Л. С. Понтрягин, Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, *Тр. МИАН СССР*, 1955, том 45, 3–139

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью настоящей работы является гомотопическая классификация отображений $(n+k)$-мерной сферы Σ^{n+k} в n-мерную сферу S^n; задача эта здесь решена, однако, лишь для $k=1,2$. Метод, развитый здесь, был опубликован ранее в заметках [1, 2]. Он позволил В. А. Рохлину [3] решить вопрос также для $k=3$. Результатов для случая $k>3$ на этом пути пока получить не удалось. Вопрос упирается в изучение некоторых свойств гладких или, что то же самое, дифференцируемых многообразий размерности k и $k+1$. После появления работ [1—3] появился ряд работ французских математиков [4], в которых вопрос классификации отображений сферы в сферу меньшей размерности продвинут весьма далеко. Методы французской топологической школы существенно отличны от применяемых здесь.

Гладкие многообразия являются главным и, пожалуй, даже единственным инструментом исследования, поэтому их самостоятельному изучению полностью посвящена гл. I работы, где их изучение проведено несколько более широко, чем это необходимо для дальнейших приложений. Кроме основных определений гл. I содержит несколько более простое, чем у Уитнея [5], доказательство теоремы включения n-мерного гладкого многообразия в $(2n+1)$-мерное эвклидово пространство, а также постановку и некоторое изучение вопроса о типичных особых точках гладкого отображения n-мерного многообразия в эвклидово пространство размерности, меньшей $2n+1$.

В гл. II излагается способ применения гладких многообразий к решению гомотопических задач. Прежде всего устанавливается, что при гомотопической классификации отображений одного гладкого многообразия в другое можно ограничиться рассмотрением лишь гладких отображений и гладких деформаций. Далее излагается метод применения гладких многообразий к гомотопической классификации отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n, который заключается в следующем.

Гладкое замкнутое многообразие M^k размерности k, расположенное в эвклидовом пространстве E^{n+k} размерности $n+k$, называется *оснащенным* и обозначается через (M^k, U), если в каждой его точке

x задана система $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ из n линейно независимых векторов, ортогональных к M^k и гладко зависящих от x. Присоединяя к эвклидову пространству единственную бесконечно удаленную точку q', мы получаем сферу Σ^{n+k}. Пусть, далее, $e_1, \ldots, e_n$ — система линейно независимых векторов, касающихся сферы S^n в ее северном полюсе p. Оказывается, что существует такое гладкое отображение f сферы Σ^{n+k} в сферу S^n, что $f^{-1}(p) = M^k$, а отображение f_x, получаемое путем линеаризации из отображения f в точке $x \in M^k$, переводит векторы $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ соответственно в векторы $e_1, \ldots, e_n$. Гомотопический тип обладающего этими свойствами отображения f однозначно определяется оснащенным многообразием (M^k, U). Для каждого гомотопического типа отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n существует такое оснащенное многообразие, что соответствующее ему отображение принадлежит этому гомотопическому типу. Два оснащенных многообразия (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) тогда и только тогда определяют один и тот же гомотопический тип отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n, когда они *гомологичны* между собой в следующем смысле. Пусть $E^{n+k} \times E^1$ — прямое произведение эвклидова пространства E^{n+k} на числовую прямую E^1 переменного t. Будем считать, что оснащенное многообразие (M_0^k, U_0) расположено в пространстве $E^{n+k} \times 0$, а оснащенное многообразие (M_1^k, U_1) — в пространстве $E^{n+k} \times 1$. Оснащенные многообразия (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) считаются гомологичными между собой, если в полосе $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеется гладкое оснащенное многообразие (M^{k+1}, U), край которого состоит из многообразий M_0^k и M_1^k, а оснащение U которого совпадает на этом краю с заданными оснащениями U_0 и U_1.

Описанная конструкция дает возможность свести вопрос о гомотопической классификации отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n к гомологической классификации оснащенных k-мерных многообразий. Роль k-мерных и $(k+1)$-мерных многообразий здесь видна. Гомологическая классификация нульмерных оснащенных многообразий тривиальна, и в соответствии с этим легко проводится классификация отображений сферы Σ^n в сферу S^n. Гомологическая классификация одномерных и двумерных оснащенных многообразий также не представляет особых трудностей и она приводит к гомотопической классификации отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n при $k = 1,2$. Этому посвящена гл. IV настоящей работы. Гомологическая классификация трехмерных оснащенных многообразий уже представляет значительные трудности. Она была получена В. А. Рохлиным [3].

Для осуществления гомологической классификации оснащенных многообразий в настоящей работе используются их гомологические инварианты. Оснащенному подмногообразию (M^k, U) эвклидова пространства E^{n+k} ставится в соответствие его гомологический инвариант, который является одновременно гомотопическим инвариантом соответствующего отображения сферы Σ^{n+k} в сферу S^n. Для $n=k+1$ существует известный хопфовский инвариант γ отображения сферы Σ^{2k+1} в сферу S^{k+1}. Инвариант γ легко интерпретируется как гомологический инвариант оснащенного многообразия. В гл. III дается определение инварианта γ, опирающееся на теорию гладких многообразий, а также его интерпретация как гомологического инварианта оснащенного многообразия. Для $k=1$ хопфовский инвариант оказывается единственным; этот факт доказывается (известным способом) в гл. IV. Для $k=1, 2$; $n \geqslant 2$ в гл. IV строится инвариант δ. Этот инвариант является вычетом по модулю 2. Из его существования вытекает, что число классов отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n при $k=1, 2$; $n \geqslant 2$ не меньше двух. Единственность этого инварианта для всех случаев, кроме $k=1$, $n=2$, доказывается на основе единственности инварианта γ при $k=1$.

Глава I

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ИХ ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Здесь в первую очередь дается определение гладкого, или, что то же самое, дифференцируемого многообразия конечного класса и вводятся простейшие связанные с ним понятия; во вторую очередь рассматриваются некоторые играющие важную роль гладкие многообразия, именно, подмногообразие гладкого многообразия, многообразие линейных элементов гладкого многообразия, прямое произведение гладких многообразий и многообразие векторных подпространств данной размерности некоторого векторного пространства. Наряду с дифференцируемыми многообразиями конечного класса можно было бы определить и бесконечно дифференцируемые многообразия, где все рассматриваемые функции бесконечно дифференцируемы, а также аналитические многообразия, где все рассматриваемые функции аналитичны. В настоящей работе бесконечно дифференцируемые и аналитические многообразия не играют роли и потому не рассматриваются.

Понятие гладкого многообразия

А) Пусть E^k — эвклидово пространство размерности k с декартовыми координатами $x^1, \ldots, x^k$. *Полупространством* пространства E^k будем называть множество E_0^k, определяемое условием

$$x^1 \leqslant 0. \qquad (1)$$

Краем полупространства E_0^k будем называть гиперплоскость E^{k-1}, определяемую условием

$$x^1 = 0. \qquad (2)$$

Под *областью* полупространства E_0^k будем понимать его открытое подмножество (которое может и не быть открытым во всем пространстве E^k). Точки области полупространства E_0^k, принадлежащие его краю E^{k-1}, будем называть ее *краевыми* точками. Топологическое пространство M^k со счетной базой, каждая точка a которого допускает окрестность U^k, гомеоморфную некоторой области W^k полупространства E_0^k или пространства E^k, называется *топологическим многообразием*. (Очевидно, что каждая область пространства E^k гомеоморфна некоторой области полупространства E_0^k, но для введения координатных систем удобнее рассматривать области обоих пространств.) Если точка a соответствует краевой точке области W^k, то она называется *краевой* точкой многообразия M^k и своей окрестности U^k. Известно, что понятие краевой точки топологически инвариантно. Многообразие, обладающее краевыми точками, мы будем называть иногда многообразием *с краем*, а многообразие, не имеющее краевых точек,— многообразием *без края*. Компактное многообразие без края будем называть *замкнутым*. Легко проверить, что совокупность всех краевых точек многообразия M^k есть $(k-1)$-мерное многообразие без края.

Определение 1. Пусть M^k — топологическое многообразие размерности k и U^k — некоторая его окрестность, гомеоморфная области W^k полупространства E_0^k или пространства E^k. Установление определенного гомеоморфизма между U^k и W^k равносильно введению в U^k определенной системы X координат $x^1, \ldots, x^k$, соответствующих координатам эвклидова пространства E^k. При этом две различные системы координат X и Y в U^k всегда связаны взаимно однозначным и взаимнонепрерывным преобразованием

$$y^j = y^j(x^1, \ldots, x^k), \; j = 1, \ldots, k. \tag{3}$$

Выберем вполне определенное натуральное число m и предположим, что функции (3) не просто непрерывны, но m раз непрерывно дифференцируемы в области U^k и обладают отличным от нуля якобианом $\left|\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|$. При этом условии мы отнесем системы координат X и Y к одному и тому же *классу гладкости* порядка m. Очевидно, что различные классы не пересекаются и каждый класс определяется любой принадлежащей ему системой координат. Если среди всех этих классов отмечен один определенный, то окрестность U^k называется m раз непрерывно *дифференцируемой*. В силу этого две m раз непрерывно дифференцируемые окрестности U^k, V^k многообразия M^k всегда индуцируют в своей общей части два класса систем координат; если эти классы совпадают, то мы говорим, что окрестности U^k и V^k дифференцируемы *согласованно*. Если все окрестности некоторого базиса многообразия M^k являются m раз непрерывно дифференцируемыми и притом попарно согласованно, то многообразие M^k называется m раз непрерывно *дифференцируемым*, или *гладким*, класса m, а иногда просто гладким без указания числа m, которое, однако, всегда будет предполагаться достаточно большим для наших целей. [Аналогично, если функции (3) аналитичны, то многообразие называется *аналитическим.*]

Как видно из приведенного определения, задание дифференцируемости в многообразии осуществляется заданием ее в каждой окрестности некоторого базиса. Если при помощи двух базисов в многообразии определены две дифференцируемости, то они считаются одинаковыми тогда и только тогда, когда объединение обоих базисов снова удовлетворяет условиям определения 1. В действительности для задания дифференцируемости многообразия достаточно указать ее в каждой окрестности некоторого покрытия многообразия. Такое покрытие задает, конечно, и топологию многообразия.

Если ограничиться связными окрестностями, что всегда возможно, то в каждой окрестности все отмеченные системы координат распадутся на два класса, в каждом из которых переход (3) осуществляется при помощи преобразования с положительным якобианом. Каждый из этих классов будем называть *ориентацией* данной окрестности. Очевидно, что гладкое многообразие тогда и только тогда ориентируемо, когда ориентации его окрестностей можно выбрать согласованно. Каждому такому выбору отвечает определенная ориентация многообразия.

В) Край M^{k-1} гладкого многообразия M^k сам естественным образом оказывается гладким многообразием того же класса на основе следующей конструкции. Пусть U^k — такая окрестность в M^k с отмеченной системой координат X, для которой пересечение $U^{k-1}=U^k \cap M^{k-1}$ не пусто. Уравнение множества U^{k-1} в U^k, очевидно, имеет вид $x^1=0$, и потому естественно принять $x^2, \ldots, x^k$ за отмеченные координаты в U^{k-1}. Пусть V^k — другая такая окрестность в M^k (быть может, совпадающая с U^k) с отмеченной системой координат Y, для которой пересечение $V^{k-1}=V^k \cap M^{k-1}$ не пусто. В общей части окрестностей U^k и V^k имеем

$$y^j=y^j(x^1, \ldots, x^k), \qquad j=1, \ldots, k, \tag{4}$$

откуда при $x^1=0$ получаем

$$y^j=y^j(0, x^2, \ldots, x^k), \; j=2, \ldots, k. \tag{5}$$

Из дифференцируемости соотношений (4) следует дифференцируемость соотношений (5). Далее, из соотношения $y^1(0, x^2, \ldots, x^k)=0$ вытекает на $U^{k-1} \cap V^{k-1}$:

$$\frac{\partial(y^1, \ldots, y^k)}{\partial(x^1, \ldots, x^k)}=\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial(y^2, \ldots, y^k)}{\partial(x^2, \ldots, x^k)}, \tag{6}$$

а отсюда ввиду неравенства нулю левой части получаем $\frac{\partial(y^2, \ldots, y^k)}{\partial(x^2, \ldots, x^k)} \neq 0$.

Если система X является ориентирующей для окрестности U^k, то за ориентирующую систему координат окрестности U^{k-1} принимают $x^2, \ldots$ $\ldots, x^k$. Так как $\frac{\partial y^1}{\partial x^1} > 0$, то из положительности $\frac{\partial (y^1, \ldots, y^k)}{\partial (x^1, \ldots, x^k)}$ следует положительность $\frac{\partial (y^2, \ldots, y^k)}{\partial (x^2, \ldots, x^k)}$. Таким образом, граница гладкого ориентированного многообразия получает естественную ориентацию.

