. Каждой наблюдаемой сопоставляется самосопряженный оператор A в $\mathcal{H}$. Если система находится в состоянии φ и мы измеряем наблюдаемую, соответствующую A, то распределение вероятности результатов измерения описывается величиной $d(\varphi, P_\lambda \varphi)$, где P_Ω — проекторнозначная мера, ассоциированная с A. Иными словами, вероятность того, что результат измерения лежит в интервале $[a, b]$, a, $b \in \mathbb{R}$, равна $(\varphi, P_{[a, b]}\varphi)$. Динамика этой системы задается непрерывной однопараметрической группой унитарных операторов $U(t)$. Если система находится в состоянии φ в момент $t=0$, то при $t=t_0$ она будет в состоянии $U(t_0)\varphi$. Для большинства систем существует особенно удобная реализация $\mathcal{H}$ в виде пространства $L^2(M, d\mu)$ и простое соответствие между классическими наблюдаемыми и их квантовомеханическими аналогами — самосопряженными операторами в $L^2(M, d\mu)$ (см. пример ниже).

Особый интерес представляет самосопряженный генератор H группы $U(t)$. Он называется гамильтонианом и соответствует классической наблюдаемой «энергия». Векторы $\varphi \in D(H)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dt}[U(t)\varphi] = iH[U(t)\varphi],$$

которое называется уравнением Шредингера. Представляет интерес точечный спектр H, поскольку соответствующие собственные функции суть стационарные состояния системы. Типичный отклик системы на внешнее возбуждение — переход из одного стационарного состояния в другое с испусканием света, частота которого пропорциональна разности между соответствующими точками спектра.

Имеются три общих математических проблемы, возникающих в любой квантовомеханической модели.

(1) *Самосопряженность.* В большинстве случаев физические соображения диктуют формальное выражение для гамильтониана и других наблюдаемых как операторов на некоторой реализации $\mathcal{H}$ в виде $L^2(M, d\mu)$. Мы говорим «формальное», потому что области определения не устанавливаются. Обычно нетрудно найти область, на которой данное формальное выражение есть корректно определенный симметрический оператор. Первая математическая проблема — доказать самосопряженность в существенном, или, если оператор не обладает этим свойством, исследовать различные самосопряженные расширения и выбрать «правильную» наблюдаемую.

(2) *Спектральный анализ.* Вторая проблема — исследовать спектры наблюдаемых (в частности, гамильтониана) и оценить местоположение и кратности точечных спектров.

(3) *Теория рассеяния.* Третья проблема — описать каким-нибудь способом поведение системы при больших t.

Разработке и применению техники решения этих проблем посвящена большая часть томов II и III. Самосопряженность изучается в гл. X, спектральный анализ в гл. XI и XIII, а теория рассеяния в гл. XII.

Мы не утверждаем, что все интересные математические задачи, возникающие в квантовой механике, относятся к одному из трех перечисленных типов, отнюдь нет. Но это три центральные проблемы в строгом математическом описании квантовой механики.

Пример (n-электронный атом). Опишем кратко приближенную модель n-электронного атома. Классическая энергия n электронов равна

$$h=\sum_{k=1}^{n}\frac{(p_x^k)^2+(p_y^k)^2+(p_z^k)^2}{2m}-\sum_{k=1}^{n}\frac{ne^2}{|r_k|}+\sum_{\substack{k,\,l=1\\ k\neq l}}^{n}\frac{e^2}{|r_k-r_l|},$$

где p_x^k, p_y^k, p_z^k суть x, y, z-компоненты импульса k-го электрона, $r_k=\langle x_k, y_k, z_k\rangle$ — его координаты, m и e — масса и заряд. Член $-ne^2/|r_k|$ — потенциальная энергия k-го электрона, обусловленная притяжением протонов ядра; член $e^2/|r_k-r_l|$ — вклад в потенциальную энергию, обусловленный отталкиванием между k-м и l-м электронами.

В качестве гильбертова пространства возьмем $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^{3n})$ и установим следующее соответствие между классическими наблюдаемыми и операторами в $\mathcal{H}$ (мы выбираем систему единиц, в которой $\hbar$ равна единице):

$$p_x^k\longrightarrow\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},\qquad p_y^k\longrightarrow\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_k},\qquad p_z^k\longrightarrow\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z_k};$$

x_k, y_k, z_k соответствуют умножению на x_k, y_k, z_k;

$$h\longrightarrow H=-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2m}\Delta_k+V(r_1,\ \ldots,\ r_k),$$

где

$$\Delta_k=\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_k^2},$$

а V обозначает оператор, действующий как умножение на функцию

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{ne^2}{|r_k|}+\sum_{\substack{k,\,l=1\\ k\neq l}}^{n}\frac{e^2}{|r_k-r_l|}.$$

Все эти операторы в существенном самосопряженны на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n})$, хотя доказательство для H вовсе не очевидно (см. § X.2). Динамика определяется унитарной группой $U(t)=e^{-itH}$.

Если $\varphi \in \mathscr{H}$, $\|\varphi\| = 1$ — состояние системы при $t = 0$, то

$$\int_{x_k=a}^{b} \int_{R^{3n-1}} |\varphi(x_1, \ldots, z_n)|^2 \, dx_1 \ldots dz_n$$

— вероятность того, что при $t = 0$ x-координата k-й частицы лежит в интервале (a, b), а

$$\int_{x_k=a}^{b} \int_{R^{3n-1}} |(U(t_0)\varphi)(x_1, \ldots, z_n)|^2 \, dx_1 \ldots dz_n$$

— та же вероятность, но при $t = t_0$. Очевидно, что спектральный анализ H и поведение e^{-itH} при больших t — сложные математические проблемы.

Отметим, что эта модель — довольно грубое приближение n-электронного атома в силу ряда причин. Мы не учли спин электронов и принцип запрета Паули. Мы не учли также движение ядра, считая его неподвижным. И наконец, эта модель нерелятивистская.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *VIII.1*. Развитие теории неограниченных операторов стимулировалось попытками строгого математического обоснования квантовой механики, которые предпринимались в конце 20-х годов. Систематическое изложение теории принадлежит фон Нейману (von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 49—131) и Стоуну (M. Stone, Linear Transformations in Hilbert Spaces and their Applications to Analysis, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **15**, New York, 1932). Техника применения графиков для анализа неограниченных операторов была развита фон Нейманом (von Neumann, Über Adjungierte Funktionaloperatoren, *Ann. Math.* (2), **33** (1936), 294—310).

Функция на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$$

для любого конечного набора интервалов $[x_i, x_i']$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta.$$

Для таких функций справедлива *основная теорема анализа*:

Если f абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то f почти всюду дифференцируема, $f'(x) \in L^1[a, b]$ и f — неопределенный интеграл от $f'(x)$. Обратно, если $g(x) \in L^1[a, b]$, то неопределенный интеграл $G(x)$ от $g(x)$ абсолютно непрерывен и $G'(x) = g(x)$ почти всюду.

