

Б. Р. БЕРГВЛЬСОН
А. П. СУВОРОВ
Б. З. ТОРЛИН

Многогрупповые
методы
расчёта
защиты
от нейтронов



Б. Р. БЕРГЕЛЬСОН,
А. П. СУВОРОВ,
Б. З. ТОРЛИН

МНОГОГРУППОВЫЕ
МЕТОДЫ
РАСЧЕТА
ЗАЩИТЫ
ОТ НЕЙТРОНОВ



АТОМИЗДАТ МОСКВА 1970

Б. Р. Бергельсон, А. П. Суворов, Б. З. Торлин. **Многогрупповые методы расчета защиты от нейтронов.**

Книга посвящена последовательному изложению основных вопросов, касающихся использования многогруппового приближения для расчетов нейтронной защиты ядерных реакторов.

Книга предназначена для студентов высших учебных заведений, специализирующихся в области физики защиты, а также для инженеров и научных работников, занимающихся расчетом и проектированием защиты ядерных реакторов.

Стр. 272, таблиц 24, библиография 120 названий.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Литература , , ,	7
Глава I. Кинетическое уравнение	8
§ 1. Индикатриса упругого рассеяния	10
§ 2. Индикатриса неупругого рассеяния	16
§ 3. Многогрупповое приближение	21
Литература	30
Глава II. Групповые константы	31
§ 1. Матрица переходов между группами	33
§ 2. Матрица упругих переходов	35
§ 3. Матрица неупругих переходов	46
§ 4. Определение групповых констант с помощью методов теории возмущений	52
§ 5. Спектр нейтронов для усреднения сечений внутри группы	62
Литература	74
Глава III. Метод сферических гармоник	76
§ 1. Вывод основных уравнений	76
§ 2. Многогрупповое приближение	87
§ 3. P_1 -приближение	89
§ 4. Диффузионное приближение	99
§ 5. P_2 -приближение	109
§ 6. P_N -приближение	115
Литература	127
Глава IV. Другие методы решения кинетического уравнения	129
§ 1. Метод моментов	129
§ 2. Двойной P_N -метод	135
§ 3. Методы дискретных ординат	150
§ 4. Асимптотические решения	166
Литература	174
Глава V. Метод интегральных уравнений	175
§ 1. Система интегральных уравнений в плоской геометрии	175
§ 2. Транспортное приближение для индикатрисы рассеяния	181
§ 3. Интегральное уравнение в случае изотропной индикатрисы рассеяния нейтронов	188
§ 4. Применение интегральных уравнений для расчетов спектров быстрых нейтронов в защите. Результаты расчетов и сравнение с экспериментом.	194
§ 5. Азимутальная асимметрия в случае плоской геометрии	198
§ 6. Система интегральных уравнений в сферической геометрии	203
Литература	208
Глава VI. Полуэмпирические методы	209
§ 1. Вывод основных уравнений	211

§ 2. Определение сечения выведения	216
§ 3. Многогрупповое приближение	224
§ 4. Различные модификации полуэмпирического метода	228
§ 5. Безводородная защита	235
Литература	241
Приложение I. Определение членов матрицы T_{ij}	243
Приложение II. Вывод выражения для тонкой структуры энергетической зависимости различных гармоник потока нейтронов	244
Приложение III. 19-групповая система констант	247
Литература , , , ,	269

ПРЕДИСЛОВИЕ

Успехи в развитии физики защиты от реакторного излучения привели к существенной дифференциации этой проблемы. Ее основные аспекты в настоящее время уже невозможно осветить сколько-нибудь подробно в одной, даже обширной, книге.

За последние годы появилось несколько монографий [1—4], посвященных детальному и глубокому рассмотрению отдельных вопросов переноса в среде нейтронного и γ -излучения реакторного спектра. Задача настоящей книги — восполнить пробел, существующий в части последовательного описания многогрупповых методов расчета защиты от нейтронов. Эти методы по праву занимают доминирующее положение среди других точных методов расчета глубокого проникновения нейтронов.

Применительно к проблемам защиты реакторов теория многогрупповых расчетов, хотя и имеет уже солидную библиографию, до сих пор нигде не была систематизирована. Единственная имеющаяся у нас книга, в которой достаточно полно освещены многогрупповые методы, — это монография Г. И. Марчука «Методы расчета ядерных реакторов». Однако эта книга имеет совершенно другую направленность: она посвящена многогрупповым методам расчета реакторов и, в первую очередь, их критичности.

Перенос нейтронов в среде описывается кинетическим уравнением Больцмана. Решением этого уравнения является функция распределения, зависящая в интересующем нас стационарном случае от шести переменных: три координаты, две угловые переменные и энергия. Строго говоря, из шести переменных энергетическая ничем не выделяется. Однако имеется ряд обстоятельств, которые заставляют рассматривать ее отдельно. Это прежде всего пределы, в которых изменяется энергия. Полный диапазон изменения энергии нейтрона может охватывать до 8 порядков: от десятка мегаэлектронвольт до долей вольта. Но самым важным обстоятельством, отличающим энергетическую переменную от остальных, является чрезвычайно сложная зависимость сечений от энергии. Многочисленные резонансы и нерегулярности в поведении сечений, как правило, не описываются аналитически на сколько-нибудь существенном интервале энергии, а введение в память вычислительных машин детальной информации о ходе сечений практически невозможно

при современном уровне вычислительной техники. Поэтому весь энергетический интервал разбивается на некоторое число энергетических групп. Внутри каждой группы перенос нейтронов в среде описывается односкоростным кинетическим уравнением*.

Задача, таким образом, сводится к построению системы односкоростных уравнений с правильным описанием как внутригруппового перемещения нейтрона, так и перехода из группы в группу. Для такого описания необходима система групповых сечений отдельных процессов, в которых участвуют нейтроны, т. е. сечений, усредненных соответствующим образом по ширине группы. Учитывая сложную резонансную структуру как сечений, так и нейтронных спектров, необходимо признать, что задача точного построения таких групповых сечений весьма трудна. Сейчас она выделилась в самостоятельный раздел нейтронной физики [5, 6].

Поскольку задача построения групповых сечений тесно связана с построением систем многогрупповых уравнений, нам пришлось, хотя и в ограниченном объеме, остановиться на способах определения многогрупповых констант.

Главной же целью настоящей книги является широкое представление форм записи многогрупповых систем уравнений, удобных для последующего численного решения. В некоторых, правда немногочисленных, случаях удается получить и аналитическое решение, но оно всегда грубо приближенное.

Авторы не ставили перед собой задачу дать представление о методах численного решения полученных уравнений. Разработка как общих методов численного интегрирования, так и конкретных алгоритмов решения полученных уравнений, хотя и тесно связана с различными представлениями кинетического уравнения, все же является большим самостоятельным разделом вычислительной математики. Этих вопросов, за исключением небольших отдельных замечаний, мы в книге не касались.

В книге речь идет о методах расчета защиты от нейтронов. Основным, наиболее мощным и опасным современным источником нейтронов является реактор, поэтому в ней учитываются лишь те процессы, которые сопровождают взаимодействие нейтронов с ядрами при энергиях не выше 15 Мэв.

* В отличие от нейтронов плавность энергетической зависимости сечений для γ -квантов привела к развитию иного подхода к расчету энергетического спектра γ -излучения, отличающегося от многогруппового. А именно, для γ -квантов обычно производится расчет потока в дискретных узлах энергетической переменной. Это, в частности, позволяет применять при интегрировании по энергии более точные квадратурные формулы, чем простое суммирование групповых потоков в многогрупповых методах. Однако в последнее время многогрупповые методы все более широко применяются и для γ -квантов. Поэтому материал настоящей книги в некоторой степени может быть также полезен при расчете поля γ -излучения.

В книге рассматриваются только одномерные задачи. Переход от одномерного рассмотрения к двумерному, хотя и не содержит принципиальных трудностей, создает большие затруднения расчетного порядка и в настоящее время оправдан главным образом в применении к расчетам теневого защит и различного рода неоднородностей. При одномерном рассмотрении мы ограничились случаями плоской и сферической геометрий как наиболее простыми и распространенными в реакторной защите. Фактически указанные геометрии позволяют охватить все встречающиеся на практике случаи в пределах той точности, которая предъявляется к одномерному расчету защиты.

Остановимся кратко на содержании книги.

Исходным пунктом рассмотрения процесса переноса нейтронов является кинетическое уравнение. Обсуждению свойств кинетического уравнения и в особенности свойств входящих в него индикатрис упругого и неупругого рассеяния нейтронов посвящена гл. I. Там же проведено и многогрупповое преобразование кинетического уравнения. При этом дается начальное представление о групповых константах.

Описанию некоторых общих свойств групповых констант, методам усреднения сечений, применению теории возмущения для этой цели и некоторым другим вопросам, связанным с построением групповых сечений, посвящена гл. II.

Собственно многогрупповым методам расчета посвящены последующие главы книги.

В гл. III получены основные уравнения метода сферических гармоник. В главе рассмотрены различные приближения метода, определяемые количеством членов, сохраняемых в разложении угловой зависимости потока нейтронов в ряд по полиномам Лежандра: диффузионное, P_1 , P_2 и др. Кроме того, рассмотрены различные аппроксимации индикатрисы рассеяния: транспортная, возрастная и др.

Если для наиболее грубых аппроксимаций (диффузионного приближения, P_1 , иногда P_2) в ряде случаев удастся получить аналитическое решение, более высокие приближения поддаются практически только численному интегрированию с помощью вычислительных машин. В силу ряда удобств и глубокой разработанности метод сферических гармоник весьма популярен в практике нейтронных расчетов. Его применение, с нашей точки зрения, тем более оправдано, чем меньше анизотропия дифференциального потока нейтронов независимо от степени анизотропии рассеяния.

В гл. IV рассматриваются другие методы решения кинетического уравнения. Эти методы в ряде случаев оказываются более удобными и надежными, чем метод сферических гармоник. Для бесконечных однородных сред возможно использование метода моментов, являющегося развитием метода сферических гармоник. В случае сильно гетерогенных защит эффек-

тивным оказывается метод разложения углового потока в отдельных полуинтервалах или так называемый $2P_N$ -метод.

Для гетерогенных защит, особенно при описании угловых распределений потока нейтронов, перспективными являются также методы численного интегрирования уравнения переноса или так называемые методы дискретных ординат. К этим методам тесно примыкает S_N -метод. Основная идея методов дискретных ординат состоит в том, что угловой поток аппроксимируется функцией, определенной в дискретных узлах угловой переменной. Перспективно применение метода дискретных ординат и для расчета неоднородных защит. Завершается гл. IV рассмотрением асимптотического решения уравнения переноса в случае однородной защиты. Асимптотическое решение, описывающее поле нейтронов вдали от источника излучения, имеет важное значение в защитных задачах для понимания характера нейтронных распределений.

В гл. V получена многогрупповая система интегральных уравнений. Показано, что, если угловую зависимость интеграла рассеяния в правой части кинетического уравнения аппроксимировать рядом полиномов Лежандра, кинетическое уравнение сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго ряда относительно гармоник потока. Причем число уравнений в системе определяется числом членов этого ряда независимо от степени анизотропии потока. Если интеграл рассеяния практически изотропен или допускает эффективную изотропную аппроксимацию без учета однозначной связи между углом рассеяния и потерей энергии, групповое кинетическое уравнение сводится к одному интегральному уравнению опять-таки независимо от степени анизотропии потока.

Отсюда можно заключить, что применение метода интегральных уравнений оказывается тем более целесообразным, чем слабее анизотропия рассеяния и сильнее анизотропия потока нейтронов в среде.

В последней, шестой главе книги рассматриваются полуэмпирические методы расчета защиты. В основе этих методов лежит одновременное использование упрощенных расчетных моделей и соответствующих эмпирических данных, призванных скорректировать допущенные идеализации. Таким образом, за счет, может быть, частичной потери в универсальности удается обеспечить требуемую точность расчетов при одновременной простоте вычислительных программ. В главе дается математическая формулировка метода, проводится анализ основных полуэмпирических параметров, а также дается краткое описание 7-группового метода и кодов RASH-B, RASH-D, MAG, MAG-RAD и NRN с примерами расчетов.

В приложении приведен вывод некоторых формул, а также 19-групповая система констант для области энергий выше $0,1 \text{ Мэв}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казанский Ю. А. и др. Физические исследования защиты реакторов. Под ред. С. Г. Цыпина. М., Атомиздат, 1966.
2. Фано У. и др. Перенос гамма-излучения. М., Госатомиздат, 1963.
3. Золотухин В. Г. и др. Прохождение излучений через неоднородности в защите. Под ред. О. И. Лейпунского и В. П. Машковича. М., Атомиздат, 1968.
4. Булатов Б. П. и др. Альbedo гамма-излучения. М., Атомиздат, 1968.
5. Абагян Л. П. и др. Групповые константы для расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1964.
6. Бюллетень информационного центра по ядерным данным. Вып. третий (приложение). М., Атомиздат, 1967.

Глава I

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Пространственно-энергетическое и угловое распределение нейтронов в защите определяется из решения стационарного кинетического уравнения. Это уравнение описывает баланс нейтронов в элементарной ячейке шестимерного фазового пространства координат и импульсов нейтрона [1]:

$$\begin{aligned} & \Omega \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) + \Sigma(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = \\ & = \int d\Omega' \int dE' \Phi(\mathbf{r}, E', \Omega') W(\mathbf{r}, \mu_0, E' \rightarrow E) + q(\mathbf{r}, E, \Omega), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\Phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$ — поток нейтронов в точке \mathbf{r} с энергией E и направлением вектора скорости Ω ; $\Sigma(\mathbf{r}, E)$ — полное макроскопическое сечение взаимодействия нейтрона энергии E с ядрами среды в точке \mathbf{r} ; $W(\mathbf{r}, \mu_0, E' \rightarrow E)$ — индикатриса рассеяния нейтронов из точки фазового пространства (Ω', E') в точку фазового пространства (Ω, E) ; $\mu_0 = \Omega \Omega' = \cos \nu_0$ — косинус угла рассеяния нейтрона в лабораторной системе координат; $q(\mathbf{r}, E, \Omega)$ — интенсивность внешних источников нейтронов в точке \mathbf{r} с энергией E и направлением вектора скорости Ω .

Если исследуемая среда состоит из смеси ядер различных элементов, то

$$\Sigma(\mathbf{r}, E) = \sum_n \rho_n(\mathbf{r}) \sigma_n(E). \quad (1.2)$$

Здесь $\rho_n(\mathbf{r})$ — число ядер n -го элемента в точке \mathbf{r} ; $\sigma_n(E)$ — микроскопическое сечение взаимодействия нейтронов с ядрами n -го элемента.

Дальнейшее рассмотрение проводится для среды, содержащей ядра только одного элемента. Распространение полученных выражений на среду из смеси элементов в силу аддитивности процессов взаимодействия нейтронов с ядрами среды является очевидной и достаточно простой операцией.

Пусть решение уравнения (1.1) определяет дифференциальный поток нейтронов $\Phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$ внутри некоторой области среды, ограниченной поверхностью S . Если на поверхность S падает извне поток нейтронов $\Phi_s(E, \Omega)$, то соответствующее граничное условие для функции Φ записывается в виде

$$\Phi(\mathbf{r}_s, E, \Omega) = \Phi_s(E, \Omega) \text{ при } (\Omega \mathbf{n}) < 0.$$

Здесь n — внешняя по отношению к среде нормаль к поверхности S . Если внешний поток нейтронов отсутствует, то

$$\Phi(\mathbf{r}_s, E, \Omega) = 0 \quad \text{при } (\Omega \mathbf{n}) < 0.$$

Введем обозначения, иллюстрируемые на рис. 1.1:

$$\mu = \cos \vartheta; \quad d\Omega = d\mu d\varphi;$$

$$\mu' = \cos \vartheta'; \quad d\Omega' = d\mu' d\varphi';$$

$$\mu_0 = \cos \vartheta_0; \quad d\Omega_0 = d\mu_0 d\varphi_0;$$

$$\mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi').$$

Индикатриса рассеяния $W(\mathbf{r}, \mu_0, E' \rightarrow E)$ в общем случае является функцией координат \mathbf{r} , угла рассеяния нейтрона ϑ_0 , энергии нейтрона до рассеяния E' и изменения энергии нейтрона

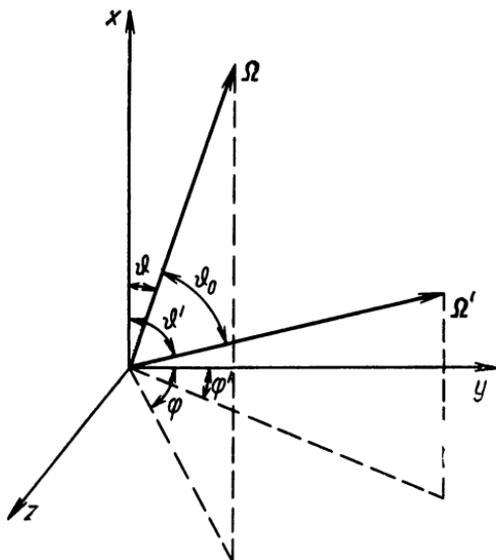


Рис. 1.1.

в результате рассеяния $\Delta E = E' - E$. Зависимость W от \mathbf{r} полностью определяется составом среды, в которой исследуется перенос нейтронов, а зависимость от μ_0 , E' и ΔE — свойствами ядер, с которыми взаимодействуют нейтроны.

Индикатриса рассеяния нейтронов может быть представлена как сумма индикатрисы упругого рассеяния и индикатрисы неупругого рассеяния [с учетом реакции $(n, 2n)$]

$$W(\mathbf{r}, \mu_0, E' \rightarrow E) = W_s(\mathbf{r}, \mu_0, E' \rightarrow E) + W_{in}(\mathbf{r}, \mu_0, E' \rightarrow E). \quad (1.3)$$

Рассмотрим отдельно функции W_s и W_{in} , опуская ради простоты зависимость от координат, которая в данном случае не существенна.

§ 1. ИНДИКАТРИСА УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

В качестве системы для отсчета угла рассеяния нейтрона используем вначале систему центра инерции. В этой системе индикатриса упругого рассеяния может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} W_s(\nu_0, E' \rightarrow E) d\omega dE &= \Sigma_s(\nu_0, E') \delta[E - P(E', \nu_0)] d\omega dE = \\ &= \frac{\Sigma_s(E')}{4\pi} \eta(E', \nu_0) \delta[E - P(E', \nu_0)] d\omega dE. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\Sigma_s(E')$ — полное сечение упругого рассеяния при энергии E' ; $d\omega = d\nu_0 d\psi$ — элемент телесного угла в системе центра инерции; $\Sigma_s(\nu_0, E')$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния на угол $\arcs \cos \nu_0$ при энергии E' ; ν_0 — косинус угла рассеяния в системе центра инерции.

Подчеркнем, что индикатриса рассеяния W_s отличается от дифференциального сечения рассеяния $\Sigma_s(E', \nu_0)$ присутствием δ -функции, устанавливающей однозначную связь между углом рассеяния и изменением энергии нейтрона. Такая связь является характерным признаком упругого рассеяния.

Функция $\eta(E', \nu_0)$ в выражении (1.4) описывает распределение по углам $\arcs \cos \nu_0$ нейтронов, испытавших упругое рассеяние при энергии E' .

Вероятность рассеяния в элемент фазового пространства $d\omega dE$ отлична от нуля лишь для тех точек фазового пространства, для которых выполняется условие

$$E - P(E', \nu_0) = 0. \quad (1.5)$$

Из законов сохранения энергии и импульса может быть найдено выражение, устанавливающее связь между энергией нейтрона до и после рассеяния [2]:

$$\frac{E}{E'} = 1 - \frac{1-\alpha}{2} (1 - \nu_0). \quad (1.6)$$

Здесь $\alpha = \left(\frac{M-1}{M+1}\right)^2$ — отношение минимальной энергии нейтрона после рассеяния к энергии до рассеяния; M — масса ядра-мишени.

Из выражения (1.5) и (1.6) следует, что

$$P(E', \nu_0) = E' \left[1 - \frac{1-\alpha}{2} (1 - \nu_0) \right]. \quad (1.7)$$

Согласно выражению (1.6), косинус угла рассеяния в системе центра инерции

$$\nu_0 = 1 - \frac{2}{1-\alpha} \left(1 - \frac{E}{E'} \right). \quad (1.8)$$

Индикатриса W_s должна быть нормирована на полное сечение упругого рассеяния

$$\iint W_s(\nu_0, E' \rightarrow E) dE d\omega = \Sigma_s(E'). \quad (1.9)$$

Если определить δ -функцию в выражении (1.4) таким образом, что

$$\int_{\alpha E'}^{E'} \delta[E - P(E', \nu_0)] dE = 1, \quad (1.10)$$

то из уравнения (1.9) следует нормировка для функции $\eta(\nu_0, E')$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \eta(E', \nu_0) d\nu_0 = 1. \quad (1.11)$$

При изотропном рассеянии в системе центра инерции

$$\eta(E', \nu_0) = 1,$$

т. е. функция $\eta(E', \nu_0)$ характеризует анизотропию упругого рассеяния в системе центра инерции.

В литературе данные по угловому распределению упруго рассеянных нейтронов обычно заданы в виде коэффициентов разложения угловой зависимости дифференциального сечения рассеяния $\Sigma_s(\nu_0, E)$ или, что то же, функции $\eta(\nu_0, E)$ по полиномам Лежандра $P_l(\nu_0)$ [3]

$$\eta(\nu_0, E) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \eta_l(E) P_l(\nu_0). \quad (1.12)$$

Использование системы центра инерции позволяет ограничиться меньшим числом членов в разложении (1.12) по сравнению с аналогичным разложением в лабораторной системе координат, что особенно существенно в случае рассеяния на легких ядрах.

Из условия ортогональности полиномов Лежандра на интервале $(-1, +1)$ [3]

$$\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

следует выражение для коэффициентов разложения (1.12)

$$\eta_l(E) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \eta(\nu_0, E) P_l(\nu_0) d\nu_0.$$

В соответствии с условием нормировки (1.11) функции $\eta(v_0, E)$ нулевой и первый коэффициенты будут

$$\eta_0(E) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \eta(v_0, E) dv_0 = 1,$$

$$\eta_1(E) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \eta(v_0, E) v_0 dv_0 = \bar{v}_0(E).$$

Здесь $\bar{v}_0(E)$ — средний косинус углов рассеяния в системе центра инерции при энергии E .

Коэффициенты разложения (1.12) могут быть использованы и для определения среднего косинуса угла рассеяния в лабораторной системе координат. В работе [4] получено следующее выражение для $\bar{\mu}_0(E)$:

$$\bar{\mu}_0(E) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{M^{l+1}} \eta_l(E) \left[\frac{l+2}{2l+3} - \frac{l}{2l-1} M^2 \right]. \quad (1.13)$$

Для тяжелых ядер с $M \gg 1$

$$\bar{\mu}_0(E) \approx \eta_1(E) + \frac{2}{3M} [1 - \eta_2(E)].$$

При изотропном рассеянии в системе центра инерции $\eta_l = 0$ при $l \neq 0$, и выражение (1.13) сводится к

$$\bar{\mu}_0 = \frac{2}{3M}.$$

Запишем теперь индикатрису упругого рассеяния, воспользовавшись лабораторной системой координат для отсчета угла рассеяния. Сохранив ради простоты обозначение функций (за исключением функции η), получим

$$W_s(\mu_0, E' \rightarrow E) d\Omega_0 dE = \Sigma_s(E', \mu_0) \delta[E - P(E', \mu_0)] d\Omega_0 dE =$$

$$= \frac{\Sigma_s(E')}{4\pi} \chi(E', \mu_0) \delta[E - P(E', \mu_0)] d\Omega_0 dE, \quad (1.14)$$

где $d\Omega_0 = d\mu_0 d\varphi_0$ — элемент телесного угла в лабораторной системе координат; $\Sigma_s(E', \mu_0)$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния на угол $\arcs \cos \mu_0$ при энергии E' ; μ_0 — косинус угла рассеяния в лабораторной системе координат.

Функция $\chi(E', \mu_0)$ описывает в лабораторной системе координат угловое распределение нейтронов, рассеянных при энергии E' .

Используя соотношение между μ_0 и v_0 [2]

$$\mu_0^2 = \frac{(Mv_0 + 1)^2}{M^2 + 2Mv_0 + 1}, \quad (1.15)$$

легко получить из выражения (1.7) выражение для $P(E', \mu_0)$:

$$P(E', \mu_0) = \frac{2E'}{(M+1)^2} \left[\frac{M^2-1}{2} + \mu_0^2 + \mu_0 \sqrt{M^2-1+\mu_0^2} \right].$$

При изотропном рассеянии в лабораторной системе координат

$$\chi(E', \mu_0) = 1$$

и соответственно

$$W_s(\mu_0, E' \rightarrow E) d\Omega_0 dE = \frac{\Sigma_s(E')}{4\pi} \delta[E - P(E', \mu_0)] d\Omega_0 dE.$$

Нормировочные соотношения для $\chi(E', \mu_0)$ и δ -функции следующие:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \chi(E', \mu_0) d\mu_0 = 1; \quad \int_{\alpha E'}^{E'} \delta[E - P(E', \mu_0)] dE = 1.$$

Разложение угловой зависимости дифференциального сечения рассеяния $\Sigma_s(E, \mu_0)$ по полиномам Лежандра

$$\Sigma_s(E, \mu_0) = \frac{\Sigma_s(E)}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \chi_l(E) P_l(\mu_0) \quad (1.16)$$

или, что то же,

$$\chi(E, \mu_0) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \chi_l(E) P_l(\mu_0). \quad (1.17)$$

Коэффициенты разложения (1.17)

$$\chi_l(E) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \chi(E, \mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0.$$

В соответствии с условием нормировки функции $\chi(E, \mu_0)$

$$\chi_0 = 1; \quad \chi_1(E) = \bar{\mu}_0(E). \quad (1.18)$$

Коэффициенты разложения (1.17) связаны с коэффициентами разложения (1.12) следующим соотношением:

$$\chi_l(E) = \sum_{j=0}^{\infty} T_{lj} \eta_j(E).$$

Матрица T_{lj} приведена в приложении I.

Отметим, что в справочнике по ядернофизическим константам [5] разложение дифференциального сечения по $P_l(\mu_0)$ представлено в виде

$$\sigma_s(E, \mu_0) = \frac{\sigma_s(E)}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \omega_l(E) P_l(\mu_0).$$

В наших обозначениях это соответствует

$$\omega_l(E) = (2l + 1) \chi_l(E).$$

Индикатриса упругого рассеяния в форме (1.4) или (1.14) описывает угловое распределение рассеянных нейтронов при однозначной связи между углом рассеяния и потерей энергии. Для дальнейшего изложения удобно определить индикатрису W_s таким образом, чтобы она описывала энергетический спектр рассеянных нейтронов при однозначной связи между изменением энергии нейтрона и углом рассеяния в лабораторной системе координат.

Запишем $W_s(\mu_0, E' \rightarrow E)$ в соответствии с соотношениями (1.4) и (1.6) следующим образом:

$$W_s(\mu_0, E' \rightarrow E) dEd\Omega_0 = \frac{\Sigma_s(E')}{4\pi} \eta(E', \nu_0) \frac{d\nu_0}{dE} \delta[E - P(E', \nu_0)] \times \\ \times \frac{dE}{d\nu_0} dEd\Omega_0. \quad (1.19)$$

Согласно выражению (1.8),

$$\frac{d\nu_0}{dE} = \frac{2}{(1-a)E'}. \quad (1.20)$$

Из определения δ -функции

$$F(0) = \int F(y) \delta(y) dy = \int F[y(x)] \delta[y(x)] \frac{dy}{dx} dx$$

следует, что

$$\delta[y(x)] \frac{dy}{dx} = \delta(x - x_1), \quad (1.21)$$

где x_1 — корень уравнения $y(x) = 0$.

Если положить

$$y(x) = E - P[E', \nu_0(x)] = E - E' \left\{ 1 - \frac{1-a}{2} [1 - \nu_0(x)] \right\} \\ x = \mu_0,$$

то, используя выражение (1.15), можно показать, что

$$x_1 = \frac{M+1}{2} \sqrt{\frac{E}{E'}} - \frac{M-1}{E} \sqrt{\frac{E'}{E}} = \beta(E', E).$$

Подставив выражение (1.20) в (1.19), получим в соответствии с соотношением (1.21) следующее выражение для индикатрисы упругого рассеяния:

$$W_s(\mu_0, E' \rightarrow E) dEd\Omega_0 = \frac{\Sigma_s(E')}{4\pi} f_s(E', E - E) \delta \times \\ \times [\mu_0 - \beta(E', E)] dEd\Omega_0. \quad (1.22)$$

Функция $f_s(E', E' - E)$ описывает распределение по энергии E нейтронов, испытавших упругое рассеяние при энергии E' :

$$f_s(E', E' - E) = \frac{(M+1)^2}{4ME'} \gamma(E', E' - E).$$

Здесь выделена функция $\gamma(E', E' - E)$, учитывающая анизотропию рассеяния в системе центра инерции:

$$\gamma(E', E' - E) \equiv \eta[E', \nu_0(E' - E)].$$

При изотропном рассеянии в системе центра инерции

$$\gamma(E', E' - E) = 1; \quad f_s(E', E' - E) = \frac{(M+1)^2}{4ME'}.$$

Из условия нормировки индикатрисы W_s следуют нормировочные соотношения для f_s - и δ -функций:

$$\int_{\alpha E'}^{E'} f_s(E', E' - E) dE = 1; \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \delta[\mu_0 - \beta(E', E)] d\mu_0 = 1.$$

В этом выражении произведена перенормировка δ -функции, что удобно для дальнейшего изложения.

Разложим теперь угловую зависимость индикатрисы рассеяния $W_s(\mu_0, E' \rightarrow E)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$W_s(\mu_0, E' \rightarrow E) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) W_{ls}(E' \rightarrow E) P_l(\mu_0). \quad (1.23)$$

Коэффициенты разложения

$$W_{ls}(E' \rightarrow E) = \int_0^{2\pi} d(\varphi - \varphi') \int_{-1}^{+1} W_s(\mu_0, E' \rightarrow E) P_l(\mu_0) d\mu_0.$$

Подставим соотношение (1.22) в выражение для $W_{ls}(E' \rightarrow E)$:

$$W_{ls}(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E') f_s(E', E' - E) P_l[\beta(E', E)].$$

Функция $f_s(E', E' - E)$ описывает энергетический спектр нейтронов, испытавших упругое рассеяние при энергии E' , а функция $\chi(E', \mu_0)$ [см. выражение (1.14)] — угловой спектр тех же нейтронов. Поэтому с учетом нормировочных соотношений для f_s и χ

$$f_s(E', E' - E) dE = \frac{1}{2} \chi[E', \mu_0(E' - E)] d\mu_0.$$

Воспользовавшись этим обстоятельством и разложением угловой зависимости функции $\chi(E', \mu_0)$ по полиномам Лежандра (1.17), получим

$$W_{ls}(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E') P_l(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \chi_n(E') P_n(\beta) \frac{d\beta}{dE}. \quad (1.24)$$

Проинтегрируем левую и правую части равенства (1.24) по dE в интервале $\alpha E' - E'$:

$$\overline{W}_{ls}(E') = \Sigma_s(E') \chi_l(E'). \quad (1.25)$$

Здесь

$$\overline{W}_{ls}(E') = \int_{\alpha E'}^{E'} W_{ls}(E' \rightarrow E) dE.$$

Соотношение (1.25) устанавливает связь между $\chi_l(E')$ — коэффициентами разложения угловой зависимости дифференциального сечения рассеяния $\Sigma_s(E', \mu_0)/\Sigma_s(E')$ и $W_{ls}(E' \rightarrow E)$ — коэффициентами разложения угловой зависимости индикатрисы рассеяния.

Следует подчеркнуть различие между разложением индикатрисы (1.23) и разложениями дифференциального сечения (1.12) и (1.16). Последние два описывают в различных системах координат угловое распределение нейтронов, рассеянных при энергии E' . В силу этого выражения (1.12) и (1.16) должны содержать конечное число членов, зависящее лишь от степени анизотропии углового распределения рассеянных нейтронов. Иное дело разложение (1.23). Согласно выражению (1.22), зависимость индикатрисы рассеяния от μ_0 имеет δ -образный характер. Поэтому разложение (1.23), строго говоря, всегда является бесконечным независимо от степени анизотропии рассеянных нейтронов [коэффициенты $W_{ls}(x, E' \rightarrow E)$ фактически отличны от нуля при любых значениях μ_0]. Количество членов, сохраняемых в разложении (1.23), определяет точность описания однозначной связи между углом рассеяния и потерей энергии при упругом рассеянии. Учет этой связи особенно важен при расчете глубокого проникновения нейтронов.

§ 2. ИНДИКАТРИСА НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

По аналогии с выражением (1.4) индикатриса неупругого рассеяния в системе центра инерции может быть записана в виде

$$W_{in}(v_0, E' \rightarrow E) d\omega dE = \Sigma_{in}(E', E^*, v_0) \delta[E - P(E', E^*, v_0)] d\omega dE. \quad (1.26)$$

Здесь $\Sigma_{in}(E', E^*, v_0)$ — дифференциальное сечение неупругого рассеяния при энергии E' ; E^* — энергия возбуждения ядра после неупругого рассеяния.

В выражении (1.26) сохранены обозначения функций, принятые для описания упругого рассеяния (см. 1.4).

Из законов сохранения энергии и импульса можно получить [6, 11]

$$\frac{E}{E'} = 1 - \frac{M}{M+1} \frac{E^*}{E'} - \frac{2M}{(M+1)^2} \left(1 - v_0 \sqrt{1 - \frac{M+1}{M} \frac{E^*}{E'}} \right). \quad (1.27)$$

Отсюда следует

$$P(E', E^*, v_0) = E' - \frac{M}{M+1} E^* - \frac{2ME'}{(M+1)^2} \times \\ \times \left(1 - v_0 \sqrt{1 - \frac{M+1}{M} \frac{E^*}{E'}} \right).$$

Согласно соотношению (1.27), неупругое рассеяние с возбуждением уровня с энергией E^* возможно лишь при выполнении следующего условия:

$$E' \geq \frac{M+1}{M} E^*. \quad (1.28)$$

Если E^* — энергия возбуждения первого уровня ядра мишени, то неравенство (1.28) определяет порог неупругого рассеяния.

Используя соотношение (1.27), легко получить выражение для косинуса угла рассеяния в системе центра инерции:

$$v_0 = \left[1 + \frac{M+1}{2} \frac{E^*}{E'} - \frac{(M+1)^2}{2M} \left(1 - \frac{E}{E'} \right) \right] \left(1 - \frac{M+1}{2} \frac{E^*}{E'} \right)^{-1/2}. \quad (1.29)$$

Связь между косинусом угла неупругого рассеяния в лабораторной системе координат и в системе центра инерции [6]

$$\mu_0^2 = \frac{\left(1 + Mv_0 \sqrt{1 - \frac{M+1}{M} \frac{E^*}{E'}} \right)^2}{1 + 2Mv_0 \sqrt{1 - \frac{M+1}{M} \frac{E^*}{E'}} + M^2 \left(1 - \frac{M+1}{M} \frac{E^*}{E'} \right)}. \quad (1.30)$$

Отметим, что при $E^*=0$ из соотношений (1.29) и (1.30) получаются выражения (1.8) и (1.15) для упругого рассеяния. В случае тяжелых ядер, т. е. при $M \gg 1$, вместо выражений (1.27) и (1.30) можно получить

$$E \approx E' - E^*, \\ \mu_0 = v_0. \quad (1.31)$$

Первое из соотношений (1.31) означает, что кинетическая энергия ядра отдачи относительно мала. Приписывая эту энергию рассеянному нейтрону, мы исключаем однозначную связь между углом неупругого рассеяния и потерей энергий нейтроном*. Второе соотношение (1.31) указывает на совпадение системы центра инерции с лабораторной системой координат.

* Угловое распределение неупруго рассеянных нейтронов, вообще говоря, зависит от энергии возбуждения остаточного ядра E^* , что будет отражено в дальнейшем.

Так как неупругое взаимодействие играет существенную роль в основном лишь при рассеянии на ядрах с $M \gg 1$, то индикатрису рассеяния в соответствии с соотношениями (1.31) можно записать в виде

$$W_{in}(v_0, E' \rightarrow E) d\omega dE \approx \Sigma_{in}(E', E^*, \mu_0) d\Omega_0 dE. \quad (1.32)$$

Дифференциальное сечение неупругого рассеяния определяется следующим образом:

$$\Sigma_{in}(E', E^*, \mu_0) = \frac{\Sigma_{in}(E')}{4\pi} \chi(E', E^*, \mu_0) f(E^*, E), \quad (1.33)$$

где $\Sigma_{in}(E')$ — полное сечение неупругого рассеяния при энергии E' ; функция $\chi(E', E^*, \mu_0)$ описывает угловое распределение, а функция $f(E^*, E)$ — энергетический спектр нейтронов, испытавших неупругое рассеяние, в результате которого произошло возбуждение ядра-мишени на энергию E^* .

Рассмотрим вначале область энергий вблизи порога неупругого рассеяния, где отдельные уровни возбуждения ядра-мишени не перекрывают друг друга. В этом случае функция $f(E^*, E)$ должна вырождаться в сумму δ -образных функций, описывающих дискретный спектр рассеянных нейтронов. Соответствующий вид приобретает и выражение для $\Sigma_{in}(E', E^*, \mu_0)$:

$$\Sigma_{in}(E', E^*, \mu_0) = \sum_R \frac{\Sigma_{in}^R(E')}{4\pi} \chi^R(E', \mu_0) \delta(E - E' + E_R^*). \quad (1.34)$$

Здесь $\Sigma_{in}^R(E')$ — полное сечение возбуждения R -го уровня ядра-мишени, E_R^* — энергия возбуждения R -го уровня; функция $\chi^R(E', \mu_0)$ описывает угловое распределение нейтронов, испытавших неупругое рассеяние с возбуждением R -го уровня ядра-мишени, а δ -функция обеспечивает энергетический баланс.

Неупругое рассеяние с возбуждением первых, т. е. низколежащих, уровней ядра-мишени происходит в основном через образование составного ядра. Согласно теории ядерных реакций, угловое распределение нейтронов, вылетающих при распаде составного ядра, должно быть симметричным относительно угла 90° в системе центра инерции (в лабораторной системе координат для ядер с $M \gg 1$) [8]. Поэтому разложение функции $\chi^R(E', \mu_0)$ по полиномам Лежандра, аналогичное (1.17), содержит лишь четные гармоники. Коэффициенты разложения

$$\chi_l^R(E') = \frac{1}{2} \int \chi^R(E', \mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0 \quad (1.35)$$

и парциальные сечения $\Sigma_{in}^R(E')$ определяются из экспериментальных данных относительно функции возбуждения R -го уровня [5].

С увеличением энергии падающих нейтронов становится возможным возбуждение все большего числа уровней ядер-мише-

ней. Для всех ядер, кроме самых легких, при энергии возбуждения в несколько мегаэлектронвольт и выше плотность уровней настолько высока, что отдельные уровни перекрывают друг друга, а спектр рассеянных нейтронов описывается непрерывной функцией. Статистическая теория ядерных реакций, предполагающая возможность возбуждения большого числа уровней и малость расстояний между ними, дает количественное описание энергетического распределения неупруго рассеянных нейтронов. На практике довольно широко распространено приближенное представление функции f , описывающей энергетический спектр рассеянных нейтронов:

$$f(E, E^*) \approx \frac{E}{T^2 (\bar{E}^*)} e^{-E/T(\bar{E}^*)}, \quad (1.36)$$

где \bar{E}^* — средняя энергия возбуждения ядра после рассеяния;

$$\bar{E}^* \approx E' - 2T - \delta. \quad (1.37)$$

Параметр $T(\bar{E}^*)$ обычно называют ядерной температурой и определяют, исследуя спектры неупруго рассеянных нейтронов. Энергия спаривания нуклонов в ядре

$$\delta = \delta_n + \delta_p.$$

Здесь δ_n — энергия спаривания нейтронов в ядре (равна нулю при нечетном количестве нейтронов в ядре); δ_p — энергия спаривания протонов в ядре (равна нулю при нечетном количестве протонов в ядре).

В рассматриваемой области энергий неупругое рассеяние происходит не только через образование составного ядра, но и путем прямого взаимодействия с нуклонами ядра. Пренебрегая эффектом интерференции между различными механизмами взаимодействия, дифференциальное сечение неупругого рассеяния для достаточно тяжелых ядер, согласно ядерной модели ферми-газа, можно записать в следующем виде [9, 10]:

$$\begin{aligned} \Sigma_{in}(\mu_0, E' \rightarrow E) = & \frac{K(E')}{4\pi} [\omega(E^*) E \Sigma_c(E') \chi_{in}^c(\mu_0, E') + \\ & + \Sigma_d(E, E^*) \chi_{in}^d(\mu_0, E, E^*)], \end{aligned} \quad (1.38)$$

где

$$\omega(E^*) = \frac{\exp[2(aE^*)^{1/2}]}{(E^*)^{3/4}}; \quad E^* = E' - E - \delta;$$

a — параметр плотности уровней составного ядра. Функция $\chi_{in}^c(\mu_0, E')$ описывает угловое распределение нейтронов, рассеянных с помощью механизма составного ядра, сечение которого равно $\Sigma_c(E')$. Распределение $\chi_{in}^c(\mu_0, E')$, симметричное

относительно угла 90° , характеризуется малой степенью анизотропии. Функция $\chi_{in}^d(\mu_0, E, E^*)$ описывает угловое распределение нейтронов, рассеянных в результате прямого взаимодействия, сечение которого равно $\Sigma_d(E, E^*)$. Значения множителя $K(E')$ выбираются из условия нормировки

$$\int d\Omega_0 \int_0^{E'} \Sigma_{in}(\mu_0, E' \rightarrow E) dE = \Sigma_{in}(E').$$

Отсюда можно получить

$$K(E') \left[\Sigma_c(E') \int_0^{E'} E \omega(E^*) dE + \int_0^{E'} \Sigma_d(E, E^*) dE \right] = \Sigma_{in}(E').$$

При достаточно больших энергиях нейтронов ($E' \geq 5$ Мэв) сечение процесса прямого взаимодействия $\Sigma_d(E') = \int_0^{E'} \Sigma_d(E, E^*) dE$ составляет до 20% полного сечения неупругого рассеяния $\Sigma_{in}(E')$. Прямое взаимодействие характеризуется сравнительно малой потерей энергии (возбуждаются низкие уровни ядра мишени) и довольно резкой направленностью вперед углового распределения, анизотропия которого несколько меньше анизотропии упругого рассеяния. Достоверных количественных данных о спектрально-угловом распределении нейтронов, рассеянных в процессе прямого взаимодействия, в опубликованной литературе пока очень мало. Установлена лишь сильная зависимость от энергии сечения $\Sigma_d(E, E^*)$ при малых энергиях возбуждения E^* .

При неупругом взаимодействии в области энергий, представляющих практический интерес, доминирующим является процесс образования составного ядра, приводящий к образованию низкоэнергетических нейтронов с малой степенью угловой анизотропии. Поэтому в дальнейшем будем считать неупругое рассеяние сферически изотропным без однозначной связи между углом рассеяния и потерей энергии. Индикатрису неупругого рассеяния будем записывать в виде

$$W_{in}(\mu_0, E' \rightarrow E) d\Omega_0 dE = \frac{\Sigma_{in}(E')}{4\pi} f_{in}(E' \rightarrow E) dE d\Omega_0. \quad (1.39)$$

Из условия нормировки $W_{in}(\mu_0, E' \rightarrow E)$ на полное сечение неупругого рассеяния $\Sigma_{in}(E')$ следует, что

$$\int_0^{E'} f_{in}(E' \rightarrow E) dE = 1.$$

В области энергий, где отдельные уровни ядра-мишени не перекрываются, функция f_{in} описывает дискретный спектр рассеянных нейтронов и, согласно выражению (1.34), записывается

$$f_{in}(E' \rightarrow E) = \sum_R \frac{\Sigma_{in}^R(E')}{\Sigma_{in}(E')} \delta(E - E' + E_R^*). \quad (1.40)$$

Здесь суммирование проводится по всем уровням с $E_R^* < E'$.

В области энергий, где отдельные уровни перекрываются, часто пренебрегают процессом прямого взаимодействия с нуклонами ядра. Тогда, согласно выражению (1.36), функция f_{in} записывается в виде

$$f_{in}(E' \rightarrow E) = \frac{E}{T^2} e^{-E/T} \quad (1.41)$$

при $E' \geq E^T$, где E^T — нижняя граница применимости статистической теории ядра.

В заключение остановимся на реакции $(n, 2n)$. Распад составного ядра с испусканием двух нейтронов возможен только при том условии, что кинетическая энергия падающего нейтрона превосходит энергию связи нейтронов в ядре-мишени. Поэтому для большинства элементов порог реакции $(n, 2n)$ достаточно высок (~ 10 Мэв). Исключение составляют лишь ядра дейтерия и бериллия, для которых $E_{пор}^{2n}$ равно соответственно 3,3 и 1,84 Мэв. В работе [8] приводится формула для расчета полного сечения этой реакции, удовлетворительно согласующаяся с экспериментальными данными:

$$\Sigma_{2n}(E') = \Sigma_c(E') \{1 - \alpha [E' - E_{пор}^{2n}, T_1(\bar{E}^*)]\},$$

$$\alpha(x, T) = \frac{x}{T^2} e^{-x/T}.$$

Здесь $T_1(\bar{E}^*)$ — температура возбуждения ядра после вылета первого нейтрона при средней энергии возбуждения \bar{E}^* . Если сделать допущение о последовательности испарения нейтронов при реакции $(n, 2n)$, то, согласно статистической теории, энергетический спектр обоих нейтронов должен описываться функцией $\alpha(E, T_n)$, где $n=1; 2$ для первичного и вторичного нейтрона соответственно.

§ 3. МНОГОГРУППОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В задачах, связанных с расчетом защиты реакторов, энергия нейтронов меняется в пределах

$$1,0 \cdot 10^{-2} \text{ эв} \leq E \leq 1,5 \cdot 10^7 \text{ эв}.$$

Это создает определенные трудности при проведении численных расчетов, поэтому оказывается удобным перейти от обычной шкалы энергий к логарифмической:

$$u = \ln \frac{E}{E_0}.$$

Кинетическое уравнение в новых переменных при условии сохранения прежних обозначений записывается в виде

$$\begin{aligned} & \Omega \nabla \Phi(\mathbf{r}, u, \Omega) + \Sigma(\mathbf{r}, u) \Phi(\mathbf{r}, u, \Omega) = \\ & = \int d\Omega' \int du' \Phi(\mathbf{r}, u', \Omega') W(\mathbf{r}, \mu_0, u' \rightarrow u) + q(\mathbf{r}, u, \Omega). \end{aligned} \quad (1.42)$$

В соответствии с выражениями (1.3), (1.22) и (1.39) индикатриса рассеяния определяется следующим образом:

$$W(\mathbf{r}, \mu_0, u' \rightarrow u) = \frac{\Sigma_s(\mathbf{r}, u)}{4\pi} f_s(u', u - u') \delta[\mu_0 - \beta(u - u')] + \frac{\Sigma_{in}(\mathbf{r}, u')}{4\pi} f_{in}(u', u - u'). \quad (1.43)$$

Здесь

$$f_s(u', u - u') = \frac{(M+1)^2}{4M} e^{-(u-u')\gamma(u', u - u')};$$

$$\beta(u - u') = \frac{M+1}{2} e^{-\frac{u-u'}{2}} - \frac{M-1}{2} e^{\frac{u-u'}{2}};$$

функции $f_s(u', u - u')$ и $f_{in}(u', u - u')$ описывают распределение по летаргии u нейтронов, испытавших упругое и неупругое рассеяния при u' .

Для нормировки индикатрисы W на полное сечение рассеяния $\Sigma_s + \Sigma_{in}$ должны выполняться следующие нормировочные соотношения:

$$\frac{M+1}{4M} \int_{u'}^{u'+r} e^{-(u-u')\gamma(u', u - u')} du = 1; \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \delta(\mu_0 - \beta) d\mu_0 = 1; \quad (1.44)$$

$$\int_{u'}^{\infty} f_{in}(u', u - u') du = 1.$$

Здесь $r = 2 \ln \frac{M+1}{M-1}$ — максимальное изменение летаргии нейтрона, испытавшего упругое рассеяние.

Осуществим теперь переход от многоскоростного кинетического уравнения (1.42) к многогрупповой системе односкоростных кинетических уравнений. Такой переход означает, что вместо одной функции распределения $\Phi(\mathbf{r}, u, \Omega)$ будет рассматриваться семейство взаимосвязанных функций $\Phi^i(\mathbf{r}, \Omega)$, являющихся решением системы односкоростных кинетических уравнений.

Групповое уравнение может быть получено в результате интегрирования уравнения (1.42) по переменной u в пределах группы от u_{i-1} до u_i :

$$\Omega \nabla \Phi^i(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma^i(\mathbf{r}, \Omega) \Phi^i(\mathbf{r}, \Omega) = \int d\Omega' \int du' \Phi(\mathbf{r}, u', \Omega') \int_{u_{i-1}}^{u_i} W(\mathbf{r}, \mu_0, u' \rightarrow u) du + q^i(\mathbf{r}, \Omega), \quad (1.45)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi^i(\mathbf{r}, \Omega) &= \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi(\mathbf{r}, u, \Omega) du; \\ \Sigma^i(\mathbf{r}, \Omega) &= \frac{1}{\Phi^i(\mathbf{r}, \Omega)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(\mathbf{r}, u) \Phi(\mathbf{r}, u, \Omega) du; \\ q^i(\mathbf{r}, \Omega) &= \int_{u_{i-1}}^{u_i} q(\mathbf{r}, u, \Omega) du.\end{aligned}$$

Интеграл по u' в правой части уравнения (1.45) можно представить как сумму интегралов по ширине группы от u_{k-1} до u_k :

$$\begin{aligned}\int du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} du \Phi(\mathbf{r}, u', \Omega') W(\mathbf{r}, \mu_0, u' \rightarrow u) &= \\ = \sum_{k=k_0}^i W^{k \rightarrow i}(\mathbf{r}, \mu_0, \Omega') \Phi^k(\mathbf{r}, \Omega').\end{aligned}\quad (1.46)$$

Здесь

$$\begin{aligned}W^{k \rightarrow i}(\mathbf{r}, \mu_0, \Omega') &= \frac{1}{\Phi^k(\mathbf{r}, \Omega')} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi(\mathbf{r}, u', \Omega') \times \\ &\times du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W(\mathbf{r}, \mu_0, u' \rightarrow u) du.\end{aligned}$$

Члены матрицы $W^{k \rightarrow i}$ определяют усредненную по потоку вероятность попадания в i -ю группу нейтронов, рассеянных в k -й группе. Индекс k_0 соответствует номеру крайней группы, для которой вероятность таких переходов еще отлична от нуля. Подставив выражение (1.46) в (1.45), получим

$$\begin{aligned}\Omega \nabla \Phi^i(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma^i(\mathbf{r}, \Omega) \Phi^i(\mathbf{r}, \Omega) &= \\ = \sum_{k=k_0}^i \int \Phi^k(\mathbf{r}, \Omega') W^{k \rightarrow i}(\mathbf{r}, \mu_0, \Omega') d\Omega' + q^i(\mathbf{r}, \Omega),\end{aligned}\quad (1.47)$$

где $\Phi^i(\mathbf{r}, \Omega)$ — групповой поток нейтронов; $q^i(\mathbf{r}, \Omega)$ — групповой источник нейтронов.

Граничные условия для групповых потоков на поверхности среды S

$$\Phi^i(\mathbf{r}_s, \Omega) = \Phi_s^i(\Omega) \text{ при } (\Omega \mathbf{n}) < 0,$$

где $\Phi_s^i(\Omega)$ — групповые значения дифференциального потока нейтронов, падающих извне на поверхность среды S .

Среднегрупповые сечения взаимодействия нейтронов с ядрами среды, входящие в уравнение (1.47), определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^i(\mathbf{r}, \Omega) &= \frac{1}{\Phi^i(\mathbf{r}, \Omega)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(\mathbf{r}, u) \Phi(\mathbf{r}, u, \Omega) du, \\ W^{k \rightarrow i}(\mathbf{r}, \mu_0, \Omega') &= \frac{1}{\Phi^k(\mathbf{r}, \Omega')} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi(\mathbf{r}, u', \Omega') \times \\ &\times du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W(\mathbf{r}, \mu_0, u' \rightarrow u) du. \end{aligned} \right\} (1.48)$$

Члены матрицы переходов между группами $W^{k \rightarrow i}$ являются функциями угла рассеяния нейтронов $\arg \cos \mu_0$. Целесообразно исключить указанную функциональную зависимость, воспользовавшись для этой цели, например, разложением индикатрисы рассеяния по сферическим гармоникам.

Рассмотрим вновь уравнение (1.42), ограничившись при этом плоской и сферической симметричной геометриями как наиболее простыми и одновременно широко распространенными в расчетах защиты. Рассмотрение в общем случае, ведущее к весьма громоздким выражениям, проведено в монографии А. Вейнберга и Е. Вигнера [1].

В случае плоской и сферически симметричной геометрий, когда поток нейтронов и внешние источники не зависят от азимутального угла φ , оператор $\Omega \nabla$ сводится к операторам [7]

$$\Omega \nabla = \begin{cases} \mu \frac{\partial}{\partial x} & \text{плоская геометрия,} \\ \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} & \text{сферически симметричная геометрия.} \end{cases} \quad (1.49)$$

Проинтегрируем уравнение (1.42) по φ . Воспользовавшись соотношением (1.49), получим:

для плоской геометрии

$$\begin{aligned} &\mu \frac{\partial \Phi(x, u, \mu)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi(x, u, \mu) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int d\Omega' \int du' \Phi(x, u', \mu') W(x, \mu_0, u' \rightarrow u) + q(x, u, \mu), \end{aligned} \quad (1.50)$$

где $\Phi(x, u, \mu) = 2\pi \Phi(\mathbf{r}, u, \Omega)$; $q(x, u, \mu) = 2\pi q(\mathbf{r}, u, \Omega)$;

μ — косинус угла между направлением x и вектором скорости нейтрона;

для сферически симметричной геометрии

$$\mu \frac{\partial \Phi(r, u, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \Phi(r, u, \mu)}{\partial \mu} + \Sigma(r, u) \Phi(r, u, \mu) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi \int d\Omega' \int du' \Phi(r, u', \mu') W(r, \mu_0, u' \rightarrow u) + q(r, u, \mu), \quad (1.51)$$

где $\Phi(r, u, \mu) = 2\pi \Phi(r, u, \Omega)$; $q(r, u, \mu) = 2\pi q(r, u, \Omega)$;

μ — косинус угла между радиусом r и вектором скорости нейтрона.

Угловую зависимость индикатрисы рассеяния разложим в ряд по полиномам Лежандра:

$$W(x, \mu_0, u' \rightarrow u) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) W_l(x, u' \rightarrow u) P_l(\mu_0). \quad (1.52)$$

Коэффициенты разложения

$$W_l(x, u' \rightarrow u) = \int_0^{2\pi} d(\varphi - \varphi') \int_{-1}^{+1} W(x, \mu_0, u' \rightarrow u) P_l(\mu_0) d\mu_0. \quad (1.53)$$

Если в это выражение подставить (1.43), получим

$$W_l(x, u' \rightarrow u) = \Sigma_s(x, u') f_s(u', u - u') P_l[\beta(u - u')] + \\ + \delta_{l0} \Sigma_{ln}(u') f_{ln}(u', u - u'). \quad (1.54)$$

Здесь

$$\delta_{l0} = \begin{cases} 1 & \text{при } l = 0, \\ 0 & \text{при } l \neq 0. \end{cases}$$

Воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра [3]:

$$P_l(\mu_0) = P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi'),$$

чтобы выразить $W(x, \mu_0, u' \rightarrow u)$ через углы, определяющие направление вектора скорости нейтрона до и после рассеяния:

$$W(x, \mu_0, u' \rightarrow u) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) W_l(x, u' \rightarrow u) P_l(\mu) P_l(\mu') + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) W_l(x, u' \rightarrow u) \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times \\ \times P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi'). \quad (1.55)$$

При подстановке этого выражения в уравнения (1.50) и (1.51) второе его слагаемое, пропорциональное $\cos m(\varphi - \varphi')$, обра-

щается в нуль при интегрировании по φ' , так как поток Φ не зависит от азимутального угла. В результате для плоской геометрии получаем

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi(x, u, \mu)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi(x, u, \mu) = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \int \Phi_l(x, u') W_l(x, u' \rightarrow u) du' + \\ & \quad + q(x, u, \mu). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Аналогичным образом записывается уравнение и для сферически симметричной геометрии:

В уравнении (1.56) функции $\Phi_l(x, u')$ являются коэффициентами разложения угловой зависимости потока нейтронов по полиномам Лежандра

$$\Phi_l(x, u') = \int_{-1}^{+1} \Phi(x, u', \mu') P_l(\mu') d\mu'. \quad (1.57)$$

Сложная угловая зависимость интегрального члена в уравнении (1.42) сведена в (1.56) к разложению по полиномам Лежандра. Коэффициенты разложения выражаются через квадратуры от произведения $\Phi_l(x, u') W_l(x, u' \rightarrow u)$. При этом осуществляется своеобразная корреляция: l -я гармоника индикатрисы влияет лишь на l -ю гармонику потока*.

Остановимся теперь на сходимости ряда по l в правой части уравнения (1.56). Сходимость этого ряда определяется анизотропией потока нейтронов и, вообще говоря, не зависит от анизотропии упругого рассеяния. Это объясняется наличием однозначной связи между углом упругого рассеяния и потерей энергии. Как указывалось ранее, для правильного описания этой связи в разложении (1.52) приходится сохранять большое число членов независимо от степени анизотропии упругого рассеяния.

Рассмотрим частный случай рассеяния нейтронов на тяжелых ядрах. Введем обозначения

$$K_l(x, u) = \int \Phi_l(x, u') W_l(x, u' \rightarrow u) du'. \quad (1.58)$$

Так как ряд по $P_l(\mu)$ в правой части уравнения (1.56) практически всегда сходится, то существует некоторое значение $l=L$, для которого сумма

$$\sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{2l+1}{2} K_l(x, u) P_l(\mu)$$

* Здесь и в дальнейшем под l -й гармоникой некой функции $f(\mu)$ подразумевается соответствующий коэффициент в разложении этой функции по $P_l(\mu)$.

может рассматриваться как некая поправка к сумме

$$\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} K_l(x, u) P_l(\mu).$$

Используя соотношение (1.54), легко получить следующее выражение для $K_l(x, u)$:

$$K_l(x, u) = \int_{u-r}^u \Sigma_s(x, u') \Phi_l(x, u') f_s(u' \rightarrow u) P_l[\beta(u-u')] + \\ + \delta_{l0} \int \Sigma_{ln}(x, u') \Phi_l(x, u') f_{ln}(u' \rightarrow u) du'. \quad (1.59)$$

Так как для тяжелых ядер r мало, то можно пренебречь изменением комплекса $\Sigma_s(x, u') \Phi_l(x, u')$ на интервале $u-r \div u$ и вынести его из-под знака интегрирования при $u'=u$. Однако такая операция приводит к нарушению корреляции между углом рассеяния и потерей энергии нейтроном. Поэтому осуществим ее только в поправочных членах рассматриваемого ряда, т. е. при $l > L$. В результате получим

$$K_l(x, u) = \Sigma_s(x, u) \Phi_l(x, u) \int_{u-r}^u f_s(u' \rightarrow u) P_l[\beta(u-u')] du' \quad (1.60) \\ \text{при } l > L.$$

Преобразуем интеграл

$$I_l = \int_{u-r}^u f_s(u' \rightarrow u) P_l[\beta(u-u')] du'. \quad (1.61)$$

Функция $f_s(u', u-u')$ в выражении (1.61), описывающая энергетический спектр нейтронов, испытавших упругое рассеяние при латаргии u' , связана с функцией $\chi(u', \mu_0)$, описывающей угловой спектр тех же нейтронов, соотношением вида

$$f_s(u', u-u') = \frac{1}{2} \chi(u', \mu_0) \frac{d\mu_0}{du}.$$

Поэтому, учитывая, что

$$\beta(u-u') = \mu_0(u-u'),$$

получаем

$$I_l = \int_{u-r}^u \chi(u', \mu_0) P_l(\mu_0) \frac{d\mu_0}{du} du'.$$

Если пренебречь изменением анизотропии рассеяния на интервале $(u-r) \div u$, т. е. положить

$$\chi(u', \mu_0) \approx \chi(u, \mu_0),$$

то I_l можно записать в виде

$$I_l = \int_{-1}^{+1} \chi(u, \mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0 = \chi_l(u). \quad (1.62)$$

Таким образом, интеграл I_l сводится к выражению для коэффициента разложения по $P_l(\mu_0)$ угловой зависимости функции $\chi(u, \mu_0)$.

В соответствии с выражениями (1.58), (1.60)–(1.62) уравнение (1.56) записывается в виде

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, u, \mu)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi(x, u, \mu) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \int \Phi_l(x, u') W_l(x, u' \rightarrow u) du' + \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \Sigma_s(x, u) \Phi_l(x, u) \chi_l(u) + q(x, u). \quad (1.63)$$

Легко видеть, что сходимость ряда в правой части уравнения (1.63) определяется числом отличных от нуля гармоник потока нейтронов $\Phi_l(x, u)$ и гармоник дифференциального сечения упругого рассеяния $\chi_l(u)$. Иными словами, сходимость ряда в уравнении (1.63) в отличие от уравнения (1.56) в одинаковой степени зависит как от анизотропии потока, так и от анизотропии рассеяния.

Если значение L в уравнении (1.63) выбирается из того условия, что сумма $\sum_{l=0}^L (2l+1) \chi_l(u) P_l(\mu_0)$ удовлетворительно аппроксимирует функцию $\chi(u, \mu_0)$, т. е. угловой спектр упруго рассеянных нейтронов, то уравнение (1.63) приобретает следующий вид:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, u, \mu)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi(x, u, \mu) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \int \Phi_l(x, u') W_l(x, u' \rightarrow u) + q(x, u). \quad (1.64)$$

Таким образом, процедура перехода от точного уравнения (1.56) с бесконечным рядом по l в правой части к приближенному уравнению (1.64) с конечным рядом по l является достаточно обоснованной в том случае, когда рассматриваемая среда состоит из одних тяжелых ядер.

При изотропном рассеянии, когда $\chi_l = 0$ при $l \neq 0$, рассматриваемое приближение дает $K_l = 0$ при $l \neq 0$ и соответственно

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, u, \mu)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi(x, u, \mu) = \frac{1}{2} \int \Phi_0(x, u') W_0(x, u' \rightarrow u) du' + q(x, u, \mu).$$

Здесь

$$W_0(x, u' \rightarrow u) = \Sigma_s(u') f_s(u', u - u') + \Sigma_{in}(u') f_{in}(u', u - u').$$

При получении уравнений (1.63) и (1.64) предполагалось, что среда, в которой описывается перенос нейтронов, состоит из одних тяжелых ядер. В такой среде заметное изменение энергии нейтронов происходит в результате большого числа столкновений, и поэтому однозначная связь между потерей энергии и углом рассеяния не играет существенной роли*. Переход от уравнения (1.56) к уравнениям (1.63) и (1.64) означает соответственно частичное и полное нарушение этой связи.

Вернемся теперь к уравнению (1.56). Запишем его в многогрупповом приближении, аналогично тому как это было сделано в отношении уравнения (1.42):

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi^i(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma^i(x, \mu) \Phi^i(x, \mu) = \\ & = \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \Phi_l^k(x) W_l^{k \rightarrow i}(x) + q^i(x, \mu). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Здесь $\Phi^i(x, \mu) = \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi(x, u, \mu) du$ — групповой поток нейтронов;

$\Phi_l^i(x) = \int_{-1}^{+1} \Phi^i(x, \mu) P_l(\mu) d\mu$ — гармоника группового потока нейтронов.

Среднегрупповые сечения, входящие в уравнение (1.65), определяются следующим образом:

$$\Sigma^i(x, \mu) = \frac{1}{\Phi^i(x, \mu)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(x, u) \Phi(x, u, \mu) d\mu, \quad (1.66)$$

$$W_l^{k \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_l(x, u' \rightarrow u) du.$$

Члены матриц $W_l^{k \rightarrow i}(x)$ в отличие от членов матрицы $W^{k \rightarrow i}(x, \mu)$, определяемых выражением (1.48), не зависят от угла рассеяния нейтронов.

* Имеются в виду только упругие столкновения, так как неупругое рассеяние считается изотропным без однозначной связи между углом рассеяния и потерей энергии.

Для случая изотропного рассеяния на тяжелых ядрах групповое кинетическое уравнение, согласно уравнению (1.64), может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi^i(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma^i(x, \mu) \Phi^i(x, \mu) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^i \Phi_0^k(x) W_0^{k-i}(x) + q^i(x, \mu). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Среднегрупповые сечения, входящие в уравнение (1.67), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Sigma^i(x, \mu) &= \frac{1}{\Phi^i(x, \mu)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(x, u) \Phi(x, u, \mu) du, \\ W_0^{k-i}(x) &= \frac{1}{\Phi_0^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_0(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_0(x, u' \rightarrow u) du. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Глестон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
3. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Гостехиздат, 1948.
4. Pritchard W., Ahrens T. Nucl. Sci. and Engng, **22**, 248 (1965).
5. Гордеев И. и др. Ядерно-физические константы. М., Госатомиздат, 1963.
6. Николаев М. и др. Бюллетень информационного центра по ядерным данным. Вып. третий. М., Атомиздат, 1966, стр. 289.
7. Марчук Г. И. Методы расчета реакторов. М., Госатомиздат, 1961, стр. 28.
8. Блатт Д., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
9. Malyshev A., Shubin Y. Nucl. Phys., **76**, 232 (1966).
10. Thompson D. Phys. Rev., **129**, 1649 (1963).
11. Орлов В. В., Суворов А. П. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Под ред. Д. Л. Бродера и др. Вып. 2. М., Атомиздат, 1966, стр. 123.

Глава II

ГРУППОВЫЕ КОНСТАНТЫ

В многогрупповом приближении сечения ядерных процессов заменяются среднегрупповыми величинами, именуемыми в дальнейшем групповыми константами или сечениями. Определение среднегрупповых сечений, характеризующих взаимодействие нейтронов с ядрами среды, является неотъемлемой частью любого многогруппового расчета.

В настоящей главе рассмотрены возможные способы усреднения нейтронных сечений и получены формулы, которые могут быть использованы в практических расчетах.

Способ усреднения сечений зависит, в частности, от формы записи многогрупповой системы уравнений. Представим групповое кинетическое уравнение (1.65) в виде

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi^i(x, \mu)}{\partial x} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \Phi_l^i(x) \Sigma_l^i(x) = \\ & = \sum_{k=k_0}^l \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \Phi_l^k(x) W_l^{k \rightarrow i}(x) + q^i(x, \mu). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Групповые сечения $\Sigma_l^i(x)$ и $W_l^{k \rightarrow i}(x)$ в уравнении (2.1) записываются в форме, наиболее общей для рассматриваемых в дальнейшем задач и методов их решения:

$$\begin{aligned} \Sigma_l^i(x) &= \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{l-1}}^{u_l} \Sigma(x, u) \Phi_l(x, u) du, \\ W_l^{k \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Phi_l(x, u') \int_{u_{l-1}}^{u_l} W_l(x, u' \rightarrow u) du. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\Phi_l^i(x)$, $\Phi_l^k(x)$ — гармоники групповых потоков нейтронов. Представления среднегруппового значения полного сече-

ния в форме (1.66) и (2.2) связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned}\Sigma'_l(x) &= \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int \Sigma^i(x, \mu) \Phi^i(x, \mu) P_l(\mu) d\mu = \\ &= \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int d\mu \int du \Sigma(x, u) \Phi(x, u, \mu) P_l(\mu) = \\ &= \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int du \Sigma(x, u) \Phi_l(x, u).\end{aligned}$$

В выражениях (2.2) усреднение полного сечения $\Sigma(x, u)$ и l -й гармоники индикатрисы рассеяния $W_l(x, u' \rightarrow u)$ осуществляется по спектру гармоник потока нейтронов $\Phi_l(x, u)$. Поэтому величины $\Sigma_l^i(x)$ и $W_l^{k \rightarrow i}(x)$ являются функциями координат даже в случае однородной среды с постоянными физическими свойствами и могут рассматриваться как среднегрупповые сечения, определяемые в каждой точке среды. Лишь при установившемся в пределах группы энергетическом спектре нейтронов, когда справедливо разделение переменных

$$\Phi_l(x, u) \simeq X_l(x) \Phi_l(u),$$

групповые сечения утрачивают зависимость от x (для однородной среды):

$$\Sigma_l^i = \frac{1}{\Phi_l^i} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(u) \Phi_l(u) du, \quad (2.2a)$$

$$W_l^{k \rightarrow i} = \frac{1}{\Phi_l^k} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_l(u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_l(u' \rightarrow u) du.$$

Отметим, что групповые сечения, описывающие взаимодействие нейтронов со средой, содержащей ядра различных изотопов, согласно (1.2), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Sigma_l^i(x) &= \sum_n \rho_n(x) \sigma_{ln}^i(x), \\ W_l^{k \rightarrow i}(x) &= \sum_n \rho_n(x) \omega_{ln}^{k \rightarrow i}(x).\end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{ln}^i(x)$, $\omega_{ln}^{k \rightarrow i}(x)$ — микроскопические групповые сечения отдельных изотопов, определяемые соотношениями (2.2).

Система уравнений (2.1) с сечениями взаимодействия (2.2) и соответствующими граничными условиями может рассматриваться как строгая математическая формулировка задачи в мно-

групповом приближении. Однако подобная задача, вообще говоря, не имеет точного решения, так как для определения групповых сечений (2.2) нужно располагать заранее не известной информацией о функции распределения нейтронов во всех точках фазового пространства. Поэтому для описания внутригруппового спектра, используемого для определения групповых параметров, приходится применять различные приближенные методы, что, конечно, вносит определенные ошибки в искомые величины.

Более подробно об этих методах будет сказано в § 5.

§ 1. МАТРИЦА ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ ГРУППАМИ

В многогрупповом приближении индикатриса рассеяния $W(x, \mu_0, u' \rightarrow u)$ или, что то же, гармоники этой функции $W_l(x, u' \rightarrow u)$ превращаются в матрицу $W_l^{k \rightarrow i}$, описывающую переходы нейтронов из k -й группы в i -ю.

При рассеянии нейтронов на неподвижных ядрах в силу известных законов сохранения энергия нейтронов не возрастает. Поэтому для $k > i$ (нумерация групп растет с уменьшением энергии нейтронов) переходы между группами запрещены, а соответствующие члены матрицы $W_l^{k \rightarrow i}$ равны нулю. Иными словами, матрица $W^{k \rightarrow i}$ является треугольной.

Воспользуемся выражением (1.54) для гармоник индикатрисы рассеяния

$$W_l(x, u' \rightarrow u) = \Sigma_s(x, u') f_s(u', u - u') P_l[\beta(u - u')] + \Sigma_{in}(x, u') f_{in}(u', u - u') \delta_{l0}. \quad (2.3)$$

Здесь $\Sigma_s(x, u')$, $\Sigma_{in}(x, u')$ — сечения упругого и неупругого рассеяния соответственно;

$$\beta(u - u') = \frac{M+1}{2} e^{-\frac{u-u'}{2}} - \frac{M-1}{2} e^{\frac{u-u'}{2}} = \mu_0(u - u');$$

$$\delta_{l0} = \begin{cases} 1 & \text{при } l = 0, \\ 0 & \text{при } l \neq 0; \end{cases}$$

функции $f_s(u', u - u')$ и $f_{in}(u', u - u')$ описывают распределение по летаргии нейтронов, испытавших упругое и неупругое рассеяние соответственно.

Согласно выражению (2.3), матрица $W_l^{k \rightarrow i}(x)$ может быть представлена как сумма матрицы упругих переходов $W_{ls}^{k \rightarrow i}(x)$ и матрицы неупругих переходов $W_{lin}^{k \rightarrow i}(x)$

$$W_l^{k \rightarrow i}(x) = W_{ls}^{k \rightarrow i}(x) + W_{lin}^{k \rightarrow i}(x).$$

В соответствии с формулами (2.2) и (2.3) выражения для $W_{ls}^{k \rightarrow i}(x)$ и $W_{lin}^{k \rightarrow i}(x)$ записываются в виде

$$W_{ls}^{k \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_s(x, u') \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} f_s(u', u - u') \times \\ \times P_l[\beta(u - u')] du, \quad (2.4)$$

$$W_{lin}^{k \rightarrow i}(x) = \frac{\delta_{l0}}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_{in}(x, u') \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} f_{in}(u', u - u') du.$$

При определении групповых сечений широко используется приближение, справедливое для достаточно узких энергетических групп:

$$W_l^{k \rightarrow i}(x) \simeq \Sigma_{ls}^k(x) S_{ls}^{k \rightarrow i} + \Sigma_{lin}^k(x) S_{lin}^{k \rightarrow i}. \quad (2.5)$$

Среднегрупповое сечение упругого рассеяния

$$\Sigma_{ls}^k(x) = \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_s(x, u) \Phi_l(x, u) du.$$

Среднегрупповое сечение неупругого рассеяния

$$\Sigma_{lin}^k(x) = \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_{in}(x, u) \Phi_l(x, u) du.$$

Матрица упругих переходов

$$S_{ls}^{k \rightarrow i} = \frac{1}{\Delta u_k} \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} f_s(u', u - u') P_l[\beta(u - u')] du.$$

Матрица неупругих переходов

$$S_{lin}^{k \rightarrow i} = \frac{\delta_{l0}}{\Delta u_k} \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} f_{in}(u', u - u') du.$$

Приближение (2.5), сохраняя эффект самоэкранировки сечений, приводит к пренебрежению эффектом влияния анизотропии потока на групповые параметры анизотропии рассеяния.

§ 2. МАТРИЦА УПРУГИХ ПЕРЕХОДОВ

Выражение для членов матрицы упругих переходов, согласно формулам (1.43) и (2.4), можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 W_{ls}^{k \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_{ls}(x, u' \rightarrow u) du = \\
 &= \frac{(M+1)^2}{4M} \cdot \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_s(x, u') \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} e^{-(u-u')} P_l |\beta(u - \\
 &\quad - u')| \gamma(u', u - u') du.
 \end{aligned}$$

При изотропном рассеянии в системе центра инерции $\gamma(u', u - u') = 1$ и соответственно

$$\begin{aligned}
 W_{ls}^{k \rightarrow i}(x) &= \frac{(M+1)^2}{4M} \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_s(x, u') \Phi_l(x, u') \times \\
 &\quad \times du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} e^{-(u-u')} P_l |\beta(u - u')| du.
 \end{aligned}$$

Так как функция

$$f_s(u', u - u') = \frac{(M+1)^2}{4M} e^{-(u-u')} \gamma(u', u - u')$$

описывает распределение по летаргии u нейтронов, испытавших упругое рассеяние при летаргии u' , а функция $\chi(u', \mu_0)$ — угловой спектр рассеянных нейтронов, то

$$f_s(u', u - u') = \frac{1}{2} \chi(u', \mu_0) \frac{d\mu_0}{du}.$$

Воспользовавшись разложением угловой зависимости функции $\chi(u', \mu_0)$ по полиномам Лежандра (1.17), получим следующее выражение для $W_{ls}^{k \rightarrow i}$:

$$\begin{aligned}
 W_{ls}^{k \rightarrow i}(x) &= \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_s(x, u') \chi_n(u') \Phi_l(x, u') \times \\
 &\quad \times du' \int_{\mu_0(u_{i-1}-u')}^{\mu_0(u_i-u')} P_n(\mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0. \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Здесь N — число членов в разложении (1.17), описывающих с требуемой точностью угловой спектр рассеянных нейтронов; $\chi_n(u')$ — n -й коэффициент разложения по $P_n(\mu_0)$ функции $\chi(u', \mu_0)$.

В выражении (2.6) интеграл по $d\mu_0$, зависящий от u' , можно с некоторым приближением заменить на его среднегрупповое значение.

Тогда

$$W_{l's}^{k \rightarrow l}(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_{n'l}^{k \rightarrow l} \Sigma_{s nl}^k(x) \quad (2.7)$$

или, если пренебречь резонансной самоэкранировкой параметров анизотропии,

$$W_{l's}^{k \rightarrow l}(x) = \Sigma_{s l}^k(x) \sum_{n=0}^N \chi_n^k \alpha_{n'l}^{k \rightarrow l}. \quad (2.8)$$

В выражениях (2.7) и (2.8) приняты следующие обозначения:

$$\Sigma_{s nl}^k(x) = \frac{2n+1}{2\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_s(x, u') \chi_n(u') \Phi_l(x, u') du',$$

$$\Sigma_{s l}^k(x) = \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_s(x, u') \Phi_l(x, u') du',$$

$$\chi_n^k = \frac{2n+1}{2\Delta u_k} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \chi_n(u') du',$$

$$\alpha_{n'l}^{k \rightarrow l} = \frac{1}{\Delta u_k} \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \int_{\nu_0(u_{l-1}-u')}^{\nu_0(u_i-u')} P_n(\mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0.$$

Здесь $\Sigma_{s nl}^k$ — n -я гармоника дифференциального сечения рассеяния, усредненная по спектру l -й гармоники потока в k -й группе; $\Sigma_{s l}^k$ — полное сечение упругого рассеяния, усредненное по спектру l -й гармоники потока в k -й группе; χ_n^k — n -я гармоника углового спектра рассеянных нейтронов, усредненная по ширине k -й группы.

В работе [1] для широкого круга элементов приведены значения $\alpha_{n'l}^{k \rightarrow l}$, вычисленные авторами для энергетических интервалов, соответствующих 26-групповой системе констант [2]. Указанные значения $\alpha_{n'l}^{k \rightarrow l}$ позволяют определять матрицы переходов $W_{l's}^{k \rightarrow l}$, необходимые для расчета переноса нейтронов от P_0 - до P_5 -приближения метода сферических гармоник ($l = 0 \div 5$). При этом точность учета анизотропии рассеяния может осуществляться до P_7 -приближения ($n = 0 \div 7$).

В работе [3] для нескольких элементов приведены значения $W_{l_s}^{k \rightarrow i}$, рассчитанные по формуле (2.7) для стандартного спектра нейтронов, соответствующего 26-групповой системе констант.

Для иллюстрации схемы упругих переходов между группами на рис. 2.1 в плоскости (u, u') изображена область интегрирования G для всех отличных от нуля членов матрицы $W_{l_s}^{k \rightarrow i}$. На рис. 2.1 ширина групп в шкале летаргии Δu_i не убывает с уменьшением энергии нейтронов.

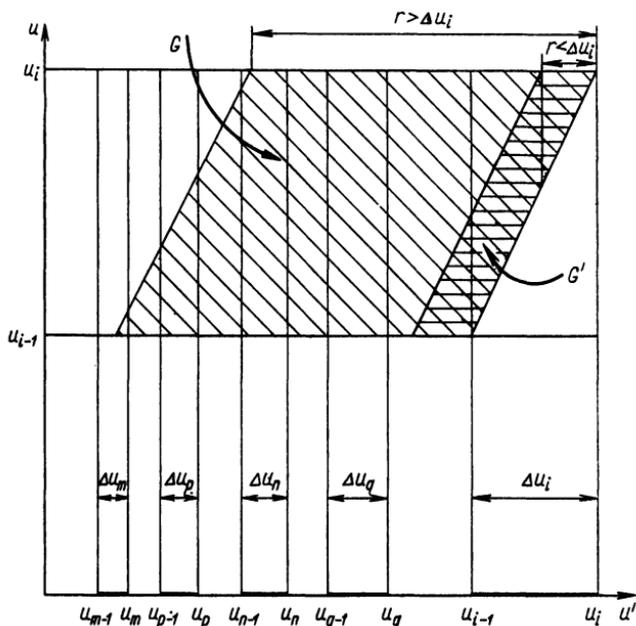


Рис. 2.1. Область интегрирования для отличных от нуля членов матрицы упругих переходов.

Рассмотрим вначале случай, когда выполняется условие

$$r > \Delta u_i,$$

где r — максимально возможное увеличение летаргии нейтрона при одном акте упругого рассеяния.

Индекс m обозначает номер крайней группы, из которой еще возможны переходы в i -ю группу, а индекс n — номер крайней группы, из которой возможны переходы в любую точку i -группы. Значения m и n определяются из равенств

$$r = \sum_{k=n+1}^i \Delta u_k + \gamma_n, \quad \gamma_n < \Delta u_n; \quad (2.9)$$

$$r = \sum_{k=m+1}^{i-1} \Delta u_k + \gamma_m, \quad \gamma_m < \Delta u_m.$$

Если ширина всех групп одинакова и равна Δu , то

$$m = n - 1$$

и вместо выражений (2.9) получаем

$$r = (i - m - 1) \Delta u + \gamma; \quad \gamma < \Delta u.$$

Воспользовавшись схемой, изображенной на рис. 2.1, определим пределы интегрирования по u и u' для всех отличных от нуля членов матрицы $W_{l_s}^{k \rightarrow i}$ (индекс k пробегает все значения от m до i):

$$\left. \begin{aligned} W_{l_s}^{m \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^m(x)} \int_{u_{i-1}-r}^{u_i^m} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u'+r} W_{l_s}(x, u' \rightarrow u) du, \\ W_{l_s}^{p \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^p(x)} \int_{u_{p-1}}^{u_i^p} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u'+r} W_{l_s}(x, u' \rightarrow u) du; \\ & \quad m + 1 \leq p \leq n - 1, \\ W_{l_s}^{n \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^n(x)} \left[\int_{u_{n-1}}^{u_i^n} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_{l_s}(x, u' \rightarrow u) du - \right. \\ & \quad \left. - \int_{u_{n-1}}^{u_{i-r}} \Phi_l(x, u') du' \int_{u'+r}^{u_i} W_{l_s}(x, u' \rightarrow u) du \right], \\ W_{l_s}^{q \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^q(x)} \int_{u_{q-1}}^{u_i^q} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_{l_s}(x, u' \rightarrow u) du; \\ & \quad n + 1 \leq q \leq i - 1, \\ W_{l_s}^{i \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi_l(x, u') du' \int_{u'}^{u_i} W_{l_s}(x, u' \rightarrow u) du. \end{aligned} \right\} (2.10)$$

Изменение ширины группы может не соответствовать схеме, изображенной на рис. 2.1 (ширина группы убывает с уменьшением энергии нейтронов или изменение ширины носит нерегулярный характер). В этих случаях вся процедура определения отличных от нуля членов матрицы $W_{l_s}^{k \rightarrow i}$ ничем не отличается от вышеизложенной. Следует лишь воспользоваться должным образом выполненной схемой переходов.