C) Пусть a — некоторая точка гладкого многообразия M^k. Всякая система координат, определенная в некоторой окрестности U^k точки a и принадлежащая к отмеченному классу, называется *локальной системой координат* в точке a. Очевидно, что каждую точку a многообразия M^k можно принять за начало некоторой локальной системы координат. *Вектором* (контравариантным) на многообразии M^k в точке a называется функция, относящая каждой локальной системе координат в точке a систему k действительных чисел — *компонент* вектора относительно этой системы координат — таким образом, что компоненты $u^1, \ldots, u^k$ и $v^1, \ldots, v^k$ одного и того же вектора относительно двух локальных систем координат $x^1, \ldots, x^k$ и $y^1, \ldots, y^k$ всегда связаны соотношением

$$v^j = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial y^j(a)}{\partial x^i} u^i, \; j = 1, \quad \ldots, k. \qquad (7)$$

Очевидно, что вектор однозначно определяется своими компонентами относительно одной произвольной локальной системы координат. Определяя линейные операции над векторами как операции над их компонентами, мы превращаем множество всех векторов на многообразии M^k в точке a в k-мерное векторное пространство R^k_a, которое называется *касательным* к гладкому многообразию M^k в точке a. Каждой локальной системе координат в точке a отвечает, очевидно, определенный базис в касательном пространстве, относительно которого все векторы имеют те же компоненты, как и относительно этой локальной системы координат. Если точка a принадлежит краю M^{k-1} многообразия M^k, то в ней, кроме касательного пространства R^k_a, определено пространство R^{k-1}_a, касательное к многообразию M^{k-1}. Примем за локальные координаты в M^{k-1} параметры $x^2, \ldots, x^k$ (см. п. «B») и поставим в соответствие вектору из R^{k-1}_a с компонентами $u^2, \ldots, u^k$ вектор из R^k_a с компонентами $0, u^2, \ldots, u^k$; тогда мы получим естественное вложение пространства R^{k-1}_a в R^k_a.

Гладкие отображения

D) Пусть M^k и N^l — два гладких многообразия класса $\boldsymbol{m}$, а φ — непрерывное отображение первого во второе. Выберем в точке $a \in M^k$ некоторую локальную систему координат X и в точке $b = \varphi(a) \in N^l$ — некоторую локальную систему координат Y; тогда в окрестности точки a отображение φ представится в виде

$$y^j = \varphi^j(x^1, \ldots, x^k),\ j = 1, \ldots, l. \tag{8}$$

Если функции φ^j являются n раз непрерывно дифференцируемыми, $n \leqslant m$, то столько же раз они будут непрерывно дифференцируемы и при всяком другом выборе локальных систем координат; таким образом, можно говорить о классе n гладкости самого отображения φ. В дальнейшем, говоря о гладких отображениях, мы всегда будем предполагать, что n достаточно велико для наших целей. Если ранг матрицы $\left\|\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}\right\|$ в точке a равен k, то отображение φ называется *регулярным* в точке a. Легко видеть, что если точка a принадлежит краю M^{k-1} многообразия M^k, то из регулярности отображения φ в точке a следует регулярность его в точке a многообразия M^{k-1}. Если отображение φ регулярно в каждой точке $a \in M^k$, то оно называется *регулярным*. Легко проверяется, что если отображение φ регулярно в точке a, то оно регулярно и гомеоморфно в некоторой окрестности точки a. Регулярное гомеоморфное отображение называется *гладким вложением*. Отображение φ называется *правильным* в точке $a \in M^k$, если ранг матрицы $\left\|\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}\right\|$, $j = 1, \ldots, l$; $i = 1, \ldots, k$ равен l. Легко видеть, что множество всех неправильных точек отображения φ замкнуто в M^k. Точка $b \in N^l$ называется *правильной* точкой отображения φ, если отображение φ правильно в каждой точке множества $\varphi^{-1}(b) \subset M^k$. Точка a называется *особой* точкой отображения f, если она является нерегулярной и неправильной одновременно, т. е. если ранг матрицы $\left\|\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}\right\|$, $j = 1, \ldots, l$; $i = 1, \ldots, k$ меньше обоих чисел k и l.

E) Всякое гладкое отображение φ гладкого многообразия M^k в гладкое многообразие N^l индуцирует в каждой точке $a \in M^k$ определенное линейное отображение φ_a векторного пространства R^k_α, касательного к многообразию M^k в точке a, в векторное пространство R^l_b, касательное к многообразию N^l в точке $b = \varphi(a)$. Именно, если локальные системы координат, выбранные в точках a и b, суть соответственно X и Y, то вектору $u \in R^k_a$ с компонентами $u^1, \ldots, u^k$ относительно системы X отвечает вектор $v = \varphi_a(u) \in R^l_b$ с компонентами

$$v^j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi^j(a)}{\partial x^i} u^i,\ j = 1, \ldots, l \tag{9}$$

относительно системы координат Y. Нетрудно видеть, что это определение непротиворечиво, т. е. что при любом выборе локальных систем координат оно приводит к одному и тому же отображению φ_a. Если отображение φ регулярно в точке a, то отображение φ_a взаимно однозначно и определяет вложение пространства R_a^k в пространство R_b^l. Если же отображение φ правильно в точке a, то $\varphi_a(R_a^k) = R_b^l$.

Определение 2. Гладкое отображение φ класса n гладкого многообразия M^k класса m на гладкое многообразие N^k класса m, $m \geqslant n$ называется *гладким гомеоморфизмом*, если оно гомеоморфно и регулярно. Очевидно, что если отображение φ есть гладкий гомеоморфизм класса n, то обратное отображение φ^{-1} есть также гладкий гомеоморфизм класса n. Два многообразия называются *гладко гомеоморфными*, если существует гладкий гомеоморфизм одного из них на другое.

Некоторые способы образования гладких многообразий

F) Пусть P^r — подмножество гладкого многообразия M^k класса m, определяемое вблизи каждой своей точки системой $k-r$ независимых уравнений. Это значит, что для каждой точки $a \in P^r$ существует такая окрестность U^k в многообразии M^k с локальной системой X, что пересечение $P^r \cap U^k$ состоит из всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$\psi^j(x^1, \ldots, x^k) = 0, \quad j = 1, \ldots, k-r. \tag{10}$$

При этом предполагается, что функции ψ^j m раз непрерывно дифференцируемы и функциональная матрица $\left\| \frac{\partial \psi^j(a)}{\partial x^i} \right\|$, $j = 1, \ldots, k-r$; $i = 1, \ldots, k$ имеет ранг $k-r$; если же a есть краевая точка многообразия M^k, то предполагается, что даже усеченная функциональная матрица $\left\| \frac{\partial \psi^j(a)}{\partial x^i} \right\|$, $j = 1, \ldots, k-r$; $i = 2, \ldots, k$ имеет ранг $k-r$. При этих условиях множество P^r естественным образом оказывается r-мерным гладким многообразием класса m, гладко вложенным в M^k. Это многообразие P^r мы будем называть *подмногообразием* многообразия M^k. Сверх того, оказывается, что края P^{r-1} и M^{k-1} многообразий P^r и M^k связаны соотношением

$$P^{r-1} = P^r \cap M^{k-1}, \tag{11}$$

и, если $a \in P^{r-1}$ и R_a^k, R_a^{k-1}, R_a^r, R_a^{r-1} суть касательные пространства к многообразиям M^k, M^{k-1}, P^r, P^{r-1} в точке a, то

$$R_a^{r-1} = R_a^r \cap R_a^{k-1}. \tag{12}$$

Здесь пространства R_a^{k-1}, R_a^r, R_a^{r-1} рассматриваются как подпространства пространства R_a^k (см. п. «C» и «E»).

Для доказательства того, что P^r есть r-мерное многообразие и для внесения в него дифференцируемости изменим, если это необходимо, нумерацию координат так, чтобы отличным от нуля был якобиан $\left| \frac{\partial \psi^j(a)}{\partial x^i} \right|$, $j = 1, \ldots, k-r$; $i = r+1, \ldots, k$, причем в случае краевой точки можно не менять номер координаты x^1. Тогда система (10) будет однозначно разрешима относительно переменных $x^{r+1}, \ldots, x^k$:

$$x^i = f^i(x^1, \ldots, x^r), \quad i = r+1, \ldots, k. \tag{13}$$

В случае краевой точки координата x^1 входит в число независимых переменных. Функции f^i определены и m раз непрерывно дифференцируемы в некоторой области W^r полупространства E_0^r переменных $x^1, \ldots, x^r$ и определяют гомеоморфное отображение этой области на некоторую окрестность U^r точки a в P^r. Этим доказано, что P^r есть r-мерное многообразие. Дифференцируемость в окрестность U^r вносится координатами $x^1, \ldots, x^r$.

Естественное включение многообразия P^r в многообразие M^k задается в U^r соотношениями

$$x^i = x^i,\ i = 1, \ldots, r;\ x^i = f^i(x^1, \ldots, x^r), \quad i = r+1, \ldots, k, \tag{14}$$

где параметры $x^1, \ldots, x^r$ справа считаются координатами в U^r, а параметры $x^1, \ldots, x^k$ слева — координатами в U^k. Соотношение (11) очевидно. Пусть теперь $a \in P^{r-1}$; докажем соотношение (12). Локальным координатам X соответствует в R_a^k некоторый базис $e_1, \ldots, e_k$; базис пространства R_a^{k-1} состоит из векторов $e_2, \ldots, e_k$; базис пространства R_a^r состоит из векторов $e_i + \sum\limits_{j=r+1}^{k} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} e^j$, $i = 1, \ldots, r$, а базис пространства R_a^{r-1} — из тех же векторов, кроме первого. Рассматривая эти базисы, мы легко убеждаемся в правильности соотношения (12).

Для доказательства согласованности координатных систем, введенных в P^r, рассмотрим, наряду с точкой a, точку $b \in P^r$ с локальными координатами Y и окрестностями V^k и V^r, аналогичными окрестностям U^k и U^r. Соотношения, аналогичные (13), пусть будут:

$$y^i = g^i(y^1, \ldots, y^r), \quad i = r+1, \ldots, k. \tag{15}$$

Допустим, что U^r и V^r пересекаются; тогда U^k и V^k также пересекаются, и пусть

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^k), \quad i = 1, \ldots, k; \tag{16}$$

$$x^i = x^i(y^1, \ldots, y^k), \quad i = 1, \ldots, k \tag{17}$$

суть переходы от X к Y и обратно. Подставляя $x^{r+1}, \ldots, x^k$ из (13) в (16), получаем для первых r переменных y:

$$y^i = \overset{*}{y}{}^i(x^1, \ldots, x^r), \quad i = 1, \ldots, r. \tag{18}$$

Точно так же, подставляя $y^{r+1}, \ldots, y^k$ из (15) в (17), получаем

$$x^i = \overset{*}{x}{}^i(y^1, \ldots, y^r), \quad i = 1, \ldots, r. \tag{19}$$

Преобразования (18) и (19) m раз непрерывно дифференцируемы, и так как они взаимно обратны, то якобианы их также взаимно обратны и потому отличны от нуля.

Итак, предложение «F» полностью доказано.

G) Пусть M^k — гладкое многообразие класса $m \geqslant 2$ и L^{2k} — множество всех касательных к нему векторов (см. п. «С»), т. е. пар вида (a, u), где $a \in M^k$, $u \in R^k_a$. Множество L^{2k} естественным образом оказывается гладким $2k$-мерным многообразием класса $m - 1$ на основании следующей конструкции. Пусть U^k — некоторая окрестность в многообразии M^k с локальной системой координат X. Через U^{2k} обозначим множество всех пар $(x, u) \in L^{2k}$, удовлетворяющих условию $x \in U^k$. Множество U^{2k} принимают за окрестность в L^{2k}, а отмеченную систему координат в ней вводят следующим образом. Пусть $x^1, \ldots, x^k$ — координаты точки x в системе X, и $u^1, \ldots, u^k$ — компоненты вектора u относительно локальной системы X; тогда за координаты пары (x, u) принимают числа

$$x^1, \ldots, x^k, u^1, \ldots, u^k. \tag{20}$$

Если V^k — окрестность в M^k (быть может совпадающая с U^k) с отмеченной системой Y, для которой $x \in V^k$, и координаты пары (x, u) в окрестности V^{2k}, порожденные системой Y, суть

$$y^1, \ldots, y^k, v^1, \ldots, v^k, \tag{21}$$

то переход от координат (20) к координатам (21) дается, очевидно, соотношениями

$$y^j = y^j(x^1, \ldots, x^k), \ j = 1, \ldots, k; \tag{22}$$

$$v^j = \sum_{i=1} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} u^i, \ j = 1, \ldots, k, \tag{23}$$

[см. (9)]. Соотношения эти $m - 1$ раз непрерывно дифференцируемы и имеют якобиан, равный $\left| \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right|^2$, который, очевидно, положителен. Так как окрестности типа U^{2k} покрывают L^{2k}, то описанная конструкция превращает L^{2k} в гладкое многообразие класса $m - 1$.