§ VIII.2. Принадлежащая фон Нейману теорема VIII.3 (см. первую из цитированных выше статей) представляет собой частный случай теоремы X.2 и ее следствия. В своей статье фон Нейман приписывает выделение понятия самосопряженности Э. Шмидту. Отметим, что фон Нейман называет симметрические операторы «эрмитовыми», а самосопряженные операторы—«гипермаксимальными эрмитовыми».

§ VIII.3. Тот факт, что гильбертово спектральное разложение не проходит для произвольных симметрических операторов, был объяснен в книге Карлемана (Carleman, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Almquist and Wilesells, Uppsala, 1923). Спектральное разложение неограниченных операторов впервые рассматривал фон Нейман, исследуя математические проблемы квантовой теории. Систематические же доказательства появились впервые в указанных выше статьях фон Неймана и Стоуна, а также в работе Ф. Рисса: F. Riesz, Über die linearen Transformation des komplexen Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.* (Szeged), 5 (1930—1932), 23—54. Многие идеи спектрального анализа, правда в матричной форме, были высказаны уже в работах Уинтнера.

Теорию интегрирования можно развить и для векторнозначных мер. Далее эту теорию можно применить к проекторнозначной мере, соответствующей произвольному самосопряженному оператору A. В частности, можно доказать, что для любого $\varphi \in D(A)$

$$A\varphi = \int \lambda\, d(P_\lambda \varphi),$$

где интеграл сходится сильно, т. е. суммы Римана—Стильтьеса сходятся к $A\varphi$ по норме. Это сильнее понятия сходимости, использованного в § VIII.3, где интеграл сходился слабо.

§ VIII.4. Теорема Стоуна была сформулирована им в статье: Linear Transformations in Hilbert Space, III, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 15 (1929), 198—200, а доказана в статье: On One-Parameter Unitary Groups in Hilbert Space, *Ann. Math.* (2), 33 (1932), 643—648. Теорема VIII.9 была опубликована в работе фон Неймана: Über einen Satz von Herrn M. H. Stone, *Ann. Math.* (2), 33 (1932), 567—573. Приведенное здесь доказательство теоремы Стоуна принадлежит Гордингу и Вайтману (не опубликовано). Идея использовать инвариантность относительно группы для доказательства самосопряженности в существенном принадлежит Нельсону: E. Nelson, Analytic Vectors, *Ann. Math.*, 70 (1959), 572—614.

Пусть G—локально компактная группа Ли, а $U(g)$—непрерывное унитарное представление G на $\mathscr{H}$, dg—мера Хаара на G. Тогда множество D конечных линейных комбинаций векторов вида

$$\varphi_f = \int_G f(g)\, U(g)\, \varphi\, dg, \qquad \varphi \in \mathscr{H}, \qquad f \in C_0^\infty(G),$$

плотно в областях определения генераторов всех однопараметрических подгрупп группы G, и эти генераторы отображают D в себя. Это утверждение принадлежит Гордингу: L. Gårding, Notes on Continuous Representations of Lie Groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 33 (1947), 331—332, а D часто называют «областью Гординга». Существование области Гординга очень важно потому, что это позволяет строить представления алгебры Ли группы G на D.

§ VIII.5. Пример Нельсона не опубликован, но похожий пример содержится в его цитированной выше статье «Analytic Vectors». Нельсон доказал также, что если A и B—симметрические операторы, D—плотная область, содержащаяся в $D(A) \cap D(B)$ и инвариантная относительно A и B, $AB\varphi - BA\varphi = 0$ для $\varphi \in D$ и сумма $A^2 + B^2$ в существенном самосопряженна на D, то A и B

также в существенном самосопряженны на D и их замыкания коммутируют. Первоначальное доказательство теоремы VIII.14 можно найти в статье: J. von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, *Math. Ann.*, **104** (1931), 570—578. Более современное доказательство содержится в работе: Kastler, The C^*-Algebra of a Free Boson Field, I, *Commun. Math. Phys.*, **1** (1965), 14—48. Соотношения Вейля были введены в работе: H. Weyl, Quantenmechanik und Gruppentheorie, *Z. Phys.*, **46** (1927), 1—46. Мы доказываем теорему VIII.14 в гл. XIV (см. также задачу 30 гл. X).

Относительно обращения следствия теоремы VIII.14 известно, что если P и Q симметричны на D и выполнены условия (a) и (b) и вдобавок сумма P^2+Q^2 в существенном самосопряженна на D, то P и Q в существенном самосопряженны на D, а группы удовлетворяют соотношениям Вейля. Доказательство и обсуждение обобщения этого утверждения на случай n степеней свободы приведено в работе Диксмье: J. Dixmier, Sur la Relation $i(PQ-QP)=I$, *Compos. Math.*, **13** (1956), 263—269. Интересна также статья: B. Fuglede, On the Relation $PQ-QP=iI$, *Math. Scand.*, **20** (1967), 79—88.

§ VIII.6. Спектральная теория для ограниченных операторов первоначально строилась в терминах квадратичных форм. Интересный исторический факт состоит в том, что простые свойства полуограниченных квадратичных форм не были по-настоящему оценены до тех пор, пока (двадцать пять лет спустя) путем применения операторов вместо форм спектральная теория не была распространена на неограниченный случай. Мысль о связи форм и операторов неявно содержится в работе Фридрихса, обсуждаемой в замечаниях к § X.3 (особенно в доказательстве Фрейденталя), но теорема о расширении по Фридрихсу до 1950 г. всегда формулировалась на языке операторов. В пятидесятые годы теоремы VIII.15 и VIII.16 независимо обсуждали и открывали многие авторы; см., в частности: P. Lax, A. Milgram, Parabolic Equations, *Ann. Math. Study*, **33** (1954), 167—190; T. Kato, Quadratic forms in Hilbert spaces and asymptotic perturbation series, Tech. Rep. No.9, Univ. of Calif., 1955; J. Lions, Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer, New York, 1961. На исследование и доказательство теоремы VIII.15 в терминах шкалы пространств указывал Нельсон (более подробное обсуждение см., например, в книге: E. Nelson, Topics in Dynamics, v.1, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970). Исчерпывающее исследование квадратичных форм проводится также в гл. 6 монографии Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972, и в гл. 12 книги: M. Schechter, Principles of Functional Analysis, Academic Press, New York and London, 1971.