Формулы (2.10) соответствуют случаю, когда максимальный сброс энергии нейтронов превышает ширину энергетической группы. При упругом рассеянии на тяжелых ядрах обычно имеет место обратное соотношение

$$r < \Delta u_i.$$

Последнее условие означает, что нейтроны, испытавшие рассеяние, либо остаются в пределах собственной группы, либо попадают в соседнюю группу. Иными словами, все члены матрицы $W_{i s}^{k \rightarrow i}$ равны нулю, за исключением $W_{i s}^{i-1 \rightarrow i}$ и $W_{i s}^{i \rightarrow i}$.

Пределы интегрирования для $W_{i s}^{i-1 \rightarrow i}$ и $W_{i s}^{i \rightarrow i}$ легко определить по схеме, изображенной на рис. 2.1 (область интегрирования G'):

$$W_{i s}^{i-1 \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_i^{i-1}(x)} \int_{u_{i-1}-r}^{u_{i-1}} \Phi_i(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u'+r} W_{i s}(x', u' \rightarrow u) du, \quad (2.11)$$

$$W_{i s}^{i \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_i^i(x)} \left[\int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi_i(x, u') du' \int_{u'}^{u'+r} W_{i s}(x, u' \rightarrow u) du - \int_{u_i-r}^{u_i} \Phi_i(x, u') du' \int_{u_i}^{u'+r} W_{i s}(x, u' \rightarrow u) du \right].$$

Если ввести обозначение

$$\Sigma_s(x, u') \chi_i(u', \alpha) = \int_{\alpha}^{u'+r} W_{i s}(x, u' \rightarrow u) du; \quad \alpha = u'; \quad u_i; \quad u_{i-1},$$

то выражения (2.11) можно представить в виде

$$W_{i s}^{i-1 \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_i^{i-1}(x)} \int_{u_{i-1}-r}^{u_{i-1}} \Sigma_s(x, u') \Phi_i(x, u') \chi_i(u', u_{i-1}) du',$$

$$W_{i s}^{i \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_i^i(x)} \left[\int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_s(x, u') \Phi_i(x, u') \chi_i(u', u') du' - \int_{u_i-r}^{u_i} \Sigma_s(x, u') \Phi_i(x, u') \chi_i(u', u_i) du' \right]. \quad (2.12)$$

Согласно выражению (2.3),

$$\chi_i(u', \alpha) = \int_{\alpha}^{u'+r} f_s(u', u - u') P_i[\mu_0(u - u')] du. \quad (2.13)$$

Переходя от переменной u к переменной μ_0

$$f_s(u', u - u') du = \frac{1}{2} \chi(u', \mu_0) d\mu_0,$$

получаем

$$\chi_l(u', \alpha) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{\mu_0(\alpha-u')} \chi(u', \mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0. \quad (2.14)$$

Функция $\chi(u', \mu_0)$ описывает в лабораторной системе координат угловое распределение нейтронов, рассеянных при летаргии u' [см. выражение (1.14)].

В выражении (2.14) $\mu_0(\alpha-u')$ — косинус угла рассеяния, в результате которого летаргия нейтрона изменяется от u' до некоторого значения α , лежащего внутри или на границе интервала $u' \div u' + r$. При $\alpha = u'$ (соответствует рассеянию без изменения энергии нейтрона) $\mu(u'-u') = 1$.

Коэффициенты $\chi_l(u', \alpha)$ при $\alpha = u'$

$$\chi_l(u') = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \chi(u', \mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0$$

являются гармониками функции $\chi(u', \mu_0)$;

$\chi_1(u') = \bar{\mu}_0(u')$ — средний косинус углов рассеяния, соответствующих изменению летаргии в интервале $u' \div u' + r$;

$\chi_l(u', \alpha) = \bar{\mu}_0(\alpha-u')$ — средний косинус углов рассеяния, соответствующих изменению летаргии в интервале $\alpha \div u' + r$.

Для иллюстрации той роли, которую в рамках многогруппового приближения играет однозначная связь между углом рассеяния и потерей энергии, рассмотрим случай изотропного рассеяния в лабораторной системе координат ($\chi(u', \mu_0) = 1$).

Согласно определению,

$$\chi_l(u') = \begin{cases} 1 & \text{при } l = 0, \\ 0 & \text{при } l \neq 0; \end{cases}$$

$$\chi_l(u', \alpha) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{\mu_0(\alpha-u')} P_l(\mu_0) d\mu_0.$$

Воспользовавшись рекуррентным соотношением для полиномов Лежандра [4]

$$\mu \frac{dP_l(\mu)}{d\mu} - \frac{dP_{l-1}(\mu)}{d\mu} = lP_l(\mu),$$

легко получить, что

$$\chi_l(u', \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 + \mu_0(\alpha-u')] & \text{при } l = 0, \\ \frac{1}{2(2l+1)} [P_{l+1}(\mu) - P_{l-1}(\mu)]_{\mu=\mu_0(\alpha-u')} & \text{при } l \neq 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Таким образом, при изотропном рассеянии в лабораторной системе координат члены матрицы упругих переходов могут быть представлены в виде

$$W_{l's}^{i-1 \rightarrow l}(x) = \frac{1}{\Phi_l^{i-1}(x)} \int_{u_{i-1}-r}^{u_{i-1}} \Sigma_s(x, u') \Phi_l(x, u') \chi_l(u', u_{i-1}) du', \quad (2.16)$$

$$W_{l's}^{i \rightarrow l}(x) = \frac{\delta_{l0}}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_{i-r}} \Sigma_s(x, u') \Phi_l(x, u') du' + \\ + \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{i-r}}^{u_i} \Sigma_s(x, u') \Phi_l(x, u') [\delta_{l0} - \chi_l(u', u_i)] du'.$$

Здесь только первый член в выражении для $W_{l's}^{i \rightarrow l}$ обращается в нуль при $l \neq 0$. Это означает, что корреляция между углом рассеяния и потерей энергии оказывается несущественной только при внутригрупповых переходах, соответствующих рассеянию нейтронов с летаргией u' , лежащей в интервале $u_{i-1} \div u_i - r$. В этом случае при любом угле рассеяния изменение энергии нейтронов таково, что они остаются внутри группы. Лишь при рассеянии нейтронов с летаргией u' , лежащей в интервале $u_i - r \div u_i$, когда в зависимости от угла рассеяния нейтроны либо остаются в группе, либо переходят в соседнюю, корреляция оказывается существенной. При этом она влияет на анизотропию источников в каждой группе. Следует отметить, что все вышесказанное относится и к общему случаю анизотропного рассеяния.

Рассмотрим теперь члены матрицы переходов $W_{l's}^{i \rightarrow l}$ и $W_{l's}^{i-1 \rightarrow l}$, когда выполняется условие

$$r \ll \Delta u_i.$$

Обычно это неравенство выполняется при замедлении нейтронов на тяжелых ядрах.

Введем следующие обозначения:

$$W_{l's}^{i-1 \rightarrow l}(x) = \Sigma_{l' \text{ зам}}^{i-1}(x), \\ W_{l's}^{i \rightarrow l}(x) = \Sigma_{l's}^{\prime i}(x) - \Sigma_{l' \text{ зам}}^i(x). \quad (2.17)$$

Здесь $\Sigma_{l's}^{\prime i}$ — среднегрупповое значение угловой гармоник дифференциального сечения рассеяния

$$\Sigma_{l's}^{\prime i}(x) = \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_s(x, u') \chi_l(u') \Phi_l(x, u') du'.$$

Если воспользоваться приближением (2.5), то

$$\sum_{l's}^i(x) \approx \sum_{l's}^i(x) \bar{\chi}_l^i,$$

где $\sum_{l's}^i$ — сечение упругого рассеяния, усредненное по спектру l -й гармоники потока нейтронов; $\bar{\chi}_l^i$ — среднегрупповое значение l -й гармоники функции $\chi(u', \mu_0)$, описывающей угловой спектр рассеянных нейтронов. Так как $\bar{\chi}_0^i = 1$ и $\bar{\chi}_l^i = \bar{\mu}_0^i$, то при $l=0; 1$

$$\begin{aligned} \sum_{0's}^i(x) &= \sum_{0's}^i(x), \\ \sum_{1's}^i(x) &= \bar{\mu}_0^i \sum_{1's}^i(x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь $\bar{\mu}_0^i$ — средний косинус угла упругого рассеяния, усредненный по ширине i -й группы.

Согласно выражению (2.12), величина $\sum_{l' \text{ зам}}^k(x)$ в формуле (2.17) определяется следующим образом:

$$\sum_{l' \text{ зам}}^k(x) = \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_k-r}^{u_k} \sum_s(x, u') \Phi_l(x, u') \chi_l(u', u_k) du'. \quad (2.19)$$

При $r \ll \Delta u_k$ функцию $\chi_l(u', u_k)$ можно заменить ее средним значением на интервале $u_k-r \div u_k$. Введя обозначение

$$\chi_l^k = \int_{u_k-r}^{u_k} \chi_l(u', u_k) du', \quad (2.20)$$

запишем выражение для $\sum_{l' \text{ зам}}^k(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{l' \text{ зам}}^k(x) &= \frac{1}{r} \frac{\chi_l^k}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_k-r}^{u_k} \sum_s(x, u') \Phi_l(x, u') du' \approx \\ &\approx \frac{\chi_l^k \sum_s(x, u_k)}{\Delta u_k} b_l^k(x), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$b_l^k(x) = \frac{\Phi_l(x, u_k)}{\Phi_l^k(x)} \Delta u_k.$$

Если внутригрупповой спектр нейтронов слабо зависит от логарггии, то $b_l^k \approx 1$.

Согласно выражениям (1.14), (2.13) и (2.20),

$$\chi_l^k = \frac{(M+1)^2}{4M} \int_{u_k-r}^{u_k} du' \int_{u_k}^{u'+r} e^{-(u-u')} P_l[\mu_0(u-u')] \gamma(u', u-u') du.$$

При $l=0$

$$\chi_0^k = \frac{(M+1)^2}{4M} \int_{u_k-r}^{u_k} du' \int_{u_k}^{u'+r} e^{-(u-u')} \gamma(u', u-u') du = \xi^k. \quad (2.22)$$

Величина ξ^k может рассматриваться как средняя логарифмическая потеря энергии при переходе нейтронов из k -й группы в $k+1$ -ю. Если рассеяние изотропно в системе центра инерции, то $\gamma=1$ и

$$\xi^k = \xi = 1 + \frac{(M-1)^2}{2M} \ln \frac{M-1}{M+1}.$$

При $l=1$

$$\begin{aligned} \chi_1^k &= \frac{(M+1)^2}{4M} \int_{u_k-r}^{u_k} du' \int_{u_k}^{u'+r} \mu_0(u-u') e^{-(u-u')} \gamma(u', u-u') du = \\ &= \xi^k \bar{\mu}_{\text{зам}}^k. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Величину $\bar{\mu}_{\text{зам}}^k$ назовем средним косинусом замедления, или, точнее, средним косинусом углов рассеяния, соответствующих переходам нейтронов из k -й группы в $k+1$ -ю:

$$\bar{\mu}_{\text{зам}}^k = \frac{\int_{u_k-r}^{u_k} du' \int_{u_k}^{u'+r} \mu_0(u-u') e^{-(u-u')} \gamma(u', u-u) du}{\int_{u_k-r}^{u_k} du' \int_{u_k}^{u'+r} e^{-(u-u')} \gamma(u', u-u') du}. \quad (2.24)$$

В случае, когда рассеяние изотропно в системе центра инерции ($\gamma(u', u-u') \equiv 1$), выражение (2.24) имеет вид

$$\bar{\mu}_{\text{зам}}^k = \frac{1}{9} \frac{10 - 6M^2 + \frac{3}{2} r (M^2 - 3M + 2)}{M^2 - \frac{1}{4} r (M-1)^2}$$

и, как легко видеть, не зависит от номера группы. Можно показать, что при этом

$$\bar{\mu}_{\text{зам}}^k \approx -\frac{1}{3} \left(1 - \frac{4}{3M} \right),$$

если $M \gg 1$.

Другими словами, средний косинус перехода нейтронов из k -й группы в $k+1$ -ю в результате рассеяния на ядре с дифференциальным сечением упругого рассеяния, изотропным в системе центра инерции, является монотонной функцией только массового числа ядра-мишени. При этом средний косинус по мере

роста массы ядра уменьшается и в пределе стремится к $-1/3$. Заметим, что речь здесь идет о групповых переходах при изотропном рассеянии. В силу корреляции между углом рассеяния и потерей энергии групповые переходы по своей природе являются анизотропными. В самом деле, покинуть группу могут нейтроны, испытывающие упругое рассеяние лишь в интервале $[u_k - r, u_k]$. Причем в зависимости от угла рассеяния сброс энергии может оказаться достаточным или недостаточным для того, чтобы нейтрон покинул группу и перешел в следующую. Естественно, что покидают группу в основном нейтроны, рассеянные на большие углы и, следовательно, потерявшие больше энергии, и это тем в большей степени справедливо, чем на большем расстоянии от границы группы происходит рассеяние.

Чтобы покинуть группу, нейтрону, испытывавшему упругое рассеяние вблизи верхней границы интервала, необходимо изменить направление полета на угол, близкий к 180° , т. е. $\mu_0 \approx -1$. Очевидно, что вклад этих нейтронов будет тем меньше, чем больше r и чем больше будет (при анизотропном рассеянии) преобладать рассеяние на малые углы над рассеянием на большие углы. Этим и объясняется рост $\bar{\mu}_{\text{зам}}^k$ при уменьшении массы ядер-рассеивателей. Именно поэтому можно утверждать, что чем сильнее анизотропия рассеяния (если при этом преобладает рассеяние на малые углы), тем больше $\bar{\mu}_{\text{зам}}^k$. Анизотропия может быть так велика, что $\bar{\mu}_{\text{зам}}^k$ станет даже положительным.

Используя выражения (2.18), (2.21) и (2.22) и положив

$$b_1^k/b_0^k \approx 1,$$

можно следующим образом определить члены матрицы упругих переходов в формулах (2.17) при $l=0$; 1:

$$\left. \begin{aligned} W_{0s}^{i-1 \rightarrow i} &= \sum_{\text{зам}}^{i-1}, \\ W_{0s}^{i \rightarrow i} &= \sum_{0s}^i - \sum_{\text{зам}}^i, \\ W_{1s}^{i-1 \rightarrow i} &= \bar{\mu}_{\text{зам}}^{i-1} \cdot \sum_{\text{зам}}^{i-1}, \\ W_{1s}^{i \rightarrow i} &= \bar{\mu}_0^i \sum_{1s}^i - \bar{\mu}_{\text{зам}}^i \sum_{\text{зам}}^i. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Здесь $\sum_{\text{зам}}^k$ — сечение замедления нейтронов из k -й группы в $k+1$ -ю:

$$\sum_{\text{зам}}^k = \frac{\xi^k \Sigma_s(x, u_k)}{\Delta u_k} b_0^k. \quad (2.26)$$

Можно показать, что в случае тяжелых ядер и изотропного рассеяния

$$\left. \begin{aligned} W_{1s}^{i-1 \rightarrow i} &= 0 \\ W_{1s}^{i \rightarrow i} &= \sum_{1s}^i \end{aligned} \right\} \text{ при } l > 1.$$

Воспользовавшись формулами (2.20) и (2.14), запишем выражение для χ_i^k в виде

$$\chi_i^k = \frac{1}{2} \int_{u_k-r}^{u_k} du' \int_{-1}^{\nu_0(u_k-u')} \chi(u', \mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0.$$

Для изотропного рассеяния и тяжелых ядер ($\chi(\mu_0, u') = 1$; $du' \approx -\frac{2}{M} d\mu_0$) получаем

$$\chi_i^k = \frac{2}{M} \int_{-1}^1 d\mu_0 \frac{1}{2} \int_{-1}^{\nu_0} P_l(\mu_0) d\mu_0.$$

В соответствии с выражением (2.14)

$$\chi_i^k = \begin{cases} \xi & \text{при } l=0, \\ -\frac{1}{3} \xi & \text{при } l=1, \\ 0 & \text{при } l>1. \end{cases} \quad (2.27)$$

Здесь $\xi \approx \frac{2}{M}$ — средняя логарифмическая потеря энергии в расчете на одно упругое столкновение с тяжелым ядром (при изотропном рассеянии).

Так как, по определению,

$$\bar{\mu}_{\text{зам}}^k = \chi_i^k / \chi_0^k,$$

то, согласно выражению (2.27), $\bar{\mu}_{\text{зам}}^k = -1/3$, т. е. в соответствии с тем, что было показано выше, в рассматриваемом случае средний косинус замедления есть величина постоянная.

На основании вышеизложенного можно констатировать следующее. В многогрупповом приближении, когда выполняется условие $r < \Delta u_i$, эффект корреляции между углом рассеяния и потерей энергии оказывается существенным только для части нейтронов i -й группы.

Действительно, если летаргия нейтронов u' лежит в интервале $u_{i-1} \div u_i - r$, то при любом угле рассеяния нейтроны остаются в пределах i -й группы, т. е. в рамках многогруппового приближения не меняют своей энергии. Ясно, что при этом нет необходимости в учете однозначной связи между углом рассеяния и потерей энергии. Что же касается нейтронов i -й группы, имеющих летаргию u' в интервале $u_i - r \div u_i$, то они в зависимости от угла рассеяния могут остаться в i -й группе либо попасть в $i+1$ -ю группу, т. е. изменить или не изменить свою энергию. С точки зрения переноса таких нейтронов рассматриваемая корреляция должна играть существенную роль.

В случае тяжелых ядер и изотропного рассеяния для учета эффекта корреляции в многогрупповом уравнении переноса

достаточно из всех значений $W_{l_s}^{k \rightarrow i}$ ($k=i-1, i$) использовать лишь $W_{0_s}^{k \rightarrow i}$ и $W_{1_s}^{k \rightarrow i}$, так как $W_{l_s}^{k \rightarrow i}$ с $l > 1$ обращаются в нуль при $M \rightarrow \infty$. Следует отметить, что при этом $W_{1_s}^{i-1 \rightarrow i} = -1/3 W_{0_s}^{i-1 \rightarrow i}$.

§ 3. МАТРИЦА НЕУПРУГИХ ПЕРЕХОДОВ

Выражение для членов матрицы неупругих переходов, согласно формуле (2.2), записывается в виде

$$\begin{aligned} W_{l_{in}}^{k \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_{l_{in}}(x, u' \rightarrow u) du = \\ &= \frac{\delta_{l0}}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \sum_{in}(x, u') \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} f_{in}(u', u - u') du. \end{aligned}$$

Функция $f_{in}(x, u', u - u')$, описывающая энергетическое распределение неупруго рассеянных нейтронов, определена в гл. I, § 2.

В соответствии с выражением (1.27) летаргия нейтрона после рассеяния u выражается через летаргию нейтрона до рассеяния u' следующим образом:

$$\begin{aligned} u = u' - \ln \left[1 - \frac{M}{M+1} e^{u'-u^*} - \right. \\ \left. - \frac{2M}{(M+1)^2} \left(1 - \nu \sqrt{1 - \frac{M+1}{M} e^{u'-u^*}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь u^* — значение летаргии, соответствующее энергии возбуждения ядра мишени.

Неупругое рассеяние возможно лишь при условии, что

$$u' < u^* - \ln \frac{M+1}{M}.$$

Введем обозначение для порога неупругого рассеяния:

$$u_{\text{пор}} = u^* - \ln \frac{M+1}{M}.$$

При косинусе угла рассеяния $\nu = -1$ увеличение летаргии нейтрона $u - u'$ максимально и равно

$$\begin{aligned} r_{\text{макс}} = \left| \ln \left[1 - \frac{M}{M+1} e^{u'-u^*} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2M}{(M+1)^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{M+1}{M} e^{u'-u^*}} \right) \right] \right|. \quad (2.28) \end{aligned}$$

Если энергия возбуждения равна нулю, т. е. $u^* \rightarrow \infty$, то выражение (2.28) переходит в известное выражение для максимального увеличения летаргии при упругом рассеянии

$$r_{\text{макс}} = 2 \ln \left(\frac{M+1}{M-1} \right) = r.$$

При косинусе угла рассеяния $\nu=1$ увеличение летаргии нейтрона и $u-u'$ минимально и равно

$$r_{\text{мин}} = \left| \ln \left[1 - \frac{M}{M+1} e^{u'-u^*} - \frac{2M}{(M+1)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M+1}{M} e^{u'-u^*}} \right) \right] \right|.$$

При $u^* \rightarrow \infty$, что соответствует упругому рассеянию,

$$r_{\text{мин}} = 0.$$

Рассмотрим вначале область энергий, где уровни возбуждения ядра-мишени не перекрываются. В этом случае спектр неупруго рассеянных нейтронов имеет дискретный характер. Для каждого из уровней возбуждения ядра-мишени с порогом $u_{\text{пор}}^R$ может быть определена соответствующая матрица неупругих переходов $W_{iR}^{k \rightarrow i}(x)$. Если возбуждается несколько неперекрывающихся уровней, то полная матрица неупругих переходов находится путем суммирования матриц отдельных уровней

$$W_{iR}^{k \rightarrow i}(x) = \sum_R W_{iR}^{k \rightarrow i}(x).$$

На рис. 2.2 в плоскости (u, u') изображена область интегрирования G для отличных от нуля членов матрицы $W_{iR}^{k \rightarrow i}(x)$. Ширина группы в шкале летаргии принята одинаковой, а $r_{\text{макс}}^R - r_{\text{мин}}^R \leq \Delta u$, где $r_{\text{макс}}^R$ — максимальное увеличение летаргии при неупругом рассеянии с возбуждением R -го уровня; $r_{\text{мин}}^R$ — минимальное увеличение летаргии при неупругом рассеянии с возбуждением R -го уровня; Δu — ширина групп.

Значение индекса n определяется из равенства

$$r_{\text{мин}} = (i - n - 1) \Delta u + \gamma; \quad \gamma < \Delta u. \quad (2.29)$$

Воспользовавшись схемой, изображенной на рис. 2.2, определим пределы интегрирования для $W_{iR}^{k \rightarrow i}$.

1. Значение u_1 таково, что $u_{\text{по}}^R + r_{\text{мин}}^R > u_i$, т. е. вся область интегрирования G лежит ниже порога возбуждения R -го уровня:

$$\left. \begin{aligned}
 W_{lR}^{n-1 \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^{n-1}(x)} \int_{u_{i-1}-r_{\text{макс}}^R}^{u_{n-1}} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u'+r_{\text{макс}}^R} W_{lR}(x, u' \rightarrow u) du, \\
 W_{lR}^{n \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^n(x)} \left[\int_{u_{n-1}}^{u_n} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_{lR}(x, u' \rightarrow u) du - \right. \\
 &\quad - \int_{u_{n-1}}^{u_i-r_{\text{макс}}^R} \Phi_l(x, u') du' \int_{u'+r_{\text{макс}}^R}^{u_i} W_{lR}(x, u' \rightarrow u) du - \\
 &\quad \left. - \int_{u_{i-1}-r_{\text{мин}}^R}^{u_n} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u'+r_{\text{мин}}^R} W_{lR}(x, u' \rightarrow u) du \right]; \\
 W_{lR}^{n+1 \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_l^{n+1}(x)} \int_{u_n}^{u_i-r_{\text{мин}}^R} \Phi_l(x, u') du' \int_{u'+r_{\text{мин}}^R}^{u_i} W_{lR}(x, u' \rightarrow u) du.
 \end{aligned} \right\} (2.30)$$

Остальные члены матрицы $W_{lR}^{k \rightarrow i}$ при $k > n+1$ и $k < n-1$ равны нулю.

2. Значение u_i таково, что $u_{\text{пор}}^R + r_{\text{мин}}^R < u_i$, т. е. лишь часть области G лежит ниже порога возбуждения R -го уровня (область интегрирования G'). Для положения $u_{\text{пор}}^R$, показанного на рис. 2.2, будем иметь

$$W_{lR}^{n-1 \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_l^{n-1}(x)} \int_{u_{i-1}-r_{\text{макс}}^R}^{u_{n-1}} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_i}^{u'+r_{\text{макс}}^R} W_{lR}(x, u' \rightarrow u) du; \quad (2.31)$$

$$W_{lR}^{n \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_l^n(x)} \left[\int_{u_{n-1}}^{u_{\text{пор}}^R} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_{lR}(x, u' \rightarrow u) du - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{u_{n-1}^R}^{u_{\text{пор}}^R} \Phi_i(x, u') du' \int_{u'+r_{\text{макс}}^R}^{u_i} W_{iR}(x, u' \rightarrow u) du - \int_{u_{i-1}^R - r_{\text{мин}}^R}^{u_{\text{пор}}^R} \Phi_i(x, u') \times \\
 & \left. \times du' \int_{u_{i-1}}^{u'+r_{\text{мин}}^R} W_{iR}(x, u' \rightarrow u) du \right].
 \end{aligned}$$

Остальные члены матрицы W_{iR}^{k-i} при $k > n$ и $k < n-1$ равны нулю. Для других возможных положений $u_{\text{пор}}^R$ легко получить аналогичные выражения.

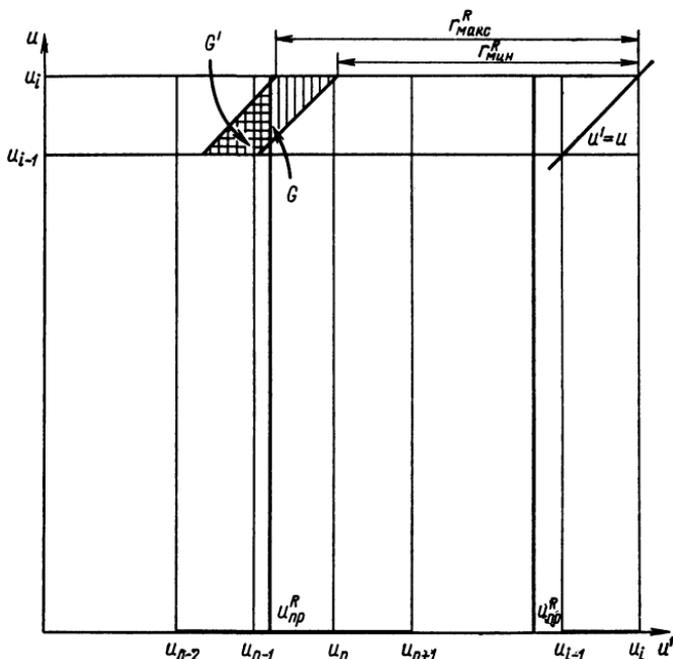


Рис. 2.2. Область интегрирования для отличных от нуля членов матрицы неупругих переходов при неперекрывающихся уровнях возбуждения ядра-мишени.

В формулах (2.30), (2.31) $W_{iR}(x, u' \rightarrow u)$ — гармоники дифференциального сечения неупругого рассеяния с возбуждением R -го уровня ядра-мишени.

Неупругое рассеяние, оставляющее нейтрон внутри той же группы, в которой произошло рассеяние, возможно при выполнении следующих условий: хотя бы часть i -й группы лежит ниже порога возбуждения рассматриваемого уровня; ширина

i -й группы такова, что справедливо неравенство $r_{\text{мин}}^R < \Delta u$, и, согласно выражению (2.29), $n=i-1$. Это условие обычно выполняется для первых, т. е. наиболее низколежащих уровней.

При $r_{\text{макс}}^R > \Delta u$ член матрицы, описывающий неупругие переходы в пределах группы, согласно формулам (2.30), имеет следующий вид:

если вся область интегрирования G лежит ниже порога возбуждения R -го уровня,

$$W_{iR}^{i \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_i^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i - r_{\text{мин}}^R} \Phi_i(x, u') du' \int_{u' + r_{\text{мин}}^R}^{u_i} W_{iR}(x, u' \rightarrow u) du;$$

если часть области интегрирования G лежит ниже порога возбуждения R -го уровня,

$$W_{iR}^{i \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_i^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_{\text{пор}}^R} \Phi_i(x, u') du' \int_{u' + r_{\text{мин}}^R}^{u_i} W_{iR}(x, u' \rightarrow u) du.$$

Аналогичные выражения для $W_{iR}^{i \rightarrow i}$ легко получить и при $r_{\text{макс}}^R < \Delta u$.

Когда среда состоит из достаточно тяжелых ядер, можно при рассмотрении неупругого рассеяния пренебречь кинетической энергией ядра отдачи. В этом случае потеря энергии нейтроном равна

$$r_{in}^R = r_{\text{мин}}^R = r_{\text{макс}}^R = \left| \ln(1 - e^{u' - u^*}) \right|$$

и в соответствии с выражением (1.34) матрица неупругих переходов имеет только два отличных от нуля члена (для групп одинаковой ширины):

$$W_{0R}^{k \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_0^k(x)} \int_{u_{i-1} - r_{in}^R}^{u_k} \Phi_0(x, u') \Sigma_{in}^R(u') du',$$

$$W_{0R}^{k+1 \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_0^{k+1}(x)} \int_{u_k}^{u_i - r_{in}^R} \Phi_0(x, u') \Sigma_{in}^R(u') du'.$$

Здесь $\Sigma_{in}^R(u')$ — сечение возбуждения R -го уровня ядра-мишени при летаргии u' .

Значение индекса k определяется из равенства

$$r_{in}^R = (i - k - 1) \Delta u + \gamma; \quad \gamma < \Delta u.$$

Рассмотрим теперь область энергий, где уровни возбуждения ядра-мишени перекрываются. В этом случае спектр неупруго рассеянных нейтронов должен быть непрерывным. Пусть

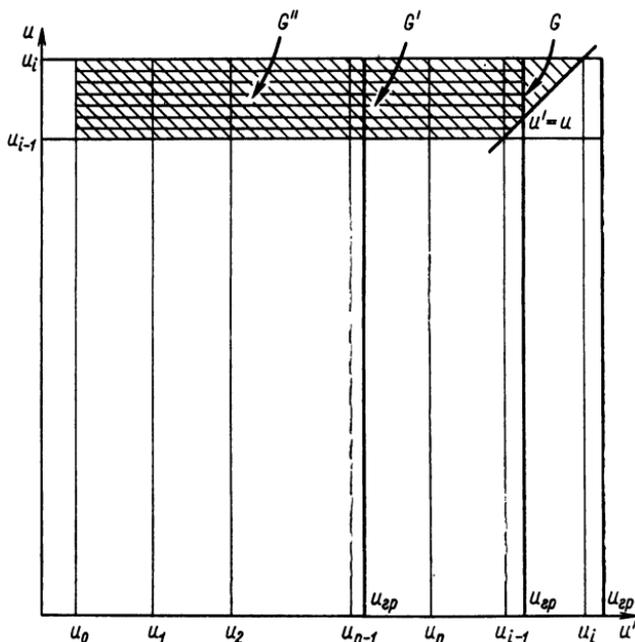


Рис. 2.3. Область интегрирования для отличных от нуля членов матрицы неупругих переходов при перекрывающихся уровнях возбуждения ядра-мишени.

$u_{гр}$ — верхняя граница этой области. На рис. 2.3 в плоскости (u, u') изображены области интегрирования G , G' и G'' для отличных от нуля членов матрицы $W_{in}^{k \rightarrow i}$. Рассмотрим вид этих членов для различных областей интегрирования:

1) $u_{гр} > u_i$ — область интегрирования G

$$W_{in}^{m \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_i^m(x)} \int_{u_{m-1}}^{u_m} \Phi_i(x, u') du' \int_{n_{i-1}}^{u_i} W_{in}(x, u' \rightarrow u) du. \quad (2.32)$$

Индекс m пробегает все значения от 1 до $i-1$

$$W_{in}^{i \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_i^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi_i(x, u') du' \int_{u'}^{u_i} W_{in}(x, u' \rightarrow u) du.$$

2) $u_{i-1} < u_{\text{гр}} < u_i$ — область интегрирования G'

$$W_{l\text{in}}^{m \rightarrow l}(x) = \frac{1}{\Phi_l^m(x)} \int_{u_{m-1}}^{u_m} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_{l\text{in}}(x, u' \rightarrow u) du. \quad (2.33)$$

Индекс m пробегает все значения от 1 до $i-1$

$$W_{l\text{in}}^{l \rightarrow l}(x) = \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_{\text{гр}}} \Phi_l(x, u') du' \int_{u'}^{u_i} W_{l\text{in}}(x, u' \rightarrow u) du.$$

3) $u_{\text{гр}} < u_{i-1}$ — область интегрирования G''

$$W_{l\text{in}}^{m \rightarrow l}(x) = \frac{1}{\Phi_l^m(x)} \int_{u_{m-1}}^{u_m} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_{l\text{in}}(x, u' \rightarrow u) du. \quad (2.34)$$

Индекс m пробегает все значения от 1 до $n-1$

$$W_{l\text{in}}^{n \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_l^n(x)} \int_{u_{n-1}}^{u_{\text{гр}}} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_{l\text{in}}(x, u' \rightarrow u) du. \quad (2.35)$$

Значение индекса n определяется из равенства $u_{\text{гр}} = u_0 + (n-1)\Delta u + \gamma$; $\gamma < \Delta u$. В формулах (2.32) — (2.35) $W_{l\text{in}}(x, u' \rightarrow u)$ — гармоники индикатрисы неупругого рассеяния в области перекрывающихся уровней.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУППОВЫХ КОНСТАНТ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Как указывалось в начале этой главы, для определения групповых сечений (2.2) вместо неизвестных функций $\Phi_l(x, u)$ приходится использовать некие приближенные значения спектров нейтронов внутри каждой группы. Возникающие в связи с этим ошибки в групповых сечениях приводят в итоге к ошибке в искомой величине. Ошибки эти возрастают с увеличением ширины рассматриваемых групп и с ухудшением информации о внутригрупповом спектре.

В расчетах защиты искомой величиной часто является некий функционал от потока нейтронов. Задача заключается в том, чтобы путем соответствующего выбора эффективных групповых констант свести к минимуму ошибку в указанном функционале.

Если замену истинных сечений процессов на среднегрупповые рассматривать как малое возмущение, вносимое в систему, то эффективные групповые константы могут быть найдены с помощью соотношений теории возмущений.

Метод определения групповых констант, в котором используется аппарат теории возмущений, был впервые сформулиро-

ван Г. И. Марчуком для расчета критичности реактора и пространственно-энергетического распределения нейтронов в активной зоне. В работах [5—8] метод получил свое дальнейшее развитие, в том числе и для расчетов защиты.

Перейдем теперь к изложению самого метода, воспользовавшись для этой цели выводами и терминологией работы [9]. Запишем кинетическое уравнение (1.42) следующим образом:

$$\operatorname{div} [\Omega \Phi(\mathbf{r}, u, \Omega)] + \sum(\mathbf{r}, u) \Phi(\mathbf{r}, u, \Omega) - \int d\Omega' \int du' \Phi(\mathbf{r}, u', \Omega') \times \\ \times W(\mathbf{r}, \mu_0, u' \rightarrow u) = Q(\mathbf{r}, u, \Omega) \quad (2.36)$$

или в операторной форме

$$\hat{L} \Phi(X) = Q(X). \quad (2.37)$$

Здесь под X понимается вся совокупность переменных \mathbf{r}, u, Ω . Функция $Q(\mathbf{r}, u, \Omega)$ описывает внешние источники нейтронов

$$Q(\mathbf{r}, u, \Omega) = q(\mathbf{r}, u, \Omega) + q_S(\mathbf{r}_S, u, \Omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S), \quad (2.38)$$

где $q_S(\mathbf{r}_S, u, \Omega)$ — поверхностный источник, заданный на поверхности исследуемой среды;

$$q_S(\mathbf{r}_S, u, \Omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } (\Omega n) > 0, \\ \varphi(\mathbf{r}_S, u, \Omega) & \text{при } (\Omega n) < 0. \end{cases}$$

При определении внешних источников в форме (2.38) граничное условие для потока нейтронов

$$\Phi(\mathbf{r}_S, u, \Omega) = 0 \quad \text{при } (\Omega n) < 0. \quad (2.39)$$

Рассмотрим сначала формально уравнение

$$-\operatorname{div} [\Omega \Phi^*(\mathbf{r}, u, \Omega)] + \sum(\mathbf{r}, u) \Phi^*(\mathbf{r}, u, \Omega) - \int d\Omega' \int du' \Phi^*(\mathbf{r}, \\ u', \Omega') W(\mathbf{r}, \mu_0, u \rightarrow u') = P(\mathbf{r}, u, \Omega) \quad (2.40)$$

или в операторной форме

$$\hat{L}^* \Phi^*(X) = P(X), \quad (2.41)$$

где $P(X)$ — пока произвольная функция X .

В качестве граничного условия для функции $\Phi^*(\mathbf{r}, u, \Omega)$, являющейся решением уравнения (2.40), опять-таки формально примем

$$\Phi^*(\mathbf{r}_S, u, \Omega) = 0 \quad \text{при } (\Omega n) > 0. \quad (2.42)$$

Покажем, что линейные операторы \hat{L} и \hat{L}^* в уравнениях (2.37) и (2.41) являются сопряженными, т. е. удовлетворяют соотношению

$$\int f_1(X) \hat{L} f_2(X) dX = \int f_2(X) \hat{L}^* f_1(X) dX \quad (2.43)$$

при условии, что $f_1(X)$ и $f_2(X)$ — произвольные функции, удовлетворяющие граничным условиям (2.39) и (2.42).

Подставим в равенство (2.43) выражения для операторов \widehat{L} и \widehat{L}^* из уравнения (2.36) и (2.40). После элементарных преобразований получим

$$\int dZ \int_V \operatorname{div} [\Omega f_1(X) f_2(X)] dV = 0.$$

Здесь $dX = dZ dV$ (Z — совокупность угловых и энергетических переменных). По теореме Остроградского—Гаусса преобразуем объемный интеграл в поверхностный

$$\int_S dZ \int f_1(X) f_2(X) \Omega ndS = 0. \quad (2.44)$$

Равенство (2.44) выполняется для любых двух функций, обращающихся в нуль на поверхности среды S , или, что то же, удовлетворяющих условиям (2.39) и (2.42). Тем самым доказана сопряженность операторов \widehat{L} и \widehat{L}^* .

Рассмотрим функционалы

$$I_Q = \int Q(X) \Phi^*(X) dX; \quad I_P = \int P(X) \Phi(X) dX.$$

Если умножить уравнение (2.37) на $\Phi^*(X)$, а уравнение (2.41) на $\Phi(X)$, проинтегрировать по всей области изменения переменных X и вычесть одно из другого, то, используя условие сопряженности операторов \widehat{L} и \widehat{L}^* , получим

$$\int Q(X) \Phi^*(X) dX = \int P(X) \Phi(X) dX. \quad (2.45)$$

Равенство (2.45) означает, что функция $\Phi^*(X)$ является сопряженной с функцией $\Phi(X)$ по отношению к функционалу I_P .

Выясним теперь физический смысл функций $\Phi^*(X)$ и $P(X)$. С этой целью рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} \widehat{L}G(X, X_0) &= \delta(X - X_0), \\ \widehat{L}^*G^*(X, X_1) &= \delta(X - X_1). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Если наложить на $G(X, X_0)$ и $G^*(X, X_1)$ граничные условия (2.39) и (2.42), то решениями уравнений (2.46) будут функции Грина уравнений (2.37) и (2.41).

Функция $G(X, X_0)$ определяет поток нейтронов в точке X , если в X_0 размещен источник нейтронов единичной мощности. Следует помнить при этом, что X и X_0 — точки в фазовом пространстве (r, u, Ω) и (r_0, u_0, Ω_0) соответственно. Умножим первое уравнение (2.46) на $G^*(X, X_1)$, а второе на $G(X, X_0)$, проинтегрируем по всему интервалу изменения переменных и вычтем одно из другого.

Воспользовавшись сопряженностью операторов \widehat{L} и \widehat{L}^* и свойствами δ -функции, получим

$$G(X_1, X_0) = G^*(X_0, X_1). \quad (2.47)$$

Решение уравнения (2.41) в точке X_0 может быть записано с помощью функции Грина

$$\Phi^*(X_0) = \int G^*(X_0, X_1) P(X_1) dX_1$$

или, если использовать (2.47) и изменить обозначение X_0 на X ,

$$\Phi^*(X) = \int G(X_1, X) P(X_1) dX_1. \quad (2.48)$$

До сих пор на функцию $P(X_1)$ не налагалось никаких условий. Пусть $P(X_1)$ характеризует некий интересующий нас процесс, связанный с потоком нейтронов. Например, $P(X) = f(u)$ устанавливает связь между потоком нейтронов и мощностью дозы или $P(X) = \Sigma_a(r, u)$ — между потоком нейтронов и распределением источников захватного γ -излучения и т. д.

Тогда, имея в виду, что $G(X_1, X)$ — поток нейтронов в точке X_1 от источника единичной мощности в точке X , можно следующим образом определить физическую сущность $\Phi^*(X)$. Согласно выражению (2.48), сопряженная функция $\Phi^*(X)$ есть не что иное, как интенсивность интересующего нас процесса во всем объеме рассматриваемой среды, если в точке X размещен источник нейтронов единичной мощности. При $P(X_1) = f(u)$ сопряженная функция

$$\Phi^*(r, u, \Omega) = \iiint f(u_1) G(X_1, X) du_1 d\Omega_1 dr_1$$

определяет мощность дозы по нейтронам во всем объеме фазового пространства, когда в точке X размещен источник нейтронов единичной мощности.

Если нас заинтересует мощность дозы на поверхности рассматриваемой среды, то $P(X_1) = f(u_1) \delta(r_0 - r_s)$ и соответственно

$$\Phi^*(r, u, \Omega) = \iint f(u_1) G(X_1^S, X) du_1 d\Omega_1,$$

где

$$X_1^S = (r_s, \bar{u}_1, \Omega_1) \text{ и } X = (r, u, \Omega).$$

В работе [9] было предложено при использовании сопряженной функции $\Phi^*(X)$ в расчетах защиты называть ее функцией «опасности», так как эта функция характеризует с точки зрения определенного процесса «опасность» нейтронов, возникающих в точке X фазового пространства.

В случае бесконечной однородной среды при $P = P(u)$ (например, $P(u) = \Sigma_a(u)$) решение уравнения (2.41) не зависит от угловых и пространственных переменных, т. е. «опасность» нейтрона не зависит от места его возникновения. Используя термин «опасность», легко объяснить и граничное условие (2.42) для Φ^* : «опасность» нейтронов, вылетающих из рассматриваемой среды, равна нулю.

Сопряженную функцию удобно обозначить $\Phi_P^*(X)$. Индекс P указывает, по отношению к какому процессу определяется «опасность» нейтронов.

Перейдем к непосредственному определению групповых констант. Пусть в качестве конечного результата расчета защиты надо определить некий функционал

$$I_P = \int \Phi(X) P(X) dX. \quad (2.49)$$

Здесь $P(X)$ — характеристика интересующего нас процесса взаимодействия нейтронов со средой (радиационные эффекты, активация материалов, образование захватного γ -излучения и т. п.). Для расчета I_P нужно предварительно определить поток нейтронов $\Phi(X)$. Задачу можно решить в многогрупповом приближении. Заменяем в уравнении (2.36) истинные сечения взаимодействия $\Sigma(r, u)$ и $W(r, \mu_0, u' \rightarrow u)$ величинами Σ' и W' , являющимися кусочно-постоянными функциями лётаргии. Такая замена, естественно, должна приводить к определенной ошибке в величине потока $\Phi(X)$, а значит, и функционала I_P . Поэтому величины Σ' и W' нужно выбрать такими, чтобы ошибка в I_P была минимальной.

В дальнейшем среда с сечениями взаимодействия Σ' и W' рассматривается как возмущенная. Будем считать, что в возмущенной среде справедлив эффективный изотропный закон упругого рассеяния («эффективный» в том смысле, что обеспечивается минимальная ошибка в величине искомого функционала I_P). Случай анизотропного рассеяния в возмущенной среде с учетом корреляции между углом рассеяния и потерей энергии будет рассмотрен ниже.

Запишем уравнение (2.36) для возмущенной среды

$$\Omega \nabla \Phi'(r, u, \Omega) + \Sigma'(r, u) \Phi'(r, u, \Omega) - \int d\Omega' \int du' \Phi'(r, u', \Omega') W'(r, u' \rightarrow u) = Q(r, u, \Omega). \quad (2.50)$$

Граничное условие для потока нейтронов в возмущенной среде

$$\Phi'(r_s, u, \Omega) = 0 \quad \text{при} \quad (\Omega n) < 0.$$

Функция $W'(r, u' \rightarrow u)$ в уравнении (2.50) не зависит от μ_0 , т. е. уравнение (2.50) описывает перенос нейтронов в возмущенной среде с эффективным изотропным законом упругого рассеяния.

В операторной форме уравнение (2.50) можно записать в виде

$$\hat{L}' \Phi'(X) = (\hat{L} + \delta \hat{L}) \Phi'(X) = Q(X). \quad (2.51)$$

Изменение оператора \hat{L} при переходе к возмущенной среде

$$\delta \hat{L} \Phi'(X) = [\Sigma'(r, u) - \Sigma(r, u)] \Phi'(r, u) + \int d\Omega' \int du' \Phi'(r, u', \Omega') [W'(r, u' \rightarrow u) - W(r, \mu_0, u' \rightarrow u)]. \quad (2.52)$$

Функционал I'_P от возмущенного потока $\Phi'(X)$

$$I'_P = \int \Phi'(X) P(X) dX. \quad (2.53)$$

Вместе с тем I'_P можно выразить через невозмущенный функционал I_P

$$I'_P = I_P + \delta I_P = \int \Phi(X) P(X) dX + \delta I_P. \quad (2.54)$$

Уравнение, определяющее функцию «опасности» $\Phi_P^*(X)$ для невозмущенной среды, будет

$$\widehat{L}^* \Phi_P^*(X) = P(X). \quad (2.55)$$

Граничное условие для функции опасности в невозмущенной среде

$$\Phi_P^*(X_S) = 0 \quad \text{при} \quad (\Omega n) > 0.$$

Умножим уравнение (2.51) на $\Phi_P^*(X)$, а уравнение (2.55) на $\Phi'(X)$, проинтегрируем по всему интервалу изменения переменных и вычтем одно из другого. С учетом выражений (2.53) и (2.54) получим

$$\begin{aligned} & \int \Phi_P^*(X) \widehat{L} \Phi'(X) dX - \int \Phi'(X) \widehat{L}^* \Phi_P^*(X) dX + \\ & + \int \Phi_P^*(X) \delta \widehat{L} \Phi'(X) dX = I_Q - I_P - \delta I_P. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Здесь $I_Q = \int Q(X) \Phi^*(X) dX$; $I_P = \int P(X) \Phi(X) dX$. Функции $\Phi(X)$, $\Phi'(X)$ и $\Phi_P^*(X)$ удовлетворяют граничным условиям (2.39) и (2.42). Поэтому выполняются равенства (2.43) и (2.45). В соответствии с этим равенство (2.56) сводится к выражению для вариации функционала I_P :

$$\delta I_P = - \int \Phi_P^*(X) \delta \widehat{L} \Phi'(X) dX.$$

Чтобы обеспечить минимальную ошибку в величине I_P при переходе к кусочно-постоянным сечениям взаимодействия, необходимо потребовать равенства нулю вариации I_P , т. е.

$$\int \Phi_P^*(X) \delta \widehat{L} \Phi'(X) d(X) = 0. \quad (2.57)$$

Подставим выражение (2.52) в (2.57) и заменим X на переменные r, u, Ω :

$$\begin{aligned} & \int dr \int du \int d\Omega \Phi_P^*(r, u, \Omega) \{ \Phi'(r, u, \Omega) [\Sigma'(r, u) - \Sigma(r, u)] + \\ & + \int d\Omega' \int du' \Phi'(r, u', \Omega') [W'(r, u' \rightarrow u) - W(r, \mu_0, u' \rightarrow u)] \} = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

В выражении (2.58) интегралы по u и u' представим в виде суммы интегралов по ширине i -го и k -го участков шкалы летаргии, в пределах которых кусочно-постоянные функции $\Sigma'(u)$ и $W'(u' \rightarrow u)$ не зависят от летаргии. Интеграл по r представим в виде суммы интегралов по j -й области изменения r , в пределах которой физические свойства среды постоянны, а функции Σ, W и Σ', W' не зависят от координат.

Для выполнения равенства (2.58) мы имеем право потребовать, чтобы каждый член в получающихся двойных и тройных суммах равнялся нулю:

$$\int_{V_j} dr \int d\Omega \int_{u_{i-1}}^{u_i} du [\Sigma_j^i - \Sigma(u)] \Phi'(r, u, \Omega) \Phi_P^*(r, u, \Omega) = 0, \quad (2.59)$$

$$\int_{V_j} dr \int d\Omega \int_{u_{i-1}}^{u_i} du \Phi_P^*(r, u, \Omega) \int d\Omega' \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Phi'(r, u', \Omega') \times$$

$$\times [W_j^{k \rightarrow i} - W(\mu_0, u' \rightarrow u)] = 0.$$

Здесь функции $\Sigma'(r, u)$ и $W'(r, u' \rightarrow u)$ обозначены через Σ_j^i и $W_j^{k \rightarrow i}$, так как в рассматриваемых пределах изменения аргументов эти функции являются константами. Константы Σ_j^i и $W_j^{k \rightarrow i}$ можно вынести из-под знака интегрирования. В результате получим выражение для групповых констант:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_j^i &= \frac{\int_{V_j} dr \int d\Omega \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(u) \Phi'(r, u, \Omega) \Phi_P^*(r, u, \Omega) du}{\int_{V_j} dr \int d\Omega \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi'(r, u, \Omega) \Phi_P^*(r, u, \Omega) du}, \\ W_j^{k \rightarrow i} &= \frac{\int_{V_j} dr \int d\Omega' \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Phi'(r, u', \Omega') \times}{\int_{V_j} dr \int d\Omega' \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Phi'(r, u', \Omega') \times} \rightarrow \\ &\quad \times \frac{\int d\Omega \int_{u_{i-1}}^{u_i} du \Phi_P^*(r, u, \Omega) W(\mu_0, u' \rightarrow u)}{\int d\Omega \int_{u_{i-1}}^{u_i} du \Phi_P^*(r, u, \Omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

В выражениях (2.60) усреднение полного и дифференциального сечений Σ , W осуществляется по пространственной, угловой и энергетической зависимостям возмущенного потока Φ' и невозмущенной функции опасности Φ_P^* .

Групповые константы (2.60) в отличие от среднегрупповых сечений (2.2) определены как некие средние в пределах j -й области характеристики взаимодействия нейтронов с ядрами среды. В расчетах защиты в качестве j -й области среды могут рассматриваться отдельные слои многослойного защитного барьера.

Групповое уравнение, в котором используются константы (2.60), легко получить из уравнения (2.50), записанного для j -й области рассматриваемой среды. Проинтегрируем уравнение (2.50) по u в пределах энергетической группы. Интеграл по u' представим как сумму интегралов по ширине k -й группы. Групповые сечения Σ' , W' в пределах i -й (k -й) группы и j -й области среды являются константами

$$\Sigma' = \Sigma_j^i, \quad W' = W_j^{k \rightarrow i}.$$

Поэтому Σ' , W' могут быть вынесены из-под знака интегрирования по u и u' . В результате простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \Omega \nabla \Phi_j^i(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma_j^i \Phi_j^i(\mathbf{r}, \Omega) = \\ = \sum_{k=k_0}^i \Phi_{0j}^k(\mathbf{r}) W_j^{k \rightarrow i} \Delta u_i + Q_j^i(\mathbf{r}, \Omega), \end{aligned} \quad (2.61)$$

где $\Phi_{0j}^k(\mathbf{r}) = \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \int d\Omega' \Phi_j(\mathbf{r}, u', \Omega')$ — групповое значение интегрального потока нейтронов; Σ_j^i , $W_j^{k \rightarrow i}$ — групповые константы, определяемые соотношениями (2.60).

Как уже указывалось, матрица $W_j^{k \rightarrow i}$ соответствует изотропному закону рассеяния нейтронов в возмущенной среде при отсутствии корреляции между углом рассеяния и потерей энергии. Поэтому в тех случаях, когда анизотропия рассеяния играет существенную роль, система уравнений (2.61) с групповыми константами (2.60), вообще говоря, не должна давать достоверной информации о функции распределения нейтронов в среде (хотя при этом функционал I_p вычисляется правильно).

Для получения системы групповых констант и групповых уравнений с учетом анизотропии рассеяния рассмотрим вновь кинетическое уравнение для возмущенной среды, ограничившись при этом плоской геометрией. Для сферически симметричной геометрии все последующие рассуждения и результаты аналогичны.

Пусть дифференциальное сечение рассеяния возмущенной среды, будучи кусочно-постоянной функцией летаргии, сохраняет в отличие от ранее рассмотренного случая зависимость от угла рассеяния μ_0 . Эту угловую зависимость можно представить в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$W'(x, \mu_0, u' \rightarrow u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} W_l'(x, u' \rightarrow u) P_l(\mu_0), \quad (2.62)$$

где коэффициенты разложения $W_l'(x, u' \rightarrow u)$ являются кусочно-постоянными функциями летаргии.

По аналогии с уравнениями (1.50) и (2.50) кинетическое уравнение для возмущенной среды можно записать в виде

$$\mu \frac{\partial \Phi'(x, u, \mu)}{\partial x} + \Sigma'(x, u) \Phi'(x, u, \mu) - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \int \Phi'_l(x, u') W'_l(x, u' \rightarrow u) du' = Q(x, u, \mu) \quad (2.63)$$

или в операторной форме $\widehat{L}'\Phi' = (\widehat{L} + \delta\widehat{L})\Phi' = Q$.

Изменение оператора \widehat{L} при переходе к возмущенной среде

$$\delta\widehat{L} \cdot \Phi'(x, u, \mu) = [\Sigma'(x, u) - \Sigma(x, u)] \Phi'(x, u, \mu) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \int du' \Phi'_l(x, u') [W'_l(x, u' \rightarrow u) - W_l(x, u' \rightarrow u)]. \quad (2.64)$$

Подставляя выражение (2.64) в (2.57), получаем вместо второго равенства (2.59)

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \int_{V_j} dx \int_{u_{l-1}}^{u_l} du \Phi_{Pl}^*(x, u) \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Phi'_l(x, u') \times \\ \times [W_{jl}^{k \rightarrow i} - W_l(u' \rightarrow u)] = 0, \quad (2.65)$$

где $\Phi_{Pl}^*(x, u)$ — l -я гармоника функции опасности

$$\Phi_{Pl}^*(x, u) = \int_{-1}^1 \Phi_P^*(x, u, \mu) P_l(\mu) d\mu.$$

Полагая каждый член суммы по l в выражении (2.65) равным нулю, находим выражение для матрицы переходов между группами:

$$W_{jl}^{k \rightarrow i} = \frac{\int_{V_j} dx \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Phi'_l(x, u') \int_{u_{l-1}}^{u_l} du \Phi_{Pl}^*(x, u) W_l(u' \rightarrow u)}{\int_{V_j} dx \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Phi'_l(x, u') \int_{u_{l-1}}^{u_l} du \Phi_{Pl}^*(x, u)}. \quad (2.66)$$

Групповое уравнение, в котором используется матрица (2.66), легко получить обычным путем из уравнения (2.63), записанного для j -й области рассматриваемой среды:

$$\mu \frac{\partial \Phi_j^i(x, \mu)}{\partial x} + \sum_j^i \Phi_j^i(x, \mu) = \\ = \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \Phi_{jl}^k W_{jl}^{k \rightarrow i} \Delta u_l + Q_j^i(x, \mu). \quad (2.67)$$

Входящее в уравнение (2.67) групповое сечение Σ_j^i определяется выражением (2.60) с заменой γ на X и Ω на μ .

Групповое уравнение (2.67) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi_j^i(x, \mu)}{\partial x} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \Phi_{jl}^i(x) \Sigma_{jl}^i = \\ & = \sum_{k=k_0}^l \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \Phi_{jl}^k(x) W_{jl}^{k \rightarrow i} \Delta u_i + Q_j^i(x, \mu). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Групповые константы, входящие в уравнение (2.68),

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{jl}^i &= \frac{\int_{V_j} dx \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(u) \Phi_l'(x, u) \Phi_{Pl}^*(x, u) du}{\int_{V_j} dx \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi_l^i(x, u) \Phi_{Pl}^*(x, u) du}, \\ W_{jl}^{k \rightarrow i} &= \frac{\int_{V_j} dx \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Phi_l'(x, u') \int_{u_{i-1}}^{u_i} du \Phi_{Pl}^*(x, u) W_l(u \rightarrow u)}{\int_{V_j} dx \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Phi_l'(x, u') \int_{u_{i-1}}^{u_i} du \Phi_{Pl}^*(x, u)}. \end{aligned} \right\} (2.69)$$

Уравнение (2.68) с групповыми константами (2.69) является аналогом уравнения (2.1) с групповыми сечениями (2.2).

Необходимо подчеркнуть, что константы (2.69) в отличие от сечений 2.2 предназначены для многогруппового расчета вполне определенного функционала $I_P = \int \Phi(x, u, \mu) P(x, u, \mu) dx du d\mu$. Для многогруппового расчета другого функционала $I_R = \int \Phi(x, u, \mu) R(x, u, \mu) dx du d\mu$ нужна другая система групповых констант, которая минимизировала бы ошибку именно этого функционала.

Групповые константы (2.69), как и групповые сечения (2.2), могут быть получены лишь с некоторым приближением к их истинным значениям из-за отсутствия информации о спектре нейтронов внутри группы. Однако групповые константы, с точки зрения точности вычисления I_P , оказываются менее чувствительными к погрешностям во внутригрупповом спектре, что в конечном итоге позволяет минимизировать ошибку в искомом функционале. Это обстоятельство особенно существенно для расчетов защиты, т. е. для задач, в которых происходит значительное искажение внутригруппового спектра по мере глубокого проникновения нейтронов в среду, а также в результате различного рода граничных эффектов. В ряде практически важ-

ных случаев подобное возмущение спектра оказывает заметное влияние на искомый функционал.

Учитывая вышеизложенное, можно указать наиболее целесообразную область применения групповых констант.

Групповые константы, определяемые соотношениями (2.60) и (2.69), должны использоваться в тех случаях, когда для конкретных физических и геометрических условий нужно рассчитать некий заданный функционал от потока нейтронов. Аппарат сопряженных функций оказывается особенно эффективным при создании малогрупповой системы констант. С помощью таких констант можно рассчитывать с достаточно высокой точностью (например, в P_n -приближении метода сферических гармоник) функционалы, сильно зависящие от пространственно-углового распределения нейтронов. При этом для определения малогрупповых констант используются в качестве внутригруппового спектра результаты приближенного многогруппового расчета (например, в диффузионном приближении и в простой геометрии).

Если в многогрупповых расчетах используются достаточно узкие энергетические группы и нет необходимости в детальном исследовании граничных эффектов, то формулы (2.2) и (2.69) сводятся к групповым константам, описываемым простейшими соотношениями типа (2.2а).

Постановка многогрупповой задачи с сечениями в форме (2.2) или (2.69) является достаточно строгой. Однако ее решение требует проведения довольно громоздких расчетов.

В многогрупповых расчетах защиты, преследующих чисто практические цели, широко применяются заранее составленные «стандартные» или «универсальные» системы групповых констант отдельных элементов и изотопов [2, 5, 10]. Эти константы получены в результате усреднения микроскопических сечений по «стандартному» сглаженному по резонансам внутригрупповому спектру нейтронов. В качестве такового обычно используется спектр деления для $E > 1$ Мэв и фермиевский спектр замедления для $E < 1$ Мэв. Резонансная блокировка сечений учитывается специальными коэффициентами [2].

Использование «стандартной» системы групповых констант приводит к большим упрощениям и поэтому часто является единственно возможным методом расчета защиты. Следует, однако, иметь в виду, что функционалы, рассчитанные таким способом, могут в ряде случаев (в частности, для задач, связанных с глубоким проникновением) значительно отличаться от своих истинных значений.

§ 5. СПЕКТР НЕЙТРОНОВ ДЛЯ УСРЕДНЕНИЯ СЕЧЕНИЙ ВНУТРИ ГРУППЫ

Для определения групповых сечений и констант по формулам, полученным в предыдущих параграфах, надо располагать не известной заранее информацией о пространственно-энерге-

тическом и угловом распределении нейтронов внутри группы. Эта информация в части энергетической зависимости функции распределения должна быть более детальной, чем та, которую можно извлечь из решения задачи в многогрупповом приближении. Поэтому использование метода последовательных приближений для решения многогрупповой задачи дает возможность уточнять лишь пространственную зависимость макрораспределения нейтронов внутри группы*. Что же касается тонкой структуры внутригруппового спектра, определяющей резонансную блокировку сечений, то она всецело зависит от первоначального выбора спектра и в процессе последовательных приближений не уточняется.

Эффект резонансной блокировки связан с тем обстоятельством, что энергетическая зависимость сечений взаимодействия нейтронов с веществом имеет нерегулярный характер. При этом резонансная структура сечений наиболее резко выражена для нейтронов с энергией меньше 1—2 Мэв. Для многих защитных материалов частичные проявления резонансной структуры имеют место вплоть до энергий ~ 10 Мэв.

Резонансный характер нейтронных сечений во многих случаях определяет прохождение нейтронов на большие расстояния. Очевидно, что наибольшей проникающей способностью обладают нейтроны с энергией, соответствующей минимумам в сечениях взаимодействия. Поэтому с удалением от источников происходит обогащение спектра именно такими нейтронами и обеднение его нейтронами, энергия которых соответствует максимумам в сечениях. В результате сечения, усредненные с учетом тонкой структуры внутригруппового спектра, должны уменьшаться при удалении от источников, приближаясь к минимальному для данного интервала усредненному значению сечения взаимодействия. В этом и проявляется эффект резонансной блокировки (иногда резонансной самоэкранировки) сечений.

В этом параграфе описаны возможные способы определения внутригруппового спектра для усреднения сечений, причем рассмотрены отдельно область энергий выше 1 Мэв и область энергий ниже 1 Мэв. Выбор границы раздела весьма условен, как, впрочем, условны и некоторые рассуждения, на основании которых определяется характер самих спектров.

Область энергий ниже 1 Мэв

Спектр нейтронов с энергией ниже 1 Мэв формируется в основном в окрестностях рассматриваемой точки среды. Этот спектр можно считать почти установившимся в пределах груп-

* В многогрупповых расчетах спектр нейтронов может быть получен только в виде гистограмм. Для описания макрохода спектра внутри группы эти гистограммы должны быть аппроксимированы непрерывными кривыми.

пы, т. е. слабо зависящим от пространственных переменных, если выполняется следующее условие:

$$\frac{D\Delta\Phi}{\Phi} \ll \Sigma_a + \Sigma_{\text{зам}}. \quad (2.70)$$

Условие (2.70) означает, что структура внутригруппового спектра должна слабо зависеть от диффузии нейтронов, так как определяющим процессом в этом случае является не перенос нейтронов, а их увод из группы за счет замедления и поглощения. Условие (2.70) выполняется вдали от границ среды и внешних источников, а также при использовании в многогрупповом расчете узких энергетических групп, для которых велико сечение увода.

Будем считать, что хотя бы одно из этих требований удовлетворяется. Тогда с хорошим приближением спектр нейтронов внутри группы может быть представлен как произведение двух функций

$$\Phi(x, u, \mu) = \varphi(u, \mu) F(x, u, \mu).$$

Одна из этих функций $F(x, u, \mu)$, описывающая макрораспределение нейтронов внутри группы, слабо зависит от энергии и поэтому не существенна. При необходимости конкретный вид $F(x, u, \mu)$ может уточняться в процессе последовательных приближений.

Другая функция $\varphi(u, \mu)$, описывающая тонкую структуру внутригруппового спектра, играет основную роль при нахождении среднегрупповых сечений, которые в данном случае могут определяться по формулам

$$\Sigma_l^i \approx \frac{1}{\varphi_l^i} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(u) \varphi_l(u) du;$$

$$W_l^{k \rightarrow i} = \frac{1}{\varphi_l^k} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \varphi_l(u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_l(u' \rightarrow u) du.$$

Рассмотрим вначале нулевую гармонику функции $\varphi(u, \mu)$

$$\varphi_0(u) = \int_{-1}^1 \varphi(u, \mu) d\mu.$$

Так как, по предположению, влияние диффузии нейтронов на внутригрупповой спектр мало, то $\varphi_0(u)$ должна описывать спектр, близкий к энергетическому распределению нейтронов в бесконечной однородной среде. Уравнение, которому удовлетворяет функция $\varphi_0(u)$, легко получить из уравнения (1.50). Про-

интегрировав его по μ с учетом того факта, что φ зависит только от u , получим

$$\Sigma(u) \varphi_0(u) = \int_{u-r}^u \varphi_0(u') W_0(u' \rightarrow u) du' + q_0(u), \quad (2.71)$$

где $\varphi_0(u)$ — интегральный поток нейтронов; $W_0(u' \rightarrow u)$ — нулевая гармоника индикатрисы рассеяния; $q_0(u)$ — интенсивность источников.

При энергиях $E < 1$ Мэв спектр формируется в основном за счет упругого рассеяния, причем с хорошим приближением это рассеяние можно считать сферически изотропным в системе центра инерции. Поэтому, согласно выражениям (2.3) и (1.43),

$$W_0(u' \rightarrow u) = \sum_s(u') \frac{(M+1)^2}{4M} e^{-(u-u')}.$$

В простейшем случае, когда среда состоит из одних ядер водорода ($M=1$; $r \rightarrow \infty$), уравнение (2.71) значительно упрощается:

$$\Sigma(u) \varphi_0(u) = \int_{-\infty}^u du' \Sigma_s(u') \varphi_0(u') e^{-(u-u')} + q_0(u). \quad (2.72)$$

Продифференцируем выражение (2.72) по u и введем обозначение для плотности столкновений

$$R(u) = \Sigma(u) \varphi_0(u).$$

В результате получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $R(u)$

$$\frac{dR(u)}{du} + \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma(u)} R(u) = \frac{dq_0(u)}{du} + q_0(u). \quad (2.73)$$

Здесь $\Sigma_a = \Sigma - \Sigma_s$.

Так как плотность столкновений $R(u) = 0$ при $u \rightarrow -\infty$, то решение уравнения (2.52) записывается следующим образом:

$$R(u) = q_0(u) + \int_{-\infty}^u \frac{\Sigma_s(u')}{\Sigma(u')} q_0(u') \exp \left[- \int_{u'}^u \frac{\Sigma_0(u'')}{\Sigma(u'')} du'' \right] du'. \quad (2.74)$$

Источником для замедляющих нейтронов вдали от границ среды служит плотность столкновений быстрых нейтронов с $E > E_s$. Величина E_s определяет проникающую компоненту нейтронного потока со спектром, близким к спектру деления, и без большой погрешности может быть принята равной ~ 3 Мэв [11]. Это означает, что в уравнении (2.74) можно положить

$$q_0(u) = 0 \quad \text{при} \quad u > u_s,$$

где u_s — значение летаргии, соответствующее энергии $3 Mэв$. Если пренебречь поглощением при $u < u_s$, то, согласно выражению (2.74),

$$\varphi_0(u) = \frac{q_s}{\Sigma(u)} \exp \left[- \int_{u_s}^u \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma(u')} du' \right], \quad (2.75)$$

де

$$q_s = \int_{-\infty}^{u_s} q_0(u') du'.$$

Функция (2.75) описывает фермиевский спектр замедления в чистом водороде. С хорошим приближением можно считать, что та же функция описывает спектр нейтронов и в водородсодержащей среде, т. е. в среде, где замедление нейтронов происходит главным образом за счет рассеяния на ядрах водорода.

Равновесный спектр нейтронов в среде, не содержащей водорода, определяется из решения уравнения

$$\Sigma(u) \varphi_0(u) = \frac{(M+1)^2}{4M} \int_{u-r}^u \Sigma_s(u') \varphi_0(u') e^{-(u-u')} du' + q_0(u). \quad (2.76)$$

Это уравнение не может быть решено так же просто, как уравнение (2.72). Для непоглощающей среды и моноэнергетического источника внешних нейтронов решение уравнения (2.76) впервые было исследовано Плачеком [12]. Введенная им в рассмотрение функция, известная теперь как функция Плачека, описывает осцилляции спектра нейтронов при энергиях, близких к энергии внешнего источника. При энергиях, соответствующих $u \geq u_s + (2 \div 3)r$, осцилляции затухают и спектр описывается асимптотической функцией вида

$$\varphi_0(u) = \frac{q_s}{\Sigma(u) \xi}. \quad (2.77)$$

В работе [13] показано, что с учетом поглощения нейтронов в процессе замедления асимптотический спектр может быть записан следующим образом:

$$\varphi_0(u) = \frac{q_s}{\xi \Sigma(u)} \exp \left[- \int_{u_s}^u \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma(u')} du' \right]. \quad (2.78)$$

Причем в области энергий, следующих за каждым из выделенных резонансов $\Sigma(u)$, должны иметь место осцилляции спектра типа плачековских. Однако отклонения в выражении (2.78) за счет этих осцилляций невелики и в дальнейшем не учитываются.

Величина q_s в выражениях (2.75) и (2.78) определяет интенсивность источников для замедляющих нейтронов. Эта величина, вообще говоря, должна быть функцией координат, описывающей распределение в среде плотности столкновений быстрых нейтронов с $u < u_s^*$. Конкретный вид функции $q_s(x)$ в данном случае несуществен, так как спектры (2.75) и (2.78) предназначаются для усреднения сечений по формулам (2.2а), имеющим вид дробных функционалов.

Выражения (2.75) и (2.78) определяют установившийся спектр замедления $\varphi_0(u)$. Этот спектр может использоваться для определения групповых констант при условии выполнения неравенства (2.70), т. е. при не слишком узких группах вдали от границ среды и источников. Если же неравенство (2.70) не выполняется, то реальные спектры могут существенно отличаться от указанных. Это обстоятельство необходимо учитывать, если требуются более точные оценки констант. В таких случаях для того, чтобы получить информацию о внутригрупповом спектре, необходимо рассматривать более близкие к действительности модели переноса и рассчитывать их теоретически или извлекать необходимую информацию из экспериментальных данных. Мы не будем останавливаться на других моделях, а лишь укажем, что большое количество различных спектров приводится, например, в работах [14, 15] для промежуточной области энергий, а в работе [16] содержатся данные о спектре в области $(0,5 \div 1,5)$ Мэв. Целый ряд экспериментальных сведений о спектрах нейтронов можно найти в работах [14, 17].

Особого упоминания заслуживают слоистые структуры. Чаще всего таковыми являются железо-водные защитные барьеры. В этом случае еще труднее указать общий рецепт оценки спектра. Однако если эта структура представляет собой тонкие слои тяжелого элемента в легкой среде, то во всей системе, и в том числе в тяжелых слоях, целесообразно принимать для вычисления констант спектр, сформированный именно легкой средой.

Для определения среднегрупповых сечений по формулам (2.2) нужно располагать данными о всех гармониках функции $\varphi(u, \mu)$. Учет взаимосвязи между энергетическим и угловым распределениями нейтронов внутри группы позволяет существенным образом уточнить групповые константы, используемые для расчетов в P_n -приближении.

В работах [18, 19] В. В. Орлов и М. Н. Николаев показали, что при сохранении в силе условия (2.70) из решения уравне-

* Такое определение источников нейтронов с $E < 1$ Мэв не справедливо для безводородных сред, в которых происходит накопление промежуточных нейтронов. Однако перенос этих нейтронов влияет главным образом на вид функции $F_1(x, u)$, описывающей макрораспределение нейтронов внутри группы.

ния для сферических гармоник (3.18) (см. гл. III) можно получить приближенные, но зато достаточно простые выражения, описывающие тонкую структуру спектра гармоник потока в пределах малого интервала усреднения. В приближении, не учитывающем влияния высших гармоник на спектр низших, выражения для $\varphi_l(u)$ записываются в виде

$$\varphi_l(u) \approx \sum_{n=0}^l \frac{a_{l-n}}{\Sigma^{n+1}(u)}. \quad (2.79)$$

Коэффициенты a_{l-n} связаны рекуррентным соотношением

$$a_l = \sum_{n=1}^l a_{l-n} \frac{\left\langle \frac{\Sigma_s(u) f_l(u)}{\Sigma^{n+1}(u)} \right\rangle}{1 - \left\langle \frac{\Sigma_s(u) f_l(u)}{\Sigma(u)} \right\rangle},$$

где

$$f_l(u) = \frac{1}{\Sigma_s(u)} \int \Sigma_s(u') f_s(u', u-u') P_l[\beta(u-u')] du',$$

$\Sigma(u)$, $\Sigma_s(u)$ — полное сечение и сечение упругого рассеяния. Знак $\langle \rangle$ означает усреднение по летаргии u на интервале Δu . Так как упругое рассеяние при $E < 1$ Мэв можно считать сферически изотропным в системе центра инерции, то

$$f_l(u) = \frac{(M+1)^2}{4M} \frac{1}{\Sigma_s(u)} \int \Sigma_s(u') e^{-(u-u')} P_l[\beta(u-u')] du'.$$

Вывод выражения (2.79) приведен в приложении III.

Выражения (2.78) и (2.79) можно использовать в качестве внутригруппового спектра усреднения сечений по формулам (2.2) в области энергий $E < 1$ Мэв. Групповые константы, определенные с помощью этих спектров, не зависят от пространственных переменных.

Условие (2.70), выполнение которого постулировалось ранее, имеет достаточно широкую область применимости. Для нейтронов с $E < 1$ Мэв нарушение этого условия происходит главным образом вблизи границ, разделяющих среды с различными физическими свойствами, где структура нейтронного спектра и, значит, усредненные по нему сечения существенным образом зависят от пространственных координат.

Подобная ситуация в значительной степени усложняет исследование граничных эффектов из-за необходимости определения групповых констант, усредненных по неустановившемуся спектру нейтронов. Нахождение такого спектра, по существу, является независимой задачей, решить которую можно различными способами, в том числе и с помощью дополнительного многогруппового расчета. Такой расчет отличается от основ-

ною более детальным разбиением энергетической шкалы, использованием «стандартной» системы групповых констант и приближенным описанием пространственного распределения нейтронов. Однако в резонансной области энергий, где сечение сильно флуктуирует, дополнительный многогрупповой расчет оказывается практически неосуществимым. В этом случае для получения необходимой информации о тонкой структуре нейтронного спектра потребовалось бы введение слишком большого числа групп. Эту трудность можно преодолеть с помощью так называемого метода подгрупп.

Идея метода [20, 21] заключается в том, что нейтроны каждой энергетической группы разбиваются на несколько подгрупп так, что в каждую подгруппу объединяются нейтроны, для которых полное сечение среды имеет сравнительно близкие значения. Например, в одну подгруппу объединяются резонансные, в другую — межрезонансные нейтроны.

Пусть $\Sigma_t = \Sigma_t(u)$ — функция, описывающая нерегулярный ход полного сечения в интервале летаргии Δu_i (Δu_i — ширина i -й группы основного многогруппового расчета). Используя зависимость $\Sigma_t(u)$, можно построить гладкую функцию $p_i = p_i(\Sigma_t)$, которая будет определять вероятность распределения величины Σ_t в интервале Δu_i . При аппроксимации $\Sigma_t(u)$ ступенчатой кривой непрерывная функция $p_i(\Sigma_t)$ вырождается в дискретную функцию вида

$$p_i(\Sigma_t) = \sum_{n=1}^m A_i^n \delta(\Sigma_t - \Sigma_t^n).$$

Так как $p(\Sigma)$ должна быть нормирована на 1, то

$$\sum_{n=1}^m A_i^n = 1.$$

Коэффициенты A_i^n определяют вероятность нахождения $\Sigma_t = \Sigma_t^n$ в интервале Δu_i .

Разобьем теперь весь интервал Δu_i на m подгрупп. Ширину n -й подгруппы примем равной $A_i^n \Delta u_i$, приписав ей в качестве полного сечения величину Σ_t^n . Ясно, что при гладком ходе зависимости $\Sigma_t = \Sigma_t(u)$ понятие подгруппы ничем не отличается от понятия группы в обычном многогрупповом приближении.

Число подгрупп m в интервале Δu_i определяется формой гладкой функции распределения $p_i(\Sigma_t)$ и должно быть во много раз меньше числа ступенек аппроксимационной кривой, описывающей резонансный ход сечения $\Sigma_t(u)$ в интервале Δu_i . В этом и заключается основное достоинство метода подгрупп.

Дальнейшая процедура связана с рассмотрением переноса в среде нейтронов каждой из подгрупп. Для решения этой задачи нужно предварительно определить сечение отдельных реакций и сечение переходов между подгруппами. Сечение реакций

для n -й подгруппы можно найти, воспользовавшись наличием определенной корреляции между полным и парциальными сечениями. Сложнее обстоит дело с сечениями переходов, которые легко вычислить только в тех случаях, когда потеря энергии при рассеянии превышает расстояние между резонансами. При этом вероятность перехода будет пропорциональна ширине подгруппы

$$\sum_s^{n \rightarrow i} = \sum_s^n A_i^n.$$

Здесь Σ_s^n — сечение рассеяния в n -й подгруппе.

Если потеря энергии при рассеянии меньше расстояния между резонансами, то сечения перехода между подгруппами могут быть получены либо из статистических соображений (в области неразрешенных резонансов), либо из рассмотрения детального хода сечения.

Переходы нейтронов могут происходить из каждой подгруппы в любую другую. Поэтому в отличие от обычного многогруппового приближения матрица, описывающая вероятность таких переходов, должна быть не треугольной, а полной, и система уравнений, описывающих перенос, взаимосвязанной.

В рассматриваемом методе в одну подгруппу объединяются нейтроны с близкими значениями полного сечения. Поэтому с точки зрения проникающей способности нейтронов n -й подгруппы эффекты резонансной самоэкранировки сечений не играют существенной роли. В свою очередь это означает, что расчет распределения в среде нейтронов n -й подгруппы может осуществляться по заранее составленным эффективным константам, зависящим лишь от состава среды, но не от ее размеров и не от того, с какими средами она граничит. Полный групповой поток определяется как сумма потоков нейтронов всех подгрупп данной группы.

Из-за неопределенности положения подгрупп в интервале Δu_i рассматриваемый метод не позволяет получить форму внутригруппового спектра нейтронов. Однако в данном случае это не играет существенной роли, так как среднегрупповое сечение можно определить без использования внутригруппового спектра. Если φ_i^n — функция, описывающая изменение в пространстве гармоник потока нейтронов n -й подгруппы, то выражение для среднегруппового сечения в i -й группе записывается:

$$\Sigma_i^i(x) = \frac{\sum_{n=1}^m A_i^n \varphi_i^n(x) \Sigma^n}{\sum_{n=1}^m A_i^n \varphi_i^n(x)}.$$

В заключение отметим, что в том случае, когда неизвестен детальный ход сечения внутри группы, метод подгрупп является практически единственным способом корректного учета влияния

резонансной структуры спектра на глубину проникновения нейтронов. В указанном случае для использования метода подгрупп достаточно располагать экспериментальными данными о кривой пропускания нейтронов различной энергии через рассматриваемую среду или, что то же, функцией $p = p(\Sigma_t)$.

Область энергий выше 1 Мэв

Спектр нейтронов с $E > 1$ Мэв формируется в процессе переноса нейтронов деления из активной зоны в рассматриваемую точку среды (в отличие от замедляющих нейтронов, спектр которых формируется в окрестности этой точки). Согласно экспериментальным данным [22], перенос быстрых нейтронов в таких широко используемых в защите материалах, как вода, бетон, графит, песок, сопровождается значительной деформацией их спектрального распределения*. Это означает, что условие (2.70) не выполняется, и при усреднении сечений в области энергий $E > 1$ Мэв приходится иметь дело с неустановившимся спектром быстрых нейтронов.

В рассматриваемой области энергий неупругое рассеяние на средних и тяжелых ядрах и упругое рассеяние на легких ядрах связаны с большой потерей энергии. Эффективный увод нейтронов за энергию 1 Мэв в результате нескольких актов взаимодействия значительно облегчает задачу отыскания неустановившегося спектра, так как позволяет воспользоваться для этой цели достаточно низкими степенями приближения метода последовательных столкновений. В качестве нулевого приближения рассмотрим дифференциальный поток нейтронов, попавших в данную точку среды в результате прямых прострелов из активной зоны реактора. Для плоской геометрии выражение для такого потока записывается в виде

$$\Phi'(x, u, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \chi(u) \int_0^{\delta_{аз}} f(z) \exp\left[-\frac{Y(x, z, u)}{\mu}\right] dz & \text{при } 0 \leq \mu \leq 1, \\ 0 & \text{при } -1 \leq \mu \leq 0, \end{cases} \quad (2.80)$$

где $\chi(u)$ — спектр нейтронов деления; $f(z)$ — функция, описывающая распределение источников деления в активной зоне; $\delta_{аз}$ — толщина активной зоны;

$$Y(x, z, u) = \int_z^x \Sigma(x', u) dx'.$$

В случае однородной среды

$$Y(x, z, u) = \Sigma(u)(x - z).$$

* В железе и свинце деформация спектра менее существенна и происходит главным образом при энергиях меньше 2—5 Мэв.