H) Пусть R^k — векторное пространство размерности k. Лучом u^* в R^k, проходящим через вектор $u \neq 0$, будем называть совокупность всех векторов tu, где t — положительное действительное число. Фиксируем в R^k некоторый базис и обозначим через R^{k-1}_i координатную гиперплоскость $u^i = 0$. Если луч u^* не лежит в R^{k-1}_i, то на нем существует единственный вектор u, удовлетворяющий условию $|u^i| = 1$; этот вектор будем называть *основным* относительно плоскости R^{k-1}_i. Совокупность всех лучей, для которых основной вектор относительно R^{k-1} удовлетворяет условию $u^i = +1$ или $u^i = -1$, будем обозначать через U_{i1}^{k-1} или соответственно через U_{i2}^{k-1}. За координаты луча $u^* \in U_{ip}^{k-1}$, $p = 1, 2$, примем компоненты $u^1, \dots, u^{i-1}, u^{i+1}, \dots, u^k$ основного вектора u этого луча относительно плоскости R_i^{k-1}. Так как система всех множеств U_{ip}^{k-1} покрывает пространство S^{k-1} всех лучей, то этим S^{k-1} превращается в гладкое многообразие, очевидно, гомеоморфное $(r-1)$-мерной сфере.

I) Пусть M^k — гладкое многообразие класса m. *Многообразием его линейных элементов* называется множество L^{2k-1} всех пар вида (x, u^*), где $x \in M^k$, а u^* — луч пространства R_x^k, с естественной дифференцируемостью, введенной в нем на основании следующей конструкции. Пусть U^k — некоторая окрестность в M^k с отмеченной системой X. В векторном пространстве R_x^k, касательном к M^k в точке $x \in U^k$, определен базис, соответствующий локальной системе X; таким образом, в множестве S_x^{k-1} лучей пространства R_x^k определены области $U_{ip,x}^{k-1}$ (см. п. «Н») с координатными системами в них. Через U_{ip}^{2k-1} обозначим совокупность всех пар вида (x, u^*), удовлетворяющих условию $x \in U^k$, $u^* \in U_{ip,x}^{k-1}$, а за координаты пары (x, u^*) в U_{ip}^{2k-1} примем числа

$$x^1, \dots, x^k, u^1, \dots, u^{i-1}, u^{i+1}, \dots, u^k, \tag{24}$$

где $x^1, \dots, x^k$ — координаты точки x в системе X, а $u^1, \dots, u^{i-1}$, $u^{i+1}, \dots, u^k$ — координаты луча u^* в $U_{ip,x}^{k-1}$. Легко проверяется, что система окрестностей U_{ip}^{2k-1} покрывает L^{2k-1} и что введенные в этих окрестностях системы координат согласованы между собой, так что L^{2k-1} есть $(2k-1)$-мерное гладкое многообразие класса $m-1$.

K) Пусть M^k и N^l — два гладких класса m многообразия, причем M^k не имеет края. Прямое произведение $P^{k+l} = M^k \times N^l$, т. е. множество всех пар (x, y), где $x \in M^k$, $y \in N^l$, естественным образом является гладким многообразием класса m на основании следующей конструкции. Пусть U^k и V^l — произвольные координатные окрестности в многообразиях M^k и N^l, а X и Y — системы координат в них. Множество $U^k \times V^l \subset M^k \times N^l$ примем за координатную окрестность в многообразии P^{k+l}, считая координатами точки $(x, y) \in U^k \times V^l$ числа $x^1, \dots, x^k$, $y^1, \dots, y^l$, где $x^1, \dots, x^k$ — координаты точки x в системе X, а $y^1, \dots, y^l$ — координаты точки y в системе Y. Непосредственно проверяется, что построенная таким образом система координатных окрестностей определяет в P^{k+l} гладкость класса m. Если M^k и N^l — ориентированные многообразия, а системы X и Y соответствуют ориентациям этих многообразий, то будем считать, что система X, Y соответствует ориентации многообразия P^{k+l}. Таким образом, прямое произведение ориентированных многообразий получает естественную ориентацию. Если N^{l-1} — край многообразия N^l, то краем многообразия $M^k \times N^l$ служит многообразие $M^k \times N^{l-1}$.

L) Пусть E^{k+l} — векторное пространство размерности $k+l$, и $G(k, l)$ — множество всех его k-мерных векторных подпространств. Множество $G(k, l)$ является гладким (даже аналитическим) многообразием на основании следующей конструкции. Пусть $E_0^k \in G(k, l)$, а $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$ — такой базис пространства E^{k+l}, что векторы $e_1, \ldots, e_k$ лежат в E_0^k. Линейную оболочку векторов $f_1, \ldots, f_l$ обозначим через E^l. Обозначим через U^{kl} множество всех таких векторных подпространств $E^k \in G(k, l)$, пересечение которых с E^l содержит лишь нуль. Если $E^k \in U^{kl}$, то существует базис $e_1', \ldots, e_k'$ векторного пространства E^k, определяемый соотношениями

$$e_i' = e_i + \sum_{j=1}^{l} x_i^j f_j, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

где $\| x_i^j \|$ — действительная числовая матрица. Элементы x_i^j, $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, l$ этой матрицы мы примем за координаты элемента E^k в координатной окрестности U^{kl}. Непосредственно проверяется, что совокупность координатных окрестностей вида U^{kl} определяет в $G(k,l)$ аналитичность, так что $G(k, l)$ оказывается аналитическим многообразием размерности kl.

§ 2. ВЛОЖЕНИЕ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ В ЭВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

В настоящем параграфе будет показано, что компактное k-мерное гладкое многообразие класса $m \geqslant 2$ может быть регулярно и гомеоморфно отображено в эвклидово пространство R^{2k+1} размерности $2k+1$ и регулярно — в эвклидово пространство R^{2k} размерности $2k$, причем класс гладкости отображения равен m. Предложения эти в несколько более сильной форме, именно для $m \geqslant 1$ и без требования компактности, впервые были доказаны Уитнеем [5]; приводимое здесь доказательство значительно проще.

В доказательстве существенную роль играет весьма элементарная теорема 1.

Гладкое отображение многообразия в многообразие большей размерности

Теорема 1. *Пусть M^k и N^l — два гладких многообразия размерностей k и l, где $k < l$, и φ — гладкое класса 1 отображение многообразия M^k в многообразие N^l. Оказывается, что множество $\varphi(M^k)$ имеет в N^l первую категорию, т. е. может быть представлено как сумма счетного числа нигде не плотных в N^l множеств. В част-*

ности, если многообразие M^k компактно, то множество $\varphi(M^k)$ также компактно, и потому $N^l \setminus \varphi(M^k)$ есть всюду плотная в N^l область.

Доказательство. Пусть $a \in M^k$, $b = \varphi(a)$, V_b^l — некоторая координатная окрестность точки b в N^l и U_a^k — такая координатная окрестность точки a в M^k, что $\varphi(U_a^k) \subset V_b^l$. Выберем такие окрестности U_{a1}^k и U_{a2}^k точки a в M^k, что $\overline{U}_{a1}^k \subset U_a^k$, $\overline{U}_{a2}^k \subset U_{a1}$ и что множество $\overline{U}_{a1}^k$ компактно. Области U_{a2}^k, $a \in M^k$ покрывают многообразие M^k. Из этого покрытия можно выбрать счетное, и потому для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что при произвольном выборе точки a из M^k множество $\varphi(\overline{U}_{a2}^k)$ нигде не плотно в V_b^l. Так как область U_a^k есть гомеоморфный образ области эвклидова полупространства E_0^k, то мы просто будем считать, что U_{a2}^k есть область полупространства E_0^k. Точно так же будем считать, что V_b^l есть область эвклидова полупространства E_0^l. При такой трактовке отображение φ есть гладкое класса 1 отображение области U_a^k в эвклидово пространство E^l, и нам достаточно показать, что множество $\varphi(\overline{U}_{a2}^k)$ нигде не плотно в E^l. Докажем это.

Из гладкости отображения φ и компактности множества $\overline{U}_{a1}^k$ непосредственно вытекает существование такой положительной константы c, что для двух произвольных точек x и x' из $\overline{U}_{a1}^k$ выполнено неравенство

$$\rho(\varphi(x), \varphi(x')) < c\rho(x, x'). \tag{1}$$

Выберем некоторый ε-кубильяж эвклидова полупространства E_0^k, т. е. разобьем полупространство E_0^k правильным образом на кубы со стороной длины ε. Совокупность всех замкнутых кубов выбранного кубильяжа, пересекающихся с $\overline{U}_{a2}^k$, обозначим через Ω. Так как множество $\overline{U}_{a_2}^k$ компактно и потому может быть включено в куб достаточно большого размера, то число кубов совокупности Ω не превосходит числа $\frac{c_1}{\varepsilon^k}$, где c_1 — некоторая положительная константа, не зависящая от ε. Пусть δ — расстояние между множествами $E_0^k \setminus U_{a1}^k$ и $\overline{U}_{a2}^k$. Предположим, что диагональ $\varepsilon\sqrt{k}$ каждого куба совокупности Ω меньше, чем δ. Тогда каждый куб K_i совокупности Ω лежит в области U_{a1}^k, и в силу неравенства (1) множество $\varphi(K_i)$ содержится в некотором кубе L_i пространства E^l со стороной $c\sqrt{\varepsilon}\cdot\varepsilon$, объем которого равен $c^l \cdot k^{l/2} \cdot \varepsilon^l$. Таким образом, все множество $\varphi(\overline{U}_{a2}^k)$ содержится в сумме кубов L_i, число которых не превосходит $\frac{c_1}{\varepsilon^k}$, а потому объем всего множества $\varphi(\overline{U}_{a2}^k)$ не превосходит числа $c_1 c^l k^{l/2} \cdot \varepsilon^{l-k}$. Так как ε произвольно мало, то из сказанного следует, что множество $\varphi(\overline{U}_{a2}^k)$ не содержит области, а будучи компактным, оно должно быть поэтому нигде не плотным в E^l.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Операция проектирования в эвклидовом пространстве

В дальнейшем существенную роль будет играть операция проектирования. Пусть C^r — векторное пространство, и B^q — его векторное подпространство. Рассматривая пространство C^r как аддитивную группу, а B^q — как ее подгруппу, мы получаем разбиение пространства C^r на классы смежности по подпространству B^q, причем классы смежности сами образуют векторное пространство A^p размерности $p = r - q$. Ставя в соответствие каждому элементу $x \in C^r$ содержащий его класс смежности $\pi(x) \in A^p$, мы получаем линейное отображение π пространства C^r на пространство A^p, называемое *проектированием* вдоль проектирующего подпространства B^q. Более наглядно пространство A^p можно реализовать как линейное подпространство размерности p пространства C^r, пересекающееся с B^q лишь в нуле; тогда операция π превращается в обычное проектирование. Если пространство C^r эвклидово, то, определив B^q как ортогональное дополнение заданного подпространства $A^p \subset C^r$, мы получим ортогональное проектирование π пространства C^r на подпространство A^p.

A) Пусть φ — гладкое отображение гладкого многообразия M^k в векторное пространство C^r, регулярное в точке $a \in M^k$ и π — проектирование пространства C^r вдоль одномерного подпространства B^1 на пространство A^{r-1}. Оказывается, что отображение $\pi\varphi$ многообразия M^k в A^{r-1} тогда и только тогда не регулярно в точке a (см. § 1, п. «D»), когда прямая $\varphi(a) + B^1$, проходящая через $\varphi(a)$ параллельно B^1, касается $\varphi(M^k)$ в точке $\varphi(a)$.

Для доказательства выберем в окрестности точки a какие-нибудь локальные координаты $x^1, \ldots, x^k$, а в C^r — такие прямолинейные координаты $y^1, \ldots, y^r$, что последняя ось совпадает с B^1. В выбранных координатах отображение φ получает запись: $y^j = \varphi^j(x^1, \ldots, x^k)$, $j = 1, \ldots, r$, причем ранг матрицы $\left\| \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} \right\|$, $j = 1, \ldots, r$; $i = 1, \ldots, k$ в точке a согласно предположению регулярности равен k. Каждому вектору u на M^k в точке a соответствует вектор $v = \varphi_a(u) \in C^r$, касательный к $\varphi(M^k)$ в точке $\varphi(a)$ с компонентами $v^1, \ldots, v^r$ [определяемый соотношениями (9) § 1, $l = r$]. Если теперь отображение $\pi\varphi$ не регулярно в точке a, то ранг матрицы $\left\| \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} \right\|$, $j = 1, \ldots, r-1$; $i = 1, \ldots, k$, меньше k, и потому существует такой вектор $u \neq 0$, что для вектора $v = \varphi_a(u)$ имеем: $v^1 = \ldots = v^{r-1} = 0$, $v^r \neq 0$, а это значит, что $v \in B^1$. Если, напротив, существует вектор $v = \varphi_a(u) \neq 0$, принадлежащий к B^1, то ранг матрицы $\left\| \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} \right\|$, $j = 1, \ldots, r-1$; $i = 1, \ldots, k$ меньше k, т. е. отображение $\pi\varphi$ в точке a не регулярно.