Термин «аккретивный» впервые появился в статье: K. Friedrichs, Symmetric Positive Linear Differential Equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333—418, в какой-то мере как шутка, но был подхвачен. Первоначально он относился к операторам, удовлетворяющим условию $\operatorname{Re}(u, Au)\geqslant 0$ для всех $u\in D(A)$. Изучать такие операторы начал, по существу, Филлипс в работе: R. S. Phillips, Perturbation Theory for Semigroups of Linear Operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1954), 199—221. (Филлипс изучал диссипативные операторы, т. е. такие операторы A, что $\operatorname{Re}(u, Au)\leqslant 0$ для всех $u\in D(A)$). Понятие «секториальный» использовалось в случаях, когда выполнялось условие $\{(u, Au)\}\subset\{z \mid |\arg(z-w)|<\theta\}$ для некоторого w и некоторого $\theta<\pi/2$. Эти определения часто переносят на формы, т. е. те формы, которые мы назвали строго аккретивными, часто называют секториальными. Поскольку в приложениях часто встречаются повернутые и сдвинутые секторы, мы ввели понятие «строго аккретивный» и обобщили понятие «секториальный».

m-аккретивные операторы — это максимальные аккретивные операторы в том же смысле, в каком самосопряженные операторы суть максимальные симметрические операторы. К этому вопросу мы вернемся в § X.6.

§ VIII.7. Дополнительное обсуждение большей части материала этого раздела читатель может найти в цитированной выше книге Като.

Понятие равномерной резольвентной сходимости определяется сужением на самосопряженные операторы естественной топологии на множестве замкнутых операторов из одного банахова пространства в другое. С. Г. Крейн с соавторами ввели в сороковых годах естественную метрику на замкнутых подпространствах банахова пространства. Именно, для заданных M и N в банаховом пространстве X положим по определению

$$d(M, N) = \sup_{u \in M,\ \|u\|=1} \left(\inf_{v \in N,\ \|v\|=1} \|u-v\| \right).$$

Тогда $M \subset N$ в том и только в том случае, когда $d(M, N)=0$. Если $\hat{d}(M, N) = \max[d(M, N), d(N, M)]$, то $\hat{d}$ — метрика на всех замкнутых подпространствах. Если $\Gamma(T)$ — график T, то можно ввести метрику на всех замкнутых операторах из X в Y, полагая $\rho(T, S) = \hat{d}(\Gamma(T), \Gamma(S))$, где, скажем, $\|\langle x, y\rangle\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Так получается топология на замкнутых операторах, впервые введенная в работе: J. Newburgh, A Topology for Closed Operators, *Ann. Math.*, **53** (1951), 250—255. Ее сужение на самосопряженные операторы как раз и дает топологию равномерной резольвентной сходимости.

Теоремы VIII.21 и VIII.22 наиболее естественно формулируются в терминах теории полугрупп операторов на произвольных банаховых пространствах. Теорема VIII.21 впервые, видимо, была явно доказана (на общем языке полугрупп) в работе: H. Trotter, Approximation of Semigroups of Operators, *Pacific J. Math.*, **8** (1959), 887—919; «в фольклоре» она в то время уже была известна. Теорема VIII.22 тоже была доказана Троттером в той же статье, но один момент его доказательства уточнил Т. Като: T. Kato, Remarks on Pseudo-resolvents and Infinitesimal Generators of Semigroups, *Proc. Jap. Acad.*, **35** (1959), 467—468. Теорему VIII.21 иногда называют теоремой Троттера — Като. Обсуждение равномерной и сильной сходимости операторов, не обязательно самосопряженных, см. в книге Като: § 2 гл. IV (равномерная сходимость) и § 1 и 3 гл. VIII (сильная сходимость).

Теоремы типа VIII.23 и VIII.24 впервые были доказаны Ф. Реллихом (F. Rellich, Störungstheorie der Spektralzerlegung, II, *Math. Ann.*, **113** (1936), 667—685). Обобщение результатов Реллиха появилось в статьях: B. Sz.-Nagy, Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Comm. Math. Helv.*, **19** (1946—1947), 347—366; E. Heinz, Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Ann.*, **123** (1951), 415—438.

Систематическое изучение граф-пределов было начато в работе: J. Glimm and A. Jaffe, Singular Perturbations of Self-adjoint Operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 401—414. Мы вернемся к их идеям в § X.8.

§ VIII.8. Распространение теоремы Ли на бесконечномерный случай впервые было выполнено Троттером: H. Trotter, On the Product of Semigroups of Operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 545—551. Он доказал теорему VIII.31 для полугрупп на банаховом пространстве. Позднее его доказательство упростил Чернов (P. R. Chernoff, Note on Product Formulas for Operator Semigroups, *J. Funct. Anal.*, **2** (1968), 238—242).

Приведенное доказательство теоремы VIII.30 дано Нельсоном: E. Nelson, Feynman Integrals and the Schrödinger Equation, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 332—343.

Обобщения формулы Троттера на различные специальные случаи, когда сумма $A+B$ не есть в существенном самосопряженный оператор, а определена как сумма форм, даны в работах: W. Faris, The Product Formula for Semigroups Defined by Friedrichs Extensions, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 47—70; P. R. Chernoff, Semigroup Product Formulas and Addition of Unbounded Operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 395.

§ VIII.10. Первое математически строгое построение вторичного квантования можно найти в работе: J. Cook, The Mathematics of Second Quantization,

Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), 222—245. Для более полной информации по этому поводу см. I. Segal, Tensor Algebras over Hilbert Spaces, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 81 (1956), 106—134.

Обозначение $d\Gamma$ возникает следующим образом. Множество $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ естественным образом превращается в алгебру относительно умножения

$$(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) \cdot (\psi_{n+1} \otimes \cdots \otimes \psi_{n+k}) = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{n+k}.$$

Обозначим это умножение символом $\otimes$. Итак, $\psi \otimes \phi$ определено для всех $\psi, \phi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Естественными автоморфизмами $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ являются обратимые линейные сохраняющие норму отображения V, обладающие свойством $V(\psi \otimes \phi) = V\psi \otimes V\phi$. Естественными же автоморфизмами $\mathcal{H}$ являются как раз унитарные преобразования. Каждому унитарному оператору U однозначно сопоставляется автоморфизм $\Gamma(U)$ на $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, если положить $\Gamma(U) = U$ на $\mathcal{H}$ и потребовать, чтобы $\Gamma(U) = U \otimes \ldots \otimes U$ (n раз) на $\mathcal{H}^n = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{H}$. Итак, Γ отображает группу унитарных преобразований $\mathcal{H}$ в группу автоморфизмов $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, причем это отображение сильно непрерывно. Тогда $d\Gamma$ определяется требованием $e^{itd\Gamma(A)} = \Gamma(e^{itA})$, т. е. $d\Gamma(A)$ для любого самосопряженного A в $\mathcal{H}$ есть инфинитезимальный генератор сильно непрерывной унитарной группы $\Gamma(e^{itA})$. На языке теории Ли $d\Gamma$ — дифференциал Γ, рассматриваемого как отображение «алгебры Ли» группы унитарных операторов на $\mathcal{H}$ в алгебру Ли группы унитарных операторов на $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Доказательство того, что так определенный оператор $d\Gamma$ совпадает с замыканием $d\Gamma$, определенного в § VIII.10,— несложное упражнение.