Не составляет особого труда определить дифференциальный поток нерассеянных нейтронов для сферической и цилиндрической геометрий. Однако, учитывая, что в пределах малого интервала усреднения спектральное распределение нейтронов слабо зависит от геометрии задачи, можно использовать для функции Φ' выражение (2.80). Гармоники функции Φ'

$$\Phi'_l(x, u) = \int_{-1}^1 \Phi'(x, u, \mu) P_l(\mu) d\mu.$$

В соответствии с выражением (2.80)

$$\Phi'_l(x, u) = \frac{1}{2} \chi(u) \int_0^{\delta_{a,3}} f(z) K_l(x, z, u) dz. \quad (2.81)$$

Здесь

$$K_l(x, z, u) = \int_0^1 \exp\left[-\frac{Y(x, z, \mu)}{\mu}\right] P_l(\mu) \frac{d\mu}{\mu}.$$

Функции $K_l(x, z, u)$ выражаются через интегральные экспоненты

$$K_0(x, z, u) = E_1[Y(x, z, u)]; \quad K_1(x, z, u) = E_2[Y(x, z, u)] \text{ и т. д.}$$

Если заменить в выражении (2.81) полное сечение $\Sigma(u)$ на полное транспортное сечение $\Sigma_{tr}(u)$

$$Y(x, z, u) = \int_z^x \Sigma_{tr}(x', u) dx',$$

то тогда гармоники $\Phi'_l(x, u)$ будут определять спектральное распределение нейтронов, не испытавших столкновений, которые приводят к заметному изменению их первоначальной энергии и направления движения.

В области энергий $E \geq (5 \div 6)$ Мэв гармоники $\Phi'_l(x, u)$ могут быть использованы в качестве внутригруппового спектра для усреднения сечений.

Определим теперь поток с учетом нейтронов, испытавших однократное рассеяние:

$$\Phi''(x, u, \mu) = \begin{cases} \Phi'(x, u, \mu) + \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(z, u, \mu) \times \\ \times \exp\left[-\frac{Y(x, z, u)}{\mu}\right] dz \text{ при } 0 \leq \mu \leq 1, \\ \Phi'(x, u, \mu) + \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(z, u, \mu) \times \\ \times \exp\left[-\frac{Y(x, z, u)}{\mu}\right] dz \text{ при } -1 \leq \mu \leq 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

Здесь δ — толщина рассматриваемой среды; функция $Q(z, u, \mu)$ описывает распределение источников однократно рассеянных нейтронов (число нейтронов, рассеянных в единицу телесного угла $2\pi \sin \theta d\theta$)

$$Q(z, u, \mu) = \int_{-1}^1 d\mu' \int du' \Phi'(z, u', \mu') W(z, \mu_0, u' \rightarrow u).$$

При $E > 1$ Мэв основную роль в формировании спектра играет неупругое рассеяние, которое считается изотропным. Учитывая также, что в данном случае нас не интересует перенос нейтронов, будем для упрощения считать угловое распределение упруго рассеянных нейтронов изотропным без однозначной связи между потерей энергии и углом рассеяния. Тогда

$$Q(z, u, \mu) = \frac{1}{2} \int du' \Phi'_0(z, u') W_0(z, u' \rightarrow u). \quad (2.83)$$

Здесь интегральный поток нерассеянных нейтронов или, что то же, нулевая гармоника этого потока

$$\Phi'_0(z, u') = \frac{1}{2} \chi(u') \int_0^{\delta_{a.3}} f(z') E_1[Y(z, z', u')] dz'.$$

Нулевая гармоника индикатрисы рассеяния

$$W_0(z, u' \rightarrow u) = \sum_s(z, u') f_s(u', u - u') + \sum_{in}(z, u') f_{in}(u', u - u').$$

В соответствии с выражениями (2.81) — (2.83) гармоники функции $\Phi''(x, u, \mu)$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \Phi''_l(x, u) = & \frac{1}{2} \chi(u) \int_0^{\delta_{a.3}} f(z) K_l(|x - z|, u) dz + \\ & + \frac{1}{2} \int du' \left[\int_0^x \Phi'_0(z, u') W_0(z, u' \rightarrow u) K_l(|x - z|, u') dz + \right. \\ & \left. + (-1)^l \int_x^{\delta_{a.3}} \Phi'_0(z, u') W_0(z, u' \rightarrow u) K_l(|z - x|, u) dz \right]. \quad (2.84) \end{aligned}$$

Функции $K_l(|x - z|, u)$ в уравнении (2.84)

$$K_l(|x - z|, u) = \int_0^1 \exp\left[-\frac{Y(|x - z|, u)}{\mu}\right] P_l(\mu) \frac{d\mu}{\mu}$$

аналогичны функциям $K_l(x, z, u)$ в уравнении (2.81):

$$Y(|x-z|, u) = \begin{cases} \int_z^x \Sigma_{tr}(x', u) dx' & \text{при } x > z, \\ \int_x^z \Sigma_{tr}(x', u) dx' & \text{при } x < z. \end{cases}$$

Гармоники $\Phi_l(x, u)$ могут быть использованы в качестве внутригруппового спектра для усреднения сечений в области энергий $1 \text{ Мэв} \leq E \leq (5-6) \text{ Мэв}$. Для усреднения сечений в пределах группы можно использовать также экспериментальные и расчетные данные о деформации спектра деления в различных средах. Такие данные наиболее полно представлены в работах [17, 22].

В предложенном выше качественном и количественном описании энергетического распределения нейтронов наименее определенной является переходная область энергий примерно 1 Мэв ($0,5-2 \text{ Мэв}$). Спектр нейтронов с $E \approx 1 \text{ Мэв}$ должен занимать промежуточное положение между спектром замедления и спектром первых столкновений. Поэтому в качестве такового можно принять

$$\Phi_l(x, u) = a\Phi_{l \text{ зам}}(u) + b\Phi_{l \text{ ст}}(x, u), \quad (2.85)$$

где $\Phi_{l \text{ зам}}$ и $\Phi_{l \text{ ст}}$ определяются выражениями типа (2.79) и (2.84). Учитывая, однако, что среднегрупповые сечения в переходной области энергий в большинстве случаев не играют существенной роли для решения задач о переносе нейтронов, можно вместо выражения (2.85) использовать спектр деления или замедления.

В заключение необходимо подчеркнуть, что выражения (2.78), (2.79), (2.81) и (2.85), полученные с целым рядом допущений и оговорок, дают лишь сугубо приближенное описание спектрального распределения нейтронов. Вместе с тем использование этих спектров в многогрупповых расчетах для определения исходных групповых констант является, по-видимому, достаточно оправданным.

Следует также иметь в виду, что зависимость от энергетического спектра среднегрупповых сечений, определяемых в виде дробных функционалов потока, должна ослабевать с уменьшением ширины энергетической группы. Поэтому постановка в многогрупповом расчете задачи о выборе спектра для усреднения сечений становится менее актуальной с увеличением числа групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаев М. Н. и др. Бюллетень информационного центра по ядерным данным. Вып. первый. М., Атомиздат, 1964, стр. 308.
2. Абагян Л. П. и др. Групповые константы для расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1964.

3. Николаев М. Н., Базазянц Н. Англо-советский семинар «Ядерные константы для расчета реакторов». АСС-68. Дубна, 1968.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4. М., Физматгиз, 1962.
5. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
6. Марчук Г. И., Орлов В. В. В сб. «Нейтронная физика». Под ред. П. А. Крупчицкого. М., Госатомиздат, 1961, стр. 30.
7. Марчук Г. И., Смелов В. В. Там же, стр. 143.
8. Гермогенова Т. А. и др. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Вып. 2. Под ред. Д. Л. Бродера и др. М., Атомиздат, 1966, стр. 22.
9. Абагян А. А. и др. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Под ред. Д. Л. Бродера и др. М., Госатомиздат, 1963, стр. 7.
10. Бюллетень информационного центра по ядерным данным. Вып. третий. (приложение). М., Атомиздат, 1967.
11. Синицын Б. И., Цыпин С. Г. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Под ред. Д. Л. Бродера и др. М., Госатомиздат, 1963, стр. 75.
12. Piaszek G. Phys. Rev., **69**, 423 (1964).
13. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
14. Физика ядерных реакторов. Перев. с англ. Т. I. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
15. Физика ядерных реакторов. Перев. с англ. Под ред. И. А. Стенбока. М., Атомиздат, 1964.
16. Наумов В. А. Доклад 28/P/721 (СССР), представленный на Третью международную конференцию по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1964.
17. Бродер Д. Л. и др. Малогабаритная защита реакторов. М., Атомиздат, 1967.
18. Абагян Л. П. и др. Доклад 28/P/357 (СССР), представленный на Третью международную конференцию по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1964.
19. Орлов В. В. и др. В сб. «Физика ядерных реакторов». Т. I. М., Атомиздат, 1966, стр. 362.
20. Николаев М. Н., Филиппов В. В. «Атомная энергия», **15**, 493 (1963).
21. Николаев М., Игнатов А. «Бюллетень информационного центра по ядерным данным». Вып. третий. М., Атомиздат, 1966, стр. 409.
22. Казанский Ю. А. и др. Физические исследования защиты реакторов. Под ред. С. Г. Цыпина. М., Атомиздат, 1966.

МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

В многогрупповых расчетах защиты классический метод сферических гармоник широко используется для нахождения решений системы односкоростных кинетических уравнений, каждое из которых описывает перенос нейтронов в пределах одной энергетической группы. Наиболее популярными являются диффузионное, P_1 - и P_2 -приближения этого метода, позволяющие сравнительно простым путем отыскать пространственное распределение тепловых и промежуточных нейтронов [1, 2]. Что же касается быстрых нейтронов, то для решения многогрупповой задачи в рамках указанных приближений приходится использовать различные полуфеноменологические параметры, с помощью которых задаются внешние источники нейтронов и определяются эффективные групповые константы. Подобные методы расчета защиты изложены в гл. VI.

По мере развития вычислительной техники и получения необходимых данных по многогрупповым константам в расчетах все чаще начинают использоваться более высокие степени приближения метода сферических гармоник: P_5 , P_7 и др. Использование таких приближений позволяет не только точнее рассчитывать пространственное распределение нейтронов всех энергий, но и, что особенно важно, получать информацию об угловом спектре нейтронов.

§ 1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод сферических гармоник может рассматриваться как математическая операция по исключению угловой зависимости из кинетического уравнения. Сущность метода заключается в том, что искомая функция распределения $\Phi(\mathbf{r}, u, \Omega)$ заменяется последовательностью функций $\Phi_l(\mathbf{r}, u)$. Эти функции являются коэффициентами разложения угловой зависимости дифференциального потока нейтронов по сферическим гармоникам. Для широкого класса задач нахождение решений уравнений, которым удовлетворяют функции $\Phi_l(\mathbf{r}, u)$, оказывается более простой операцией, чем интегрирование (численное или аналитическое) исходного кинетического уравнения.

Метод сферических гармоник наиболее эффективен в случае плоской и сферически симметричной геометрий. В настоящей книге вывод основных уравнений сделан для плоской геомет-

рии, для сферически симметричной геометрии приведены окончательные результаты.

Кинетическое уравнение, определяющее дифференциальный поток нейтронов:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, u, \mu)}{\partial x} + \sum_{\mu_0, u' \rightarrow u} (x, u) \Phi(x, u, \mu) = \int d\Omega' \int \Phi(x, u', \mu') W(x, \mu_0, u' \rightarrow u) du' + q(x, u, \mu). \quad (3.1)$$

Сформулируем условия задачи, достаточно общие для расчетов защиты. Пусть слева при $x=0$ в среду попадают нейтроны с заданной интенсивностью и спектром, а справа при $x=\delta$ среда граничит с пустотой или со средой, «черной» по отношению к нейтронам интересующего нас спектра. Соответствующие граничные условия записываются следующим образом:

$$\Phi(x, u, \mu)|_{x=0} = f(u, \mu) \quad \text{при } 0 \leq \mu \leq 1, \quad (3.2)$$

$$\Phi(x, u, \mu)|_{x=\delta} = 0 \quad \text{при } -1 \leq \mu \leq 0.$$

Здесь $f(u, \mu)$ — заданная функция; δ — толщина рассматриваемой среды. Если среда многослойная, то к граничным условиям (3.2) необходимо добавить требование непрерывности потока на границе слоев с различными физическими свойствами, где характеристики взаимодействия нейтронов со средой $\Sigma(x, u)$, $W(x, \mu_0, u' \rightarrow u)$ терпят разрыв.

В расчетах защиты реакторов источником нейтронов является активная зона. Часто спектральное распределение нейтронов, вылетающих из активной зоны (или отражателя), заранее неизвестно. В этих случаях приходится рассматривать перенос нейтронов в среде, включающей активную зону, в пределах которой задано распределение источников нейтронов спектра деления. Так как активная зона обычно имеет центр или ось симметрии, то соответствующие граничные условия записываются следующим образом:

$$\left. \frac{\partial \Phi(x, u, \mu)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{при } -1 \leq \mu \leq 1, \quad (3.2a)$$

$$\Phi(x, u, \mu)|_{x=\delta} = 0 \quad \text{при } -1 \leq \mu \leq 0.$$

Из дальнейшего изложения будет видно, что сходимость решения, получаемого методом сферических гармоник, зависит от степени анизотропии углового распределения нейтронов. Чем меньше анизотропия, тем лучше сходимость, и наоборот. Угловое распределение нерассеянных нейтронов вдали от источника, как правило, обладает значительно большей степенью анизотропии, чем аналогичное распределение нейтронов, испытавших одно или несколько столкновений с ядрами среды. Поэтому оказывается целесообразным при исследовании задач, связан-

ных с глубоким проникновением, рассматривать отдельно рассеянные и нерассеянные нейтроны. Тем самым удастся выделить из решения уравнения (3.1) δ -образную особенность по переменной μ при энергиях источника и описать угловую зависимость этого решения меньшим числом членов в разложении по сферическим гармоникам.

Представим $\Phi(x, u, \mu)$ как сумму двух функций

$$\Phi(x, u, \mu) = \varphi(x, u, \mu) + \psi(x, u, \mu). \quad (3.3)$$

Потребуем, чтобы $\psi(x, u, \mu)$ удовлетворяло уравнению

$$\mu \frac{\partial \psi(x, u, \mu)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \psi(x, u, \mu) = q(x, u, \mu) \quad (3.4)$$

при граничных условиях

$$\psi(0, u, \mu) = f(u, \mu) \quad \text{при} \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (3.5)$$

$$\psi(\delta, u, \mu) = 0 \quad \text{при} \quad -1 \leq \mu \leq 0.$$

Уравнение (3.4) при граничных условиях (3.5) описывает пространственно-энергетическое и угловое распределения в среде нерассеянных нейтронов. Решение этого уравнения записывается следующим образом:

$$\psi(x, u, \mu) = \begin{cases} f(u, \mu) e^{-\frac{y(u, x)}{\mu}} + \frac{1}{\mu} \int_0^x q(z, u, \mu) e^{-\frac{y(u, x, z)}{\mu}} dz & \text{при} \quad 0 \leq \mu \leq 1, \\ \frac{1}{\mu} \int_0^x q(z, u, \mu) e^{-\frac{y(u, x, z)}{\mu}} dz & \text{при} \quad -1 \leq \mu \leq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь

$$y(u, x) = \int_0^x \Sigma(u, x') dx'; \quad y(u, x, z) = \int_z^x \Sigma(u, x') dx'. \quad (3.7)$$

В случае однородной среды

$$y(u, x) = \Sigma(u) x; \quad y(u, x, z) = \Sigma(u) (x - z).$$

В защите обычно нет источников нейтронов (при условии, что в качестве защитного материала не используются делящиеся изотопы). Поэтому можно положить

$$q(x, u, \mu) = 0$$

и решение уравнения (3.4) приобретает простой вид

$$\psi(x, u, \mu) = \begin{cases} f(u, \mu) e^{-\frac{y(u, x)}{\mu}} & \text{при} \quad 0 \leq \mu \leq 1, \\ 0 & \text{при} \quad -1 \leq \mu \leq 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Если перенос нейтронов исследуется в среде, включающей активную зону реактора, то при $0 \leq x \leq \delta_{a.z}$

$$\psi(x, u, \mu) = \begin{cases} \frac{\kappa(u)}{2\mu} \int_0^x f(z) e^{-\frac{y(x, z, u)}{\mu}} dz & \text{при } 0 \leq \mu \leq 1, \\ \frac{\kappa(u)}{2\mu} \int_{\delta_{a.z}}^x f(z) e^{-\frac{y(x, z, u)}{\mu}} dz & \text{при } -1 \leq \mu \leq 0; \end{cases}$$

при $x \geq \delta_{a.z}$

$$\psi(x, u, \mu) = \begin{cases} \frac{\kappa(u)}{2\mu} \int_0^{\delta_{a.z}} f(z) e^{-\frac{y(x, z, u)}{\mu}} dz & \text{при } 0 \leq \mu \leq 1, \\ 0 & \text{при } -1 \leq \mu \leq 0. \end{cases}$$

Здесь $\kappa(u)$ — спектр деления.

Подставляя формулу (3.3) в (3.1) и учитывая уравнение (3.4) и условия (3.5), получаем уравнение для дифференциального потока рассеянных нейтронов

$$\mu \frac{\partial \varphi(x, u, \mu)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \varphi(x, u, \mu) = \int d\Omega' \int du' \varphi(x, u', \mu') \times \\ \times W(x, \mu_0, u' \rightarrow u) + Q(x, u, \mu) \quad (3.9)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \varphi(0, u, \mu) &= 0 & \text{при } 0 \leq \mu \leq 1, \\ \varphi(\delta, u, \mu) &= 0 & \text{при } -1 \leq \mu \leq 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В уравнении (3.9) $Q(x, u, \mu)$ описывает распределение в среде источников однократно рассеянных нейтронов или, что то же, распределение плотности столкновений нерассеянных нейтронов

$$Q(x, u, \mu) = \int d\Omega' \int du' \psi(x, u', \mu') W(x, \mu_0, u' \rightarrow u). \quad (3.11)$$

Функция $\psi(x, u', \mu')$ определяется выражениями (3.6)—(3.8).

Итак, вместо уравнения (3.1) с граничными условиями (3.2) получено уравнение (3.9) с граничными условиями (3.10). Тем самым мы исключили из рассмотрения нерассеянные нейтроны и уменьшили угловую анизотропию искомой функции.

Если считать $Q(x, u, \mu)$ известной функцией, то легко видеть, что уравнение (3.9) формально ничем не отличается от уравнения (3.1). Для дальнейшего изложения в качестве исходного уравнения удобно использовать уравнение (3.1) для полного потока нейтронов $\Phi(x, u, \mu)$ с соответствующими граничными условиями. При этом имеется в виду, что замена функции

источников $q(x, u, \mu)$ на $Q(x, u, \mu)$ позволяет использовать полученные ниже результаты и для определения потока рассеянных нейтронов $\varphi(x, u, \mu)$.

Как уже указывалось, в методе сферических гармоник вместо функции $\Phi(x, u, \mu)$ рассматриваются коэффициенты разложения угловой зависимости $\Phi(x, u, \mu)$ по сферическим гармоникам

$$\Phi_n(x, u) = \int_{-1}^{+1} \Phi(x, u, \mu) P_n(\mu) d\mu,$$

где $P_n(\mu)$ — полином Лежандра.

Согласно определению, нулевой момент соответствует интегральному потоку рассеянных нейтронов

$$\Phi_0(x, u) = \int_{-1}^{+1} \Phi(x, u, \mu) d\mu,$$

а первый момент — току нейтронов через поверхность, перпендикулярную к направлению x :

$$\Phi_1(x, x) = \int_{-1}^{+1} \mu \Phi(x, u, \mu) d\mu.$$

Для того чтобы получить уравнения, которым удовлетворяют функции $\Phi_n(x, u)$, нужно подставить в уравнение (3.1) разложения угловой зависимости функций $\Phi(x, u, \mu)$ и $q(x, u, \mu)$ по полиномам Лежандра:

$$\Phi(x, u, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Phi_n(x) P_n(\mu), \tag{3.12}$$

$$q(x, u, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} q_n(x) P_n(\mu).$$

После подстановки разложений (3.12) в уравнение (3.1) умножим левую и правую части уравнения на $P_l(\mu)$ и проинтегрируем его по μ в интервале от -1 до $+1$. Воспользовавшись условием ортогональности и рекуррентным соотношением для полиномов Лежандра [3]

$$\mu P_l(\mu) = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}(\mu) + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}(\mu),$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l+1}(x, u)}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \times \\ & \times \frac{\partial \Phi_{l-1}(x, u)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi_l(x, u) = F_l(x, u) + q_l(x, u). \end{aligned}$$

Рассмотрим интегральный член этого уравнения

$$F_l(x, u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int \Phi_n(x, u') du' \int d\Omega \int d\Omega' P_l(\mu) P_n(\mu') \times \\ \times W(x, \mu_0, u' \rightarrow u). \quad (3.13)$$

Здесь независимыми переменными являются $\Omega = (\theta, \varphi)$ и $\Omega' = (\theta', \varphi')$, а μ_0 — функция этих переменных (рис. 3.1). Если осуществить замену переменных $\Omega = (\theta, \varphi)$ на $\Omega_0 = (\theta_0, \varphi_0)$, то, учитывая, что якобиан такого преобразования равен 1, получим

$$F_l(x, u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \times \\ \times \int \Phi_n(x, u') du' \int d\Omega_0 \int d\Omega' \times \\ \times P_l(\mu) P_n(\mu') W(x, \mu_0, u' \rightarrow u). \quad (3.14)$$

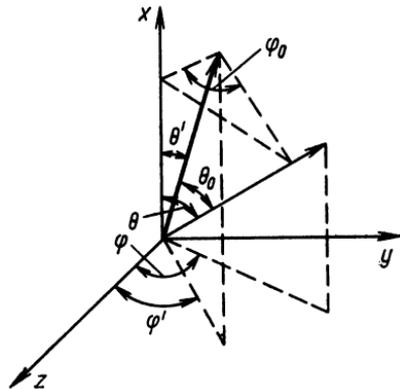


Рис. 3.1. Система координат.

Здесь независимыми переменными являются $\Omega' = (\theta', \varphi')$ и $\Omega_0 = (\theta_0, \varphi_0)$, а μ — функция этих переменных. Воспользуемся формулой для сферического треугольника

$$\mu = \mu' \mu_0 + \sqrt{1 - \mu'^2} \sqrt{1 - \mu_0^2} \cos \varphi_0$$

и теоремой сложения для полиномов Лежандра

$$P_l(\mu) = P_l(\mu') P_l(\mu_0) + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu') P_l^m(\mu_0) \cos m\varphi_0. \quad (3.15)$$

Подставив формулу (3.15) в (3.14) и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi_0 d\varphi_0 \equiv 0,$$

получим следующее выражение для $F_l(x, u)$:

$$F_l(x, u) = \int \Phi_l(x, u') W_l(x, u' \rightarrow u) du'. \quad (3.16)$$

В выражении (3.16) $W_l(x, u' \rightarrow u)$ — коэффициенты разложения угловой зависимости индикатрисы рассеяния по сферическим гармоникам

$$W_l(x, u' \rightarrow u) = \int_{-1}^{+1} W(x, \mu_0, u' \rightarrow u) P_l(\mu_0) d\mu_0.$$

Коэффициенты разложения угловой зависимости функции источников по $P_l(\mu)$ равны

$$q_l(x, u) = \int_{-1}^{+1} q(x, u, \mu) P_l(\mu) d\mu. \quad (3.17)$$

В соответствии с выражением (3.16) система уравнений, решениями которых являются функции $\Phi_l(x, u)$, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l+1}(x, u)}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l-1}(x, u)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi_l(x, u) = \\ = \int \Phi_l(x, u') W_l(x, u' \rightarrow u) du' + q_l(x, u). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Граничные условия для угловых моментов $\Phi_l(x, u)$ найдем из соответствующих граничных условий для дифференциального потока $\Phi(x, u, \mu)$ (3.2).

Следуя Р. Маршаку [2], преобразуем соотношения (3.2) в систему уравнений для $\Phi_l(0, u)$ и $\Phi_l(\delta, u)$. С этой целью подставим в (3.2) разложение $\Phi(x, u, \mu)$ и $f(u, \mu)$ по сферическим гармоникам. Затем, умножив соотношения на μ^{2m+1} , проинтегрируем первое из них по μ от 0 до 1, а второе от -1 до 0. В результате получим

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{ml} [\Phi_l(0, u) - f_l(u)] = 0; \quad a_{ml} = \frac{2l+1}{2} \int_0^1 \mu^{2m+1} P_l(\mu) d\mu; \quad (3.19)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_{ml} \Phi_l(\delta, u) = 0; \quad b_{ml} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^0 \mu^{2m+1} P_l(\mu) d\mu.$$

Здесь $f_l(u)$ — l -я гармоника функции $f(u, \mu)$.

Для многослойной среды к соотношениям (3.19) добавляется требование непрерывности отдельных гармоник потока $\Phi_l(x, u)$ или их комплексов на границах слоев с различными физическими свойствами (см. ниже).

В случае граничных условий (3.2а) соотношения (3.19) записываются в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{ml} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x}(x=0, u) = 0; \quad \sum_{l=0}^{\infty} b_{ml} \Phi_l(x=\delta, u) = 0. \quad (3.19a)$$

При решении задач, связанных с переносом нейтронов, широко используются различные аппроксимационные формулы для описания угловой зависимости индикатрисы рассеяния. Как уже указывалось ранее, из-за корреляции между углом рассеяния и потерей энергии угловая зависимость индикатрисы

рассеяния может быть строго описана только бесконечным рядом по $P_l(\mu_0)$:

$$W(x, u' \rightarrow u, \mu_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) W_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0). \quad (3.20)$$

Замена разложения (3.20) на конечный ряд по $P_l(\mu_0)$

$$W(x, u' \rightarrow u, \mu_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^L (2l+1) W_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0) \quad (3.21)$$

является простейшим способом аппроксимации угловой зависимости W . При этом, конечно, происходит частичное нарушение вышеупомянутой корреляции: она тем больше, чем меньше значение числа L . В пределе при $L=0$ вообще отсутствует какая-либо корреляция, так как истинному распределению рассеянных нейтронов по летаргии, описываемому функцией $W_0(u' \rightarrow u)$, соответствует изотропное распределение тех же нейтронов по углам.

При замене разложения (3.20) на (3.21) в правой части уравнений (3.18) при $l > L$ исчезают интегральные члены, т. е. нарушение корреляции между углом рассеяния приводит к искаженному описанию переноса нейтронов.

В работе [4] указывается на возможность аппроксимации индикатрисы рассеяния конечным рядом по $P_l(\mu_0)$, но с учетом вклада в W отброшенных членов разложения (3.20). Суть предложения заключается в том, что в разложении (3.20) все коэффициенты W_l с $l > L$ заменяются на величины, не зависящие от l и равные

$$W_l(x, u' \rightarrow u) = \Sigma_s(x, u') \chi_{L+1}(u') \delta(u - u') \quad \text{при } l > L, \\ \chi_{L+1}(u) = \frac{1}{\Sigma_s(x, u)} \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(x, u, \mu_0) P_{L+1}(\mu_0) d\mu_0. \quad (3.22)$$

Здесь $\Sigma_s(x, u)$ и $\Sigma_s(x, u, \mu_0)$ — полное и дифференциальное сечение упругого рассеяния соответственно (напомним, что неупругое рассеяние считается сферически изотропным). Соответствующее выражение для W , вывод которого приведен в § 2 гл. V, записывается следующим образом:

$$W(x, u' \rightarrow u, \mu_0) = W^*(x, u' \rightarrow u, \mu_0) + \frac{1}{4\pi} \Sigma_s(x, u') \chi_{L+1}(u') \delta \times \\ \times (\mu_0 - 1) \delta(u - u'), \\ W^*(x, u' \rightarrow u, \mu_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^L (2l+1) [W_l(x, u' \rightarrow u) - \\ - \Sigma_s(x, u') \chi_{L+1}(u') \delta(u - u')] P_l(\mu_0). \quad (3.23)$$

Если выражение (3.23) подставить в уравнение (3.9), то в результате простых преобразований получим

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Sigma^*(x, u) \Phi = \int d\Omega \int du' \Phi(x, u', \mu') W^*(x, u' \rightarrow u, \mu_0) + q. \quad (3.24)$$

В выражении (3.24) использовано обозначение

$$\Sigma^*(x, u) = \Sigma(x, u) - \Sigma_s(x, u) \chi_{L+1}(u). \quad (3.25)$$

Перейдем к системе уравнений, определяющих угловые моменты функции $\Phi(x, u, \mu)$, являющейся решением уравнения (3.24). После преобразований, аналогичных тем, которые были проделаны при выводе уравнений (3.18), получим систему уравнений для $\Phi_l(x, u)$:

$$\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l+1}}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l-1}}{\partial x} + \Sigma \Phi_l = \int \Phi_l(x, u') W_l(x, u' \rightarrow u) du' + q_l \quad \text{при } l \leq L, \quad (3.26)$$

$$\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l+1}}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l-1}}{\partial x} + \Sigma^* \Phi_l = q_l \quad \text{при } l > L.$$

Сравнивая уравнения (3.26) с уравнениями (3.18), можно отметить следующее. Аппроксимация индикатрисы рассеяния в виде (3.23) приводит к правильному описанию пространственного и энергетического распределений для всех $\Phi_l(x, u)$ при $l \leq L$, если пренебречь влиянием на них гармоник более высокого порядка. Что же касается $\Phi_l(x, u)$ при $l > L$, то их пространственно-энергетическое распределение описывается в приближении «прямых прострелов» с использованием в качестве $\Sigma(x, u)$ эффективного сечения $\Sigma^*(x, u)$. Замена в уравнении (3.26) полного сечения на эффективное может рассматриваться как своего рода компенсация отброшенным членам разложения (3.20).

По определению, $\chi_1(u) = \bar{\mu}_0(u)$, где $\bar{\mu}_0(u)$ — средний косинус углов упругого рассеяния. Положив $L=0$ в выражении (3.23), получим транспортную аппроксимацию для индикатрисы рассеяния (подробнее см. § 2 гл. V):

$$W(x, u' \rightarrow u, \mu_0) = \frac{1}{4\pi} \{W_0(x, u' \rightarrow u) + \Sigma_s(x, u') \bar{\mu}_0(u') \delta(u - u') [\delta(\mu_0 - 1) - 1]\}. \quad (3.27)$$

Система уравнений для $\Phi_l(x, u)$, соответствующая транспортной аппроксимации индикатрисы (3.27), записывается в виде

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \Sigma \Phi_0 = \int \Phi_0(x, u') W_0(x, u' \rightarrow u) du' + q_0, \quad (3.28)$$

$$\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l+1}}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l-1}}{\partial x} + \Sigma_{tr} \Phi_l = q_l \quad \text{при } l > 0.$$

Здесь $\Sigma_{tr} = \Sigma - \bar{\mu}_0 \Sigma_s$ — полное транспортное сечение.

Рассмотрим теперь сферически симметричную геометрию. Согласно соотношениям (1.49), кинетическое уравнение для потока нейтронов записывается следующим образом:

$$\mu \frac{\partial \Phi(r, u, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \Phi(r, u, \mu)}{\partial \mu} + \Sigma(r, u) \Phi(r, u, \mu) = \\ = \int d\Omega' \int du' \Phi(r, u', \mu') W(r, \mu_0, u' \rightarrow u) + q(r, u, \mu).$$

Переход к системе уравнений, определяющих гармоники функции $\Phi(r, u, \mu)$, осуществляется так же, как и в случае плоской геометрии. Дополнительно используется лишь рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра [5]

$$(\mu^2 - 1) \frac{dP_l}{d\mu} = l[\mu P_l - P_{l-1}].$$

Система уравнений для $\Phi_l(r, u)$:

$$\frac{l+1}{2l+1} \left[\frac{\partial \Phi_{l+1}(r, u)}{\partial r} + \frac{l+2}{r} \Phi_{l+1}(r, u) \right] + \frac{l}{2l+1} \left[\frac{\partial \Phi_{l-1}(r, u)}{\partial r} - \right. \\ \left. - \frac{l-1}{r} \Phi_{l-1}(r, u) \right] + \Sigma(r, u) \Phi_l(r, u) = \int \Phi_l(r, u') W_l(u' \rightarrow u) du' + q_l(r, u). \quad (3.29)$$

Если рассматриваемая среда представляет собой сферический экран с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 , то по аналогии с (3.19) граничные условия для $\Phi_l(r, u)$ записываются в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{ml} [\Phi_l(r_1, u) - f_l(u)] = 0; \quad a_{ml} = \int_0^1 \mu^{2m+1} P_l(\mu) d\mu; \\ \sum_{l=0}^{\infty} b_{ml} \Phi_l(r_2, u) = 0; \quad b_{ml} = \int_{-1}^0 \mu^{2m+1} P_l(\mu) d\mu.$$

Система уравнений для потока рассеянных нейтронов в сферически симметричной геометрии записывается аналогично системе (3.29) с заменой $q_l(r, u)$ на функцию $Q_l(r, u)$. По аналогии с выражением (3.16)

$$Q_l(r, u) = \int \psi_l(r, u') W_l(r, u' \rightarrow u) du'$$

$\psi_l(r, u)$ — гармоники дифференциального потока нерассеянных нейтронов $\psi(r, u, \mu)$ в сферическом экране (рис. 3.2):

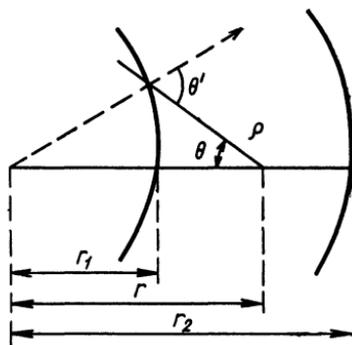


Рис. 3.2. Пояснительная схема к сферической системе координат.

$$\psi(r, u, \mu) = \begin{cases} f(u, \mu') e^{-Y(u, \rho)} & \text{при } \sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2} \leq \mu \leq 1; \\ 0 & \text{при } -1 \leq \mu \leq \sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2}; \end{cases}$$

$$\mu'(r, \mu) = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 (1 - \mu^2)};$$

$$\rho(r, \mu) = r \left[\mu - \sqrt{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 - (1 - \mu^2)} \right];$$

$$Y[u, \rho(r, \mu)] = \int_0^{\rho(r, \mu)} \Sigma(u, r) \left[\mu - \frac{1 - \mu^2}{\sqrt{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 - (1 - \mu^2)}} \right] dr.$$

Здесь $\mu = \cos \theta$; $\mu' = \cos \theta'$; $f(u, \mu')$ — дифференциальный поток нейтронов, падающих извне на внутреннюю поверхность экрана.

Выражение для функции $\psi(r, u, \mu)$ соответствует следующим условиям задачи: нейтроны попадают в защитный экран только через его внутреннюю поверхность; в самом экране нет внешних источников нейтронов.

Подведем некоторые итоги. Коэффициенты разложения дифференциального потока нейтронов по сферическим гармоникам $\Phi_l(x, u)$ определяются путем интегрирования системы уравнений (3.18). Такое интегрирование может быть практически осуществлено лишь при ограничении числа уравнений или, что то же, числа членов в разложении (3.12). Последнее обстоятельство означает, что угловая зависимость функции распределения $\Phi(x, u, \mu)$, терпящая разрыв на границах среды [см. граничные условия (3.10)], аппроксимируется конечным и притом сравнительно небольшим числом функций $P_l(\mu)$, непрерывных во всей области изменения угловой переменной $-1 \leq \mu \leq 1$. Подобное приближение в описании углового спектра нейтронов, как правило, оказывается вполне удовлетворительным при изучении пространственно-энергетического распределения многократно рассеянных нейтронов вдали от границ среды. Иное дело задачи, для которых граничные эффекты и связанные с ними нерегулярности в угловом спектре нейтронов являются определяющими. К таковым относятся исследования прохождения нейтронов через тонкие защитные экраны, расчеты малогабаритных и теневого защит. В подобных случаях для повышения точности описания углового спектра нейтронов приходится сохранять достаточно большое число членов в разложении (3.12), что неизбежно значительно увеличивает трудоемкость интегрирования исходных уравнений.

§ 2. МНОГОГРУППОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Вернемся к системе уравнений (3.18), решениями которых являются функции $\Phi_l(x, u)$, т. е. гармоники дифференциального потока рассеянных нейтронов. Последующее рассмотрение не зависит от геометрии задачи, и поэтому полученные результаты легко могут быть распространены на случай сферически симметричной геометрии.

Перейдем к многогрупповому приближению. С этой целью проинтегрируем систему (3.18) по u в пределах i -й группы от u_{i-1} до u_i . Интеграл в правой части по u' представим в виде суммы интегралов. В результате получим систему уравнений, определяющих групповые значения гармоник потока нейтронов:

$$\Phi_l^i(x) = \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi_l(x, u) du.$$

Система уравнений для $\Phi_l^i(x)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{l+1}{2l+1} \frac{d\Phi_{l+1}^i}{dx} + \frac{l}{2l+1} \frac{d\Phi_{l-1}^i}{dx} + \Sigma_l^i(x) \Phi_l^i(x) = \\ = \sum_{k=k_0}^i \Phi_l^k(x) W_l^{k \rightarrow i}(x) + q_l^i(x). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь источниками являются групповые значения гармоник функции $q(x, u, \mu)$

$$q_l^i(x) = \int_{u_{i-1}}^{u_i} q_l(x, u) du.$$

Групповые константы, входящие в систему (3.30), равны

$$\Sigma_l^i(x) = \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(x, u) \Phi_l(x, u) du; \quad (3.30a)$$

$$W_l^{k \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_l(x, u' \rightarrow u) du.$$

Здесь и в дальнейшем групповые константы записываются в наиболее общей форме без обсуждения вопросов, связанных с выбором внутргруппового спектра для усреднения сечений, так как эта проблема детально рассмотрена в гл. II.

Граничными условиями для системы уравнений (3.30) служат соотношения (3.19), в которых гармоники потока рассеянных нейтронов $\Phi_l(u)$ заменены на групповые значения Φ_l^i .

Система дифференциальных уравнений (3.30) с константами взаимодействия (3.30а) является многогрупповой системой уравнений в P_N -приближении метода сферических гармоник, где N — максимальное значение номера n в разложении (3.12). Эта же система уравнений при аппроксимации индикатрисы рассеяния в виде (3.23) записывается следующим образом:

$$\frac{l+1}{2l+1} \frac{d\Phi_{l+1}^i(x)}{dx} + \frac{l}{2l+1} \frac{d\Phi_{l-1}^i(x)}{dx} + \Sigma_l^i(x) \Phi_l^i(x) = \\ = \sum_{k=k_0}^i \Phi_k^i(x) W_i^{k \rightarrow i}(x) + q_l^i(x) \quad \text{при } l \leq L, \quad (3.31)$$

$$\frac{l+1}{2l+1} \frac{d\Phi_{l+1}^i(x)}{dx} + \frac{l}{2l+1} \frac{d\Phi_{l-1}^i(x)}{dx} + \Sigma_l^{*i}(x) \Phi_l^i(x) = q_l^i(x) \quad \text{при } l > L.$$

Среднегрупповое значение эффективного сечения $\Sigma^*(x, u)$ равно

$$\Sigma_l^{*i}(x) = \Sigma_l^i(x) - \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_s(x, u) \chi_{L+1}(u) \Phi_l(x, u) du.$$

При транспортном представлении индикатрисы рассеяния [см. выражение (3.27)] получаем вместо системы уравнений (3.31) следующую систему:

$$\frac{d\Phi_l^i(x)}{dx} + \Sigma_0^i(x) \Phi_0^i(x) = \sum_{k=k_0}^i \Phi_k^i(x) W_0^{k \rightarrow i}(x) + q_0^i(x), \quad (3.32)$$

$$\frac{l+1}{2l+1} \frac{d\Phi_{l+1}^i(x)}{dx} + \frac{l}{2l+1} \frac{d\Phi_{l-1}^i(x)}{dx} + \Sigma_{tr,l}^i(x) \Phi_l^i(x) = q_l^i(x) \quad \text{при } l > 0.$$

В системе (3.32) $\Sigma_{tr,l}^i$ — транспортное сечение, усредненное по спектру l -й гармоники потока:

$$\Sigma_{tr,l}^i(x) = \Sigma_l^i(x) - \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \bar{\mu}_0(u) \Sigma_s(x, u) \Phi_l(x, u) du.$$

Если воспользоваться приближением (2,5), то

$$\Sigma_{tr,l}^i(x) = \Sigma_l^i(x) - \bar{\mu}_0^i \Sigma_{s,l}^i(x),$$

где $\bar{\mu}_0^i$ — групповое значение среднего косинуса углов упругого рассеяния; $\Sigma_{s,l}^i$ — сечения упругого рассеяния, усредненные по спектру l -й гармоники потока.

Система уравнений вида (3.32) широко используется в расчетах переноса нейтронов в рамках различных приближений метода сферических гармоник. При этом из-за отсутствия необ-

ходимых данных по групповым константам обычно приходится все $\Sigma_{tr, l}^i$ заменять на

$$\Sigma_{tr, 1}^i = \Sigma_{tr}^i,$$

где Σ_{tr}^i — групповое транспортное сечение. Примеры конкретных результатов таких расчетов приведены в § 6 настоящей главы.

В литературе система уравнений вида (3.32) обычно именуется системой многогрупповых уравнений с изотропными переходами между группами. Следует иметь в виду, что в данном случае выражение «изотропия переходов» означает не изотропное рассеяние нейтронов, а пренебрежение однозначной связью между углом рассеяния и потерей энергии при межгрупповых переходах.

§ 3. P_1 -ПРИБЛИЖЕНИЕ

В методе сферических гармоник угловая зависимость потока нейтронов описывается бесконечным рядом по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$. Сходимость этого ряда зависит от степени анизотропии углового спектра нейтронов. Если спектр близок к изотропному, то в разложении (3.12) можно оставить небольшое число членов, положив равными нулю коэффициенты $\Phi_n(x, u)$ при гармониках более высокого порядка. Количество членов, сохраняемых в разложении (3.12), определяет степень используемого приближения.

Аппроксимация $\Phi(x, u, \mu)$ первыми двумя гармониками соответствует P_1 -приближению

$$\Phi(x, u, \mu) = \frac{1}{2} \Phi_0(x, u) + \frac{3}{2} \mu \Phi_1(x, u). \quad (3.33)$$

Здесь $\Phi_0(x, u) = \int_{-1}^{+1} \Phi(x, u, \mu) d\mu$ — интегральный поток нейтронов; $\Phi_1(x, u) = \int_{-1}^{+1} \mu \Phi(x, u, \mu) d\mu$ — ток нейтронов.

Уравнения, определяющие $\Phi_0(x, u)$ и $\Phi_1(x, u)$, легко получить из системы (3.18), положив в одном случае $l=0$, $\Phi_{-1}(x, u) = 0$, а в другом $l=1$ и $\Phi_2(x, u) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(x, u)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi_0(x, u) &= \int \Phi_0(x, u') W_0(x, u' \rightarrow u) du' + \\ &+ q_0(x, u), \\ \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi_0(x, u)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi_1(x, u) &= \int \Phi_1(x, u') W_1(x, u' \rightarrow u) du' + \\ &+ q_1(x, u). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Граничные условия для функций $\Phi_0(x, u)$ и $\Phi_1(x, u)$ находятся из соотношений (3.19), записанных для $l=0$; 1 и $m=0$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(0, u) + \frac{1}{2} \Phi_0(0, u) &= f_1(u) + \frac{1}{2} f_0(u); \\ \Phi_1(\delta, u) - \frac{1}{2} \Phi_0(\delta, u) &= 0.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Если рассматриваемая среда граничит слева с пустотой и из пустоты задан ток нейтронов в среду $I(u) = f_1(u)$, то граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned}\Phi_1(0, u) + \frac{1}{2} \Phi_0(0, u) &= I(u), \\ \Phi_1(\delta, u) - \frac{1}{2} \Phi_0(\delta, u) &= 0.\end{aligned}\tag{3.35a}$$

Из условий (3.35) следует, что в P_1 -приближении метода сферических гармоник на границе сред с различными физическими свойствами должна обеспечиваться непрерывность функций Φ_0 и Φ_1 , т. е. потока и тока нейтронов.

Уравнения (3.34) в многогрупповом приближении записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_0^i(x)}{dx} + \Sigma_0^i(x) \Phi_0^i(x) &= \sum_{k=k_0}^i \Phi_0^k(x) W_0^{k \rightarrow i}(x) + q_0^i(x); \\ \frac{1}{3} \frac{d\Phi_0^i(x)}{dx} + \Sigma_1^i(x) \Phi_1^i(x) &= \sum_{k=k_0}^i \Phi_1^k(x) W_1^{k \rightarrow i}(x) + q_1^i(x).\end{aligned}\tag{3.36}$$

Уравнения (3.34) определяют: групповое значение интегрального потока

$$\Phi_0^i(x) = \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi_0(x, u) du;$$

групповое значение тока нейтронов

$$\Phi_1^i(x) = \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi_1(x, u) du.$$

Граничные условия для функций $\Phi_0^i(x)$ и $\Phi_1^i(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi_1^i(0) + \frac{1}{2} \Phi_0^i(0) &= f_1^i + \frac{1}{2} f_0^i; \\ \Phi_1^i(\delta) - \frac{1}{2} \Phi_0^i(\delta) &= 0.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Групповые константы в уравнениях (3.36)

$$\Sigma_{0,1}^i(x) = \frac{1}{\Phi_{0,1}^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(x, u) \Phi_{0,1}(x, u) du; \quad (3.38)$$

$$W_{0,1}^{k \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_{0,1}^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_{0,1}(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_{0,1}(x, u' \rightarrow u) du.$$

Здесь $W_0(x, u' \rightarrow u)$, $W_1(x, u' \rightarrow u)$ — нулевая и первая гармоники индикатрисы рассеяния.

Согласно выражению (2.3),

$$\left. \begin{aligned} W_0(x, u' \rightarrow u) &= \Sigma_s(x, u') f_s(u', u - u') + \\ &+ \Sigma_{in}(x, u') f_{in}(u', u - u'); \\ W_1(x, u' \rightarrow u) &= \Sigma_s(x, u') f_s(u', u - u') \mu_0(u - u'); \\ \mu_0(u - u') &= \frac{M+1}{2} e^{-\frac{u-u'}{2}} - \frac{M-1}{2} e^{\frac{u-u'}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Здесь Σ_s ; Σ_{in} — сечения упругого и неупругого рассеяния; f_s , f_{in} — функции, описывающие распределение по летаргии упруго и неупруго рассеянных нейтронов; $\mu_0(u - u')$ — косинус угла упругого рассеяния, при котором летаргия нейтрона изменяется от u' до u .

Если в качестве исходной системы уравнений использовать систему (3.29) при $l=0$ и $l=1$, то легко получить систему многогрупповых уравнений в P_1 -приближении для сферически симметричной геометрии

$$\begin{aligned} -\frac{d\Phi_1^i(r)}{dr} + \frac{2}{r} \Phi_1^i(r) + \Sigma_0^i(r) \Phi_0^i(r) &= \\ = \sum_{k=k_0}^i \Phi_0^k(r) W_0^{k \rightarrow i}(r) + q_0^i(r); \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$-\frac{1}{3} \frac{d\Phi_0^i(r)}{dr} + \Sigma_1^i(r) \Phi_1^i(r) = \sum_{k=k_0}^i \Phi_1^k(r) W_1^{k \rightarrow i}(r) + q_1^i(r).$$

Групповые константы в системе (3.40) определяются аналогично групповым константам (3.38).

Рассмотрим случай, когда выполняется условие $r \ll \Delta u_i$, где r — максимальное изменение летаргии нейтрона при упругом рассеянии, а Δu_i — ширина i -й группы. При выполнении

этого условия отличные от нуля члены матрицы упругих переходов (см. § 2 гл. II) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{0s}^{i-1 \rightarrow i} &= \Sigma_{\text{зам}}^{i-1}; & W_{0s}^{i \rightarrow i} &= \Sigma_{0s}^i - \Sigma_{\text{зам}}^i; \\ W_{1s}^{i-1 \rightarrow i} &= \bar{\mu}_{\text{зам}}^{i-1} \Sigma_{\text{зам}}^{i-1}; & W_{1s}^{i \rightarrow i} &= \bar{\mu}_0^i \Sigma_{1s}^i - \bar{\mu}_{\text{зам}}^i \Sigma_{\text{зам}}^i, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $\Sigma_{\text{зам}}^k$ — сечение замедления нейтронов из k -й группы в $(k+1)$ -ю:

$$\Sigma_{\text{зам}}^k(x) = \frac{\xi^k \Sigma_s(x, u_k)}{\Delta u_k} b_0^k.$$

Поправочный коэффициент, учитывающий отклонение внутригруппового спектра от фермиевского, имеет вид

$$b_0^k = \frac{\Phi_0(x, u, k)}{\Phi_0^k(x)} \Delta u_k.$$

Средняя логарифмическая потеря энергии при переходе нейтронов из k -й группы в $(k+1)$ -ю равна

$$\xi^k = \int_{u_k-r}^{u_k} du' \int_{u_k}^{u'+r} f_s(u', u-u') du.$$

Средний косинус угла рассеяния при замедлении с переходом из k -й группы в $(k+1)$ -ю равен

$$\bar{\mu}_{\text{зам}}^k = \frac{1}{\xi^k} \int_{u_k-r}^{u_k} du' \int_{u_k}^{u'+r} \mu_0(u-u') f_s(u', u-u') du.$$

Как показано в гл. II, при изотропном рассеянии в системе центра инерции

$$\begin{aligned} \xi^k &= \xi = 1 + \frac{(M-1)^2}{2M} \ln \frac{M-1}{M+1}, \\ \bar{\mu}_{\text{зам}}^k &= \bar{\mu}_{\text{зам}} = \frac{1}{9} \frac{10 - 6M^2 + \frac{3}{2} r (M^2 - 3M + 2)}{M^2 - \frac{1}{4} r (M-1)^2}. \end{aligned}$$

При изотропном рассеянии на тяжелых ядрах

$$\xi^k \approx \frac{2}{M}; \quad \bar{\mu}_{\text{зам}}^k \approx -\frac{1}{3} \left(1 - \frac{4}{3M} \right).$$

Следует напомнить, что при выводе формул (3.41) был использован ряд допущений, приведенных в гл. II, из которых наиболее существенное

$$\bar{\mu}_0^i \Sigma_s^i \approx \frac{1}{\Phi_1^i} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \bar{\mu}_0(u) \Sigma_s(u) \Phi_1(u) du$$

связано с пренебрежением блокировкой параметров анизотропии упругого рассеяния.

Подставим формулы (3.41) в уравнения (3.36). Учитывая, что в данном случае члены матриц упругих переходов с $k \neq i$, $i - 1$ равны нулю, получим

$$\frac{d\Phi_1^i}{dx} + \sum_{\text{ув}}^i \Phi_0^i = \sum_{\text{зам}}^{i-1} \Phi_0^{i-1} + \sum_{k=k_0}^{i-1} \Phi_0^k W_{in}^{k \rightarrow i} + q_0^i; \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d\Phi_0^i}{dx} + [\Sigma_{\text{тр}}^i + \bar{\mu}_{\text{зам}}^i \Sigma_{\text{зам}}^i] \Phi_1^i = \bar{\mu}_{\text{зам}}^{i-1} \sum_{\text{зам}}^{i-1} \Phi_1^{i-1} + q_1^i,$$

где $\Sigma_{\text{ув}}^i = \Sigma_0^i - (\Sigma_{0s}^i - \Sigma_{\text{зам}}^i) - W_{in}^{i \rightarrow i}$ — сечение увода из i -й группы; $\Sigma_{\text{тр}}^i = \Sigma_1^i - \bar{\mu}_0 \Sigma_{1s}^i$ — транспортное сечение в i -й группе.

Индексы 0 и 1 при Σ означают усреднение сечений по спектру нулевой и первой гармоник потока.

Рассмотрим теперь решение системы уравнений P_1 -приближения (3.42) в частном случае бесконечной однородной среды. В случае плоского изотропного источника

$$q^i(x, \mu) = \frac{q^i \delta(x)}{2}; \quad q_0^i = q^i \delta(x); \quad q_1^i = 0.$$

Рассмотрим вначале уравнения для первой группы ($i=1$):

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1^1}{dx} + \sum_{\text{ув}}^1 \Phi_0^1 &= q^1 \delta(x), \\ \frac{1}{3} \frac{d\Phi_0^1}{dx} + [\Sigma_{\text{тр}}^1 + \bar{\mu}_{\text{зам}}^1 \Sigma_{\text{зам}}^1] \Phi_1^1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Эти два уравнения легко сводятся к одному уравнению диффузионного типа

$$-D_1 \frac{d^2 \Phi_0^1}{dx^2} + \sum_{\text{ув}}^1 \Phi_0^1 = q^1 \delta(x), \quad (3.44)$$

где коэффициент диффузии нейтронов первой группы

$$D_1 = \frac{1}{3 [\Sigma_{\text{тр}}^1 + \bar{\mu}_{\text{зам}}^1 \Sigma_{\text{зам}}^1]}.$$

В дальнейшем используем обозначение

$$D_i = \frac{1}{3 [\Sigma_{\text{тр}}^i + \bar{\mu}_{\text{зам}}^i \Sigma_{\text{зам}}^i]}. \quad (3.45)$$

Граничные условия для уравнения (3.44) имеют вид

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \Phi_1^1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-D_1 \frac{d\Phi_0^1}{dx} \right] = \frac{q^1}{2}; \quad (3.46)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \Phi_0^1(x) = 0. \quad (3.47)$$

Легко показать, что решение уравнения (3.44) при этих граничных условиях имеет вид (при $x > 0$)

$$\Phi_0^1(x) = \frac{q^1 e^{-k_1 x}}{2k_1 D_1}, \quad (3.48)$$

где собственное число задачи

$$k_1 = \sqrt{\frac{\Sigma_{yb}^1}{D_1}}. \quad (3.49)$$

Используя выражение (3.48), легко получить решение системы (3.43) относительно $\Phi_1^1(x)$:

$$\Phi_1^1(x) = \frac{q^1}{2} e^{-k_1 x}. \quad (3.50)$$

Таким образом, решение односкоростной задачи для бесконечной однородной среды в P_1 -приближении имеет экспоненциальный характер. Для описания экспоненциального спада потока нейтронов в практике расчетов защиты часто используют понятие длины релаксации, являющейся обратной величиной собственного числа k , т. е. $\lambda = \frac{1}{k}$. Следовательно, в P_1 -приближении в односкоростной задаче

$$\lambda = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_{yb}}}. \quad (3.51)$$

Теперь рассмотрим систему уравнений (3.42) для второй группы нейтронов

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1^2}{dx} + \Sigma_{yb}^2 \Phi_0^2 &= (\Sigma_{зам}^1 + W_{in}^{1 \rightarrow 2}) \Phi_0^1 + q^2 \delta(x), \\ \frac{1}{3} \frac{d\Phi_0^1}{dx} + [\Sigma_{tr}^2 + \bar{\mu}_{зам}^2 \Sigma_{зам}^2] \Phi_1^2 &= \bar{\mu}_{зам}^1 \Sigma_{зам}^1 \Phi_1^1. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Эту систему также можно свести к одному уравнению вида

$$\begin{aligned} -D_2 \frac{d^2 \Phi_0^2}{dx^2} + \Sigma_{yb}^2 \Phi_0^2 &= (\Sigma_{зам}^1 + W_{in}^{1 \rightarrow 2}) \Phi_0^1 + q^2 \delta(x) - \\ &- \frac{\bar{\mu}_{зам}^1 \Sigma_{зам}^1}{\Sigma_{tr}^2 + \bar{\mu}_{зам}^2 \Sigma_{зам}^2} \frac{d\Phi_1^1}{dx}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Подставив формулы (3.48) и (3.50) в уравнение (3.53), получим

$$-D_2 \frac{d^2 \Phi_0^2}{dx^2} + \sum_{yB}^2 \Phi_0^2 = x^{1 \rightarrow 2} e^{-k_1 x} + q^2 \delta(x), \quad (3.54)$$

где

$$x^{1 \rightarrow 2} = \frac{q^1 k_1}{2} \left[\frac{\Sigma_{зам}^1 + W_{in}^{1 \rightarrow 2}}{\Sigma_{yB}^1} + \frac{\bar{\mu}_{зам}^{-1} \Sigma_{зам}^1}{\Sigma_{tr}^2 + \bar{\mu}_{зам}^{-2} \Sigma_{зам}^2} \right]. \quad (3.55)$$

Уравнение (3.54) при $k_2 \neq k_1$ имеет следующее решение, подчиняющееся граничному условию типа (3.47):

$$\Phi_0^2(x) = c_2 e^{-k_2 x} + \frac{x^{1 \rightarrow 2}}{D_2} \frac{e^{-k_1 x}}{k_2^2 - k_1^2}, \quad (3.56)$$

где

$$k_2 = \sqrt{\frac{\Sigma_{yB}^2}{D_2}}. \quad (3.57)$$

Соответственно решение системы уравнений (3.52) относительно $\Phi_1^2(x)$ записывается в виде

$$\Phi_1^2(x) = c_2 k_2 D_2 e^{-k_2 x} + \frac{k_1 x^{1 \rightarrow 2}}{k_2^2 - k_1^2} e^{-k_1 x} + \frac{\bar{\mu}_{зам}^{-1} \Sigma_{зам}^1 q_1 e^{-k_1 x}}{2 (\Sigma_{tr}^2 + \bar{\mu}_{зам}^{-2} \Sigma_{зам}^2)}. \quad (3.58)$$

В выражениях (3.56) и (3.58) c_2 — некоторая константа, которую можно определить, используя граничное условие типа (3.46). Решение уравнения (3.54) при $k_1 = k_2$ имеет следующий вид:

$$\Phi_0^2(x) = \left[c_2^1 + \frac{x^{1 \rightarrow 2} x}{2 k_2 D_2} \right] e^{-k_2 x}. \quad (3.59)$$

Для других групп нейтронов решение системы уравнений в P_1 -приближении может быть получено аналогично. В частности, выражение для потока нейтронов i -группы будет содержать слагаемое, пропорциональное

$$\frac{e^{-k_1 x}}{(k_2^2 - k_1^2)(k_3^2 - k_2^2) \dots (k_i^2 - k_{i-1}^2)},$$

слагаемое, пропорциональное

$$\frac{e^{-k_2 x}}{(k_3^2 - k_2^2)(k_4^2 - k_3^2) \dots (k_i^2 - k_{i-1}^2)}, \text{ и др.}$$

Здесь

$$k_i = \sqrt{\frac{\Sigma_{yB}^i}{D_i}}.$$

Теперь рассмотрим частное решение задачи для потока рассеянных нейтронов. Соответствующая система уравнений записывается в виде

$$\frac{d\varphi_1^i}{dx} + \sum_{\text{ув}}^i \varphi_0^i = \sum_{\text{зам}}^{i-1} \varphi_0^{i-1} + \sum_{k=k_0}^{i-1} \varphi_0^k W_{in}^{k \rightarrow i} + Q_0^i, \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d\varphi_0^i}{dx} + [\sum_{\text{тр}}^i + \bar{\mu}_{\text{зам}}^i \sum_{\text{зам}}^i] \varphi_1^i = \bar{\mu}_{\text{зам}}^{i-1} \sum_{\text{зам}}^{i-1} \varphi_1^{i-1} + Q_1^i.$$

Согласно выражению (3.8), угловой поток нерассеянных нейтронов в однородной среде для случая плоского изотропного источника

$$q^i(x, u) = \frac{1}{2} q^i \delta(x)$$

имеет следующую форму (при $x > 0$);

$$\psi^i(x, \mu) = \begin{cases} \frac{q^i}{2\mu} \exp\left[-\frac{\Sigma^i x}{\mu}\right] & \text{при } 0 \leq \mu \leq 1, \\ 0 & \text{при } -1 \leq \mu \leq 0. \end{cases} \quad (3.61)$$

Строго говоря, в системе (3.60) групповое сечение Σ^i зависит от μ (см. гл. II, § 1). Однако здесь угловой зависимостью $\Sigma^i(\mu)$ мы пренебрегаем.

Из выражения (3.61) легко получить выражения для интегрального потока и тока рассеянных нейтронов:

$$\psi_0^i(x) = \frac{q^i}{2} E_1(\Sigma^i | x |),$$

$$\psi_1^i(x) = \frac{q^i}{2} E_2(\Sigma^i | x |),$$

где $E_n(x) = \int_{-1}^{\infty} \frac{dt}{t^n} e^{-xt} = x^{n-1} \int_x^{\infty} \frac{dte^{-t}}{t}$.

Так как по определению

$$Q_i(x, u) = \int \psi_i(x, u') W_i(x, u' \rightarrow u) du', \quad (3.62)$$

то групповое значение нулевой и первой гармоник функции, описывающей распределение однократно рассеянных нейтронов, запишется в виде

$$Q_0^i(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^i E_1(\Sigma^k | x |) W_0^{k \rightarrow i} q^k;$$

$$Q_1^i(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^i E_2(\Sigma^k | x |) W_1^{k \rightarrow i} q^k.$$

Рассмотрим систему уравнений (3.60) для первой группы нейтронов ($i=1$). Эта система может быть сведена к одному уравнению

$$-D_1 \frac{d^2 \Phi_0^1}{dx^2} + \sum_{yb}^1 \Phi_0^1 = Q_0^1 - \frac{1}{\Sigma_{tr}^1 + \bar{\mu}_{зам}^1 \Sigma_{зам}^1} \frac{dQ_1^1}{dx}, \quad (3.63)$$

где

$$Q_0^1(x) = \frac{1}{2} E_1(\Sigma^1 | x |) W_0^{1 \rightarrow 1} q^1; \quad Q_1^1(x) = \frac{1}{2} E_2(\Sigma^1 | x |) W_1^{1 \rightarrow 1} q^1.$$

С учетом того, что $\frac{dE_2(x)}{dx} = -E_1(x)$, уравнение (3.63) можно преобразовать:

$$-D_1 \frac{d^2 \Phi_0^1}{dx^2} + \sum_{yb}^1 \Phi_0^1 = A E_1(\Sigma^1 | x |), \quad (3.64)$$

где $A = \frac{a^1}{2} \left(W_0^{1 \rightarrow 1} + \frac{W_1^{1 \rightarrow 1} \Sigma^1}{\Sigma_{tr}^1 + \bar{\mu}_{зам}^1 \Sigma_{зам}^1} \right).$

Легко видеть, что (3.64) — это диффузионное уравнение с распределенным источником. Решение этого уравнения для δ -образного источника имеет вид типа (3.48), а именно

$$G_0(x - x') = \frac{e^{-k_1 |x - x'|}}{2k_1 D_1}. \quad (3.65)$$

Отсюда решение уравнения (3.63) будет иметь вид

$$\Phi_0^1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k_1 |x - x'|}}{2k_1 D_1} A E_1(\Sigma^1 | x' |) dx'. \quad (3.66)$$

Удобно разбить интервал интегрирования на три области:

- а) $-\infty < x' \leq 0$, где $|x - x'| = x - x'$ при $x \geq x'$;
- б) $0 \leq x' \leq x$, где $|x - x'| = x - x'$ при $x \geq x'$;
- в) $x \leq x' < \infty$, где $|x - x'| = x' - x$ при $x \leq x'$.

Введем обозначения:

$$I_1(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-k_1(x-x')} E_1(\Sigma^1 | x' |) dx';$$

$$I_2(x) = \int_0^x e^{-k_1(x-x')} E_1(\Sigma^1 | x' |) dx';$$

$$I_3(x) = \int_x^{\infty} e^{-k_1(x'-x)} E_1(\Sigma^1 | x' |) dx'.$$

Тогда полное решение имеет вид

$$\varphi_0^1(x) = \frac{A}{2k_1 D_1} [I_1(|x|) + I_2(|x|) + I_3(|x|)]. \quad (3.67)$$

Интегралы I_1 , I_2 и I_3 равны

$$I_1(x) = \frac{1}{k_1} \ln \left(1 + \frac{k_1}{\Sigma^1} \right) e^{-k_1 x};$$

$$I_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{k_1} \left\{ E_1(\Sigma^1 |x|) - e^{-k_1 x} E_1[(\Sigma^1 - k_1) |x|] - \right. \\ \left. - e^{-k_1 x} \ln \left| 1 - \frac{k_1}{\Sigma^1} \right| \right\} & \text{при } \Sigma^1 \neq k_1; \\ \frac{1}{k_1} \{ e^{k_1 x} E_1(\Sigma^1 |x|) + \ln \Sigma^1 |x| + \\ + 0,5772 \} e^{k_1 x} & \text{при } \Sigma^1 = k_1; \end{cases}$$

$$I_3(x) = \frac{1}{k_1} \{ E_1(\Sigma^1 |x|) - e^{-k_1 x} E_1[(\Sigma^1 + k_1) |x|] \}.$$

Окончательно полное решение можно записать следующим образом (при $\Sigma^1 \neq k_1$):

$$\varphi_0^1(x) = \frac{A}{2k_1^2 D_1} \left\{ \ln \left(\frac{\Sigma^1 + k_1}{|\Sigma^1 - k_1|} \right) e^{-k_1 |x|} + 2E_1(\Sigma^1 |x|) - \right. \\ \left. - e^{-k_1 |x|} E_1[(\Sigma^1 - k_1) |x|] - e^{k_1 |x|} E_1[(\Sigma^1 + k_1) |x|] \right\}. \quad (3.68)$$

Так как для больших значений x

$$E_1(\pm kx) = \frac{e^{\mp kx}}{\pm kx} \left[1 \mp \frac{1}{kx} + \frac{2!}{(kx)^2} \mp \frac{3!}{(kx)^3} + \dots \right],$$

то асимптотическое решение (вдали от источника) имеет следующий вид:

$$\varphi_{0,ac}^1(x) = \frac{A}{2k_1^2 D_1} \ln \left| \frac{\Sigma^1 + k_1}{\Sigma^1 - k_1} \right| e^{-k_1 |x|} \quad \text{при } k_1 < \Sigma^1. \quad (3.69)$$

Решение для остальных групп можно получить аналогичным образом.

В P_1 -приближении метода сферических гармоник угловое распределение нейтронов описывается первыми двумя членами разложения по полиномам Лежандра, что приводит к весьма грубой аппроксимации этого распределения. Поэтому P_1 -приближение может быть использовано для расчета пространственно-энергетического распределения тока и потока нейтронов только в тех случаях, когда угловое распределение нейтронов близко к изотропному. В практике многогрупповых расчетов защиты подобная ситуация встречается при рассмотрении переноса замедляющихся нейтронов, т. е. нейтронов, предвари-

тельно испытывавших несколько столкновений с ядрами среды. При этом P_1 -приближение должно обеспечивать удовлетворительную точность лишь на расстояниях, превышающих несколько длин свободного пробега от границ, разделяющих среды с различными физическими свойствами. С другой стороны, при глубоких проникновениях, т. е. вдали от внешних источников, использование P_1 -приближения возможно, если заранее известно пространственное распределение проникающей компоненты энергетического спектра нейтронов, плотность столкновения которых служит источником для замедляющихся нейтронов. Более подробно об этом сказано в гл. VI.

§ 4. ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим в рамках P_1 -приближения перенос нейтронов в среде, состоящей из одних тяжелых ядер. Используя выражение (3.39), запишем второе из уравнений (3.34) следующим образом:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi_0(x, u)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi(x, u) = \int_{u-r}^u \Sigma_s(x, u) f_s(u', u-u') \bar{\mu}_0(u-u') \Phi_1(x, u') du' + q_1(x, u). \quad (3.70)$$

Для тяжелых ядер r мало, и поэтому в уравнении (3.70) можно вынести $\Sigma_s(x, u') \Phi_1(x, u')$ из-под знака интегрирования при $u'=u$, а также пренебречь изменением анизотропии упругого рассеяния, т. е. зависимостью функции f_s от u' , на интервале $(u-r) \div u$. Тогда, учитывая, что средний косинус углов упругого рассеяния равен

$$\bar{\mu}_0(u) = \int_{u-r}^u \mu_0(u-u') f_s(u-u') du', \quad (3.71)$$

получим

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi_0(x, u)}{\partial u} + \Sigma_{tr}(u) \Phi_1(x, u) = q_1(x, u), \quad (3.72)$$

где $\Sigma_{tr}(u) = \Sigma(u) - \bar{\mu}_0(u) \Sigma_s(u)$ — транспортное сечение. Отметим, что уравнение (3.72) можно получить из второго уравнения системы (3.28), если положить $l=1$ и $\Phi_2=0$.

Переход от уравнения (3.70) к уравнению (3.72) фактически означает нарушение корреляции между углом рассеяния и потерей энергии. В рамках P_1 -приближения в среде, состоящей из одних тяжелых ядер, такое нарушение не должно играть существенной роли с точки зрения описания переноса нейтронов (подробнее см. § 2, гл. II).

Из уравнения (3.72) следует выражение, определяющее энергетическую зависимость тока нейтронов:

$$\Phi_1(x, u) = -\frac{1}{3\Sigma_{tr}(x, u)} \frac{\partial \Phi_0(x, u)}{\partial x} + \frac{a_1(x, u)}{\Sigma_{tr}(x, u)}. \quad (3.73)$$

Если пренебречь источником $q_1(x, u)$, то вместо выражения (3.73) получим закон Фика для нейтронов с летаргией u

$$\Phi_1(x, u) = -\frac{1}{3\Sigma_{tr}(x, u)} \frac{\partial \Phi_0(x, u)}{\partial x}. \quad (3.74)$$

Как обычно, коэффициент пропорциональности в выражении (3.74) назовем коэффициентом диффузии.

$$D(x, u) = \frac{1}{3\Sigma_{tr}(x, u)}. \quad (3.75)$$

В силу сделанных ранее допущений, приводящих к нарушению однозначной связи между углом рассеяния и потерей энергии, соотношение (3.74) является приближенным даже в том случае, когда угловой спектр нейтронов хорошо аппроксимируется первыми двумя членами в разложении по полиномам Лежандра. Поэтому $\Phi_1(x, u)$ в соотношении (3.74) следует понимать лишь как ток нейтронов с летаргией, лежащей в интервале $(u - r) \div u$.

Подставим соотношение (3.74) в первое уравнение (3.34). В результате получим уравнение диффузионного типа для $\Phi_0(x, u)$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} D(x, u) \frac{\partial \Phi_0(x, u)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \Phi_0(x, u) = \\ = \int \Phi_0(x, u') W_0(x, u' \rightarrow u) du' + q_0(x, u) \end{aligned} \quad (3.76)$$

или для однородной среды

$$\begin{aligned} -D(u) \frac{\partial^2 \Phi_0(x, u)}{\partial x^2} + \Sigma(u) \Phi_0(x, u) = \int \Phi_0(x, u') W_0(u' \rightarrow u) du + \\ + q_0(x, u). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Граничные условия для функции $\Phi_0(x, u)$ можно получить из условий (3.35а), подставив в них соотношение (3.74)

$$\begin{aligned} \Phi_0(0, u) - 2D(x, u) \frac{\partial \Phi_0(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 2I; \\ \Phi_0(\delta, u) + 2D(x, u) \frac{\partial \Phi_0(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=\delta} &= 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Если рассматриваемая среда является многослойной, то на границах сред с различными физическими свойствами должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned} \Phi'_0(x, u) - 2D'(x, u) \frac{\partial \Phi'_0(x, u)}{\partial x} &= \Phi''_0(x, u) - 2D''(x, u) \frac{\partial \Phi''_0(x, u)}{\partial x}; \\ \Phi'_0(x, u) + 2D'(x, u) \frac{\partial \Phi'_0(x, u)}{\partial x} &= \\ &= \Phi''_0(x, u) + 2D''(x, u) \frac{\partial \Phi''_0(x, u)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.79)$$

(штрихи означают принадлежность к различным средам). После сложения и вычитания равенств (3.79) получаем

$$\begin{aligned} \Phi'_0(x, u) &= \Phi''_0(x, u); \\ D'(x, u) \frac{\partial \Phi'_0(x, u)}{\partial x} &= D''(x, u) \frac{\partial \Phi''_0(x, u)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Соотношения (3.80) означают непрерывность потока и тока нейтронов на границах сред.

Если уравнения (3.76) и (3.77) записываются для потока рассеянных нейтронов $\varphi_0(x, u)$, то функция $q_0(x, u)$ должна быть заменена на функцию $Q_0(x, u)$, описывающую распределение плотности столкновений с ядрами среды нейтронов, попавших в точку x в результате прямых пролетов от внешних источников. Согласно формуле (3.62),

$$Q_0(x, u) = \int \psi_0(x, u') W_0(x, u' \rightarrow u) du', \quad (3.81)$$

где $\psi_0(x, u')$ — интегральный поток нейтронов, не испытавших столкновений с ядрами среды. В соответствии с формулой (3.8)

$$\psi_0(x, u) = \int_0^1 f(u, \mu) e^{-\frac{y(x, u)}{\mu}} d\mu. \quad (3.82)$$

Здесь

$$y(x, u) = \int_0^x \Sigma(x', u) dx'.$$

Угловая зависимость функции $f(u, \mu)$, описывающей внешние источники на границе рассматриваемой среды, практически всегда может быть представлена в виде конечного степенного ряда

$$f(u, \mu) = \sum_n A_n(u) \mu^n.$$

Поэтому поток нерассеянных нейтронов $\psi_0(x, u)$ выражается через интегральные экспоненты.

$$\psi_0(x, u) = \sum_n A_n(u) E_n[y(x, u)].$$

Здесь

$$E_n(t) = t^{n-1} \int_t^\infty \frac{e^{-z}}{z^n} dz.$$

Соответствующим образом записывается и функция источников. Согласно выражениям (3.39) и (3.81),

$$Q_0(x, u) = \int [\Sigma_s(x, u') f_s(u-u') + \Sigma_{in}(x, u') f_{in}(u', u-u')] \times \\ \times \sum_n A_n(u') E_n(y(x, u')) du'.$$

В частности, когда энергия нейтронов, попадающих в среду извне, лежит ниже порога неупругого рассеяния,

$$Q_0(x, u) = \frac{(M+1)^2}{4M} \int_{u-r}^u \Sigma_s(x, u') e^{-(u-u')} \gamma(u', u-u- \\ -u') \sum_n A_n(u') E_n[y(x, u')] du'.$$

Если упругое рассеяние изотропно в системе центра инерции ($\gamma \equiv 1$), а сечение $\Sigma_s(x, u)$ и функции $A_n(u)$ слабо меняются на интервале $(u-r) \div u$, то

$$Q_0(x, u) = \Sigma_s(x, u) \psi_0(x, u) = \Sigma_s(x, u) \sum_n A_n(u) E_n[y(x, u)]. \quad (3.83)$$

Выражение (3.83) может использоваться лишь в тех случаях, когда можно пренебречь изменением энергии нейтронов в первом столкновении, т. е. при рассеянии на тяжелых ядрах нейтронов с энергией ниже порога неупругого рассеяния.

Перейдем к многогрупповому приближению для уравнения (3.76). С этой целью проинтегрируем первое уравнение (3.34) и уравнение (3.72) по переменной u в интервале $u_{i-1} \div u_i$. Проведя те же преобразования, что и при выводе уравнения (3.76), получим

$$-\frac{d}{dx} D^i(x) \frac{d\Phi_0^i(x)}{dx} + \sum_0^i(x) \Phi_0^i(x) = \\ = \sum_{k=k_0}^i \Phi_0^k(x) W_0^{k \rightarrow i}(x) + q_0^i(x). \quad (3.84)$$

Групповые константы, входящие в уравнение (3.84), равны

$$\Sigma_0^i(x) = \frac{1}{\Phi_0^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_0(x, u) \Phi_0(x, u) du;$$

$$W_0^{k \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_0^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_0(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_0(x, u' \rightarrow u) du. \quad (3.85)$$

Групповое значение коэффициента диффузии в уравнении (3.84)

$$D^i(x) = \frac{1}{3\Sigma_{tr}^i(x)}. \quad (3.86)$$

Среднегрупповое транспортное сечение равно

$$\Sigma_{tr}^i(x) = \frac{1}{\Phi_1^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_{tr}(x, u) \Phi_1(x, u) du$$

или, если использовать соотношение (3.74),

$$\frac{1}{\Sigma_{tr}^i(x)} = \frac{1}{\frac{d}{dx} \Phi_0^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{1}{\Sigma_{tr}(x, u)} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_0(x, u) du. \quad (3.87)$$

Здесь необходимо сделать одно замечание относительно различных способов усреднения транспортного сечения. Обычно при определении групповых констант в качестве внутригруппового спектра используется некоторая функция $f(u)$, не зависящая от x . Как отмечается в работе [6], эта функция фактически с одинаковой степенью приближения описывает энергетический спектр потока и тока нейтронов, т. е. $\Phi_0(u)$ и $\Phi_1(u)$. Поэтому, вообще говоря, ни одному из двух способов определения среднегруппового транспортного сечения

$$\Sigma_{tr}^i(x) = \frac{1}{f^i} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_{tr}(x, u) f(u) du, \quad (3.88)$$

$$\frac{1}{\Sigma_{tr}^i(x)} = \frac{1}{f^i} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{1}{\Sigma_{tr}(x, u)} f(u) du \quad (3.89)$$

нельзя отдать предпочтения, если не принимать во внимание конкретные условия рассматриваемой задачи. Например, в работе [7] указывается, что при транспортной аппроксимации индикатрисы усреднение (3.89) обеспечивает правильное зна-

чение среднего квадрата расстояния от места рождения нейтрона до места его поглощения. Более подробно вопрос о способе усреднения транспортного сечения обсуждается в работе [8].

Уравнение (3.77) в многогрупповом приближении можно получить непосредственно, проинтегрировав (3.77) по u в пределах $(u_{i-1} \div u_i)$:

$$\begin{aligned} & -D^i(x) \frac{d^2 \Phi_0^i(x)}{dx^2} + \sum_0^i(x) \Phi_0^i(x) = \\ & = \sum_{k=k_0}^i \Phi_0^k(x) W_0^{k \rightarrow i}(x) + q_0^i(x). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Групповые константы, входящие в уравнение (3.90):

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_0^i(x) &= \frac{1}{\Phi_0^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_0(u) \Phi_0(x, u) du; \\ W_0^{k \rightarrow i}(x) &= \frac{1}{\Phi_0^k(x)} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_0(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W_0(u' \rightarrow u) du; \\ D^i(x) &\approx \frac{1}{3\Phi_0^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{1}{\Sigma_{tr}(u)} \Phi_0(x, u) du. \end{aligned} \right\} (3.91)$$

Последнее соотношение справедливо в предположении, что $D^i(x)$, будучи дробным функционалом от потока, является слабой функцией x . Уравнения (3.84) и (3.90) определяют групповые значения интегрального потока $\Phi_0^i(x)$. Граничные условия для функции $\Phi_0(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_0^i(0) - 2D^i(x) \frac{d\Phi_0^i}{dx} \Big|_{x=0} &= f_0^i + 2f_1^i; \\ \Phi_0^i(\delta) + 2D^i(x) \frac{d\Phi_0^i}{dx} \Big|_{x=\delta} &= 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Уравнения (3.84) и (3.90) с константами взаимодействия (3.85) и (3.91) являются многогрупповыми уравнениями в диффузионном приближении, записанными для плоской геометрии.

Аналогичны уравнения и для сферически симметричной геометрии

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dr} D^i(r) \frac{d\Phi_0^i(r)}{dr} + D^i(r) \frac{2}{r} \frac{d\Phi_0^i(r)}{dr} + \sum_0^i(r) \Phi_0^i(r) = \\ & = \sum_{k=k_0}^i \Phi_0^k(r) W_0^{k \rightarrow i}(r) + q_0^i(r) \end{aligned}$$

или для однородной среды

$$-D^i(r) \left[\frac{d^2 \Phi_0^i(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_0^i(r)}{dr} \right] + \Sigma_0^i(r) \Phi_0^i(r) = \\ = \sum_{k=R_0}^i \Phi_0^k(r) W_0^{k \rightarrow i}(r) + q_0^i(r).$$

Групповые константы в этих уравнениях определяются выражениями, аналогичными (3.85), (3.86), (3.91).

Вышеприведенные соображения относительно справедливости закона Фика для замедляющихся нейтронов ограничивают область применимости уравнений (3.84) и (3.90). Строго говоря, эти уравнения могут использоваться для многогрупповых расчетов только при условии, что максимальная потеря энергии нейтроном при упругом рассеянии много меньше ширины энергетической группы, т. е. при условии

$$r \ll \Delta u_i. \quad (3.92a)$$

Это условие означает, что все члены матрицы упругих переходов $W_{0s}^{k \rightarrow i}$ равны нулю, за исключением диагональных и преддиагональных членов, описывающих переходы из соседней группы, и в пределах собственной группы.

Согласно формулам (3.41),

$$W_{0s}^{i-1 \rightarrow i}(x) = \Sigma_{\text{зам}}^{i-1}(x); \\ W_{0s}^{i \rightarrow i}(x) = \Sigma_{0s}^i(x) - \Sigma_{\text{зам}}^i(x). \quad (3.93)$$

Используя формулы (3.93), уравнение (3.90) можно записать в виде

$$-D^i(x) \frac{d^2 \Phi_0^i(x)}{dx^2} + \Sigma_{\text{ув}}^i(x) \Phi_0^i(x) = \Sigma_{\text{зам}}^{i-1}(x) \Phi_0^{i-1}(x) + \\ + \sum_{k=k_0}^i \Phi_0^k(x) W_{in}^{k \rightarrow i}(x) + q_0^i(x). \quad (3.94)$$

Аналогичным образом записывается и уравнение (3.84). В уравнении (3.94) $\Sigma_{\text{зам}}^{i-1}$ — сечение замедления, определяющее переход нейтронов из $(i-1)$ -й группы в i -ю в результате упругого рассеяния; $\Sigma_{\text{ув}}^i$ — сечение увода, определяющее выбывание нейтронов из i -й группы в результате поглощения, упругого и неупругого рассеяния:

$$\Sigma_{\text{ув}}^i(x) = \Sigma_c^i(x) + \Sigma_{\text{зам}}^i(x) + \Sigma_{in}^i - \Sigma_{in}^{i \rightarrow i}.$$

Здесь $\Sigma_{in}^{i \rightarrow i}$ — диагональные члены матрицы $W_{in}^{k \rightarrow i}$, описывающие неупругие переходы внутри групп.