B) Пусть φ — гладкое класса 2 регулярное отображение гладкого многообразия M^k в векторное пространство C^r размерности $r > 2k$ и

$B^q \in G(q, r-q)$ — проектирующее подпространство размерности $q \leqslant r-2k$ пространства C^r на пространство A^p. Проектирование обозначим через π. Через Ω'_q обозначим множество всех таких проектирующих подпространств B^q, для которых отображение $\pi\varphi$ не регулярно. Оказывается, что множество Ω'_q имеет первую категорию в многообразии $G(q, r-q)$ всех проектирующих направлений.

Пусть (x, u^*) — произвольный линейный элемент многообразия M^k (см. § 1, п. «I») и u — некоторый отличный от нуля вектор луча u^*. Вектору u, в силу соотношения (9) § 1, соответствует вектор $v = \varphi_x(u) \neq 0$. Луч v^* пространства C^r, определяемый вектором v, зависит лишь от линейного элемента (x, u^*) и мы полагаем $v^* = \Phi(x, u^*)$. Легко проверяется, что отображение Φ многообразия L^{2k-1} (см. § 1, п. «I») в многообразие S^{r-1} (см. § 1, п. «H») имеет класс гладкости, равный единице, и потому $\Phi(L^{2k-1})$ имеет в S^{r-1} первую категорию (так как $r-1 > 2k-1$, см. теорему 1). Отсюда, в силу «А», следует «В» для $q=1$.

Последовательное применение этого построения приводит нас к доказательству утверждения «В» и для произвольного $q \leqslant r-2k$.

C) Пусть φ — гладкое класса 1 взаимно однозначное отображение гладкого многообразия M^k в векторное пространство C^r и $B^q \in G(q, r-q)$ — проектирующее подпространство размерности $q < r-2k-1$. Проектирование обозначим через π. Через Ω''_q обозначим множество всех таких проектирующих подпространств B^q, что отображение $\pi\varphi$ не является взаимно однозначным. Оказывается, что Ω''_q имеет первую категорию в многообразии $G(q, r-q)$.

Пусть x и y — две различные произвольные точки многообразия M^k. Через $\Phi'(x, y)$ обозначим луч, составленный из всех векторов вида $t(\varphi(y) - \varphi(x))$, где t — положительное число. Таким образом, мы имеем отображение Φ' многообразия M^{2k} всех упорядоченных пар (x, y), $x \neq y$ в многообразие S^{r-1} всех лучей пространства C^r. В многообразии M^{2k} естественным образом вводится дифференцируемость, и легко проверяется, что отображение Φ' является гладким класса 1. Таким образом, $\Phi'(M^{2k})$ оказывается множеством первой категории в S^{r-1} (см. теорему 1), из чего следует «С» для $q=1$. Применяя эту конструкцию надлежащее число раз, мы получаем доказательство утверждения «С» и для произвольного $q \leqslant r-2k-1$.

Из «В» и «С» непосредственно следует.

D) Пусть φ — гладкое, класса 2, взаимно однозначное и регулярное отображение гладкого многообразия M^k в векторное пространство C^r и $B^q \in G(q, r-q)$ — проектирующее подпространство размерности $q < r-2k-1$. Проектирование обозначим через π, а через Ω_q — множество всех таких проектирующих подпространств B^q, что отображение $\pi\varphi$ не является одновременно взаимно однозначным и регулярным.

Так как $\Omega_q = \Omega'_q \cup \Omega''_q$, то Ω_q имеет первую категорию в многообразии $G(q, r-q)$.

Теорема вложения

Е) Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — гладкие, класса m, отображения гладкого многообразия M^k в векторные пространства соответственно $C_1, \ldots, C_n$. Обозначим через C прямую сумму пространств $C_1, \ldots, C_n$, составленную из всех систем $[u_1, \ldots, u_n]$, где $u_i \in C_i$. Определим прямую сумму φ отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, положив $\varphi(x) = [\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$, $x \in M^k$. Легко видеть, что φ есть гладкое, класса m, отображение многообразия M^k в C. Легко проверяется, что если хотя бы одно из отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ регулярно в точке $a \in M^k$, то отображение φ также регулярно в точке a. Далее, легко проверяется, что если две точки a и b из M^k переводятся в различные точки хотя бы одним из отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, то они переводятся в различные точки и отображением φ.

Теорема 2. *Пусть M^k — компактное гладкое, класса $m \geqslant 2$, многообразие. Существует гладкое, класса m, вложение многообразия M^k в эвклидово пространство конечной размерности.*

Доказательство. Обозначим через $\varkappa(t)$ какую-нибудь действительную функцию действительного переменного t, дифференцируемую любое число раз и удовлетворяющую следующим условиям:

$$\varkappa(t) = 1 \quad \text{при} \quad |t| \leqslant \frac{1}{2}; \qquad \varkappa(t) = 0 \ \text{при} \ |t| \geqslant 1;$$

при $-1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{2}$ функция $\varkappa(t)$ монотонно возрастает; при $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$ функция $\varkappa(t)$ монотонно убывает. Такую функцию легко построить Положим

$$\varkappa^i(t^1, t^2, \ldots, t^k) = t^i \cdot \varkappa(t^1) \cdot \varkappa(t^2) \ldots \varkappa(t^k), \qquad i = 1, \ldots, k,$$

$$\varkappa^{k+1}(t^1, t^2, \ldots, t^k) = \varkappa(t^1) \cdot \varkappa(t^2) \ldots \varkappa(t^k).$$

Пусть R^k — эвклидово пространство с декартовыми координатами $t^1, \ldots, t^k$ и R^{k+1} — эвклидово пространство с декартовыми координатами $y^1, \ldots, y^{k+1}$. Обозначим через Q куб пространства R^k, определяемый неравенствами $|t^i| < 2$, через Q' — куб того же пространства, определяемый неравенствами $|t^i| < 1$, и через Q'' — куб, определяемый неравенствами $|t^i| < \frac{1}{2}$. Через Q_0 обозначим полукуб, высекаемый из куба Q неравенством $t^1 \leqslant 0$. Зададим теперь отображение пространства R^k в пространство R^{k+1} соотношениями

$$y^j = \varkappa^j(t^1, t^2, \ldots, t^k), \quad j = 1, \ldots, k+1. \tag{2}$$

Легко проверяется, что отображение это любое число раз дифференцируемо, переводит множество $R^k \setminus Q'$ в начало координат пространства

R^{k+1}, куб Q' отображает непрерывно и взаимно однозначно и, наконец, куб Q'' — регулярно.

Пусть теперь a — произвольная точка из M^k, U_a^k — некоторая ее координатная окрестность с системой координат X, имеющей начало в точке a; наконец, пусть ε — настолько малое положительное число, что при отображении

$$t^i = \frac{x^i}{\varepsilon}, \quad i = 1, \ldots, k \tag{3}$$

окрестности U_a^k в пространство R^k образ этой окрестности покрывает весь куб Q, если a есть внутренняя точка M^k, и весь полукуб Q_0, если a есть краевая точка M^k. Прообразы кубов Q' и Q'' при этом отображении обозначим соответственно через Q'_a и Q''_a.

Определим отображение φ_a многообразия M^k в эвклидово пространство R^{k+1}, положив

$$y^j = \varkappa^j\left(\frac{x^1}{\varepsilon}, \frac{x^2}{\varepsilon}, \ldots, \frac{x^k}{\varepsilon}\right)$$

для точки $x \in U_a^k$ с координатами $x^1, \ldots, x^k$ и $y^j = 0$ — для точки $x \in M^k \setminus U_a^k$. Легко проверяется, что φ_a есть гладкое отображение класса m многообразия M^k в R^{k+1}, гомеоморфное на Q'_a и регулярное на Q''_a.

Выбирая из окрестностей Q''_a конечное покрытие $Q''_{a_1}, \ldots, Q''_{a_n}$ многообразия M^k и составляя прямую сумму соответствующих этим кубам отображений $\varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_n}$ (см. п. «Е»), мы получим искомое отображение φ многообразия M^k в конечномерное эвклидово пространство.

Из доказанных предложений объявленная в начале параграфа теорема вытекает непосредственно. В самом деле, многообразие M^k можно регулярно и гомеоморфно включить в векторное пространство C^r достаточно высокой размерности (см. теорему 2). Далее, в пространстве C^r существует такое проектирующее направление B^{r-2k-1}, что получаемая проекция многообразия M^k в пространство A^{2k+1} регулярна и гомеоморфна (см. п. «D»). Точно так же в пространстве C^r существует такое проектирующее направление B^{r-2k}, что проекция многообразия M^k в пространство A^{2k} регулярна (см. п. «В»). Мы докажем здесь более сильную теорему 3, утверждающую, что для любого гладкого отображения многообразия M^k в эвклидово пространство C^{2k+1} существует сколь угодно близкое к нему регулярное и гомеоморфное отображение этого многообразия, а для любого гладкого отображения многообразия M^k в эвклидово пространство C^{2k} существует сколь угодно близкое к нему регулярное отображение. Для точной формулировки теоремы 3 необходимо ввести понятие близости класса m отображений, учитывающее все производные до порядка m включительно.

Заметим прежде всего, что если f есть гладкое отображение области W^k эвклидова полупространства E_0^k в векторное пространство C^r, то частные производные векторной функции $f(x)=f(x^1, \ldots, x^k)$ являются векторами пространства C^r.

F) Пусть M^k — гладкое класса m компактное многообразие, E^l — векторное пространство и P — множество всех гладких класса m отображений многообразия M^k в пространство E^l. Введем в множестве P топологию при помощи задания в нем метрики, зависящей от случайного выбора некоторых элементов построения. Пусть U_s, V_s; $s=1,\ldots, n$ — такая конечная совокупность координатных областей многообразия M^k, что области U_s; $s=1, \ldots, n$ покрывают многообразие M^k и выполнены включения $\overline{U}_s \subset V_s$; $s=1, \ldots, n$, причем в каждой области V_s выбрана некоторая система координат X_s. Пусть, далее, Y — некоторая декартова система координат пространства E^l. Определим расстояние $\rho(f, g)$ между двумя отображениями f и g из P, зависящее от выбора областей U_s, V_s, координатных систем X_s; $s=1, \ldots, n$, и координатной системы Y. Для этого запишем в координатной форме отображения f и g области V_s, положив

$$y^j=f_s^j(x)=f_s^j(x^1, \ldots, x^k), \tag{4}$$

$$y^j=g_s^j(x)=g_s^j(x^1, \ldots, x^k). \tag{5}$$

Пусть $i_1, \ldots, i_k$ — набор целых неотрицательных чисел, сумма которых не превосходит m. Положим

$$\omega_s^j(x; i_1, \ldots i_k)=\left|\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k} f_s^j(x)}{(\partial x^1)^{i_1} \cdot \ldots \quad (\partial x^k)^{i_k}}\right|.$$

Максимум функции $\omega_s^j(x; i_1, \ldots, i_k)$ переменного x при $x \in \overline{U}_s$ обозначим через $\omega_s^j(i_1, \ldots, i_k)$, а наибольшее из всех чисел $\omega_s^j(i_1, \ldots i_k)$, когда $i_1, i_2, \ldots, i_k, p, j$ пробегают все допустимые значения, примем за расстояние $\rho(f, g)$ между отображениями f и g. Легко проверяется, что топология пространства P не зависит от случайного выбора системы областей U_s, V_s; $s=1, \ldots, n$, и координатных систем X_s; $s=1,\ldots,n$; Y. Топологическое пространство P называется *пространством отображений класса m* многообразия M^k в пространство E^l. Утверждение, что в любой близости класса m к отображению f имеется отображение, обладающее некоторым свойством A, означает, что в любой окрестности точки f пространства P имеется отображение, обладающее свойством A.