В обычных «физических» обозначениях если $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, dx)$ и A определен так, что $(Af)(x) = \omega(x) f(x)$, то $d\Gamma(A)$ есть именно то, что записывается как $\int \omega(x) a^*(x) a(x)\, dx$.

Доказательство теоремы VIII.33 показывает, как спектральная теорема позволяет использовать L^p-технику при решении задач в абстрактных гильбертовых пространствах. С помощью спектральной теоремы часто удается сформулировать данную задачу в терминах $L^2(M, d\mu)$ для некоторого подходящего пространства с мерой $\langle M, \mu \rangle$. А после того, как это сделано, часто можно воспользоваться стандартными теоремами и оценками L^p-теории.

§ VIII.11. Попытки априорного обоснования рассматриваемой нами квантовомеханической картины восходят к знаменитой монографии фон Неймана 1932 г. (Математические основы квантовой механики, «Наука», М., 1964). Подход Дж. Макки (Лекции по математическим основам квантовой механики, «Мир», М., 1965, и G. Mackey, Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1968) подчеркивает аналогию с классической статистической механикой и выделяет специальные постулаты любого аксиоматического подхода к квантовой механике.

Макки предлагает следующую картину классической статистической механики. Основные состояния классической механической системы суть точки в «фазовом пространстве» M. Статистические состояния — не что иное, как меры на M с единичной полной массой, а наблюдаемые — измеримые функции на M. Для заданного состояния μ и наблюдаемой f мера $\nu_{\mu, f}$ на $\mathbb{R}$, определенная как $\nu_{\mu, f}(\Omega) = \mu(f^{-1}(\Omega))$, представляет собой вероятность того, что измерение f дает значение, лежащее в Ω. Первое замечание Макки состоит в том, что точки M на самом деле не участвуют в излагаемой схеме. Скорее в качестве основного объекта в теорию входит семейство $\mathfrak{L}$ борелевых множеств. Состояния μ в действительности являются функциями на $\mathfrak{L}$, а для построения $\nu_{\mu, f}$ необходима лишь функция f^{-1}, отображающая борелевы множества из $\mathbb{R}$ в $\mathfrak{L}$. Для того чтобы $\nu_{\mu, f}$ была вероятностной мерой (т. е. чтобы ее полная масса равнялась 1) на $\mathbb{R}$, нужно, чтобы абстрактная структура на $\mathfrak{L}$ удовлетворяла следующим условиям:

(i) на $\mathfrak{L}$ задано частичное упорядочение $\leqslant$ ($A \leqslant B$, если A — подмножество B) с наибольшим элементом 1 (у нас $M=1$) и наименьшим элементом 0 (у нас $\varnothing=0$);

(ii) в $\mathfrak{L}$ задана операция дополнения $'$ ($A'=M\setminus A$) с такими свойствами: $(A')'=A$; $A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда $B' \leqslant A'$; $1'=0$;

(iii) $\mathfrak{L}$ есть σ-решетка, т. е. для заданных $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{L}$ существует такое

$$A=\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n,$$

что $A \geqslant A_n$ при всех n и $A \leqslant B$, если $B \geqslant A_n$ при всех n;

(iv) структура σ-решетки и операция дополнения связаны условием $A \vee A' = 1$.

Абстрактное множество $\mathfrak{L}$ со свойствами (i)—(iv) называется **решеткой с ортодополнением**. Коль скоро такой объект задан, элементы A, $B \in \mathfrak{L}$ называются *дизъюнктными*, если $A \leqslant B'$. *Мера на* $\mathfrak{L}$—это такое отображение μ: $\mathfrak{L} \to \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geqslant 0\}$, что $\mu(1)=1$ и

$$\mu\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

если A_i и A_j дизъюнктны при всех i и j; *$\mathfrak{L}$-значная мера*—это такое отображение P: $\mathscr{B} \to \mathfrak{L}$, где $\mathscr{B}$—семейство борелевых множеств из $\mathbb{R}$, что $P(\mathbb{R})=1$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$$

и $P(\mathbb{R}\setminus A)=P(A')$.

Итак, предложенное Макки описание классической статистической механики приводит к абстрактному понятию *статистической системы* как решетки с ортодополнением. Наблюдаемые оказываются тогда $\mathfrak{L}$-значными мерами, а состояния—мерами на $\mathfrak{L}$. Для заданного состояния μ и наблюдаемой θ борелева мера

$$\nu_{\mu,\theta}(\Omega)=\mu(\theta(\Omega))$$

на $\mathbb{R}$ интерпретируется как вероятность того, что измерение наблюдаемой θ в состоянии μ даст величину, лежащую в Ω.

В первой из указанных работ Макки имеется описание набора разумных аксиом для понятия «измерения» в статистической системе, которое приводит к решеткам с ортодополнением. Чтобы получить квантовую механику, к основной схеме необходимо добавить следующий *специальный постулат*: $\mathfrak{L}$ является семейством $\mathfrak{L}_{\mathscr{H}}$ замкнутых подпространств сепарабельного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ с операциями: $A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$; $A'=A^{\perp}$ и $\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n=\sum_{n=1}^{\infty} A_n$; $1=\mathscr{H}$; $0=\{0\}$. Таким образом, возникает задача обосновать этот постулат. Важный шаг в этом направлении совершил Пирон (C. Piron, Axiomatique Quantique, *Helv. Phys. Acta*, 37 (1964), 439—468). См. также обсуждение этой проблемы в упоминаемой ниже монографии Яуха.

После того как такой специальный постулат принят, состояния и наблюдаемые можно построить в более явной форме. Глисон (A. Gleason, Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space, *J. Math. Mech.*, 6 (1957), 885—894) доказал, что каждая мера на $\mathfrak{L}_{\mathscr{H}}$ может быть получена следующим образом. Каждому подпространству $A \in \mathfrak{L}_{\mathscr{H}}$ естественно соответствует ортогональный проектор P, такой, что $\operatorname{Ran} P=A$. Глисон доказал, что каждая мера μ на $\mathfrak{L}_{\mathscr{H}}$ представима в виде $\mu(A)=\operatorname{tr}(\rho P)$, где ρ—некоторый положительный оператор со следом $\operatorname{tr}\rho=1$. В силу теорем VI.17 и VI.21, существует ортонормированный базис $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots \geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$, что $\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\Phi_n, \cdot) \Phi_n$. Итак, произвольные состояния суть не что иное, как суммы *векторных состояний*, т. е. состояний вида $\mu(P) = (\Phi_n, P\Phi_n)$ (на языке § XVI.1 эти векторные состояния суть экстремальные точки семейства всех состояний). В результате все состояния можно изучать, рассматривая лишь векторные состояния.