Диффузионное уравнение (3.94) соответствует уравнениям P_1 -приближения (3.42). Последние сводятся к уравнению (3.94) при условии

$$\bar{\mu}_{\text{зам}}^i \Sigma_{\text{зам}}^i \Phi_1^i \approx \bar{\mu}_{\text{зам}}^{i-1} \Sigma_{\text{зам}}^{i-1} \Phi_1^{i-1} = 0, \quad (3.95)$$

что фактически означает пренебрежение однозначной связью между углом рассеяния и потерей энергии в рамках P_1 -приближения.

Уравнение (3.94) можно получить и несколько иным путем, дающим более ясное представление о природе сделанных выше приближений. С этой целью вернемся к уравнению (3.77) для однородной среды, записав его следующим образом:

$$-D(u) \frac{\partial^2 \Phi_0(x, u)}{\partial x^2} + \sum(u) \Phi_0(x, u) = \int_{u-r}^u \sum_s(u') \Phi_0(x, u') f_s(u', u - u') du' + \int \Phi_0(x, u') W_{in}(u' \rightarrow u) du' + q_0(x, u). \quad (3.96)$$

Разложим плотность столкновений $\sum_s \Phi_0$ при летаргии u' в ряд по степеням $(u - u')$:

$$\sum_s(u') \Phi_0(u') = \sum_s(u) \Phi_0(x, u) + \left. \frac{\partial \sum_s(u') \Phi_0(x, u')}{\partial u'} \right|_{u'=u} (u' - u) + \dots \quad (3.97)$$

При упругом рассеянии на тяжелых ядрах плотность столкновений $\sum_s(u') \Phi_0(x, u')$ должна удовлетворительно аппроксимироваться линейной функцией u' на интервале $(u - r) \div u$. Поэтому в разложении (3.97) можно сохранить лишь первые два члена. Подставив разложение (3.97) в уравнение (3.96), после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} & -D(u) \frac{\partial^2 \Phi_0(x, u)}{\partial x^2} + [\sum(u) - \sum_s(u)] \Phi_0(x, u) = \\ & = -\xi(u) \frac{\partial \sum_s(u) \Phi_0(x, u)}{\partial u} + \int \Phi_0(x, u') W_{in}(u' \rightarrow u) du' + q_0(x, u). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Коэффициент $\xi(u)$ в уравнении (3.98) равен

$$\xi(u) = \int_{u-r}^u (u - u') f_s(u', u - u') du'. \quad (3.99)$$

Если рассеяние нейтронов сферически изотропно в системе центра инерции, то выражение (3.99) определяет среднюю логарифмическую потерю энергии на одно столкновение:

$$\xi = \int_0^r u f_s(u) du = \frac{(M+1)^2}{4M} \int_0^r u e^{-u} du = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha.$$

$$\text{Здесь } \alpha = \left(\frac{M-1}{M+1} \right)^2.$$

Проинтегрируем уравнение (3.98) по u в интервале $u_{i-1} \div u_i$. Введя обозначения

$$\sum_{\text{зам}}^i(x) = \xi \sum_s(u_i) \frac{\Phi_0(x, u_i)}{\Phi_0^i(x)},$$

$$\sum_{\text{зам}}^{i-1}(x) = \xi \sum_s(u_{i-1}) \frac{\Phi_0(x, u_{i-1})}{\Phi_0^{i-1}(x)},$$

получим многогрупповое уравнение

$$\begin{aligned} -D^i(x) \frac{d^2 \Phi_0^i(x)}{dx^2} + \sum_{\text{ув}}^i(x) \Phi_0^i(x) &= \sum_{\text{зам}}^{i-1}(x) \Phi_0^{i-1}(x) + \\ &+ \sum_{k=k_0}^{i-1} \Phi_0^k(x) W_{in}^{k \rightarrow i} + q_0^i(x), \end{aligned}$$

совпадающее с уравнением (3.94). Величина $\xi \sum_s(u) \Phi_0(x, u)$ определяет плотность замедления нейтронов в возрастном приближении. Введя обозначения

$$q^i(x) = \xi \sum_s(u_i) \Phi_0(x, u_i);$$

$$q^{i-1}(x) = \xi \sum_s(u_{i-1}) \Phi_0(x, u_{i-1}),$$

запишем полученное уравнение для области энергий, лежащей ниже порога неупругого рассеяния:

$$-D^i(x) \frac{d^2 \Phi_0^i(x)}{dx^2} + \sum_c^i(x) \Phi_0^i(x) = \Delta q^i(x) + q_0^i(x). \quad (3.100)$$

Здесь $\sum_c^i(x)$ — сечение поглощения в i -й группе; $\Delta q^i(x) = q^{i-1}(x) - q^i(x)$ определяет разность между поступлением нейтронов в i -ю группу и убылью из нее в результате упругого замедления.

Нередко модель непрерывного замедления используется и в области высоких энергий, где существенную роль играет неупругое рассеяние. В этом случае сечение замедления $\sum'_{\text{зам}}$ определяется следующим образом*:

$$\sum'_{\text{зам}} \approx \xi \sum_s + \xi_{in} \sum_{in}.$$

По аналогии с ξ величина ξ_{in} может быть названа средней логарифмической потерей энергии при неупругом рассеянии:

$$\xi_{in} = \int u f_{in}(u) du.$$

В области дискретных уровней возбуждения ядра-мишени

$$\xi_{in} = \frac{1}{\sigma_{in}} \sum_R \sigma_{in}^R \ln \frac{E}{E - E_R}.$$

* Система групповых констант, приведенных в Приложении III, содержит как $\sigma_{\text{зам}}$, так и $\sigma'_{\text{зам}}$.

Здесь σ_{in}^R — сечение возбуждения R -го уровня ядра-мишени; E_R — энергия возбуждения R -го уровня.

Уравнение, аналогичное (3.100), но с учетом неупругого замедления записывается в виде

$$-D^i(x) \frac{d^2 \Phi_0^i}{dx^2} + \sum_c^i \Phi_0^i(x) = \Delta \tilde{q}^i(x) + q_0^i(x). \quad (3.101)$$

Здесь $\Delta \tilde{q}^i = \sum_{\text{зам}}^{i-1} \Phi_0^{i-1} - \sum_{\text{зам}}^i \Phi_0^i$.

Таким образом, уравнения (3.100) и (3.101) можно рассматривать как системы многогрупповых уравнений, записанных в возрастно-диффузионном приближении.

Подведем некоторые итоги. Как уже указывалось ранее, P_1 -приближение метода сферических гармоник может быть использовано для описания переноса нейтронов только в тех случаях, когда угловой спектр нейтронов удовлетворительно аппроксимируется первыми двумя членами разложения по полиномам Лежандра. Диффузионное приближение является частным случаем P_1 -приближения. Для того чтобы два уравнения (3.34), соответствующие P_1 -приближению, сводились к одному уравнению диффузионного типа (3.84) или (3.90), приходится пренебрегать корреляцией между углом рассеяния и потерей энергии. Основанием для подобной операции может служить малое изменение энергии нейтронов в одном акте упругого взаимодействия (неупругое рассеяние считается изотропным).

Таким образом, использование диффузионного приближения для описания переноса нейтронов предполагает выполнение следующих двух условий.

1. Угловое распределение нейтронов должно быть близко к изотропному, что обычно имеет место вдали от внешних источников и границ среды.

2. Среда, в которой исследуется перенос нейтронов, должна состоять из одних тяжелых ядер.

В многогрупповых расчетах защиты диффузионное приближение применяется и в тех случаях, когда приведенные выше условия не выполняются или выполняются не полностью. Чаще всего это объясняется невысокими требованиями, предъявляемыми к точности получаемых результатов, а также простотой применения самого метода, что играет немаловажную роль в практических расчетах защиты.

Примером такого не вполне корректного подхода к задаче может служить метод Герцеля — Селенгута, широко используемый для расчета переноса нейтронов в водородсодержащих средах (смесь ядер тяжелых элементов с ядрами водорода) [9].

Этим методом решается многогрупповая задача с диффузионным приближением внутри группы. Замедление нейтронов на ядрах водорода описывается точно, т. е. без использования

какой-либо аппроксимации энергетической зависимости плотности столкновений. При этом, конечно, пренебрежение корреляцией между углом рассеяния и потерей энергии, присущее диффузионному приближению, остается в силе. Что же касается замедления нейтронов за счет упругого рассеяния на тяжелых ядрах, то оно описывается в возрастном приближении.

Многогрупповое уравнение, соответствующее указанному методу, имеет вид

$$-D^l(x) \frac{d^2 \Phi_0^l(x)}{dx^2} + [\Sigma_{\text{ув}}^i(x) + \Sigma_{\text{ув, H}}^i(x)] \Phi_0^l(x) = \Sigma_{\text{зам}}^{i-1}(x) \Phi_0^{i-1}(x) + \sum_{k=k_0}^{i-1} \Phi_0^k(x) [W_{0, \text{ин}}^{k \rightarrow i} + W_{0, \text{H}}^{k \rightarrow i}] + q_0^i(x),$$

где $\Sigma_{\text{ув}}^i(x)$; $\Sigma_{\text{зам}}^{i-1}(x)$ — сечение увода из i -й группы и сечение замедления в i -ю группу для тяжелых ядер; $\Sigma_{\text{ув, H}}^i(x)$ — сечение увода из i -й группы для водорода; $W_{0, \text{ин}}^{k \rightarrow i}(x)$ — матрица неупругих переходов для тяжелых ядер; $W_{0, \text{H}}^{k \rightarrow i}(x)$ — матрица переходов для водорода.

В приближении (2.5)

$$W_{0, \text{H}}^{k \rightarrow i}(x) = \begin{cases} \Sigma_{0, \text{H}}^i(x) \left[1 - \frac{1}{\Delta u_i} (1 - e^{-\Delta u_i}) \right] & \text{при } k = i; \\ \Sigma_{0, \text{H}}^k(x) \frac{1}{\Delta u_k} (1 - e^{-\Delta u_i}) (1 - e^{-\Delta u_k}) e^{-(u_{i-1} - u_k)} & \text{при } k \neq i. \end{cases}$$

Элементы матрицы $\beta^{k \rightarrow i} = \frac{W_{0, \text{H}}^{k \rightarrow i}(x)}{\Sigma_{0, \text{H}}^k(x)}$ приведены в приложении III.

§ 5. P_2 -ПРИБЛИЖЕНИЕ

Впервые на целесообразность использования четных приближений метода сферических гармоник для решения различного рода задач, связанных с переносом нейтронов, указал Г. Я. Румянцев [10]. В частности, точность решения задачи переноса нейтронов в защите существенно повышается при переходе от P_1 -приближения к P_2 -приближению. При этом угловая зависимость потока описывается суммой трех первых гармоник:

$$\Phi^l(x, \mu) = \frac{1}{2} \Phi_0^l(x) + \frac{3}{2} \mu \Phi_1^l(x) + \frac{5}{2} P_2(\mu) \Phi_2^l(x). \quad (3.102)$$

Уравнения, определяющие решение задачи в P_2 -приближении, легко получить из системы (3.30), положив в третьем уравнении этой системы (при $l=2$) $\frac{d\Phi_3^l}{dx} = 0$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi_1^i(x)}{dx} + \sum_0^i(x) \Phi_0^i(x) &= \sum_{k=k_0}^i \Phi_0^k(x) W_0^{k \rightarrow i}(x) + q_0^i(x), \\ \frac{2}{3} \frac{d\Phi_2^i(x)}{dx} + \frac{1}{3} \frac{d\Phi_0^i(x)}{dx} + \sum_1^i(x) \Phi_1^i(x) &= \sum_{k=k_0}^i \Phi_1^k(x) W_1^{k \rightarrow i}(x) + \\ &+ q_1^i(x), \\ \frac{2}{5} \frac{d\Phi_1^i(x)}{dx} + \sum_2^i(x) \Phi_2^i(x) &= \sum_{k=k_0}^i \Phi_2^k(x) W_2^{k \rightarrow i}(x) + q_2^i(x). \end{aligned} \right\} \quad (3.103)$$

Из последнего уравнения системы (3.103) получим

$$\Phi_2^i(x) = -\frac{2}{5\Sigma_{yв, 2}^i(x)} \frac{d\Phi_1^i(x)}{dx} + \frac{1}{\Sigma_{yв, 2}^i(x)} \sum_{k=k_0}^{i-1} \Phi_2^k(x) W_2^{k \rightarrow i}(x) + \frac{q_2^i(x)}{\Sigma_{yв, 2}^i(x)}. \quad (3.104)$$

Здесь

$$\Sigma_{yв, 2}^i = \Sigma_2^i - W_2^{i \rightarrow i}. \quad (3.105)$$

В дальнейшем $\Sigma_{yв, l}^i = \Sigma_l^i - W_l^{i \rightarrow i}$; $\Sigma_{yв, 0}^i = \Sigma_{yв}^i$; $\Sigma_{yв, 1}^i = \Sigma_{тг}^i$. Исключим из равенства (3.104) производную $\frac{d\Phi_1^i}{dx}$ с помощью первого уравнения системы (3.103)

$$\Phi_2^i(x) = \frac{2}{5} \frac{\Sigma_{yв}^i(x)}{\Sigma_{yв, 2}^i(x)} \Phi_0^i(x) - \frac{2}{5} R^i(x). \quad (3.106)$$

Здесь

$$R^i(x) = \frac{1}{\Sigma_{yв, 2}^i(x)} \left\{ \sum_{k=k_0}^{i-1} \left[\Phi_0^k(x) W_0^{k \rightarrow i}(x) - \frac{5}{2} \Phi_2^k(x) W_2^{k \rightarrow i}(x) \right] + q_0^i(x) - \frac{5}{2} q_2^i(x) \right\}. \quad (3.107)$$

Отметим, что $R^i(x)$ выражается через Φ_0^k и Φ_2^k при $k < i$. Поэтому при рассмотрении переноса нейтронов i -й группы $R^i(x)$ можно считать известной функцией.

Выражение для $\Phi_2^i(x)$ подставим во второе уравнение системы (3.103). Введя обозначение

$$F_0^i(x) = \left[1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{yв}^i(x)}{\Sigma_{yв, 2}^i(x)} \right] \Phi_0^i(x) - \frac{4}{5} R^i(x), \quad (3.108)$$

получим

$$\frac{d\Phi_1^i}{dx} + \sum_0^i(x) \Phi_0^i(x) = \sum_{k=k_0}^i \Phi_0^k(x) W_0^{k-i}(x) + q_0^i(x), \quad (3.109)$$

$$\frac{1}{3} \frac{dF_0^i(x)}{dx} + \sum_1^i(x) \Phi_1^i(x) = \sum_{k=k_0}^i \Phi_1^k(x) W_1^{k-i}(x) + q_1^i(x).$$

Граничные условия в P_2 -приближении можно получить из соотношений (3.19), положив $l=0; 1; 2$ и $m=0$ (при $f(u, \mu)=0$)

$$\Phi_0^i(0) + 2\Phi_1^i(0) + \frac{5}{4} \Phi_2^i(0) = 0,$$

$$-\Phi_0^i(\delta) + 2\Phi_1^i(\delta) - \frac{5}{4} \Phi_2^i(\delta) = 0$$

или, если воспользоваться формулой (3.106),

$$\left[1 + \frac{1}{2} \frac{\Sigma_{y_b}^i(0)}{\Sigma_{y_b, 2}^i(0)} \right] \Phi_0^i(0) + 2\Phi_1^i(0) = -\frac{1}{2} R^i(0), \quad (3.110)$$

$$\left[1 + \frac{1}{2} \frac{\Sigma_{y_b}^i(\delta)}{\Sigma_{y_b, 2}^i(\delta)} \right] \Phi_0^i(\delta) - 2\Phi_1^i(\delta) = \frac{1}{2} R^i(\delta).$$

Легко видеть, что при $\Sigma_{y_b, 2}^i \rightarrow \infty$ [согласно (3.106) это соответствует $\Phi_2^i(x) \rightarrow 0$] система многогрупповых уравнений (3.109) с граничными условиями (3.110) переходит в многогрупповую систему уравнений P_1 -приближения (3.36) с граничными условиями (3.37).

В качестве неизвестных функций будем рассматривать $F_0^i(x)$ и $\Phi_1^i(x)$. Тогда система уравнений (3.109) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1^i(x)}{dx} + \beta^i(x) \Sigma_{y_b}^i(x) F_0^i(x) &= \sum_{k=k_0}^{i-1} \beta^k(x) F_0^k(x) W_0^{k-i}(x) + Q_{\Sigma\Phi\Phi}^i(x), \\ \frac{1}{3} \frac{dF_0^i(x)}{dx} + \Sigma_{tr}^i(x) \Phi_1^i(x) &= \sum_{k=k_0}^{i-1} \Phi_1^k(x) W_1^{k-i}(x) + q_1^i(x). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Здесь

$$\beta^i(x) = \left[1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{y_b}^i(x)}{\Sigma_{y_b, 2}^i(x)} \right]^{-1},$$

$$Q_{\Sigma\Phi\Phi}^i(x) = q_0^i(x) - \frac{4}{5} \left[\Sigma_{y_b}^i(x) \beta^i(x) R^i(x) + \sum_{k=k_0}^{i-1} \beta^k(x) R^k(x) W_0^{k-i}(x) \right]. \quad (3.112)$$

Для каждого значения i можно найти $Q_{\text{эфф}}^i(x)$, используя выражения (3.107) для $R^i(x)$ и известные к моменту рассмотрения i -й группы функции $\Phi_0^k(x)$ и $\Phi_2^k(x)$ при $k < i$.

Последовательность решения системы уравнений (3.111) относительно функций $F_0^i(x)$ и $\Phi_1^i(x)$ такова. При $i=1$ по формуле (3.107) определяем $R^1(x)$, а по формуле (3.112) — $Q_{\text{эфф}}^1(x)$. Используя $Q_{\text{эфф}}^1(x)$, решаем систему уравнений (3.111) относительно $F_0^1(x)$ и $\Phi_1^1(x)$. При $i=2$ по формуле (3.108) определяем $\Phi_0^1(x)$, а по формуле (3.106) — $\Phi_2^1(x)$. С помощью $\Phi_0^1(x)$ и $\Phi_2^1(x)$ находим $R^2(x)$, а значит, и $Q_{\text{эфф}}^2(x)$. Решая после этого систему (3.111), находим $F_0^2(x)$ и $\Phi_1^2(x)$ и т. д.

Таким образом, система из трех уравнений, соответствующая P_2 -приближению метода сферических гармоник, сведена к системе из двух уравнений (3.111). Последняя аналогична системе уравнений, с которыми приходится иметь дело в P_1 -приближении. Поэтому для интегрирования системы уравнений (3.111) можно пользоваться алгоритмами решения задачи в P_1 -приближении.

Граничные условия для функций $\Phi_1^i(x)$ и $F_0^i(x)$ могут быть получены исходя из требования непрерывности на границах сред с различными физическими свойствами тока нейтронов $j(x)$. Это требование вытекает из закона сохранения числа нейтронов. Если непрерывна по x функция

$$j^i(x) = \int \mu \Phi^i(x, \mu) d\mu,$$

то должна быть непрерывна и функция

$$\int \mu P_l(\mu) \Phi^i(x, \mu) d\mu. \quad (3.113)$$

Так как

$$\mu P_l(\mu) = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}(\mu) + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}(\mu),$$

$$\Phi^i(x, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Phi_n^i(x) P_n(\mu),$$

то из непрерывности функции (3.113) следует непрерывность комплекса

$$(l+1)\Phi_{l+1}^i(x) + l\Phi_{l-1}^i(x).$$

Для P_2 -приближения это соответствует требованию непрерывности функций

$$\Phi_1^i(x) \text{ и } 2\Phi_2^i(x) + \Phi_0^i(x).$$

Эти условия равнозначны требованию непрерывности функций $\Phi_1^i(x)$ и $F_0^i(x)$, так как, согласно соотношениям (3.108) и (3.106),

$$\Phi_0^i(x) + 2\Phi_2^i(x) = F_0^i(x).$$

Из условия непрерывности $F_0^i(x)$, в свою очередь, следует, что в P_2 -приближении интегральный поток нейтронов $\Phi_0^i(x)$ испытывает на границе разрыв, величина которого тем больше, чем сильнее различаются ядернофизические свойства граничащих сред.

В случае изотропного источника ($q_1; q_2 \equiv 0$) и изотропии переходов между группами ($W_{1,2}^{k \rightarrow i} \equiv 0$ при $k \neq i$), что означает пренебрежение однозначной связью между углом рассеяния и потерей энергии, систему уравнений (3.111) можно свести к одному уравнению диффузионного типа:

$$-\frac{d}{dx} D^i(x) \frac{dF_0^i(x)}{dx} + \beta^i(x) \sum_{\text{yв}}^i(x) F_0^i(x) = \sum_{k=k_0}^{i-1} \beta^k F_0^k(x) W_0^{k \rightarrow i}(x) + Q_{\text{эфф}}^i(x). \quad (3.114)$$

Здесь

$D^i(x) = \frac{1}{3\Sigma_{\text{yв},1}^i(x)} = \frac{1}{3\Sigma_{\text{тр}}^i(x)}$ — коэффициент диффузии нейтронов i -й энергетической группы в P_1 -приближении. Источники в уравнении (3.114) определяются соотношением (3.112) при

$$R^i(x) = \frac{1}{\Sigma_{\text{тр},2}^i(x)} \left[\sum_{k=k_0}^{i-1} \Phi_0^k(x) W_0^{k \rightarrow i}(x) + q_0^i(x) \right]. \quad (3.115)$$

В выражении (3.115) введено обозначение

$$\Sigma_{\text{тр},2}^i(x) = \Sigma_{\text{yв},2}^i(x).$$

В многогрупповых расчетах переноса нейтронов в P_N -приближении с изотропными переходами между группами ($W_l^{k \rightarrow i} \equiv 0$ при $l \neq 0, k \neq i$) часто вместо $\Sigma_{\text{тр},n}^i$ используется групповое транспортное сечение $\Sigma_{\text{тр}}^i$ (из-за отсутствия данных по $\Sigma_{\text{тр},n}^i$). Фактически это означает применение транспортной аппроксимации индикатрисы рассеяния (3.27). В частности, в случае P_2 -приближения использование соотношения (3.27) позволяет перейти от системы уравнений (3.111) к одному уравнению (3.114), в котором $\Sigma_{\text{yв},2}^i$ заменено на $\Sigma_{\text{тр}}^i$. Следует отметить, что такая замена приводит к завышению величины потока на больших расстояниях от источника в водородсодержащей среде.

Для области среды с постоянными ядернофизическими свойствами при использовании универсальных групповых констант уравнение (3.114) записывается в виде

$$-\frac{d^2 F_0^i(x)}{dx^2} + \frac{\beta^i}{(L_1^i)^2} F_0^i(x) = \frac{1}{D^i} \left[\sum_{k=k_0}^{i-1} \beta^k F_0^k W_0^{k \rightarrow i} + Q_{\text{эфф}}^i(x) \right]. \quad (3.116)$$

Здесь $L_1^i = \left(\frac{1}{3\Sigma_{\text{тр}}^i \Sigma_{\text{yb}}^i} \right)^{1/2}$ — длина диффузии нейтронов i -й группы в P_1 -приближении. (3.116a)

Введем обозначение

$$L_2^i = \frac{1}{\sqrt{\beta^i}} L_1^i = \left(\frac{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{\text{yb}}^i}{\Sigma_{\text{тр}, 2}^i}}{3\Sigma_{\text{тр}}^i \Sigma_{\text{yb}}^i} \right)^{1/2}. \quad (3.117)$$

Величина L_2^i может рассматриваться как длина диффузии нейтронов i -й группы в P_2 -приближении. Отсюда следует, что длина диффузии в P_2 -приближении отличается от аналогичной величины в P_1 -приближении множителем $\frac{1}{\sqrt{\beta^i}}$.

Из сравнения уравнения (3.116) с уравнением диффузии (3.90) видно, что учет анизотропии потока нейтронов в P_2 -приближении приводит к уточнению длины диффузии и источников, описывающих переходы нейтронов из верхних энергетических групп.

Рассмотрим теперь одногрупповую или, что то же самое, односкоростную задачу. Получим в P_2 -приближении распределение полного потока нейтронов в бесконечной однородной среде от плоского источника нейтронов $q_0(x) = q\delta(x)$. В этом случае в соответствии с уравнением (3.116) уравнение для $F_0(x)$ записывается в виде

$$-\frac{d^2 F_0(x)}{dx^2} + \frac{\beta}{L_1^2} F_0(x) = \frac{1}{D} q_{\text{эфф}}(x). \quad (3.118)$$

Согласно выражениям (3.112) и (3.115),

$$q_{\text{эфф}}(x) = q\delta(x) - \frac{4}{5} \Sigma_c \beta R(x) = \beta q\delta(x). \quad (3.119)$$

Здесь $\Sigma_c = \Sigma_{\text{yb}}$ — сечение поглощения. Подставив выражение (3.119) в уравнение (3.118), получим

$$-D^* \frac{d^2 F_0(x)}{dx^2} + \Sigma_c F_0(x) = q\delta(x). \quad (3.120)$$

Здесь $D^* = \frac{D}{\beta}$ — коэффициент диффузии нейтронов в P_2 -приближении. Решение уравнения (3.120) общеизвестно (см., например, работу [1]):

$$F_0(x) = qL_2 \frac{e^{-x/L_2}}{2D^*}.$$

Так как по определению

$$F_0(x) = \frac{1}{\beta} \Phi_0 - \frac{4}{5} \frac{q}{\Sigma_{tr, 2}} \delta(x),$$

то для полного потока нейтронов $\Phi_0(x)$ получаем следующее выражение:

$$\Phi_0(x) = q\beta \left[\frac{L_1 \beta^{1/2}}{2D} e^{-\frac{x\beta^{1/2}}{L_1}} + \frac{4}{5} \frac{1}{\Sigma_{tr, 2}} \delta(x) \right]. \quad (3.121)$$

Здесь $\Sigma_{tr, 2} = \Sigma - \Sigma_s \chi_2$; χ_2 — второй коэффициент разложения по $P_l(\mu)$ угловой зависимости дифференциального сечения рассеяния.

Таким образом, переход от P_1 - к P_2 -приближению приводит не только к уточнению длины диффузии, но и к появлению для Φ_0 второго слагаемого, отличного от нуля, в месте расположения источника. Легко видеть, что

$$\Sigma_c \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(x) dx = q,$$

т. е. второе слагаемое в выражении (3.121) обеспечивает баланс нейтронов при длине диффузии $\frac{1}{\sqrt{\beta}} L_1$.

§ 6. P_N -ПРИБЛИЖЕНИЕ

В P_N -приближении угловая зависимость потока нейтронов описывается суммой первых $(N+1)$ гармоник (включая нулевую):

$$\Phi^i(x, \mu) = \sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{2} \Phi_l^i(x) P_l(\mu). \quad (3.122)$$

Система многогрупповых уравнений P_N -приближения для гармоник потока нейтронов $\Phi_l^i(x)$ получается из первых $(N+1)$

уравнений бесконечной системы (3.30), причем в последнем из них приравнивается нулю производная $\frac{d\Phi_{N+1}^l}{dx}$:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{l+1}{2l+1} \cdot \frac{d\Phi_{l+1}^l}{dx} + \frac{l}{2l+1} \cdot \frac{d\Phi_{l-1}^l}{dx} + \sum_{i=1}^l (x) \Phi_i^l(x) = \\ & = \sum_{k=k_0}^i \Phi_i^k(x) W_i^{k \rightarrow l}(x) + q_i^l(x) \text{ при } l \leq N-1, \\ & \frac{N}{2N+1} \cdot \frac{d\Phi_{N-1}^l}{dx} + \sum_N^l (x) \Phi_N^l(x) = \sum_{k=k_0}^i \Phi_N^k(x) W_N^{k \rightarrow l}(x) + \\ & \quad + q_N^l(x). \end{aligned} \right\} (3.123)$$

При использовании обозначения (3.105) эту систему можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{l+1}{2l+1} \frac{d\Phi_{l+1}^l}{dx} + \frac{l+1}{2l+1} \frac{d\Phi_{l-1}^l(x)}{dx} + \sum_{\Sigma_{\text{yв}, l}^i} (x) \Phi_i^l(x) = \\ & = \sum_{k=k_0}^{i-1} \Phi_i^k(x) W_i^{k \rightarrow l}(x) + q_i^l(x), \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\frac{N}{2N+1} \frac{d\Phi_{N-1}^l}{dx} + \sum_{\Sigma_{\text{yв}, N}^l} \Phi_N^l(x) = \sum_{k=k_0}^{i-1} \Phi_N^k(x) W_N^{k \rightarrow l}(x) + q_N^l(x).$$

Рассмотрим решение однородной системы уравнений, соответствующей системе (3.124):

$$\begin{aligned} & \frac{l+1}{2l+1} \frac{d\Phi_{l+1}^l}{dx} + \frac{l}{2l+1} \frac{d\Phi_{l-1}^l}{dx} + \sum_{\Sigma_{\text{yв}, l}^l} (x) \Phi_i^l(x) = 0, \\ & \frac{N}{2N+1} \frac{d\Phi_{N-1}^l}{dx} + \sum_{\Sigma_{\text{yв}, N}^l} \Phi_N^l = 0. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Как известно из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решение такой системы в каждой из областей, где функции $\Sigma_{\text{yв}, l}^i$ постоянны, может быть представлено в виде [11]:

$$\Phi_i^l(x) = \sum_{n=1}^{p(N)} \Lambda_l(k_n^i) [A_n^i e^{k_n^i x} + B_n^i (-1)^l e^{-k_n^i x}]. \quad (3.126)$$

Здесь A_n^i и B_n^i — произвольные постоянные интегрирования, а k_n^i — корни характеристического уравнения системы (3.125)

$$\Delta_N^i(k^i) = \begin{vmatrix} \sum_{yв}^i k^i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} k^i \sum_{yв, 1}^i & \frac{2}{3} k^i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} k^i \sum_{yв, 2}^i & \frac{3}{5} k^i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{N-1}{2N-1} k^i \sum_{yв, N-1}^i & \frac{N}{2N-1} k^i & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{N}{2N+1} k^i \sum_{yв, N}^i & \end{vmatrix} = 0. \quad (3.127)$$

Использование в формуле (3.126) индекса i , обозначающего номер энергетической группы, имеет чисто формальное значение, так как Φ_i^i не зависит от Φ_n^i при $j \neq i$. Поэтому в дальнейшем для упрощения записи индекс i опускаем.

Функции $\Lambda_l(k)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \frac{l+1}{2l+1} k \Lambda_{l+1}(k) + \frac{l}{2l+1} k \Lambda_{l-1}(k) + \sum_{yв, l} \Lambda_l(k) &= 0, \\ l &= 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{N}{2N+1} k \Lambda_{N-1}(k) + \sum_{yв, N} \Lambda_N(k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Функции $\Lambda_l(k)$ связаны с определителями $\Delta_l(k)$ (3.127) следующими соотношениями [12]:

$$\Lambda_l(k) = (-1)^l \frac{(2l-1)!}{l! k^l} \Delta_{l-1}(k) \quad l = 1, 2, \dots \quad (3.129)$$

Для определителей $\Delta_l^i(k)$ справедлива следующая рекуррентная формула:

$$\Delta_l(k) = \sum_{yв, l} \Delta_{l-1}(k) - \frac{k^{2l^2}}{4l^2 - 1} \Delta_{l-2}(k), \quad (3.130)$$

причем $\Delta_0(k) = \sum_{yв}$, $\Delta_1(k) = \sum_{yв} \sum_{yв, 1}$ — $\frac{k^2}{3}$.

Таким образом,

$$\Lambda_0(k) \equiv 1,$$

$$\Lambda_1(k) = -\frac{\Sigma_{yb}}{k}.$$

Число произвольных постоянных интегрирования (A_n и B_n), входящих в общее решение однородной системы уравнений (3.125), равно числу корней характеристического уравнения (3.127). В том случае, когда N , т. е. номер рассматриваемого приближения, — нечетное число, определитель системы представляет собой многочлен $(N+1)$ -й степени относительно k и, следовательно, уравнение (3.127) имеет $(N+1)$ корень. Если же N — четное число, то степень многочлена $\Delta_N(k)$ равна N , и уравнение (3.127) имеет N корней.

В выражении (3.126) $p(N)$ обозначает целую часть числа $\frac{N+1}{2}$, равную $\frac{N+1}{2}$, если N — нечетное число, и $\frac{N}{2}$, если N — четное.

Важной величиной, характеризующей свойства P_N -приближения, является наименьший положительный корень $k^{(N)}$ уравнения

$$\Delta_N(k^{(N)}) = 0. \quad (3.131)$$

Характеристическое число $k(N)$ определяет пространственное распределение нейтронов вдали от источника в рамках P_N -приближения. Согласно уравнению (3.127), для первых трех значений N получаем:

$$k^{(1)} = \sqrt{3\Sigma_{yb}\Sigma_{yb,1}},$$

$$k^{(2)} = \sqrt{3\Sigma_{yb}\Sigma_{yb,1} \left(1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{yb}}{\Sigma_{yb,2}}\right)^{-1}},$$

$$k^{(3)} = \left[\frac{35}{18} \Sigma_{yb,2} \Sigma_{yb,3} + \frac{14}{9} \Sigma_{yb} \Sigma_{yb,3} + \frac{3}{2} \Sigma_{yb} \Sigma_{yb,1} - \right. \\ \left. - \sqrt{\left(\frac{35}{18} \Sigma_{yb,2} \Sigma_{yb,3} + \frac{14}{9} \Sigma_{yb} \Sigma_{yb,3} + \frac{3}{2} \Sigma_{yb} \Sigma_{yb,1} \right)^2 - \frac{35}{3} \Sigma_{yb} \Sigma_{yb,1} \Sigma_{yb,2} \Sigma_{yb,3}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.132)$$

Как и следовало ожидать, $\frac{1}{k^{(1)}}$ и $\frac{1}{k^{(2)}}$ совпадают с полученными выше выражениями для длин диффузии нейтронов в P_1 - и P_2 -приближениях соответственно.

Рассмотрим подробнее значения $k^{(N)}$ в частном случае изотропного рассеяния на тяжелых ядрах, когда можно пренебречь однозначной связью между углом рассеяния и потерей энергии нейтроном (см. гл. I, § 3). При этом

$$\Sigma_{\text{ув. } l} = \Sigma \text{ при } l > 0.$$

Здесь Σ — полное сечение (предполагается, что используются универсальные константы). Тогда, вводя обозначение

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{\Sigma_{\text{ув}}}{\Sigma}, \text{ получаем} \\ k^{(1)} &= \Sigma \sqrt{3b}, \\ k^{(2)} &= \Sigma \sqrt{3b \left(1 + \frac{4}{5}b\right)^{-1}}, \\ k^{(3)} &= \Sigma \sqrt{\frac{35}{18} \left(1 + \frac{11}{7}b - \sqrt{1 + \frac{2}{35}b + \frac{121}{49}b^2}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.133)$$

Если k_0 — наименьший корень характеристического уравнения (3.131) при $N \rightarrow \infty$, то $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, $k^{(3)}$ и т. д. можно рассматривать как приближенные значения k_0 .

При $N \rightarrow \infty$ система уравнений (3.125) является одной из форм записи односкоростного кинетического уравнения без распределенных источников (в данном случае это групповое кинетическое уравнение без внешних и внутренних источников*). Известно, что асимптотический ход решения такого уравнения описывается функцией диффузионного типа с асимптотической длиной диффузии L [1]. Асимптотическая длина L удовлетворяет трансцендентному уравнению. Так как по определению $k_0 = \frac{1}{L}$, то уравнение для k_0 записывается в виде

$$\frac{\Sigma - \Sigma_{\text{ув}}}{2k_0} \ln \frac{\Sigma + k_0}{\Sigma - k_0} = 1 \quad (3.134)$$

или, если использовать обозначение $b = \frac{\Sigma_{\text{ув}}}{\Sigma}$,

$$\frac{1 - b}{2k_0/\Sigma} \ln \frac{1 + k_0/\Sigma}{1 - k_0/\Sigma} = 1. \quad (3.134a)$$

Уравнение (3.134) соответствует изотропному рассеянию. Для многогруппового приближения уравнение для асимптотической длины диффузии L получено в гл. V, § 3. Выражение

* Под внутренними источниками подразумеваются переходы в i -ю энергетическую группу из верхних групп. Влиянием внутренних источников на пространственное распределение нейтронов i -й группы обычно можно пренебречь при выполнении условия $r \ll \Delta u_i$, где Δu_i — ширина группы.

(5.22) отличается от (3.134) тем, что в последнем опущен индекс i и $W^{i \rightarrow i} = \Sigma^i - \Sigma_{\text{ув}}^i$.

При линейной аппроксимации углового распределения рассеянных нейтронов

$$\chi(\mu_0) = \frac{1}{2} (1 + 3\bar{\mu}_0 \mu_0)$$

величина k_0 должна удовлетворять уравнению вида [1]

$$\frac{1-b}{2k_0/\Sigma} \ln \frac{1+k_0/\Sigma}{1-k_0/\Sigma} = \frac{1+3b(1-b)\bar{\mu}_0 \left(\frac{\Sigma}{k_0}\right)^2}{1+3(1-b)\bar{\mu}_0 \left(\frac{\Sigma}{k_0}\right)^2}.$$

Рассмотрим случай слабого увода из группы. Обычно это происходит в области промежуточных энергий для тяжелых и средних ядер. Тогда $\Sigma_{\text{ув}} \ll \Sigma$, т. е. $b \ll 1$. Разложив выражение (3.133) для $k^{(2)}$ и $k^{(3)}$ в степенной ряд по малому параметру b , получим

$$\begin{aligned} k^{(1)} &= \Sigma \sqrt{3b}, \\ k^{(2)} &= \Sigma \sqrt{3b} \left[1 - \frac{2}{5} b + \frac{3}{10} b^2 + 0(b^3) \right], \\ k^{(3)} &= \Sigma \sqrt{3b} \left[1 - \frac{2}{5} b + \frac{12,022}{175} b^2 + 0(b^3) \right]. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Уравнение (3.134) для k_0 запишем в виде

$$\frac{k_0}{\Sigma} = \text{th} \frac{k_0}{\Sigma - \Sigma_{\text{ув}}}.$$

Легко видеть, что при слабом уводе, когда

$$\Sigma - \Sigma_{\text{ув}} \approx \Sigma,$$

должно выполняться условие

$$k_0/\Sigma \ll 1.$$

Воспользовавшись этим обстоятельством, разложим левую часть выражения (3.134а) по малому параметру $\frac{k_0}{\Sigma}$. В результате получим

$$k_0 = \Sigma \sqrt{3b} \left[1 - \frac{2}{5} b + \frac{12,022}{175} b^2 + 0(b^3) \right]. \quad (3.136)$$

Сравнивая формулы (3.135) и (3.136), можно отметить следующее. В P_1 -приближении значение $k^{(1)}$ совпадает с k_0 с точностью до величины порядка b . P_2 -приближение уточняет решение, причем $k^{(2)}$ отличается от k_0 на величину порядка b^2 . P_3 -приближение является еще более точным, и погрешность оказывается порядка b^3 . В общем случае можно утверждать,

что в P_N -приближении значение $k^{(N)}$ совпадает с k_0 , определяемым из уравнения (3.134), с точностью до величины порядка b^N . В табл. 3.1 приведены значения характеристического числа уравнения переноса нейтронов при изотропном рассеянии. В табл. 3.2 приведены значения характеристического числа в среде с дифференциальным сечением рассеяния, подобным дифференциальному сечению рассеяния для ядер водорода (при однокрупном рассмотрении) [13]. При этом коэффициенты

Таблица 3.1

Характеристические числа уравнения переноса k/Σ при изотропном рассеянии

$b = \frac{\Sigma_{yb}}{\Sigma}$	P_1	P_2	P_4	Точное решение
0,05	0,3873	0,3798	0,3792	0,3795
0,1	0,5477	0,5271	0,5256	0,5254
0,2	0,7746	0,7192	0,7119	0,7104
0,3	0,9487	0,8519	0,8345	0,8286
0,4	1,0954	0,9535	0,9226	0,9073
0,5	1,2247	1,0351	0,9888	0,9575
0,6	1,3416	1,1028	1,0398	0,9856
0,7	1,4491	1,1602	1,0801	0,9974
0,8	1,5492	1,2097	1,1126	0,9999
0,9	1,6432	1,2529	1,1392	1,0000
1,0	1,7321	1,2910	1,1613	1,0000

Таблица 3.2

Характеристические числа уравнения переноса k/Σ в среде с «водородной» индикатрисой рассеяния

$b = \frac{\Sigma_{yb}}{\Sigma}$	P_1	P_2	P_4	P_{11}	Точное решение
0,05	0,2299	0,2285	0,2285	0,2284	0,2283
0,10	0,3339	0,3292	0,3292	0,3290	0,3290
0,15	0,4162	0,4097	0,4097	0,4095	0,4095
0,20	0,4889	0,4796	0,4796	0,4794	0,4794
0,25	0,5547	0,5426	0,5426	0,5423	0,5423
0,30	0,6140	0,6002	0,6002	0,5999	0,6000
0,35	0,6706	0,6535	0,6536	0,6532	0,6532
0,40	0,7222	0,7031	0,7032	0,7028	0,7028
0,45	0,7968	0,7492	0,7494	0,7490	0,7490
0,50	0,8137	0,7921	0,7924	0,7918	0,7918
0,55	0,8536	0,8318	0,8322	0,8316	0,8315
0,60	0,8896	0,8682	0,8687	0,8680	0,8679
0,65	0,9212	0,9012	0,9018	0,9009	0,9009
0,70	0,9482	0,9305	0,9312	0,9301	0,9301
0,75	0,9700	0,9556	0,9563	0,9549	0,9549
0,80	0,9860	0,9759	0,9767	0,9744	0,9744
0,85	0,9957	0,9904	0,9909	0,9877	0,9877
0,90	0,9996	0,9982	0,9985	0,9949	0,9949

разложения по $P_l(\mu_0)$ функции $\chi(\mu_0)$, описывающей угловое распределение рассеянных нейтронов, равны:

$$\chi_0 = 1; \chi_1 = \frac{2}{3}; \chi_2 = \frac{1}{4}; \chi_3 = 0; \chi_4 = -\frac{1}{24}; \chi_5 = 0.$$

Как видно из табл. 3.1 и 3.2, погрешность значений характеристического числа, определяющего характер распределения потока нейтронов, на достаточно больших расстояниях от источника с ростом номера P_N -приближения почти монотонно уменьшается.

До сих пор мы рассматривали решение однородной системы уравнений (3.125). Эта система описывает пространственное распределение гармоник потока $\Phi_l(x)$ в тех случаях, когда можно пренебречь влиянием пространственного распределения источников, внешних и внутренних (переходы из верхних групп).

В общем случае многогрупповой неоднородной системы уравнений в P_N -приближении (3.124) запись общего решения довольно сложна. Рассмотрим частный случай изотропных источников. Для многогруппового приближения это означает изотропию переходов между группами. Обозначим всю правую часть уравнений (3.124) (при $l=0$) $Q_0(x)$ ($Q_l(x)=0$ при $l>0$). Тогда частное решение всей системы уравнений (3.124) записывается в виде [11]

$$\Phi_l'(x) = \sum_{n=1}^N t_n P_{ln}(x), \quad (3.137)$$

где

$$P_{ln}(x) = \Lambda_l(k_n) [e^{k_n x} Z(k_n, \Sigma x) + (-1)^l e^{-k_n x} Z(-k_n, \Sigma x)];$$

$$Z(k_n, \Sigma x) = \frac{1}{k_n} \int_0^{\Sigma x} Q_0(s) e^{-k_n s} ds;$$

$$t_n = -3 \text{ при } N = 1 (P_1\text{-приближение});$$

$$t_n = \frac{5(11k_n^2 - 21)}{9(k_n^2 - k_j^2)} \text{ при } n, j = 1, 2; n \neq j; N = 3;$$

$$t_n = -\frac{7(33k_n^4 - 170k_n^2 + 165)}{25 \prod_{n \neq j} (k_n^2 - k_j^2)} \text{ при } n, j = 1, 2, 3; N = 5 \text{ и т. д.}$$

Здесь k_n — корни характеристического уравнения, соответствующего однородной системе (3.125), $\Lambda_l(k_n)$ определяется выражением (3.129).

Если функцию (3.137) прибавить к решению однородной системы уравнений (3.125), то получим общее решение в P_N -

приближении для изотропных источников, как внешних, так и внутренних.

Остановимся теперь на граничных условиях в P_N -приближении. В случае многослойной среды из закона сохранения числа нейтронов вытекает требование непрерывности углового потока нейтронов $\Phi^i(x, \mu)$ каждой группы на границе раздела различных материалов. В P_N -приближении это условие означает требование непрерывности на границе слоев всех гармоник потока $\Phi_l^i(x)$. При этом, когда N — нечетное, число произвольных постоянных интегрирования, равное $N+1$, совпадает с числом граничных условий и решение задачи определяется однозначно. При четных N число постоянных интегрирования, равное N , оказывается меньше числа граничных условий. Однако если использовать граничные условия, предложенные Г. Я. Румянцевым [10], которые заключаются в требовании непрерывности функций $\mu\Phi^i(x, \mu)$ на границах раздела различных сред, то число постоянных интегрирования и число граничных условий совпадают.

Условия непрерывности на границах раздела функций $\mu\Phi(x, \mu)$ эквивалентны условиям непрерывности функций $[l\Phi_{l-1} + (l+1)\Phi_{l+1}]$. Эти условия в нечетных P_N -приближениях сводятся к обычным условиям непрерывности всех гармоник $\Phi_l(x)$, а в четных P_N -приближениях означают требование непрерывности всех нечетных гармоник ($\Phi_1, \Phi_3, \dots, \Phi_{N-1}$) и непрерывности определенных комплексов четных гармоник $[\Phi_0 + 2\Phi_2, 3\Phi_2 + 4\Phi_4, \dots, (N-1)\Phi_{N-2} + N\Phi_N]$. Таким образом, на границах раздела различных сред в P_1 -приближении требуется непрерывность скалярного потока Φ_0 и тока Φ_1 , в P_2 -приближении — непрерывность Φ_1 и $\Phi_0 + 2\Phi_2$, в P_3 -приближении — непрерывность $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ и т. д. В четных P_N -приближениях, в том числе в P_2 -приближении, четные гармоники $\Phi_{2l}(x)$, в частности скалярный поток $\Phi_0(x)$, на границах раздела различных сред терпят разрыв первого рода. Этот разрыв тем больше, чем сильнее различаются ядернофизические свойства граничащих сред.

Проиллюстрируем применение различных P_N -приближений метода сферических гармоник несколькими примерами. На рис. 3.3 приведено пространственное распределение потока быстрых и тепловых нейтронов в протяженной водной защите, примыкающей к корпусу водо-водяного реактора. Показаны результаты расчетов в P_1 -, P_{2tr} - (т. е. при $\chi_2 = \chi_1$)* и P_{3tr} -приближениях [14]. В P_3 -приближении при описании рассеяния на ядрах с $M > 1$ использовалось транспортное приближение для индикатрисы, т. е. $\chi_3 = \chi_2 = \chi_1$, а для характеристики рассеяния

* Здесь и далее P_{Ntr} означает P_N -приближение в разложении угловой зависимости потока нейтронов и транспортную аппроксимацию индикатрисы рассеяния (3.27).

на ядрах водорода применялся следующий искусственный прием. При интегрировании системы (3.18) по u в пределах i -й группы в интегральных членах третьего и четвертого уравнений, т. е. при $l=2$ и $l=3$, $W_{2,н}$ и $W_{3,н}$ были вынесены из-под

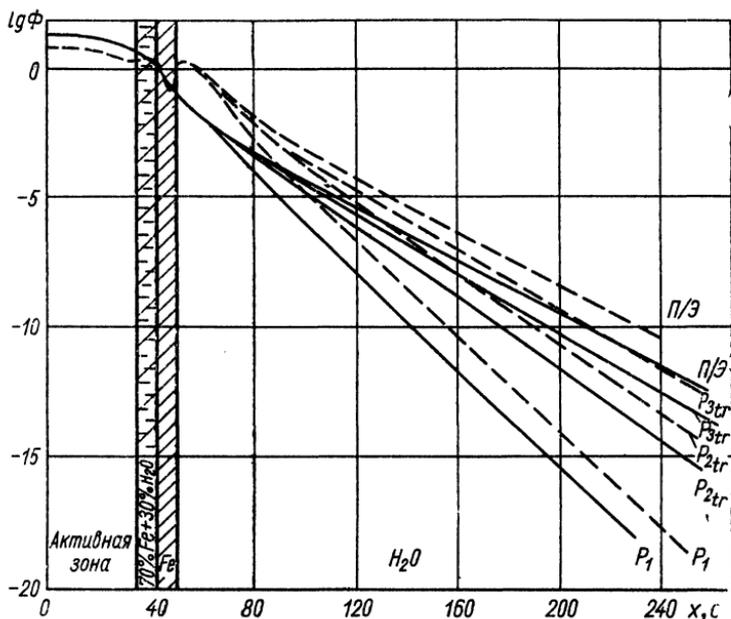


Рис. 3.3. Пространственное распределение потоков быстрых и тепловых нейтронов в воде. Расчет в P_{Ntr} -приближении ($N=1, 2, 3$) и полуэмпирическим (П/Э) 7-групповым методом:

— быстрые нейтроны; --- тепловые нейтроны.

знака интеграла. При этом принималось: $W_{2,н} = \sum_{s,н} \chi_{2,н}$; $W_{3,н} = \sum_{s,н} \chi_{3,н}$; $\chi_{2,н} = \frac{1}{4}$; $\chi_{3,н} = 0$. Как показало сравнение с

экспериментальными данными, проведенное в работе [15], такой прием, связанный лишь с частичным нарушением корреляции между углом рассеяния на ядрах водорода и потерей энергии, существенно уточняет результаты расчета в P_3 -приближении.

Из рис. 3.3 видно, что результаты расчетов в различных приближениях существенно различаются между собой. Это объясняется сильной анизотропией рассеяния нейтронов на ядрах водорода (в лабораторной системе координат). На рис. 3.3 приведены также результаты расчетов полуэмпирическим 7-групповым методом (см. гл. VI). В этих расчетах распределение быстрых нейтронов было получено в результате численного интегрирования по объему активной зоны функции влияния, полученной методом моментов, т. е. распределения от элемен-

тарного точечного изотропного источника. Как видно, на больших расстояниях от активной зоны применение даже P_3 -приближения в этом случае недостаточно.

На рис. 3.4 приведено пространственно-энергетическое распределение нейтронов в протяженной защите из железа. Срав-

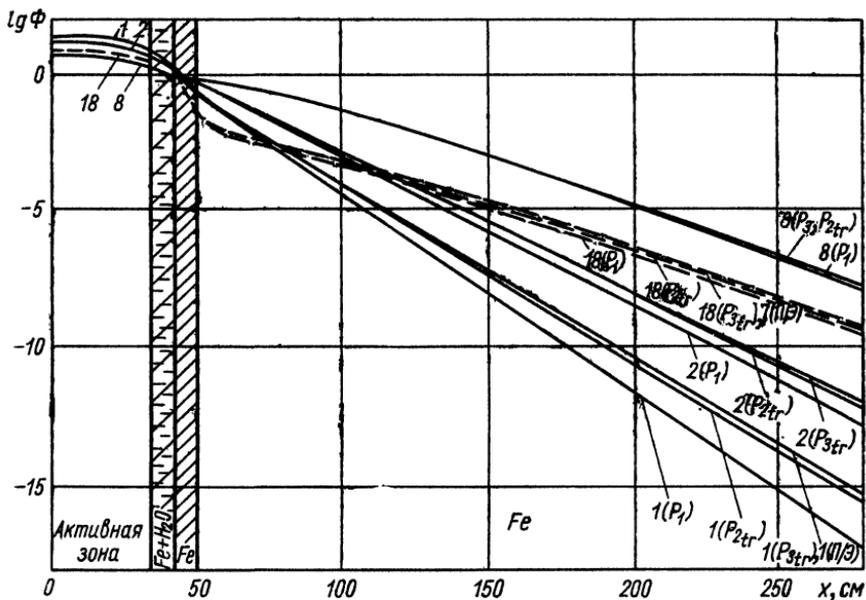


Рис. 3.4. Пространственно-энергетическое распределение нейтронов в железе:

$1(P_1)$, $1(P_{2tr})$, $1(P_{3tr})$, $1(\Pi/\mathcal{E})$ — быстрые нейтроны с $E > 1,5$ Мэв; $2(P_{Ntr})$ — нейтроны 2-й группы 18-группового расчета (0,8—1,5 Мэв); $8(P_{Ntr})$ — нейтроны 8-й группы 18-группового расчета (10—25 кэв); $18(P_{Ntr})$ и $7(\Pi/\mathcal{E})$ — тепловые нейтроны. Расчет в P_{Ntr} -приближении ($N=1, 2, 3$) и полуэмпирическим методом.

ниваются распределения нейтронов некоторых энергетических групп в P_{Ntr} -приближении при различных N , а также результаты расчетов полуэмпирическим 7-групповым методом (с использованием длины релаксации потока быстрых нейтронов $\lambda_r = 7,6$ см). В этом случае отличие результатов расчета в различных приближениях несколько меньше, чем в защите из воды. Почти такая же ситуация наблюдается и в защите из графита, распределение потоков нейтронов в которой показано на рис. 3.5.

Представляет существенный практический интерес сравнение различных приближений для гетерогенных защитных композиций. На рис. 3.6 приведено распределение быстрых и тепловых нейтронов в защите, состоящей из воды со слоями железа и борированного железа (2 вес. % бора). Характер отличия

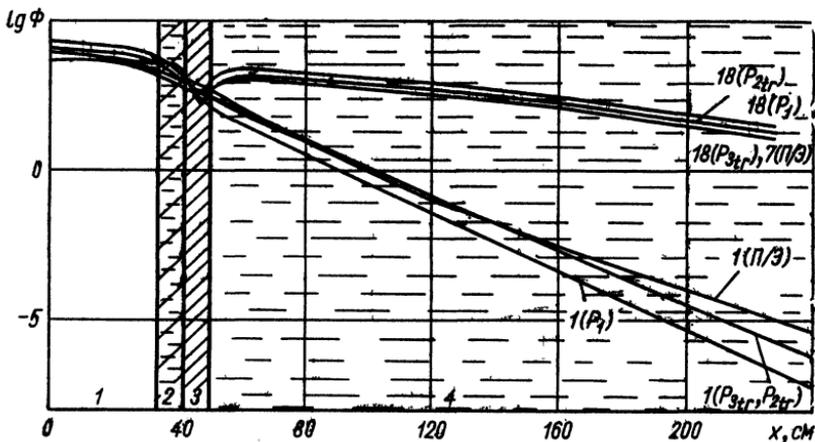


Рис. 3.5. Пространственно-энергетическое распределение нейтронов в графите ($\gamma=1,67 \text{ г/см}^3$):

$1(P_1, P_{2tr}, P_{3tr}, \Pi/\mathcal{E})$ — быстрые нейтроны с $E > 1,5 \text{ Мэв}$; $18(P_1, P_{2tr}, P_{3tr})$ и $7(\Pi/\mathcal{E})$ — тепловые нейтроны. Расчет в P_{Ntr} -приближении ($N=1, 2, 3$) и полуэмпирическим методом: 1 — активная зона; 2 — тепловая защита; 3 — корпус реактора; 4 — графит.

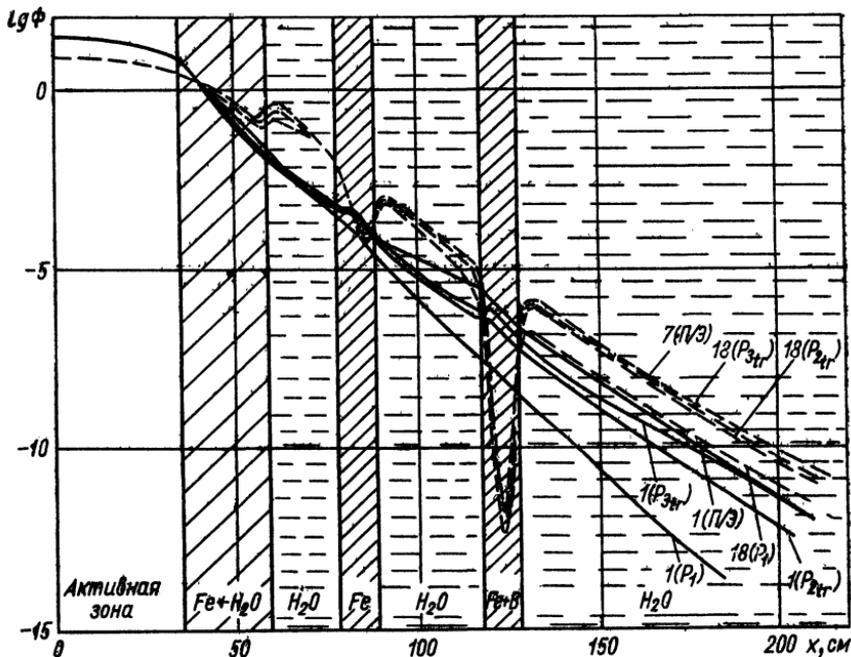


Рис. 3.6. Распределение быстрых ($E > 1,5 \text{ Мэв}$) и тепловых нейтронов в гетерогенной железо-водной защите:

— быстрые нейтроны; - - - тепловые нейтроны (обозначения те же, что и на рис. 3.5).

различных приближений для потока быстрых нейтронов в воде на больших расстояниях такой же, как и в чистой водной защите (см. рис. 3.3). На рис. 3.6 приведены также результаты расчетов по методу сечений выведения. В области собственно гетерогенной структуры характерно заметное отличие расчетов в P_3 -приближении от расчетов по методу сечений выведения.

Результаты P_1 -приближения очень сильно отличаются от результатов расчета в других приближениях, однако на малых расстояниях от активной зоны (менее 40 см) это отличие не очень значительно.

В заключение запишем решение многогрупповой системы P_N -уравнений в сферически симметричной геометрии. Интегрируя систему уравнений, аналогичную (3.29), по u в пределах i -й группы, получим для гармоник $\Phi_i^l(r)$:

$$\frac{l+1}{2l+1} \left[\frac{d\Phi_{l+1}^i(r)}{dr} + \frac{l+2}{r} \Phi_{l+1}^i(r) \right] + \frac{l}{2l+1} \left[\frac{d\Phi_{l-1}^i}{dr} - \frac{l-1}{r} \Phi_{l-1}^i(r) \right] + \sum_{k=k_0}^l \Phi_k^i(r) = \sum_{k=k_0}^l \Phi_k^i(r) W_i^{k \rightarrow i} + q_i^l(r). \quad (3.138)$$

Общее решение в P_N -приближении однородной системы уравнений, соответствующей системе (3.138), в каждой из областей постоянства \sum_i^l и $W_i^{k \rightarrow i}$ может быть записано в виде [11]

$$\Phi_i^l(r) = \sum_{n=1}^{p(N)} \Lambda_l(k_n^i) [A_n^l H_l(k_n^i r) + B_n^l (-1)^l H_l(-k_n^i r)], \quad (3.139)$$

где A_n^l и B_n^l — произвольные постоянные интегрирования, а функции $\Lambda_l(k_n^i)$ аналогичны таким же функциям для плоской геометрии. Функции H_l связаны с функциями Бесселя второго рода $K_{l+1/2}$ следующим соотношением:

$$H_l(-kr) = - \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{1/2} K_{l+1/2}(kr).$$

Функции $K_{l+1/2}(kr)$ выражаются через элементарные функции

$$K_{l+1/2}(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr} \right)^{1/2} e^{-kr} \sum_{\nu=0}^l \frac{(l+\nu)!}{\nu!(l-\nu)!} \left(\frac{1}{2kr} \right)^\nu.$$

В частности, $H_0(kr) = \frac{e^{kr}}{kr}$; $H_0(-kr) = -\frac{e^{-kr}}{kr}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глестон С., Эдлунд Э. Основы теории ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
2. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.

3. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Гостехиздат, 1948.
4. Хен Г., Зигерт Х. В сб. «Физические проблемы защиты реакторов». Перев. с англ. Под ред. С. Г. Цыпина и др. М., Атомиздат (в печати).
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
6. Sjöstrand N. J. Nucl. Energy, **12**, 151 (1960).
7. Абагян Л. П. и др. Групповые константы для расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1964.
8. Romping G. Nucl. Sci. Engng, **19**, 250 (1964).
9. Мёррей Р. Физика ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1959.
10. Румянцев Г. Я. «Атомная энергия», **10**, 26 (1961).
11. Физика ядерных реакторов. Сб. статей. Перев. с англ. Под ред. И. А. Стенбока. М., Атомиздат, 1964.
12. Марчук Г. И., Николайшвили Ш. С. В сб. «Теория и методы расчета ядерных реакторов». Под ред. Г. И. Марчука. М., Госатомиздат, 1962, стр. 5.
13. Lathrop K. D. Nucl. Sci. Engng, **21**, 498 (1965).
14. Бродер Д. Л. и др. Малогабаритная защита реакторов. М., Атомиздат, 1967.
15. Марчук Г. И. и др. Критические параметры размножающих систем. М., Атомиздат, 1965.

Глава IV

ДРУГИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Невысокие приближения метода сферических гармоник допускают сравнительно простую реализацию на электронно-вычислительных машинах малой и средней мощности. Развитие вычислительной техники стимулирует применение более точных методов расчета, но использование высоких приближений метода сферических гармоник при расчете защиты связано с большими трудностями.

Иногда оказываются более удобными и надежными другие методы решения уравнения переноса нейтронов. Например, в случае бесконечных однородных сред можно использовать метод моментов и асимптотические решения, основанные на применении преобразования Фурье. Ниже рассматриваются эти методы, а также $2P_N$ -метод и методы дискретных ординат, более приспособленные для расчета гетерогенных защит.

§ 1. МЕТОД МОМЕНТОВ

Этот метод является развитием метода сферических гармоник для специального случая бесконечной однородной среды. Рассмотрим вначале задачу в плоской геометрии. Введем понятие пространственных моментов различных гармоник потока нейтронов. В частности, выражение m -го момента l -й гармоники потока нейтронов i -й группы будет иметь вид [1].

$$\Phi_{m,l}^i = \frac{(\Sigma_0^i)^{m+1}}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i^l(x) x^m dx = \frac{(\Sigma_0^i)^{m+1}}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^m \int d\mu P_l(\mu) \Phi^i(x, \mu). \quad (4.1)$$

Аналогично выражение для m -го момента l -й гармоники функции источников нейтронов можно записать так:

$$q_{m,l}^i = \frac{(\Sigma_0^i)^{m+1}}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} q_i^l(x) x^m dx. \quad (4.2)$$

Умножим систему уравнений (3.30) на $\frac{(\Sigma_0^i)^{m+1} x^m}{m!}$ и проинтегрируем результат на dx от $-\infty$ до $+\infty$. Считая, что

при $|x| \rightarrow \infty$ поток $\Phi^i \rightarrow 0$ быстрее функции x^{-m} , получаем следующую систему алгебраических уравнений (при $m \geq 0$, $l \geq 0$):

$$-l \sum_0^i \Phi_{m-1, l-1}^i - (l+1) \sum_0^i \Phi_{m-1, l+1}^i + (2l+1) \sum_{\text{ув. } l}^i \Phi_{m, l}^i = (2l+1) S_{m, l}^i, \quad (4.3)$$

$$\text{где } S_{m, l}^i = \sum_{k=k_0}^{i-1} W_l^{k-i} \Phi_{m, l}^k + q_{m, l}^i.$$

Моменты $\Phi_{m, l}^i$ при отрицательных значениях индексов m и l обращаются в нуль. Система (4.3) является замкнутой, и величина каждого момента $\Phi_{m, l}^i$ может быть определена из конечного числа уравнений. Порядок вычисления любого момента $\Phi_{m, l}^i$ следующий. Из выражения (4.3) видно, что при $m=0$ первые два члена в левой части равны нулю и, следовательно, все $\Phi_{0, l}^i$ определяются из соотношения

$$\Phi_{0, l}^i = \frac{S_{0, l}^i}{\sum_{\text{ув. } l}^i}. \quad (4.3a)$$

Зная величины моментов $\Phi_{0, l}^i$, с помощью выражения (4.3) также легко вычислить и все $\Phi_{1, l}^i$. Аналогичным образом можно последовательно проводить вычисления вплоть до любого требуемого значения m . Так как для определения моментов $\Phi_{m, l}^i$ необходимо знать величины $\Phi_{m-1, l-1}^i$ и $\Phi_{m-1, l+1}^i$, то, следовательно, они предварительно должны быть вычислены. Для их определения, в свою очередь, необходимо знать величины моментов $\Phi_{m-2, l-2}^i$, $\Phi_{m-2, l}^i$, $\Phi_{m-2, l+2}^i$ и т. д. вплоть до $\Phi_{0, 0}^i, \dots, \Phi_{0, l+m}^i$, которые определяются из выражения (4.3a). Теперь легко видеть, что, например, для определения N первых моментов функции $\Phi_0^i(x)$ необходимо решить систему $\frac{N(N+1)}{2}$ уравнений вида (4.3). Но следует особо подчеркнуть то обстоятельство, что для точного вычисления N моментов требуется решить только эти уравнения. Иначе обстоит дело при использовании метода сферических гармоник, когда ограничение числа уравнений конечным числом основывается на предположении о том, что некоторыми членами из-за их малости можно пренебречь.

Величины моментов целесообразно вычислять в следующей последовательности: $\Phi_{0, 0}^i$, $\Phi_{0, 1}^i$, $\Phi_{0, 2}^i$, $\Phi_{1, 0}^i$, $\Phi_{1, 1}^i$ и т. д. Однако если источник обладает свойствами симметрии относительно плоскости источника, моменты с различной четностью индексов

m и l равны нулю. Это приводит к значительному уменьшению числа уравнений. На рис. 4.1 приведена схема последовательности вычисления первых четырех четных моментов скалярного потока $\Phi_0(x)$ для симметричного источника.

В случае сферически симметричной задачи моменты определяются следующим образом:

$$\Phi_{m,l}^i = \frac{(\Sigma_0^i)^{m+3}}{m!} \int_0^\infty r^{m+2} \Phi_l^i(r) dr. \quad (4.4)$$

Поступая с групповым представлением системы уравнений (3.29) для сферической симметрии аналогично тому, как это было сделано для плоской геометрии, приходим к следующей системе алгебраических уравнений:

$$-l \frac{m+l+1}{m} \sum_0^l \Phi_{m-1, l-1}^i - \frac{m-l}{m} \sum_0^l \Phi_{m-1, l-1}^i + (2l+1) \sum_{\text{ув}, l}^i \Phi_{m, l}^i = (2l+1) S_{m, l}^i, \quad (4.5)$$

которая решается аналогично системе (4.3) последовательно, шаг за шагом.

Следует отметить, что в отличие от метода сферических гармоник, где уравнения для гармоник потока нейтронов решаются приближенно (поскольку делаются предположения о малости градиента высших гармоник), в методе моментов уравнения (4.3) и (4.5) являются точными, т. е. дают точные значения моментов.

После того как пространственно-угловые моменты $\Phi_{m,l}^i$ найдены, задача состоит в восстановлении по ним значений различных гармоник потока $\Phi_l^i(x)$ или в восстановлении значений $\Phi_l^i(x)$ по моментам $\Phi_{m,l}^i$. При этом следует учесть, что уравнения для моментов потока рассеянных нейтронов $\Phi_{m,l}^i$ выглядят аналогично уравнениям (4.3) и (4.5) для моментов $\Phi_{m,l}^i$ при замене величин $q_{m,l}^i$ на $Q_{m,l}^i$. Для примера рассмотрим восстановление функции полного $\Phi_0^i(x)$ в плоской геометрии для случая изотропного источника по известным N первым моментам $\Phi_{m,0}^i$ (все нечетные моменты в этом случае равны нулю в силу

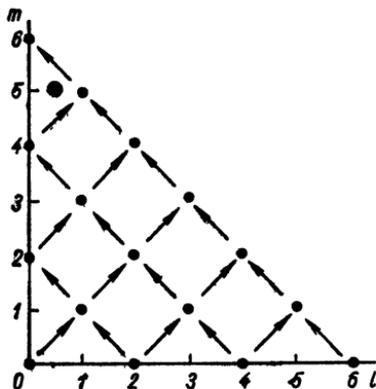


Рис. 4.1. Схема последовательности вычисления первых четырех моментов скалярного потока в случае симметричного источника (рассчитываемые моменты обозначены черными кружками).

четности функции $\delta(x)$. Можно построить полином $(N-1)$ -й степени относительно x , чтобы N первых четных моментов построенного полинома с некоторым весом совпадали с известными моментами $\Phi_{m,0}^t$. Выбрав весовую функцию так, чтобы удовлетворить условиям ограниченности потока при $|x| \rightarrow \infty$, положим [2]

$$R_{N-1}(|x|) = e^{-k|x|} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j |x|^j, \quad (4.6)$$

где k — корень характеристического уравнения (см. § 6, гл. III) (индекс группы ради простоты опускаем). Коэффициенты α_j определим так, чтобы выполнялись следующие соотношения (при $0 \leq j \leq N-1$):

$$\frac{1}{(2j)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2j} R_{N-1}(|x|) dx = \frac{1}{(2j)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2j} \Phi_0(x) dx. \quad (4.7)$$

Выражение (4.6) можно переписать в виде

$$R_{N-1}(|x|) = e^{-k|x|} \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j z_j(k|x|). \quad (4.8)$$

Здесь β_j — неизвестные коэффициенты, а $z_j(x)$ — полином j -й степени относительно x , подчиненный следующим условиям (при $0 \leq m \leq j-1$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} x^{2m} z_j(|x|) dx = 0. \quad (4.9)$$

Если обе части равенства (4.8) умножить на $\frac{k}{(2m)!} (|x|)^{2m}$ и проинтегрировать по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, то вследствие выполнения условия (4.9) в выражении (4.8) останутся лишь члены с $j \leq m$. Поэтому $(m+1)$ коэффициентов β_j полностью определяются из первых четных $(m+1)$ моментов потока $\Phi_0(x)$.

Если ввести в рассмотрение систему дополнительных полиномов $z_\nu^+(x)$, удовлетворяющих условиям ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} z_\nu(x) z_{\nu'}^+(x) dx = \delta_{\nu\nu'} = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = \nu', \\ 0 & \text{при } \nu \neq \nu', \end{cases} \quad (4.10)$$

то для коэффициентов β_j можно получить следующее выражение:

$$\beta_j = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(x) z_j^+(k|x|) k dx. \quad (4.11)$$

Из условия (4.9) можно установить вид полиномов $z_j(x)$ (с точностью до постоянного множителя) [2]

$$z_j(x) = \frac{(-1)^j}{2^j j!} \left(\frac{d}{dx} - 1 \right)^{2j} \sum_{\nu=0}^j \frac{(j+\nu)}{2^{\nu} \nu! (j-\nu)!} x^{j-\nu}. \quad (4.12)$$

В частности, полиномы низшей степени имеют вид

$$z_0(x) = 1; \quad z_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x);$$

$$z_2(x) = \frac{1}{8}(3 - 5x + x^2); \quad z_3(x) = \frac{1}{48}(15 - 33x + 12x^2 - x^3).$$

Система дополнительных полиномов $z_j^+(x)$ определяется следующим выражением:

$$z_j^+(x) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^j \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} \binom{j}{\nu} x^{2\nu}, \quad (4.13)$$

где $\binom{j}{\nu}$ — сочетание из j элементов по ν . При подстановке выражения для $z_j^+(x)$ в формулу (4.11) получаем

$$\beta_j = \frac{k}{2} \sum_{\nu=0}^j (-1)^\nu \binom{j}{\nu} k^{2\nu} \Phi_{0, 2\nu}. \quad (4.14)$$

Таким образом, по известным пространственным моментам $\Phi_{0, 2\nu}$ определяются неизвестные коэффициенты β_j , с помощью которых находится приближенное представление пространственного распределения потока нейтронов:

$$\Phi_0(x) = e^{-k|x|} \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j z_j(k|x|). \quad (4.15)$$

Восстановление других гармоник потока проводится аналогичным образом. Возможны также другие способы восстановления гармоник потока по моментам путем выражения их через любые функции, имеющие вид, который соответствует ожидаемому характеру решения задачи, но в то же время содержащее один или более неопределенных параметров. Например, можно использовать суммы экспоненциальных функций, суммы произведений экспоненциальной и степенной функций и др. Число неопределенных параметров в аппроксимации любой функции должно совпадать с числом известных моментов этой функции.

Восстановление функций гармоник потока в сферически симметричной геометрии производится аналогично случаю плоской геометрии. Пространственные моменты потока являются его интегральными характеристиками. В зависимости от номера

моментов они отражают поведение $\Phi_0(r)$ в различных областях изменения пространственной переменной. С ростом номера моментов они характеризуют пространственное распределение потока на все больших расстояниях от источника. Характерно, что P_1 - и диффузионное приближения дают точные значения второго пространственного момента скалярного потока, т. е. точные значения среднего квадрата расстояния, проходимого нейтронами от источника до момента, где нейтроны поглощаются или переходят в другие группы.

В работах [3, 4] приведен перечень некоторых расчетов методом моментов для моноэнергетических источников и источника спектра деления. В частности, для источника спектра деления проведены расчеты распределения скалярного потока нейтронов в воде, водороде, литии, гидриде лития, бериллии, окиси бериллия, углероде и различных углеводородных соединениях. Почти для всех расчетов были вычислены первые восемь четных моментов потока Φ_0 , хотя не все они во всех случаях использовались при воссоздании пространственного распределения потока.

Согласно практике этих расчетов, распределение потока нейтронов удовлетворительно описывается 6—8 моментами вплоть до расстояний от источника порядка 20 длин свободного пробега. Следует отметить, что вопрос о зависимости описываемых расстояний от числа моментов освещен в литературе довольно слабо. Характерно, что точность расчета гармоник потока нейтронов $\Phi_l(z)$ убывает с ростом номера гармоник, поскольку при этом уменьшается число учитываемых пространственно-угловых моментов $\Phi_{m,l}$. Например, как уже говорилось выше, для вычисления N первых моментов функции $\Phi_0^i(x)$ требуется вычисление не только моментов $\Phi_{m,0}^i$, т. е. при $l=0$, а и моментов с $l \neq 0$ (см. рис. 4.1). При этом чем выше l , тем меньше рассчитывается моментов $\Phi_{m,l}^i$, а именно вычисляются моменты от $m=0$ до $m=N-l$. То есть при вычислении N моментов скалярного потока нейтронов вычисляется $(N-1)$ моментов тока нейтронов и т. д. Поэтому можно считать, что метод моментов оказывается более приспособленным при расчетах пространственного распределения потока нейтронов, чем при расчетах углового потока.

Весьма удачным оказался способ представления искомой функции потока рассеянных нейтронов $\varphi_0(r)$, использующий его асимптотическое поведение, с помощью всего лишь трех четных моментов [5]. Решение задачи в случае точечного изотропного источника представляется в следующем виде:

$$\varphi_l(r) = A_l (\sum r)^{\nu_l - 1} e^{-\alpha_l r}, \quad (4.16)$$

где параметры A_l , ν_l , α_l подбираются из условий совпадения первых трех моментов одинаковой четности с $m=l$, $l+2$, $l+4$

с найденными значениями соответствующих моментов $\varphi_{m,l}$ (индекс группы опущен). Используя эти условия, нетрудно получить явный вид этих параметров:

$$\left. \begin{aligned} \nu_l &= \frac{9p_l - 5 - 2l(1 - p_l) + \sqrt{1 + 14p_l + p_l^2}}{1 - p_l}; \\ p_l &= \frac{(l+1)(l+2)}{(l+3)(l+4)} \frac{\varphi_{l,l+2}^2}{\varphi_{l,l}\varphi_{l,l+4}}; \\ \alpha_l &= \sum \sqrt{\frac{(\nu_l + l + 3)(\nu_l + l + 2)}{(l+1)(l+2)} \frac{\varphi_{l,l}}{\varphi_{l,l+2}}}; \\ A_l &= \frac{\varphi_{l,l} x_l^{\nu_l + l + 2} l!}{\Sigma^{l+2} \Gamma(\nu_l + l + 2)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

где

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx - \gamma - \text{функция Эйлера.}$$

Описанная выше трехмоментная схема успешно применена при расчете распределения потока нейтронов от точечного изотропного источника в среде, состоящей из ядер водорода [5].

В заключение отметим, что наиболее серьезным ограничением метода моментов является то, что он может быть применен только для случая бесконечной однородной среды. Кроме того, метод моментов не слишком удовлетворительно описывает поведение потока нейтронов вблизи источника, на расстояниях менее длины свободного пробега. Основным достоинством метода моментов является его сравнительная простота и достаточно хорошая точность. Результаты расчетов методом моментов часто служат эталоном для определения точности различных приближенных методов решения уравнения переноса.

§ 2. ДВОЙНОЙ P_N -МЕТОД

Как уже отмечалось, и метод сферических гармоник, и метод моментов плохо приспособлены для расчета угловых распределений потока нейтронов. Трудности вычисления, возникающие при описании нерегулярностей углового спектра нейтронов, могут быть в значительной степени уменьшены с помощью двойного P_N -метода (или $2P_N$ -метода) Ивона — Мертенса, являющегося модификацией классического метода сферических гармоник. Идеи этого метода применительно к задачам переноса нейтронов были впервые сформулированы в работе [6] и получили дальнейшее развитие в ряде других работ, в том числе в работах [7, 8].

В двойном P_N -методе все фазовое пространство угловой переменной $-1 \leq \mu \leq 1$ разбивается на два полупространства $-1 \leq \mu \leq 0$ и $0 \leq \mu \leq 1$, каждому из которых приписывается своя функция распределения Φ^- и Φ^+ . При этом искомая функция распределения записывается следующим образом:

$$\Phi(x, u, \mu) = \begin{cases} \Phi^+(x, u, \mu) & \text{при } 0 \leq \mu \leq 1; \\ \Phi^-(x, u, \mu) & \text{при } -1 \leq \mu \leq 0. \end{cases}$$

Это соотношение можно представить в виде

$$\Phi^\pm(x, u, \mu) = \Phi(x, u, \mu) H(\pm \mu).$$

Здесь $H(\mu)$ — функция Хэвисайда

$$H(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu > 0; \\ 0 & \text{при } \mu < 0. \end{cases}$$

Функции Φ^+ и Φ^- являются решениями уравнений переноса нейтронов в полупространстве переменной μ

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Phi^\pm(x, u, \mu)}{\partial x} + \sum(x, u) \Phi^\pm(x, u, \mu) = \int d\Omega' \int du' \times \\ \times [\Phi^+(x, u', \mu') + \Phi^-(x, u', \mu')] W(x, \mu_0, u' \rightarrow u) + \\ + q^\pm(x, u, \mu). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Это уравнение отличается от обычного уравнения переноса (3.9) интегральным членом, учитывающим рассеяние нейтронов, в результате которого они переходят из одного фазового полупространства в другое. Функция $W(x, \mu_0, u' \rightarrow u)$ описывает обычную индикатрису рассеяния.