Теорема 3. *Пусть M^k — гладкое, класса $m \geqslant 2$, k-мерное компактное многообразие, A^p — векторное пространство размерности p и P — пространство отображений класса m многообразия M^k в пространство A^p. Совокупность всех регулярных отображений из* *множества P обозначим через* Π', *а совокупность всех регулярных и одновременно гомеоморфных отображений из множества P — через* Π. *Оказывается, что множества* Π' *и* Π *всегда являются областями в пространстве P. Далее, если $p \geqslant 2k$, то область* Π' *всюду плотна в P, а если $p \geqslant 2k+1$, то область* Π *всюду плотна в P.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что множества Π' и Π всюду плотны в пространстве P при значениях p, указанных в теореме. Пусть $f \in P$, а e — гладкое класса m регулярное и гомеоморфное отображение многообразия M^k в векторное пространство B^q достаточно высокой размерности (см. теорему 2). Прямую сумму векторных пространств A^p и B^q обозначим через C^r, причем будем считать пространства A^p и B^q линейными подпространствами пространства C^r. Отображение h, являющееся прямой суммой отображений f и e (см. п. «E»), регулярно и гомеоморфно, и его проекция на A^p по направлению B^q совпадает с отображением f. В силу предложений «B» и «D» в любой близости к направлению проектирования B^q существует такое направление проектирования B_1^q, что проекция g отображения h регулярна при $p \geqslant 2k$ и одновременно регулярна и гомеоморфна при $p \geqslant 2k+1$. Таким образом, в любой близости к заданному отображению f существует отображение g, обладающее нужными свойствами.

Покажем, что Π' есть область. Пусть $f \in \Pi'$. Так как отображение f регулярно в точке $x \in U_s$, то ранг матрицы $\left\| \frac{\partial f_s^j}{\partial x^i} \right\|$ в этой точке равен k (см. п. «F»). Из этого следует, что ранг матрицы, близкой к матрице $\left\| \frac{\partial f_s^j}{\partial x^i} \right\|$, также равен k. Таким образом, существует настолько малое положительное число ε', что при $\rho(f, g) < \varepsilon'$ отображение g регулярно в точке x. Так как первые производные функций $f_s^j(x)$ непрерывны, а множества $\overline{U}_s$ компактны и конечное число их покрывает многообразие M^k, то существует настолько малое положительное число ε, что при $\rho(f, g) < \varepsilon$ отображение g регулярно в каждой точке $x \in M^k$.

Для доказательства того, что Π есть область, отметим предварительно следующий факт:

а) В множестве Q всех линейных отображений эвклидова векторного пространства E^k в эвклидово векторное пространство A^p введем метрику, исходя из некоторых координатных систем X и Y в этих пространствах. Пусть φ и ψ — элементы из Q с координатной записью:

$$y^j = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i^j x^i, \quad j = 1, \ldots, p;$$

$$y^j = \sum_{i=1}^{k} \psi_i^j x^i, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Расстояние $\rho(\varphi, \psi)$ определим как наибольшее из чисел $|\varphi_j^i - \psi_j^i|$. Оказывается, что для каждого компактного множества F невырожденных отображений существует настолько малое положительное число δ, что при $\rho(F, \psi) < \delta$ имеем

$$|\psi(x)| > \delta \cdot |x|,$$

где x — произвольный вектор из E^k.

Предложение это легко доказывается от противного из соображений непрерывности.

Пусть $f \in \Pi$. Оказывается, что существуют такие малые числа δ и ε, что при $\rho(f, g) < \varepsilon$ (см. п. «F») имеет место неравенство

$$\rho(g(a), g(x)) \geqslant \delta \rho(f(a), f(x)), \tag{6}$$

где a и x — две произвольные точки из M^k. Действительно, когда $\rho(f(a), f(x)) < \alpha$, где α — некоторая положительная константа, отображения f и g вблизи точки a достаточно хорошо изображаются при помощи линейных и притом равномерно относительно $a \in M^k$. В этом случае неравенство (6) легко следует из предложения «а». В случае же, когда $\rho(f(a), f(x)) \geqslant \alpha$ неравенство (6) вытекает при достаточно малом ε из взаимной однозначности отображения f. Из неравенства (6) и взаимной однозначности отображения f вытекает взаимная однозначность любого достаточно близкого к f отображения g.

Итак, теорема 3 полностью доказана.

§ 3. НЕПРАВИЛЬНЫЕ ТОЧКИ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Напомним прежде всего определение неправильной точки отображения (см. § 1, п. «D»). Пусть φ — гладкое отображение многообразия M^k в многообразие N^l. Точка a многообразия M^k называется неправильной точкой отображения φ, если функциональная матрица отображения φ в точке a имеет ранг, меньший чем l. Точка b многообразия N^l называется неправильной точкой отображения φ, если полный прообраз $\varphi^{-1}(b)$ этой точки содержит хотя бы одну неправильную точку $a \in M^k$ отображения φ. Таким образом, следут различать неправильные точки отображения φ в многообразии M^k и неправильные точки отображения φ в многообразии N^l. Если F есть множество всех неправильных точек отображения φ в многообразии M^k, то $\varphi(F)$ есть множество всех неправильных точек отображения φ в многообразии N^l. Нижеследующая теорема 4, принадлежащая Дубовицкому [6], утверждает, что множество $\varphi(F)$ имеет в многообразии N^l первую категорию, т. е. может быть представлено как счетная сумма компактных нигде не плотных в N^l множеств. Из этого следует, что множество $N^l \setminus \varphi(F)$ всех правильных точек отображения φ в многообразии N^l имеет вторую категорию в N^l, т. е. «достаточно массивно» и уж, во всяком случае, всюду плотно. В несколько неопределенных терминах этот факт можно сформулировать, сказав, что точки многообразия N^l, вообще говоря, правильны. Теорема 4 находит весьма важные применения в теории гладких многообразий; из нее можно вывести целый ряд результатов о том, что, вообще говоря, имеет место то или иное положение вещей. Для вывода каждого такого результата приходится надлежащим образом подбирать многообразия M^k и N^l и отображение φ. Выбор этот может быть описан при помощи нижеследующего весьма общего и потому несколько неопределенного предложения «А».

Приведение в общее положение

А) Пусть Q — некоторое гладкое многообразие и P — некоторая совокупность операций над ним, образующая также гладкое многообразие. При проведении операции $p \in P$ над многообразием Q некоторая точка $q \in Q$ может оказаться особой в некотором смысле, который должен быть точно разъяснен. Пара (p, q), $p \in P$, $q \in Q$ считается *отмеченной*, если точка q является особой в отношении операции p. Предполагается, что множество всех отмеченных пар (p, q) составляет гладкое подмногообразие M^k многообразия $P \times Q$ (см. § 1, пп. «К», «Е»). Каждой точке $(p, q) \in M^k$ ставится в соответствие точка $\varphi(p, q) = p$. Таким образом возникает отображение φ многообразия M^k в многообразие $N^l = P$. Если точка $p_0 \in P$ есть правильная точка отображения φ в многообразии $P = N^l$, то каждая точка $q \in Q$, особая относительно операции p_0, является в каком-то смысле *типичной*, а совокупность Q_0 всех точек q многообразия Q, особых относительно операции p_0, состоит из типичных особых точек.

Конструкция «А» находит многочисленные приложения, некоторые из которых будут указаны в § 4. Очень простое применение конструкции «А», имеющее иллюстративный характер, я привожу здесь в виде предложения «В».

В) Пусть A^r и B^s — два гладких подмногообразия векторного пространства E^n. Считают, что в точке $a \in A^r \cap B^s$ многообразия A^r и B^s находятся в *общем положении*, если касательные в этой точке к многообразиям A^r и B^s имеют пересечение размерности $r + s - n$. Считают, что многообразия A^r и B^s находятся в *общем положении*, если в каждой точке их пересечения они находятся в общем положении. Непосредственно проверяется, что если многообразия A^r и B^s находятся в общем положении, то их пересечение $A^r \cap B^s$ есть подмногообразие пространства E^n, имеющее размерность $r + s - n$. Пусть $p \in E^n$. Обозначим через A_p^r многообразие, состоящее из всех точек вида $p + x$, где $x \in A^r$. Таким образом, многообразие A_p^r получается из многообразия A^r сдвигом на вектор p. Оказывается, что множество всех векторов $p \in E^n$, для которых многообразия A_p^r и B^s находятся в общем положении, является множеством второй категории в E^n, так что существует произвольно малый сдвиг p, для которого многообразия A_p^r и B^s находятся в общем положении.

Для доказательства предложения В) воспользуемся конструкцией А), положив $Q = A^r \times B^s$, $P = E^n$ и считая, что точка $q = (a, b) \in A^r \times B^s$ является особой относительно операции $p \in E^n$, если $p + a = b$. Совокупность M^k всех отмеченных пар (p, q), где $p \in E^n$, $q = (a, b) \in A^r \times B^s$ определяется, таким образом, условием $p = b - a$, т. е. пара (p, q) определяется однозначно точкой $q = (a, b)$, и потому возникает естественный гладкий гомеоморфизм многообразий M^k и $A^r \times B^s$, в силу которого мы можем отождествить эти многообразия. Отображение φ многообразия $M^k = A^r \times B^s$ в многообразие $P = E^n$ определяется формулой $\varphi(a, b) = b - a$. Простые вычисления показывают, что точка $q = (a, b) \in M^k$ является правильной точкой отображения φ тогда и только тогда, когда многообразия A_{b-a}^r и B^s находятся в общем положении в их точке пересечения b. Таким образом, точка $p_0 \in E^n$ является правильной точкой отображения φ тогда и только тогда, когда многообразия $A_{p_0}^r$ и B^s находятся в общем положении. Из этого и из доказанной ниже теоремы 4 следует справедливость предложения «В».

Теорема Дубовицкого

В формулировке самого Дубовицкого класс гладкости m отображения φ многообразия M^k в многообразие N^l определяется формулой $m = k - l + 1$, а не формулой (1). В этом смысле теорема 4 слабее теоремы Дубовицкого. Так как точная оценка класса m гладкости в дальнейшем несущественна, то я привожу здесь ослабленную оценку (1), что дает возможность упростить доказательство.

Теорема 4. *Пусть M^k и N^l — два гладких многообразия положительных размерностей k и l, φ — гладкое класса*

$$m = m(k, l) = 2 + \frac{(k-l)(k-l+1)}{2} \tag{1}$$

отображение многообразия M^k в многообразие N^l. Оказывается, что множество всех неправильных точек отображения φ в многообразии N^l имеет первую категорию в N^l. В частности, если многообразие M^k компактно, то дополнение к этому множеству есть всюду плотная область многообразия N^l.

Доказательство. Рассмотрим сперва случай, когда многообразие M^k не имеет края. Пусть $a \in M^k$, $b = \varphi(a)$, V_b^l — некоторая координатная окрестность точки b в многообразии N^l и U_a^k — такая координатная окрестность точки a в многообразии M^k, что $\varphi(U_a^k) \subset V_b^l$. Выберем такие окрестности U_{a1}^k и U_{a2}^k точки a в M^k, что $\overline{U}_{a1}^k \subset U_a^k$,

$\overline{U}^k_{a2} \subset U^k_{a1}$, и что множество $\overline{U}^k_{a1}$ компактно. Области U^k_{a2}, $a \in M^k$ покрывают многообразие M^k. Из этого покрытия можно выбрать счетное, и потому для доказательства теоремы нам достаточно установить справедливость теоремы для отображения φ многообразия $U^k_{a2} \subset M^k$ в многообразие V^l_b. Так как область U^k_a есть гомеоморфный образ области эвклидова пространства E^k, то мы просто будем считать, что U^k_a есть область пространства E^k. Точно так же будем считать, что V^l_b есть область эвклидова пространства E^l. При такой трактовке отображение φ есть гладкое класса m отображение области U^k_a в эвклидово пространство E^l, и нам достаточно показать, что множество неправильных точек имеет первую категорию в E^l. Докажем это.

Точку a зафиксируем и в обозначениях ее окрестностей индекс a отбросим. Отображение φ области U^k эвклидова пространства E^k в эвклидово пространство E^l запишем в декартовых координатах:

$$y^j = \varphi^j(x) = \varphi^j(x^1, \ldots, x^k), \qquad j = 1, \ldots, l. \tag{2}$$

Здесь функции φ^j непрерывно дифференцируемы m раз. Через F_0 обозначим множество всех таких точек $x \in U^k_2$, в которых функциональная матрица $\left\| \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} \right\|$, $i = 1, \ldots k$; $j = 1, \ldots, l$, имеет ранг, меньший чем l. При $k < l$ теорема 4 превращается в уже доказанную теорему 1, и потому мы будем предполагать, что $k \geqslant l$. Положим $s = k - l + 1$. Функция φ^l в дальнейшем будет играть особую роль. Из (1) следует, что $m > s$, и потому функция φ^l непрерывно дифференцируема $s+1$ раз. Пусть r — натуральное число, не превосходящее s. Обозначим через F_r совокупность всех точек из F_0, в которых все частные производные порядков $1, 2, \ldots, r$ функции φ^l обращаются в нуль. Мы имеем очевидно:

$$F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_s.$$

Будет доказано, что образы всех множеств $F_0 \setminus F_1$, $F_1 \setminus F_2, \ldots$, $F_{s-1} \setminus F_s$, F_s при отображении φ имеют первую категорию в E^l. Этим будет доказано, что множество $\varphi(F_0)$ неправильных точек отображения φ также имеет первую категорию в E^l.