$\mathfrak{L}_{\mathscr{H}}$-значные меры — это в точности проекторнозначные меры! Итак, в соответствии со спектральной теоремой (теоремой VIII.6), всякой наблюдаемой естественным образом сопоставляется самосопряженный оператор A. Вероятность получить значение из Ω при измерении A в векторном состоянии ψ как раз и есть $(\psi, P_\Omega \psi)$, где P_Ω — проекторнозначная мера оператора A.

Отсюда видно, как основные компоненты схемы § VIII.11 появляются на основе специального постулата. Динамическая картина выявляется в результате следующего анализа.

(1) Для каждого момента времени t на множестве всех состояний должно быть задано отображение α_t, переводящее состояние в момент s в состояние в момент $s+t$. Поскольку $\alpha_t \alpha_{-t} = \alpha_0 = I$, каждое α_t должно быть биекцией. Более того, $\alpha(\rho_1 + \rho_2)$ должно равняться $\alpha(\rho_1) + \alpha(\rho_2)$.

(2) Поскольку любое состояние есть сумма векторных состояний, необходимо знать поведение α лишь на векторных состояниях. Последние однозначно определяются свойством экстремальности, поэтому, в силу обратимости, α должно переводить векторные состояния в векторные же состояния. Итак, α — отображение единичных лучей (т. е. семейств векторов вида $\{e^{i\theta}\psi \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$) в себя. Оно не вполне произвольно, поскольку существуют векторные состояния $\rho_{\Phi_1}, \ldots, \rho_{\Phi_4}$, такие, что

$$^1/_2\rho_{\Phi_1} + {}^1/_2\rho_{\Phi_2} = {}^1/_2\rho_{\Phi_3} + {}^1/_2\rho_{\Phi_4},$$

и необходимо, чтобы

$$^1/_2\rho_{\alpha(\Phi_1)} + {}^1/_2\rho_{\alpha(\Phi_2)} = {}^1/_2\rho_{\alpha(\Phi_3)} + {}^1/_2\rho_{\alpha(\Phi_4)}.$$

Например, если Φ_1 и Φ_2 ортогональны и

$$\Phi_3 = 2^{-1/2}(\Phi_1 + \Phi_2), \quad \Phi_4 = 2^{-1/2}(\Phi_1 - \Phi_2),$$

то на основе предыдущего можно заключить, что $\alpha(\Phi_1)$ ортогонально $\alpha(\Phi_2)$. В общем случае доказывается, что отображение на лучах порождает автоморфизм всех состояний тогда и только тогда, когда $|(\alpha(\Phi_1), \alpha(\Phi_2))| = |(\Phi_1, \Phi_2)|$ для всех единичных лучей Φ_1, Φ_2.

(3) Исследование Е. Вигнера, изложенное в его книге «Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров», ИЛ, М., 1961 [см. также V. Bargmann, Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 862—868] использует построения пункта (2) для доказательства того, что каждый автоморфизм лучей имеет вид $\alpha(\Phi) = U\Phi$, где U унитарен или антиунитарен. С точностью до изменения общего фазового множителя $U \longrightarrow e^{i\theta}U$, α однозначно определяет U.

(4) В силу равенства $\alpha_t = (\alpha_{t/2})^2$, оператор U_t из п. (3) должен быть унитарным. Естественно предполагать, что $t \mapsto \alpha_t(\rho)$ непрерывно. Тогда, согласно одной теореме Баргмана и Вигнера [V. Bargmann, On the Unitary Ray Representations of Continuous Groups, *Ann. Math.*, **59** (1954), 1—46; E. Wigner, Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, *Ann. Math.*, **40** (1939), 149—204], фазы, оставшиеся в п. (3) произвольными, можно выбрать так, чтобы U_t был сильно непрерывным по t.

(5) Поскольку $\alpha_t \alpha_s = \alpha_{t+s}$, можно заключить, что $U_t U_s = \lambda(t, s) U_{t+s}$, причем $|\lambda(t, s)| = 1$. (Несмотря на ограничения п. (4), некий произвол в вы-

боре фазовых множителей еще остается.) Из дальнейшего анализа, проведенного Баргманом и Вигнером (см. цитированные выше работы), следует, что $\lambda(t, s)=\mu(t+s)\,\mu(t)^{-1}\mu(s)^{-1}$, где μ — некоторая измеримая функция, $|\mu(t)|=1$. Полагая $V(t)=\mu(t)\,U_t$, получаем сильно непрерывную однопараметрическую группу унитарных операторов, которую теперь можно исследовать с помощью теоремы Стоуна так, как было указано при обсуждении этой теоремы.

Существует еще один элемент данной картины, который можно обосновать в рамках более фундаментальных предположений. Мы имеем в виду конкретную реализацию $\mathcal{H}$ в виде $L^2(\mathbb{R}^n)$ с $p=i^{-1}\partial/\partial x$ и т. д. и свободным гамильтонианом $H_0=-(2m)^{-1}\Delta$. Такая реализация $\mathcal{H}$ связана, конечно, с теоремой фон Неймана о единственности решений канонических коммутационных соотношений в конечномерном случае (см. § VIII.5). На более фундаментальном уровне это связано с евклидовой инвариантностью (симметрия относительно пространственных сдвигов и вращений) и операторами координаты. Обсуждение этих фактов содержится во второй из указанных работ Макки, а также в статье: A. Wightman, On the Localizability of Quantum Mechanical Systems, *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 845—872. Тот факт, что $H_0=-(2m)^{-1}\Delta$, связан с галилеевой инвариантностью, как показано во второй работе Макки и статье Баргмана в *Ann. Math.* (см. выше), а также в статьях: E. Inönu, E. Wigner, Representations of the Galilei Group, *Nuovo Cimento*, **9** (1952), 705—718; C. Piron, Sur le quantification du système de deux particules, *Helv. Phys. Acta*, **38** (1965), 104—108.