Граничные условия для функций $\Phi^\pm(x, u, \mu)$, соответствующие граничным условиям (3.20) для функции $\Phi(x, u, \mu)$, следующие:

$$\begin{aligned} \Phi^+(0, u, \mu) &= f(u, \mu), \\ \Phi^-(\delta, u, \mu) &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Разложим угловую зависимость функции $\Phi^+(x, u, \mu)$ по полиномам $P_n^+(\mu)$, ортогональным в полупространстве $0 \leq \mu \leq 1$, а угловую зависимость функции $\Phi^-(x, u, \mu)$ — по полиномам $P_n^-(\mu)$, ортогональным в полупространстве $-1 \leq \mu \leq 0$:

$$\Phi^\pm(x, u, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Phi_n^\pm(x, u) P_n^\pm(\mu). \quad (4.20)$$

Коэффициенты разложения в формуле (4.20) имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_n^+(x, u) &= \int_0^1 \Phi^+(x, u, \mu) P_n^+(\mu) d\mu; \\ \Phi_n^-(x, u) &= \int_{-1}^0 \Phi^-(x, u, \mu) P_n^-(\mu) d\mu. \end{aligned}$$

Полиномы $P^\pm(\mu)$, использованные в разложении (4.20), легко определить из условия ортогональности полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{при } m = n; \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases} \quad (4.21)$$

Сделаем в формуле (4.21) подстановки

$$x = 2t - 1; \quad x = 2t + 1.$$

В результате получим

$$\int_0^1 P_n(2t - 1) P_m(2t - 1) dt = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{при } m = n; \\ 0 & \text{при } m \neq n; \end{cases}$$

$$\int_{-1}^0 P_n(2t + 1) P_m(2t + 1) dt = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{при } m = n; \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Отсюда следует, что полиномы $P_n^\pm(\mu)$ могут быть выражены через полиномы Лежандра и функцию Хэвисайда

$$P_n^\pm(\mu) = P_n(2\mu \mp 1) H(\pm \mu).$$

Дифференциальное представление для полиномов $P_n^\pm(\mu)$ можно получить, используя формулу Родрига для полиномов Лежандра [9]:

$$P_n^\pm(\mu) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n} [\mu^n (\mu \mp 1)^n] H(\pm \mu). \quad (4.22)$$

Рассмотрим теперь интегралы

$$J_{nm}^+ = \int_0^1 \mu^m P_n^+(\mu) d\mu, \quad (4.23)$$

$$J_{nm}^- = \int_{-1}^0 \mu^m P_n^-(\mu) d\mu,$$

где m — целое число. Подставляя выражение (4.22) в (4.23) и интегрируя по частям, легко показать, что

$$J_{nm}^\pm = 0 \quad \text{при } m < n. \quad (4.24)$$

Введем следующие обозначения для интегральных соотношений:

$$R_{mn}^+ = \int_0^1 P_n^+(\mu) R_m(\mu) d\mu,$$

$$R_{nm}^- = \int_{-1}^0 P_n^-(\mu) P_m(\mu) d\mu.$$

Согласно формуле (4.24),

$$R_{nm}^{\pm} = 0 \quad \text{при } m < n. \quad (4.25)$$

Система уравнений, которым удовлетворяют гармоники $\Phi_l^{\pm}(x, u)$, может быть получена из исходного уравнения (4.18) тем же путем, что и система уравнений (3.18) для гармоник $\Phi_l(x, u)$. Используя разложение функции $\Phi^{\pm}(x, u, \mu)$ по полиномам $P_n^{\pm}(\mu)$ и функции $W(x, \mu_0, u' \rightarrow u)$ по полиномам Лежандра $P_m(\mu_0)$, а также учитывая выражение (4.25), запишем систему уравнений для $\Phi_l^{\pm}(x, u)$ в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l+1}^{\pm}}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l-1}^{\pm}}{\partial x} \pm \frac{\partial \Phi_l^{\pm}}{\partial x} \right] + \sum \Phi_l^{\pm} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{m=l}^{\infty} (2m+1) R_{lm}^{\pm} \sum_{n=0}^m (2n+1) \int [R_{nm}^+ \Phi_n^+(x, u') + \\ & \quad + R_{nm}^- \Phi_n^-(x, u')] W_m(x, u' \rightarrow u) du' + q_l^{\pm}(x, u). \end{aligned} \quad (4.26)$$

В двойном P_N -методе для разложения угловой зависимости функции распределения $\Phi^{\pm}(x, u, \mu)$ и индикатрисы рассеяния $W(x, \mu_0, u' \rightarrow u)$ используются различные системы ортогональных полиномов. Поэтому между гармониками $\Phi_n^{\pm}(x, u)$ и $W_m(x, u' \rightarrow u)$ нет той корреляции, которая в классическом методе сферических гармоник обеспечивала вырождение двойной суммы в один интегральный член вида $\int \Phi_l(x, u') W_l(x, u' \rightarrow u) du'$. В качестве примера запишем систему уравнений (4.26) для $2P_1$ -приближения ($l=0,1$):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi_1^{\pm}}{\partial x} \pm \frac{\partial \Phi_0^{\pm}}{\partial x} \right] + \sum \Phi_0^{\pm} = \sum_{m=0}^{\infty} R_{0m}^{\pm} \int P_m(x, u') \times \\ & \quad \times W_m(x, u' \rightarrow u) du' + q_0^{\pm}; \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[\frac{\partial \Phi_0^{\pm}}{\partial x} \pm 3 \frac{\partial \Phi_1^{\pm}}{\partial x} \right] + \sum \Phi_1^{\pm} = \sum_{m=1}^{\infty} R_{1m}^{\pm} \int P_m(x, u') \times \\ & \quad \times W_m(x, u' \rightarrow u) du' + q_1^{\pm}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_m(x, u') = & \frac{2m+1}{2} \{ R_{0m}^+ \Phi_0^+(x, u') + R_{0m}^- \Phi_0^-(x, u') + \\ & + 3 [R_{1m}^+ \Phi_1^+(x, u') + R_{1m}^- \Phi_1^-(x, u')] \}. \end{aligned}$$

Решения полученных уравнений определяют интегральный поток и ток нейтронов в P_1 -приближении двойного P_N -метода:

$$\Phi_0(x, u) = \Phi_0^+(x, u) + \Phi_0^-(x, u);$$

$$\Phi_1(x, u) = \Phi_1^+(x, u) + \Phi_1^-(x, u).$$

Следует подчеркнуть, что, несмотря на малый порядок приближения, $\Phi_0(x, u)$ и $\Phi_1(x, u)$ получены с учетом всех угловых гармоник дифференциального сечения рассеяния.

В работах [10, 11] проводятся дальнейшие аналитические преобразования системы уравнений (4.26). При этом рассматривается индикатриса рассеяния в виде (1.43), которая далее разлагается по полиномам Лежандра в ряд (1.52), причем, согласно формуле (1.54),

$$W_l(x, u' \rightarrow u) = \sum_s(x, u') f_s(u', u - u') P_l[\beta(u - u')] + \delta_{l0} \sum_{in} (u') f_{in}(u', u - u'). \quad (4.28)$$

Подставив выражение (4.28) в систему (4.26), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l+1}^{\pm}}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l-1}^{\pm}}{\partial x} \pm \frac{\partial \Phi_l^{\pm}}{\partial x} \right] + \sum \Phi_l^{\pm} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{m=l}^{\infty} (2m+1) R_{lm}^{\pm} \sum_{n=0}^m (2n+1) \int [R_{nm}^+ \Phi_n^+(x, u') + \\ & + R_{nm}^- \Phi_n^-(x, u')] \sum_s(x, u') f_s(u', u - u') P_m(\beta) du' + \\ & + \frac{\delta_{l0}}{2} \int [\Phi_0^+(x, u') + \Phi_0^-(x, u')] \sum_{in} (u') f_{in}(u', u - u') du' + \\ & + q_l^{\pm}(x, u). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} S_{ln}^{++}(\beta) &= \sum_{\min\{l, n\}}^{\infty} \frac{2m+1}{2} R_{lm}^+ R_{nm}^+ P_m(\beta), \\ S_{ln}^{+-}(\beta) &= \sum_{\min\{l, n\}}^{\infty} \frac{2m+1}{2} R_{lm}^+ R_{nm}^- P_m(\beta), \\ S_{ln}^{-+}(\beta) &= \sum_{\min\{l, n\}}^{\infty} \frac{2m+1}{2} R_{lm}^- R_{nm}^+ P_m(\beta), \\ S_{ln}^{--}(\beta) &= \sum_{\min\{l, n\}}^{\infty} \frac{2m+1}{2} R_{lm}^- R_{nm}^- P_m(\beta). \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Здесь $\min\{l, n\}$ означает минимальное из двух чисел: l и n . Используя свойство симметрии полиномов Лежандра

$$P_m(-\mu) = (-1)^m P_m(\mu), \quad (4.31)$$

можно легко показать, что величины R_{nm}^\pm подчиняются следующему соотношению:

$$R_{nm}^- = (-1)^{n+m} R_{nm}^+. \quad (4.32)$$

Соотношения (4.31) и (4.32) позволяют свести различные функции (4.30) к первой из них $S_{ln}^{++}(\beta)$ с изменением аргумента β в интервале $-1 \leq \beta \leq +1$:

$$\left. \begin{aligned} S_{ln}^{+-}(\beta) &= (-1)^n S_{ln}^{++}(-\beta), \\ S_{ln}^{-+}(\beta) &= (-1)^l S_{ln}^{++}(-\beta), \\ S_{ln}^{--}(\beta) &= (-1)^{l+n} S_{ln}^{++}(-\beta). \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Деля в системе уравнений (4.29) перестановку суммирования по m и n и учитывая выражения (4.30), (4.33), приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l+1}^\pm}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l-1}^\pm}{\partial x} \pm \frac{\partial \Phi_l^\pm}{\partial x} \right] + \Sigma \Phi_l^\pm = \\ & = (\pm 1)^l \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int \Sigma_s(x, u') f_s(u', u - u') [S_{ln}^{++}(\pm \beta) \Phi_n^+(x, u') + \\ & \quad + (-1)^n S_{ln}^{++}(\mp \beta) \Phi_n^-(x, u')] du' + \\ & \quad + \frac{\delta_{l0}}{2} \int [\Phi_0^+(x, u') + \Phi_0^-(x, u')] \Sigma_{ln}(u') f_{ln}(u', u - u') du' + \\ & \quad + q_l^\pm(x, u). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Таким образом, при введении специальных функций

$$S_{ln}^{++}(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} R_{lm}^+ R_{nm}^+ P_m(\beta) \quad (4.35)$$

интеграл рассеяния в правой части системы уравнений (4.26) удастся из двойной суммы превратить в однократную сумму. Каков физический смысл функций $S_{ln}^{++}(\beta)$?

Прежде суммирование по m было введено в системе (4.26) как разложение в ряд угловой зависимости индикатрисы рассеяния (1.43). Поэтому функции $S_{ln}^{++}(\beta)$ должны содержать всю информацию об анизотропии сечения рассеяния при условии, что бесконечный ряд (4.35) может быть просуммирован для всех значений l и n . Поэтому в работах [10, 11] функции $S_{ln}^{++}(\beta)$

предложено назвать «анизотропными функциями». Для этих функций удается получить аналитические выражения.

Вместо величин R_{nm}^{\pm} далее будем использовать два других коэффициента:

$$C_{nm} = \int_0^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu, \quad (4.36)$$

$$J_{nm} = \int_0^1 P_n(\mu) \mu^m d\mu.$$

Аналитические выражения этих коэффициентов имеют следующий вид [9]:

$$C_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n - m - \text{четном, } m \neq n \\ \frac{(-1)^{\frac{n+m+1}{2}} m! n!}{2^{n+m-1} (n-m)(n-m+1) \left[\left(\frac{n}{2} \right)! \left(\frac{m-1}{2} \right)! \right]^2} & \text{при } n - \text{четном, } m - \text{нечетном.} \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt$ — γ -функция Эйлера. При целых $n > 0$ [9]

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!!.$$

Для дальнейших преобразований особенно важно, что коэффициенты C_{nm} и J_{nm} равны нулю, когда оба индекса n и m — одинаковой четности, т. е.

$$C_{2\nu, 2\lambda} = C_{2\nu+1, 2\lambda+1} = 0 \text{ при всех } \nu, \lambda, \text{ кроме } \nu = \lambda, \quad (4.37)$$

$$J_{2\nu, 2\lambda} = J_{2\nu+1, 2\lambda+1} = 0 \text{ при } \nu > \lambda.$$

В работе [10] показано, что величины R_{nm}^{\pm} связаны с коэффициентами C_{nm} и J_{nm} следующим образом:

$$R_{nm}^+ = \sum_{i=0}^m a_i^m C_{ni}, \quad (4.38)$$

$$R_{nm}^- = \sum_{i=0}^m b_i^m J_{ni}.$$

Значения коэффициентов a_i^n и b_i^n приведены в табл. 4.1.

Коэффициенты a_t^l и b_t^l

a, b	l	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
a b	0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
a b	1	-1 -1	2 2	0 0	0 0	0 0	0 0
a b	2	3 1	-6 -6	4 6	0 0	0 0	0 0
a b	3	-11 -1	24 12	-20 -30	8 20	0 0	0 0
a b	4	45 1	-104 -20	100 90	-56 -140	16 70	0 0
a b	5	-197 -1	474 30	-500 -210	336 560	-144 -630	32 252

При введении новых коэффициентов C_{nm} и J_{nm} «анизотропные функции» $S_{ln}^{++}(\beta)$ могут быть записаны как линейные комбинации других, более общих рядов полиномов Лежандра

$$S_{ln}^{++}(\beta) = \sum_{t=0}^l \sum_{q=0}^n a_t^l b_q^n S_{tq}(\beta), \quad (4.39)$$

где

$$S_{ln}(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} C_{lm} J_{nm} P_m(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} D_{m, l, n} P_m(\beta) \quad (4.40)$$

при

$$D_{m, l, n} = C_{lm} J_{nm}. \quad (4.41)$$

Учитывая соотношения (4.37), исследуем все комбинации четных и нечетных индексов m , l и n . В табл. 4.2 указаны только те комбинации этих индексов (ч. — четные, н. — нечетные), при которых коэффициенты $D_{m, l, n} \neq 0$.

Видно, что первые шесть комбинаций соответствуют конечному числу коэффициентов $D_{m, l, n}$, не равных нулю. При этом бесконечный ряд (4.40) превращается в конечную сумму. Действительно, бесконечные ряды имеют место лишь в двух последних случаях. Учитывая особенность рядов (4.40) при $\lambda = \nu$, которая видна из табл. 4.2, рассмотрим вместо выражения (4.40) новый ряд

Коэффициенты $D_{m, l, n}$, не равные нулю

$m \ l \ n$	$D_{m, l, n}$	$D_{m, l, n} \neq 0$ только при
ч. ч. ч. н. н. н.	$D_{2\nu, 2\lambda, 2x}$ $D_{2\nu+1, 2\lambda+1, 2x+1}$ }	$\nu=\lambda \ \lambda < x \ x \geq \lambda = \nu$
ч. ч. н. н. н. ч.	$D_{2\nu, 2\lambda, 2x+1}$ $D_{2\nu+1, 2\lambda+1, 2x}$ }	$\nu=\lambda \ \lambda = \nu \quad -$
ч. н. ч. н. ч. н.	$D_{2\nu, 2\lambda-1, 2x}$ $D_{2\nu+1, 2\lambda, 2x+1}$ }	$\nu < x \quad - \quad x \geq \lambda$
ч. н. н. н. ч. ч.	$D_{2\nu, 2\lambda+1, 2x+1}$ $D_{2\nu+1, 2\lambda, 2x}$ }	Все ν Все λ Все x

$$G_{ln}(\beta) = \sum_{\substack{m=0 \\ \{m+1\}}}^{\infty} \frac{2m+1}{2} C_{lm} J_{nm} P_m(\beta). \quad (4.42)$$

При этом, согласно табл. 4.2, интерес для дальнейшего исследования представляют только два случая:

$$G_{2\lambda, 2x}(\beta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4\nu+3}{2} D_{2\nu+1, 2\lambda, 2x} P_{2\nu+1}(\beta), \quad (4.43)$$

$$G_{2\lambda-1, 2x-1}(\beta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4\nu+1}{2} D_{2\nu, 2\lambda-1, 2x-1} P_{2\nu}(\beta).$$

Из свойств симметрии полиномов Лежандра (4.31) следуют свойства симметрии рядов (4.43):

$$G_{2\lambda, 2x}(-\beta) = -G_{2\lambda, 2x}(\beta), \quad (4.44)$$

$$G_{2\lambda-1, 2x-1}(-\beta) = G_{2\lambda-1, 2x-1}(\beta).$$

Окончательно функции $S_{ln}(\beta)$ могут быть сведены к функциям $G_{ln}(\beta)$ с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 S_{2\lambda, 2x}(\beta) &= G_{2\lambda, 2x}(\beta) + \frac{1}{2} J_{2\lambda, 2x} P_{2\lambda}(\beta), \\
 S_{2\lambda+1, 2x+1}(\beta) &= G_{2\lambda+1, 2x+1}(\beta) + \frac{1}{2} J_{2\lambda+1, 2x+1} P_{2\lambda+1}(\beta), \\
 S_{2\lambda, 2x+1}(\beta) &= \sum_{\nu=0}^x \frac{4\nu+3}{2} G_{2\nu+1, 2\lambda} J_{2\nu+1, 2x+1} P_{2\nu+1}(\beta) + \\
 &+ \frac{1}{2} J_{2\lambda, 2x+1} P_{2\lambda}(\beta), \\
 S_{2\lambda+1, 2x}(\beta) &= \sum_{\nu=0}^x \frac{4\nu+1}{2} G_{2\nu, 2\lambda+1} J_{2\nu, 2x} P_{2\nu}(\beta) + \\
 &+ \frac{1}{2} J_{2\lambda+1, 2x} P_{2\lambda+1}(\beta).
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

Таким образом, для дальнейшего аналитического исследования остаются только две системы рядов полиномов Лежандра (4.43). Это чисто математическая задача, результаты решения которой приведены в работе [10].

Точные выражения получены для следующих функций:

$$G_{00}(\beta) = \frac{1}{\pi} \arcsin \beta, \tag{4.46}$$

$$G_{2\lambda+1, 2\lambda-1}(\beta) = \frac{(-1)^\lambda}{2\pi\lambda(\lambda+1)} (1-\beta^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}, \tag{4.46a}$$

$$G_{2\lambda, 2\lambda-2}(\beta) = \frac{(-1)^{\lambda+1}}{2\pi\lambda(\lambda+1)} \beta (1-\beta^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \tag{4.46b}$$

при $\lambda = 1, 2, 3, \dots$

С помощью этих функций и приведенных ниже рекуррентных соотношений могут быть вычислены любые функции (4.43).

Соотношения между двумя следующими друг за другом по номеру функциями:

$$G_{1, 2\lambda+1}(\beta) = \frac{2\lambda+1}{2\lambda+3} \int G_{0, 2\lambda}(\beta) d\beta \tag{4.47}$$

при $\lambda = 0, 1, 2, \dots$;

$$G_{2\lambda+1, 2x+1}(\beta) = \frac{x(2x+1)}{(x-\lambda)(2x+2\lambda+3)} G_{2\lambda+1, 2x-1}(\beta) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\lambda+1}}{2\pi (\kappa - \lambda) (2\kappa + 2\lambda + 3)} \cdot \frac{(2\lambda + 2)(2\lambda + 4) \dots (2\kappa)}{(2\lambda + 3)(2\lambda + 5) \dots (2\kappa + 1)} (1 - \beta^2)^{\frac{2\kappa+1}{2}}; \quad (4.47a)$$

$$G_{2\lambda, 2\kappa}(\beta) = \frac{\kappa(2\kappa - 1)}{(\kappa - \lambda)(2\kappa + 2\lambda + 1)} G_{2\lambda, 2\kappa-2}(\beta) + \\ + \frac{(-1)^\lambda}{2\pi (\kappa - \lambda) (2\kappa + 2\lambda + 1)} \frac{(2\lambda + 2)(2\lambda + 4) \dots (2\kappa)}{(2\lambda + 1)(2\lambda + 3) \dots (2\kappa - 1)} \beta (1 - \beta^2)^{\frac{2\kappa-1}{2}} \quad (4.47b)$$

при $\kappa = 1, 2, 3, \dots, \lambda < \kappa$.

Соотношения между тремя следующими друг за другом по номеру функциями:

$$G_{2\lambda+1, 2\kappa+1}(\beta) = \frac{(4\lambda + 1)(2\kappa + 1)}{2\lambda + 2\kappa + 3} \int G_{2\lambda, 2\kappa}(\beta) d\beta - \\ - \frac{2(\lambda - \kappa - 1)}{2\lambda + 2\kappa + 3} G_{2\lambda-1, 2\kappa+1}(\beta) \quad (4.48)$$

при $\lambda = 1, 2, 3, \dots, \kappa = 0, 1, 2, \dots$;

$$G_{2\lambda, 2\kappa}(\beta) = \frac{\kappa(4\lambda - 1)}{\lambda(2\lambda + 2\kappa + 1)} \beta G_{2\lambda-1, 2\kappa-1}(\beta) + \\ + \frac{(2\lambda - 1)(\lambda - \kappa - 1)}{\lambda(2\lambda + 2\kappa + 1)} G_{2\lambda-2, 2\kappa}(\beta) \quad (4.48a)$$

при $\lambda = 1, 2, 3, \dots, \kappa = 1, 2, 3, \dots$

Соотношения между более чем тремя функциями

$$\sum_{\rho=0}^{\lambda} C_{2\rho+1}^{2\lambda+1} G_{2\kappa+1, 2\rho+1}(\beta) = \sum_{t=0}^{\kappa} C_{2t+1}^{2\kappa+1} G_{2\lambda+1, 2t+1}(\beta), \quad (4.49)$$

$$\sum_{\rho=0}^{\lambda} C_{2\rho}^{2\lambda} G_{2\kappa, 2\rho}(\beta) = \sum_{t=0}^{\kappa} C_{2t}^{2\kappa} G_{2\lambda, 2t}(\beta)$$

при $\lambda = 0, 1, 2, \dots, \kappa = 0, 1, 2, \dots$

Здесь C_t^l — коэффициенты при β^t в степенном представлении полиномов Лежандра

$$P_l(\beta) = \sum_{t=0}^l C_t^l \beta^t. \quad (4.50)$$

Значения этих коэффициентов табулированы, например в работе [12].

В общем случае все функции $G_{ln}(\beta)$ можно представить в следующем виде [10]:

$$G_{ln}(\beta) = \{\beta^l\} \arcsin \beta + \{\beta^{n-1}\} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (4.51)$$

где $\{\beta^l\}$ обозначает некоторый полином при β степени l . С помощью формул (4.51), (4.45), (4.39) теперь можно получить выражения «анизотропных функций» $S_{in}^{++}(\beta)$. Некоторые из этих функций низкого порядка имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} S_{00}^{++}(\beta) &= \frac{1}{\pi} \arcsin \beta + \frac{1}{2}, \\ S_{01}^{++}(\beta) &= S_{10}^{++}(\beta) = -\frac{1}{\pi} \arcsin \beta + \frac{\beta}{2}, \\ S_{11}^{++}(\beta) &= \frac{1}{3\pi} (3 + 4\beta) \arcsin \beta + \frac{4}{3\pi} \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{\beta}{3} - \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} (4.52)$$

Графики некоторых «анизотропных функций» приведены на рис. 4.2—4.4. Можно отметить, что функции $S_{0l}^{++}(\beta)$ являются антисимметричными, в то время как все другие функции не подчиняются какому-либо простому правилу симметрии. Однако видно, что амплитуда всех функций быстро уменьшается по мере возрастания номера индекса.

Особенного внимания заслуживают функции с двумя одинаковыми индексами, представленные на рис. 4.4. В работе [10] показано, что при $\beta=1$ все «анизотропные функции» равны нулю, кроме функций $S_{il}^{++}(\beta)$:

$$S_{il}^{++}(\beta=1) = \frac{\delta_{il}}{2l+1}. \quad (4.53)$$

Физическая интерпретация этого факта может быть дана сразу, если вспомнить закон рассеяния (1.43). Из этого выражения видно, что случай $\beta=1$ означает рассеяние в направлении прямо вперед и выражение (4.53) указывает, что в этом случае существенны лишь функции $S_{il}^{++}(\beta)$.

Таким образом, с помощью специальных анизотропных функций в $2P_N$ -приближении любого порядка может быть учтена аналитически точно произвольная анизотропия сечения рассеяния.

Система многогрупповых уравнений $2P_N$ -приближения, соответствующая системе (4.34), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l+1}^{\pm l}}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l-1}^{\pm l}}{\partial x} \pm \frac{\partial \Phi_l^{\pm l}}{\partial x} \right] + \sum_i^{\pm l} \Phi_i^{\pm l} = \\ & = (\pm 1)^l \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{k=k_0}^i [\omega_{ln}^{+(\pm)k \rightarrow l} \Phi_n^{+k} + (-1)^n \omega_{ln}^{-(\mp)k \rightarrow l} \Phi_n^{-k}] + \\ & + \frac{\delta_{l0}}{2} \sum_{k=k_0}^i [W_{in}^{+k \rightarrow l} \Phi_0^{+k} W_{in}^{-k \rightarrow l} \Phi_0^{-k}] + q_l^{\pm l}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Групповые константы $\Sigma_i^{\pm l}$ и $W_{in}^{\pm k \rightarrow l}$, входящие в эти уравнения, определяются путем усреднения сечений по внутригруппо-

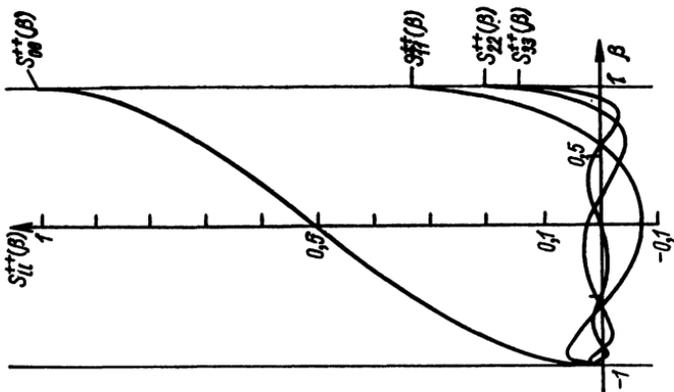


Рис. 4.4. Анизотропные функции $S_{11}^{++}(\beta)$.

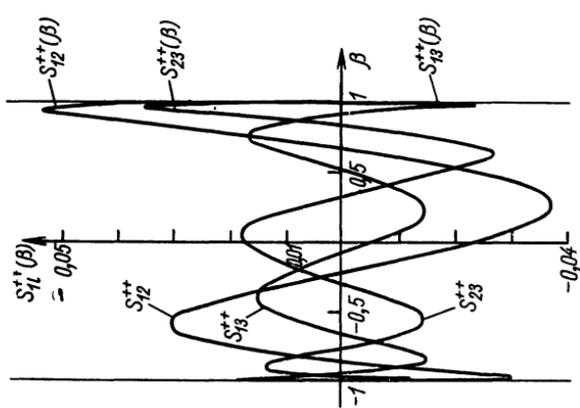


Рис. 4.3. Анизотропные функции $S_{12}^{++}(\beta)$.

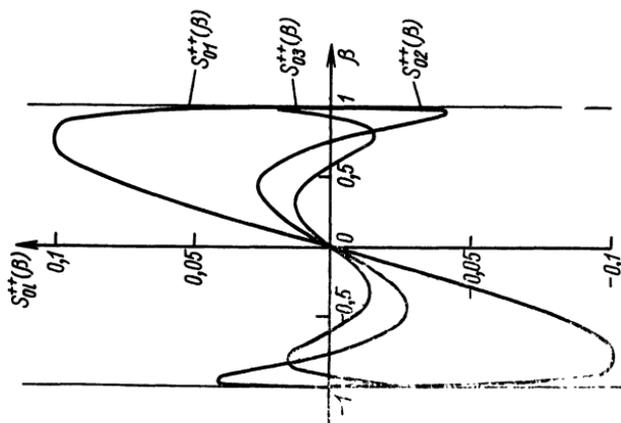


Рис. 4.2. Анизотропные функции $S_{01}^{++}(\beta)$.

вому спектру нейтронов в положительном и отрицательном полупространствах переменной μ . Аналогичным образом

$$\omega_{ln}^{+(\pm)k \rightarrow l} = \frac{\int_{u_{i-1}}^{u_i} du \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Sigma_s(u') f_s(u', u-u') S_{ln}^{++}[\pm \beta(u-u')] \Phi_n^+(u')}{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_n^+(u') du'} \quad (4.55)$$

$$\omega_{ln}^{-(\mp)k \rightarrow l} = \frac{\int_{u_{i-1}}^{u_i} du \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Sigma_s(u') f_s(u', u-u') S_{ln}^{+-}[\mp \beta(u-u')] \Phi_n^-(u')}{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_n^-(u') du'}$$

В формулах (4.55), согласно выражениям (1.43),

$$\beta(u-u') = \frac{M+1}{2} e^{\frac{u-u'}{2}} - \frac{M-1}{2} e^{-\frac{u-u'}{2}} \quad (4.56)$$

В качестве первого приближения решения задачи можно использовать систему уравнений (4.54) в $2P_1$ -приближении:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi_1^{\pm l}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0^{\pm l}}{\partial x} \right] + \sum_0^{\pm l} \Phi_0^{\pm l} = q_0^{\pm l} + \sum_{k=k_0}^l [(\omega_{00}^{+(\pm)k \rightarrow l} + \\ & + W_{in}^{+k \rightarrow l}) \Phi_0^{+k} + (\omega_{00}^{-(\mp)k \rightarrow l} + W_{in}^{-k \rightarrow l}) \Phi_0^{-k} + 3\omega_{01}^{+(\pm)k \rightarrow l} \Phi_1^{+k} - \\ & - 3\omega_{01}^{-(\mp)k \rightarrow l} \Phi_1^{-k}]; \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[\frac{\partial \Phi_0^{\pm l}}{\partial x} \pm 3 \frac{\partial \Phi_1^{\pm l}}{\partial x} \right] + \sum_1^{\pm l} \Phi_1^{\pm l} = q_1^{\pm l} \pm \sum_{k=k_0}^l [\omega_{01}^{+(\pm)k \rightarrow l} \Phi_0^{+k} + \\ & + \omega_{01}^{-(\mp)k \rightarrow l} \Phi_0^{-k} + 3\omega_{11}^{+(\pm)k \rightarrow l} \Phi_1^{+k} - 3\omega_{11}^{-(\mp)k \rightarrow l} \Phi_1^{-k}] \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\Phi_{0,1}^{+l}(0) = f_{0,1}^{+l}, \quad (4.58)$$

$$\Phi_{0,1}^{-l}(\delta) = 0.$$

В системе уравнений (4.57) групповые константы $\omega_{ln}^{+(\pm) k \rightarrow l}$ имеют следующий вид:

$$\omega_{00}^{+(\pm) k \rightarrow l} = \frac{\int_{u_{i-1}}^{u_i} du \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Sigma_s(u') f_s(u', u-u') \times \times \left\{ \frac{1}{\pi} \arcsin [\pm \beta (u-u')] + \frac{1}{2} \right\} \Phi_0^+(u')}{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_0^+(u') du'} , \quad (4.59)$$

$$\omega_{01}^{+(\pm) k \rightarrow l} = \frac{\int_{u_{i-1}}^{u_i} du \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Sigma_s(u') f_s(u', u-u') \times \times \left\{ -\frac{1}{\pi} \arcsin [\pm \beta (u-u')] \pm \frac{1}{2} \beta (u-u') \right\} \Phi_0^+(u')}{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_0^+(u') du'} , \quad (4.59a)$$

$$\omega_{11}^{+(\pm) k \rightarrow l} = \frac{1}{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_0^+(u') du'} \int_{u_{i-1}}^{u_i} du \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \Sigma_s(u') f_s(u', u-u') \times \times \left\{ \frac{1}{3\pi} [3 \pm 4\beta (u-u')] \arcsin [\pm \beta (u-u')] + \frac{4}{3\pi} \sqrt{1-\beta^2} \mp \mp \frac{\beta (u-u')}{3} - \frac{1}{2} \right\} \Phi_1^+(u') . \quad (4.59b)$$

Константы $\omega_{ln}^{-(\mp) k \rightarrow l}$ получаются аналогичным образом усреднением по $\Phi_0^-(u')$ и $\Phi_1^-(u')$.

Решение системы уравнений (4.57) для полного потока $\Phi_0^\pm(x)$ в односкоростной задаче с плоским изотропным источником имеет вид [7]

$$\Phi_0^\pm(x) = A_1^\pm e^{-k_1 x} + A_2^\pm e^{-k_2 x} , \quad (4.60)$$

где при изотропном рассеянии

$$k_{1,2} = \sqrt{6 \left(2\Sigma_{yb} - \Sigma_s \pm \sqrt{3\Sigma_{yb}^2 - 3\Sigma_{yb}\Sigma_s + \Sigma_s^2} \right)} .$$

Система уравнений (4.54) для $\Phi_i^\pm(x)$ имеет более сложный вид, чем аналогичная система уравнений (3.30) для $\Phi_i^i(x)$. Однако при решении некоторых задач двойной P_N -метод обла-

дает определенным преимуществом перед классическим методом сферических гармоник. Так, согласно граничным условиям (4.19), функции $\Phi^\pm(x, u, \mu)$ в отличие от функции $\Phi(x, u, \mu)$ непрерывны в любой точке собственного фазового пространства. Поэтому при прочих равных условиях для достижения требуемой степени точности в описании углового спектра нейтронов в разложении (4.20) для $\Phi^\pm(x, u, \mu)$ нужно сохранять меньшее число членов, чем в разложении (3.12) для $\Phi(x, u, \mu)$. Соответствующим образом уменьшается и число уравнений в системе (4.54) по сравнению с аналогичной системой (3.30), что в конечном итоге приводит к заметному выигрышу в объеме вычислительной работы.

В работе [7] сравнивается точное решение задачи Милна с результатами, полученными с помощью двойного P_N -метода и классического метода сферических гармоник. Показано, что при изотропном рассеянии $2P_2$ -приближение дает лучшие результаты, чем классическое P_5 -приближение. В случае анизотропного рассеяния решение задачи в $2P_2$ -приближении оказывается более точным, чем в P_7 -приближении. При этом объем вычислений, необходимых для получения решения в $2P_N$ -приближении, почти эквивалентен объему вычислений для P_{2N} -приближения.

В заключение следует еще раз подчеркнуть, что двойной P_N -метод наиболее эффективен для задач с «черными» или близкими к ним граничными условиями, когда дифференциальный поток нейтронов испытывает разрыв на границах рассматриваемой среды.

В сферической симметричной геометрии $2P_N$ -метод развит довольно слабо.

В заключение отметим, что возможны такие методы решения уравнения Больцмана с использованием разложения по полиномам Лежандра не только в двух полуинтервалах $[-1, 0]$, $[0, 1]$, а и при произвольном количестве T подынтервалов $[\mu_{t-1}, \mu_t]$ [10].

§ 3. МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

Описанные методы не очень хорошо приспособлены для расчета углового распределения потока нейтронов в гетерогенных защитах. Даже наиболее удачный из них $2P_N$ -метод также не свободен от недостатков. Например, во внутренних областях слоев защиты сходимость $2P_N$ -приближения несколько хуже, чем у обычного P_N -приближения. Для расчета углового распределения потока в гетерогенных защитах наиболее перспективны методы численного интегрирования уравнения переноса или так называемые методы дискретных ординат (D_N -приближения). Эти методы были предложены Виком [1] и далее развиты Чандрасекаром [13] и др. К методам дискретных ординат

близко примыкает S_N -метод, первоначально предложенный Карлсоном [14].

Основная идея методов дискретных ординат состоит в том, что угловой поток аппроксимируется не посредством полиномиальных разложений, как в описанных выше методах, а функцией, определенной в дискретных узлах угловой переменной. Выбор значений этих узлов зависит от типа формулы численного интегрирования, применяемой при расчете интеграла рассеяния в уравнении переноса.

Поскольку методы дискретных ординат более развиты для плоской геометрии, рассмотрим вначале их применение для этой геометрии. Подставим в уравнение (3.1) разложение полного углового потока $\Phi(x, u, \mu)$ по полиномам Лежандра:

$$\Phi(x, u, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \Phi_l(x, u) P_l(\mu), \quad (4.61)$$

где

$$\Phi_l(x, u) = \int_{-1}^{+1} \Phi(x, u, \mu) P_l(\mu) d\mu. \quad (4.62)$$

Используя при этом аналогичное разложение (3.20) для индикатрисы рассеяния

$$W(x, u' \rightarrow u, \mu_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} W_l(x, u' \rightarrow u) P_l(\mu_0), \quad (4.63)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi(x, u, \mu)}{\partial x} + \Sigma(x, u) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \Phi_l(x, u) P_l(\mu) = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \int \Phi_l(x, u') W_l(x, u' \rightarrow u) P_l(\mu) du' + q(x, u, \mu). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Перейдем к многогрупповому приближению

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi^i(x, \mu)}{\partial x} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \Sigma_l^i(x) \Phi_l^i(x) P_l(\mu) = \\ & = \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \Phi_l^k(x) W_l^{k \rightarrow i}(x) + q^i(x, \mu). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Здесь

$$\Sigma_l^i(x) = \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(x, u) \Phi_l(x, u) du. \quad (4.66)$$

Следует отметить принципиально различный характер по отношению к анизотропии рассеяния значений верхнего индекса суммы по l в левой и правой частях уравнения (4.65). В общем случае (даже при изотропном рассеянии) верхний индекс суммы в левой части этого уравнения есть бесконечность, в правой части при слабой анизотропии рассеяния верхний индекс суммы по l может быть достаточно малым числом (в частности, при изотропном рассеянии он равен нулю).

Перенесем все слагаемые суммы в левой части уравнения (4.65), кроме слагаемого, соответствующего $l=L$, в правую часть. Тогда, считая, что $\Sigma_l^i = \Sigma_L^i$ при $l > L$

$$\mu \frac{\partial \Phi^i(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma_L^i \Phi^i(x, \mu) = \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \Phi_l^k(x) \tilde{W}_l^{k \rightarrow i}(x) P_l(\mu) + q^i(x, \mu), \quad (4.67)$$

где

$$\tilde{W}_l^{k \rightarrow i} = W_l^{k \rightarrow i}(x) + \delta_{kl} [\Sigma_L^i(x) - \Sigma_l^i(x)]. \quad (4.68)$$

Систему (4.67) можно представить таким образом:

$$\mu \frac{\partial \Phi^i(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma_L^i \Phi^i(x, \mu) = \sum_{k=k_0}^i \int \Phi^k(x, \mu') \times \times \tilde{W}^{k \rightarrow i}(x, \mu_0) d\mu' + q^i(x, \mu), \quad (4.69)$$

где

$$\tilde{W}^{k \rightarrow i}(x, \mu_0) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \tilde{W}_l^{k \rightarrow i}(x) P_l(\mu_0); \quad (4.70)$$

$$\mu_0(\mu, \mu') = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi - \varphi'). \quad (4.71)$$

Интеграл в правой части уравнения (4.69) аппроксимируется формулой численного интегрирования

$$\int_{-1}^{+1} \Phi^k(x, \mu') W^{k \rightarrow i}(x, \mu_0) d\mu' = \sum_{\nu=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_\nu \Phi^k(x, \mu'_\nu) \times \times W^{k \rightarrow i}[x, \mu_0(\mu, \mu'_\nu)], \quad (4.72)$$

где коэффициенты a_ν определяются квадратурной формулой и не зависят от подынтегрального выражения. Используя формулу (4.72), систему интегро-дифференциальных уравнений (4.69) можно приближенно заменить системой обыкновенных

дифференциальных уравнений, которая решается обычными классическими методами для значений потока в отдельных дискретных углах μ_ν :

$$\begin{aligned} & \mu_\nu \frac{d\Phi^i(x, \mu_\nu)}{dx} + \Sigma_L^i(x) \Phi^i(x, \mu_\nu) = \\ & = \sum_{k=k_0}^i \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_m \Phi^k(x, \mu_\nu) \tilde{W}_{\nu, m}^{k-i}(x) + q(x, \mu_\nu), \end{aligned} \quad (4.73)$$

где

$$\tilde{W}_{\nu, m}^{k-i}(x) = \tilde{W}^{k-i}[x, \mu_0(\mu_\nu, \mu'_m)] \quad (4.74)$$

при $-\frac{N}{2} \leq m, \nu \leq \frac{N}{2}$.

Следует отметить, что при подготовке констант $\tilde{W}_{\nu, m}^{k-i}$ для расчета методом дискретных ординат возможен иной способ их вычисления, а именно с использованием явного вида индикатрисы рассеяния без предварительного расчета суммы (4.70). Правда, при таком подходе не разработан пока способ учета резонансной самоэкранировки дифференциальных сечений рассеяния.

Решение однородной системы уравнений (4.73) (при отсутствии источников) для одной группы нейтронов в однородной среде имеет следующий вид [1]:

$$\Phi(x, \mu_\nu) = \sum_{s=-N/2}^{N/2} \frac{c_s \tilde{W}_{\nu, s}}{\Sigma_L + k_s \mu_\nu} e^{k_s x}, \quad (4.75)$$

где c_s — постоянные, определяемые из граничных условий, а k_s — корни соответствующего характеристического уравнения, получающегося при подстановке решения (4.75) в уравнение (4.73). В случае изотропной индикатрисы рассеяния характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\Sigma_s}{2} \sum_{m=-N/2}^{N/2} \frac{a_m}{\Sigma_L + \mu_m k_s} = 1. \quad (4.76)$$

Поскольку обычно узлы μ_ν выбираются симметрично, т. е. $\mu_\nu = -\mu_{-\nu}$, то при замене k_s на $-k_s$ левая часть формулы (4.76) не изменится. Если какое-либо k_s является решением задачи, то решением является также и $-k_s$ ($k_{-s} = -k_s$). Объединив симметричные члены, формулу (4.76) можно записать в более удобном виде:

$$\Sigma_s \Sigma_L \sum_{m=1}^{N/2} \frac{a_m}{\Sigma_L^2 - \mu_m^2 k_s^2} = 1. \quad (4.77)$$

Уравнение (4.77) имеет $N/2$ корней, а уравнение (4.76) — N корней.

Если индикатриса рассеяния имеет вид

$$\tilde{W}(\mu_0) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} W_l P_l(\mu_0), \quad (4.78)$$

то при $L < \frac{N}{2}$ характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\left| \delta_{ij} - \frac{(2l+1)}{2} \tilde{W}_l \sum_{m=-N/2}^{N/2} \frac{a_m P_l(\mu_m) P_j(\mu_m)}{\Sigma_L + k\mu_m} \right| = 0. \quad (4.79)$$

При линейной анизотропии, т. е. при $L=1$, уравнение (4.79) записывается следующим образом:

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{\tilde{W}_0}{2} \sum_m \frac{a_m}{\Sigma_L + k\mu_m}; & -\frac{3\tilde{W}_1}{2} \sum_m \frac{a_m \mu_m}{\Sigma_L + k\mu_m} \\ -\frac{\tilde{W}_0}{2} \sum_m \frac{a_m \mu_m}{\Sigma_L + k\mu_m}; & 1 - \frac{3\tilde{W}_1}{2} \sum_m \frac{a_m \mu_m^2}{\Sigma_L + k\mu_m} \end{array} \right| = 0. \quad (4.80)$$

На поверхности раздела различных сред функция $\Phi(x, \mu_v)$ непрерывна для $v = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \dots, -1, 1, \dots, \frac{N}{2}$. Очевидно, что такие граничные условия более точны, чем граничные условия в методе сферических гармоник и $2P_N$ -методе.

В качестве узловых точек в D_N -приближении обычно принимают так называемые узлы Гаусса, являющиеся корнями уравнения

$$P_N(\mu_v) = 0. \quad (4.81)$$

Преимуществом такого специального выбора узловых точек является минимизация ошибки в равенстве (4.72).

Если сравнить между собой D_{2N} -приближение метода дискретных ординат и P_{2N} -приближение метода сферических гармоник, то можно отметить, что в первом число характеристических решений — корней уравнения (4.81), а значит, и число дискретных узлов равно $2N$, а во втором число характеристических решений, которыми служат гармоники потока (вместе с нулевой — скалярным потоком), равно $(2N+1)$.

Таким образом, можно говорить о соответствии числа характеристик решения задачи для D_{2N} -приближения метода Вика-Чандрасекара и для P_{2N} -приближения метода сферических гармоник. В теории переноса [1, 15] доказана эквивалентность этих приближений при выборе в качестве узловых точек

μ , корней уравнения (4.81), т. е. $P_{2N}(\mu) = 0$. Если формулу (4.72) применить не к полному интервалу угловой переменной $(-1, +1)$, а к каждому из интервалов $(-1, 0)$ и $(0, +1)$ в отдельности и принять для этих интервалов корни полиномов

$$P_N(2\mu \pm 1) = 0, \quad (4.82)$$

т. е. использовать «двойную» формулу Гаусса, то получается $2D_N$ -приближение метода дискретных ординат, эквивалентное $2P_{N-1}$ -приближению полиномиального метода Ивона — Мертенса.

При расчетах с помощью методов дискретных ординат часто используется обобщенное транспортное приближение индикатрисы рассеяния (3.23), которое фактически означает замену при $l > L$ величин $W_l^{k \rightarrow i}$ в формуле (4.68) на $W_l^{*k \rightarrow i}$:

$$W_l^{*k \rightarrow i} = \sum_s^i \chi_{L+1}^i \delta_{lk}. \quad (4.83)$$

При расчетах потока нейтронов каждой данной i -й энергетической группы оказывается более точным так называемое диагональное транспортное приближение, описанное в работе [16]. При этом при $l > L$

$$W_l^{*k \rightarrow i} = W_{L+1}^{i \rightarrow i} \delta_{lk}. \quad (4.84)$$

Однако в этом случае возрастает погрешность расчетов потока нейтронов более низких энергий. Кроме того, недостатком «диагонального» транспортно-го приближения является зависимость результатов от групповой структуры. А именно при достаточно широких энергетических группах это приближение может совпадать с обобщенным транспортным приближением, а при стремлении полного числа групп к бесконечности величина (4.84) стремится к нулю.

Весьма интересен анализ зависимости результатов расчетов методов дискретных ординат от порядка L обобщенного транспортного приближения. На рис. 4.5 приведены результаты таких расчетов для потока нейтронов в бесконечной воздушной среде на расстоянии 825 м от точечного источника (примерно 4 длины свободного пробега) [17]. Как видно, результаты расчетов весьма слабо зависят от L и отличаются друг от друга

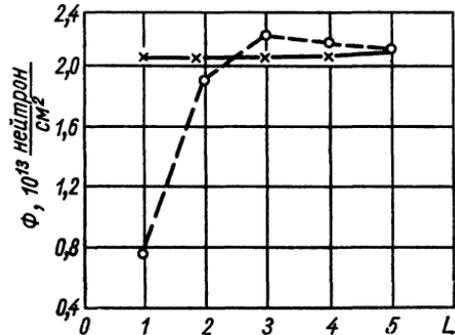


Рис. 4.5. Результаты расчета потока нейтронов энергии 12—14 Мэв на расстоянии 825 м в воздухе от точечного источника:

× — расчеты в обобщенном транспортном приближении L -го порядка; ○ — расчеты в P_L -приближении [17].

не более чем на 7%. Это объясняется сильной вытянутостью индикатрисы рассеяния в направлении вперед, что и обеспечило успех даже обычного транспортного приближения. Для нейтронов промежуточных энергий угловое распределение при рассеянии менее анизотропно. Поэтому следует ожидать, что в этом случае обычное транспортное приближение будет менее эффективно, однако обобщенное транспортное приближение будет достаточно хорошим уже при небольших L .

На рис. 4.5 для сравнения приведены также результаты расчетов в следующем приближении:

$$W^{i \rightarrow k}(x, \mu_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^L (2l+1) W_l^{i \rightarrow k} P_l(\mu_0), \quad (4.85)$$

$$\Sigma_l^i = \Sigma_L^i \text{ при } l > L.$$

Таким образом, в этом случае при $l > L$

$$W_l^{i \rightarrow i} = 0. \quad (4.86)$$

Такое приближение эквивалентно обычному «согласованному» P_L -приближению, когда порядок приближения углового потока (3.122) равен порядку приближения индикатрисы (3.21) $N=L$. Как видим, в этом случае погрешность приближений низкого порядка достаточно велика.

Весьма удобным для реализации на электронно-вычислительных машинах явилось сочетание [18] $2D_N$ -приближения метода дискретных ординат с применением принципа инвариантности переноса излучения, известного под названием принципа инвариантности Амбарцумяна [10]. Этот принцип заключается в том, что законы отражения и пропускания излучения какой-либо средой инвариантны по отношению к малым перемещениям (сдвигу) или повороту этой среды.

Введем понятия операторов пропускания $\hat{T}(x, \Delta)$ и отражения $\hat{S}(x, \Delta)$ нейтронов слоем толщиной Δ . Обозначим Φ^+ угловой поток излучения в положительном направлении оси x и Φ^- — в отрицательном. Тогда

$$\Phi^+(x + \Delta) = \hat{T}(x, \Delta) \Phi^+(x), \quad (4.87)$$

$$\Phi^-(x) = \hat{S}(x, \Delta) \Phi^+(x).$$

Значения операторов отражения и пропускания совокупности различных слоев могут быть выражены через значения этих

операторов отдельных слоев. Например, если \hat{T}_1 и \hat{S}_1 характеризуют первый слой, а \hat{T}_2 и \hat{S}_2 — второй, то \hat{T} - и \hat{S} -совокупности этих слоев выражаются следующим образом:

$$\hat{T} = \hat{T}_2(1 - \hat{S}_1\hat{S}_2)^{-1}\hat{T}_1, \quad \hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{T}_1\hat{S}_2(1 - \hat{S}_1\hat{S}_2)^{-1}\hat{T}_1. \quad (4.88)$$

Ослабляющие свойства защиты могут быть описаны с помощью операторов \hat{S} и \hat{T} . Если используется многогрупповое представление энергетической зависимости потока излучения, а его угловое распределение характеризуется значениями в дискретных узлах μ , то S и T будут обычными матрицами. Отсюда и происходит довольно часто использующееся название метода «матрицы пропускания».

Одна из формулировок принципа инвариантности имеет вид [13]

$$\Phi^+(x) = S(x)\Phi^-(x) + T(x)\Phi^+(0), \quad (4.89)$$

где $S(x)$ — матрица отражения излучения слоем $(0, x)$; $T(x)$ — матрица пропускания излучения этим слоем, $\Phi^+(0)$ — граничные условия для потока излучения на внутренней границе защиты. Эту формулу непосредственно применяют для расчета $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ с помощью вычисленных заранее матриц отражения и пропускания последовательности слоев возрастающей толщины.

Функции отражения и пропускания подчиняются интегродифференциальным уравнениям Амбарцумяна. Эти уравнения могут быть получены при применении обычных принципов сохранения баланса числа нейтронов к защите, размеры которой изменены на достаточно малую величину. Функция отражения $S(x; \mu, E; \mu^0, E_0)$ определяется как угловой поток нейтронов энергии E в направлении аггсос μ , отраженных от слоя защиты толщиной x при падении на него единичного углового потока нейтронов энергии E_0 в направлении аггсос μ^0 . Уравнение для функции отражения описывает изменение этой функции при достаточно малом изменении толщины защиты и не включает в себя функцию пропускания. Приравняем разность значений функции пропускания для слоев толщиной $(x+dx)$ и x к изменению функции пропускания, вызванному дополнительными столкновениями нейтронов в достаточно малом слое dx :

$$\begin{aligned} S(x+dx; \mu, E; \mu^0, E_0) - S(x; \mu, E; \mu^0, E_0) = \\ = -\Sigma(x, E_0) S(x; \mu, E; \mu^0, E_0) \frac{dx}{\mu^0} d\mu dE - \\ - \Sigma(x, E) S(x; \mu; E; \mu^0, E_0) \frac{dx}{\mu} d\mu dE + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^0 d\mu' \int_0^E dE' W(x; \mu', E'; \mu^0, E_0) S(x; \mu, E; \mu', E') \frac{dx}{\mu^0} d\mu dE + \\
& + \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu'} \int_0^\infty dE' S(x; \mu', E'; \mu^0, E_0) W(x; \mu, E; \mu', E') \times \\
& \times dx d\mu dE + \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu'} \int_{-1}^0 d\mu'' \int_0^\infty dE' \int_0^\infty dE'' S(x; \mu', E'; \mu^0, E_0) \times \\
& \times W(x; \mu'', E''; \mu', E') S(x; \mu, E; \mu'', E'') dx d\mu dE. \quad (4.90)
\end{aligned}$$

Здесь $W(x; \mu, E; \mu', E')$ — индикатриса рассеяния нейтронов из точки фазового пространства (μ', E') в точку (μ, E) , введенная в гл. I и записанная для наглядности в несколько иной форме.

Первый и второй члены правой части уравнения (4.90) представляют убыль нейтронов в результате столкновений внутри слоя dx . Первый член описывает убыль числа нейтронов, падающих на слой толщиной x («основной слой»), второй — убыль числа отраженных от него нейтронов. Третье слагаемое соответствует приращению числа нейтронов в результате рассеяния в слое dx , попадания в основной слой с энергией E' в направлении $\arccos \mu'$ и последующего отражения. Четвертый член описывает приращение числа нейтронов в результате рассеяния в основном слое, попадания в слой dx с энергией E' в направлении $\arccos \mu'$ и последующего отражения. Пятый член соответствует нейтронам, рассеянным в основном поле, попавшим в слой dx с энергией E' и направлением $\arccos \mu'$, затем рассеянными назад в основной слой с энергией E'' и направлением $\arccos \mu''$ и отраженными там с энергией E в направлении $\arccos \mu$. Перестановка членов приводит к обычной форме уравнения для функции отражения:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} S(x; \mu, E; \mu^0, E_0) = & - \left[\frac{\Sigma(x, E_0)}{\mu^0} + \frac{\Sigma(x, E)}{\mu} \right] \times \\
& \times S(x; \mu, E; \mu^0, E_0) + \int_{-1}^0 d\mu' \int_0^\infty dE' W(x; \mu', E'; \mu^0, E_0) \times \\
& \times S(x; \mu, E; \mu', E') \frac{1}{\mu^0} + \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu'} \int_0^\infty dE' S(x; \mu', E'; \mu^0, E_0) \times \\
& \times W(x; \mu, E; \mu', E) + \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu'} \int_{-1}^0 d\mu'' \int_0^\infty dE' \int_0^\infty dE'' S(x; \mu', E'; \mu^0, E_0) \times \\
& \times W(x; \mu'', E''; \mu', E') S(x; \mu, E; \mu'', E'') \quad (4.91)
\end{aligned}$$

с граничным условием

$$S(0; \mu, E; \mu^0, E_0) = 0. \quad (4.92)$$

Функция пропускания $T(x; \mu, E; \mu^0, E_0)$ определяется как угловой поток нейтронов энергии E в направлении $\arccos \mu$, прошедших через слой защиты толщиной x при падении на него единичного углового потока нейтронов энергии E_0 в направлении $\arccos \mu^0$. Вывод уравнения для функции пропускания проводится аналогично уравнению для функции отражения при использовании того обстоятельства, что различие значений функции пропускания слоев толщиной $(x+dx)$ и x обусловлено дополнительными столкновениями нейтронов в достаточно тонком слое dx . Обычно уравнение для функции пропускания записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} T(x; \mu, E; \mu^0, E_0) = & -\frac{\Sigma(x, E_0)}{\mu^0} T(x; \mu, E; \mu^0, E_0) + \\ & + \int_{-1}^0 d\mu' \int_0^\infty dE' W(x; \mu', E'; \mu^0, E_0) T(x; \mu, E; \mu', E') + \\ & + \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu'} \int_{-1}^0 d\mu'' \int_0^\infty dE' \int_0^\infty dE'' S(x; \mu', E'; \mu^0, E_0) W(x; \mu'', E''; \mu', E') \times \\ & \times T(x; \mu, E; \mu'', E'') \end{aligned} \quad (4.93)$$

с граничным условием

$$T(0; \mu, E; \mu^0, E_0) = \delta(\mu - \mu^0) \delta(E - E_0). \quad (4.94)$$

Первый член правой части уравнения (4.93) представляет убыль числа падающих на основной слой нейтронов в результате столкновений внутри слоя dx . Второй член описывает приращение числа нейтронов за счет рассеяния в слое dx , попадания в основной слой с энергией E' в направлении $\arccos \mu'$ и последующего отражения с энергией E в направлении $\arccos \mu$. Третье слагаемое соответствует нейтронам, отраженным из основного слоя в слой dx , рассеянным там назад в основной слой и окончательно вышедшим из него с энергией E в направлении $\arccos \mu$.

Уравнения для функции отражения (4.91) и для функции пропускания (4.93) являются нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями. При этом уравнение для функции отражения включает только эту функцию и не зависит от функции пропускания. Уравнение для функции пропускания несколько проще по форме, но содержит также и функцию отражения, которую необходимо предварительно вычислить. Поэтому при расчете защиты необходимо решить два связанных между собой нелинейных интегро-дифференциальных урав-

нения. Такая ситуация существенно отличается от решения уравнения Больцмана (1.1) для потока нейтронов, которое является линейным интегро-дифференциальным уравнением.

Уравнения (4.91) и (4.93) в многогрупповом приближении записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} S^{j \rightarrow i}(x; \mu; \mu^0) = & - \left[\frac{\Sigma_L^j}{\mu^0} + \frac{\Sigma_L^i}{\mu} \right] S^{j \rightarrow i}(x; \mu; \mu^0) + \\ & + \int_1^0 d\mu' \sum_{k=j}^i \tilde{W}^{j \rightarrow k}[x, \mu_0(\mu', \mu^0)] S^{k \rightarrow i}(x; \mu; \mu') \frac{1}{\mu^0} + \\ & + \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu'} \sum_{k=j}^i S^{j \rightarrow k}(x; \mu'; \mu^0) \tilde{W}^{k \rightarrow i}[x; \mu_0(\mu, \mu')] + \\ & + \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu'} \int_{-1}^0 d\mu'' \sum_{k=j}^i \sum_{l=j}^k S^{j \rightarrow l}(x, \mu', \mu^0) \tilde{W}^{l \rightarrow k}[x, \mu_0(\mu'', \mu')] \times \\ & \times S^{k \rightarrow i}(x; \mu; \mu''); \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} T^{j \rightarrow i}(x; \mu; \mu^0) = & - \frac{\Sigma_L^j}{\mu^0} T^{j \rightarrow i}(x; \mu; \mu^0) + \int_{-1}^0 d\mu' \sum_{k=j}^i \tilde{W}^{i \rightarrow k} \times \\ & \times [x, \mu_0(\mu', \mu^0)] T^{k \rightarrow i}(x; \mu; \mu') + \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu'} \int_{-1}^0 d\mu'' \sum_{k=j}^i \sum_{l=j}^k S^{j \rightarrow l} \times \\ & \times (x; \mu'; \mu^0) \tilde{W}^{l \rightarrow k}[x, \mu_0(\mu'', \mu')] T(x; \mu; \mu''). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Здесь $S^{j \rightarrow i}(x; \mu; \mu^0)$ и $T^{j \rightarrow i}(x; \mu; \mu^0)$ — функции отражения и пропускания в направлении аггсос μ для слоя толщиной x нейтронов j -й энергетической группы, падающих на слой в направлении аггсос μ^0 , с переходом в i -ю энергетическую группу.

Далее уравнения (4.95) и (4.96) обычно записываются для системы дискретных углов аггсос $\mu\nu$ подобно системе (4.73) и решаются обычными численными методами. Следует отметить, что иногда для решения этих уравнений используется $2P_N$ -метод [19]. Кроме того, для однородных однослойных защит возможны полуаналитические решения.

При расчетах многослойных гетерогенных защит можно использовать то, что матрицы S и T для каждого защитного слоя не зависят от смежных слоев и могут быть сохранены в памяти ЭВМ. С помощью этих матриц можно рассчитать суммарные матрицы отражения и пропускания любой многослойной защиты, содержащей такие слои. Таким образом, в принципе возможно прямое вычисление потока нейтронов, пропущенных

защитой, без детальных расчетов распределения нейтронов внутри этой защиты. Однако из-за необходимости знать распределение источников вторичного γ -излучения детальные распре-

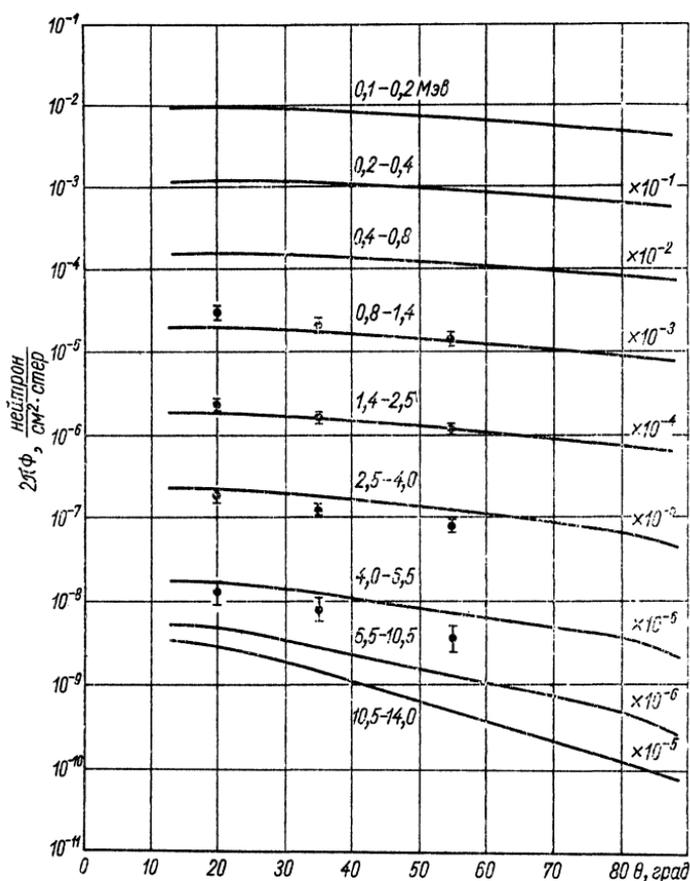


Рис. 4.6. Угловые распределения потока нейтронов различных энергетических групп за барьером толщиной 50 см из карбида бора плотностью 1,3 г/см³:

\square — эксперимент; — — — расчет.

деления потока нейтронов почти всегда требуется вычислять. Для этого можно использовать соотношение (4.89).

Приведем некоторые примеры расчетов методом дискретных ординат. На рис. 4.6 приведены результаты расчетов в $2D_7$ -приближении углового распределения различных энергетических групп за защитой из карбида бора толщиной 50 см, облучаемой плоским мононаправленным источником нейтронов спектра реактора [20]. Результаты расчетов по программе РОЗ («Расчет

одномерной защиты») [18], основанной на модификации метода дискретных ординат, использующей принцип инвариантности, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, полученными с помощью спектрометра быстрых нейтронов.

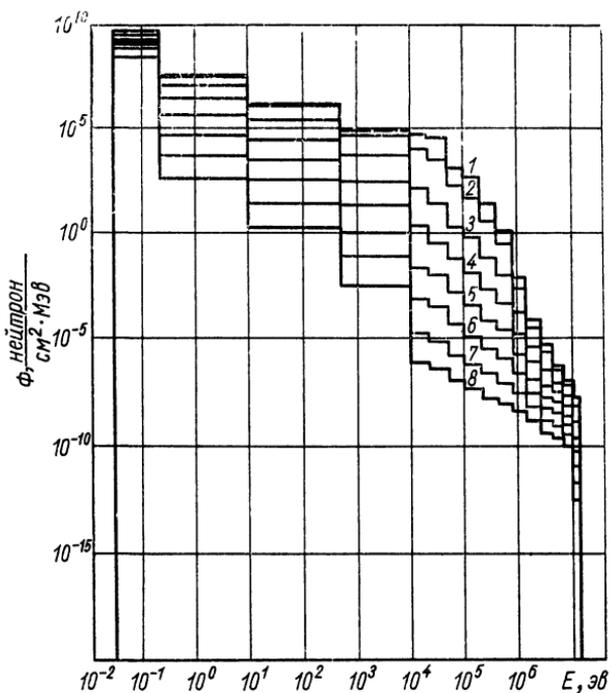


Рис. 4.7. Энергетическое распределение потока нейтронов в графитовой защите на различных расстояниях от источника КИН [21]:

1 — 0; 2 — 10 см; 3 — 30 см; 4 — 50 см; 5 — 70 см; 6 — 90 см; 7 — 110 см; 8 — 130 см.

На рис. 4.7 приведены результаты расчетов в $2D_7$ -приближении энергетического спектра нейтронов промежуточных энергий в протяженной графитовой защите [21], облучаемой сильно «смягченным» спектром нейтронов. С помощью этих энергетических спектров в работе [21] рассчитаны изменения показаний различных резонансных индикаторов по толщине защиты. Сравнение с экспериментальными данными показало удовлетворительное согласие.

На рис. 4.8 приведены результаты расчета потока быстрых нейтронов (с $E > 1,4$ МэВ), в гетерогенной железо-водной защите, примыкающей к водо-водяному реактору. Результаты расчетов в $2D_7$ -приближении сравниваются с P_1 - и P_{2tr} -приближениями. Как видно, даже на небольших расстояниях от источ-

ника (менее 50 см) P_{2tr} -приближение занижает результат в два раза по сравнению с $2D_7$ -приближением, расчеты с помощью которого проверялись экспериментально [20].

К методам дискретных ординат относится также S_N -метод, идеи которого первоначально были сформулированы Карлсо-

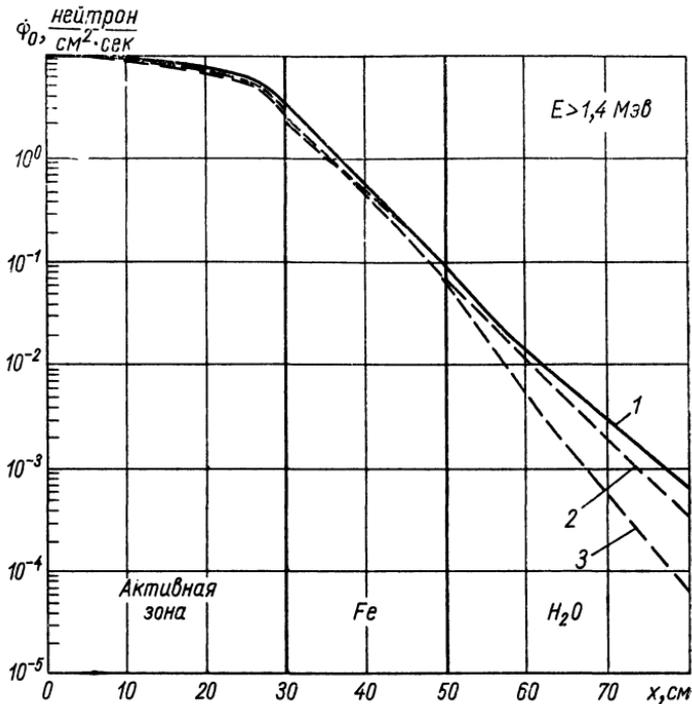


Рис. 4.8. Распределение потоков быстрых нейтронов в железо-водной защите водо-водяного реактора:

1 — расчет методом дискретных ординат в $2D_7$ -приближении; расчет методом сферических гармоник: 2 — P_{2tr} -приближение; 3 — P_1 -приближение.

ном [14]. Рассмотрим общие принципы S_N -метода на примере одногрупповой сферически симметричной задачи. Аналогично с уравнением (4.69) для сферической геометрии можно получить

$$\mu \frac{\partial \Phi(r, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \Phi(r, \mu)}{\partial \mu} + \Sigma_L \Phi(r, \mu) = \int_{-1}^{+1} d\mu' \Phi(r, \mu') \times \bar{W} \times (r, \mu_0) + q(r, \mu) = S(r, \mu). \quad (4.97)$$

Интервал изменения μ ($-1, 1$) делится на N подынтервалов (не обязательно равных) точками μ_n , причем $\mu_{\frac{N}{2}} = -1$, $\mu_{\frac{N}{2}} = 1$.

Внутри каждого подынтервала угловой поток аппроксимируется линейной функцией (как в диффузионном приближении)

$$\Phi(r, \mu) = \frac{\mu - \mu_{j-1}}{\mu_j - \mu_{j-1}} \Phi(r, \mu_j) + \frac{\mu_j - \mu}{\mu_j - \mu_{j-1}} \Phi(r, \mu_{j-1}), \quad (4.98)$$

где $\mu_{j-1} \leq \mu \leq \mu_j$. Если теперь подставить формулу (4.98) в уравнение (4.97) и проинтегрировать результат по μ от μ_{j-1} до μ_j , то придем к системе N обыкновенных дифференциальных уравнений (индекс группы опущен)

$$\left(a_j \frac{d}{dr} + \frac{b_j}{r} + \Sigma_L \right) \Phi(r, \mu_j) + \left[a_j \frac{d}{dr} - \frac{b_j}{r} + \Sigma_L \right] \Phi(r, \mu_{j-1}) = 2S(r, \mu_j), \quad (4.99)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_j &= \frac{2\mu_j + \mu_{j-1}}{3}; \quad \bar{a}_j = \frac{\mu_j + 2\mu_{j-1}}{3}; \\ b_j &= \frac{2}{3} \frac{3 - \mu_j^2 - \mu_j \mu_{j-1} - \mu_{j-1}^2}{\mu_j - \mu_{j-1}}; \\ S(r, \mu_j) &= \frac{1}{\mu_j - \mu_{j-1}} \cdot \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} S(r, \mu) d\mu. \end{aligned} \right\} \quad (4.100)$$

При вычислении $S(r, \mu_j)$ используется квадратурная формула типа (4.72).

Вернемся к уравнению (4.97) и проинтегрируем его по μ . Тогда получим уравнение для скалярного потока $\Phi_0(r)$ и тока $J(r)$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) J(r) + \Sigma_{yb} \Phi_0(r) = S_0(r), \quad (4.101)$$

которое выражает баланс нейтронов. Это легко увидеть, если обе части равенства умножить на $4\pi r^2$ и проинтегрировать по r от a до b . Полученный результат

$$4\pi b^2 J(b) - 4\pi a^2 J(a) = 4\pi \int_a^b r^2 [S_0(r) - \Sigma_{yb} \Phi_0(r)] dr \quad (4.102)$$

показывает, что интенсивность излучения, проходящего через поверхность $r=b$ и поверхность $r=a$, отличается общим числом нейтронов, родившихся в сферическом слое $a \leq r \leq b$.

Комбинируя выражение (4.98) с уравнением (4.100), найдем, что

$$\Phi_0(r) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} \delta_j \Phi(r, \mu_j); \quad J(r) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} c_j \Phi(r, \mu_j), \quad (4.103)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta_j &= \frac{l_j + l_{j+1}}{2}; \quad \left(j \neq \pm \frac{N}{2} \right); \\ \delta_{\pm \frac{N}{2}} &= \frac{l_{\pm \frac{N}{2}}}{2}; \quad l_j = \mu_j - \mu_{j-1}; \\ c_j &= \frac{\delta_j}{2} (\bar{a}_{j+1} + a_j); \quad \left(j \neq \pm \frac{N}{2} \right); \\ &\quad \pm c_{\pm \frac{N}{2}} = \delta_{\pm \frac{N}{2}} a_{\pm \frac{N}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.104)$$

Исходные граничные условия обычно задаются на внешней границе системы. Это означает, что $(N+1)$ -е уравнение, являющееся необходимым дополнением к равенству (4.99), должно включать только функцию $\Phi(r, \mu = -1)$. Подставив $\mu = -1$ в уравнение (4.97), получим

$$\left(-\frac{d}{dr} + \Sigma_{yB} \right) \Phi(r, \mu = -1) = S(r, \mu = -1). \quad (4.105)$$

Этим завершается S_N -преобразование.

Достоинством S_N -метода является простота, что способствует его использованию при расчетах на вычислительных машинах. К недостаткам S_N -метода относится его плохая сходимость при «малом уводе» из групп и затруднения, возникающие при учете анизотропного рассеяния. В ряде случаев S_N -метод приводит к явлениям неустойчивости, выражающимся в пилообразном поведении функций пространственного распределения нейтронов, а также функций углового распределения потока нейтронов. Поэтому S_N -метод не очень хорошо описывает прохождение нейтронов на большие расстояния. Особенно это проявляется при разбиении области изменения угловой переменной на равные интервалы, так как при этом плохо описывается распределение нейтронов, рассеянных на малые углы.

Как видно, метод дискретных ординат Вика — Чандрасекара и S_N -метод имеют много общих черт. В последнее время интенсивно развивается «дискретный S_N -метод» (DS_N), являющийся суперпозицией этих методов. При этом, как и в методе дискретных ординат, используются некоторые дискретные направления $\bar{\mu}_j$. Однако в отличие от обычного S_N -метода не делается каких-либо предположений о форме углового распределения потока в выбранных интервалах. Для каждого интервала (μ_{j-1}, μ_j) определяются значения $\bar{\mu}_j (\mu_{j-1} \leq \bar{\mu}_j \leq \mu_j)$ обычно из условий типа $\frac{1}{N} \sum_j |\bar{\mu}_j|^s = \frac{1}{s+1}$ (s — некоторые константы). Чис-

ленная обработка дискретного S_N -метода проще S_N -метода и метода дискретных ординат. Это особенно заметно в сферической геометрии, где использование метода дискретных ординат в «чистом» виде довольно затруднительно.

К методам дискретных ординат относится также метод характеристик, первоначально предложенный В. Владимировым [2] и развитый впоследствии многими авторами. Метод основан на использовании характеристик дифференциальной части уравнения переноса. Метод характеристик оказывается точнее S_N -метода при приближениях одинакового порядка при расчете угловых распределений потока нейтронов, однако функция скалярного потока, рассчитанная S_N -методом, меньше отличается от точного решения, чем результаты расчета методом характеристик.

Применение дискретного S_N -метода и метода характеристик перспективно также и для неоднородной геометрии.

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Асимптотические решения уравнения переноса нейтронов, описывающие распределения нейтронного поля на больших расстояниях от источника, характерных для защиты, имеют важное значение для понимания характера ослабления потока нейтронов.

Рассмотрим бесконечную однородную среду, в которой на поверхности $x=0$ расположен плоский изотропный источник мощностью q_0 . Многогрупповая система уравнений для гармоник полного потока $\Phi_l(x)$, аналогичная системе (3.30), будет иметь вид

$$\begin{aligned} l \frac{d\Phi_{l-1}^i}{dx} + (l+1) \frac{d\Phi_{l+1}^i}{dx} + (2l+1) \Sigma_{\text{ув}, l}^i \Phi_l^i(x) = \\ = (2l+1) \sum_{k=k_0}^{i-1} W_l^{k \rightarrow i} \Phi_l^k(x) + \delta_{l0} q_0^i \delta(x). \end{aligned} \quad (4.106)$$

Будем считать среду состоящей из достаточно тяжелых ядер. Тогда, если $\Delta u \gg r$,

$$W_l^{k \rightarrow i} = \delta(k+1-i) W_{ls}^{k \rightarrow i} + \delta_{l0} W_{ln}^{k \rightarrow i}. \quad (4.107)$$

Поскольку для тяжелых элементов потеря энергии при упругом рассеянии мала, а учет анизотропии рассеяния в переходах между группами вызывает затруднения при решении системы (4.106), перейдем к приближенному рассмотрению. При этом переход нейтронов благодаря упругому замедлению из каждой группы в низлежащую считается изотропным, а анизотропия перехода учитывается косвенным образом. А именно, та часть нейтронов, которая рассеялась анизотропно, считается остаю-

щейся внутри рассматриваемой группы. Неупругое рассеяние считается изотропным. Тогда

$$W_{is}^{k \rightarrow i} = \delta_{i0} W_{is}^{k \rightarrow i} + \delta_{i0} W_{in}^{k \rightarrow i} \text{ при } k \neq i. \quad (4.108)$$

В этом случае систему уравнений (4.106) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} l \frac{d\Phi_{l-1}^i}{dx} + (l+1) \frac{d\Phi_{l+1}^i}{dx} + (2l+1) \Sigma_{\text{yb}}^{*i} \Phi_l^i(x) &= \delta_{i0} S_0^i(x) = \\ &= \delta_{i0} \sum_{k=k_0}^{i-1} W_0^{k \rightarrow i} \Phi_0^{k \rightarrow i}(x) + \delta_{i0} q_0^i \delta(x). \end{aligned} \quad (4.109)$$

Здесь

$$\Sigma_{\text{yb}, l}^{*i} = \begin{cases} \Sigma_{\text{yb}}^i & \text{при } l = 0, \\ \Sigma_l - \Sigma_{sl}^i & \text{при } l \neq 0. \end{cases} \quad (4.110)$$

Применим к системе (4.109) преобразование Фурье:

$$\Phi_l^i(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F_l^i(k) \exp(-kx) dk, \quad (4.111)$$

$$F_l^i(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_l^i(x) \exp(kx) dx. \quad (4.112)$$

В результате получим рекуррентную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{k}{2l+1} [lF_{l-1}^i(k) + (l+1)F_{l+1}^i(k)] + \Sigma_{\text{yb}, l}^{*i} F_l^i(k) &= \\ = \delta_{i0} S_0^i(k) = \delta_{i0} \sum_{k=k_0}^{i-1} W_0^{k \rightarrow i} F_0^k(k) + \delta_{i0} q_0^i. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Для решения этой системы воспользуемся методом, предложенным в работах [22, 23]. Введя обозначения

$$Z_{l+1}^i(k) = \frac{l+1}{2l+1} \frac{kF_{l+1}^i(k)}{F_l^i(k)}, \quad (4.114)$$

$$\beta_l(k) = \frac{k^2 l^2}{4l^2 - 1},$$

из системы однородных уравнений (4.113) при $l > 0$ можно получить рекуррентное соотношение

$$Z_l^i(k) = \frac{\beta_l(k)}{\Sigma_{\text{yb}}^{*i} - Z_{l+1}^i(k)}. \quad (4.115)$$

Используя это соотношение, представим $Z_1^i(k)$ в виде непрерывной дроби

$$Z_1^i(k) = \frac{\beta_1(k)}{\Sigma_{\text{ув}, 1}^{*i} - \frac{\beta_2(k)}{\Sigma_{\text{ув}, 2}^{*i} - \dots - \frac{\beta_N}{\Sigma_{\text{ув}, N}^{*i} - Z_N^i(k)}}}. \quad (4.116)$$

Здесь N — номер приближения (наивысший номер из учитываемых гармоник потока).

На основании свойств непрерывных дробей [24] значения функции

$$Z^i(k) = \Sigma_{\text{ув}}^i - Z_1^i(k) \quad (4.117)$$

могут быть вычислены как предел

$$Z^i(k) = \frac{U^i(k^2)}{V^i(k^2)} = \lim_{N \rightarrow \infty} Z_{(N)}^i(k) \quad (4.118)$$

при

$$Z_{(N)}^i(k) = \frac{U_{(N)}^i(k^2)}{V_{(N)}^i(k^2)} = \frac{U_{N+1}^i(k^2) - Z_N^i(k) U_N^i(k^2)}{V_{N+1}^i(k^2) - Z_N^i(k) V_N^i(k^2)}. \quad (4.119)$$

Здесь U_N^i и V_N^i — полиномы по k^2 , удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$\Sigma_{\text{ув}, l+1}^{*i} \omega_{l+1}^i = \Sigma_{\text{ув}, l}^{*i} \omega_l^i - \frac{\beta_l^i}{\Sigma_{\text{ув}, l-1}^{*i}} \omega_{l-1}^i \quad (4.120)$$

с начальными значениями $U_0^i(k^2) = 1$, $U_1^i(k^2) = \Sigma_{\text{ув}}^i$;

$$V_0^i(k^2) = 0; \quad V_1^i(k^2) = 1.$$

При представлении $\omega_{l+1}^i(k^2)$ в виде

$$\omega_{l+1}^i(k^2) = \omega_l^i(k^2) \sum_{j=0}^{p(l)} (-1)^j g_{j, l+1}^i k^{2j} \quad (4.121)$$

формула (4.120) приводит к рекуррентному соотношению для коэффициентов аппроксимации (4.121)

$$g_{j, l+1}^i = g_{j, l}^i + \frac{l^2}{4l^2 - 1} \frac{g_{j-1, l-1}^i}{\Sigma_{\text{ув}, l}^{*i} \Sigma_{\text{ув}, l-1}^{*i}} \quad (0 \leq j \leq l \leq N) \quad (4.122)$$

при

$$g_{0, 0}^i = \frac{\omega_0^i}{\omega_1^i} \Sigma_{\text{ув}}^i; \quad g_{0, 1}^i = 1.$$

Для оценки величины $Z_N^i(k)$, входящей в выражение (4.119), исследуем асимптотическое угловое распределение потока.

Для рассматриваемой задачи уравнение типа (4.67) принимает следующий вид:

$$\mu \frac{\partial \Phi^l(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma_L \Phi^l(x, \mu) = \sum_{i=0}^N \frac{2l+1}{2} \times \\ \times W_i^{*, i \rightarrow i} \Phi_i^i(x) P_i(\mu) + \frac{S_0^i(x)}{2}. \quad (4.123)$$

Здесь

$$W_i^{*, i \rightarrow i} = \begin{cases} W_0^{i \rightarrow i} + (\Sigma_L^i - \Sigma_0^i) & \text{при } l = 0; \\ \Sigma_{sl}^i + (\Sigma_L^i - \Sigma_i^i) & \text{при } l \neq 0. \end{cases}$$

Применив к этому уравнению преобразование Фурье

$$F^l(k, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^l(k, \mu) \exp(k, x) dx, \quad (4.124)$$

получим

$$(\Sigma_L^i - k\mu) F^l(k, \mu) = \sum_{i=0}^N \frac{2l+1}{2} W_i^{*, i \rightarrow i} F_i^i(k) P_i(\mu) + \frac{S_0^i(k)}{2}. \quad (4.125)$$

Отсюда асимптотическое угловое распределение функции $F^i(k, \mu)$, т. е. вдали от источника, при пренебрежении влиянием вышележащих групп, имеет следующий вид:

$$F^l(k, \mu) \approx \frac{1}{\Sigma_L^i - k\mu} \sum_{i=0}^N \frac{2l+1}{2} W_i^{*, i \rightarrow i} F_i^i(k) P_i(\mu). \quad (4.126)$$

Используя это выражение при $l \geq N+1$, получим

$$\frac{F_{l+1}^i(k)}{F_l^i(k)} = \frac{Q_{l+1}(\Sigma_L^i/k)}{Q_l(\Sigma_L^i/k)}, \quad (4.127)$$

где $Q_l(x)$ — l -я функция Лежандра второго рода

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(\mu)}{x - \mu} d\mu. \quad \text{В этом случае}$$

$$Z_l^i(k) = \frac{l_k}{2l-1} \frac{Q_l(\Sigma_L^i/k)}{Q_{l-1}(\Sigma_L^i/k)}. \quad (4.128)$$

При $N \gg 1$ можно получить

$$Z_N^l(k) \approx \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{k^2}{(\Sigma_L^l)^2}} \right). \quad (4.129)$$

Этим выражением можно приближенно воспользоваться и при $l < N$.

Подставляя формулу (4.127) в уравнение (4.113) при $l=0$, получим следующее выражение для $F_0^l(k)$:

$$F_0^l(k) = \frac{S_0^l(k)}{Z^l(k)} = \frac{\sum_{k=k_0}^{i-1} W_0^{k \rightarrow i} F_0^k(k) + q_0^i}{Z^l(k)}. \quad (4.130)$$

Отметим, что, согласно этому выражению, $F_0^l(k)$ зависит от дробей типа

$$\frac{1}{Z^i(k)}; \quad \frac{1}{Z^i(k) Z^k(k)} \quad (k \leq i-1); \quad \frac{1}{Z^i(k) Z^k(k) Z^\alpha(k)} \\ (\alpha \leq k-1 \leq i-2) \text{ и т. д.}$$

Пространственное распределение потока нейтронов каждой группы можно определить, используя инверсию (обратное преобразование) Фурье (4.111). Функции $\frac{1}{Z^i(k)}$ имеют в плоскости комплексной переменной k полюса $k_l < \Sigma_{\text{ув}, N}^*$ [$Z^i(k_l) = 0$] и линии разреза $k > \Sigma_{\text{ув}, N}^*$. Функции $\frac{1}{Z^i Z^k Z^\alpha}$ имеют полюса в точках k_i, k_k, k_α и т. д. Для получения асимптотического решения достаточно вычислить вычеты функции (4.130) в этих полюсах $k_m (m \leq i)$. При этом можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp(-kx)}{Z^m(k)} dk = \text{res} \frac{1}{Z^m(k)} \Big|_{k=k_m} = \eta_m \exp(-k_m x), \quad (4.131)$$

где

$$\eta_m = - \frac{1}{\left[\frac{\partial}{\partial k} Z^m(k) \right] \Big|_{k=k_m}}.$$

Используя выражение (4.119), можно получить:

$$\frac{\partial}{\partial k} Z^m(k) = \frac{1}{V^m(k^2)} \frac{\partial}{\partial k} U^m(k^2) - \frac{U^m(k^2)}{[V^m(k^2)]^2} \frac{\partial}{\partial k} V^m(k^2). \quad (4.132)$$

Поскольку $U^m(k_m^2) = 0$,

$$\eta_m = - \frac{V^m(k_m^2)}{\left[\frac{\partial}{\partial k} U^m(k^2) \right]_{k=k_m}}.$$

При этом, учитывая формулы (4.119) и (4.129), можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} U_{(N)}^i(k^2) &\approx \frac{\partial}{\partial k} U_{N+1}^i(k^2) - \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{k^2}{\Sigma_L^2}} \right] \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial k} U_N^i(k^2) - \frac{k U_{N-1}^i(k^2)}{2 (\Sigma_L^i)^2 \sqrt{1 - \frac{k^2}{(\Sigma_L^i)^2}}}. \end{aligned}$$

Введя обозначение $Z_{ij} = Z^i(k_j) \neq 0$ (при $i \neq j$), выражения асимптотической зависимости скалярного потока при $x > 0$ можно записать окончательно следующим образом:

$$\Phi_{0,ac}^{i=1} = q_0^1 \eta_1 \exp(-k_1 x), \quad (4.133)$$

$$\Phi_{0,ac}^2(x) = q_0^2 \eta_2 \exp(-k_2 x) + q_0^1 W_0^{1-2} \left[\frac{\eta_1 \exp(-k_1 x)}{Z_{21}} + \frac{\eta_2 \exp(-k_2 x)}{Z_{12}} \right].$$

Собственные числа k_i определяются как наименьший корень уравнения

$$U^i(k_i) = 0, \quad (4.134)$$

которое приближенно можно заменить уравнением

$$U_{N+1}^i(k_i) = 0 \quad (4.135)$$

при достаточно большом N .