Займемся прежде всего множеством F_s. Разложение функции φ^l в ряд Тейлора в точке $p \in F_s$ не содержит членов степеней $1, 2, \ldots, s$. Из этого и из компактности множества $\overline{U}_1$ следует существование такой положительной константы c, что при $p \in F_s$, $x \in \overline{U}_1$ имеем:

$$|\varphi^l(x) - \varphi^l(p)| < c \cdot (\rho(p, x))^{s+1}. \tag{3}$$

Для остальных функций φ^j; $j = 1, \ldots, l-1$ имеют место неравенства:

$$|\varphi^j(x) - \varphi^j(p)| < c\rho(p, x), \tag{4}$$

вытекающие из непрерывности первых производных и компактности множества $\overline{U}_1$. Константа c в неравенствах (3) и (4) выбрана общей для всех функций φ^j; $j = 1, 2, \ldots, l$. Выберем в E^k некоторый ε — кубильяж, т. е. разобьем пространство E^k правильным образом на кубы со стороной длины ε, и обозначим через Ω совокупность всех замкнутых кубов выбранного кубильяжа, пересекающихся с F_s. Так как множество $\overline{F}_s$ компактно, то число кубов совокупности Ω не превосходит числа $\frac{c_1}{\varepsilon^k}$, где c_1 — положительная константа, не зависящая от ε. Пусть δ — расстояние между множествами $E^k \setminus U_1^k$ и $\overline{U}_2$. Будем считать, что $\varepsilon < \frac{\delta}{\sqrt{k}}$; тогда каждый куб K_q совокупности Ω содержится в U_1^k. Из этого, а также из того, что куб K_q содержит точку $p \in F_s$, и из неравенств (3), (4) следует, что множество $\varphi(K_q)$ содержится в некотором ортогональном параллелепипеде L_q пространства E^l, одна сторона которого равна $2c\sqrt{k} \cdot \varepsilon^{s+1}$, а остальные $l-1$ сторон равны $2c\sqrt{k} \cdot \varepsilon$. Объем параллелепипеда L_q равен $2^l c^l k^{l/2} \varepsilon^{l+s}$. Компактное множество $\varphi(\overline{F}_s)$ содержится в сумме замкнутых параллелепипедов L_q, число которых не превосходит $\frac{c_1}{\varepsilon^k}$. Из этого вытекает, что объем множества $\varphi(\overline{F}_s)$ не превосходит числа $c_2 \varepsilon^{l+s-k} = c_2 \varepsilon$ (c_2 не зависит от ε), а так как ε произвольно мало, то компактное множество $\varphi(\overline{F}_s)$ не содержит области пространства E^l, и поэтому нигде не плотно в E^l.

Если $k = 1$, то ввиду предположений $k \geqslant l \geqslant 1$ имеем $l = 1$, $s = 1$. В этом случае $F_s = F_0$, и из доказанного вытекает утверждение теоремы для $k = 1$. Это дает нам исходное утверждение для индукции по k. Мы предположим, что теорема верна в случае, когда отображаемое многообразие имеет размерность, меньшую чем k, и докажем ее для многообразия размерности k.

Докажем, что при $0 \leqslant r < s$ множество $\varphi(F_r \setminus F_{r+1})$ имеет первую категорию в пространстве E^l. Именно эта часть доказательства теоремы будет проведена индуктивно. Пусть $p \in F_r \setminus F_{r+1}$. Так как точка p не принадлежит множеству F_{r+1}, существует частная производная порядка $r+1$ функции φ^l, не обращающаяся в нуль в p. Значение этой производной в точке $x \in U^k$ обозначим через $\omega_1(x)$. Так как $\omega_1(x)$ есть производная порядка $r+1$, то $\omega_1(x) = \frac{\partial \omega(x)}{\partial x^i}$, где $\omega(x)$ есть производная порядка r при $r > 0$ и сама функция $\varphi^l(x)$ при $r = 0$. Для определенности будем считать, что $i = k$. Положим

$$z^i = x^i,\ i = 1, \ldots, k-1;\ z^k = \omega(x) = \omega(x^1, \ldots, x^k). \tag{5}$$

Из того, что $\frac{\partial \omega(p)}{\partial x^k} \neq 0$ следует, что функциональный определитель преобразования (5) отличен от нуля в точке p и потому это преобразование вводит в некоторой окрестности W_p^k точки p новые координаты $z^1, \ldots, z^k$. Будем считать, что W_p^k не пересекается с F_{r+1}, и выберем такую окрестность W_{p1}^k точки p, что ее замыкание $\overline{W}_{p1}^k$ компактно и содержится в W_p^k. Варьируя точку p, мы можем перекрыть множество $F_r \setminus F_{r+1}$ счетной системой окрестностей вида W_{p1}^k. Таким образом, для доказательства того, что множество $\varphi(F_r \setminus F_{r+1})$ имеет первую категорию, нам достаточно установить, что $\varphi(F_r \cap \overline{W}_{p1}^k)$ нигде не плотно в E^l. Займемся доказательством этого факта.

Зафиксируем точку p и опустим в обозначениях ее окрестностей индекс p. Подставляя в соотношение (2) вместо $x^1, \ldots, x^k$ их выражения через $z^1, \ldots, z^k$, мы получим запись отображения φ в координатах $z^1, \ldots, z^k$ для области W^k. Пусть эта запись будет:

$$y^j = \varphi^j(x) = \psi^j(z^1, \ldots, z^k). \tag{6}$$

Здесь $z^1, \ldots, z^k$ суть новые координаты точки x. Область W^k с координатами $z^1, \ldots, z^k$ будем рассматривать как гладкое многообразие. Из соотношения (5) следует, что отображение φ гладкого многообразия W^k в пространство E^l, заданное соотношениями (6), имеет класс гладкости $m(k, l) - r$. При $r = 0$ класс гладкости рассматриваемого отображения φ равен $m(k, l) = m(k-1, l-1)$ [см. (1)]. Выбирая при $r > 0$ наименее благоприятную оценку класса гладкости, получаемую при $r = s - 1 = k - l$, мы видим, что при $r > 0$ класс гладкости рассматриваемого отображения φ равен $m(k, l) - (k - l) = m(k-1, l)$ [см. (1)]. Множество $H \subset W^k$ всех неправильных точек отображения φ многообразия W^k определяется равенством $H = W^k \cap F_0$. Это следует из того, что преобразование (5) не вырождено в W^k. Обозначим через W_t^{k-1} подмногообразие многообразия W^k, выделяемое уравнением $z^k = t$. Отметим, что класс гладкости отображения многообразия W_t^{k-1} в E^l равен $m(k-1, l-1)$ при $r = 0$ и равен $m(k-1, l)$ при $r > 0$. Разберем теперь отдельно случай $r = 0$ и $r > 0$.

Пусть $r = 0$. Тогда $\omega(x) = \varphi^l(x) = z^k$. Таким образом, запись (6) отображения φ приобретает специальный вид:

$$y^j = \psi^j(z^1, \ldots, z^k); \quad j = 1, \ldots, l-1; \; y^l = z^k. \tag{7}$$

Обозначим через E_t^{l-1} линейное подпространство пространства E^l, определяемое уравнением $y^l = t$. Из соотношений (7) следует, что $\varphi(W_t^{k-1}) \subset E_t^{l-1}$. Обозначим через $H_t \subset W_t^{k-1}$ множество всех неправильных точек отображения φ многообразия W_t^{k-1} в пространство E_t^{l-1}. Из соотношений (7) следует, что $H_t = H \cap W_t^{k-1}$. Если бы множество $\varphi(F_0 \cap \overline{W}_1^k)$ содержало область, то существовало бы такое значение t, что пересечение $\varphi(F_0 \cap \overline{W}_1^k) \cap E_t^{l-1}$ содержало бы область относительно пространства E_t^{l-1}. Это, однако, невозможно, так как

$$\varphi(F_0 \cap \overline{W}_1^k) \cap E_t^{l-1} \subset \varphi(H) \cap E_t^{l-1} = \varphi(H \cap W_t^{k-1}) = \varphi(H_t),$$

а множество $\varphi(H_t)$, согласно предположению индукции, имеет первую категорию в пространстве E_t^{l-1}. Таким образом, множество $\varphi(F_0 \cap \overline{W}_1^k)$ нигде не плотно в E^l, и случай $r=0$ разобран.

Пусть теперь $r>0$; тогда $\omega(x)$ есть производная порядка r функции φ^l, и потому $\omega(x)=0$ при $x \in F_r$. Так как на окрестности W^k имеем $\omega(x)=z^k$, то

$$F_r \cap W^k \subset W_0^{k-1}. \tag{8}$$

Пусть $H' \subset W_0^{k-1}$ — множество всех неправильных точек отображения φ многообразия W_0^{k-1} в пространство E^l. Легко видеть, что $H \cap W_0^{k-1} \subset \subset H'$ [см. (6)], а так как $F_r \cap W_1^k \subset H$, то из этого и из (8) следует, что $F_r \cap W_1^k \subset H'$. В силу предположения индукции множество $\varphi(H')$ имеет первую категорию в E^l, а так как $F_r \cap W_1^k \subset H'$, то множество $\varphi(F_r \cap W_1^k)$ нигде не плотно в E^l. Разбор случая $r>0$ этим закончен.

Итак, теорема 4 доказана для многообразия M^k, не имеющего края.

Пусть, наконец, многообразие M^k обладает краем M^{k-1}. Пусть $F' \subset M^{k-1}$ — множество всех неправильных точек отображения φ многообразия M^{k-1} в многообразие N^l, а $F \subset M^k$ — множество неправильных точек отображения φ многообразия M^k в N^l. Легко видеть, что

$$F \cap M^{k-1} \subset F'.$$

Таким образом,

$$F \subset (F \setminus M^{k-1}) \cup F'.$$

Множество $F \setminus M^{k-1}$ представляет собой совокупность всех неправильных точек отображения φ многообразия $M^k \setminus M^{k-1}$, лишенного края. Точно так же множество F' представляет собой совокупность всех неправильных точек отображения φ многообразия M^{k-1}, лишенного края. Таким образом, оба множества $\varphi(F \setminus M^{k-1})$ и $\varphi(F')$ имеют в N^l первую категорию. Множество же $\varphi(F)$ содержится в их сумме и потому также имеет первую категорию в N^l.

Таким образом, теорема 4 полностью доказана.

§ 4. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть f — гладкое отображение многообразия M^k в многообразие N^l. Пусть $a \in M^k$ и $b=f(a) \in N^l$ — некраевые точки многообразий M^k и N^l. В окрестностях точек a и b введем локальные координаты

$x^1, \ldots, x^k$ и $y^1, \ldots, y^l$, приняв эти точки за начала координат. Пусть

$$y^j = f^j(x) = f^j(x^1, \ldots, x^k)$$

есть запись отображения f в выбранных координатах.

Допустим, что a есть регулярная точка отображения f, т. е. что ранг матрицы $\left\| \frac{\partial f^j(a)}{\partial x^i} \right\|$, $j = 1, \ldots, l$; $i = 1, \ldots, k$ равен k, и будем считать для определенности, что отличен от нуля определитель $\left| \frac{\partial f^j(a)}{\partial x^i} \right|$, $i, j = 1, \ldots, k$. При этом предположении соотношения

$$\xi^i = f^i(x^1, \ldots, x^k), \quad i = 1, \ldots, k$$

могут служить для введения в окрестности точки a новых координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ точки x. Пусть

$$y^j = \xi^j, \quad j = 1, \ldots, k; \quad y^j = \varphi^j(\xi^1, \ldots, \xi^k), \quad j = k+1, \ldots, l$$

есть запись отображения f в этих новых координатах. Введем в окрестности точки b новые координаты $\eta^1, \ldots, \eta^l$, положив

$$\eta^j = y^j, \quad j = 1, \ldots, k; \quad \eta^j = y^j - \varphi^j(y^1, \ldots, y^k), \quad j = k+1, \ldots, l.$$

В координатах $\xi^1, \ldots, \xi^k, \eta^1, \ldots, \eta^l$ отображение f записывается в виде

$$\eta^j = \xi^j, \quad j = 1, \ldots, k; \quad \eta^j = 0, \quad j = k+1, \ldots, l. \tag{1}$$

Допустим теперь, что точка a правильна, т. е. что ранг матрицы $\left\| \frac{\partial f^j(a)}{\partial x^i} \right\|$, $j = 1, \ldots, l$; $i = 1, \ldots, k$ равен l, и примем для определенности, что отличен от нуля определитель $\left| \frac{\partial f^j(a)}{\partial x^i} \right|$, $i, j = 1, \ldots, l$. Тогда соотношения

$$\xi^i = f^i(x^1, \ldots, x^k), \quad i = 1, \ldots, l; \quad \xi^i = x^i, \quad i = l+1, \ldots, k$$

могут служить для введения в окрестности точки a новых координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ точки x. Полагая, сверх того, для единообразия

$$\eta^j = y^j, \quad j = 1, \ldots, l,$$

мы видим, что в координатах $\xi^1, \ldots, \xi^k, \eta^1, \ldots, \eta^l$ отображение f записывается в виде

$$\eta^j = \xi^j, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{2}$$

Таким образом, если многообразие M^k замкнуто и $b \in N^l$ есть правильная точка отображения f, то $f^{-1}(b)$ есть гладкое $(k-l)$-мерное подмногообразие многообразия M^k с локальными координатами $\xi^{l+1}, \ldots$ $\ldots, \xi^k$ в окрестности точки a. В случае, если многообразия M^k и N^l ориентированы, а ориентации их задаются соответственно координатными системами $\xi^{l+1}, \ldots, \xi^k$, $\xi^1, \ldots, \xi^l$ и $\eta^1, \ldots, \eta^l$, многообразие $f^{-1}(b)$ получает естественную ориентацию, задаваемую координатной системой $\xi^{l+1}, \ldots, \xi^k$.