Мы только что детально обсудили один из возможных подходов к квантовой аксиоматике. Дополнительное обсуждение, а также другие подходы можно найти в следующих работах: G. Birkhoff, J. von Neumann, The Logic of Quantum Mechanics, *Ann. Math.*, **37** (1936), 823—843; G. Dahn, Attempt of an Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics and More General Theories, IV, *Commun. Math. Phys.*, **9** (1968), 192—211; E. B. Davies, Quantum Stochastic Processes, *Commun. Math. Phys.*, **15** (1969), 277—304; E. B. Davies, J. T. Lewis, An Operational Approach to Quantum Probability, *Commun. Math. Phys.*, **17** (1970), 239—260; C. M. Edwards, The Operational Approach to Algebraic Quantum Theory, I, *Commun. Math. Phys.*, **16** (1970), 207—230; J. Gunson, On the Algebraic Structure of Quantum Mechanics, *Commun. Math. Phys.*, **6** (1967), 262—285; K. E. Hellwig, K. Kraus, Operations and Measurements, I, II, *Commun. Math. Phys.*, **11** (1969), 214—220; **16** (1970), 142—147; J. Jauch, Foundations of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968; P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner, On the Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism, *Ann. Math.*, **35** (1934), 29—64; G. Ludwig, Attempt at an Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics and more General Theories, I—III, *Z. Phys.*, **181** (1964), 223—260; *Commun. Math. Phys.*, **4** (1967), 331—348; **9** (1968), 1—12; B. Mielnik, Geometry of Quantum States, *Commun. Math. Phys.*, **9** (1968), 55—80; R. J. Plymen, A Modification of Piron's Axioms, *Helv. Phys. Acta*, **41** (1968), 69—74; R. J. Plymen, C^*-Algebras and Mackey's Axioms, *Commun. Math. Phys.*, **8** (1968), 132—146; J. Pool, Baer *-Semigroups and the Logic of Quantum Mechanics, *Commun. Math. Phys.*, **9** (1968), 118—141; J. Pool, Semimodularity and the Logic of Quantum Mechanics, *Commun. Math. Phys.*, **9** (1968), 212—228; E. Prugovečki, Quantum Mechanics in Hilbert Spaces, Academic Press, New York, 1971; I. Segal, Postulates for General Quantum Mechanics, *Ann. Math.*, **48** (1947), 930—940; V. Varadarajan, Geometry of Quantum Theory, Van Nostrand — Reinhold, Princeton, N. J., 1968; H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Dover, New York, 1931; N. Zierler, Axioms for Non-relativistic Quantum Mechanics, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 1151—1169.

Несмотря на огромное количество литературы по поводу этих «изначальных» основ квантовой теории, окончательная форма квантовой аксиоматики отсутствует. Вероятно, наиболее важным результатом попыток аксиоматизировать квантовую теорию следует считать наметившийся выход из аксиоматического круговорота: теория неограннченных самосопряженных операторов, йордановы алгебры и подход к квантовой теории при помощи C^*-алгебр (рассматриваемый в гл. XIX и XX) — выросли из этих попыток.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис гнльбертова пространства $\mathscr{H}$, и пусть e_∞ — вектор из $\mathscr{H}$, не являющийся конечной линейной комбинацией векторов φ_n. Пусть D — множество конечных линейных комбинаций элементов $\{\varphi_n\}$ и e_∞; зададим на D оператор

$$T\left(be_\infty + \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right) = be_\infty.$$

Покажнте, что $\overline{\Gamma(T)}$ содержит как $\langle e_\infty, e_\infty\rangle$, так и $\langle e_\infty, 0\rangle$, н, следовательно, не является графиком линейного оператора.

2. Пусть S — инъективный оператор из $D(S)$ в $\mathscr{H}$. Рассмотрим следующие дополнительные утверждения об S:

(1) S — замкнутый оператор;
(2) множество $\operatorname{Ran} S$ *плотно*;
(3) множество $\operatorname{Ran} S$ замкнуто;
(4) для некоторой константы C и всех $\psi \in D(S)$: $\|S\psi\| \geqslant C\|\psi\|$.

(a) Докажите, что нз (1)—(3) следует (4). *Указание*: применнте теорему о замкнутом графике к S^{-1}.
(b) Докажите, что из (2)—(4) следует (1).
(c) Докажите, что из (1) и (4) следует (3).

Замечание. Пусть T — замкнутый оператор. Применяя (a) к $\lambda - T$, видим, что $\lambda \in \rho(T)$ тогда и только тогда, когда $\lambda - T$ — биекция; (b) также можно «перевести» подобным образом.

†*3.* Докажнте, что операторы в прнмере 5 § VIII.1 замкнуты.

4. (a) Предположим, что C — симметрический оператор, $C \supset A$ и что $\operatorname{Ran}(A+i) = \operatorname{Ran}(C+i)$. Докажите, что $C = A$.
(b) Предположим, что A — симметрнческий оператор, такой, что $\operatorname{Ran}(A+i) = \mathscr{H}$, но $\operatorname{Ran}(A-i) \neq \mathscr{H}$. Докажнте, что A не имеет самосопряженных расширений.

5. Пусть $\mathscr{H} = l_2$. Пусть $D(A) = \{a \in \mathscr{H} \mid$ существует такое N, что $\sum_{m=0}^{N} a_n = 0$ и $a_n = 0$ при $n > N\}$. Для $a \in D(A)$ определим $Aa \in \mathscr{H}$, полагая

$$(Aa)_n = i\left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m + \sum_{m=0}^{n} a_m\right).$$

(a) Докажите, что $D(A)$ плотно в $\mathscr{H}$.

(b) Докажнте, что A симметричен. *Указание*: если $\sum_{m=0}^{N} a_m = 0$, то

$$(Aa)_n = i\left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m - \sum_{m=n+1}^{N} a_m\right).$$

(c) Докажнте, что множество $\operatorname{Ran}(A+i)$ плотно в l_2.
(d) Докажите, что $(1, 0, 0, \ldots) \in D(A^*)$ и $(A^*+i)(1, 0, 0, \ldots) = 0$.

(e) Докажите, что A не имеет самосопряженных расширений. [*Указание*: примените задачу 4(b) к $\bar{A}$.]

†*6*. Докажите, что оператор T в примере § VIII.2 замкнут.

†*7*. Докажите, что операторы T_α в примере § VIII.2 самосопряженны. [*Указание*: это следует из уже доказанного факта, что если $\psi \in D(T_\alpha^*)$, то $\psi \in AC[0, 1]$ и $T_\alpha^* \psi = i\, d\psi/dx$.]

8. Рассмотрите $T = -d^2/dx^2$ как оператор в $L^2(\mathbf{R})$ с областью определения $C_0^\infty(\mathbf{R})$. Какой оператор сопряжен к T? Является ли T в существенном самосопряженным?

9. Рассмотрите $T = i\, d/dx$ как оператор в $L^2(0, \infty)$ с областью определения $C_0^\infty(0, \infty)$ — множеством бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, не содержащим нуля. Самосопряжен ли T в существенном?

10. Предположим, что A — плотно определенный симметрический оператор, который к тому же положителен, т. е. $(\varphi, A\varphi) \geqslant 0$, если $\varphi \in D(A)$.
(a) Докажите, что $\|(A+I)\varphi\|^2 \geqslant \|\varphi\|^2 + \|A\varphi\|^2$.
(b) Покажите, что $\operatorname{Ran}(A+I)$ замкнут, если A — замкнутый оператор.
(c) Покажите, что A в существенном самосопряжен тогда и только тогда, когда уравнение $A^*\psi = -\psi$ не имеет ненулевых решений.

†*11*. Докажите часть (c) теоремы VIII.7.