Для наглядности рассмотрим корни уравнения (4.135) при малых значениях N . Согласно выражениям (4.121) и (4.122), при $N=1$

$$U_2^i(k_i^2) = U_1^i \left(1 - g_{1,2}^i k_i^2 \right) = \Sigma_{yв}^i \left(1 - \frac{k_i^2}{3 \Sigma_{yв}^i \Sigma_{yв,1}^{*i}} \right) = 0.$$

Отсюда $k_i = \sqrt{3 \Sigma_{yв}^i \Sigma_{yв,1}^{*i}}$, что совпадает с формулой (3.49) для P_1 -приближения. В практике расчетов защиты экспоненциальную зависимость потока излучения $\Phi_0(x) \sim \exp(-kx)$ часто представляют в виде

$$\Phi(x) = B \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right),$$

где $\lambda = \frac{1}{k}$ — длина релаксации потока; B — предэкспонента. Согласно выражению, полученному выше, а также формуле (3.49), асимптотическое выражение длины релаксации потока в одногрупповом рассмотрении будет

$$\lambda_1 = (3\Sigma_{yb}\Sigma_{yb, 1})^{-1/2}, \quad (4.136)$$

что совпадает с формулой (3.116а) для длины диффузии в P_1 -приближении.

При $N=2$ уравнение (4.135) принимает вид

$$\frac{U_3}{U_1} = 1 - g_{1, 3}k^2 = 1 - \left(\frac{1}{3\Sigma_{yb}\Sigma_{yb, 1}} + \frac{4}{15\Sigma_{yb, 1}\Sigma_{yb, 2}} \right) \frac{1}{\lambda_2} = 0.$$

Отсюда в P_2 -приближении

$$\lambda_2 = \left(1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{y^2}}{\Sigma_{yb, 2}} \right)^{1/2} (3\Sigma_{yb}\Sigma_{yb, 1})^{1/2}, \quad (4.137)$$

что совпадает с формулой (3.117). Например, в P_4 -приближении уравнение (4.135) имеет следующий вид:

$$1 - g_{1, 5}k^2 + g_{2, 5}k^4 = 0.$$

Тогда

$$\lambda_{ac} = \left[\frac{2g_{2, 5}}{g_{1, 5} - \sqrt{g_{1, 5}^2 - 4g_{2, 5}^2}} \right]^{-1/2}. \quad (4.138)$$

Для иллюстрации в табл. 4.3 приведены для различных P_N -приближений значения характеристического числа уравнения переноса $\frac{k}{\Sigma}$, т. е. обратной асимптотической длины релаксации, в среде с сильной анизотропией рассеяния с индикатрисой $W(\mu_0) = \text{const} \exp(10\mu_0)$. Гармоники этой индикатрисы равны: $W_0=1$; $W_1=0,9$; $W_2=0,73$; $W_3=0,535$; $W_4=0,355$; $W_5=$

Т а б л и ц а 4.3

Характеристические числа уравнения переноса k/Σ в среде с сильной анизотропией рассеяния

$b = \frac{\Sigma_{yb}}{\Sigma}$	P_2	P_3	P_4
0,1	0,2143	0,2135	0,2135
0,2	0,3444	0,3411	0,3410
0,3	0,4624	0,4552	0,4545
0,4	0,5728	0,5612	0,5595
0,5	0,6767	0,6608	0,6575
0,6	0,7736	0,7454	0,7490
0,7	0,8617	0,8413	0,8336
0,8	0,9370	0,9192	0,9098
0,9	0,9893	0,9805	0,9726

$=0,215$; $W_6=0,1189$; $W_7=0,0625$; $W_8=0,0283$; $W_9=0,0123$ [25].
 Как видно, сходимость приближений существенно ухудшается для сред с сильным «эффективным поглощением» — уводом.

Т а б л и ц а 4.4

Длина релаксации λ и асимптотическая предэкспонента для нейтронов с энергией 3,5—4 Мэв в железе

Порядок приближения	λ	B	Порядок приближения	λ	B
P_1	3,78	1,20	P_3	4,66	0,58
P_2	4,49	0,71	P_8	4,70	0,53

В табл. 4.4 приведены значения асимптотической длины релаксации и предэкспоненты B в различных P_N -приближениях для нейтронов с энергией 3,5—4 Мэв в железе ($\chi_1=0,49$; $\chi_2=0,47$; $\chi_3=0,25$; $\chi_4=0,15$; $\chi_5=0,05$; $\chi_6=0,01$). Как видно, в данном случае ошибка P_3 -приближения довольно мала.

В предположении слабого влияния вышележащих групп удается получить явный вид формулы асимптотического углового распределения потока. Применяя к выражению (4.126) преобразование, обратное по отношению к (4.124), получаем

$$\Phi_{ac}^i(x, \mu) \approx \frac{1}{\Sigma_L - k\mu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} W_l^{*i-i} \Phi_{l,ac}(x) P_l(\mu). \quad (4.139)$$

Отсюда видно, что при возрастании увода из данной группы, когда возрастает величина $\frac{k}{\Sigma}$, асимптотическое угловое распределение становится все более резко вытянутым в направлении вперед.

Неасимптотическая часть потока излучения $\Phi_{0,неас}(x)$, влияние которой существенно на расстояниях от источника менее 3—5 длин свободного пробега, может быть получена при вычислении интеграла по линии разреза $k > \Sigma_{ув, N}^*$ при применении обратного преобразования Фурье (4.111) к выражению (4.130). Выражение для этого интеграла получается довольно громоздким, поэтому его вычисляют лишь с применением численных методов интегрирования. Для малых x в случае изотропного рассеяния неасимптотическая часть потока от изотропного источника приближенно выражается следующим образом:

$$\Phi_{0,неас}^i(x) \approx \frac{q_0^i}{2} E_1\left(\frac{5}{4} \Sigma_L^i x\right), \quad (4.140)$$

что очень похоже на соответствующую данному случаю формулу для потока нерассеянного излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. Перев. с англ. Под ред. Г. И. Марчука. М., Атомиздат, 1960.
2. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
3. Гольдштейн Г. Основы защиты реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
4. Биологическая защита ядерных реакторов. Справочник. Сокращ. перев. с англ. Под ред. Ю. А. Егорова. М., Атомиздат, 1965.
5. Николайшвили Ш. С. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Под ред. Д. Л. Бродера и др. М., Госатомиздат, 1963, стр. 24.
6. Yvon J. J. Nucl. Energy, **4**, 305 (1957).
7. Ziering S., Schiff S. Nucl. Sci. Engng, **3**, 635 (1959).
8. Drowbaugh D., Noderger L. Ibid., **6**, 79 (1959).
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
10. Gerstl S. A. W. Nukleonik, **10**, 227 (1967).
11. Gerstl S. A. W., Kofink W. Nucl. Sci. Engng, **33**, 249 (1968).
12. Янке Е. и др. Специальные функции (формулы, графики, таблицы). М., «Наука», 1964.
13. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
14. Карлсон Б., Белл Дж. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 3. М., Атомиздат, 1959, стр. 408.
15. Goertzel G. Nucl. Sci. Engng, **4**, 581 (1958).
16. Pendlebury E. D., Underhill L. H. In: «Physics of Fast and Intermediate Reactors». Vol. III, p. 73. IAEA, Vienna, 1962.
17. Bell G. I. et al. Nucl. Sci. Engng, **28**, 376 (1967).
18. Гермогенова Т. А. и др. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Вып. 2. Под ред. Д. Л. Бродера и др. М., Атомиздат, 1966, стр. 22.
19. Маут А. Х. В сб. «Физические проблемы защиты реакторов». Перев. с англ. Под ред. С. Г. Цыпина и др. М., Атомиздат (в печати).
20. Дегтярев С. Ф. и др. «Атомная энергия», **24**, 370 (1968).
21. Болятко В. В. и др. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Вып. 3. Под ред. Д. Л. Бродера и др. М., Атомиздат, 1969, стр. 138.
22. Бродер Д. Л. и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Доклады советских ученых. Т. 2. М., Атомиздат, 1959, стр. 674.
23. Бродер Д. Л. и др. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Вып. 2. Под ред. Д. Л. Бродера и др. М., Атомиздат, 1966, стр. 88.
24. Марков В. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л., Гостехтеориздат, 1948.
25. Lathrop K. D. Nucl. Sci. Engng, **21**, 498 (1965).

Глава V

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Однокоростное кинетическое уравнение в интегральной форме весьма широко используется при расчетах ядерных реакторов. В случае простой геометрии и изотропного рассеяния* ядро интегрального уравнения имеет простой вид, и поэтому современные вычислительные машины позволяют сравнительно легко решать такие уравнения. При этом решение выявляет многие тонкие недиффузионные эффекты. Весьма успешным может быть использование метода интегральных уравнений и в многогрупповых расчетах переноса нейтронов, особенно в случае сильной анизотропии потока, что характерно для глубокого проникновения нейтронов.

§ 1. СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В гл. I было показано, что система уравнений, описывающих распределение групповой плотности потока нейтронов, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} & \Omega \nabla \Phi^i(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma^i(\mathbf{r}, \Omega) \Phi^i(\mathbf{r}, \Omega) = \\ & = \sum_{k=k_0}^i \int W^{k \rightarrow i}(\mathbf{r}, \mu_0, \Omega') \Phi^k(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + q^i(\mathbf{r}, \Omega) \end{aligned} \quad (5.1)$$

с граничными условиями $\Phi_s^i(\Omega) = f_i(\Omega)$ при $(\Omega \mathbf{n}) < 0$.

Здесь

$$\begin{aligned} \Sigma^i(\mathbf{r}, \Omega) &= \frac{1}{\Phi^i} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(\mathbf{r}, u) \Phi(\mathbf{r}, u, \Omega) du; \\ W^{k \rightarrow i}(\mathbf{r}, \mu_0, \Omega) &= \frac{1}{\Phi^k} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi(\mathbf{r}, u', \Omega) du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W(\mathbf{r}, \mu_0, u' \rightarrow u) du. \end{aligned}$$

Было показано также, что если групповые дифференциальные сечения переходов в правой части уравнения (5.1) разло-

* В случае изотропного рассеяния интегральная форма кинетического уравнения известна как уравнение Пайерлса.

жить по сферическим гармоникам, то, например, для случая плоской системы получим *

$$\mu \frac{\partial \Phi^i(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma^i(x, \mu) \Phi^i(x, \mu) = \\ = \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \Phi_l^k(x) W_l^{k \rightarrow i}(x) + q^i(x, \mu) = Q_i(x, \mu). \quad (5.2)$$

Здесь

$$\Sigma^i(x, \mu) = \frac{1}{\Phi^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(x, u) \Phi(x, u, \mu) du;$$

$$W_l^{k \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_l^k(x)} \int_{u_{k-1}^k}^{u_k^k} \Phi_l(x, u') du' \int_{u_{i-1}^i}^{u_i^i} W_l(x, u' \rightarrow u) du.$$

Заметим, что полное групповое сечение $\Sigma^i(x, \mu)$, вообще говоря, является функцией x и μ , а гармоника сечения переходов $W_l^{k \rightarrow i}(x)$ — функциями x . Зависимость от координат и особенно зависимость полного группового сечения от μ существенно усложняют получающиеся в дальнейшем выражения и всю вычислительную процедуру. Однако все эти величины в случае их усреднения с учетом функции опасности становятся константами для каждой зоны, по объему которой проводилось усреднение (см. гл. II, § 4).

Выражения, аналогичные (5.2), могут быть получены и для случая сферической симметрии. Это будет сделано в § 6 настоящей главы.

Поскольку при расчетах плоской защиты чаще всего поток нейтронов извне падает на среду только с одной стороны, то систему уравнений (5.2) следует дополнить граничными условиями

$$\Phi^i(0, \mu) = f_i(\mu) \text{ при } \mu > 0, \\ \Phi^i(\delta, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0,$$

где δ — толщина плоского слоя среды. Справа среда граничит с вакуумом.

Кинетическое уравнение в форме (5.1) или (5.2) может быть в операторном виде записано как

$$\widehat{L}_1 \Phi(Z) = \widehat{L}_2 \Phi(Z) + q(Z) = Q(Z). \quad (5.3)$$

Здесь Z — обобщенная координата.

* Предполагается, что внешние и внутренние источники обладают азимутальной симметрией.

Отметим, что выбор операторов \widehat{L}_1 и \widehat{L}_2 произволен, поскольку задан только оператор $(\widehat{L}_1 - \widehat{L}_2)$. Если известна функция Грина $G(Z, Z')$ оператора \widehat{L}_1 , то уравнение (5.3) может быть с ее помощью преобразовано:

$$\Phi(Z) = \int G(Z, Z') Q(Z') dZ' = \int K(Z, Z') \Phi(Z') dZ' + \int G(Z, Z') q(Z') dZ', \quad (5.4)$$

где

$$K(Z, Z') \Phi(Z') = G(Z, Z') \widehat{L}_2 \Phi(Z').$$

Таким образом, уравнение (5.3) может быть сведено к интегральному уравнению (5.4). Легко видеть, что такое преобразование не однозначно в силу произвола в выборе оператора \widehat{L}_1 .

Чтобы получить интегральную форму записи кинетического уравнения для плоской геометрии, в качестве оператора \widehat{L}_1 необходимо использовать выражение

$$\widehat{L}_1 = \mu \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma^i(x, \mu).$$

Функция Грина $G(x, x', \mu)$ такого оператора, которую можно легко получить, имеет ясный физический смысл: она описывает вероятность того, что нейтрон, испущенный в плоскости x' в направлении μ , достигает плоскости x без взаимодействия с ядрами среды:

$$G_i(x, x', \mu) = \frac{e^{-\left| \frac{Y^i(x, x', \mu)}{\mu} \right|}}{|\mu|}, \quad (5.5)$$

где

$$Y^i(x, x', \mu) = \int_{x'}^x \Sigma^i(z, \mu) dz.$$

Теперь, чтобы получить систему групповых интегральных уравнений, достаточно в уравнение (5.4) подставить соответствующие выражения для $G(x, x', \mu)$ с учетом внешних источников. Можно также получить систему групповых уравнений в интегральной форме и непосредственным интегрированием выражения (5.2), рассматривая его как линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Тогда получим

$$\Phi^i(x, \mu) = \begin{cases} \int_0^x e^{-\frac{Y^i(x, x', \mu)}{\mu}} \frac{Q_i(x', \mu)}{\mu} dx' + f_i(\mu) e^{-\frac{Y^i(x, 0, \mu)}{\mu}} & \text{при } 0 \leq \mu \leq 1, \\ \int_0^x e^{-\frac{Y^i(x, x', \mu)}{\mu}} \frac{Q_i(x', \mu)}{\mu} dx' & \text{при } -1 \leq \mu \leq 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Здесь

$$Q_l(x, \mu) = \sum_{k=k_0}^l \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \Phi_l^k(x) W_l^{k-i}(x) + q^i(x, \mu).$$

Дифференциальный поток $\Phi^i(x, \mu)$ входит в правую часть уравнения (5.6) в виде коэффициентов разложения по полиномам Лежандра

$$\Phi(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \Phi_l P_l(\mu).$$

Получим систему интегральных уравнений относительно коэффициентов этого ряда. Для этого левую и правую части уравнения (5.6) умножим на $P_n(\mu)$ и проинтегрируем по всему интервалу изменения μ от -1 до 1 :

$$\Phi_n^i(x) = \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \int_0^{\delta} \Phi_l^k(x') W_l^{k-i}(x') \zeta_{nl}^i(x, x') dx' + q_n^i(x) \quad (5.7)$$

при $n=0, 1, 2, \dots$

Здесь

$$\zeta_{nl}^i(x, x') = \begin{cases} \int_0^1 \frac{P_n(\mu) P_l(\mu)}{\mu} e^{-\frac{Y^i(x, x', \mu)}{\mu}} d\mu & \text{при } x' \leq x, \\ (-1)^{n+l} \int_0^1 \frac{P_n(\mu) P_l(\mu)}{\mu} e^{\frac{Y^i(x, x', -\mu)}{\mu}} d\mu & \text{при } x' \geq x, \end{cases} \quad (5.8)$$

$$q_n^i(x) = \int_0^1 d\mu P_n(\mu) \left[f_l(\mu) e^{-\frac{Y^i(x, 0, \mu)}{\mu}} + \int_0^x e^{-\frac{Y^i(x, x', \mu)}{\mu}} \times \right. \\ \left. \times \frac{q_l(x', \mu)}{\mu} dx' + (-1)^n \int_x^{\delta} e^{\frac{Y^i(x, x', -\mu)}{\mu}} \frac{q_l(x', -\mu)}{\mu} dx' \right]. \quad (5.9)$$

Матрицу $\zeta_{nl}^i(x, x')$ будем называть матрицей ослабления. Она описывает влияние l -й гармоники источников нейтронов i -й группы* в плоскости x' на n -ю гармонику потока i -й же группы в плоскости x . Наиболее простой смысл имеет член матрицы $\zeta_{00}^i(x, x')$. Он описывает интегральный поток нейтронов i -й груп-

* Под источниками подразумевается интенсивность переходов нейтронов из k -й группы в i -ю и переходов в пределах i -й группы.

пы на расстоянии $x-x'$ от плоскости x' , в которой равномерно распределены изотропные источники i -й группы единичной мощности.

В случае, когда в качестве полных групповых сечений используются константы, не зависящие от μ , матрицы ослабления могут быть выражены через интегральные экспоненты E_n :

$$\begin{aligned}\zeta_{00}(Y) &= E_1(|Y|), \\ \zeta_{01}(Y) &= \frac{Y}{|Y|} E_2(|Y|), \\ \zeta_{02}(Y) &= \frac{3}{2} E_3(|Y|) - \frac{1}{2} E_1(|Y|), \\ \zeta_{03}(Y) &= \frac{Y}{2|Y|} [5E_4(|Y|) - 3E_2(|Y|)], \\ \zeta_{11}(Y) &= E_3(|Y|), \\ \zeta_{12}(Y) &= \frac{Y}{2|Y|} [3E_4(|Y|) - E_2(|Y|)], \\ \zeta_{13}(Y) &= \frac{5}{2} E_5(|Y|) - \frac{3}{2} E_3(|Y|), \\ \zeta_{22}(Y) &= \frac{9}{4} E_5(|Y|) - \frac{3}{2} E_3(|Y|) + \frac{1}{4} E_1(|Y|), \\ \zeta_{23}(Y) &= \frac{Y}{4|Y|} [15E_6(|Y|) - 14E_4(|Y|) + 3E_2(|Y|)], \\ \zeta_{33}(Y) &= \frac{25}{4} E_7(|Y|) - \frac{15}{2} E_5(|Y|) + \frac{9}{4} E_3(|Y|) \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Здесь

$$E_n(|Y|) = |Y|^{n-1} \int_{|Y|}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^n} dt, \text{ а } Y(x, x') = \int_{x'}^x \Sigma(z) dz$$

для каждой энергетической группы.

Если полное групповое сечение $\Sigma(x)$ постоянно для всей среды, то

$$Y(x, x') = \Sigma(x - x').$$

Функция $q_n^i(x)$, определяемая выражением (5.9), описывает вклад в $\Phi_n^i(x)$ всех нерассеянных нейтронов [от внешних источников $f_i(\mu)$ и распределенных источников $q_i(x')$]. В большинстве случаев защитная среда не содержит делящихся изотопов, поэтому

$$q_i(x) = 0.$$

Соответственно упрощается выражение (5.9):

$$q_n^i(x) = \int_0^1 f_i(\mu) P_n(\mu) e^{-\frac{\gamma^i(x, 0, \mu)}{\mu}} d\mu.$$

Сумма в правой части уравнения (5.7) описывает вклад в Φ_n^i рассеянных нейтронов. При этом часть нейтронов оказывается в i -й группе в результате упругих и неупругих переходов из вышележащих групп. Поскольку матрица переходов $W^{h \rightarrow i}$ треугольная, т. е. невозможны переходы из нижних групп в верхние, при расчетах распределения потока нейтронов i -й группы распределения плотностей нейтронов в вышележащих группах можно считать уже известными. В связи с этим уравнение (5.7) целесообразно переписать в виде

$$\Phi_n^i(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \int_0^{\delta} \Phi_l^i(x') W_l^{i \rightarrow i}(x') \zeta_{nl}^i(x, x') dx' + Q_n^i(x) \quad (5.10)$$

при $n=0, 1, 2, \dots$,
где

$$Q_n^i(x) = \sum_{k=k_0}^{i-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \int_0^{\delta} \Phi_l^k(x') W_l^{k \rightarrow i}(x') \zeta_{nl}^i(x, x') dx' + q_n^i. \quad (5.11)$$

Здесь Q_n^i — уже известная функция, так как известны все Φ_l^k .

Таким образом, распределение плотностей угловых гармоник для групповых потоков описывается системой интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Система интегральных уравнений (5.10), вообще говоря, бесконечна, как бесконечна полная система дифференциальных уравнений (3.29) в методе сферических гармоник или система (4.26) в двойном P_n -методе.

Но если в случаях P_n - или $2P_n$ -методов система уравнений остается всегда бесконечной независимо от вида индикатрисы рассеяния, то система интегральных уравнений (5.10) может оказаться конечной, если индикатриса рассеяния, оставляющего нейтрон в той же группе, описывается конечным числом гармоник $W_l^{i \rightarrow i}$.

Систему (5.10) можно предельно упростить, если пренебречь анизотропией рассеяния и однозначной связью между углом рассеяния и потерей энергии при переходах, оставляющих нейтрон в группе, т. е. если положить при всех $l > 0$ $W_l^{i \rightarrow i} = 0$. В этом случае система (5.10) вырождается в одно уравнение для интегрального потока $\Phi_0^i(x)$:

$$\Phi_0^i(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} \Phi_0^i(x') W_0^{i \rightarrow i}(x') \zeta_{00}^i(x, x') dx' + Q_0^i(x). \quad (5.12)$$

Решение уравнения (5.12) определяет интегральный поток нейтронов $\Phi_0^i(x)$. Остальные гармоники потока $\Phi_n^i(x)$ и дифференциальный поток $\Phi^i(x, \mu)$ определяются с помощью квадратурных выражений (5.10) и (5.6) соответственно, так как под интегралом в правой части обоих выражений остаются только члены, содержащие Φ_0^i . При этом дифференциальный поток нейтронов может оказаться сколь угодно анизотропным.

Найденное из уравнения (5.12) значение интегрального потока $\Phi_0^i(x)$ можно рассматривать как решение системы (5.10) в нулевом приближении. Полученные с помощью квадратурных выражений (5.10) значения гармоник потока в нулевом приближении можно использовать для получения следующего приближения. Для этого их также нужно ввести под знак интеграла в правых частях выражения (5.10). После интегрирования получим значения всех гармоник потока уже в первом приближении. Таким образом, процесс уточнения может проводиться до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

В тех случаях, когда практически отличным от нуля является лишь член $W_0^{i \rightarrow i}$, вполне удовлетворительная точность может быть достигнута уже в нулевом приближении. Как указывалось в гл. II, при изотропном дифференциальном сечении рассеяния на тяжелых ядрах, когда ширина группы существенно больше r , индикатриса рассеяния, оставляющего нейтрон в группе, практически изотропна. Здесь и в дальнейшем под выражением «изотропная индикатриса рассеяния, оставляющего нейтрон в группе» будем понимать, что отличным от нуля является лишь член $W_0^{i \rightarrow i}$, а все гармоники $W_l^{i \rightarrow i} = 0$ при $l \neq 0$.

Иногда достаточная точность может быть получена при существенном упрощении системы уравнений (5.10) путем приближенного приведения индикатрисы рассеяния к эффективному изотропному виду с помощью транспортного приближения.

§ 2. ТРАНСПОРТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ИНДИКАТРИСЫ РАССЕЯНИЯ

В предыдущем параграфе указывалось, что число интегральных уравнений в системе (5.10) и, следовательно, ее сложность прямо зависят от того, каково эффективное число членов в разложении по $P_l(\mu_0)$, с помощью которых индикатриса рассеяния может быть описана с нужной степенью точности. Если индикатрису рассеяния $W(u' \rightarrow u, \mu_0)$ разложить в ряд по полиномам Лежандра $P_l(\mu_0)$, то получится, строго говоря, бесконечный ряд

$$W(u' \rightarrow u, \mu_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} W_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0) \quad (5.13)$$

независимо от степени анизотропии рассеяния.

Здесь

$$W_l(u' \rightarrow u) = \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mu_0, u') \delta[u - u' - R(\mu_0)] P_l(\mu_0) d\mu_0, \quad (5.14)$$

где

$$R(\mu_0) = 2 \ln \frac{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1}}{M + 1}.$$

Подобно тому как это делалось в гл. I, ряд (5.13) может быть условно разделен на две части. Учитывая сходимость ряда (5.13)*, вполне естественно сумму его первых L членов

$$\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} W_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0) \quad (5.13a)$$

считать главной, а остальную часть ряда

$$\sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} W_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0) \quad (5.13б)$$

считать поправочной.

Когда L велико, этой частью ряда можно пренебречь, не внося большой ошибки в угловое распределение рассеянных нейтронов и корреляцию между углом рассеяния и потерей энергии нейтроном. Если же L мало, то пренебрежение частью ряда (5.13б) может привести к заметным ошибкам.

Вместо того чтобы отбрасывать эту часть ряда, воспользуемся следующей аппроксимацией. Примем, что $W_l = W_{L+1}$ при $l \geq L+1$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} W(u' \rightarrow u, \mu_0) &= \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} W_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0) + \\ &+ W_{L+1}(u' \rightarrow u) \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu_0). \end{aligned} \quad (5.15)$$

* Присутствие в индикатрисе δ -функции не позволяет говорить о сходимости ряда (5.13) в обычном понимании. Однако, поскольку индикатриса всегда входит в рассмотрение только под знаком интеграла, нас интересует сходимость этого ряда лишь в смысле сходимости того функционала, описываемого рядом, который образуется при использовании для индикатрисы представления (5.13). Только в этом смысле и следует понимать слова «сходимость ряда (5.13)».

Легко видеть, что вторая сумма в правой части выражения (5.15) может быть представлена в виде

$$W_{L+1}(u' \rightarrow u) = \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu_0) = \\ = \frac{W_{L+1}(u' \rightarrow u)}{4\pi} \left[\delta(\mu_0 - 1) - \sum_{l=0}^L (2l+1) P_l(\mu_0) \right], \quad (5.16)$$

так как

$$\delta(\mu_0 - 1) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\mu_0).$$

Здесь $\int_{-1}^1 \delta(\mu_0 - 1) d\mu_0 = 2$, как было принято в гл. I.

Первый член в квадратных скобках выражения (5.16) описывает рассеяние нейтрона без изменения направления движения (рассеяние прямо вперед). Поскольку рассеяние прямо вперед не сопровождается потерей энергии, в выражении (5.14) для $W_{L+1}(u' \rightarrow u)$ следует $\delta[u - u' - R(\mu_0)]$ заменить на $\delta(u - u')$. В этом случае получим

$$W_{L+1}(u' \rightarrow u) = \delta(u - u') \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mu_0, u') P_{L+1}(\mu_0) d\mu_0 = \\ = \Sigma_s(u') \chi_{L+1}(u') \delta(u - u')$$

(как было принято в гл. I $\int_{u'}^{u'+r} \delta(u' - u) du = 1$),

$\Sigma_s(u') \chi_{L+1}(u')$ — $(L+1)$ -й коэффициент разложения дифференциального сечения $\Sigma_s(\mu_0, u')$ рассеяния по полиномам Лежандра. И окончательно для выражения (5.14) будем иметь

$$W(u' \rightarrow u, \mu_0) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu_0) [W_l(u' \rightarrow u) - \\ - \Sigma_s(u') \chi_{L+1}(u') \delta(u - u')] + \frac{\Sigma_s(u') \chi_{L+1}(u')}{4\pi} \delta(\mu_0 - 1) \delta(u' - u). \quad (5.17)$$

Здесь

$$W_l(u' \rightarrow u) = \Sigma_s(u') f_s(u', u - u') P_l[\beta(u - u')] + \\ + \Sigma_{in}(u') f_{in}(u', u - u') \delta_{l0}.$$

Идея метода, названного обобщенной транспортной аппроксимацией индикатрисы рассеяния, была предложена в работе [1],

а вывод соответствующих выражений для индикатрисы рассеяния приведен в работе [2]. При $L=0$ аппроксимация $W(u' \rightarrow u, \mu_0)$ в форме выражения (5.17) совпадает с транспортным приближением для индикатрисы рассеяния [3] или так называемым методом синтетического ядра. Идея метода синтетического ядра (в ее первоначальном виде) была предложена еще в 1950 г. Д. В. Ширковым [4].

Заметим, что в транспортном приближении, хотя корреляция в индивидуальном акте рассеяния и нарушается, основные статистические характеристики, такие, как средний косинус угла рассеяния $\bar{\mu}_0(u')$ и средняя логарифмическая потеря энергии ξ , сохраняются. Покажем, что это так.

Индикатриса упругого рассеяния при транспортной аппроксимации имеет вид

$$W_s(u' \rightarrow u, \mu_0) = \frac{\Sigma_s(u')}{4\pi} [f_s(u', u - u') - \bar{\mu}_0(u') \delta(u' - u) + \bar{\mu}_0(u') \delta(u - u') \delta(\mu_0 - 1)]. \quad (5.18)$$

Учитывая, что

$$\int_{u'}^{u'+r} f_s(u', u - u') du = 1,$$

$$\int_{u'}^{u'+r} (u - u') f_s(u', u - u') du = \xi(u'),$$

прямым интегрированием можно показать, что

$$\int d\Omega_0 \int du W_s(u' \rightarrow u, \mu_0) = \Sigma_s(u'),$$

$$\int d\Omega_0 \int du \mu_0 W_s(u' \rightarrow u, \mu_0) = \bar{\mu}_0(u') \Sigma_s(u'),$$

$$\int d\Omega_0 \int du (u - u') W_s(u' \rightarrow u, \mu_0) = \xi(u') \Sigma_s(u').$$

Легко видеть, что при транспортной аппроксимации сохраняются и все остальные энергетические моменты $(u - u')^n$. Точность описания угловых характеристик рассеяния будет, очевидно, тем выше, чем больше L .

Транспортная аппроксимация индикатрисы рассеяния оказывается вполне удовлетворительной при описании переноса нейтронов в среде, состоящей из тяжелых ядер. В этом случае нарушение корреляции между углом рассеяния и потерей энергии в каждом акте упругого взаимодействия не играет существенной роли. Кроме того, представление индикатрисы в виде (5.18) соответствует форме углового распределения рассеянных нейтронов при $E > 1$ Мэв, для которой характерно наличие дифракционного максимума (см. рис. 6.2 и 6.3). При $E < 1$ Мэв рассеяние на тяжелых ядрах близко к изотропному, что также не противоречит выражению (5.18).

Остановимся несколько подробнее на физическом смысле отдельных составляющих выражения (5.18). Первый член описывает изотропное рассеяние. Ему приписывается наблюдаемое распределение нейтронов по энергиям в результате рассеяния, но без учета корреляции. Поэтому оказывается, что в первом члене незаконно присутствуют нейтроны, не потерявшие энергии, но изотропно рассеянные. Для компенсации этого эффекта в выражение (5.18) вводится второй член. Третий член описывает рассеяние прямо вперед без потери энергии, т. е. пролет без рассеяния.

Получим теперь многогрупповую систему интегральных уравнений с транспортной аппроксимацией индикатрисы рассеяния. Для этого введем выражение (5.18) в интеграл рассеяния в кинетическом уравнении. В случае плоской геометрии после интегрирования получим:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi(x, \mu, u)}{\partial x} + \Sigma_{tr}(x, u) \Phi(x, \mu, u) = \\ & = \frac{1}{2} \left[\int_{u-r}^u du' \Sigma_s(u') f_s(u', u-u') \Phi_0(x, u') du' - \right. \\ & \left. - \bar{\mu}_0(u) \Sigma_s(x, u) \Phi_0(x, u) \right] + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^u du' \Sigma_{in}(u') f_{in}(u', u-u') \Phi_0(x, u') + q(x, \mu, u), \end{aligned}$$

где

$$\Sigma_{tr}(x, u) = \Sigma(x, u) - \bar{\mu}_0(u) \Sigma_s(x, u),$$

$$\Phi_0(x, u) = \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu, u) d\mu.$$

Перейдем к групповой записи уравнения (5.18). Для этого проинтегрируем его по ширине группы:

$$\mu \frac{\partial \Phi^i(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma_{tr}^i(x, \mu) \Phi^i(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^i W_{tr}^{k \rightarrow i}(x) \Phi_0^k(x) + q^i(x, \mu), \quad (5.19)$$

где

$$\Sigma_{tr}^i(x, \mu) = \frac{1}{\Phi^i(x, \mu)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_{tr}(x, u) \Phi(x, \mu, u) du,$$

$$W_{\text{tr}}^{k \rightarrow i}(x) = \frac{1}{\Phi_0^k(x)} \left\{ \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi_0(x, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} [\Sigma_s(x, u') f_s(u', u - u') + \Sigma_{in}(x, u') f_{in}(u', u - u')] du - \delta_{ik} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \bar{\mu}_0(u) \Sigma_s(x, u) \Phi_0(x, u) du \right\}.$$

Граничные условия для системы уравнений (5.19) по-прежнему имеют вид

$$\Phi^i(0, \mu) = f_i(\mu) \text{ при } \mu > 0,$$

$$\Phi^i(\delta, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0.$$

Как уже указывалось, в задачах, связанных с расчетом распространения нейтронов в защите, распределенные источники $q(x, \mu)$, как правило, отсутствуют (или по крайней мере являются изотропными). Поэтому практически всегда уравнение (5.19) является групповым кинетическим уравнением с изотропной правой частью.

Изотропия правой части в уравнениях (5.19) приводит к некоторому упрощению системы уравнений в методе сфергармоник. Действительно, правые части всех уравнений с $l > 0$ обращаются в нуль, хотя система по-прежнему остается бесконечной:

$$\frac{\partial \Phi_l^i(x)}{\partial x} + \Sigma_{0\text{tr}}^l(x) \Phi_0^l(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^i W_{\text{tr}}^{k \rightarrow i}(x) \Phi_0^k(x) + q^i(x) \text{ при } l = 0,$$

$$\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l+1}^i(x)}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial \Phi_{l-1}^i(x)}{\partial x} + \Sigma_{l\text{tr}}^i(x) \Phi_l^i(x) = 0 \text{ при } l > 0,$$

$$l = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_{l\text{tr}}^i &= \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{-1}^1 \Sigma_{\text{tr}}^i(x, \mu) \Phi^i(x, \mu) P_l(\mu) d\mu = \\ &= \frac{1}{\Phi_l^i(x)} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_{\text{tr}}(x, u) \Phi_l(x, u) du. \end{aligned}$$

В методе же интегральных уравнений, согласно сказанному в предыдущем параграфе, эта изотропия правой части приводит к вырождению системы интегральных уравнений в одно уравнение вида (5.12):

$$\Phi_0^i(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} \Phi_0^i(x') W_{\text{tr}}^{i \rightarrow i}(x') \zeta_{\text{tr}}^i(x, x') dx' + Q_{\text{tr}}^i(x). \quad (5.20)$$

В практически наиболее важном случае, когда используются константы универсальные * или усредненные с учетом функции опасности, полное транспортное сечение Σ_{tr}^i от μ не зависит и матрица ослабления $\xi_{tr}^i(x, x')$ имеет вид

$$\xi_{tr}^i(x, x') = E_1(|Y_{tr}^i(x, x')|).$$

В уравнении (5.20)

$$Q_{tr}^i(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{i-1} \int_0^\delta \Phi_0^k(x') W_{tr}^{k \rightarrow i}(x') \xi_{tr}^i(x, x') dx' + q_{tr}^i(x),$$

$$q_{tr}^i(x) = \int_0^1 d\mu \left[f_i(\mu) e^{-\frac{Y_{tr}^i(x, 0)}{\mu}} + \frac{1}{\mu} \int_0^\delta e^{-\frac{|Y_{tr}^i(x, x')|}{\mu}} q^i(x') dx' \right],$$

$$Y_{tr}^i(x, x') = \int_{x'}^x \Sigma_{tr}^i(z) dz,$$

$$\Sigma_{tr}^i = \Sigma_c^i + \Sigma_{in}^i + \Sigma_s^i(1 - \bar{\mu}_0^i),$$

где Σ_c^i — макроскопическое сечение захвата нейтрона i -й группы в среде; Σ_{in}^i — макроскопическое сечение неупругого рассеяния нейтронов i -й группы в среде; Σ_s^i — макроскопическое сечение упругого рассеяния нейтронов i -й группы в среде; $\bar{\mu}_0^i$ — средний косинус угла упругого рассеяния нейтронов i -й группы в среде.

Члены матрицы переходов в транспортном приближении имеют вид

$$W_{tr}^{i \rightarrow i} = \Sigma_s^{i \rightarrow i} + \Sigma_{in}^{i \rightarrow i} - \bar{\mu}_0^i \Sigma_s^i,$$

$$W_{tr}^{k \rightarrow i} = \Sigma_s^{k \rightarrow i} + \Sigma_{in}^{k \rightarrow i} \text{ при } k > i,$$

где $\Sigma_s^{k \rightarrow i}$ — макроскопическое сечение упругого рассеяния нейтрона из k -й группы в i -ю; $\Sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ — макроскопическое сечение неупругого рассеяния нейтрона из k -й группы в i -ю.

От уравнения (5.12) уравнение (5.20) отличается только тем, что в нем полное сечение взаимодействия Σ заменено на полное транспортное сечение Σ_{tr} , а матрица переходов $W_0^{k \rightarrow i}$ — на транспортную матрицу переходов $W_{tr}^{k \rightarrow i}$. Что же касается вида уравнений, то они совершенно идентичны, поэтому, исследуя уравнение (5.12), получим результаты, с точностью до обозначения сечений, справедливые и для уравнения (5.20).

* Универсальные константы — это среднегрупповые сечения, полученные путем усреднения истинных сечений по стандартному спектру.

§ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛУЧАЕ ИЗОТРОПНОЙ ИНДИКАТРИСЫ РАССЕЯНИЯ НЕЙТРОНОВ

Мы уже знаем, что если индикатриса рассеяния изотропна (или аппроксимируется эффективной изотропной индикатрисой), кинетическое уравнение строго сводится к одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно глобального (интегрального) потока нейтронов. Решив это уравнение, можно получить полную информацию о дифференциальном потоке нейтронов или его угловых гармониках уже с помощью квадратурных соотношений.

Правда, получить точное аналитическое решение уравнения (5.12) не удастся, но его численное решение с помощью ЭВМ не вызывает затруднений. Для того чтобы исследовать уравнение в самых общих чертах, рассмотрим некоторые его приближенные решения.

Обратимся сначала к асимптотическому поведению решения уравнения (5.12) вдали от источников и границ среды. Фактически это означает, что можно пренебречь в уравнении (5.12) функцией $Q_0^i(x)$, описывающей вклад в $\Phi_0^i(x)$ нейтронов от внешних и распределенных источников. В данном случае под распределенными источниками подразумеваются переходы нейтронов из верхних групп в рассматриваемую i -ю группу. Таким образом, при многогрупповом рассмотрении асимптотический ход группового потока может иметь место лишь при условии, что пространственное распределение нейтронов в группе в основном определяется процессом переноса в этой группе (а не распределением источников).

Будем искать решение уравнения (5.12), экспоненциально убывающее с расстоянием в виде $\Phi_0^i \approx A_i e^{-x/L^i}$, а величину L^i будем называть асимптотической длиной диффузии. Подставив экспоненту вместо Φ_0^i под знаком интеграла в уравнении (5.12) для случая однородной среды и произведя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \Phi_0^i \approx A_i \frac{W_0^{i \rightarrow i} L^i}{2} e^{-x/L^i} & \left\{ \ln \frac{L^i \Sigma^i + 1}{L^i \Sigma^i - 1} + e^{x/L^i} E_1(\Sigma^i x) - \right. \\ & - E_1 \left(x \frac{\Sigma^i L^i - 1}{L^i} \right) - e^{\frac{\delta - x}{L^i}} E_1[\Sigma^i (\delta - x)] + \\ & \left. + E_1 \left[\frac{\delta - x}{L^i} (1 + L^i \Sigma^i) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Проанализируем поведение членов в правой части выражения (5.21). Первый член в фигурных скобках является постоянным. Поскольку нас интересует ход нейтронного потока вдали от границ среды, воспользуемся тем обстоятельством, что

$E_1(y) \approx \frac{e^{-y}}{y}$ при $y \gg 1$. Тогда легко видеть, что разность второго и третьего членов убывает по мере удаления от левой границы среды как

$$\frac{e^{-x(\Sigma^i - 1/L^i)}}{x \Sigma^i L^i (\Sigma^i - 1/L^i)} \text{ при } x(\Sigma^i - 1/L^i) \gg 1,$$

а разность четвертого и пятого членов убывает по мере удаления от правой границы среды как

$$\frac{e^{-(\delta-x)(\Sigma^i + 1/L^i)}}{(\delta-x) \Sigma^i L^i (\Sigma^i + 1/L^i)} \text{ при } (\delta-x)(\Sigma^i + 1/L^i) \gg 1.$$

Если среда имеет достаточную толщину, то найдется такая область значений x , где первый член окажется настолько больше суммы остальных членов, что ими можно будет пренебречь. Тогда асимптотическая длина диффузии L^i будет определяться из трансцендентного уравнения

$$\frac{W_0^{i \rightarrow i} L^i}{2} \ln \frac{L^i \Sigma^i + 1}{L^i \Sigma^i - 1} = 1, \quad (5.22)$$

а область асимптотического хода нейтронной плотности существовать там, где одновременно будут выполняться неравенства

$$\frac{e^{-x(\Sigma^i - 1/L^i)}}{x(\Sigma^i - 1/L^i)} \ll 2 \frac{\Sigma^i}{W_0^{i \rightarrow i}}, \quad (5.23)$$

$$\frac{e^{-(\delta-x)(\Sigma^i + 1/L^i)}}{(\delta-x)(\Sigma^i + 1/L^i)} \ll 2 \frac{\Sigma^i}{W_0^{i \rightarrow i}}. \quad (5.24)$$

Поскольку Σ^i — полное сечение, а $W_0^{i \rightarrow i}$ — сечение внутригруппового перехода, то всегда $\Sigma^i \geq W_0^{i \rightarrow i}$. Отсюда следует, что ранее выдвинутое требование о выполнении неравенств

$$x(\Sigma^i - 1/L^i) \gg 1 \text{ и } (\delta - x)(\Sigma^i + 1/L^i) \gg 1$$

является достаточным для выполнения неравенств (5.23) и (5.24), а значит, и существования асимптотического решения.

Уравнение (5.22), определяющее асимптотическую длину диффузии нейтронов i -й группы с изотропным рассеянием, совершенно аналогично выражениям, полученным из односкоростного кинетического уравнения с изотропным рассеянием [5, 6].

С помощью ряда элементарных тождественных преобразований уравнение (5.22) может быть приведено к виду

$$\frac{1}{\Sigma^i L^i} = \text{th} \frac{1}{W_0^{i \rightarrow i} L^i}. \quad (5.25)$$

Обозначив $\frac{1}{\Sigma^i L^i} = z$ и $\frac{W_0^{i \rightarrow i}}{\Sigma^i} = \omega$ и подставив в выражение (5.25), получим

$$z = \text{th} \frac{z}{\omega}.$$

График зависимости z от ω приводится на рис. 5.1.

Обозначив сечение увода нейтронов из i -й группы $\Sigma_{\text{ув}}^i = \Sigma^i - W_0^{i \rightarrow i}$, рассмотрим два предельных случая: слабого увода и сильного увода.

В случае слабого увода нейтронов из группы $\Sigma_{\text{ув}}^i \ll \Sigma^i$ и $\omega \rightarrow 1$. Как видно из рис. 5.1, z мало и гиперболический тангенс может быть разложен в ряд по малому параметру. Оставив в разложении три члена и разрешив полученное выражение относительно $(L^i)^2$, будем иметь

$$\begin{aligned} (L^i)^2 &\approx \frac{1 - \frac{1}{5} \frac{\Sigma_{\text{ув}}^i}{W_0^{i \rightarrow i}}}{3 \Sigma_{\text{ув}}^i W_0^{i \rightarrow i}} \approx \\ &\approx \frac{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{\text{ув}}^i}{\Sigma^i}}{3 \Sigma_{\text{ув}}^i \Sigma^i} \quad (5.26) \end{aligned}$$

с точностью до членов первого порядка малости относительно $\Sigma_{\text{ув}}^i / \Sigma^i$. Из выражения (5.26) следует, что в случае слабого увода асимптотическая длина близка к длине диффузии нейтронов:

$$(L_0^i)^2 = \frac{1}{3 \Sigma_{\text{ув}}^i \Sigma^i}.$$

В случае сильного увода нейтронов из группы $W_0^{i \rightarrow i} \ll \Sigma^i$. При этом $\omega \rightarrow 0$ и, как видно из рис. 5.1, z близко к 1. Другими словами, асимптотическая длина L^i близка к длине свободного пробега нейтронов. Поэтому неравенство $x(\Sigma^i - 1/L^i) > 1$, которое при слабом уводе выполняется на расстояниях от источников, превышающих лишь 2—3 длины свободного пробега, в данном случае начинает выполняться лишь на расстоя-

ниях, превышающих несколько десятков или сотен длин свободного пробега. Так,

$$\text{при } \frac{W^{i \rightarrow i}}{\Sigma^i} = 0,50$$

$$\frac{\Sigma^i}{\Sigma^{i-1}/L^i} \approx 25,$$

$$\text{а при } \frac{W^{i \rightarrow i}}{\Sigma^i} = 0,25$$

$$\frac{\Sigma^i}{\Sigma^i - 1/L^i} \approx 10^3.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что в группах с сильным уводом нейтронов асимптотический ход плотности может и вовсе не установиться, если среда имеет недостаточную протяженность. Кроме того, малость $W_0^{i \rightarrow i}$ по сравнению с полным сечением взаимодействия $\Sigma^i \approx \Sigma_{\text{yb}}^i$ означает также, что первый член в правой части уравнения (5.12) мал по сравнению со вторым. В этом случае определяющую роль играет не рассеяние нейтронов внутрь группы, а процессы, уводящие нейтроны из группы.

Очевидно, что в транспортном приближении асимптотическая длина L^i должна определяться из уравнения

$$\frac{W_{\text{tr}}^{i \rightarrow i} L^i}{2} \ln \frac{L^i \Sigma_{\text{tr}}^i + 1}{L^i \Sigma_{\text{tr}}^i - 1} = 1 \quad (5.22a)$$

или из тождественного ему выражения

$$\frac{1}{\Sigma_{\text{tr}}^i L^i} = \text{th} \frac{1}{W_{\text{tr}}^{i \rightarrow i} L^i}.$$

В случае слабого увода будем иметь в транспортном приближении

$$L^i = \frac{1 - \frac{1}{5} \frac{\Sigma_{\text{yb}}^i}{W_{\text{tr}}^{i \rightarrow i}}}{3 \Sigma_{\text{yb}}^i W_{\text{tr}}^{i \rightarrow i}} = \frac{1 + \frac{4}{5} \frac{\Sigma_{\text{yb}}^i}{\Sigma_{\text{tr}}^i}}{3 \Sigma_{\text{yb}}^i \Sigma_{\text{tr}}^i},$$

а в случае сильного увода асимптотическая длина L^i близка к $l_{\text{tr}}^i = 1/\Sigma_{\text{tr}}^i$ — полной транспортной длине пробега.

Не всегда являясь количественно точной характеристикой, асимптотическая длина позволяет качественно охарактеризовать длину релаксации поля нейтронов. В частности, полученные выше соотношения показывают, что в группах с сильным уводом (обычно при $E > 1$ Мэв, где существенную роль играют неупругие процессы, или в водородсодержащей среде) спад возмущения нейтронного поля идет с длиной релаксации порядка транспортной длины, в то время как в группах со сла-

бым уводом (обычно в промежуточной области энергий для безводородной среды) уже на расстояниях в несколько длин свободного пробега от источников возмущения поля нейтронов устанавливается спад нейтронной плотности с характерной длиной релаксации, существенно превышающей l_{tr}^i .

Последнее утверждение, в свою очередь, можно использовать для приближенного преобразования интегрального уравнения (5.12) или (5.20) в случае слабого увода нейтронов из группы. Для этого заметим, что функция $E_1[\sum^i(x-x')]$ имеет логарифмическую особенность в точке $x'=x$ и быстро спадает по мере удаления от этой точки, приближаясь к своему асимптотическому ходу $\frac{e^{-\Sigma^i|x-x'|}}{\Sigma^i|x-x'|}$ при $\sum^i|x-x'| \gg 1$. Если характерная длина, на которой происходит существенное (в 2—3 раза) изменение плотности потока нейтронов, заметно больше полной (или полной транспортной) длины пробега нейтронов, то величина первого (интегрального) члена в правой части уравнения (5.12) или (5.20) определяется плотностью потока нейтронов в окрестности точки x' . Приближенно поведение потока нейтронов вблизи этой точки может быть описано рядом Тейлора

$$\Phi_0^i(x') = \Phi_0^i(x) + \left. \frac{d\Phi_0^i(x')}{dx'} \right|_x (x' - x) + \left. \frac{d^2\Phi_0^i(x')}{d(x')^2} \right|_x (x' - x)^2 + \dots$$

Подставим этот ряд вместо $\Phi^i(x')$ в интеграл в правой части уравнения (5.12). После интегрирования и некоторых тождественных преобразований в случае однородной среды получим

$$\begin{aligned} \Phi_0^i(x) \approx & \frac{W_0^{i-t}}{2\Sigma^i} \left[\Phi_0^i(x) F_1(x) + \frac{1}{\Sigma^i} \frac{d\Phi_0^i(x)}{dx} F_2(x) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\Sigma^i)^2} \frac{d^2\Phi_0^i(x)}{dx^2} F_3(x) + \dots \right] + Q_0^i(x), \end{aligned} \quad (5.27)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 2 - E_2[\sum^i x] - E_2[\sum^i(\delta - x)], \\ F_2(x) &= e^{-\Sigma^i x} - e^{-\Sigma^i(\delta - x)} + E_3[\sum^i x] - E_3[\sum^i(\delta - x)], \\ F_3(x) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \sum^i x e^{-\Sigma^i x} - \frac{1}{2} \sum^i(\delta - x) e^{-\Sigma^i(\delta - x)}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что вдали от границ среды

$$F_1 \approx 2; F_2 \approx 0; F_3 \approx \frac{2}{3}.$$

Если ограничиться тремя членами разложения потока нейтронов в ряд Тейлора, то вдали от границ для однородной среды получим

$$D^i \frac{d^2\Phi_0^i(x)}{dx^2} - \sum_{y \in}^i \Phi_0^i(x) = -S_0^i(x), \quad (5.28)$$

где

$$D^i = \frac{W_0^{i \rightarrow i}}{3(\Sigma^i)^2}; S_0^i = \Sigma^i Q_0^i(x).$$

Так как $\Sigma_{yb}^i \ll \Sigma^i$ (а разложение только тогда и допустимо), то

$$D^i \approx \frac{1}{3\Sigma^i},$$

или в транспортном приближении

$$D_{tr}^i \approx \frac{1}{3\Sigma_{tr}^i}.$$

Таким образом, в случае слабого увода для областей, удаленных от границ среды, интегральное уравнение (5.12) или (5.20) может быть приближенно приведено к обычному диффузионному уравнению (5.28). Заметим, что функция источников $S_0^i(x)$ помимо переходов из верхних групп и распределенных источников содержит также плотность первых столкновений нейтронов, влетевших в среду извне. Однако в рассматриваемом приближении их роль по мере удаления от границ быстро убывает.

Выражение (5.28) позволяет дать оценку соотношению первого и второго членов в правой части интегрального уравнения (5.12), т. е. соотношению между плотностью потока нейтронов, испытавших рассеяния, не уводящие из i -й группы, и плотностью потока нейтронов i -й группы, не испытавших еще ни одного взаимодействия с ядрами среды $Q_0^i(x)$. Если и увод из группы, и вылет из среды малы, то из уравнения (5.28) имеем

$$\Sigma_{yb}^i \Phi_0^i \approx \Sigma^i Q_0^i.$$

Отсюда следует, что $Q_0^i \ll \Phi_0^i$, так как $\Sigma_{yb}^i / \Sigma^i \ll 1$. Поэтому в случае слабого увода в полном потоке нейтронов i -й группы, определяемом уравнением (5.12), доля нейтронов, не испытавших еще взаимодействия в интервале энергий $[E_i, E_{i+1}]$, мала. Ясно, что при таких условиях основную роль в процессе формирования пространственного распределения потока нейтронов играет рассеяние, не выводящее нейтроны из группы. Очевидно, что в среднем нейтрону, попавшему в такую группу со слабым уводом, потребуется участвовать в большом числе столкновений, прежде чем он эту группу покинет. И наоборот, в случае сильного увода поток нейтронов i -й группы формируется главным образом за счет нейтронов, еще не участвовавших во взаимодействии внутри интервала $[E_i, E_{i+1}]$, поскольку большая часть нейтронов покидает группу после первого же столкновения.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТОВ СПЕКТРОВ БЫСТРЫХ НЕЙТРОНОВ В ЗАЩИТЕ. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

При изучении проникновения быстрых нейтронов (выше 1 Мэв) через толстые слои защиты приходится сталкиваться с явлением сильной анизотропии потока. Дело в том, что при

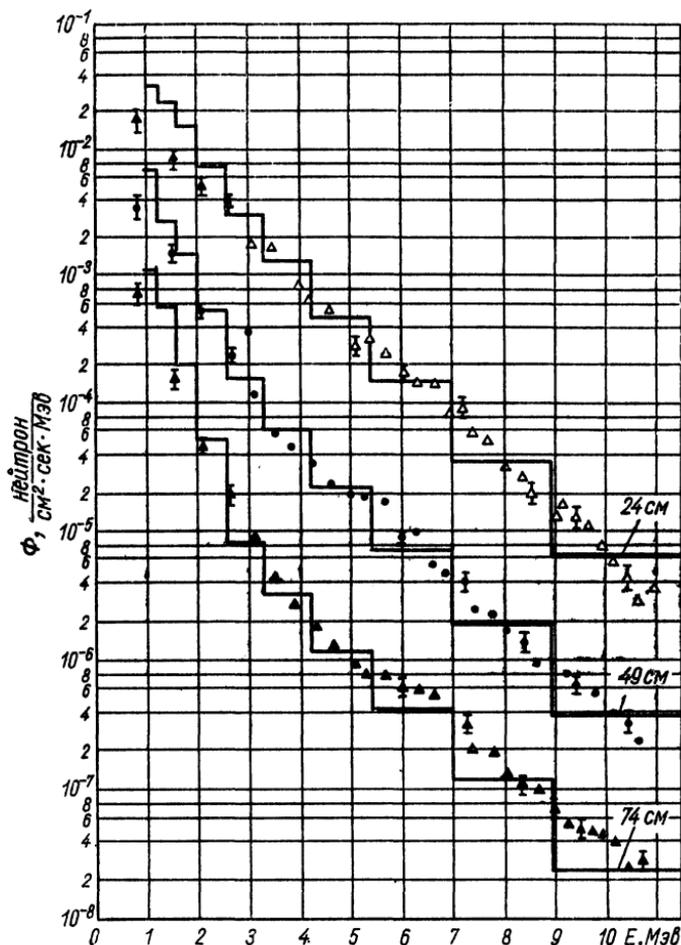


Рис. 5.2. Спектры быстрых нейтронов в свинце:
гистограмма — расчет [3]; точки — эксперимент [7].

столь больших энергиях неупругие процессы играют главную роль. Кроме того, для более точного описания спектра нейтронов на большой глубине необходимо достаточно подробное разбиение всего энергетического интервала на группы. Оказывается, что сумма сечений процессов, уводящих нейтрон из

группы, существенно преобладает над сечением процессов, оставляющих нейтрон в группе.

Как было показано, при таком сильном уводе длина релаксации поля нейтронов должна быть порядка транспортной длины пробега нейтрона в среде. Большой градиент поля и яв-

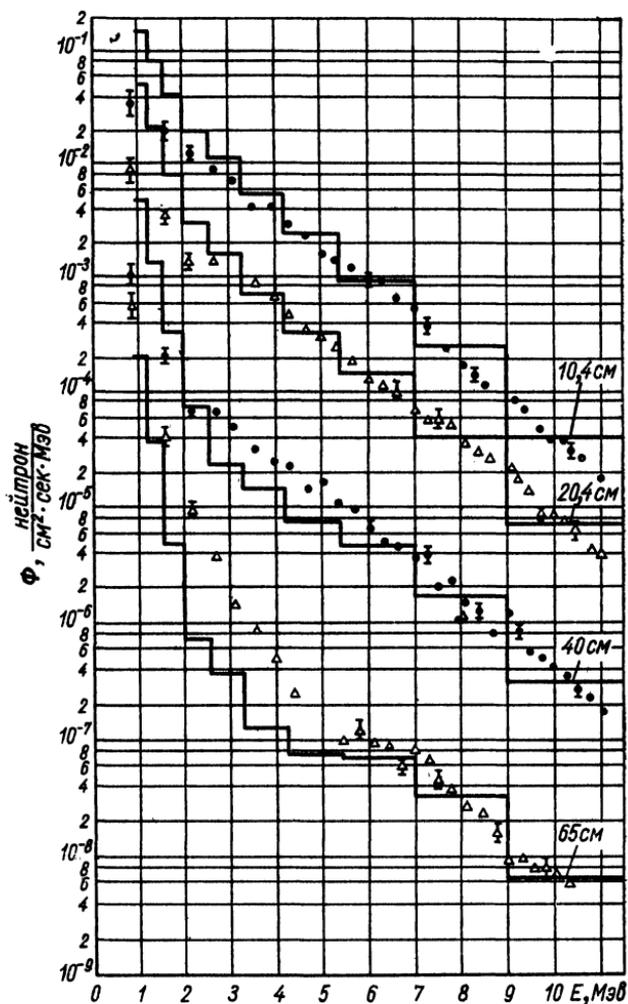


Рис. 5.3. Спектры быстрых нейтронов в железе: гистограмма — расчет [3]; точки — эксперимент [7].

ляется основным источником анизотропии потока нейтронов. А в таком случае для его описания не годится приближение с грубой аппроксимацией угловой зависимости дифференциального потока (даже если бы индикатриса рассеяния была строго изотропной). Использование интегральных уравнений типа

(5.20) с транспортной аппроксимацией индикатрисы упругого рассеяния (5.17) позволяет получить достаточно простое описание спектра быстрых нейтронов.

Действительно, применение транспортного приближения для аппроксимации индикатрисы упругого рассеяния при использо-

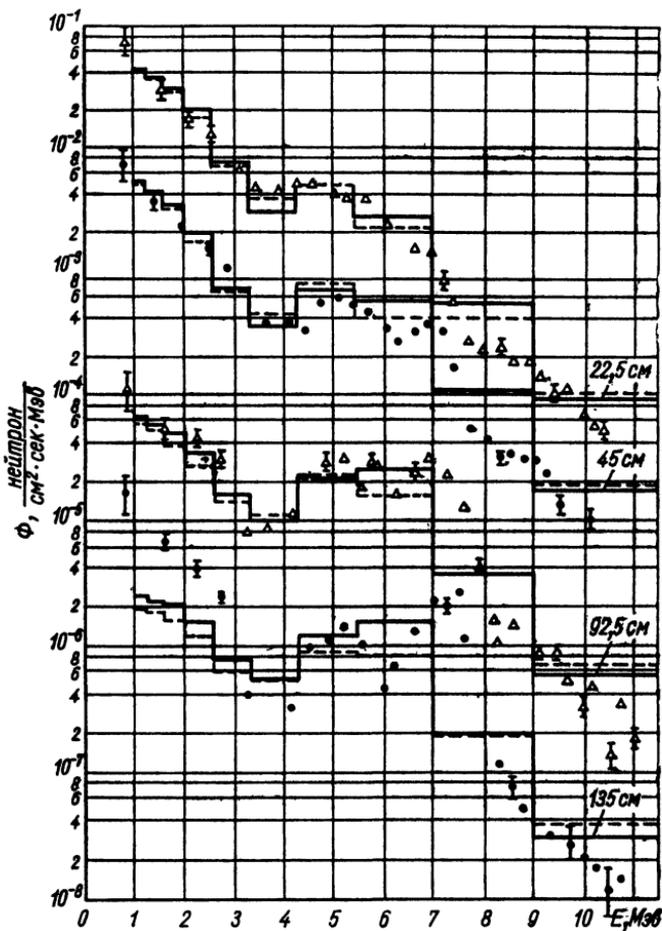


Рис. 54. Спектры быстрых нейтронов в графите:
 гистограммы — расчет [3]; сплошная — модель тяжелой среды;
 пунктирная — модель легкой среды; точки — эксперимент [7].

вании кинетического уравнения в интегральной форме (5.20) позволяет отказаться от какой бы то ни было приближенной аппроксимации углового распределения потока нейтронов и при этом с помощью одного уравнения описать распределение интегральной плотности нейтронов каждой группы $\Phi_0^i(x)$. Что же касается самой транспортной аппроксимации, то, как выше указывалось, по крайней мере для тяжелых ядер (когда кор-

реляция оказывается несущественной, а дифференциальное сечение обладает слабой анизотропией и то главным образом за счет дифракционного максимума при малых углах рассеяния), ее применение оправдано и не должно вносить существенной погрешности. Даже то, что в этой задаче сечения увода близки

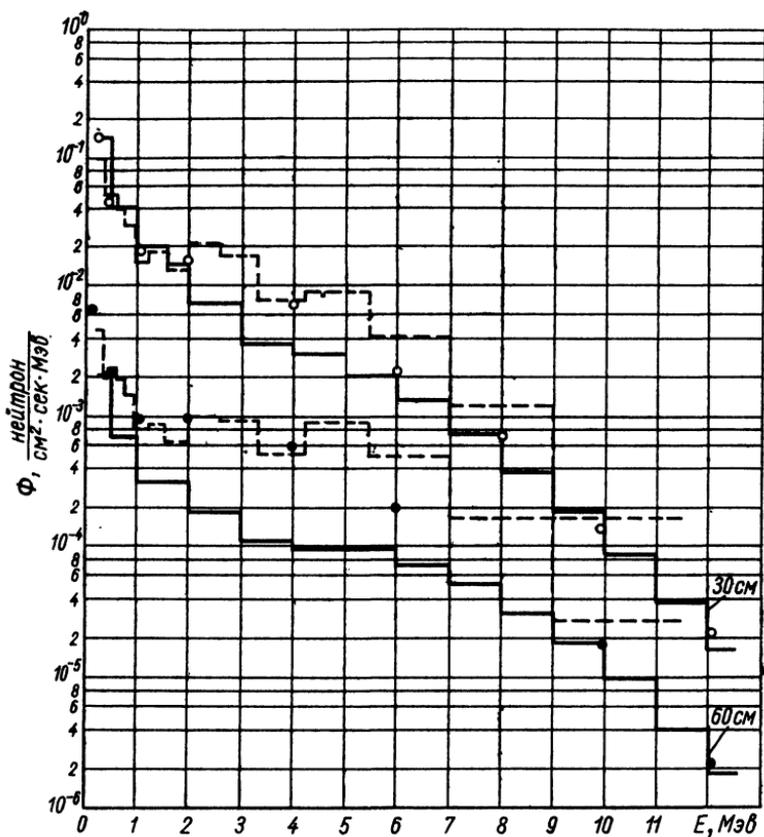


Рис. 5.5. Спектры быстрых нейтронов в тяжелой воде: пунктирная гистограмма — метод интегральных уравнений [3]; сплошная гистограмма — полуэмпирический метод [8]; точки — метод моментов [8].

к полным транспортным сечениям, оказывается полезным. Действительно, в этом случае с успехом можно применять для решения интегральных уравнений (5.20) метод итераций, по своему физическому смыслу соответствующий методу последовательных столкновений.

В качестве примера такого использования метода интегральных уравнений (5.20) с транспортной аппроксимацией индикатрисы упругого рассеяния можно рассмотреть результаты работы [3]. Гистограммы спектров, рассчитанные в этой работе, показаны на рис. 5.2—5.4 вместе с экспериментальными

ми точками, полученными в работе [7], а на рис. 5.5 — вместе со спектрами, рассчитанными по другим методикам. Небольшие расхождения между экспериментальным ходом спектра и гистограммами можно, по-видимому, объяснить отчасти несовершенством констант (в которых, в частности, не учитывалась резонансная блокировка), а отчасти приближенным характером моделирования геометрии эксперимента (что особенно должно проявляться при больших толщинах исследованных слоев). Кроме того, по мнению авторов работы [7], полученные ими экспериментальные данные в области нижнего конца спектра (1—2 Мэв) несколько менее надежны.

Отметим, что в хорошем соответствии расчет и эксперимент оказались не только для таких тяжелых ядер, как железо и свинец, но и для такого сравнительно легкого ядра, как углерод. Более того, как это следует из рис. 5.5, транспортная аппроксимация упругого рассеяния нейтронов в тяжелой воде также позволила получить результаты, которые неплохо согласуются с данными, полученными с помощью метода моментов [8].

§ 5. АЗИМУТАЛЬНАЯ АСИММЕТРИЯ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

До сих пор, описывая метод интегральных уравнений для плоской геометрии, мы не накладывали никаких ограничений на угловую зависимость внешних и распределенных источников, кроме условия их азимутальной симметрии. В этом параграфе мы намерены отказаться и от этого ограничения.

Чтобы не загромождать выкладки, запишем групповое кинетическое уравнение в плоской геометрии для случая, когда используются сечения, усредненные с учетом функции опасности, или универсальные константы для достаточно узких групп:

$$\mu \frac{\partial \Phi^i(x, \mu, \varphi)}{\partial x} + \sum^i(x) \Phi^i(x, \mu, \varphi) = Q^i(x, \mu, \varphi),$$

где

$$Q^i(x, \mu, \varphi) = \sum_{k=k_0}^i \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' W^{k \rightarrow i}(x, \mu_0) \Phi^k(x, \mu', \varphi') + q^i(x, \mu, \varphi). \quad (5.29)$$

Граничные условия имеют вид

$$\Phi^i(0, \mu, \varphi) = f^i(\mu, \varphi) \text{ при } \mu > 0,$$

$$\Phi^i(\delta, \mu, \varphi) = 0 \text{ при } \mu < 0.$$

Разложим индикатрису переходов $W^{k \rightarrow i}(x, \mu_0)$ в ряд по полиномам Лежандра $P_l(\mu_0)$ и воспользуемся теоремой сложения [9]

$$W^{k \rightarrow i}(x, \mu_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} W_l^{k \rightarrow i}(x) \left[P_l(\mu)P_l(\mu') + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \right], \quad (5.30)$$

где $P_l^m(\mu)$ — шаровые функции первого рода.

Подставив выражение (5.30) в (5.29) и произведя интегрирование, получим

$$Q^i(x, \mu, \varphi) = \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} W_l^{k \rightarrow i}(x) \left\{ \Phi_l^k(x) P_l(\mu) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) [\cos m\varphi \Phi_{1l}^{km}(x) + \sin m\varphi \Phi_{2l}^{km}(x)] \right\} + \\ + q^i(x, \mu, \varphi), \quad (5.31)$$

где

$$\Phi_l^k(x) = \int_{-1}^1 d\mu' P_l(\mu') \int_0^{2\pi} d\varphi' \Phi^k(x, \mu', \varphi'), \\ \Phi_{1l}^{km}(x) = \int_{-1}^1 d\mu' P_l^m(\mu') \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos m\varphi' \Phi^k(x, \mu', \varphi'), \\ \Phi_{2l}^{km}(x) = \int_{-1}^1 d\mu' P_l^m(\mu') \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin m\varphi' \Phi^k(x, \mu', \varphi').$$

Проинтегрировав выражение (5.31) по всему интервалу изменения угла $\varphi[0; 2\pi]$, получим выражение, аналогичное (5.2):

$$\mu \frac{\partial \Phi^i(x, \mu)}{\partial x} + \sum^i(x) \Phi^i(x, \mu) = \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \Phi_l^k(x) W_l^{k \rightarrow i}(x) + \\ + q^i(x, \mu) = Q^i(x, \mu), \quad (5.32)$$

где

$$\Phi^i(x, \mu) = \int_0^{2\pi} \Phi^i(x, \mu, \varphi) d\varphi, \\ q^i(x, \mu) = \int_0^{2\pi} q^i(x, \mu, \varphi) d\varphi.$$

Граничные условия для функции $\Phi^i(x, \mu)$ имеют вид

$$\Phi^i(0, \mu) = \int_0^{2\pi} f^i(\mu, \varphi) d\varphi \quad \text{при } \mu > 0,$$

$$\Phi^i(\delta, \mu) = 0 \quad \text{при } \mu < 0,$$

В § 1 этой главы было показано, что уравнение (5.32) может быть сведено к системе интегральных уравнений (5.10). Решив эту систему, можно получить с помощью квадратурного выражения (5.6) проинтегрированное по углу φ распределение плотности дифференциального потока нейтронов i -й группы. Однако если поток нейтронов не обладает азимутальной симметрией, эта величина особого интереса не представляет. Для определения же истинного дифференциального потока нейтронов знать только эти величины недостаточно.

Считая правую часть уравнения (5.31) известной функцией, разрешим его относительно дифференциального потока $\Phi^i(x, \mu, \varphi)$, аналогично тому как это было сделано при выводе выражения (5.6):

$$\begin{aligned} \Phi^i(x, \mu, \varphi) = & \\ = & \begin{cases} \int_0^x e^{-\frac{\gamma^i(x, x')}{\mu}} \frac{Q^i(x', \mu, \varphi)}{\mu} dx' + f^i(\mu, \varphi) e^{-\frac{\gamma^i(x, 0)}{\mu}} & \text{при } 0 \leq \mu \leq 1, \\ \int_{\delta}^x e^{-\frac{\gamma^i(x, x')}{\mu}} \frac{Q^i(x', \mu, \varphi)}{\mu} dx' & \text{при } -1 \leq \mu \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.33)$$

В правую часть уравнения (5.33) входят угловые гармоники группового потока Φ_i^k . Система уравнений, определяющих Φ_i^k , нам известна и в принципе может быть решена. Для того чтобы можно было полностью определить функции $\Phi^i(x, \mu, \varphi)$, необходимо еще указать способ определения функций Φ_{1l}^{km} и Φ_{2l}^{km} , которые также входят в выражение $Q^i(x, \mu, \varphi)$ согласно формуле (5.31). Для этого уравнение (5.31) умножим на $\cos m\varphi$ и проинтегрируем по всему интервалу изменения $\varphi [0; 2\pi]$. Получим уравнение

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi_1^{i m}(x, \mu)}{\partial x} + \sum^i(x) \Phi_1^{i m}(x, \mu) = \\ = & \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=m}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) \Phi_{1l}^{k m}(x) W_{l(x)}^{k \rightarrow l} + q_1^{i m}(x, \mu), \end{aligned} \quad (5.34)$$

где

$$\Phi_1^{i m}(x, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \Phi^i(x, \mu, \varphi) d\varphi,$$

$$q_1^{i m}(x, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos m\varphi q^i(x, \mu, \varphi) d\varphi$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \Phi_1^{i m}(0, \mu) = f_1^{i m}(\mu) = \int_0^{2\pi} \cos m\varphi f^i(\mu, \varphi) d\varphi \text{ при } \mu > 0, \\ \Phi_1^{i m}(\delta, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0. \end{cases}$$

Умножим выражение (5.31) на $\sin m\varphi$ и, проинтегрировав по φ , получим

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi_2^{i m}(x, \mu)}{\partial x} + \sum^i(x) \Phi_2^{i m}(x, \mu) = \\ & = \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=m}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) \Phi_{2l}^{km}(x) W_l^{k \rightarrow i}(x) + q_2^{i m}(x, \mu), \end{aligned} \quad (5.35)$$

где

$$\Phi_2^{i m}(x, \mu) = \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \Phi^i(x, \mu, \varphi) d\varphi;$$

$$q_2^{i m}(x, \mu) = \int_0^{2\pi} \sin m\varphi q^i(x, \mu, \varphi) d\varphi$$

и граничные условия

$$\Phi_2^{i m}(0, \mu) = f_2^{i m}(\mu) = \int_0^{2\pi} f^i(\mu, \varphi) \sin m\varphi d\varphi \text{ при } \mu > 0,$$

$$\Phi_2^{i m}(\delta, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0.$$

Уравнения (5.34) и (5.35) совершенно аналогичны уравнению (5.2), поэтому система интегральных уравнений для определения функций $\Phi_{1l}^{i m}(x)$ и $\Phi_{2l}^{i m}(x)$ совершенно аналогична системе интегральных уравнений (5.10) и имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{1n}^{i m}(x) = & \sum_{l=m}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{\delta} \Phi_{1l}^{i m}(x') W_l^{i \rightarrow i}(x') \zeta_{nl}^{i m}(x, x') dx' + \\ & + Q_{1n}^{i m}(x), \end{aligned} \quad (5.36)$$

где $n = m; m + 1; \dots$;

$$\zeta_{n l}^{i m}(x, x') = \begin{cases} \int_0^1 \frac{P_n^m(\mu) P_l^m(\mu)}{\mu} e^{-\frac{Y^i(x, x')}{\mu}} d\mu \text{ при } x' \leq x, \\ (-1)^{n+l} \int_0^1 \frac{P_n^m(\mu) P_l^m(\mu)}{\mu} e^{\frac{Y^i(x, x')}{\mu}} d\mu \text{ при } x' \geq x, \end{cases}$$

$$Q_{1 n}^{i m}(x) = \sum_{k=k_0}^{l-1} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{\delta} \Phi_{1 l}^{k m}(x') W_l^{k \rightarrow i}(x') \zeta_{n l}^{i m}(x, x') dx' +$$

$$+ \int_0^1 d\mu P_n(\mu) \left[f_1^{i m}(\mu) e^{-\frac{Y^i(x, 0)}{\mu}} + \int_0^x e^{-\frac{Y^i(x, x')}{\mu}} \frac{q_1^{i m}(x', \mu)}{\mu} dx' + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \int_x^{\delta} e^{\frac{Y^i(x, x')}{\mu}} \frac{q_1^{i m}(x', -\mu)}{\mu} dx' \right].$$

Система уравнений для функций $\Phi_{2 n}^{i m}$ тождественна системе (5.36), и мы ее выписывать не будем.

Таким образом, в случае азимутальной асимметрии полная система представляет собой, вообще говоря, три независимые бесконечные системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода для каждой группы нейтронов. Как и в случае азимутальной симметрии, каждая из трех систем становится конечной, если индикатриса рассеяния, не уводящего нейтрон из группы $W^{i \rightarrow i}(x, \mu_0)$, может быть описана с помощью конечного числа полиномов Лежандра. Если $W^{i \rightarrow i}(\mu_0)$ изотропно или может быть эффективно описано с помощью транспортной аппроксимации, система уравнений предельно упрощается.

Так как при этом $W_l^{i \rightarrow i} = 0$ при всех $l \geq 1$, то в рассмотрении опять остается лишь одно уравнение (5.12):

$$\Phi_0^i(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} \Phi_0^i(x') W_0^{i \rightarrow i}(x') \zeta_{00}^i(x, x') dx' + Q_0^i(x).$$

Найденная из этого уравнения функция $\Phi_0^i(x)$ позволяет полностью описать угловое распределение потока нейтронов в любой точке уже с помощью квадратурных соотношений независимо от степени анизотропии и азимутальной асимметрии потока.

§ 6. СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Во всех предыдущих главах результаты, полученные для плоской геометрии, легко распространялись и на сферическую геометрию. Поэтому, ограничиваясь конечными результатами, мы не производили повторения выкладок специально для сферической геометрии. Однако для сферы невозможно получить интегральное уравнение тем же способом, каким оно было получено для плоской геометрии. Вывод интегральной формы записи кинетического уравнения для сферической геометрии, обладающий некоторыми специфическими чертами, приведен в настоящем параграфе.

Будем рассматривать сферическую систему, все материальные свойства и физические параметры которой являются функциями только радиуса r , а дифференциальный поток нейтронов $\Phi^{(i)}(r, \mu)$ — только функцией радиуса r и косинуса μ угла между направлением радиуса вектора \mathbf{r}/r и рассматриваемым направлением движения нейтронов Ω в данной точке. Если ввести в рассмотрение новую координату x с началом в рассматриваемой точке \mathbf{r} , направленную в сторону, противоположную Ω , то групповое кинетическое уравнение может быть представлено в виде*

$$-\frac{d\Phi^i(r, \mu)}{dx} + \Sigma^i(r) \Phi^i(r, \mu) = \sum_{k=k_0}^i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) W_l^{k \rightarrow i}(r) \Phi_l^k(r) + q^i(r, \mu) = Q^i(r, \mu). \quad (5.37)$$

Если на внешнюю поверхность сферы радиуса R извне падает поток нейтронов $\Phi_R^i(\mu_R)$, уравнение (5.37) должно быть дополнено граничным условием

$$\Phi^i(R, \mu_R) = \Phi_R^i(\mu_R) \quad \text{при } \mu_R < 0,$$

где μ_R — косинус угла между направлением движения нейтрона и нормалью к поверхности сферы.

Уравнение (5.37) может быть формально проинтегрировано вдоль координаты x как однородное линейное уравнение первого порядка. Тогда получим

$$\Phi^i(r, \mu) = \Phi_R^i(\mu_R) e^{-\gamma^i(x_R)} + \int_0^{x_R} Q^i[r'(x), \mu'(x)] e^{-\gamma^i(x)} dx, \quad (5.38)$$

* Для простоты будем использовать константы, усредненные с учетом функции опасности, или универсальные константы для достаточно узких групп.

где

$$Y^i(x) = \int_0^x \sum^i [r(x')] dx'.$$

Выражение (5.38) имеет весьма простой смысл. Оно иллюстрирует то очевидное обстоятельство, что число нейтронов $\Phi^i(r, \mu)$, летящих в направлении μ , в точке r определяется количеством нейтронов $Q^i[r'(x), \mu'(x)] e^{-Y^i(x)}$, долетающих

до интересующей нас точки из всех точек, лежащих на отрезке прямой $x[0; x_R]$, как это видно из рис. 5.6. На рис. 5.6 $\mu'(x)$ — косинус угла, под которым должен лететь нейтрон из точки с радиусом $r'(x)$, чтобы попасть в точку r под углом с косинусом μ ; x_R — расстояние от интересующей нас точки до поверхности сферы в направлении, противоположном Ω . Очевидно, что вклад в интересующее нас значение дифференциального потока i -й группы $\Phi^i(r, \mu)$ дадут только те влетающие извне нейтроны, которые в точке x_R имеют косинус угла между радиу-

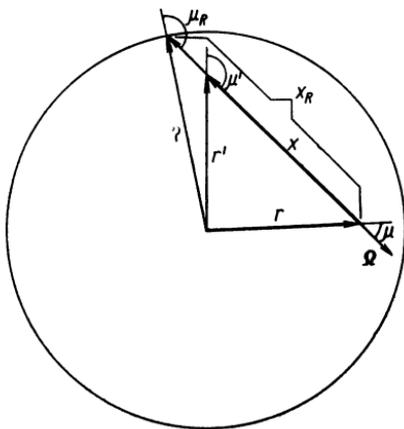


Рис. 5.6.

сом и направлением полета, равный μ_R . Вероятность нейтрону пролететь расстояние x без взаимодействия с ядрами среды описывается множителем $e^{-Y^i(x)}$.