Мы видим, что и в случае регулярной точки a, и в случае правильной точки a в надлежаще выбранных координатах отображение записывается весьма просто [см. (1), (2)].

В § 2 было показано, что в любой близости произвольного гладкого отображения многообразия M^k в векторное пространство A^{2k} существует регулярное отображение, а все отображения, достаточно близкие к регулярному, регулярны (см. теорему 3). В этом смысле особые точки (см. § 1, п. «D») отображений многообразия M^k в пространство A^{2k} неустойчивы — устранимы малым шевелением отображения; регулярные же точки, напротив, устойчивы. Для отображений многообразия M^k в векторное пространство A^{2k-1} дело уже обстоит иначе: имеющиеся там особые точки, вообще говоря, устойчивы — неустранимы при помощи малых шевелений. В этом случае возникает вопрос об описании типичных устойчивых особых точек. Этот вопрос был решен Уитнеем. Здесь приводится новое, более простое доказательство его теоремы (см. теорему 6). Эта теорема в настоящей работе использоваться не будет. Вопрос о типичных особых точках решается здесь также для отображений многообразия M^k в одномерное векторное пространство A^1, т. е. в прямую (см. теорему 5; она найдет в дальнейшем применение к гомотопической теории отображений, см. § 14). Таким образом, вопрос о типичных особых точках отображения решен для отображений многообразий размерности k в пространства размерностей $2k-1$ и 1. Для остальных размерностей он не решен и представляет значительный интерес.

Регулярное отображение многообразия M^k в векторное пространство A^{2k}, вообще говоря, негомеоморфно — оно имеет самопересечения, которые могут оказаться неустранимыми при помощи малых шевелений отображения. Вопрос о типичности самопересечений также решается здесь (см. п. «А» и «В»); эти предложения будут использованы в дальнейшем.

При доказательстве теорем 5 и 6, а также предложения «В» существенным образом используются конструкция «А» предыдущего параграфа и теорема 4.

Типичные точки самопересечения при отображении многообразия M^k в векторное пространство E^{2k}

А) Пусть f — гладкое класса $m \geqslant 1$ регулярное отображение замкнутого многообразия M^k в векторное пространство A^{2k}, а a и b — две различные точки из M^k, переходящие при отображении f в одну и ту же точку $f(a) = f(b)$ пространства A^{2k}. Пусть, далее, U и V — такие окрестности точек a и b в M^k, что отображение f каждой из этих окрестностей является гомеоморфизмом, а T_a^k и T_b^k — касательные в точках $f(a)$ и $f(b)$ к многообразиям $f(U)$ и $f(V)$. Будем говорить, что в паре a, b самопересечения отображение f *типично*, если касательные T_a^k и T_b^k находятся в общем положении, т. е. пересекаются лишь в одной точке $f(a) = f(b)$. Очевидно, что в этом случае, при достаточно малых окрестностях U и V, многообразия $f(U)$ и $f(V)$ также имеют единственную общую точку $f(a) = f(b)$ (теорема о неявных функциях), и при малых шевелениях отображения типичные самопересечения сохраняются. Если отображение f типично в любой паре самопересечения и, кроме того, никакие три попарно различные точки не переходят при этом отображении в одну и ту же точку, то будем говорить, что отображение f *типично*. Из замкнутости многообразия M^k следует, что для типичного в каждой паре самопересечения отображения f существует лишь конечное число пар самопересечения.

В) Пусть f — гладкое гомеоморфное регулярное отображение замкнутого многообразия M^k в векторное пространство C^{2k+1}. Совокупность P^{2k} всех пар (x, y), где $x \in M^k$, $y \in M^k$, $x \neq y$, образует естественным образом гладкое многообразие размерности $2k$. Каждой точке $(x, y) \in P^{2k}$ поставим в соответствие точку $\sigma(x, y) = (f(y) - f(x))^* \in S^{2k}$, т. е. луч вектора $f(y) - f(x)$ (см. § 1, п. «Н»). Пусть e — произвольный отличный от нуля вектор пространства C^{2k+1}, а π_e — проектирование в направлении одномерного подпространства e^{**}, содержащего вектор e. Оказывается, что регулярное отображение $\pi_e f$ тогда и только тогда типично в каждой паре самопересечения (см. п. «А»), когда отображение σ многообразия P^{2k} в многообразие S^{2k} правильно в точке $e^* \in S^{2k}$. Из этого, в силу теоремы 4, следует, что в любой близости к любому одномерному направлению проектирования имеется такое одномерное направление проектирования e^{**}, что отображение $\pi_e f$ типично в каждой паре самопересечения. Далее, оказывается, что в произвольной близости к любому одномерному направлению проектирования имеется такое направление e_0^{**}, что отображение $\pi_{e_0} f$ типично.

Докажем предложение «В». Пусть $e_1, \ldots, e_{2k+1}$ — некоторый базис векторного пространства C^{2k+1}. Обозначим через W совокупность всех векторов $u = \sum_{n=1}^{2k+1} u^n e_n$ пространства C^{2k+1}, для которых $u^{2k+1} > 0$, а через W^* — совокупность всех лучей u^* при $u \in W$. За координаты луча $u^* \in W^*$ примем числа $u^{*n} = \frac{u^n}{u^{2k+1}}$, $n = 1, \ldots, 2k$. Этим самым в области W^* многообразия S^{2k} вводятся локальные координаты (см. § 1, п. «Н»). Пусть теперь a и b — две различные точки многообразия M^k. Выберем базис $e_1, \ldots, e_{2k+1}$ таким образом, чтобы $e_{2k+1} = e = f(b) - f(a)$. В окрестностях точек a и b многообразия M^k выберем локальные координаты $x^1, \ldots, x^k$ и $y^1, \ldots, y^k$ и пусть

$$u^n = f_a^n(x^1, \ldots, x^k) = f_a^n(x), \quad n = 1, \ldots, 2k+1; \tag{3}$$

$$u^n = f_b^n(y^1, \ldots, y^k) = f_b^n(y), \quad n = 1, \ldots, 2k+1 \tag{4}$$

есть координатная запись отображения f в окрестностях точек a и b соответственно. При проектировании в направлении вектора $e = f(b) - f(a)$ точки b и a сливаются: $\pi_e f(a) = \pi_e f(b)$; и условие типичности отображения $\pi_e f$ в паре самопересечения a, b, очевидно, заключается в том, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_a^1(a)}{\partial x^1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_a^{2k}(a)}{\partial x^1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_a^1(a)}{\partial x^k} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_a^{2k}(a)}{\partial x^k} \\ \frac{\partial f_b^1(b)}{\partial y^1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_b^{2k}(b)}{\partial y^1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_b^1(b)}{\partial y^k} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_b^{2k}(b)}{\partial y^k} \end{vmatrix} \tag{5}$$

был отличен от нуля. В окрестности точки (a, b) многообразия P^{2k} за координаты можно принять числа $x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^k$, и отображение σ в координатной форме запишется в виде

$$u^{*n} = \frac{f_b^n(y) - f_a^n(x)}{f_b^{2k+1}(y) - f_a^{2k+1}(x)}, \quad n = 1, \ldots, 2k. \tag{6}$$

В этих координатах функциональный определитель отображения σ в точке (a, b) с точностью до знака, очевидно, совпадает с определителем (5). Таким образом, доказано, что регулярное отображение $\pi_e f$ тогда и только тогда типично в любой паре самопересечения, когда отображение σ правильно в точке e^*.

Выберем теперь луч e^* таким образом, чтобы вектор e не был параллелен никакому вектору, касательному к многообразию $f(M^k)$, и чтобы отображение σ было правильно в точке $e^* \in S^{2k}$. В силу теорем 1 и 4, множество лучей, обладающих указанными свойствами, всюду плотно в многообразии S^{2k}. Допустим, что существуют три попарно различные точки a, b, c многообразия M^k, удовлетворяющие условию $\pi_e f(a) = \pi_e f(b) = \pi_e f(c)$. В окрестности точки c в многообразии M^k введем локальные координаты $z^1, \ldots, z^k$, и пусть

$$u^n = f_c^n(z^1, \ldots, z^k) = f_c^n(z), \quad n = 1, \ldots, 2k+1 \tag{7}$$

есть координатная запись отображения f в окрестности точки c, аналогичная записям (3) и (4). Если теперь x, y, z — три такие точки многообразия M^k, соответственно близкие к точкам a, b, c, что точки $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$ лежат на одной прямой, то имеем

$$\frac{f_a^n(x)-f_c^n(z)}{f_a^{2k+1}(x)-f_c^{2k+1}(z)}=\frac{f_b^n(y)-f_c^n(z)}{f_b^{2k+1}(y)-f_c^{2k+1}(z)}, \quad n=1, \ldots, 2k. \tag{8}$$

Мы имеем здесь $2k$ уравнений. Будем считать, что эти уравнения определяют неявные функции $x^1, \ldots, x^k$, $y^1, \ldots, y^k$ независимых переменных $z^1, \ldots, z^k$. При начальном значении $z=c$ решениями служат $x=a$, $y=b$. При этих начальных значениях функций и независимых переменных функциональный определитель системы (8) отличен от нуля, так как отличен от нуля определитель (5). Таким образом, система (8) удовлетворяет условию теоремы о неявных функциях. Из этого следует, что совокупность троек точек x, y, z, близких к тройке a, b, c и удовлетворяющих тому условию, что точки $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$ лежат на одной прямой, является k-мерным многообразием. Отсюда, в силу теоремы 1, непосредственно вытекает, что в любой близости к точке $\overset{*}{e}$ многообразия S^{2k} найдется точка $\overset{*}{e}_0$, удовлетворяющая условиям предложения «В».

Типичные критические точки числовой функции на многообразии

С) Пусть f — гладкое класса $m \geqslant 2$ отображение многообразия M^k в одномерное эвклидово пространство E^1 или, что то же самое, в прямую. Выбрав на прямой E^1 систему координат, мы запишем отображение f в виде $y^1=f^1(x)$, $x \in M^k$, где f^1 есть действительная числовая функция класса m, заданная на M^k. В окрестности некоторой точки $a \in M^k$ введем локальные координаты $x^1, \ldots, x^k$ с началом в a, и пусть

$$y^1=f^1(x)=f^1(x^1, \ldots, x^k)$$

есть запись отображения f в этих координатах. Точка a называется *критической точкой* функции f^1, а число $f^1(a)$ — *критическим значением* функции f^1 в точке a, если все производные первого порядка функции f^1 обращаются в нуль в a или, что то же самое, если a есть особая точка отображения f (см. § 1, п. «D»). Разлагая функцию f^1 в критической точке a в ряд Тейлора, получаем

$$f^1(x)=f^1(a)+\sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j+\ldots \tag{9}$$

Если определитель $|a_{ij}| \neq 0$, то критическая (особая) точка a называется *невырожденной*. Непосредственным подсчетом проверяется, что в критической точке a функции f при произвольной замене системы координат элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ преобразуются как коэффициенты квадратичной формы. Из этого, в частности, следует, что невырожденность особой точки есть ее инвариантное свойство, т. е. не зависит от выбора системы координат.