†*12*. Докажите теорему VIII.11 непосредственно, т. е. не прибегая к теореме VIII.10.

13. Найдите два плотных линейных подпространства D_1 и D_2 в $L^2(\mathbf{R})$, $D_1 \cap D_2 = \{0\}$, такие, что x в существенном самосопряжен на D_1, а x^2 в существенном самосопряжен на D_2.

†*14*. Пусть A — симметрический оператор с областью определения $D \subset \mathcal{H}$. Пусть $D_1 \subset D$ — плотное линейное подмножество в $\mathcal{H}$, и предположим, что $A \restriction D_1$ в существенном самосопряжен. Докажите, что A в существенном самосопряжен и $\bar{A} = \overline{A \restriction D_1}$.

†*15*. (a) Докажите, что оператор A замкнут тогда и только тогда, когда его область определения $D(A)$ полна по норме

$$\|\psi\|_A = \|A\psi\| + \|\psi\|.$$

(b) Докажите, что полуограниченная квадратичная форма замкнута в том и только том случае, когда для любой последовательности $\{\varphi_n\}$, такой, что $\varphi_n \in Q(q)$, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \varphi$ и $q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) \underset{n,\, m \to \infty}{\longrightarrow} 0$, имеем $\varphi \in Q(q)$ и $q(\varphi_n - \varphi, \varphi_n - \varphi) \longrightarrow 0$.

†*16*. (a) Покажите, что квадратичная форма q, порождаемая полуограниченным самосопряженным оператором A (пример 2 § VIII.6), замкнута.
(b) Покажите, что любая существенная область для A является существенной областью для q.

†*17*. Докажите утверждения (a)—(d) примера 3 § VIII.6.

†*18*. Восполните детали доказательства теоремы VIII.16.

19. Пусть $A_n = (1 - 1/n)x$ в $L^2(\mathbf{R})$ и $A = x$. Покажите, что можно выбрать области самосопряженности в существенном для A_n и A, не имеющие ненулевых векторов в общей части, но что $A_n \longrightarrow A$ в равномерном резольвентном смысле.

20. (a) Пусть $\{A_n\}$ и A — самосопряженные операторы, и предположим, что для всех $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ и всех λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, выполняется соотношение $(R_\lambda(A_n)\varphi, \psi) \longrightarrow (R_\lambda(A)\varphi, \psi)$. Докажите, что $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле. [*Указание*: воспользуйтесь тождеством Гильберта.]
(b) Пусть $\{A_n\}$ и A — самосопряженные операторы. Примените часть (a) для доказательства того, что если $R_\lambda(A_n)$ сильно сходится к $R_\lambda(A)$ в нижней полуплоскости, то $R_\lambda(A_n)$ также сходится сильно к $R_\lambda(A)$ в верхней полуплоскости.

†*21.* Обобщите доказательства теорем VIII.20 и VIII.21, чтобы показать, что если $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле, то $e^{itA_n}\varphi \longrightarrow e^{itA}\varphi$ *равномерно* по t в любом конечном интервале.

†*22.* Восполните детали доказательств пунктов (b) и (c) теоремы VIII.25.

23. (a) Пусть $\{A_n\}$ — последовательность самосопряженных операторов, и предположим, что для каждого $\varphi \in \mathcal{H}$ и каждого $t \in \mathbb{R}$ последовательность $e^{itA_n}\varphi$ сходится в $\mathcal{H}$. Докажите, что существует самосопряженный оператор A, такой, что $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле. [*Указание*: примените теорему фон Неймана из § VIII.4.]
(b) Приведите пример, показывающий, что заключение пункта (a) может не иметь места, если e^{itA_n} сходится слабо, а не сильно.

†*24.* Докажите теорему VIII.27b.

†*25.* Докажите теорему VIII.28.

26. Пусть $\{A_n\}$ — равномерно ограниченная последовательность самосопряженных операторов. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Докажите, что $A = \text{w. gr.-lim}\, A_n$ тогда и только тогда, когда $A_n \longrightarrow A$ в слабой операторной топологии.

27. Пусть $\{A_n\}$ и A — положительные самосопряженные операторы. Докажите, что $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле тогда и только тогда, когда $(A_n + I)^{-1} \longrightarrow (A + I)^{-1}$ сильно.

†*28.* Докажите, что если $\{A_n\}$ и A — равномерно ограниченные самосопряженные операторы, то $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле тогда и только тогда, когда $A_n \longrightarrow A$ сильно.

29. Пусть A самосопряжен.
(a) Докажите, что $tA \longrightarrow t_0 A$ в равномерном резольвентном смысле при $t \longrightarrow t_0 \neq 0$.
(b) Докажите, что $e^{itA} \longrightarrow e^{it_0A}$ равномерно тогда и только тогда, когда A ограничен.

30.†(a) Докажите, что если $\{A_n\}$ и A — равномерно ограниченные самосопряженные операторы и $A_n \xrightarrow{w} A$, но $A_n \overset{s}{\not\longrightarrow} A$, то A_n не сходится к A в слабом резольвентном смысле.
(b) Когда не имеет места слабый аналог теоремы VIII.18?

31. Справедлив ли аналог пункта (a) теоремы VIII.25 для форм?

32. Докажите, что $A_n = nI$ имеет сильный граф-предел при $n \longrightarrow \infty$, который не является графиком никакого оператора.

33. Пусть $\{A_n\}$ — *постоянная* последовательность симметрических операторов (т. е. $A_n = B\ \forall n$). Докажите, что сильный граф-предел A_n равен замыканию B.

34. Пусть R — оператор правого сдвига на l_2. Докажите, что w.gr.-lim R^n — нулевой оператор, хотя st.gr.-lim R^n имеет график $\{\langle 0, 0\rangle\}$.

35. Докажите непосредственно (не применяя преобразования Фурье), что $i^{-1}(d/dx)$ в существенном самосопряжен на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

†*36.* Докажите следствие теоремы VIII.14.

†*37.* Воспроизведите детали доказательства теоремы VIII.22.

38. (a) Пусть $\{A_n\}$ и A — положительные самосопряженные операторы, и предположим, что $e^{-tA_n} \longrightarrow e^{-tA}$ сильно при каждом $t > 0$. Докажите, что $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле.

(b) Докажите аналог пункта (a), если сильная сходимость заменена равномерной сходимостью.

39. Пусть $U(t)$, $t \geqslant 0$, — семейство самосопряженных операторов, удовлетворяющее условиям (i) $\|U(t)\| \leqslant e^{Et}$ для некоторого $E \in \mathbb{R}$, (ii) $U(t)U(s) = U(t+s)$, (iii) отображение $t \mapsto U(t)$ сильно непрерывно, (iv) $U(0) = I$. Тогда

(a) Подражая доказательству теоремы Стоуна, покажите, что $U(t) = e^{-At}$ для единственного самосопряженного оператора A.