С помощью рис. 5.6 легко устанавливаются соотношения между геометрическими величинами, входящими в выражение (5.38):

$$r'(x) = \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx\mu}, \quad \mu'(x) = \frac{r\mu - x}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx\mu}}.$$

Однако, поскольку все физические параметры системы являются функциями радиуса, в выражении (5.38) целесообразно сделать замену переменных:

$$\begin{aligned} \Phi^i(r, \mu) &= \Phi_R^i(\mu_R) e^{-Y_1^i(r, R, \mu)} + \\ &+ \begin{cases} \int_0^r \frac{r'}{\sqrt{1-\mu^2}} Q^i(r', \mu') e^{-Y_1^i(r, r', \mu)} dr' + \\ + \int_r^R \frac{r'}{\sqrt{1-\mu^2}} Q^i(r', -\mu') e^{-Y_2^i(r, r', \mu)} dr' \text{ при } \mu > 0, \\ \int_r^R Q^i(r', -\mu') e^{Y_1^i(r, r', \mu)} dr' \text{ при } \mu < 0. \end{cases} \quad (5.39) \end{aligned}$$

Здесь

$$\mu_R = -\frac{\sqrt{R^2 - r^2(1 - \mu^2)}}{R}, \quad \mu' = \frac{\sqrt{(r')^2 - r^2(1 - \mu^2)}}{r'};$$

$$Y_1^i(r, r', \mu) = \int_{r'}^r \frac{\Sigma^i(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1 - \mu^2)}};$$

$$Y_2^i(r, r', \mu) = \int_{r\sqrt{1-\mu^2}}^r \frac{\Sigma^i(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1 - \mu^2)}} + \int_{r\sqrt{1-\mu^2}}^{r'} \frac{\Sigma^i(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1 - \mu^2)}}.$$

Так как в $Q^{(i)}(r, \mu)$ входят гармоники $\Phi_i^i(r)$ дифференциального потока $\Phi^i(r, \mu)$, перейдем к ним и в левой части выражения (5.39). Для этого умножим обе части выражения (5.39) на $P_n(\mu)$ и проинтегрируем по всему интервалу изменения $\mu[-1; 1]$. Изменив порядок интегрирования и подставив вместо $Q^i(r, \mu)$ его выражение (5.37), получим систему интегральных уравнений:

$$\Phi_n^i(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \int_0^R \Phi_l^i(r') W_l^{i \rightarrow i}(r') \zeta_{nl}^i(r, r') dr' + Q_n^i(r),$$

где

$$\zeta_{nl}^i(r, r') = \begin{cases} r' \int_0^1 P_n(\mu) \frac{P_l(\mu') e^{-Y_1^i(r, r', \mu)} + P_l(-\mu') e^{-Y_2^i(r, r', \mu)}}{\sqrt{(r')^2 - r^2(1 - \mu^2)}} \times \\ \times d\mu \quad \text{при } r' < r, \\ r' \int_1^0 P_n(\mu) P_l(-\mu') \frac{e^{Y_1^i(r, r', \mu)} d\mu}{\sqrt{(r')^2 - r^2(1 - \mu^2)}} + \\ + r' \int_0^1 P_n(\mu) P_l(-\mu') \frac{e^{-Y_2^i(r, r', \mu)} d\mu}{\sqrt{(r')^2 - r^2(1 - \mu^2)}} \quad \text{при } r' > r, \end{cases}$$

$$Q_n^i(r) = \sum_{k=k_0}^{l-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \int_0^R [\Phi_l^k(r') W_l^{k \rightarrow i}(r') + q_l^i(r')] \zeta_{nl}^i(r, r') dr' + \\ + \int_{-1}^0 \Phi_R^i(\mu_R) e^{Y_1^i(r, R, \mu)} P_n(\mu) d\mu + \int_0^1 \Phi_R^i(\mu_R) e^{-Y_2^i(r, R, \mu)} P_n(\mu) d\mu,$$

$$q_l^i(r') = \int_{-1}^1 q^i(r', \mu) P_l(\mu) d\mu.$$

Матрицы ослабления $\zeta_{nl}^i(r, r')$ в общем виде для сферической геометрии выглядят довольно сложными. Однако в конкретных задачах эти выражения часто весьма существенно упрощаются. Очевидно, самый простой вид они будут иметь в случае однородной сферы. При этом

$$Y_1^i(r, r', \mu) = \sum^i [r\mu - \sqrt{(r')^2 - r^2(1 - \mu^2)}],$$

$$Y_2^i(r, r', \mu) = \sum^i [r\mu + \sqrt{(r')^2 - r^2(1 - \mu^2)}].$$

Введя новую переменную $t = Y^i$ в каждый из интегралов, получим

$$\zeta_{nl}^i(r, r') = \begin{cases} \frac{r'}{r} \int_{\Sigma^i(r-r')}^{\Sigma^i(r+r')} dt \frac{e^{-t}}{t} P_n \left[\frac{t}{2\Sigma^i r} - \frac{\Sigma^i (r')^2 - r^2}{t \cdot 2r} \right] P_l \left[\frac{\Sigma^i}{t} \times \right. \\ \left. \times \frac{(r')^2 - r^2}{2r'} - \frac{t}{2\Sigma^i r} \right] \text{ при } r' > r, \\ \frac{r'}{r} \int_{\Sigma^i(r-r')}^{\Sigma^i(r+r')} dt \frac{e^{-t}}{t} P_n \left[\frac{t}{2\Sigma^i r} - \frac{\Sigma^i (r')^2 - r^2}{t \cdot 2r} \right] P_l \left[\frac{\Sigma^i}{t} \times \right. \\ \left. \times \frac{(r')^2 - r^2}{2r'} - \frac{t}{2\Sigma^i r} \right] + \frac{r'}{r} \int_{\Sigma^i \sqrt{r^2 - (r')^2}}^{\Sigma^i(r-r')} dt \frac{e^{-t}}{t} P_n \left[\frac{t}{2\Sigma^i r} - \right. \\ \left. - \frac{\Sigma^i (r')^2 - r^2}{t \cdot 2r} \right] \left\{ P_l \left[\frac{\Sigma^i (r')^2 - r^2}{t \cdot 2r'} - \frac{t}{2\Sigma^i r} \right] - \right. \\ \left. - P_l \left[\frac{t}{2\Sigma^i r} - \frac{\Sigma^i (r')^2 - r^2}{t \cdot 2r'} \right] \right\} \text{ при } r' < r. \end{cases}$$

Легко видеть, что матрицы ослабления выражаются через суммы интегральных экспонент и произведений обычных экспонент и полиномов. Самый простой вид имеет член

$$\zeta_{\infty}^i(r, r') = \frac{r'}{r} \{E_1[\Sigma^i(r+r')] - E_1[\Sigma^i(r-r')]\}.$$

Но именно он один участвует в рассмотрении, если рассеяние, не уводящее нейтрон из группы, изотропно. В этом случае система уравнений вырождается в одно уравнение

$$\Phi_0^i(r) = \frac{1}{2} \int_0^R \Phi_0^i(r') W_i^{i-1}(r') \zeta_{00}^i(r, r') dr' + Q_0^i(r).$$

Зная $\Phi_0^i(r)$, можно получить полную информацию о дифференциальном потоке уже с помощью квадратурных соотношений независимо от его анизотропии.

В заключение попытаемся, хотя бы примерно, очертить круг задач, для решения которых целесообразно применять метод интегральных уравнений. Прежде всего это задачи глубокого проникновения нейтронов в средах простой (в первую очередь плоской) геометрии с индикатрисой рассеяния, обладающей слабой анизотропией или допускающей эффективную транспортную аппроксимацию. В этом случае уравнения имеют наиболее простой вид независимо от степени анизотропии потока нейтронов. Последнее обстоятельство и делает применение метода интегральных уравнений в случае сильной анизотропии потока особенно целесообразным, поскольку любой другой метод, связанный с аппроксимацией углового распределения нейтронов в среде (например, P_n -метод), требует очень высоких приближений. Для того чтобы наметить способы решения интегрального уравнения, рассмотрим два предельных случая — сильного и слабого увода нейтрона из группы.

В случае сильного увода весьма велика вероятность того, что нейтрон после взаимодействия со средой покинет группу. После первого же акта взаимодействия с ядрами среды лишь небольшая часть нейтронов останется в группе. Очевидно, что из числа уцелевших в первом акте лишь небольшая часть рассеется внутри группы в следующем и т. д. Отсюда следует, что при решении интегральных уравнений методом итераций итерационный процесс, построенный по принципу последовательных столкновений, должен быстро сходиться. Так как при этом вклад нейтронов, испытавших многократное внутригрупповое рассеяние, невелик, в качестве первого приближения целесообразно использовать плотность потока нейтронов данной группы, не испытавших еще внутригрупповых взаимодействий, т. е. $Q_i^i(x)$.

Рассмотренный предельный случай осуществляется, например, при высоких энергиях (выше 1 МэВ), когда доминируют процессы неупругого рассеяния, а группы выбраны достаточно узкими. Наличие сильной анизотропии потока практически всегда связано с заметным изменением плотности потока нейтронов на длине свободного пробега и свидетельствует о сильном уводе или вылете нейтронов.

Рассмотрим другой предельный случай — слабого увода, который чаще всего имеет место при средних энергиях. Отсутствие неупругих процессов и сильного поглощения при ширине группы, существенно превышающей величину максимального упругого сброса энергии, приводит к тому, что в каждом акте взаимодействия с ядрами среды лишь незначительная доля нейтронов покидает группу, а большая часть, прежде чем уйти из группы, испытывает многократное рассеяние. Вклад в поток доли нейтронов, не испытавших внутригрупповых рассеяний $Q_i^i(x)$, в этом случае незначителен. Поэтому, выбирая способ интегрирования уравнений (5.12) или (5.20), следует учитывать,

что итерационный метод, представляющий по существу метод последовательных столкновений, может потребовать больших затрат машинного времени, если в качестве нулевого приближения использовать функции $Q_n^i(x)$. Существенной экономии времени при расчетах можно достигнуть, если в качестве нулевого приближения использовать асимптотическую аппроксимацию нейтронного потока.

В самом деле, при слабом уводе уже на расстояниях в несколько длин свободного пробега от источников возмущения устанавливается асимптотический ход плотности. Используя этот факт, можно получить неплохое первое приближение, которое легко уточнить, например, последующими итерациями до требуемой степени точности. Впрочем, для решения уравнения может быть использован и любой итерационный метод, выбор которого зависит от конкретных условий задачи.

Как уже отмечалось, особенно целесообразно применять интегральную форму записи кинетического уравнения при сильной анизотропии потока. Такая анизотропия обычно отмечается вблизи сильных источников возмущения поля даже при слабом уводе. Применение в данном случае, например, низких приближений P_n -метода дает результаты, обладающие заметной погрешностью. Однако эти результаты могут быть существенно улучшены. Подставляя их в правую часть выражений (5.6) или (5.7) [или (5.12) при изотропном рассеянии], получим распределения, учитывающие в основном эффекты, связанные с анизотропией потока и, следовательно, уже значительно улучшенные. Повторение этой процедуры позволит получить результат с любой заданной точностью.

Таким образом, приведенные в настоящей главе выражения вида (5.7), (5.10) или (5.12) помимо непосредственного использования в качестве интегральных уравнений с успехом могут применяться также и для улучшения точности результатов, полученных другими, более грубыми методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хен Г., Зигерт Х. В сб. «Физические проблемы защиты реакторов». Перев. с англ. Под ред. С. Г. Цыпина и др. М., Атомиздат (в печати).
2. Бергельсон Б. Р., Торлин Б. З. «Атомная энергия», 27, 346 (1969).
3. Бергельсон Б. Р. и др. «Атомная энергия», 24, 28 (1968).
4. Ширков Д. В. В сб. «Физика и теплотехника реакторов». М., Атомиздат, 1958, стр. 57; там же, стр. 62.
5. Галанин А. Д. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1959.
6. Прайс Б. и др. Защита от ядерных излучений. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
7. Веселкин А. и др. Там же, 16, 32 (1964).
8. Butler J. The status of theoretical methods for reactor shield design. AEEW-R 361, 1964.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Глава VI

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Использование для практических расчетов защиты различных способов решения кинетического уравнения, изложению которых посвящены предыдущие разделы книги, наталкивается в ряде случаев на серьезные трудности. Если иметь в виду простейшие способы решения, подобные диффузионному или возрастно-диффузионному приближению, то они, как известно, непригодны для описания глубокого проникновения нейтронов. С другой стороны, сложная геометрия защиты в значительной степени затрудняет применение строгих методов. Более того, их использование, связанное с чрезвычайно большими затратами машинного времени, чаще всего оказывается неоправданным из-за ограниченных требований, предъявляемых к объему и точности искомой информации*.

Методы расчета защиты, о которых пойдет речь в настоящей главе, представляют эффективную процедуру для получения, хотя и ограниченной, но достаточно точной информации о поле нейтронного излучения в самой защите и за ее пределами. Эти методы, называемые полуэмпирическими, сочетают простоту диффузионного приближения с удовлетворительной точностью в описании глубокого проникновения нейтронов. Под словом «полуэмпирические» подразумеваются приближенные методы, в которых используются один или несколько произвольных параметров, позволяющих корректировать результаты расчета в соответствии с экспериментальными данными.

В настоящее время полуэмпирические методы, имеющие чисто прикладное значение, широко используются в качестве рабочего инструмента для расчета защиты реакторов.

Прежде чем перейти к математической формулировке основных уравнений метода, остановимся вкратце на физической интерпретации процесса переноса нейтронов в водородсодержащей среде (безводородные среды будут рассмотрены отдельно в конце этой главы).

* Эти соображения лишь констатируют существующее в настоящее время положение вещей. Их не следует рассматривать как обоснование для отказа от точных методов расчета защиты. По мере развития электронно-счетных машин и накопления исчерпывающей информации по константам взаимодействия строгие способы решения кинетического уравнения должны все более широко внедряться в практику расчетов защиты.

Особое внимание, которое уделяется водородсодержащим средам, объясняется двумя причинами. Первая связана с широким использованием в защите водородсодержащих материалов как наиболее эффективных с точки зрения ослабления быстрых и промежуточных нейтронов, а вторая — с особенностями взаимодействия нейтронов с ядрами водорода, затрудняющими расчет защиты. Взаимодействие нейтронов с ядрами водорода характеризуется сильной анизотропией рассеяния в лабораторной системе координат и большой потерей энергии в расчете на одно столкновение. При таких условиях нарушение корреляции между углом рассеяния и потерей энергии, свойственное приближенным способам решения кинетического уравнения, неизбежно приводит к существенному искажению проникающей способности нейтронов. По существу только полуэмпирические методы расчета защиты позволяют обойти эту трудность, не прибегая к громоздким вычислениям.

Основные закономерности прохождения быстрых нейтронов через водородсодержащие среды легко понять, если обратиться к энергетической зависимости полного сечения для водорода. Как известно, при низких и средних энергиях σ_t^H достигает сравнительно большой величины и практически не зависит от E . При высоких энергиях σ_t^H — монотонно убывающая функция E . Малая величина σ_t^H при $E > 1$ Мэв и эффективное замедление на водороде при $E < 1$ Мэв обуславливают появление в спектральном распределении нейтронов проникающей компоненты. Например, для источников спектра деления к такой компоненте принадлежат нейтроны с $E \sim 8$ Мэв.

Перенос проникающих нейтронов осуществляется путем прямых прострелов и упругого рассеяния на малые углы. Процессы же неупругого и упругого рассеяния на большие углы, связанные с большой потерей энергии или «запутыванием» в среде, приводят к выбыванию нейтронов из проникающей компоненты. Плотность таких столкновений служит источником для замедляющихся нейтронов, спектр которых формируется средой вблизи места их возникновения, а пространственное распределение следует за соответствующим распределением проникающих нейтронов.

Таким образом, можно констатировать следующее. В водородсодержащей среде на некотором расстоянии от внешнего источника устанавливается спектр нейтронов, который условно может быть разделен на две компоненты. К первой, проникающей компоненте относятся быстрые нейтроны, ответственные за пространственное распределение спектра. Вторая компонента объединяет замедляющиеся нейтроны, которые влияют главным образом на форму спектра.

В дальнейшем под определением «водородсодержащая защита» подразумеваются как однородные смеси ядер водорода

с ядрами других элементов (простая вода, различные сорта бетонов, гидриды металлов), так и гетерогенные среды типа многослойных железо-водных экранов. Понятие «водородсодержащая защита» может быть распространено и на другие конфигурации. В частности, оно применимо, хотя и в ограниченном смысле, к двухслойному защитному барьеру. Необходимо лишь соблюдать одно условие: водородсодержащий слой должен быть размещен между защищаемым объектом и экраном произвольного состава.

§ 1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вывод уравнений, используемых в полуэмпирических методах, начнем с рассмотрения кинетического уравнения

$$\Omega\Phi + \Sigma_t\Phi = \iint \Phi(\mathbf{r}, u', \Omega') W(u' \rightarrow u, \mu_0) du' d\Omega' + q. \quad (6.1)$$

Угловая зависимость индикатрисы рассеяния $W(u' \rightarrow u, \mu_0)$ может быть представлена в виде разложения по полиномам Лежандра

$$W(u' \rightarrow u, \mu_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) W_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0). \quad (6.2)$$

В практических расчетах приходится всегда ограничиваться конечным и обычно небольшим числом членов в разложении (6.2), что приводит к ошибкам в описании анизотропии рассеяния. Иная процедура, отличающаяся от общепринятой, изложена в работах [1, 2] (см. также гл. V §2). Она заключается в том, что в разложении (6.2) все коэффициенты $W_l(u' \rightarrow u)$ при $l \geq L+1$ считаются одинаковыми и равными $W_{L+1}(u' \rightarrow u)$. Тогда разложение (6.2) может быть записано в виде конечного ряда по $P_l(\mu_0)$

$$W(u' \rightarrow u, \mu_0) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L (2l+1) [W_l(u' \rightarrow u) - W_{L+1}(u' \rightarrow u)] \times \right. \\ \left. \times P_l(\mu_0) + W_{L+1}(u' \rightarrow u) \delta(1 - \mu_0) \right\}. \quad (6.3)$$

Переход от разложения (6.2) к (6.3) означает завышение анизотропии рассеяния тем меньше, чем больше L . По определению [см. выражение (1.14)] $(L+1)$ -й коэффициент разложения индикатрисы рассеяния $W(u' \rightarrow u, \mu_0)$ по $P_l(\mu_0)$ записывается в виде

$$W_{L+1}(u' \rightarrow u) = \int W(u' \rightarrow u, \mu_0) P_{L+1}(\mu_0) d\mu_0 = \\ = \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(u', \mu_0) \delta[u - u' - P(\mu_0)] P_{L+1}(\mu_0) d\mu_0. \quad (6.4)$$

Здесь $\Sigma_s(u', \mu_0)$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния нейтронов при летаргии u' (неупругое рассеяние считается изотропным с независимым распределением нейтронов по углам и энергиям).

Последний член в правой части разложения (6.3) описывает рассеяние без изменения направления движения нейтрона. Подобное «рассеяние» не должно сопровождаться изменением энергии нейтрона. Поэтому в выражении (6.4) следует $\delta[u-u'-P(\mu_0)]$ заменить на $\delta(u-u')$. В этом случае

$$\begin{aligned} W_{L+1}(u' \rightarrow u) &= \delta(u-u') \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(\mu_0, u') P_{L+1}(\mu_0) d\mu_0 = \\ &= \Sigma_s(u') \chi_{L+1}(u') \delta(u-u'), \end{aligned}$$

где $\chi_{L+1}(u')$ — коэффициент разложения угловой зависимости дифференциального сечения $\Sigma_s(\mu_0, u')$ по $P_l(\mu_0)$. Подставив выражение для $W_{L+1}(u' \rightarrow u)$ в разложение (6.3), получим

$$W(u' \rightarrow u, \mu_0) = W^*(u' \rightarrow u, \mu_0) + \frac{\Sigma_s(u')}{4\pi} \chi_{L+1}(u') \delta(\mu_0-1) \delta(u-u'),$$

$$\begin{aligned} W^*(u' \rightarrow u, \mu_0) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^L (2l+1) [W_l(u' \rightarrow u) - \\ &- \Sigma_s(u') \chi_{L+1}(u') \delta(u-u')] P_l(\mu_0). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Подставив выражение (6.5) в (6.1) и введя обозначение

$$\Sigma_B(u) = \Sigma_t(u) - \Sigma_s(u) \chi_{L+1}(u),$$

получим

$$\Omega \nabla \Phi + \Sigma_B \Phi = \iint \Phi(r, u', \Omega') W^*(u' \rightarrow u', \mu_0) du' d\Omega' + q. \quad (6.6)$$

Величину $\Sigma_B(u)$ в дальнейшем будем называть сечением выведения.

Воспользуемся теперь концепцией, согласно которой весь спектр нейтронов может быть разделен на проникающую и замедляющуюся компоненты. Запишем дифференциальный поток нейтронов $\Phi(r, u, \Omega)$ в виде суммы двух функций

$$\Phi(r, u, \Omega) = \psi(r, u, \Omega) + \phi(r, u, \Omega). \quad (6.7)$$

Здесь сохранены обозначения, принятые в гл. III для потока нерассеянных и рассеянных нейтронов.

Пусть функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\Omega \nabla \psi + \Sigma_B \psi = q, \quad (6.8)$$

которое описывает перенос нейтронов проникающей компоненты при условии, что $1/\Sigma_B$ — длина свободного пробега по отношению к столкновениям, выводящим нейтроны из этой компоненты.

Подставим выражение (6.7) в уравнение (6.6). Тогда с учетом (6.8) получим

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma_v \varphi = \iint \varphi(\mathbf{r}, u', \Omega') W^*(u' \rightarrow u, \mu_0) du' d\Omega' + Q. \quad (6.9)$$

Уравнение (6.9) описывает перенос замедляющихся нейтронов, источником для которых служит плотность столкновений проникающих нейтронов:

$$Q(\mathbf{r}, u, \Omega) = \iint \psi(\mathbf{r}, u', \Omega') W^*(u' \rightarrow u, \mu_0) du' d\Omega'.$$

Перенос замедляющихся нейтронов практически не влияет на их пространственное макрораспределение. В основном оно определяется пространственным распределением проникающих нейтронов, т. е. задается функцией $Q(\mathbf{r}, u, \Omega)$. Кроме того, информация, которую нужно извлечь из решения уравнения (6.9), касается главным образом энергетического распределения замедляющихся нейтронов, а не их углового спектра, который, кстати говоря, не должен обладать сильной анизотропией (вдали от границ среды). Это означает, что при решении уравнения (6.9) нет необходимости в точном описании углового спектра нейтронов. Поэтому в разложении угловой зависимости функции $\varphi(\mathbf{r}, u, \Omega)$ по полиномам Лежандра можно ограничиться первыми двумя членами

$$\varphi(\mathbf{r}, u, \Omega) \simeq \frac{1}{2} \varphi_0(\mathbf{r}, u) + \frac{3}{2} \Omega \varphi_1(\mathbf{r}, u). \quad (6.10)$$

Как показано в гл. III, § 3 уравнение (6.9) при подстановке в него (6.10) превращается в систему из двух уравнений для функций φ_0 и φ_1 , что соответствует P_1 -приближению метода сферических гармоник. Так как для замедляющихся нейтронов корреляция между углом рассеяния и потерей энергии не играет существенной роли, то P_1 -приближение сводится к диффузионному.

Опуская все промежуточные преобразования, которые последовательно изложены в гл. III, § 3, 4, вместо уравнения (6.9) запишем уравнение диффузионного типа

$$-D\Delta\varphi_0 + \Sigma_v\varphi_0 = \int \varphi_0(\mathbf{r}, u') W_0^*(u' \rightarrow u) du' + Q_0. \quad (6.11)$$

Согласно выражениям (6.5),

$$\Sigma_v(u) = \Sigma_t(u) - \Sigma_s(u) \chi_{L+1}(u),$$

$$W_0^*(u' \rightarrow u) = W_0(u' \rightarrow u) - \Sigma_s(u') \chi_{L+1}(u') \delta(u - u'). \quad (6.12)$$

Подставляя выражения (6.12) в (6.11), получаем окончательный вид уравнения для замедляющихся нейтронов:

$$-D\Delta\varphi_0 + \Sigma_t\varphi_0 = \int \varphi_0(\mathbf{r}, u') W_0(u' \rightarrow u) du' + Q_0, \quad (6.13)$$

где $\varphi_0(\mathbf{r}, u)$ — интегральный поток замедляющихся нейтронов, а $W_0(u' \rightarrow u)$ нулевой коэффициент разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра.

В уравнение (6.13) распределенные источники задаются функцией

$$Q_0(\mathbf{r}, u) = \int \psi_0(\mathbf{r}, u') W_0^*(u' \rightarrow u) du'. \quad (6.14)$$

Согласно выражению (6.12),

$$W_0^*(u' \rightarrow u) = W_0(u' \rightarrow u) - [\Sigma_t(u') - \Sigma_a(u')] \delta(u - u'). \quad (6.15)$$

Так как по определению $\int W_0^*(u' \rightarrow u) du = \Sigma_a(u')$, то $W_0^*(u' \rightarrow u)$ может рассматриваться как дифференциальное сечение выведения. Введя обозначение

$$W_0^*(u' \rightarrow u) = \Sigma_a(u' \rightarrow u), \quad (6.16)$$

запишем функцию $Q_0(\mathbf{r}, u)$ в виде

$$Q_0(\mathbf{r}, u) = \int \psi_0(\mathbf{r}, u') \Sigma_a(u' \rightarrow u) du'. \quad (6.17)$$

Решение уравнения (6.13) с распределенными источниками (6.17) определяет энергетический спектр замедляющихся нейтронов и уточняет их пространственное распределение. Это уточнение касается главным образом «тонкой структуры» пространственного распределения, возникающей из-за неоднородности ослабляющей среды (макрораспределение задается функцией $Q_0(\mathbf{r}, u)$).

Следует при этом иметь в виду, что переход от уравнения (6.9) к диффузионному уравнению (6.13) означает пренебрежение эффектом анизотропии источников [вместо функции $Q(\mathbf{r}, u, \Omega)$ используется функция $Q_0(\mathbf{r}, u)$]. Так как в соответствии с физической природой рассматриваемой модели переноса источники должны обладать существенной анизотропией, то упомянутое приближение не может не приводить к некоторым ошибкам в пространственном распределении замедляющихся нейтронов.

Подведем теперь предварительный итог. Вместо исходного кинетического уравнения (6.1) получены два более простых уравнения (6.8) и (6.13). Тем самым рассматриваемая задача существенно разделена на две части: одна включает перенос проникающих нейтронов в приближении прямых прострелов, а другая — перенос замедляющихся нейтронов в диффузионном приближении.

Вблизи активной зоны реактора, где спектр обогащен тепловыми и промежуточными нейтронами, процессы переноса и замедления удовлетворительно описываются одним диффузионным уравнением (6.13). Вдали от активной зоны, где быстрые нейтроны с анизотропным угловым распределением становятся ведущей компонентой спектра*, приходится использовать решение обоих уравнений (6.8) и (6.13).

* Спектральное равновесие устанавливается на расстояниях порядка нескольких длин замедления нейтронов проникающей части спектра деления.

Таким образом, система уравнений (6.8), (6.13) может рассматриваться как математическая формулировка полуэмпирического метода расчета защиты.

В качестве примера совместного решения уравнений (6.8) и (6.13) рассмотрим простейший случай плоского мононаправленного и моноэнергетического источника в бесконечной однородной среде. Решение уравнения (6.8) записывается в виде

$$\psi(x, u_0) = qe^{-\Sigma_B(u_0)x}, \quad (6.18)$$

где u_0 — летаргия, соответствующая энергии источника. Воспользуемся возрастным приближением для уравнения (6.13). Ограничившись первыми двумя членами разложения функции $W_0(u' \rightarrow u)$ по степеням $u - u'$ и проведя некоторые преобразования, получим [см. уравнение (3.100)]

$$D\Delta\Phi_0(x, u) - \Sigma_c\Phi_0(x, u) = \frac{\partial \xi \Sigma_s \Phi_0(x, u)}{\partial u} - Q_0(x, u). \quad (6.19)$$

Будем считать, что все нейтроны выбывают из проникающей компоненты при одном и том же значении летаргии u_1 , большем u_0 . Тогда, согласно выражениям (6.15) и (6.17),

$$Q_0(x, u) = \Sigma_B(u_0) \psi(x, u_0) \delta(u - u_1). \quad (6.20)$$

Подставим выражение (6.20) в (6.19) и перейдем от переменной u к переменной τ . В результате получим уравнение возраста с распределенными источниками

$$\Delta\Phi_0(x, \tau) - \frac{1}{L^2} \Phi_0(x, \tau) = \frac{\partial \Phi_0(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\Sigma_B}{\xi \Sigma_s} \psi(x) \delta(\tau). \quad (6.21)$$

Здесь

$$\tau = \int_{u_1}^u \frac{Ddu'}{\xi \Sigma_s}; \quad L = \sqrt{D/\Sigma_c}.$$

В общем виде решение уравнения (6.21) можно записать следующим образом:

$$\Phi_0(x, \tau) = \int_0^\infty Q_0(x', u_1) G(|x - x'|, u) dx', \quad (6.22)$$

где $Q_0(x', u_1)$ — функция, описывающая распределенные источники нейтронов с летаргией u_1 ; $G(|x - x'|, u)$ — функция Грина, определяющая поток замедляющихся нейтронов с летаргией u в точке x от плоского моноэнергетического источника, расположенного в точке x' .

Вид этой функции общеизвестен:

$$\xi \Sigma_s G(z, u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau(u)}} \exp\left[-\frac{z^2}{4\tau(u)} + \kappa(u)\right]. \quad (6.23)$$

Здесь

$$x = \int_{u_1}^u \frac{\Sigma_c du'}{\xi \Sigma_s}.$$

Подставим выражения (6.18), (6.20) и (6.23) в (6.22). После простых преобразований получим

$$\varphi_0(x, u) = q \frac{\Sigma_b}{\xi \Sigma_s} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - \Sigma_b \sqrt{\tau} \right) \right] \exp \left[-\Sigma_b x + \Sigma_b^2 \tau - x(u) \right], \quad (6.24)$$

где

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

При выполнении неравенства

$$x > 2(\sqrt{\tau} + \Sigma_b \tau)$$

выражение (6.24) переходит в асимптотическое решение уравнения (6.21), приведенное в книге Б. Прайса и др. [3]:

$$\varphi_0(x, u) \approx q \frac{\Sigma_b}{\xi \Sigma_s} \times \exp \left[-\Sigma_b(u_0) x + \Sigma_b^2(u_0) \tau(u, u_1) - \int_{u_1}^u \frac{\Sigma_c du'}{\xi \Sigma_s} \right]. \quad (6.25)$$

Здесь $\tau(u, u_1)$ — возраст нейтронов, летаргия которых изменилась от u_1 до u . Первый член суммы в показателе экспоненты определяет пространственное распределение нейтронов, второй — накопление замедляющихся нейтронов, а третий — поглощение нейтронов в процессе замедления. Можно получить выражения, аналогичные (6.25), но для других геометрий и спектра источника. Эти выражения могут быть использованы при различного рода оценках защиты от быстрых нейтронов.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕЧЕНИЯ ВЫВЕДЕНИЯ

В рамках рассматриваемых нами полуэмпирических методов расчета защиты особую роль играет сечение выведения. От этого параметра зависит точность расчета пространственного распределения нейтронов. Слово «полуэмпирические» в названии методов отражает тот факт, что сечение выведения, по существу, является экспериментальным параметром, вводимым в расчет для правильного описания ослабления нейтронов в материале защиты.

Понятие сечения выведения впервые было сформулировано в работе [4]. Авторы трактовали его как некое эффективное сечение, адекватное сечению поглощения. Использование величины $1/\Sigma_v$ в качестве длины ослабления позволяло рассчитывать с удовлетворительной точностью распределение дозы или потока тепловых нейтронов от источника спектра деления в большем слое воды с размещенными в нем пластинами из тяжелых элементов. Первые экспериментальные значения Σ_v опубликованы в работе [5].

В дальнейшем понятие сечения выведения было расширено. Появилось большое число экспериментальных работ, в которых определялись величины Σ_v для различных геометрий, источников и состава водородсодержащих сред. Делались даже попытки распространить это понятие на безводородные среды [6]. В последние годы модель сечения выведения завоевала широкую популярность и стала повсеместно использоваться для расчета защиты от быстрых нейтронов*.

Возможны различные подходы к определению и использованию сечения выведения. Наиболее полный и современный обзор по данному вопросу сделан в книгах Г. Гольдштейна [7] и Ю. Казанского и др. [8]. Мы ограничимся лишь одним замечанием относительно энергетической зависимости Σ_v .

Для определения сечения выведения как функции энергии нужно измерить или рассчитать пространственно-энергетическое распределение нейтронов от моноэнергетических источников в различных водородсодержащих средах. Энергия источников должна изменяться в широких пределах, охватывая весь спектр деления. Располагая такой информацией, можно легко определить все необходимые данные по сечениям выведения. Для определения $\Sigma_v(u)$ можно воспользоваться, как это сделано в большинстве известных работ, пространственным распределением только тепловых нейтронов или распределением дозы. При этом, однако, получаемые данные по $\Sigma_v(u)$ не являются исчерпывающими.

В литературе имеются весьма скудные данные по $\Sigma_v(u)$. Большинство из них собрано и систематизировано в работе [8]. Ограниченность данных по $\Sigma_v(u)$ объясняется в первую очередь сложностью и трудоемкостью соответствующих измерений или вычислений. Нет оснований рассчитывать на появление в ближайшее время исчерпывающей информации по данному вопросу. Поэтому особое значение приобретает возможность установления достаточно обоснованной количественной связи между $\Sigma_v(u)$ и истинными сечениями взаимодействия нейтронов с ядрами среды.

* При использовании экспериментальных значений сечений выведения нужно всегда иметь в виду, что условия рассматриваемой задачи должны соответствовать условиям, в которых измерялась эта величина.

Согласно выражению (6.12), сечение выведения определяется следующим образом:

$$\Sigma_b(u) = \Sigma_t(u) - \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(u, \mu_0) P_n(\mu_0) d\mu_0 \quad (6.26)$$

где $\Sigma_t(u)$, $\Sigma_s(u, \mu_0)$ — полное сечение и дифференциальное сечение упругого рассеяния при лётаргии u ; $P_n(\mu_0)$ — полином Лежандра n -й степени ($n \geq 1$). Степень полинома n играет роль произвольного параметра. Варьируя этот параметр, можно изменять величину Σ_b и тем самым корректировать результаты расчета пространственного распределения нейтронов. Число n , вообще говоря, должно зависеть от u .

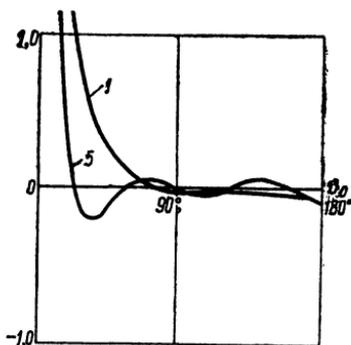


Рис. 6.1.

На рис. 6.1 изображена функция $\frac{1}{\Sigma_s(u)} \Sigma_s(u, \mu_0) P_n(\mu_0)$ для $n=1$ (кривая 1) и $n=5$ (кривая 5). В качестве функции $\frac{1}{\Sigma_s(u)} \Sigma_s(u, \mu_0)$ использовался угловой спектр нейтронов после дифракционного рассеяния. Легко видеть, что с увеличением степени полинома Лежандра уменьшается так называемый «теневой» конус рассеяния. Этот конус определяет область малых углов упругого рассеяния, попадая в которую, нейтроны не меняют существенным образом своих характеристик, влияющих на перенос, и поэтому не выбывают из проникающей компоненты. При заданном числе n доля таких нейтронов растет с увеличением анизотропии рассеяния.

Если в выражении (6.26) положить $n=1$, то Σ_b оказывается равным полному транспортному сечению:

$$\begin{aligned} \Sigma_b(u) &= \Sigma_t(u) - \int_{-1}^{+1} \mu_0 \Sigma_s(u, \mu_0) d\mu_0 = \\ &= \Sigma_c(u) + \Sigma_{in}(u) + \Sigma_s(u) [1 - \bar{\mu}_0(u)], \end{aligned} \quad (6.27)$$

где $\bar{\mu}_0(u)$ — средний косинус углов упругого рассеяния при лётаргии u .

Транспортные сечения в качестве сечения выведения использовались в целом ряде работ, в том числе в некоторых модификациях английской многогрупповой программы RASH [9, 10]. Однако замену Σ_b на Σ_{tr} все же нельзя рассматривать как удовлетворительное решение проблемы. На это указывает отличие $\Sigma_{tr}(u)$ от экспериментальных значений $\Sigma_b(u)$, о чем упоминается в работе [8], а также наблюдающееся расхождение между результатами измерений и расчетов по программе RASH при $\Sigma_b(u) = \Sigma_{tr}(u)$ [10].

Выражение (6.26) можно записать несколько по-иному, если заменить в нем $P_n(\mu_0)$ на произвольную функцию $f(\mu_0)$:

$$\Sigma_v(u) = \Sigma_t(u) - \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(u, \mu_0) f(\mu_0) d\mu_0. \quad (6.28)$$

Как и число n , конкретный вид функции $f(\mu_0)$ может зависеть от u .

В методе NRN, положенном в основу многогрупповой программы для расчета защиты тяжеловодных реакторов [11, 12], функция $f(\mu_0)$ задается следующим образом:

$$f(\mu_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_0 \geq \mu_v(u), \\ 0 & \text{при } \mu_0 \leq \mu_v(u). \end{cases} \quad (6.29)$$

Подставим соотношение (6.29) в (6.28) и воспользуемся для отсчета углов рассеяния системой центра инерции*. В результате получим

$$\Sigma_v(u) = \Sigma_t(u) - \int_{\nu_v(u)}^1 \Sigma_s(u, \nu_0) d\nu_0, \quad (6.30)$$

где ν_0 — косинус угла рассеяния в системе центра инерции. Сечение выведения, определяемое по формуле (6.30), равно полному сечению за вычетом части сечения упругого рассеяния. Эта часть Σ_s зависит от угла $\arccos \nu_v(u)$, называемого далее углом выведения. В выражении (6.30) косинус угла выведения $\nu_v(u)$, как и число n в выражении (6.26), играет роль произвольного параметра, определяющего размеры «теневого» конуса.

Сравнивая результаты расчета с экспериментальными данными по ослаблению нейтронов в различных средах, можно выбрать оптимальные значения параметра ν_v . Результаты подобного сравнения для источников со спектром, близким к спектру деления, приведены в работе [12]. В работах, посвященных методу NRN, указывается, что значение угла выведения может быть принято постоянным, т. е. не зависящим от u , и одинаковым для всех элементов (за исключением водорода), входивших в состав исследованных материалов.

Выражение (6.30) для Σ_v соответствует форме углового спектра нейтронов, рассеянных при энергиях $E > 1$ Мэв. На рис. 6.2 и 6.3, по данным работы [13], построены кривые, описывающие угловой спектр нейтронов, рассеянных при $E = 14,1$ и $4,1$ Мэв в различных материалах.

Для приведенных спектров характерно наличие ярко выраженного дифракционного максимума при малых углах. Ширина

* Использование системы центра инерции связано с удобством определения ν_v для различного сорта ядер (см. ниже).

этого максимума для большинства ядер оказывается близкой к значению параметра $\nu_B=0,6$, принятому в методе NRN. Исключением является лишь водород.

При рассеянии на ядрах водорода все без исключения нейтроны попадают в переднюю полусферу (в лабораторной систе-

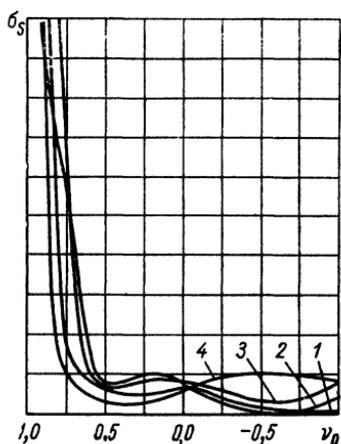


Рис. 6.2. Угловой спектр нейтронов, испытавших упругое рассеяние при $E=14,1$ Мэв:
1 — Fe; 2 — O; 3 — Al; 4 — C.

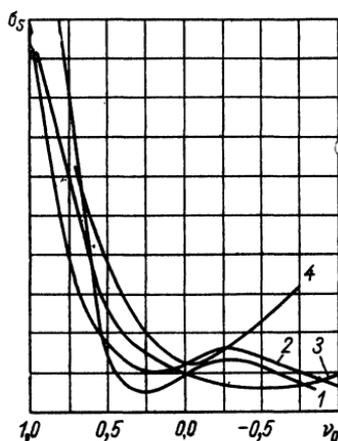


Рис. 6.3. Угловой спектр нейтронов, испытавших упругое рассеяние при $E=4,1$ Мэв:
1 — Fe; 2 — O; 3 — Al; 4 — C.

ме координат), а энергия нейтронов меняется существенным образом даже при малых углах рассеяния. Ясно, что в этом случае представление Σ_B , например, в виде транспортного сечения теряет всякий смысл.

В ранних работах в качестве $\Sigma_B^H(u)$ использовались полные сечения для водорода. Например, известная функция ослабления Альберта — Велтона для точечного источника деления в воде [14] получена в предположении, что любое столкновение нейтрона с ядром водорода равнозначно его поглощению. Дальнейшие исследования для других водородсодержащих сред и источников показали несостоятельность такой модели. В частности, переход от точечного источника к плоскому потребовал существенного уточнения функции Альберта — Велтона для согласования результатов расчета с экспериментом [5].

В табл. 6.1 приведены расчетные значения σ_B^H из работы [10]. Эти сечения получены из пространственного распределения в чистом водороде тепловых нейтронов от точечного изотропного моноэнергетического источника. Пространственные распределения рассчитывались методом моментов.

Согласно данным, приведенным в табл. 6.1, отношение сечения выведения к полному сечению для водорода слабо ме-

Сечения выведения для водорода

Энергия источника $E, \text{ Мэв}$	2	3	4	5	6	7	8	10
$\sigma_{\text{в}}^{\text{H}}(E), \text{ барн}$	2,68	2,09	1,71	1,61	1,26	1,15	1,13	0,803
$\sigma_{\text{в}}^{\text{H}}(E)/\sigma_{\text{т}}^{\text{H}}(E)$	0,83	0,92	0,90	0,89	0,89	0,9	0,87	0,86

няется в интервале энергий $2 \div 10 \text{ Мэв}$. Поэтому в методе RASH принято

$$\Sigma_{\text{в}}^{\text{H}}(u) = 0,9 \Sigma_{\text{т}}^{\text{H}}(u). \quad (6.31)$$

В методе NRN используется другое соотношение для $\Sigma_{\text{в}}^{\text{H}}$. Его легко получить, если подставить в выражение (6.30) оптимальное значение параметра $v_{\text{в}}^{\text{H}} = 0,45$ [11] и учесть тот факт, что рассеяние на водороде изотропно в системе центра инерции

$$\Sigma_{\text{в}}^{\text{H}}(u) = 0,725 \Sigma_{\text{т}}^{\text{H}}(u). \quad (6.32)$$

В отличие от соотношения (6.31) соотношение (6.32) имеет частный характер, так как получено путем подгонки результатов расчета по методу NRN к экспериментальным данным.

В заключение остановимся на способе определения сечения выведения, который позволяет наилучшим образом раскрыть физическую природу этой величины. На возможность такого определения $\Sigma_{\text{в}}(u)$ указывается в работе [10].

Средний квадрат расстояния, которое проходят нейтроны от места рождения с летаргией u до точки, где летаргия становится равной u_0 , определяется в рамках модели непрерывного замедления следующим образом:

$$\bar{X}^2 = 6 \int_u^{u_0} \frac{D(u') du'}{\xi(u') \Sigma_s(u')}. \quad (6.33)$$

А. Вейнберг и Е. Вигнер [16] получили выражение для среднего квадрата длины замедления с поправкой на первые столкновения (в приближении изотропного рассеяния). Эта поправка учитывает расстояние, которое проходят нейтроны без изменения энергии от источника до места первых столкновений:

$$\bar{X}^2 = \frac{2}{\Sigma_{\text{т}}^2(u)} + 6 \int_u^{u_0} \frac{D(u') du'}{\xi(u') \Sigma_s(u')}. \quad (6.34)$$

Относительная величина первого члена в выражении (6.34) зависит, в первую очередь, от характера энергетической зависимости полного сечения. Только в тех случаях, когда $\Sigma_t(u)$ монотонно возрастает с уменьшением энергии, поправка на первые столкновения оказывается существенной. Именно с такой ситуацией мы сталкиваемся при рассмотрении переноса нейтронов в водородсодержащих средах.

Нетрудно заметить, что введение в \bar{X}^2 поправки на первые столкновения основано на тех же соображениях, что и концепция, согласно которой весь спектр нейтронов в водородсодержащей среде может быть разделен на проникающую и замедляющую компоненты. Для того чтобы воспользоваться этим обстоятельством, определим \bar{X}_B^2 — средний квадрат расстояния, которое проходят нейтроны от места рождения до точки, где они выбывают из проникающей компоненты:

$$\bar{X}_B^2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x \Sigma_B(u)} \Sigma_B(u) dx = \frac{2}{\Sigma_B^2(u)}.$$

Выражение для \bar{X}_B^2 совпадает с первым членом в выражении (6.34) при замене в нем полного сечения на сечение выведения. Из предыдущего видно, что сечение выведения непосредственно зависит от анизотропии упругого рассеяния. Поэтому, осуществив в выражении (6.34) замену $\Sigma_t(u)$ на $\Sigma_B(u)$, можно тем самым учесть в \bar{X}^2 эффект анизотропии рассеяния при первых столкновениях

$$\bar{X}^2 = \frac{2}{\Sigma_B^2(u)} + 6 \int_{u_1}^{u_0} \frac{D(u') du'}{\xi(u') \Sigma_S(u')}. \quad (6.35)$$

Использование сечение выведения предполагает, что рассеянными нейтронами являются лишь те, которые выбыли из проникающей компоненты, т. е. фактически изменили свою первоначальную энергию. По этой причине в выражении (6.35) в отличие от выражения (6.34) нижний предел интегрирования положен равным $u_1 > u$.

Величина $\Delta u = u_1 - u$ должна быть равна минимальному изменению летаргии при столкновениях, выводящих нейтроны из проникающей компоненты. Если воспользоваться ранее рассмотренной моделью для $\Sigma_B(u)$, то

$$\Delta u = - \ln \left[1 - \frac{2M}{(M+1)^2} (1 - \nu_B) \right].$$

На рис. 6.4, заимствованном из работы [10], приведены расчетные кривые, описывающие зависимость возраста тепловых нейтронов в чистом водороде ($\tau = \frac{1}{6} \bar{X}^2$) от энергии источника E .

Кривая 1 рассчитана по формуле (6.33), т. е. без поправки на первые столкновения. Кривая 2 определена из пространственно-энергетического распределения нейтронов в водороде, рассчитанного методом Монте-Карло, и поэтому может рассматриваться как точное описание зависимости $\tau(E)$. Крестиками

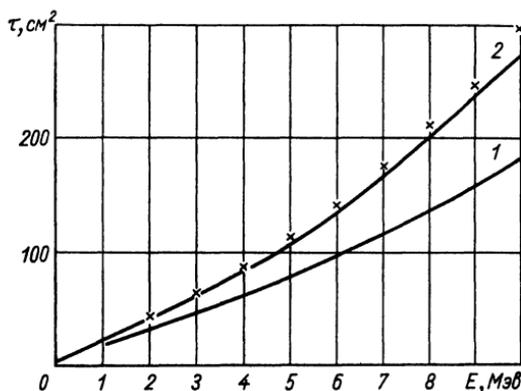


Рис. 6.4. Возраст нейтронов в чистом водороде от точечного моноэнергетического источника [10]:

1 — расчет по модели непрерывного замедления;
2 — расчет методом Монте-Карло; × — расчет по модели непрерывного замедления с учетом поправки на первые столкновения с использованием сечения выведения.

отмечены значения $\tau(E)$, рассчитанные по формуле (6.35) при $E_1 = E$. В этих расчетах в качестве $\Sigma_v^H(E)$ использовались данные из табл. 6.1. Хорошее совпадение результатов расчета по формуле (6.35) с точными значениями $\tau(E)$ показывает, что использование $\Sigma_v(E)$ для определения поправки на первые столкновения правильно отражает не только качественную, но и количественную сторону явления. Некоторые завышения значений $\tau(E)$, полученных по формуле (6.35), скорее всего связаны с предположением о равенстве энергий E_1 и E .

Воспользовавшись соотношением (6.35), можно получить следующее выражение для сечения выведения:

$$\Sigma_v(u) = \left[\frac{1}{2} \bar{X}^2(u, u_0) - 3 \int_{u_1}^{u_0} \frac{D(u') du'}{\xi(u') \Sigma_s(u')} \right]^{-1/2}. \quad (6.36)$$

Для определения сечения выведения по формуле (6.36) нужно располагать экспериментальными или расчетными данными о среднем квадрате длины замедления нейтронов от моноэнергетического источника. Для расчета среднего квадрата длины замедления удобно использовать метод моментов, в рамках ко-

торого \bar{X}^2 определяется как соотношение второго и нулевого пространственных моментов интегрального потока нейтронов:

$$\bar{X}^2 = \frac{\Phi_{20}}{\Phi_{00}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Phi(x, u, u_0) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, u, u_0) dx}.$$

При этом для определения \bar{X}^2 достаточно вычислить только Φ_{00} и Φ_{20} , так как в данном случае не требуется восстановления $\Phi(x, u, u_0)$ по пространственным моментам.

Определение $\Sigma_B(u)$ с помощью \bar{X}^2 может оказаться особенно полезным в случае безводородной среды, в которой не устанавливается спектральное равновесие нейтронов.

Соотношение (6.35) можно использовать также в качестве критерия при оценке возможности применения излагаемых здесь методов расчета. Действительно, разделение всего спектра нейтронов на проникающую и замедляющуюся компоненты справедливо только в том случае, если для заданной смеси ядер поправка в \bar{X}^2 на первые столкновения относительно велика. В противном случае пространственное распределение нейтронов не будет определяться какой-либо компонентой спектра.

§ 3. МНОГОГРУППОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Перепишем уравнения (6.8) и (6.13), опуская для простоты индекс «0» при обозначениях функций:

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \psi + \Sigma_B \psi &= q, \\ D \Delta \phi + \Sigma_T \phi &= \int \phi(\mathbf{r}, u') W(u' \rightarrow u) du' + Q, \\ Q &= \int \psi(\mathbf{r}, u') \Sigma_B(u' \rightarrow u) du'. \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Система уравнений (6.37) определяет пространственно-энергетическое распределение нейтронов в защите. Решение первого уравнения для интегрального потока проникающих нейтронов может быть записано в общем виде для произвольной геометрии источника и окружающей среды

$$\psi(\mathbf{r}, u) = \int_V q(\mathbf{r}', u) \exp \left[- \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Sigma_B(\rho, u) d\rho \right] \frac{d\mathbf{r}'}{4\pi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}, \quad (6.38)$$

где V — объем, занимаемый источниками нейтронов; $\Sigma_B(\rho, u)$ — сечение выведения нейтронов с летаргией u в материале источника и окружающей среды; функция $q(\mathbf{r}', u)$ определяет интенсивность изотропных источников нейтронов с летаргией u в точке с координатой \mathbf{r}' . В расчетах защиты $q(\mathbf{r}', u)$ описывает обычно распределение плотности делений внутри объема активной зоны реактора.

В случае точечного изотропного источника в сферически симметричной среде поток проникающих нейтронов определяется простой экспоненциальной функцией

$$\psi(r, u) = \frac{1}{4\pi r^2} \exp \left[- \int_0^r \Sigma_B(\rho, u) d\rho \right]. \quad (6.39)$$

Решение второго уравнения (6.37) для потока замедляющихся нейтронов может быть получено в аналитической форме только для частных случаев, один из которых рассмотрен в § 1 настоящей главы. К сожалению, выражения типа (6.25) справедливы лишь для однородных сред. Поэтому на практике при расчете многослойной защиты приходится пользоваться численным интегрированием уравнений, записанных в многогрупповом приближении.

При переходе к многогрупповому приближению удобно ввести в рассмотрение отдельные группы для проникающих и замедляющихся нейтронов, называя их в соответствии с принятой терминологией группами выведения и диффузионными группами. В общем случае границы и число этих групп не совпадают.

Воспользовавшись уравнением (3.90) запишем второе уравнение (6.37) в многогрупповом приближении для некоторой области среды с постоянными физическими свойствами. В расчетах защиты это обычно один из слоев многослойного защитного барьера

$$-D^i \Delta \varphi^i + \Sigma_i^i \varphi^i = \sum_{k=k_0}^i \varphi^k W^{k \rightarrow i} + Q^i. \quad (6.40)$$

Решение уравнения (6.40) определяет поток нейтронов в i -й диффузионной группе

$$\varphi^i(\mathbf{r}) = \int_{u_{i-1}}^{u_i} \varphi(\mathbf{r}, u) du.$$

Групповые константы, входящие в уравнение (6.40):

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_i^i(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varphi^i(\mathbf{r})} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_t(u) \varphi(\mathbf{r}, u) du, \\ W^{k \rightarrow i}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varphi^k(\mathbf{r})} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \varphi(\mathbf{r}, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} W(u' \rightarrow u) du, \\ D^i(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varphi^i(\mathbf{r})} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{du}{3\Sigma_{tr}(u)} \varphi(\mathbf{r}, u). \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

Здесь $W(u' \rightarrow u) = \Sigma_s(u') f_s(u', u - u') + \Sigma_{ln}(u') f_{ln}(u', u - u')$;

$f_s; f_{in}$ — функции, описывающие распределение по летаргии нейтронов, испытавших упругое и неупругое рассеяния.

Граничными условиями для функций $\varphi^i(\mathbf{r})$ служит требование непрерывности потока и тока нейтронов i -й группы на границах рассматриваемой области среды.

В уравнении (6.40) функция Q^i описывает внешние источники нейтронов i -й диффузионной группы (внутренними источниками считаются переходы из верхних диффузионных групп в нижние). Согласно выражению (6.17),

$$Q^i = \sum_{j=j_0}^n \psi^j \Sigma_B^{j \rightarrow i}. \quad (6.42)$$

Поток нейтронов j -й группы выведения равен

$$\psi^j(\mathbf{r}) = \int_{u_{j-1}}^{u_j} \psi(\mathbf{r}, u) du,$$

где $\psi(\mathbf{r}, u)$ — поток проникающих нейтронов, определяемый выражением (6.38).

В выражении (6.42) $\Sigma_B^{j \rightarrow i}$ — матрица выведения, описывающая переходы нейтронов из j -й группы выведения в i -ю диффузионную группу. Суммирование в (6.42) проводится по всем группам выведения, из которых возможен переход в i -ю диффузионную группу. Матрица выведения

$$\Sigma_B^{j \rightarrow i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\psi^j(\mathbf{r})} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \psi(\mathbf{r}, u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_B(u' \rightarrow u) du, \quad (6.43)$$

где $\Sigma_B(u' \rightarrow u)$ — дифференциальное сечение выведения, определяемое соотношениями (6.15) и (6.16).

В выражении (6.43) интегрирование по u' проводится по ширине j -й группы выведения, а интегрирование по u — по ширине i -й диффузионной группы. Если границы групп выведения и диффузионных групп совпадают, то с точностью до внутригруппового спектра усреднения

$$\Sigma_B^{j \rightarrow i} = \begin{cases} W^{j \rightarrow i} - (\Sigma_i^j - \Sigma_B^j) & \text{при } j = i, \\ W^{j \rightarrow i} & \text{при } j \neq i. \end{cases} \quad (6.44)$$

Соотношение (6.44) означает, что матрица выведения $\Sigma_B^{j \rightarrow i}$ отличается от обычной матрицы упругих и неупругих переходов только диагональными членами. Различие между $\Sigma_B^{j \rightarrow j}$ и $W^{j \rightarrow j}$ равно разности между полным сечением и сечением выведения в j -й группе. Следует отметить, что при достаточно узких группах диагональные члены матрицы выведения могут оказаться отрицательными, как и соответствующие им источники в уравнении (6.40). Однако баланс нейтронов при этом будет сохраняться.

Среднегрупповое сечение выведения, используемое в соотношении (6.44), определяется следующим образом:

$$\Sigma_{\text{в}}^j(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Psi^j(\mathbf{r})} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \Sigma_{\text{в}}(u) \Psi(\mathbf{r}, u) du. \quad (6.45)$$

При строгой постановке многогрупповой задачи определение групповых констант D^i ; Σ_t^i ; $W^{k \rightarrow i}$, входящих в уравнение (6.40), представляет сложную и громоздкую операцию, связанную с нахождением внутригруппового спектра нейтронов и последующим усреднением по этому спектру истинных сечений (подробнее см. гл. II).

Для рассматриваемых полуэмпирических методов расчета защиты такая сложная процедура определения групповых констант не обязательна. Использование в подобных расчетах сечений выведения в качестве произвольных параметров в значительной мере нивелирует ошибки, которые могут возникнуть из-за неточного определения среднегрупповых сечений. Поэтому при решении уравнения (6.40) чаще всего используются групповые константы, полученные в результате усреднения истинных сечений по какому-либо стандартному спектру. Обычно это спектр деления при $E \geq 1$ Мэв и фермиевский спектр замедления при $E < 1$ Мэв.

Строго говоря, для многогрупповых расчетов защиты нужна специализированная система констант, которая была бы приспособлена для решения задач, связанных с глубоким проникновением нейтронов. К сожалению, до настоящего времени в литературе, доступной широкому кругу инженеров и научных работников, нет соответствующих публикаций. Поэтому при составлении «защитных» программ для ЭВМ часто используются универсальные системы констант, предназначенные для расчета быстрых реакторов [17, 18]. Такие константы не содержат, конечно, данных по сечениям выведения. Однако значения $\Sigma_{\text{в}}^j$ и $\Sigma_{\text{в}}^{j \rightarrow i}$ легко найти, воспользовавшись соотношениями (6.44) и (6.45). При определении $\Sigma_{\text{в}}^j$ и $\Sigma_{\text{в}}^{j \rightarrow i}$ целесообразно в качестве внутригруппового спектра использовать спектр проникающих нейтронов.

Системы констант [17, 18] содержат небольшое число групп при $E > 0,1$ Мэв. Так как эта область энергий играет важную роль для расчетов защиты, в приложении II приведена 19-групповая система констант, которая охватывает энергии выше 0,1 Мэв.

Для удобства пользования универсальной системой констант запишем уравнение (6.40) в обозначениях работы [18], которые в основном соответствуют общепринятым:

$$-D^i \Delta \Phi^i + \Sigma_{\text{ув}}^i \Phi^i = \sum_{k=1}^{i-1} \Phi^k (\Sigma_{\text{ин}}^{k \rightarrow i} + \Sigma_{\text{с}}^{k \rightarrow i}) + Q^i. \quad (6.46)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\Sigma_{\text{ув}}^i = \Sigma_t^i - (\Sigma_{in}^{i \rightarrow i} + \Sigma_s^{i \rightarrow i}), \quad \Sigma_{in}^{k \rightarrow i} + \Sigma_s^{k \rightarrow i} = W^{k \rightarrow i}.$$

В универсальных системах констант, приведенных в работах [17] (26 групп) и [18] (21 группа), используются энергетические группы, ширина которых больше максимального сброса энергии нейтрона при упругом рассеянии на всех ядрах, за исключением ядер водорода и дейтерия. Поэтому уравнение (6.46) обычно записывается несколько по-иному, если рассматриваемая область среды состоит из смеси ядер водорода с ядрами других элементов (за исключением дейтерия):

$$-D^i \Delta \varphi^i + (\Sigma_{\text{ув}}^i + \Sigma_{\text{ув, Н}}^i) \varphi^i = \Sigma_{\text{зам}}^{i-1} \varphi^{i-1} + \sum_{k=1}^{i-1} \varphi^k (\Sigma_{in}^{k \rightarrow i} + \Sigma_{s, Н}^{k \rightarrow i}) + Q^i. \quad (6.47)$$

Здесь $\Sigma_{\text{зам}}^{i-1}$ — сечение замедления из $(i-1)$ -й в i -ю группу при упругом рассеянии на всех ядрах, за исключением водорода; $\Sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ — матрица неупругих переходов; $\Sigma_{s, Н}^{k \rightarrow i}$ — матрица упругих переходов при рассеянии на ядрах водорода. Все остальные величины, входящие в уравнение (6.47), выражаются через табулированные групповые константы.

Сечение увода из i -й группы при рассеянии на всех ядрах, за исключением водорода,

$$\Sigma_{\text{ув}}^i = \Sigma_{in}^i + \Sigma_c^i + \Sigma_{\text{зам}}^i - \Sigma_{in}^{i \rightarrow i}.$$

Сечение увода из i -й группы при рассеянии на водороде

$$\Sigma_{\text{ув, Н}}^i = \Sigma_{t, Н}^i - \Sigma_{s, Н}^{i \rightarrow i}.$$

§ 4. РАЗЛИЧНЫЕ МОДИФИКАЦИИ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОГО МЕТОДА

В этом параграфе для иллюстрации возможного применения полученных выше уравнений кратко рассмотрены полуэмпирические методы, положенные в основу машинных программ, которые использовались для расчета защиты действующих энергетических реакторов.

Если не считать различных способов определения сечения выведения, о которых уже говорилось, то отличия интересующих нас методов касаются главным образом задания числа энергетических групп и описания переходов между ними. Поэтому для дальнейшего изложения удобно воспользоваться схемой переходов, приведенной в работе [19]. С некоторыми добавлениями, подобная схема воспроизведена на рис. 6.5.

Слева на рисунке показана равномерная шкала энергий в интервале от 0 до 18 Мэв. Прямоугольниками обозначены

группы, причем цифра 1 соответствует группам выведения, а цифра 2 — диффузионным группам. Стрелки указывают направление переходов между группами.

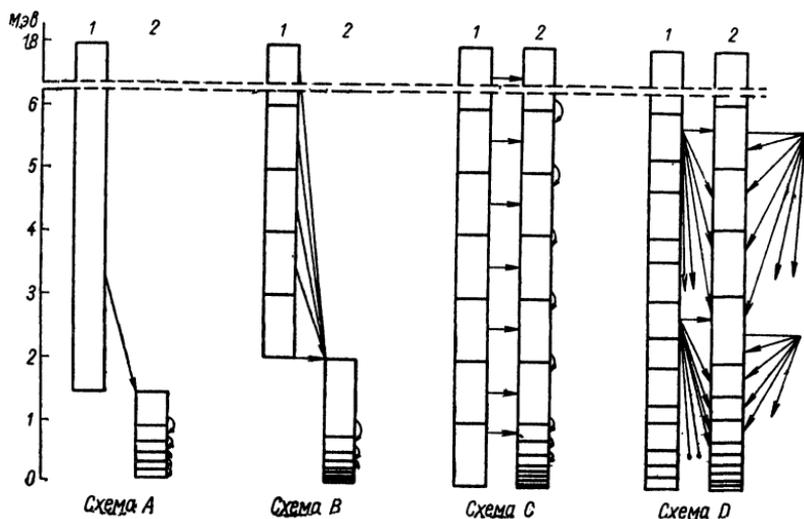


Рис. 6.5. Разбиение на группы и схема переходов в различных модификациях полуэмпирических методов.

7-групповой метод [20]

В этом методе все проникающие нейтроны объединены в одну группу выведения, а все замедляющиеся разбиты на шесть диффузионных групп (см. рис. 6.5, схема А).

Нижняя граница группы выведения и верхняя граница первой диффузионной группы равны 1,5 Мэв, что соответствует эффективному порогу камер деления на U^{238} и Th^{232} . Такой выбор границы позволяет использовать экспериментальные длины релаксации для задания пространственного распределения проникающих нейтронов.

При выбывании из группы выведения все нейтроны попадают в первую диффузионную группу, т. е. фактически приобретают энергию меньше 1,5 Мэв. Между диффузионными группами переходы осуществляются только в соседние группы и описываются по модели непрерывного замедления. Последнее приближение оправдывается тем, что при $E < 1,5$ Мэв неупругое рассеяние практически равно нулю, а упругое рассеяние при выбранной ширине групп не может приводить к перескокам через группы (за исключением рассеяния на ядрах водорода).

Для описания переноса нейтронов всех диффузионных групп используется уравнение

$$-D^i \Delta \varphi^i + \Sigma_{ув}^i \varphi^i = \Sigma_{зам}^{i-1} \varphi^{i-1} + Q^i, \quad (6.48)$$

где сечение увода из i -й группы

$$\Sigma_{ув}^i = \Sigma_t^i - \Sigma_s^i + \Sigma_{зам}^i.$$

Сечение замедления в i -й группе

$$\Sigma_{зам}^i = \frac{\xi^i \Sigma_s^i}{\Delta u_i}.$$

Внешние источники нейтронов в i -й диффузионной группе задаются в виде

$$Q^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi l} \int_V \frac{q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \exp \left[- \int_0^{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{d\rho}{l(\rho)} \right] & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i > 1. \end{cases}$$

Здесь l — длина релаксации для нейтронов спектра деления с энергией $E \geq 1,5$ Мэв; $q(\mathbf{r}')$ — распределение в активной зоне реактора источников нейтронов спектра деления с энергией $E \geq 1,5$ Мэв.

Проинтегрировав многогрупповую систему уравнений (6.48), можно найти пространственное распределение в защите проме-

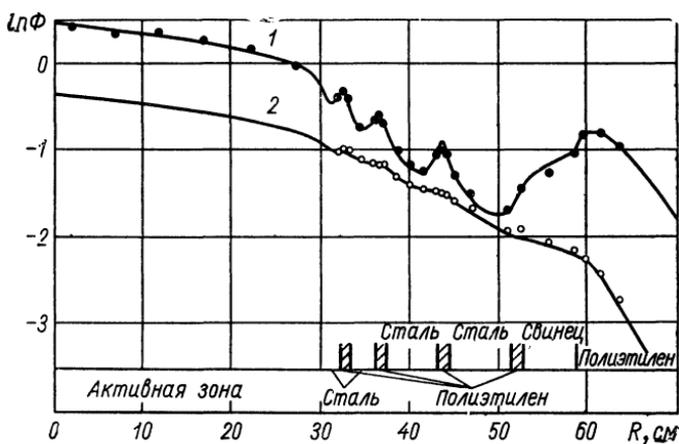


Рис. 6.6. Пространственное распределение активации меди в активной зоне и в защите [6]:

1 — полная активация; 2 — активация в кадмии.

жуточных и тепловых нейтронов. Это означает, что с помощью 7-группового метода можно рассчитать дозу по нейтронам за защитой и распределение источников захватного и активационного излучений в самой защите.

Основное достоинство 7-группового метода заключается в его простоте, проистекающей из небольшого числа групп, на которые разбит весь спектр нейтронов. Однако с этим же об-

стоятельством связаны и недостатки метода: невозможность получения какой-либо информации о спектре быстрых нейтронов и весьма приближенное описание переноса и замедления нейтронов промежуточных энергий. Вдали от активной зоны точность метода целиком зависит от возможности удовлетворительного описания пространственного распределения проникающих нейтронов спектра деления с помощью длины релаксации l , не зависящей от энергии.

В качестве примера на рис. 6.6 [26] приведено пространственное распределение нейтронов, рассчитанное по 7-групповому методу.

Методы RASH-B [10] и MAG [21] *

Эти методы расчета защиты отличаются более подробным разбиением на группы всего энергетического интервала, причем основное значение имеет детализация в части проникающих нейтронов, для описания которых используется 18 групп выведения с шириной 1 Мэв (см. рис. 6.5, схема В).

Как и в 7-групповом методе, все нейтроны, выбывающие из группы выведения, попадают в первую диффузионную группу. В соответствии с этим источники для уравнения (6.48) записываются в виде

$$Q^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{18} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \Sigma_B(\mathbf{r}, u) \psi(\mathbf{r}, u) du & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i > 1, \end{cases} \quad (6.49)$$

где $\psi(\mathbf{r}, u)$ — поток проникающих нейтронов, определяемый выражением (6.38). В качестве $\Sigma_B(\mathbf{r}, u)$ используются экспериментальные значения сечений выведения [23]. Для оценочных расчетов вместо $\Sigma_B(u)$ можно использовать $\Sigma_{tr}(u)$ [10].

Верхняя граница диффузионных групп равна $E_{гр} = 2$ Мэв, что примерно соответствует энергии, которую приобретают нейтроны с $E \sim 8$ Мэв (проникающая часть спектра в водородсодержащей среде) после неупругого рассеяния на тяжелых ядрах и после упругого рассеяния на водороде. Накопление промежуточных и тепловых нейтронов слабо чувствительно к выбору граничной энергии, если в среде имеется достаточное количество ядер тяжелых элементов с заметным сечением неупругого рассеяния в области энергии $\sim E_{гр}$. В этом случае нейтроны быстро замедляются до энергий, существенно меньших $E_{гр}$.

Рассматриваемые методы позволяют рассчитывать с удовлетворительной точностью потоки тепловых и промежуточных нейтронов в широком интервале изменения пространственных

* Названия относятся к соответствующим программам для ЭВМ.

переменных. Это достигается использованием сравнительно большого числа групп выведения для описания переноса проникающих нейтронов.

Методы RASH-D [10] и MAC-RAD [22]

Эти методы усовершенствованы главным образом за счет введения в области энергий выше 2 Мэв дополнительных диффузионных групп, число и границы которых совпадают с аналогичными величинами для групп выведения (в MAC-RAD границы групп не совпадают).

Нейтроны, выбывающие из любой группы выведения, попадают только в соответствующую ей диффузионную группу, причем изменение энергий нейтронов происходит лишь при переходах из одной диффузионной группы в другую (см. рис. 6.5, схема С).

В методах RASH-D и MAC-RAD пространственно-энергетическое распределение нейтронов всех энергий, и в том числе с $E > 1 \text{ Мэв}$, определяется из решения многогрупповой системы диффузионных уравнений (6.48) с источниками вида

$$Q^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_b(\mathbf{r}, u) \psi(\mathbf{r}, u) du & \text{при } i \leq 18 \\ 0 & \text{при } i > 18. \end{cases} \quad (6.50)$$

Возможность использования диффузионных уравнений для описания переноса быстрых нейтронов объясняется прежде всего тем, что их пространственное распределение задается функцией $Q^i(\mathbf{r})$, которая определяет плотность столкновений проникающих нейтронов. Такая процедура может быть истолкована как своего рода аппроксимация сугубо анизотропного углового распределения быстрых нейтронов двумя компонентами: проникающей с угловым распределением нерассеянных нейтронов и замедляющейся с изотропным угловым спектром. Успех подобной аппроксимации объясняется двумя причинами: изотропией неупругого рассеяния и особенностями взаимодействия нейтронов с ядрами водорода, о которых говорилось выше.

Основной недостаток рассматриваемых методов — использование модели непрерывного замедления в области энергий выше 2 Мэв , где весьма существенную роль играет неупругое рассеяние, приводящее к сбросам энергии, значительно превышающим ширину группы. В связи с этим при определении сечения замедления

$$\Sigma_{\text{зам}}^i = \frac{\xi_{\text{эфф}}^i (\Sigma_s^i + \Sigma_{in}^i)}{\Delta u_i} \quad (6.51)$$

в методе RASH-D используется эффективное значение средней логарифмической потери энергии на одно столкновение

$$\xi_{эфф}(E) = \frac{\Sigma_s(E) \xi(E) + \Sigma_{in}(E) \xi_{in}(E)}{\Sigma_s(E) + \Sigma_{in}(E)}, \quad (6.52)$$

где $\xi_{in}(E)$ — средняя логарифмическая потеря энергии при неупругом рассеянии

$$\xi_{in}(E) = \sum_R \frac{\Sigma_{in}^R(E)}{\Sigma_{in}(E)} \ln \frac{E}{E - E_R}.$$

Здесь $\Sigma_{in}^R(E)$ — сечение возбуждения R -го уровня ядра-мишени; E_R — энергия возбуждения R -го уровня. Замена матриц

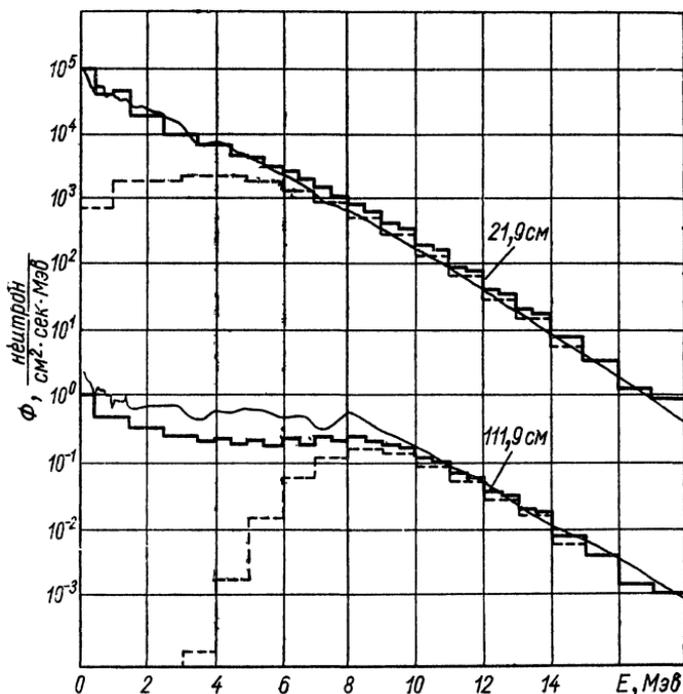


Рис. 6.7. Спектр быстрых нейтронов в воде на различных расстояниях от поверхности активной зоны реактора [10]:
 - - - - проникающая компонента; ——— проникающая компонента + компонента замедления; ——— численное решение кинетического уравнения.

неупругих и упругих переходов $W_{in}^{k \rightarrow i}$ и $W_s^{k \rightarrow i}$ на сечение замедления (6.51) является паллиативным решением проблемы. Оно неизбежно должно приводить к погрешностям при определении энергетического спектра быстрых нейтронов.

В качестве примера на рис. 6.7 [10] приведен спектр быстрых нейтронов в простой воде, рассчитанный по методу RASH-D.

Метод NRN [11, 12]

В рамках полуэмпирического приближения метод NRN позволяет наиболее строгим и последовательным путем решить многогрупповую задачу о переносе нейтронов реакторного спектра в многослойных защитных барьерах.

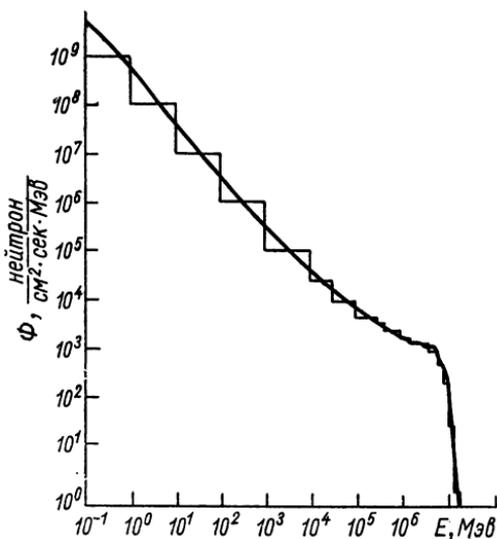


Рис. 6.8. Спектр промежуточных нейтронов в воде на расстоянии 120 см от поверхности активной зоны [11]: гистограмма — расчет по методу NRN; кривая — расчет методом моментов.

В этом методе весь рассматриваемый интервал энергий разбит на 30 групп выведения и 24 диффузионные группы. При этом границы групп для проникающих и замедляющихся нейтронов выбраны независимо друг от друга (см. рис. 6.5, схема *D*). Энергетически разрешенные переходы из групп выведения в диффузионные группы описываются матрицами (6.43), т. е. сопровождаются изменением энергии нейтронов. Переходы между диффузионными группами описываются матрицами упругого и неупругого рассеяния (6.41).

Пространственно-энергетическое распределение нейтронов определяется из решения многогрупповой системы диффузионных уравнений (6.46) с источниками (6.42). Сечения выведения,

используемые в выражении (6.42), рассчитываются по формуле

$$\Sigma_B(u) = \Sigma_f(u) - \int_{v_B}^1 \Sigma_s(u, v_0) dv_0$$

при значениях $v_B = 0,45$ для водорода и $v_B = 0,6$ для всех остальных ядер.

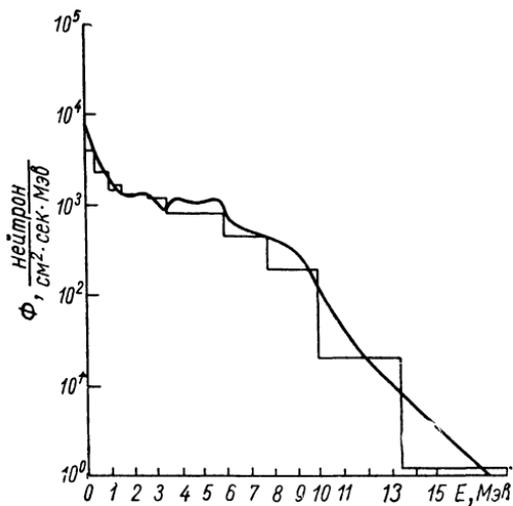


Рис. 6.9. Спектр быстрых нейтронов в воде на расстоянии 120 см от поверхности активной зоны [11]:

гистограмма — расчет по методу NRN; кривая — расчет методом моментов.

В заключение следует подчеркнуть, что в методе NRN группы выведения охватывают всю область энергий ниже 1 Мэв, что позволяет использовать метод для расчета безводородных защит. Подробнее об этом будет сказано в следующем параграфе.

На рис. 6.8 и 6.9 [11] приведены спектры нейтронов в воде, рассчитанные по методу NRN.

§ 5. БЕЗВОДОРОДНАЯ ЗАЩИТА

Использование в защите или в отдельных ее узлах водородсодержащих материалов наталкивается в ряде случаев на серьезные технологические трудности. Чаще всего эти трудности возникают из-за специфических особенностей в конструкции высокотемпературных реакторов с жидкометаллическим и газовым теплоносителями.

Ниже обсуждаются некоторые вопросы, касающиеся полуэмпирических методов расчета безводородной защиты.

Для правильного описания глубокого проникновения нейтронов необходимо прежде всего учитывать сильную анизотропию их углового распределения. В этом смысле расчет безводородной защиты ничем не отличается от аналогичной задачи для водородсодержащей среды. В обоих случаях для того чтобы воспользоваться многогрупповым диффузионным приближением, приходится прибегать к искусственному приему: с помощью полуэмпирических параметров задавать распределенные в среде источники для замедляющихся нейтронов. При таком методе расчета отсутствие в защите ядер водорода играет двоякую роль. С одной стороны, становится более обоснованным применение диффузионного приближения, так как в состав рассматриваемой среды входят только ядра с $M \gg 1$ *. С другой стороны, ввиду неустановившегося спектра замедляющихся нейтронов усложняется определение их пространственного макрораспределения.

В безводородной защите практически во всем интервале изменения пространственной переменной происходит существенная деформация спектра, выражающаяся обычно в накоплении нейтронов промежуточных энергий. Принятое для водородсодержащей среды разделение всего спектра на проникающую и замедляющуюся компоненты оказывается в данном случае менее определенной и фактически неоднозначной процедурой. Поэтому задание источников в многогрупповых диффузионных уравнениях не может быть осуществлено с помощью небольшого числа параметров, характеризующих перенос лишь некоторых групп быстрых нейтронов. Трудности усугубляются еще и резонансной структурой сечений в промежуточной области энергий. При отсутствии в среде ядер водорода отдельные резонансы и провалы в сечениях существенным образом сказываются на пространственно-энергетическом распределении нейтронов.

В рамках полуэмпирических методов расчета защиты указанные затруднения удается преодолеть за счет следующих мероприятий.

1. В области энергий, меньших 1 Мэв , вводятся группы выведения, что позволяет учитывать эффект глубокого проникновения промежуточных нейтронов за счет прямых протрелов.

2. Для более детального описания спектра нейтронов промежуточных энергий увеличивается число диффузионных групп при $E < 1 \text{ Мэв}$.

3. Ширина отдельных групп выбирается в соответствии с параметрами наиболее сильных резонансов в сечениях основных элементов, входящих в состав защиты.

Осуществление первого пункта связано с некоторой неопределенностью в выборе внешних источников для групп выведе-

* В безводородной защите, как правило, используются элементы с $M \geq 12$.

ния (не следует их путать с источниками для диффузионных групп). Для нахождения этих источников можно воспользоваться методом последовательных приближений. Вначале в качестве первого приближения проводится многогрупповой расчет, в котором все внешние источники при энергиях, меньших нижней границы спектра деления, равны нулю. Затем полученные распределения промежуточных нейтронов, или, точнее, плотности столкновений этих нейтронов с ядрами среды, используются для задания внешних источников в соответствующих группах деления.

Перечисленные мероприятия касаются главным образом детализации многогрупповой схемы расчета и не затрагивают сущности рассматриваемых методов. Поэтому полуэмпирические методы в том виде, как они сформулированы в предыдущих параграфах, могут быть использованы и для расчета безводородной защиты. Конкретным примером такого метода, приспособленного для расчета защиты любого состава, может служить метод NRN, кратко охарактеризованный в § 4.

Рассмотрим теперь возможность использования асимптотического решения уравнения переноса для описания глубокого проникновения нейтронов в безводородной среде.

Известно, что вдали от границ среды и источников решение односкоростного кинетического уравнения описывается функцией диффузионного типа ($e^{-x/L}$ — для плоской и $1/re^{-r/L}$ — для сферической геометрии) [24]. При этом асимптотическая длина диффузии L в случае изотропного рассеяния удовлетворяет следующему трансцендентному уравнению:

$$\frac{L\Sigma_s}{2} \ln \frac{L\Sigma_t + 1}{L\Sigma_t - 1} = 1. \quad (6.53)$$

Аналогичное уравнение для анизотропного рассеяния (учитывается только первая гармоника дифференциального сечения) приведено в работе [3].

Расчет защиты в многогрупповом приближении сводится, как известно, к решению системы взаимосвязанных односкоростных уравнений. Решение каждого из этих уравнений определяет пространственное распределение в среде группового потока нейтронов. Для того чтобы выяснить область применимости асимптотических решений групповых уравнений, рассмотрим два крайних случая.

1. Перенос нейтронов в i -й группе практически не влияет на их пространственное распределение. Оно целиком зависит от распределения в среде источников, роль которых выполняют переходы нейтронов из верхних энергетических групп. Очевидно, что в этом случае асимптотический ход решения группового уравнения вообще не может иметь места.

2. Пространственное распределение нейтронов i -й группы слабо зависит от соответствующего распределения источников.

Такая ситуация может осуществляться в среде, состоящей из ядер с $M \gg 1$, для которых выполняется условие

$$r \ll \Delta u_i, \quad (6.54)$$

где r — максимальное изменение летаргии нейтрона при одном акте взаимодействия с ядрами среды.

Условие (6.54) означает, что все нейтроны, попадающие в i -ю группу, должны в среднем испытать большое число столкновений, прежде чем изменение их летаргии превысит величину Δu_i и они перейдут в соседнюю $(i+1)$ -ю группу. Поэтому пространственное распределение нейтронов i -й группы должно формироваться в процессе переноса и в случае глубокого проникновения описываться асимптотическим решением группового уравнения.

Легко видеть, что первый из рассмотренных случаев соответствует условиям переноса в водородсодержащей среде, для которой характерно относительное постоянство макрораспределения замедляющихся нейтронов. Второй случай может осуществляться в безводородной среде в той области энергий, где нет неупругого рассеяния.

Вышеизложенные соображения, хотя и носят ориентировочный характер, позволяют сформулировать основные положения многогруппового расчета безводородной защиты.

В области высоких энергий ($E \geq 1$ Мэв), где существенную роль играет неупругое рассеяние, может быть использована модель, согласно которой весь спектр нейтронов разделяется на две компоненты: проникающую $\psi(r, u)$ и замедляющуюся $\phi(r, u)$. Проникающая компонента задается в приближении прямых прострелов с использованием в качестве длины свободного пробега длины выведения

$$\Omega \nabla \psi + \Sigma_v \psi = q. \quad (6.55)$$

Замедляющаяся компонента определяется в многогрупповом диффузионном приближении

$$-D^i \Delta \phi^i + \Sigma_{ув}^i \phi^i = \sum_{k=1}^{i-1} \phi^k (\Sigma_{in}^{k \rightarrow i} + \Sigma_s^{k \rightarrow i}) + Q^i, \quad (6.56)$$

$$Q^i = \sum_{j=j_0}^n \psi^j \Sigma_B^{j \rightarrow i}.$$

Определение величин, входящих в уравнения (6.55) и (6.56), приведено в § 3 настоящей главы.

В промежуточной области энергий, где нет неупругого рассеяния, можно воспользоваться асимптотическими решениями групповых кинетических уравнений. При этом, конечно, должно выполняться условие (6.54), согласно которому пространственные распределения нейтронов в отдельных группах практически не зависят друг от друга. Так как асимптотическое решение

односкоростного уравнения описывается диффузионной функцией, то соответствующая система групповых уравнений записывается в виде

$$\Delta\Phi^i - \frac{1}{L_i^2} \Phi^i = -\frac{1}{D^i} \Phi^{i-1} \Sigma_{\text{зам}}^{i-1}, \quad (6.57)$$

где L_i — асимптотическая длина диффузии нейтронов i -й группы.

Для сохранения баланса нейтронов коэффициент диффузии должен определяться из соотношения

$$D^i = L_i^2 \Sigma_{\text{ув}}^i,$$

где $\Sigma_{\text{ув}}^i = \Sigma_c^i + \Sigma_{\text{зам}}^i$ — сечение увода из i -й группы. В случае изотропного рассеяния L_i определяется из уравнения [см. выражение (5.22)]

$$\frac{L_i \Sigma_s^{i \rightarrow i}}{2} \ln \frac{L_i \Sigma_t^i + 1}{L_i \Sigma_t^i - 1} = 1. \quad (6.58)$$

Здесь $\Sigma_s^{i \rightarrow i} = W_0^{i \rightarrow i}$ — диагональный член матрицы, описывающий внутригрупповые переходы за счет упругого рассеяния. Так как в состав рассматриваемой среды входят только ядра с $M \gg 1$, то

$$\Sigma_s^{i \rightarrow i} = \Sigma_s^i - \Sigma_{\text{зам}}^i.$$

Для того чтобы учесть анизотропию рассеяния, воспользуемся асимптотическим решением группового кинетического уравнения с транспортной аппроксимацией индикатрисы рассеяния. В гл. V, § 3 показано, что в этом случае асимптотическая длина диффузии L_i удовлетворяет уравнению (см. уравнение (5.22a))

$$\frac{L_i \Sigma_{\text{тр } s}^{i \rightarrow i}}{2} \ln \frac{L_i \Sigma_{\text{тр}}^i + 1}{L_i \Sigma_{\text{тр}}^i - 1} = 1, \quad (6.58a)$$

где $\Sigma_{\text{тр } s}^{i \rightarrow i} = \Sigma_s^i (1 - \bar{\mu}_0^i) - \Sigma_{\text{зам}}^i$ — диагональный член матрицы в транспортном приближении*; $\Sigma_{\text{тр}}^i = \Sigma_t^i - \bar{\mu}_0^i \Sigma_s^i$ — полное транспортное сечение*.

Рассмотрим частный случай плоской геометрии. Многогрупповая система уравнений (6.57) записывается тогда следующим образом:

$$\frac{d^2 \Phi^i(x)}{dx^2} - \frac{1}{L_i^2} \Phi^i(x) = -\frac{1}{D^i} \Sigma_{\text{зам}}^{i-1} \Phi^{i-1}(x). \quad (6.59)$$

* В работах [8, 27] ошибочно указано, что $\Sigma_{\text{тр } s}^{i \rightarrow i} = \Sigma_{\text{тр } s}^i$; $\Sigma_{\text{тр}}^i = \Sigma_{\text{ув}}^i + \Sigma_{\text{тр } s}^i$.

Решение уравнения (6.59) для полубесконечной среды

$$\Phi^i(x) = A_i e^{-\frac{x}{L_i}} + B_i e^{-\frac{x}{L_{i-1}}}. \quad (6.60)$$

Константы A_i и B_i определяются рекуррентными соотношениями

$$A_i = \Phi_s^i - B_i,$$

$$B_i = \frac{\Sigma_{\text{зам}}^{i-1} (\Phi_s^{i-1} - B_{i-1})}{D^i \left(\frac{1}{L_i^2} - \frac{1}{L_{i-1}^2} \right)}.$$

Здесь Φ_s^i ; Φ_s^{i-1} — поток нейтронов i -й и $(i-1)$ -й групп на границе среды при $x=0$.

Если решение (6.60) или аналогичное ему диффузионное решение подставить в групповое кинетическое уравнение, то можно определить область пространственных переменных, где справедлив асимптотический ход решения этого уравнения (подробнее см. гл. V, § 3). В случае плоской геометрии указанная область значений x определяется неравенством [25]

$$x_i \gg \frac{L_i}{L_i \Sigma_{\text{tr}}^i - 1}. \quad (6.61)$$

Из уравнения (6.58a) следует, что при сильном уводе из группы должно выполняться соотношение

$$L_i \sim \frac{1}{\Sigma_{\text{tr}}^i},$$

соответствующее очень большим значениям x_i . Наоборот, при слабом уводе

$$L_i \gg 1/\Sigma_{\text{tr}}^i$$

и, согласно неравенству (6.61),

$$x_i \gg 1/\Sigma_{\text{tr}}^i,$$

т. е. асимптотический ход решения группового уравнения устанавливается на расстояниях порядка одной длины диффузии L_i от границ среды.

Такой анализ подтверждает правильность использования системы уравнений (6.55) и (6.56) при $E \geq 1$ Мэв и системы уравнений (6.57) при $E < 1$ Мэв. Действительно, в первом случае мы имеем дело с сильным уводом из группы за счет неупругого рассеяния, и поэтому пространственное распределение групповых нейтронов должно удовлетворительно описываться в приближении прямых прострелов, т. е. уравнением (6.55). Во

втором случае при выполнении условия (6.54) увод из группы мал, и поэтому пространственное распределение нейтронов на некотором расстоянии от границ среды должно определяться процессами диффузионного типа и удовлетворительно описываться асимптотическим решением группового уравнения, т. е. решением уравнения (6.57).

Системы уравнений (6.55), (6.56) и (6.57) могут рассматриваться как математическая формулировка полуэмпирического метода расчета безводородной защиты.

Некоторые авторы (см. например, [20, 26]) используют для расчета как водородсодержащей, так и безводородной защиты следующую систему многогрупповых уравнений:

$$\Delta\Phi^i - \frac{1}{l^2}\Phi^i = -\frac{1}{D^i}q \quad \text{при } i = 1,$$

$$D^i\Delta\Phi^i - \Sigma_{ув}^i\Phi^i = -\left[\Sigma_{зам}^{i-1}\Phi^{i-1} + \sum_{k=1}^{i-1}(\Sigma_H^{k \rightarrow i}\Phi^k)\right]. \quad (6.62)$$

Здесь l — экспериментальная длина релаксации быстрых нейтронов или длина выведения; q — источники деления (равны нулю за пределами активной зоны).

Основываясь на соображениях, изложенных в настоящем параграфе, можно указать на некоторые недостатки этой системы уравнений.

Во-первых, решение уравнения (6.22) при $i=1$ определяет пространственное распределение быстрых нейтронов в виде диффузионной функции. В действительности же указанное распределение должно быть, по-видимому, ближе к функции прямых прострелов, которая отличается от диффузионной геометрическим множителем $1/x$ (предполагается, что в обоих случаях используется длина релаксации или длина выведения).

Во-вторых, точность результатов решения системы уравнений (6.62) во многом зависит от правильного выбора числа групп. При малом числе групп решения уравнений (6.62) дают завышенные значения для потока нейтронов промежуточных энергий вдали от источника. При большом числе групп система уравнений (6.62) становится эквивалентной уравнению возраста, решение которого, как известно, занижает поток быстрых нейтронов вдали от источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хен Г., Зигерт Х. В сб. «Физические проблемы защиты реакторов». Перев. с англ. Под ред. С. Г. Цыпина и др. М., Атомиздат (в печати).
2. Бергельсон Б. Р., Торлин Б. З. «Атомная энергия», 27, 346 (1969).
3. Прайс Б. и др. Защита от ядерных излучений. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
4. Albert R., Welton T. USAEC, Rep. WARD-15, 1950.
5. Чэпмен Г., Сторс К. В кн. «Защита транспортных установок с ядерным двигателем». Под ред. В. В. Орлова и С. Г. Цыпина. М., Изд-во иностр. лит., 1961, стр. 128.

6. Бродер Д. Л. и др. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Под ред. Д. Л. Бродера и др. М., Госатомиздат, 1963, стр. 52.
7. Гольдштейн Г. Основы защиты реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
8. Казанский Ю. А. и др. Физические исследования защиты реакторов. М., Атомиздат, 1966.
9. Avery A. et al. Methods of Calculations for Use in the Design of Shields for Power Reactors. AERE-R 3216.
10. Butler I. The status of theoretical methods for reactor shield design. AEEW-R 361, 1964.
11. Hjärne L., Leimdörfer M. Nucl. Sci. Engng, 24, 165 (1966).
12. Aalto E. et al. Ibid., 22, 443 (1965).
13. Гордеев И. В. и др. Ядерно-физические константы. М., Госатомиздат, 1963.
14. Защита ядерных реакторов. Сб. статей. Под ред. Т. Роквелла. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
15. Биологическая защита ядерных реакторов. Справочник. Сокращ. перев. с англ. Под ред. Ю. А. Егорова. М., Атомиздат, 1965.
16. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
17. Абагян Л. П. и др. Групповые константы для расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1964.
18. Захаров С. и др. «Бюллетень информационного центра по ядерным данным». Вып. третий (приложение). М., Атомиздат, 1967.
19. Aalto E., Braun I. Reactor Shielding. IAEA, Vienna, 1964, p. 71.
20. Бродер Д. Л. и др. Малогабаритная защита реакторов. М., Атомиздат, 1967.
21. Peterson E. MAC-A Balk Shielding Code. HW-73381, НАРО, 1962.
22. Canali M. et al. MAC-RAD-A Reactor Shielding code. EUR 2152e, 1964.
23. Avery A. et al. Trans. Amer. Nucl. Soc., 5, 2 (1962).
24. Галанин А. Д. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1959.
25. Бергельсон Б. Р. и др. «Атомная энергия», 24, 28 (1968).
26. Веселкин А. П. и др. В сб. «Вопросы дозиметрии и защиты от излучений». Вып. 5. Под ред. Л. Р. Кимеля. М., Атомиздат, 1966, стр. 106.
27. Синицын Б. И., Цыпин С. Г. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Под ред. Д. Л. Бродера. М., Госатомиздат, 1963, стр. 75.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЛЕНОВ МАТРИЦЫ T_{lj}

Если функции $\chi(E, \vartheta_0)$ и $\eta(E, \vartheta_0)$ описывают угловое распределение рассеянных нейтронов соответственно в лабораторной системе координат и в системе координат центра инерции, то коэффициенты разложения этих функций по полиномам Лежандра $\chi_l(E)$ и $\eta_j(E)$ связаны между собой следующим соотношением:

$$\chi_l(E) = \sum_{j=0}^{\infty} T_{lj} \eta_j(E).$$

Значения членов матрицы T_{lj} при $l, j \leq 4$ представлены в табл. П. 1.

Таблица П.1

Члены матрицы T_{lj}

l	j		
	0	1	2
0	1	0	0
1	$\frac{2}{3M}$	$1 - \frac{3}{5M^2}$	$-\frac{2}{3M} + \frac{4}{7M^3}$
2	$\frac{1}{5M^2} + \frac{1}{35M^4}$	$\frac{6}{5M} - \frac{12}{35M^3} - \frac{2}{35M^5}$	$1 - \frac{11}{7M^2} + \frac{3}{7M^4}$
3	0	$\frac{24}{7M^2}$	$\frac{12}{7M} - \frac{4}{3M^3}$
4	$-\frac{1}{63M^4}$	$\frac{4}{21M^3} + \frac{4}{77M^5}$	$\frac{10}{7M^2} - \frac{340}{693M^4}$

Продолжение табл. П.1

j	l	
	3	4
0	0	0
1	$\frac{3}{5M^2} - \frac{5}{9M^4}$	$-\frac{4}{7M^3} + \frac{6}{11M^5}$
2	$-\frac{6}{5M} + \frac{28}{15M^3} - \frac{82}{165M^5}$	$\frac{48}{35M^2} - \frac{816}{385M^4}$
3	$1 - \frac{46}{15M^2} + \frac{65}{33M^4}$	$-\frac{12}{7M} + \frac{624}{143M^3} - \frac{372}{143M^5}$
4	$\frac{20}{9M} - \frac{112}{33M^3} + \frac{124}{143M^5}$	$1 - \frac{390}{77M^2} + \frac{5787}{1001M^4}$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ГАРМОНИК ПОТОКА НЕЙТРОНОВ

Из системы уравнений (3.18) в случае однородной среды для функции $\varphi_l(x, u)$ можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi_l(x, u) = & -\frac{1}{\Sigma(u)} \cdot \frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \varphi_{l+1}(x, u)}{\partial x} - \frac{1}{\Sigma(u)} \times \\ & \times \frac{l}{2l+1} \frac{\partial \varphi_{l-1}(x, u)}{\partial x} + \frac{A_l(x, u)}{\Sigma(u)}, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где

$$A_l(x, u) = \int_{-\infty}^u \varphi_l(x, u') W_l(u' \rightarrow u) du'.$$

Далее будем рассматривать случай достаточно малого градиента нейтронного потока в среде, что позволяет пренебречь влиянием высших гармоник потока на низшие, т. е. в выражении (П. 1) не учитывать первое слагаемое. Тогда для нулевой гармоники потока ($l=0$) в пределах малого интервала усреднения Δu можно записать

$$\varphi_0(x, u) \approx \frac{A_0(x, u)}{\Sigma(u)}, \quad (\text{П.2})$$

где $A_0(x, u)$ — достаточно плавная функция энергии (если потеря энергии при рассеянии превышает ширину резонансных особенностей сечений) в силу своего интегрального характера.

Аналогичным образом из выражения (П. 1) при $l=1$ получаем энергетическую зависимость тока нейтронов:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, u) = & -\frac{1}{3\Sigma(u)} \frac{\partial \varphi_0(x, u)}{\partial x} + \frac{A_1(x, u)}{\Sigma(u)} = \\ = & -\frac{1}{3\Sigma^2(u)} \frac{\partial A_0(x, u)}{\partial x} + \frac{A_1(x, u)}{\Sigma(u)}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

По аналогии с выражениями (П. 2) и (П. 3) решение системы (П. 1) для произвольного l будем искать в следующей форме:

$$\varphi_l(x, u) \approx \psi(x) \sum_{n=0}^l \frac{b_{l,n}}{\Sigma^{n+1}(u)},$$

где $\psi(x)$ — некоторая плавная функция энергии, а $b_{l,n}$ — величины, не зависящие от координат. Умножим выражение (П. 1) на $W_l(u' \rightarrow u)$ и проинтегрируем по u' (без учета первого слагаемого). Тогда

$$\begin{aligned} A_l(x, u) = & \int_{-\infty}^u \varphi_l(x, u') W_l(u' \rightarrow u) du' = -\frac{l}{2l+1} \int_{-\infty}^u du' \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma(u')} \times \\ & \times \frac{\partial \varphi_{l-1}(x, u')}{\partial x} + \int_{-\infty}^u \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma(u')} A_l(x, u') du'. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Так как $A_l(x, u')$ — слабая функция u' по сравнению с $\frac{1}{\Sigma(u')} W_l(u' \rightarrow u)$, то в выражении (П. 4) можно положить

$$A_l(x, u') \approx A_l(x, u). \quad (\text{П. 5})$$

Естественно, что это приближение может заметно нарушаться при больших потерях энергии, например при рассеянии на водороде. В этом случае более точный учет спектра различных гармоник потока $\varphi_l(u)$ может быть проведен с помощью последовательных приближений.

Используя соотношения (П. 3) для φ_{l-1} и (П. 5), получим, опуская зависимость A_l от u ,

$$A_l(x) = -\frac{l}{2l+1} \frac{d\psi}{dx} \sum_{n=0}^{l-1} b_{l-1, n} \int_{-\infty}^u \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma^{n+2}(u')} du' + \\ + A_l(x) \int_{-\infty}^u du' \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma(u')}.$$

Отсюда

$$A_l(x) = \frac{-\frac{l}{2l+1} \frac{d\psi}{dx}}{1 - \int_{-\infty}^u du' \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma(u')}} \sum_{n=0}^{l-1} b_{l-1, n} \int_{-\infty}^u \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma^{n+2}(u')} du'. \quad (\text{П. 6})$$

Подставим соотношения (П. 6) и (П. 3) в выражение (П. 1) (при пренебрежении первым слагаемым):

$$\sum_{n=0}^l \frac{b_{l, n}}{\Sigma^{n+1}(u)} = \frac{m_l(x)}{\Sigma(u)} \sum_{n=0}^{l-1} b_{l-1, n} \times \\ \times \left[\frac{1}{\Sigma^{n+1}(u)} + \frac{\int_{-\infty}^u \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma^{n+2}(u')} du'}{1 - \int_{-\infty}^u \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma(u')} du'} \right]. \quad (\text{П. 7})$$

Здесь $m_l(x) = -\frac{1}{\psi(x)} \frac{l}{2l+1} \frac{d\psi}{dx}$ — плавная функция энергий, зависящая от координат.

Приравнявая в последнем выражении члены, содержащие $\frac{1}{\Sigma}$ в одинаковой степени, получим

$$b_{l, n} = m_l b_{l-1, n-1}.$$

Отсюда следует, что

$$b_{l, n} = m_l^n b_{l-n, 0}.$$

Введем для наглядности обозначение:

$$b_{l, 0} = a_l.$$

Тогда

$$b_{l, n} = m_l^n a_{l-n}. \quad (\text{П.8})$$

Теперь сумма (П. 3) может быть записана в следующем виде:

$$\varphi_l(x, u) = \psi(x) \sum_{n=0}^l \frac{m_l^n a_{l-n}}{\Sigma^{n+1}(u)}. \quad (\text{П.9})$$

Подставим соотношение (П. 8) в формулу (П. 7):

$$\sum_{n=0}^l \frac{m_l^n a_{l-n}}{\Sigma^n(u)} = \sum_{n=0}^{l-1} m_l^{n+1} a_{l-1-n} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\Sigma^{n+1}(u)} + \frac{\int_{-\infty}^u \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma^{n+2}(u')} du'}{1 - \int_{-\infty}^u \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma(u')} du'} \right] \quad (2l^2 - l \gg 1 \text{ при } l > 1).$$

После сокращения членов с одинаковыми степенями $\frac{1}{\Sigma}$ получим следующее рекуррентное соотношение:

$$a_l = \sum_{n=0}^{l-1} m_l^{n+1} a_{l-1-n} \frac{\int_{-\infty}^u \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma^{n+2}(u')} du'}{1 - \int_{-\infty}^u \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma(u')} du'}. \quad (\text{П.10})$$

Следует отметить слабую зависимость величины m_l от номера l при $l > 1$, поэтому от m_l можно перейти просто к m . Кроме того, воспользуемся предположением об узости резонансов, т. е. предположением о большой величине потери энергии по сравнению с шириной резонансных особенностей. Поэтому интегралы в выражении (П. 10) можно заменить их средними значениями в интервале усреднения Δu . Обозначая средние значения этих интегралов фигурными скобками, например,

$$\left\langle \frac{W_l}{\Sigma} \right\rangle = \frac{1}{\Delta u} \int_{\Delta u} du \int_{-\infty}^u \frac{W_l(u' \rightarrow u)}{\Sigma(u')} du',$$

можем записать

$$\begin{aligned}
 a_l &= \sum_{n=0}^{l-1} m^{n+1} a_{l-1-n} \frac{\left\langle \frac{W_l}{\Sigma^{n+2}} \right\rangle}{1 - \left\langle \frac{W_l}{\Sigma} \right\rangle} = \\
 &= \frac{1}{1 - \left\langle \frac{W_l}{\Sigma} \right\rangle} \left[m a_{l-1} \left\langle \frac{W_l}{\Sigma^2} \right\rangle + m^2 a_{l-2} \left\langle \frac{W_l}{\Sigma^3} \right\rangle + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + m^{l-1} a_1 \left\langle \frac{W_l}{\Sigma^l} \right\rangle + m^l a_0 \left\langle \frac{W_l}{\Sigma^{l+1}} \right\rangle \right]. \quad (\text{П.11})
 \end{aligned}$$

Как видно из этого рекуррентного соотношения, каждая величина a_l является полиномом по m степени l (для определенности можно положить $a_0=1$). Поэтому величины $m^n a_{l-n}$, входящие в сумму (П. 9), независимо от номера n содержат одинаковый множитель m^l . Этот множитель несуществен с точки зрения определения формы спектра l -й гармоники потока. Поэтому от выражений (П. 9) и (П. 11) можно перейти к другим, не содержащим величины m :

$$\begin{aligned}
 \Phi_l(x, u) &= \psi_l(x) \sum_{n=0}^l \frac{a_{l-n}}{\Sigma^{n+1}(u)} \cdot \\
 a_l &= \sum_{n=0}^{l-1} a_{l-1-n} \frac{\left\langle \frac{W_l}{\Sigma^{n+2}} \right\rangle}{1 - \left\langle \frac{W_l}{\Sigma} \right\rangle}.
 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

19-ГРУППОВАЯ СИСТЕМА КОНСТАНТ

Настоящая система групповых констант охватывает всю область энергий реакторного спектра выше 100 кэВ. Ширина групп в шкале лётаргии принята одинаковой и равной $\Delta u=0,25$.

Нумерация групп и их границы в обычной и логарифмической шкале ($u = \ln E_0/E$; $E_0=2 \text{ МэВ}$) представлены в табл. П. 2.

Групповые сечения могут быть определены как некие средние величины для j -й области рассматриваемой среды. В частности, для плоского слоя толщиной δ_j получаем

$$\Sigma_j^i = \frac{\int_0^{\delta_j} dx \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi(x, u) \Sigma(u) du}{\int_0^{\delta_j} dx \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi(x, u) du}. \quad (\text{П.12})$$

Таблица П.2

Границы групп в шкале энергии и летаргии

Номер группы	1	2	3	4	5	6	7	8
$E_{l-1} - E_l, M\text{эв}$	$\infty - 8,97$	$8,97 - 6,98$	$6,98 - 5,44$	$5,44 - 4,23$	$4,23 - 3,30$	$3,30 - 2,57$	$2,57 - 2,00$	$2,00 - 1,56$
$u_{l-1} - u_l$	$-\infty -$ $-1,50$	$-1,50 -$ $-1,25$	$-1,25 -$ $-1,00$	$-1,00 -$ $-0,75$	$-0,75 -$ $-0,50$	$-0,50 -$ $-0,25$	$-0,25 - 0$	$0 - 0,25$
Номер группы	9	10	11	12	13	14	15	16
$E_{l-1} - E_l, M\text{эв}$	$1,56 - 1,21$	$1,21 - 0,95$	$0,95 - 0,74$	$0,74 - 0,57$	$0,57 - 0,45$	$0,45 - 0,35$	$0,35 - 0,27$	$0,27 - 0,21$
$u_{l-1} - u_l$	$0,25 - 0,5$	$0,5 - 0,75$	$0,75 - 1,00$	$1,00 - 1,25$	$1,25 - 1,50$	$1,50 - 1,75$	$1,75 - 2,00$	$2,00 - 2,25$
Номер группы	17	18	19					
$E_{l-1} - E_l, M\text{эв}$	$0,21 - 0,16$	$0,16 - 0,13$	$0,13 - 0,10$					
$u_{l-1} - u_l$	$2,25 - 2,50$	$2,50 - 2,75$	$2,75 - 3,00$					

Здесь функция $\Phi(x, u)$ описывает пространственно-энергетическое распределение нейтронов в j -м слое. Используя для определения $\Phi(x, u)$ длину релаксации $l(u)$, можно записать

$$\Phi(x, u) \approx \chi(u) e^{-x/l(u)}. \quad (\text{П.13})$$

Подставим выражение (П.13) в (П.12) и проведем интегрирование по x :

$$\Sigma_j^i = \frac{\int_{u_{i-1}}^{u_i} l(u) [1 - e^{-\delta_j/l(u)}] \chi(u) \Sigma(u) du}{\int_{u_{i-1}}^{u_i} l(u) [1 - e^{-\delta_j/l(u)}] \chi(u) du}.$$

Длина релаксации быстрых нейтронов $l(u)$ — обычно гладкая функция энергии. Поэтому, положив $\delta_j/l(u) \gg 1$, получим

$$\Sigma_j^i \approx \frac{\int_{u_{i-1}}^{u_i} \chi(u) \Sigma(u) du}{\int_{u_{i-1}}^{u_i} \chi(u) du}. \quad (\text{П.14})$$

Определение групповых сечений в виде (П.12) и переход от (П.12) к (П.14), вообще говоря, являются незаконной процедурой*. Подобное приближение можно считать допустимым только при достаточно узких группах, когда Σ^i слабо зависит от пространственно-энергетического распределения нейтронов внутри группы. В данном случае, т. е. при ширине групп $\Delta u = 0,25$, это требование практически выполняется.

Сравнение сечений, усредненных по спектру деления и замедления, показывает, что заметное отличие наблюдается лишь в первых двух группах и по своей величине близко к той точности, с которой известны истинные сечения.

Приведенные здесь групповые константы получены в результате усреднения истинных сечений по спектру замедления, т. е. при $\chi(u) = 1$

$$\Sigma^i = \frac{1}{\Delta u_i} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma(u) du.$$

В табл. П. 3—П. 18 представлены групповые константы для следующих элементов: H, D, B, C, O, Na, Al, Si, Fe, Ni, W, Pb. Так как при расчете защиты нередко приходится включать в рассмотрение и активную зону реактора, то приведены также константы для Be, Zr и U²³⁸.

Для всех средних и тяжелых ядер, начиная с углерода, приведены сечения переходов из k -й группы в i -ю при неупругом рассеянии [для бериллия при реакции $(n, 2n)$]:

$$\Sigma_{in}^{k \rightarrow i} = \frac{1}{\Delta u_k} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_{in}(u') du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} f_{in}(u', u - u') du.$$

* Групповые сечения должны определяться по формулам гл. II с учетом резонансной блокировки и пространственной деформаций внутригруппового спектра. В частности, для Fe эффект резонансной блокировки сечений даже при $E > 1$ Мэв может оказаться весьма существенным с точки зрения глубокого проникновения нейтронов.

Водород (H)

k	$\Delta E, \text{Мэв}$	σ_t	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}
1	$\infty-8,97$	0,98	0,98	—	—	0,33
2	$8,97-6,98$	1,14	1,14	—	—	0,38
3	$6,98-5,44$	1,39	1,39	—	—	0,46
4	$5,44-4,23$	1,68	1,68	—	—	0,56
5	$4,23-3,30$	1,99	1,99	—	—	0,66
6	$3,30-2,57$	2,32	2,32	—	—	0,77
7	$2,57-2,00$	2,69	2,69	—	—	0,89
8	$2,00-1,56$	3,10	3,10	—	—	1,03
9	$1,56-1,21$	3,56	3,56	—	—	1,18
10	$1,21-0,95$	4,09	4,09	—	—	1,36
11	$0,95-0,74$	4,70	4,70	—	—	1,56
12	$0,74-0,57$	5,37	5,37	—	—	1,78
13	$0,57-0,45$	6,11	6,11	—	—	2,03
14	$0,45-0,35$	6,94	6,94	—	—	2,30
15	$0,35-0,27$	7,88	7,88	—	—	2,62
16	$0,27-0,21$	8,87	8,87	—	—	2,95
17	$0,21-0,16$	9,88	9,88	—	—	3,29
18	$0,16-0,13$	11,4	11,4	—	—	3,79
19	$0,13-0,10$	12,50	12,50	—	—	4,18

Продолжение

k	$\beta^{k \rightarrow i}$ при i , равном								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,115	0,196	0,152	0,119	0,092	0,072	0,056	0,044	0,034
2		0,115	0,196	0,152	0,119	0,092	0,072	0,056	0,044
3			0,115	0,196	0,152	0,119	0,092	0,072	0,056
4				0,115	0,196	0,152	0,119	0,092	0,072
5					0,115	0,196	0,152	0,119	0,092
6						0,115	0,196	0,152	0,119
7							0,115	0,196	0,152
8								0,115	0,196
9									0,115
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									

k	$\beta^{k \rightarrow i}$ при i равном								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0,026	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004
2	0,034	0,026	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005
3	0,044	0,034	0,026	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008	0,006
4	0,056	0,044	0,034	0,026	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008
5	0,072	0,056	0,044	0,034	0,026	0,021	0,016	0,013	0,010
6	0,092	0,072	0,056	0,044	0,034	0,026	0,021	0,016	0,013
7	0,119	0,092	0,072	0,056	0,044	0,034	0,026	0,021	0,016
8	0,152	0,119	0,092	0,072	0,056	0,044	0,034	0,026	0,021
9	0,196	0,152	0,119	0,092	0,072	0,056	0,044	0,034	0,026
10	0,115	0,196	0,152	0,119	0,092	0,072	0,056	0,044	0,034
11		0,115	0,196	0,152	0,119	0,092	0,072	0,056	0,044
12			0,115	0,196	0,152	0,119	0,092	0,072	0,056
13				0,115	0,196	0,152	0,119	0,092	0,072
14					0,115	0,196	0,152	0,119	0,092
15						0,115	0,196	0,152	0,119
16							0,115	0,196	0,152
17								0,115	0,196
18									0,115

Таблица П.4

Дейтерий (D)

k	$\Delta E, \text{ Мэв}$	σ_t	σ_s	$\sigma_n, 2n$	σ_{tr}	$\sigma_{зам}$
1	$\infty-8,97$	1,13	0,99	0,14	0,61	2,65
2	8,97-6,98	1,26	1,15	0,11	0,72	2,12
3	6,98-5,44	1,49	1,42	0,07	0,91	3,95
4	5,44-4,23	1,73	1,70	0,03	1,16	5,05
5	4,23-3,30	1,99	1,97	0,02	1,39	6,07
6	3,30-2,57	2,25	2,25		1,55	6,77
7	2,57-2,00	2,47	2,47		1,73	7,52
8	2,00-1,56	2,65	2,65		1,93	8,42
9	1,56-1,21	2,81	2,81		2,11	9,16
10	1,21-0,95	2,93	2,93		2,26	9,8
11	0,95-0,74	3,04	3,04		2,40	10,40
12	0,74-0,57	3,11	3,11		2,46	10,70
13	0,57-0,45	3,17	3,17		2,50	10,90
14	0,45-0,35	3,22	3,22		2,54	11,10
15	0,35-0,27	3,26	3,26		2,57	11,10
16	0,27-0,21	3,29	3,29		2,47	10,70
17	0,21-0,16	3,32	3,32		2,41	10,50
18	0,16-0,13	3,35	3,35		2,41	10,50
19	0,13-0,10	3,30	3,30		2,36	10,30

Таблица П.7

Углерод (С)

k	ΔE, Мое	σ _t	σ _s	σ _{in}	σ _c	σ _{tr}	σ _{зам}	σ _{зам}	k	ρ ^{k-i} при i, равном			
										k	k+1	k+2	k+3
1	∞	1,13	0,78	0,35	0,07	0,79	0,28	3,08	1	0,738	0,244	0,018	—
2	8,97-6,98	1,28	1,08	0,20	0,01	0,84	0,44	1,72	2	0,630	0,334	0,036	—
3	6,98-5,44	1,35	1,27	0,07	—	0,84	0,52	0,88	3	0,473	0,472	0,055	—
4	5,44-4,23	1,43	1,42	0,01	—	1,13	0,76	0,80	4	0,572	0,395	0,033	—
5	4,23-3,30	2,00	2,00	0,0	—	1,94	1,28	1,28	5	0,452	0,474	0,074	—
6	3,30-2,57	1,90	1,90	—	—	1,77	1,20	1,20	6	0,391	0,553	0,056	—
7	2,57-2,00	1,73	1,73	—	—	1,53	1,04	1,04	7	0,409	0,544	0,047	—
8	2,00-1,56	1,88	1,88	—	—	1,66	1,12	1,12	8	0,435	0,532	0,033	—
9	1,56-1,21	2,20	2,20	—	—	1,93	1,28	1,28	9	0,446	0,523	0,031	—
10	1,21-0,95	2,51	2,51	—	—	2,18	1,44	1,44	10	0,449	0,521	0,030	—
11	0,95-0,74	2,81	2,81	—	—	2,44	1,64	1,64	11	0,446	0,523	0,031	—
12	0,74-0,57	3,10	3,10	—	—	2,70	1,80	1,80	12	0,441	0,528	0,031	—
13	0,57-0,45	3,39	3,39	—	—	2,98	2,00	2,00	13	0,435	0,532	0,032	—
14	0,45-0,35	3,67	3,67	—	—	3,25	2,16	2,16	14	0,430	0,537	0,033	—
15	0,35-0,27	3,90	3,90	—	—	3,49	2,32	2,32	15	0,424	0,541	0,034	—
16	0,27-0,21	4,10	4,10	—	—	3,70	2,48	2,48	16	0,419	0,546	0,035	—
17	0,21-0,16	4,25	4,25	—	—	3,87	2,60	2,60	17	0,415	0,549	0,036	—
18	0,16-0,13	4,35	4,35	—	—	3,99	2,68	2,68	18	0,506	0,457	0,037	—
19	0,13-0,10	4,40	4,40	—	—	4,05	2,72	2,72	19	—	—	—	—

ρ^{k-i} при i, равном

k	ρ ^{k-i} при i, равном																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
1	0,001	0,005	0,014	0,025	0,037	0,045	0,047	0,044	0,036	0,029	0,022	0,015	0,010	0,007	0,005	0,003	0,002	0,002	
2	—	0,003	0,007	0,013	0,020	0,026	0,027	0,026	0,021	0,017	0,013	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001	
3	—	—	—	—	—	—	0,015	0,019	0,016	0,010	0,009	0,004	—	—	—	—	—	—	
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	

Кислород (O)

k	$\Delta E, \text{Мэв}$	σ_t	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}	$\sigma_{зам}$	$\sigma'_{зам}$	k	$\beta^{k \rightarrow i}$ при i, равном	
										k	k+L
1	∞	1,15	0,64	0,48	0,10	0,99	0,24	3,76	1	0,824	0,176
2	8,97-6,98	1,39	1,03	0,33	0,08	1,12	0,40	2,24	2	0,807	0,193
3	6,98-5,44	1,38	1,34	0,02	0,06	1,02	0,48	0,72	3	0,731	0,269
4	5,44-4,23	1,63	1,57		0,075	1,18	0,56	0,56	4	0,701	0,299
5	4,23-3,30	2,77	2,74		0,027	1,92	0,96	0,96	5	0,601	0,399
6	3,30-2,57	1,51	1,51			1,01	0,52	0,52	6	0,628	0,372
7	2,57-2,00	1,06	1,07			0,78	0,40	0,40	7	0,620	0,380
8	2,00-1,56	2,25	2,25			1,71	0,84	0,84	8	0,620	0,380
9	1,56-1,21	2,74	2,74			2,22	1,12	1,12	9	0,592	0,408
10	1,21-0,95	5,09	5,09			4,35	2,16	2,16	10	0,516	0,484
11	0,95-0,74	3,73	3,73			3,33	1,68	1,68	11	0,547	0,453
12	0,74-0,57	3,07	3,07			2,78	1,40	1,40	12	0,608	0,392
13	0,57-0,45	6,10	6,10			5,89	2,80	2,80	13	0,716	0,284
14	0,45-0,35	8,32	8,32			7,73	3,88	3,88	14	0,413	0,587
15	0,35-0,27	3,65	3,65			3,47	1,72	1,72	15	0,424	0,576
16	0,27-0,21	3,51	3,51			3,37	1,68	1,68	16	0,468	0,532
17	0,21-0,16	3,50	3,50			3,35	1,68	1,68	17	0,492	0,508
18	0,16-0,13	3,50	3,50			3,35	1,68	1,68	18	0,506	0,494
19	0,13-0,10	3,50	3,50			3,35	1,68	1,68			

k	$\sigma_{tr}^{k \rightarrow i}$ при i, равном																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
1	0,002	0,007	0,017	0,033	0,050	0,061	0,064	0,061	0,051	0,040	0,030	0,022	0,015	0,010	0,0064	0,007	0,003	0,002	
2	—	0,002	0,006	0,013	0,023	0,033	0,039	0,043	0,040	0,035	0,028	0,022	0,015	0,011	0,004	0,005	0,002	0,002	
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,003	0,003	0,003	0,003	0,001	0,001	

Таблица П.9

Натрий (Na)

k	$\Delta E, \text{ Мэв}$	σ_t	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}	$\sigma_{зам}$	$\sigma'_{зам}$
1	$\infty-8,97$	2,20	1,66	0,53	0,110	1,30	0,28	4,4
2	8,97-6,98	2,20	1,66	0,53	0,072	1,25	0,24	3,88
3	6,98-5,44	2,20	1,66	0,54	0,023	1,20	0,24	3,36
4	5,44-4,23	2,20	1,66	0,54	0,003	1,25	0,24	2,96
5	4,23-3,30	2,35	1,80	0,55	0,0 ²	1,65	0,40	2,76
6	3,30-2,57	2,59	2,04	0,55	0,0 ²	1,66	0,40	2,48
7	2,57-2,00	3,24	2,70	0,54	0,0 ²	2,16	0,56	2,28
8	2,00-1,56	2,34	1,81	0,52	0,0 ²	1,71	0,40	1,72
9	1,56-1,21	2,37	1,90	0,48	0,0 ²	1,79	0,44	1,60
10	1,21-0,95	3,33	2,92	0,41	0,0 ²	2,44	0,72	1,76
11	0,95-0,74	5,06	4,74	0,32	0,0 ²	3,53	1,12	2,08
12	0,74-0,57	5,89	5,69	0,20	0,0 ³	5,38	1,80	2,56
13	0,57-0,45	3,11	3,01	0,05	0,0 ³	2,96	1,00	1,32
14	0,45-0,35	3,77	3,77	0,00	0,0 ³	3,53	1,24	1,24
15	0,35-0,27	2,96	2,96		0,0 ⁶	2,80	0,96	0,96
16	0,27-0,21	4,74	4,74		0,0 ⁸⁷	4,53	1,56	1,56
17	0,21-0,16	4,32	4,32		0,0 ⁹	4,17	1,44	1,44
18	0,16-0,13	3,28	3,28		0,0 ²¹¹	3,17	1,12	1,12
19	0,13-0,10	3,26	3,26		0,0 ²¹³	3,15	1,08	1,08

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при i , равном									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0,002	0,009	0,022	0,040	0,058	0,069	0,071	0,066	0,054	
2	—	0,009	0,022	0,040	0,058	0,070	0,071	0,067	0,054	
3	—	—	0,023	0,041	0,060	0,072	0,073	0,069	0,056	
4	—	—	—	0,042	0,062	0,075	0,077	0,072	0,059	
5	—	—	—	—	0,066	0,081	0,084	0,079	0,066	
6	—	—	—	—	—	0,087	0,092	0,090	0,075	
7	—	—	—	—	—	—	0,100	0,101	0,087	
8	—	—	—	—	—	—	—	0,246	0,276	
9	—	—	—	—	—	—	—	—	0,086	
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при i , равном								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,042	0,032	0,022	0,015	0,010	0,007	0,040	0,003	0,002
2	0,043	0,032	0,022	0,015	0,010	0,007	0,040	0,003	0,002
3	0,044	0,033	0,023	0,016	0,010	0,007	0,040	0,003	0,002
4	0,047	0,035	0,024	0,017	0,011	0,008	0,004	0,003	0,002
5	0,052	0,039	0,027	0,019	0,012	0,008	0,005	0,003	0,002
6	0,060	0,046	0,033	0,022	0,015	0,010	0,006	0,004	0,003
7	0,072	0,055	0,040	0,028	0,019	0,013	0,008	0,005	0,003
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	0,317	0,074	—	—	—	—	—	—	—
10	—	0,186	0,223	0,003	—	—	—	—	—
11	—	—	—	0,154	0,134	0,032	—	—	—
12	—	—	—	—	—	0,054	0,062	0,052	0,032
13	—	—	—	—	—	—	—	—	0,032
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Алюминий (Al)

k	$\Delta E, \text{ Мэв}$	σ_t	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}	$\sigma_{\text{зам}}$	$\sigma'_{\text{зам}}$
1	$\infty-8,97$	1,68	0,68	0,86	0,140	1,33	0,08	6,12
2	8,97-6,98	1,81	0,84	0,87	0,105	1,33	0,12	5,48
3	6,98-5,44	2,13	1,21	0,87	0,052	1,38	0,12	5,00
4	5,44-4,23	2,25	1,42	0,81	0,020	1,38	0,16	4,12
5	4,23-3,30	2,49	1,80	0,68	0,007	1,81	0,32	3,16
6	3,30-2,57	2,74	2,25	0,49	0,0014	1,68	0,36	2,20
7	2,57-2,00	3,02	2,71	0,31	0,0004	1,91	0,48	1,56
8	2,00-1,56	2,97	2,79	0,18	0,00036	1,97	0,52	1,16
9	1,56-1,21	3,23	3,16	9,07	0,00039	2,24	0,64	0,96
10	1,21-0,95	3,14	3,13	0,01	0,00039	2,25	0,68	0,76
11	0,95-0,74	4,21	4,20	0,01	0,00054	3,18	0,96	1,00
12	0,74-0,57	3,49	3,49	0,00	0,00063	2,67	0,80	0,80
13	0,57-0,45	3,82	3,82		0,00074	3,05	0,92	0,92
14	0,45-0,35	4,19	4,19		0,0019	3,63	1,08	1,08
15	0,35-0,27	4,10	4,10		0,0013	3,66	1,08	1,08
16	0,27-0,21	3,65	3,65		0,0016	3,24	0,96	0,96
17	0,21-0,16	5,25	5,25		0,0016	4,80	1,44	1,44
18	0,16-0,13	6,79	6,79		0,0042	6,37	1,88	1,88
19	0,13-0,10	4,48	4,48		0,0048	4,28	1,28	1,28

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при i , равном								
	2	3	4	6	6	7	8	9	10
1	0,007	0,022	0,048	0,078	0,104	0,116	0,112	0,100	0,079
2	—	0,023	0,049	0,079	0,105	0,118	0,114	0,102	0,081
3	—	—	0,050	0,080	0,108	0,121	0,117	0,106	0,084
4	—	—	—	0,077	0,104	0,118	0,116	0,105	0,084
5	—	—	—	—	0,091	0,111	0,111	0,098	0,079
6	—	—	—	—	—	0,080	0,084	0,080	0,067
7	—	—	—	—	—	—	0,055	0,057	0,050
8	—	—	—	—	—	—	—	0,032	0,032
9	—	—	—	—	—	—	—	—	0,011
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при i , равном								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,061	0,044	0,031	0,021	0,013	0,009	0,005	0,003	0,002
2	0,062	0,045	0,031	0,021	0,014	0,009	0,006	0,004	0,002
3	0,064	0,047	0,033	0,022	0,015	0,009	0,006	0,004	0,002
4	0,064	0,047	0,033	0,022	0,015	0,009	0,007	0,004	0,002
5	0,061	0,046	0,032	0,022	0,015	0,009	0,007	0,003	0,002
6	0,053	0,040	0,029	0,019	0,014	0,008	0,006	0,003	0,002
7	0,042	0,032	0,024	0,016	0,012	0,007	0,005	0,003	0,002
8	0,029	0,024	0,018	0,014	0,010	0,007	0,004	0,003	0,002
9	0,012	0,011	0,010	0,008	0,006	0,005	0,003	0,002	0,001
10	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Кремний (Si)

k	$\Delta E, \text{ Мэв}$	σ_i	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}	$\sigma_{\text{зам}}$	$\sigma'_{\text{зам}}$
1	$\infty-8,97$	1,77	0,79	0,56	0,42	1,34	0,12	3,72
2	$8,97-6,98$	1,78	0,82	0,58	0,38	1,31	0,12	3,76
3	$6,98-5,44$	2,08	1,15	0,76	0,17	1,41	0,12	4,20
4	$5,44-4,23$	2,34	1,47	0,86	0,014	1,47	0,16	4,32
5	$4,23-3,30$	2,14	1,40	0,74	0,0*13	1,32	0,16	3,56
6	$3,30-2,57$	2,78	2,23	0,55	0,0*15	1,58	0,28	2,84
7	$2,57-2,00$	2,97	2,67	0,30	0,0*17	1,74	0,40	1,92
8	$2,00-1,56$	3,16	3,08	0,08	0,0*19	2,02	0,56	1,04
9	$1,57-1,21$	2,81	2,81	0,00	0,0*22	1,94	0,56	0,56
10	$1,21-0,95$	3,40	3,34	0,00	0,0*25	2,41	0,68	0,68
11	$0,95-0,74$	3,81	3,81		0,0*28	2,90	0,84	0,84
12	$0,74-0,57$	3,91	3,91		0,0*32	3,01	0,84	0,84
13	$0,57-0,45$	3,98	3,98		0,0*36	3,18	0,92	0,92
14	$0,45-0,35$	3,44	3,44		0,0*40	2,99	0,84	0,84
15	$0,35-0,27$	4,36	4,36		0,0*13	3,88	1,08	1,08
16	$0,27-0,21$	6,81	6,81		0,0*71	6,06	1,72	1,72
17	$0,21-0,16$	8,22	8,22		0,0*17	7,52	2,12	2,12
18	$0,16-0,13$	1,06	1,06		0,0*54	0,99	0,28	0,28
19	$0,13-0,10$	0,83	0,83		0,0*75	0,79	0,24	0,24

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при i , равном								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,006	0,016	0,034	0,054	0,069	0,076	0,072	0,064	0,050
2	—	0,017	0,035	0,056	0,072	0,079	0,075	0,067	0,052
3	—	—	0,046	0,073	0,096	0,100	0,100	0,091	0,071
4	—	—	—	0,080	0,109	0,124	0,123	0,112	0,089
5	—	—	—	—	0,086	0,107	0,112	0,108	0,089
6	—	—	—	—	—	0,063	0,077	0,084	0,077
7	—	—	—	—	—	—	0,021	0,027	0,030
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при i , равном								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,038	0,027	0,019	0,013	0,008	0,005	0,004	0,002	0,001
2	0,040	0,028	0,020	0,013	0,009	0,006	0,004	0,002	0,001
3	0,055	0,039	0,027	0,019	0,012	0,008	0,005	0,003	0,002
4	0,069	0,050	0,035	0,023	0,016	0,010	0,006	0,004	0,003
5	0,072	0,053	0,039	0,026	0,018	0,012	0,008	0,005	0,003
6	0,068	0,054	0,042	0,030	0,021	0,014	0,009	0,006	0,004
7	0,032	0,033	0,032	0,029	0,025	0,020	0,015	0,011	0,008
8	—	0,004	0,012	0,009	0,008	0,006	0,00	0,005	0,009
9	—	—	—	—	—	—	0,001	0,001	0,006
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица П.12

Железо (Fe)

k	$\Delta E, \text{ Мэв}$	σ_t	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}	$\sigma_{зам}$	$\sigma'_{зам}$
1	$\infty-8,97$	3,30	1,86	1,38	0,191	1,65	0,00	12,16
2	$8,97-6,98$	3,49	2,07	1,38	0,115	1,69	0,04	10,90
3	$6,98-5,44$	3,71	2,31	1,38	0,057	1,86	0,08	9,04
4	$5,44-4,23$	3,73	2,37	1,36	0,013	2,12	0,12	8,44
5	$4,23-3,30$	3,52	2,26	1,27	0,005	2,28	0,16	7,00
6	$3,30-2,57$	3,25	2,14	1,11	0,002	2,29	0,16	5,36
7	$2,57-2,00$	3,25	2,31	0,94	0,002	2,44	0,20	3,48
8	$2,00-1,56$	2,84	2,09	0,75	0,003	2,17	0,20	2,52
9	$1,56-1,21$	2,72	2,25	0,46	0,004	1,97	0,20	2,44
10	$1,21-0,95$	2,34	2,03	0,30	0,005	1,83	0,20	2,36
11	$0,95-0,74$	2,87	2,71	0,15	0,005	2,26	0,32	0,72
12	$0,74-0,57$	2,52	2,51	0,00	0,005	2,09	0,28	0,28
13	$0,57-0,45$	3,05	3,05		0,006	2,47	0,36	0,36
14	$0,45-0,35$	3,94	3,93		0,007	3,51	0,52	0,52
15	$0,35-0,27$	2,76	2,75		0,007	2,52	0,36	0,36
16	$0,27-0,21$	3,83	2,82		0,006	2,62	0,36	0,36
17	$0,21-0,16$	3,33	3,32		0,008	3,12	0,44	0,44
18	$0,16-0,13$	4,88	4,87		0,013	4,64	0,68	0,68
19	$0,13-0,10$	2,85	2,84		0,020	2,74	0,40	0,40

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow l}$ при l , равном								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	—	0,004	0,018	0,048	0,093	0,142	0,171	0,189	0,172
2	—	0,004	0,018	0,048	0,093	0,142	0,174	0,189	0,172
3	—	—	0,018	0,048	0,094	0,142	0,175	0,190	0,173
4	—	—	—	0,047	0,093	0,141	0,174	0,189	0,173
5	—	—	—	—	0,086	0,133	0,166	0,182	0,167
6	—	—	—	—	—	0,117	0,151	0,170	0,157
7	—	—	—	—	—	—	0,125	0,150	0,145
8	—	—	—	—	—	—	—	—	0,248
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow l}$ при l , равном								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,149	0,117	0,088	0,062	0,043	0,029	0,019	0,012	0,008
2	0,149	0,117	0,088	0,062	0,043	0,029	0,019	0,012	0,008
3	0,149	0,118	0,088	0,062	0,043	0,029	0,019	0,012	0,008
4	0,150	0,119	0,089	0,062	0,044	0,029	0,019	0,012	0,008
5	0,145	0,116	0,087	0,061	0,043	0,029	0,018	0,012	0,007
6	0,139	0,112	0,085	0,058	0,042	0,028	0,019	0,012	0,008
7	0,133	0,110	0,085	0,062	0,044	0,030	0,020	0,013	0,008
8	0,374	0,126	—	—	—	—	—	—	—
9	—	0,125	0,169	0,157	0,009	—	—	—	—
10	—	—	—	—	0,072	0,069	0,007	0,005	0,09
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица П.13

Никель (Ni)

k	$\Delta E, \text{ Мэв}$	σ_t	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}	$\sigma_{зам}$	$\sigma'_{зам}$
1	$\infty-8,97$	3,27	1,77	1,50	0,66	1,84	0,04	12,70
2	8,97-6,98	3,49	1,95	1,53	0,64	1,92	0,04	11,50
3	6,98-5,44	3,65	2,11	1,54	0,61	1,98	0,08	10,30
4	5,44-4,23	3,56	2,05	1,51	0,50	2,04	0,08	8,80
5	4,23-3,30	3,42	2,01	1,41	0,33	2,11	0,08	7,20
6	3,30-2,57	3,31	2,17	1,14	0,18	2,12	0,12	5,36
7	2,57-2,00	3,22	2,42	0,80	0,085	2,08	0,16	3,64
8	2,00-1,56	3,22	2,87	0,35	0,036	2,07	0,24	2,32
9	1,56-1,21	3,28	3,22	0,05	0,015	2,82	0,40	1,12
10	1,21-0,95	3,34	3,33	0,00	0,008	2,92	0,40	0,40
11	0,95-0,74	3,40	3,39		0,008	3,01	0,40	0,40
12	0,74-0,57	3,54	3,53		0,008	3,09	0,44	0,44
13	0,57-0,45	3,91	3,90		0,009	3,39	0,48	0,48
14	0,45-0,35	4,06	4,05		0,009	3,68	0,52	0,52
15	0,35-0,27	4,89	4,88		0,009	4,52	0,64	0,64
16	0,27-0,21	6,14	6,13		0,009	5,73	0,80	0,80
17	0,21-0,16	5,99	5,98		0,010	5,74	0,80	0,80
18	0,16-0,13	5,65	5,64		0,013	5,52	0,76	0,76
19	0,13-0,10	4,84	4,83		0,016	4,78	0,64	0,64

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при i , равном								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,002	0,009	0,030	0,069	0,122	0,170	0,196	0,202	0,178
2	—	0,009	0,030	0,070	0,125	0,174	0,201	0,207	0,182
3	—	—	0,030	0,071	0,126	0,176	0,203	0,210	0,184
4	—	—	—	0,068	0,122	0,173	0,202	0,210	0,185
5	—	—	—	—	0,109	0,160	0,192	0,204	0,184
6	—	—	—	—	—	0,144	0,149	0,170	0,162
7	—	—	—	—	—	—	0,074	0,101	0,111
8	—	—	—	—	—	—	—	0,018	0,023
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при i , равном								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,148	0,115	0,084	0,059	0,040	0,026	0,017	0,011	0,007
2	0,152	0,118	0,086	0,060	0,041	0,027	0,018	0,011	0,007
3	0,154	0,120	0,087	0,061	0,042	0,028	0,018	0,011	0,007
4	0,156	0,121	0,089	0,062	0,043	0,028	0,019	0,012	0,007
5	0,156	0,123	0,091	0,064	0,044	0,030	0,019	0,012	0,008
6	0,144	0,117	0,089	0,064	0,045	0,030	0,020	0,013	0,008
7	0,113	0,102	0,085	0,065	0,049	0,034	0,024	0,015	0,010
8	0,026	0,028	0,029	0,031	0,033	0,033	0,031	0,026	0,021
9	—	—	0,002	0,004	0,006	0,007	0,007	0,006	0,005
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Цирконий (Zr)

k	$\Delta E, \text{Мэв}$	σ_t	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}	$\sigma_{зам}$	$\sigma'_{зам}$
1	$\infty-8,97$	4,20	2,50	1,70	0,022	1,97	0,04	15,00
2	8,97-6,98	4,20	2,51	1,69	0,016	2,22	0,04	13,20
3	6,98-5,44	4,02	2,36	1,66	0,009	2,44	0,08	11,40
4	5,44-4,23	3,97	2,37	1,60	0,006	2,64	0,08	9,50
5	4,23-3,30	4,05	2,56	1,48	0,0045	2,85	0,12	7,56
6	3,30-2,57	4,30	2,99	1,30	0,0043	3,10	0,16	5,96
7	2,57-2,00	4,65	3,64	1,00	0,0052	3,32	0,20	4,36
8	2,00-1,56	5,15	4,50	0,64	0,0063	3,52	0,24	2,84
9	1,56-1,21	6,00	5,63	0,36	0,0078	3,97	0,32	1,92
10	1,21-0,95	6,80	6,61	0,17	0,0092	4,49	0,36	1,32
11	0,95-0,74	7,71	7,65	0,05	0,0110	5,19	0,44	0,68
12	0,74-0,57	8,40	8,39		0,0111	5,84	0,52	0,52
13	0,57-0,45	8,75	8,74		0,0111	6,50	0,56	0,56
14	0,45-0,35	8,90	8,88		0,0112	7,02	0,60	0,60
15	0,35-0,27	8,56	8,54		0,0115	7,27	0,64	0,64
16	0,27-0,21	7,57	7,55		0,0118	6,63	0,56	0,56
17	0,21-0,16	9,80	9,78		0,0124	8,79	0,76	0,76
18	0,16-0,13	8,22	8,21		0,0134	7,52	0,64	0,64
19	0,13-0,10	8,51	8,50		0,0145	7,94	0,68	0,68

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при l , равном								
	3	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,001	0,008	0,028	0,070	0,129	0,186	0,220	0,231	0,206
2	—	0,008	0,028	0,069	0,128	0,185	0,219	0,230	0,205
3	—	—	0,028	0,068	0,126	0,182	0,216	0,227	0,203
4	—	—	—	0,066	0,122	0,178	0,211	0,223	0,199
5	—	—	—	—	0,113	0,167	0,201	0,214	0,193
6	—	—	—	—	—	0,146	0,182	0,200	0,184
7	—	—	—	—	—	—	0,136	0,160	0,156
8	—	—	—	—	—	—	—	0,092	0,100
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при l , равном								
	11	12	13	14	16	16	17	18	19
1	0,174	0,138	0,100	0,071	0,048	0,032	0,020	0,014	0,008
2	0,173	0,137	0,099	0,071	0,048	0,032	0,020	0,014	0,008
3	0,172	0,135	0,099	0,070	0,047	0,032	0,021	0,014	0,008
4	0,169	0,132	0,097	0,069	0,047	0,032	0,021	0,013	0,008
5	0,166	0,130	0,096	0,068	0,047	0,032	0,020	0,013	0,009
6	0,161	0,128	0,096	0,068	0,047	0,032	0,021	0,014	0,009
7	0,141	0,117	0,090	0,065	0,046	0,031	0,021	0,014	0,009
8	0,100	0,090	0,074	0,056	0,041	0,029	0,019	0,013	0,009
9	—	0,055	0,125	0,111	0,069	—	—	—	—
10	—	—	—	—	0,008	0,036	0,029	0,024	0,019

Вольфрам (W)

k	$\Delta E, \text{ Мэв}$	σ_t	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}	$\sigma_{зам}$	$\sigma'_{зам}$
1	$\infty-8,97$	5,05	2,67	2,37	0,014	2,94	0,04	20,13
2	8,97-6,98	5,15	2,72	2,42	0,017	3,00	0,04	19,40
3	6,98-5,44	5,42	2,93	2,47	0,020	3,13	0,04	17,40
4	5,44-4,23	5,85	3,30	2,53	0,027	3,31	0,04	15,40
5	4,23-3,30	6,35	3,71	2,61	0,037	3,60	0,04	13,50
6	3,30-2,57	6,80	4,11	2,65	0,046	4,05	0,04	11,70
7	2,57-2,00	6,97	4,27	2,65	0,055	4,41	0,08	10,30
8	2,00-1,56	6,97	4,28	2,62	0,068	4,74	0,08	9,33
9	1,56-1,21	6,97	4,43	2,45	0,083	4,97	0,12	8,08
10	1,21-0,95	6,92	4,65	2,18	0,093	5,11	0,12	6,72
11	0,95-0,74	6,92	5,03	1,79	0,096	5,11	0,16	5,32
12	0,74-0,57	7,00	5,59	1,31	0,095	5,38	0,16	3,84
13	0,57-0,45	7,17	6,18	0,89	0,092	5,68	0,20	2,64
14	0,45-0,35	7,45	6,79	0,56	0,090	6,10	0,24	1,72
15	0,35-0,27	7,75	7,31	0,33	0,093	6,58	0,28	1,20
16	0,27-0,21	8,07	7,76	0,19	0,098	7,10	0,28	0,84
17	0,21-0,16	8,42	8,20	0,10	0,11	7,62	0,32	0,64
18	0,16-0,13	8,70	8,51	0,05	0,13	8,03	0,36	0,52
19	0,13-0,10	8,80	8,62	0,02	0,15	8,23	0,36	0,44

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow l}$ при l , равном								
	2	3	4	5	6	7	8	9	11
1	0,001	0,008	0,031	0,082	0,160	0,244	0,299	0,325	0,296
2	—	0,008	0,032	0,084	0,164	0,249	0,305	0,332	0,332
3	—	—	0,032	0,086	0,167	0,254	0,312	0,340	0,310
4	—	—	—	0,088	0,173	0,263	0,324	0,352	0,321
5	—	—	—	—	0,183	0,280	0,346	0,376	0,344
6	—	—	—	—	—	0,299	0,373	0,408	0,378
7	—	—	—	—	—	—	0,406	0,452	0,421
8	—	—	—	—	—	—	—	0,504	0,481
9	—	—	—	—	—	—	—	—	0,527
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow l}$ при i, равном								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,256	0,201	0,152	0,107	0,074	0,050	0,032	0,020	0,014
2	0,262	0,205	0,155	0,109	0,075	0,051	0,033	0,020	0,014
3	0,267	0,211	0,158	0,113	0,077	0,051	0,035	0,021	0,015
4	0,277	0,220	0,163	0,118	0,080	0,053	0,036	0,023	0,014
5	0,298	0,236	0,176	0,126	0,086	0,057	0,038	0,025	0,015
6	0,327	0,260	0,194	0,138	0,096	0,063	0,044	0,027	0,016
7	0,371	0,297	0,225	0,158	0,110	0,075	0,051	0,031	0,020
8	0,431	0,350	0,269	0,192	0,135	0,092	0,060	0,039	0,027
9	0,486	0,406	0,316	0,231	0,166	0,113	0,073	0,049	0,033
10	0,517	0,450	0,358	0,269	0,196	0,136	0,092	0,059	0,039
11	—	0,451	0,377	0,291	0,218	0,154	0,106	0,068	0,046
12	—	—	0,343	0,277	0,216	0,155	0,111	0,073	0,050
13	—	—	—	0,234	0,192	0,145	0,106	0,073	0,050
14	—	—	—	—	0,150	0,121	0,092	0,066	0,046
15	—	—	—	—	—	0,087	0,071	0,050	0,043
16	—	—	—	—	—	—	0,049	0,038	0,034
17	—	—	—	—	—	—	—	0,022	0,020
18	—	—	—	—	—	—	—	—	0,008

Т а б л и ц а П.16

Свинец (Pb)

k	$\Delta E, \text{ Мэв}$	σ_t	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}	$\sigma_{зам}$	$\sigma'_{зам}$
1	$\infty-8,97$	4,91	2,26	2,65	0,001	3,05	0,00	24,16
2	8,97-6,98	5,40	2,78	2,62	0,001	3,12	0,00	21,60
3	6,98-5,44	6,52	4,03	2,49	0,001	3,30	0,04	17,60
4	5,44-4,23	7,43	5,26	2,17	0,001	3,49	0,04	13,16
5	4,23-3,30	7,63	5,94	1,69	0,001	3,83	0,08	9,56
6	3,30-2,57	7,29	6,12	1,17	0,001	4,23	0,12	5,00
7	2,57-2,00	6,28	5,48	0,80	0,0014	4,14	0,12	3,36
8	2,00-1,56	5,42	4,86	0,56	0,0018	4,06	0,12	1,92
9	1,56-1,21	5,40	5,04	0,36	0,0020	4,24	0,16	1,40
10	1,21-0,95	5,77	5,53	0,24	0,0027	4,66	0,16	1,32
11	0,95-0,74	5,66	5,55	0,12	0,0032	4,76	0,16	0,80
12	0,74-0,57	5,63	5,58	0,05	0,0037	5,00	0,20	0,40
13	0,57-0,45	5,07	5,07	0,0	0,0042	4,34	0,16	0,16
14	0,45-0,35	6,76	6,76	—	0,0047	5,56	0,20	0,20
15	0,35-0,27	6,69	6,68	—	0,0053	5,72	0,20	0,20
16	0,27-0,21	7,64	7,64	—	0,0057	6,64	0,24	0,24
17	0,21-0,16	8,47	8,47	—	0,0064	7,52	0,28	0,28
18	0,16-0,13	9,77	9,76	—	0,0072	8,87	0,36	0,36
19	0,13-0,10	10,4	10,4	—	0,0080	9,54	0,36	0,36

k	σ_{in}^{k-i} при i, равном								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,002	0,011	0,042	0,104	0,195	0,285	0,340	0,361	0,323
2	—	0,011	0,041	0,103	0,193	0,282	0,337	0,357	0,320
3	—	—	0,038	0,096	0,181	0,267	0,320	0,341	0,307
4	—	—	—	0,077	0,149	0,226	0,277	0,361	0,275
5	—	—	—	—	0,098	0,155	0,200	0,229	0,221
6	—	—	—	—	—	0,104	0,128	0,140	0,129
7	—	—	—	—	—	—	0,115	0,132	0,125
8	—	—	—	—	—	—	—	0,0787	0,240
9	—	—	—	—	—	—	—	—	0,015
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k	σ_{in}^{k-i} при i, равном								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,276	0,215	0,160	0,111	0,079	0,051	0,033	0,230	0,014
2	0,272	0,214	0,158	0,110	0,078	0,051	0,033	0,022	0,014
3	0,261	0,205	0,153	0,106	0,075	0,049	0,032	0,021	0,014
4	0,237	0,188	0,140	0,099	0,069	0,046	0,030	0,019	0,013
5	0,200	0,166	0,128	0,094	0,067	0,045	0,031	0,020	0,013
6	0,112	0,124	0,114	0,088	0,060	0,047	0,033	0,028	0,018
7	0,112	0,091	0,070	0,050	0,035	0,022	0,015	0,010	0,006
8	0,147	0,028	0,016	0,013	0,013	0,0114	0,003	0,002	0,002
9	0,089	0,121	0,080	0,037	0,006	0,0002	0,002	0,001	0,001
10	—	0,027	0,054	0,046	0,035	0,028	0,023	0,013	0,004
11	—	—	—	0,011	0,030	0,027	0,021	0,002	0,005
12	—	—	—	—	—	—	0,001	0,01	0,008

Таблица П.17

Уран (U²³⁸)

k	$\Delta E, \text{Мэв}$	σ_f	σ_s	σ_{in}	σ_c	σ_{tr}	σ_f	$\nu\sigma_f$	$\sigma_{зам}$	$\sigma'_{зам}$
1	$\infty-8,97$	5,93	2,98	1,95	0,005	3,37	1,00	3,85	0,01	19,50
2	$8,97-6,98$	6,66	3,45	2,25	0,007	3,79	0,95	3,40	0,02	22,00
3	$6,98-5,44$	7,25	4,15	2,35	0,009	3,97	0,75	2,47	0,03	21,60
4	$5,44-4,23$	7,56	4,63	2,35	0,012	4,04	0,58	1,78	0,04	19,40
5	$4,23-3,30$	7,73	4,85	2,30	0,017	4,43	0,58	1,68	0,04	16,70
6	$3,30-2,57$	7,60	4,70	2,30	0,025	4,92	0,57	1,58	0,08	14,40
7	$2,57-2,00$	7,21	4,30	2,30	0,038	5,11	0,55	1,47	0,08	12,40
8	$2,00-1,56$	7,09	4,30	2,25	0,060	5,20	0,45	1,16	0,08	10,50
9	$1,56-1,21$	7,16	4,65	2,20	0,10	5,30	0,20	0,05	0,08	8,88
10	$1,21-0,95$	7,39	5,05	2,18	0,15	5,57	0,029	0,07	0,12	7,84
11	$0,95-0,74$	7,56	5,40	2,01	0,17	5,67	0,007	0,017	0,12	4,16
12	$0,74-0,57$	7,98	6,15	1,69	0,15	5,95	0,0 ² 15	0,0 ² 36	0,12	1,16
13	$0,57-0,45$	8,83	7,15	1,55	0,14	6,61	0,0 ⁶	0,0 ² 14	0,16	0,92
14	$0,45-0,35$	9,48	7,95	1,41	0,13	7,25	0,0 ³	0,0 ³ 7	0,20	0,96
15	$0,35-0,27$	10,2	8,80	1,24	0,14	7,98	0,0 ²	0,0 ³ 5	0,24	1,08
16	$0,27-0,21$	10,9	8,65	1,08	0,15	9,15	0,0 ¹	0,0 ² 3	0,28	1,24
17	$0,21-0,16$	11,5	10,4	0,91	0,16	10,0	0,0 ⁸ 1	0,0 ² 3	0,32	1,40
18	$0,16-0,13$	12,1	11,1	0,75	0,18	10,7	—	—	0,32	1,48
19	$0,13-0,10$	12,6	11,8	0,57	0,20	11,4	—	—	0,36	1,52

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при i, равном								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	—	—	—	0,004	0,019	0,055	0,115	0,188	0,237
2	—	—	—	0,005	0,022	0,064	0,132	0,217	0,273
3	—	—	—	0,005	0,023	0,067	0,138	0,226	0,285
4	—	—	—	0,005	0,023	0,067	0,138	0,226	0,285
5	—	—	—	—	0,022	0,065	0,135	0,222	0,280
6	—	—	—	—	—	0,066	0,136	0,224	0,282
7	—	—	—	—	—	—	0,139	0,229	0,290
8	—	—	—	—	—	—	—	0,234	0,298
9	—	—	—	—	—	—	—	—	0,315
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k	$\sigma_{in}^{k \rightarrow i}$ при i, равном								
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,262	0,253	0,220	0,176	0,133	0,096	0,068	0,044	0,029
2	0,302	0,292	0,254	0,203	0,153	0,111	0,078	0,051	0,034
3	0,315	0,305	0,265	0,212	0,160	0,116	0,082	0,053	0,036
4	0,316	0,305	0,265	0,212	0,160	0,116	0,082	0,053	0,036
5	0,309	0,299	0,260	0,207	0,157	0,114	0,080	0,052	0,035
6	0,313	0,302	0,263	0,210	0,158	0,116	0,080	0,054	0,036
7	0,322	0,311	0,271	0,216	0,164	0,120	0,083	0,056	0,036
8	0,333	0,324	0,284	0,227	0,174	0,124	0,088	0,060	0,037
9	0,357	0,352	0,311	0,250	0,193	0,138	0,097	0,067	0,043
10	0,463	0,040	0,059	0,187	0,159	0,147	0,061	0,060	0,053
11	—	0,613	0,041	0,003	0,0	0,007	0,076	0,065	0,053
12	—	—	0,600	0,059	0,012	—	—	—	—
13	—	—	—	0,581	0,060	0,006	0,005	0,002	—
14	—	—	—	—	0,662	0,038	0,011	0,00	0,001
15	—	—	—	—	—	0,723	0,015	0,017	0,003
16	—	—	—	—	—	—	0,806	0,00	0,007
17	—	—	—	—	—	—	—	0,720	0,144
18	—	—	—	—	—	—	—	—	0,419
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Сечения выведения σ_v

Элемент	E, Мэв																	
	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,4	15,5	16,5	17,5
H	6,2	3,4	2,55	2,05	1,75	1,50	1,33	1,20	1,07	0,98	0,90	0,83	0,77	0,71	0,66	0,62	0,58	0,55
B	2,62	1,75	1,39	1,08	1,12	0,98	0,68	0,83	0,88	0,78	0,85	0,93	0,94	0,88	0,79	0,86	0,83	0,80
C	3,06	1,62	1,55	1,50	1,13	0,79	0,71	0,97	0,85	0,71	0,74	0,91	0,92	0,85	0,80	0,86	0,88	0,89
O	3,68	2,12	0,85	1,72	1,11	0,92	0,73	0,76	0,79	0,70	0,77	0,89	0,97	1,03	1,03	0,97	0,99	1,00
Na	3,56	2,01	2,02	1,50	1,28	1,08	1,07	1,09	1,10	1,04	1,02	1,03	1,01	0,99	1,03	1,03	1,02	1,02
Mg	3,29	2,07	1,45	1,16	1,24	1,11	1,01	1,04	1,06	1,04	0,99	0,93	0,96	0,97	1,08	1,03	0,99	0,99
Al	2,92	2,04	2,00	1,58	1,46	1,35	1,25	1,15	1,08	0,97	1,00	0,99	1,00	1,03	1,03	0,99	0,99	1,00
Si	2,57	2,09	2,01	1,70	1,48	1,35	1,21	1,12	1,09	1,11	1,12	1,14	1,15	1,13	1,05	1,11	1,13	1,13
P	2,32	1,84	2,01	1,86	1,67	1,51	1,36	1,21	1,12	1,10	1,11	1,11	1,06	1,06	1,17	1,18	1,21	1,21
S	1,75	1,67	1,67	1,84	1,73	1,45	1,43	1,27	1,17	1,13	1,14	1,17	1,18	1,16	1,12	1,09	1,06	1,03
K	1,48	1,74	2,15	2,21	2,13	2,00	1,85	1,71	1,56	1,41	1,32	1,26	1,22	1,23	1,26	1,25	1,25	1,25
Ca	1,55	2,06	2,35	2,28	2,12	1,99	1,85	1,70	1,57	1,45	1,36	1,33	1,33	1,32	1,25	1,25	1,25	1,25
Ti	1,91	2,21	2,34	2,34	2,23	2,09	1,97	1,84	1,73	1,62	1,53	1,46	1,40	1,34	1,30	1,24	1,18	1,15
Cr	2,12	1,62	1,89	2,03	2,12	2,13	2,07	1,97	1,84	1,72	1,60	1,52	1,47	1,39	1,32	1,29	1,29	1,23
Mn	2,26	2,03	2,10	2,25	2,17	2,07	2,10	2,02	1,90	1,77	1,66	1,57	1,52	1,47	1,42	1,34	1,31	1,28
Fe	1,96	1,68	1,80	1,96	2,09	2,15	2,12	2,30	1,93	1,82	1,73	1,66	1,58	1,48	1,39	1,40	1,34	1,30
Co	3,21	1,95	1,83	2,04	2,22	2,23	2,18	2,07	1,95	1,83	1,72	1,64	1,56	1,51	1,51	1,45	1,39	1,33
Ni	3,51	2,16	2,03	2,06	2,11	2,15	2,16	2,12	2,03	1,93	1,83	1,74	1,65	1,57	1,52	1,45	1,39	1,33
Ba	3,93	4,07	3,17	2,67	2,44	2,36	2,35	2,38	2,44	2,51	2,59	2,66	2,70	2,71	2,68	2,60	2,59	2,58
P	3,72	3,09	3,32	3,98	4,11	3,76	3,37	3,04	2,85	2,75	2,75	2,70	3,08	2,80	2,82	2,83	2,87	2,92
U	4,59	3,93	4,19	4,36	4,26	4,02	3,74	3,48	3,28	3,11	3,03	3,00	2,99	3,01	3,01	3,05	3,10	3,09

Здесь $f_{in}(u', u-u')$ — функция, описывающая распределение по литаргии u нейтронов, испытавших неупругое рассеяние при литаргии u' .

Для легких и средних ядер H, D, Be и C приведены матрицы упругих переходов $\beta^{k \rightarrow i}$, с помощью которых могут быть определены сечения переходов из k -й группы в i -ю при упругом рассеянии:

$$\Sigma_s^{k \rightarrow i} \approx \Sigma_s^k \beta^{k \rightarrow i}, \quad (\text{П. 15})$$

где Σ_s^k — сечение упругого рассеяния в k -й группе. Матрицы $\beta^{k \rightarrow i}$ рассчитаны с учетом параметров анизотропии упругого рассеяния нейтронов

$$\beta^{k \rightarrow i} = \frac{1}{\Delta u_k} \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} f_s(u', u-u') du.$$

Здесь $f_s(u', u-u')$ — функция, описывающая распределение по литаргии u нейтронов, испытавших упругое рассеяние при литаргии u' .

Определение $\Sigma_s^{k \rightarrow i}$ в виде (П. 15) справедливо для достаточно узких групп.

Для ядер Be, C и O наряду с $\beta^{k \rightarrow i}$ приведены и сечения замедления из i -й группы в $(i+1)$ -ю за счет упругого рассеяния.

Наряду с матрицами неупругих и упругих переходов в табл. П. 4—П. 17 приведены также сечения замедления нейтронов из каждой группы $\sigma_{\text{зам}}^k$. Эти сечения рассчитаны по следующей формуле:

$$\sigma_{\text{зам}}^k = \frac{\xi \sigma_s^k}{\Delta u_k}.$$

Отметим, что для легких материалов более корректно следующее соотношение:

$$\sigma_{\text{зам}}^k = \sigma_s^k \sum_{k=i+1}^{k_0} \beta^{k \rightarrow i}.$$

В табл. П. 18 для широкого круга элементов приведены значения сечений выведения в зависимости от энергии в интервале от 0,5 до 17,5 Мэв.

Групповые константы и сечения выведения, представленные в табл. П. 3—П. 18, могут быть использованы для многогрупповых расчетов переноса нейтронов в области энергий $E \geq 100$ кэв с диффузионным приближением внутри группы и с определением источников по модели сечения выведения. Соответствующее групповое уравнение записывается следующим образом:

$$-D^i \Delta \Phi^i + \Sigma_{\text{ув}}^i \Phi^i = \sum_{k=0}^{i-1} (\Sigma_s^{k \rightarrow i} + \Sigma_{in}^{k \rightarrow i}) \Phi^k + Q^i. \quad (\text{П. 16})$$

В уравнении (П. 16) коэффициент диффузии D^i и сечение увода $\Sigma_{\text{ув}}^i$ выражаются через групповые константы из табл. П. 3—П. 17:

$$D^i = \frac{1}{3 \Sigma_{tr}^i},$$

$$\Sigma_{\text{ув}}^i = \Sigma_t^i - \Sigma_s^{i \rightarrow i} \quad (\Sigma_{in}^{i \rightarrow i} = 0).$$

Для тяжелых ядер отличны от нуля только диагональные и преддиагональные члены матрицы упругих переходов $\Sigma_s^{k \rightarrow i}$, т. е.

$$\Sigma_s^{i \rightarrow i} \Phi^i = (\Sigma_s^i - \Sigma_{\text{зам}}^i) \Phi^i,$$

$$\sum_{k=k_0}^{i-1} \Sigma_s^{k \rightarrow i} \Phi^k = \Sigma_{\text{зам}}^{i-1} \Phi^{i-1}.$$

Соответственно групповое уравнение

$$-D^i \Delta \Phi^i + \Sigma_{\text{ув}}^i \Phi^i = \Sigma_{\text{зам}}^{i-1} \Phi^{i-1} + \sum_{k=k_0}^{i-1} \Sigma_{\text{ин}}^{k \rightarrow i} \Phi^k + Q^i \quad (\text{П.17})$$

и сечение увода

$$\Sigma_{\text{ув}}^i = \Sigma_{\text{ин}}^i + \Sigma_c^i + \Sigma_f^i + \Sigma_{\text{зам}}^i.$$

В уравнениях (П.16) и (П.17) источники Q^i определяются с помощью сечений выведения по формулам, приведенным в гл. VI.

В табл. П.3—П.16 приняты следующие обозначения:

- σ_t — полное сечение;
- σ_c — сечение поглощения (радиационный захват и реакции с вылетом заряженных частиц);
- σ_f — сечение деления;
- ν — среднее число вторичных нейтронов на одно деление (с учетом запаздывающих нейтронов);
- σ_s — сечение упругого рассеяния;
- $\sigma_{\text{ин}}$ — сечение неупругого рассеяния;
- $\sigma_{\text{тр}}$ — транспортное сечение;
- $\sigma_{\text{ин}}^{k \rightarrow i}$ — сечение перехода из k -й группы в i -ю при неупругом рассеянии;
- $\beta^{k \rightarrow i}$ — матрица переходов при упругом рассеянии;
- $\sigma_{\text{зам}}$ — сечение замедления за счет упругого рассеяния;
- $\sigma'_{\text{зам}}$ — сечение замедления за счет упругого и неупругого рассеяния;
- $\sigma_{\text{в}}$ — сечение выведения.

Все сечения даны в барнах.

Групповые сечения и матрицы неупругих переходов взяты из работ [1—3], а матрицы $\beta^{k \rightarrow i}$ — из работы [4]. Сечения реакции ($n, 2n$) для дейтерия рассчитаны по данным работы [5]. Сечения выведения взяты из работы [6], в которой они рекомендованы для расчетов спектров быстрых нейтронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захарова С. М. и др. Ядерно-физические константы для расчета реакторов. М., Госатомиздат, 1963.
2. Захарова С. М. и др. «Бюллетень информационного центра по ядерным данным. Вып. третий (приложение). М., Атомиздат, 1967.
3. Захарова С. М. и др. Частное сообщение, 1961.
4. Бергельсон Б. Р. и др. «Бюллетень информационного центра по ядерным данным». Вып. третий. М., Атомиздат, 1966, стр. 312.
5. Joаnоn G. et al. Nucl. Sci. Engng, 13, 171 (1962).
6. Avery A., Butler I. The calculation of fast neutron spectra for pressure vessel damage studies. AEEW-R 377.

**Борис Рафаилович Бергельсон,
Альберт Петрович Суворов,
Борис Зиновьевич Торлин**

**МНОГОГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
ЗАЩИТЫ ОТ НЕЙТРОНОВ**

Редактор **Т. П. Калюжная**
Художественный редактор **А. С. Александров**
Художник **Н. Т. Дворников**
Технический редактор **Н. А. Власова**
Корректор **Е. П. Пьянкова**

Сдано в набор 18/VII 1969 г.
Подписано к печати 8/X 1969 г.
Т-12177 Формат 60×90^{1/16} Бумага тип. № 2
Печ. л. 17 Уч.-изд. л. 17,13 Тираж 1600 экз.
Цена 1 р. 90 к. Зак. изд. 1902 Зак. тип. 395
Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7.

Московская типография № 6 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-88, 1-й Южно-портовый пр., 17.