(b) Получите тот же результат, пользуясь функциональным исчислением.

(c) Докажите, что $A \geqslant -E$.

40. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой и $\mathscr{H} = L^2(M, d\mu)$. Отображение T пространства $L^2(M, d\mu)$ в себя назовем **сохраняющим положительность**, если $(Tf)(x) \geqslant 0$ п.в., как только $f(x) \geqslant 0$ п.в. Пусть A, B — самосопряженные операторы в $\mathscr{H}$, и предположим, что e^{-itA} и e^{-itB} сохраняют положительность при всех $t \in \mathbb{R}$ и что $A + B$ в существенном самосопряжен на $D(A) \cap D(B)$. Докажите, что $e^{i(At+Bt)}$ сохраняет положительность при любом $t \in \mathbb{R}$.

41. Пусть H_0 и V — замкнутые положительные квадратичные формы, и пусть $\beta \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Предположим, что $Q(H_0) \cap Q(V)$ плотно в $\mathscr{H}$. Докажите, что сумма $H_0 + \beta V$, определенная как квадратичная форма на $Q(H_0) \cap Q(V)$, замкнута и секториальна.

42. Пусть T — самосопряженный плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Предположим, что для некоторых $\lambda_0 \in \rho(T)$ оператор $R_{\lambda_0}(T)$ компактен. Докажите, что $R_\lambda(T)$ компактен при всех $\lambda \in \rho(T)$, и рассмотрите различные типы спектров, которые может иметь T.

Замечание. Операторы с компактными резольвентами мы изучаем в гл. XIII.

43. (a) Приведите пример, показывающий, что для получения полного спектра $P(A_1, \ldots, A_N)$ может понадобиться *замыкание* области значений P на $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{k=1}^{N} \sigma(A_k)$.

(b) Докажите, что если $A_1, \ldots, A_N$ ограничены, то замыкание *не* требуется.

44. Докажите утверждение о единственности в теореме VIII.32.

45. Пусть T — замкнутый оператор. Докажите, что множество $M = \{\psi \mid \psi \in D(T),\ T\psi \in D(T^*)\}$ плотно, а оператор T^*T, определенный на M, самосопряжен. (*Указание:* пусть S — оператор, построенный в теореме VIII.32; покажите, что $D(S) \subset M$ и что T^*T — симметрическое расширение S.)

46. Пусть T — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве. Определим его числовую область значений $N(T)$ как $N(T) = \{(\psi, T\psi) \mid \psi \in D(T)\}$.

(a) Докажите, что $\sigma(T) \subset N(T) \cup N(T^*)^*$, где $N(T^*)^*$ — множество $\{\overline{(\psi, T^*\psi)} \mid \psi \in D(T)\}$.

(b) Найдите такой оператор T, что $\sigma(T) \not\subset N(T)$, а значит, $N(T) \neq \neq N(T^*)^*$. (*Указание*: выберите T симметрическим!)

47. Пусть A самосопряжен на $D(A)$ в $\mathcal{H}_1$ и B самосопряжен на $D(B)$ в $\mathcal{H}_2$. Примените теорему VIII.10 для доказательства того, что $A \otimes I + I \otimes B$ в существенном самосопряжен на $D(A) \otimes D(B)$. (*Указание*: $e^{itA} \otimes e^{itB}$ оставляет $D(A) \otimes D(B)$ инвариантным.)

48. Пусть A — замкнутый симметрический оператор и $A \neq A^*$. Пусть a и b — квадратичные формы, такие, что

$$Q(a) = D(A), \quad a(\psi, \varphi) = (A\psi, A\varphi),$$
$$Q(b) = D(A^*), \quad b(\psi, \varphi) = (A^*\psi, A^*\varphi).$$

Покажите, что $a \subset b$, но $a \neq b$, несмотря на то, что a и b — положительные симметричные формы.

49. Говорят, что оператор A имеет **чисто дискретный спектр** в (a, b), если $(a, b) \cap \sigma(A) = (a, b) \cap \sigma_{\text{disc}}(A)$.

(a) Докажите, что A имеет чисто дискретный спектр в (a, b) тогда и только тогда, когда $P_{(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)}$ компактен для всех достаточно малых ε, где $\{P_\Omega\}$ — семейство спектральных проекторов A.

(b) Докажите, что A имеет чисто дискретный спектр в (a, b) тогда и только тогда, когда оператор $f(A)$ компактен для любой функции f из C^∞, такой, что $\operatorname{supp} f \subset (a, b)$. [*Указание*: воспользуйтесь задачей 45 гл. VI.]

(c) Пусть $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле. Предположим, что каждый A_n имеет чисто точечный спектр в (a, b). Докажите, что и A имеет чисто точечный спектр в (a, b).

50. Пусть A — положительный самосопряженный оператор.

(a) Докажите, что $\|(A+w)^{-1}\| \leqslant w^{-1}$, если $w > 0$.

(b) Докажите, что риманов интеграл

$$\int_0^\infty w^{-1/2} (A+w)^{-1}\, dw$$

существует.

(c) Докажите, что

$$A^{+1/2}\psi = \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty w^{-1/2} (A+w)^{-1}\, dw\right] A\psi \quad \text{для любого } \psi \in D(A).$$

(d) Таким же образом докажите, что

$$A^\alpha \psi = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty [w^{\alpha-1} (A+w)^{-1}\, dw]\, A\psi \quad \text{для любого } \psi \in D(A),$$

если $0 < \alpha < 1$.

(e) Докажите, что

$$\left(\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{A^\alpha - 1}{\alpha}\right)\psi = (\log A)\,\psi \quad \text{для любого } \psi \in D(A).$$

51. Пусть A и B — самосопряженные операторы и $A, B \geqslant 0$; будем говорить, что $A \geqslant B$, если $D(B) \supset D(A)$ и $\langle\psi, B\psi\rangle \leqslant \langle\psi, A\psi\rangle$ для всех $\psi \in D(A)$.
(a) Пусть $0 \leqslant A \leqslant B$; докажите, что $A(A+w)^{-1} \leqslant B(B+w)^{-1}$, если $w \geqslant 0$.
(b) Докажите, что $A^{\alpha} \leqslant B^{\alpha}$, если $A \leqslant B$ и $0 < \alpha < 1$.
(c) Докажите, что $\log A \leqslant \log B$, если $A \leqslant B$.

**52.* Распространите доказательство спектральной теоремы из задачи 32 гл. VII на неограниченный случай, применяя полярное разложение для замкнутых операторов. Удостоверьтесь также, что можно доказать полярное разложение в неограниченном случае, не применяя спектральную теорему. [*Указание*: воспользуйтесь задачей 50.]

Литература к задаче 52: книга Като, стр. 352—354, 404—408, 419—422.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