D) Пусть h — гладкое класса $m \geqslant 2$ отображение многообразия M^k в эвклидово векторное пространство C^{q+1}. Пусть u — отличный от нуля вектор из C^{q+1}, а u^{**} — одномерное линейное подпространство, содержащее вектор u. Ортогональную проекцию пространства C^{q+1} на прямую u^{**} обозначим через π_u. Множество N^q всех пар вида (x, u^*), где $x \in M^k$, а u^* есть луч, ортогональный к многообразию $h(M^k)$ в точке $h(x)$, естественным образом представляет собой гладкое класса $m-1$ многообразие размерности q. Каждой точке $(x, u^*) \in N^q$ поставим в соответствие точку $\nu(x, u^*) = u^* \in S^q$ (см. § 1, п. «Н»). Отображение ν есть гладкое класса $m-1$ отображение многообразия N^q в многообразие S^q. Оказывается, что точка $a \in M^k$ тогда и только тогда является особой точкой отображения $\pi_u h$ многообразия M^k на прямую u^{**}, когда луч u^* ортогонален к многообразию $h(M^k)$ в точке $h(a)$. Далее, если луч u^* ортогонален к многообразию $h(M^k)$ в точке $h(a)$, то особая точка a отображения $\pi_u h$ тогда и только тогда невырождена, когда точка (a, u^*) есть правильная точка отображения ν.

Докажем предложение «D». Скалярное произведение векторов u и v из C^{q+1}, как обычно, будем обозначать через (u, v). Пусть $u \in C^{q+1}$ и $(u, u) = 1$. Действительная числовая функция $(u, h(x))$ переменного $x \in M^k$, заданная на M^k, соответствует отображению $\pi_u h$ многообразия M^k на ось u^{**}. В локальных координатах $x^1, \ldots, x^k$, определенных вблизи точки a, мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(u, h(a)) = \left(u, \frac{\partial h(a)}{\partial x^i}\right), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{10}$$

Обращение в нуль левых частей всех соотношений (10) означает, что a есть особая точка отображения $\pi_u h$, обращение же в нуль правых частей означает, что вектор u ортогонален к многообразию $h(M^k)$ в точке $h(a)$. Таким образом, доказано, что a тогда и только тогда является особой точкой отображения $\pi_u h$, когда луч u^* ортогонален к $h(M^k)$ в точке $h(a)$.

Для установления критерия невырожденности особой точки a отображения $\pi_{u_0} h$ выберем в векторном пространстве C^{q+1} такой ортонормальный базис $e_1, \ldots, e_{q+1}$, чтобы векторы $e_1, \ldots, e_k$ были касательными к многообразию $h(M^k)$ в точке $h(a)$, а вектор e_{q+1} совпадал с u_0. В соответствующих координатах $y^1, \ldots, y^{q+1}$ пространства C^{q+1} отображение h запишется вблизи точки a в виде

$$y^j = h^j(x) = h^j(x^1, \ldots, x^k), \quad j = 1, \ldots, q+1. \tag{11}$$

Из того, что векторы $e_1, \dots, e_k$ касаются многообразия $h(M^k)$ в точке $h(a)$, непосредственно вытекает, что

$$\left|\frac{\partial h^j(a)}{\partial x^i}\right| \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Из этого следует, что соотношения

$$\xi^i = h^i(x^1, \dots, x^k), \quad i = 1, \dots, k,$$

могут служить для введения новых координат $\xi^1, \dots, \xi^k$ точки x в окрестности точки a в M^k. В этих координатах отображение h записывается в виде:

$$h(x) = \sum_{i=1}^{k} \xi^i e_i + \sum_{j=1}^{q+1-k} \varphi^i(x) \cdot e_{k+j}. \tag{12}$$

Из того, что векторы $e_1, \dots, e_k$ касательны к $h(M^k)$ в точке $h(a)$ следует, что

$$\frac{\partial \varphi^j(a)}{\partial \xi^i} = 0, \quad i = 1, \dots, k; \ j = 1, \dots, q+1-k. \tag{13}$$

Пусть (x, u^*) — точка многообразия N^q, близкая к точке $(a, u_0^*) = (a, e_{q+1}^*)$. На луче u^* выберем вектор u, удовлетворяющий условию

$$(u, e_{q+1}) = 1.$$

Остальные q компонент вектора u в базисе $e_1, \dots, e_{q+1}$ обозначим через $u^1, \dots, u^q$: $u^i = (u, e_i)$, $i = 1, \dots, q$. Условие ортогональности вектора u к $h(M^k)$ в точке $h(x)$ запишется теперь в виде

$$0 = \left(u, \frac{\partial h(x)}{\partial \xi^i}\right) = u^i + \sum_{j=1}^{q-k} u^{k+j} \frac{\partial \varphi^j(x)}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \varphi^{q+1}(x)}{\partial \xi^i}, \quad i = 1, \dots, k. \tag{14}$$

Соотношение это показывает, что за координаты элемента (x, u^*) многообразия N^q можно принять координаты $\xi^1, \dots, \xi^k$ точки x и компоненты $u^{k+1}, \dots, u^q$ вектора u. За координаты луча u^* в многообразии S^q примем первые q компонент вектора u, обозначив эти компоненты через $v^1, \dots, v^q$ для того, чтобы не спутать их с координатами $u^{k+1}, \dots, u^q$ элемента (x, u^*) в многообразии N^q. Так как $v^i = u^i$, $i = 1, \dots, q$, то в выбранных координатах отображение ν многообразия N^q в многообразие S^q запишется в виде [см. (14)]

$$v^i = -\sum_{j=1}^{q-k} u^{k+j} \frac{\partial \varphi^j(x)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \varphi^{q+1}(x)}{\partial \xi^i}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$v^{k+j} = u^{k+j}, \quad j = 1, \dots, q-k.$$

Непосредственный подсчет [см. (13)] показывает, что якобиан отображения ν в точке $(a, \overset{*}{e}_{q+1})$ равен $(-1)^k \cdot \left| \frac{\partial^2 \varphi^{q+1}(a)}{\partial \xi^i \cdot \partial \xi^\alpha} \right|$, $i, \alpha = 1, \ldots, k$. Таким образом, точка (a, u_0) тогда и только тогда является правильной точкой отображения ν, когда выполнено соотношение

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi^{q+1}(a)}{\partial \xi^i \partial \xi^\alpha} \right| \neq 0. \tag{15}$$

Так как отображению $\pi_{u_0} h$ многообразия M^k на ось $\overset{**}{u_0}$ соответствует функция $\varphi^{q+1}(x)$, то условие (15) совпадает с условием невырожденности особой точки a отображения $\pi_{u_0} h$. Этим доказательство утверждения «D» закончено.

Теорема 5. *Пусть M^k — гладкое класса $m \geqslant 3$ компактное многообразие с краем M^{k-1}, состоящим из двух замкнутых многообразий M_0^{k-1} и M_1^{k-1}, каждое из которых может быть пустым, и f^1 — действительная числовая функция класса m, заданная на M^k. Допустим, что функция f^1 принимает во всех точках многообразия M_i^{k-1} одно и то же значение c_i, $i = 0, 1$, причем $c_0 < c_1$, и что во всякой некраевой точке $x \in M^k$ выполнено неравенство $c_0 < f(x) < c_1$. Допустим сверх того, что критические точки функции f^1 не лежат на крае M^{k-1}. Оказывается, что в любой близости класса m* (см. § 2, п. «F») *к функции f^1 лежит функция g^1, совпадающая с f^1 на некоторой окрестности края, причем все критические точки функции g^1 невырождены, а критические значения в различных критических точках различны между собой.*

Доказательство. Функции f^1 поставим в соответствие отображение f многообразия M^k в одномерное эвклидово векторное пространство A^1. Пусть e — гомеоморфное регулярное отображение класса m многообразия M^k в эвклидово векторное пространство B^q (см. теорему 2). Прямую сумму векторных пространств A^1 и B^q обозначим через C^{q+1} и будем рассматривать пространства A^1 и B^q как ортогональные подпространства пространства C^{q+1}. Прямую сумму отображений f и e (см. § 2, п. «E») обозначим через h. Отображение h есть регулярное гомеоморфное отображение класса m многообразия M^k в эвклидово векторное пространство C^{q+1}, причем ортогональная проекция π отображения h на прямую A^1 совпадает с f: $f = \pi h$. Покажем прежде всего, что в любой близости к прямой A^1 имеется прямая, ортогональное проектирование на которую порождает функцию, все критические значения которой невырождены. Указанная в формулировке теоремы функция будет получена из этой путем дальнейших ее поправок.

Пусть N^q — многообразие всех нормальных элементов (x, u^*) многообразия $h(M^k)$, определенное в предложении «D», и ν — отображение многообразия N^q в многообразие S^q, также определенное в «D».

Покажем, что если $u^* \in S^q$ есть правильная точка отображения ν, то все особые точки отображения $\pi_u h$ невырождены. Действительно, если a есть особая точка отображения $\pi_u h$, то луч u^* ортогонален к $h(M^k)$ в точке $h(a)$, и потому $(a, u^*) \in N^q$. Так как отображение ν правильно в точке (a, u^*) многообразия N^q, то особая точка a невырождена (см. п. «D»). Пусть ε — заданное положительное число и пусть u — такой единичный вектор пространства C^{q+1}, что функция $h^1 = (u, h(x))$ находится в ε-близости класса m к функции f^1 и что $u^* \in S^q$ есть правильная точка отображения ν, так что все критические точки функции h^1 невырождены. В силу теоремы 4, такой вектор u существует.

Пусть δ — настолько малое положительное число, что при $f^1(x) < c_0 + 3\delta$, а также при $f^1(x) > c_1 - 3\delta$ точка x не является критической точкой функции f^1. Существование такого числа δ вытекает из условий теоремы, ибо на крае M^{k-1}, а следовательно, и в его окрестности нет критических точек функции f^1. Пусть, далее, $\chi(t)$ — действительная числовая функция класса m действительного переменного t, обращающаяся в нуль при $t \leqslant c_0 + \delta$ и $t \geqslant c_1 - \delta$ и обращающаяся в единицу при $c_1 - 2\delta \geqslant t \geqslant c_0 + 2\delta$. Положим

$$h^2(x) = f^1(x) + \chi(f^1(x))(h^1(x) - f^1(x)). \tag{16}$$

Легко видеть, что если положительное число ε, в зависимости от которого построена функция $h^1(x)$, выбрано достаточно малым, то все критические точки функции $h^2(x)$, определенной соотношением (16), совпадают с критическими точками функции $h^1(x)$, и потому невырождены. Из того, что при $t \leqslant c_0 + \delta$ и при $t \geqslant c_1 - \delta$ функция $\chi(t)$ обращается в нуль, следует, что на некоторой окрестности края M^{k-1} функции $h^2(x)$ и $f^1(x)$ совпадают между собой.

Допустим теперь, что в двух различных критических точках a и b функции $h^2(x)$ имеем $h^2(a) = h^2(b)$. Пусть Q — окрестность точки a, не содержащая отличных от a критических точек функции $h^2(x)$. За окрестность Q можно принять область, имеющую в локальных координатах вблизи точки a форму куба с центром в a. Пусть Q', Q'' — кубы с центрами в a, подобные кубу Q и имеющие вдвое, или соответственно вчетверо, меньшие стороны. На кубе Q легко определить гладкую функцию $\varkappa(x)$, обращающуюся в нуль на $Q \setminus Q'$ и в единицу на Q'' (см., например, доказательство теоремы 2). Функцию $\varkappa(x)$ продолжим на все многообразие M^k, считая ее равной нулю вне области Q. Положим

$$h^3(x) = h^2(x) + \alpha\varkappa(x).$$

Легко видеть, что при достаточно малом $\alpha \neq 0$ все критические точки функции $h^3(x)$ невырождены, а критические значения $h^3(a)$ и

$h^3(b)$ различны. Проделав указанную операцию конечное число раз, мы приходим к нужной нам функции $g^1(x)$.

Итак, теорема 5 доказана.

Типичные нерегулярности при отображении многообразия M^k в векторное пространство E^{2k-1}

Е) Пусть f — гладкое класса $m \geqslant 2$ отображение многообразия M^k в векторное пространство A^{2k-1}. Пусть a — особая, т. е. нерегулярная, точка отображения f, и $x^1, \ldots, x^k$ — такая локальная система координат в ее окрестности, что

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x^1} = 0. \tag{17}$$

Такую систему координат в окрестности особой точки всегда можно выбрать. Если система

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^1 \partial x^i}, \quad \frac{\partial f(a)}{\partial x^j}, \quad i = 1, \ldots, k; \quad j = 2, \ldots, k \tag{18}$$

из $2k-1$ векторов пространства A^{2k-1} линейно независима, то особая точка a называется *невырожденной*. Ниже будет показано, что невырожденность особой точки определена инвариантно относительно выбора системы координат, т. е. если некоторая система координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$, определенная в окрестности точки a, удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \xi^1} = 0, \tag{19}$$

то системы векторов (18) и

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial \xi^1 \partial \xi^i}, \quad \frac{\partial f(a)}{\partial \xi^j}, \quad i = 1, \ldots, k; \quad j = 2, \ldots, k \tag{20}$$

одновременно линейно зависимы или независимы. Оказывается, что в достаточно малой окрестности невырожденной особой точки нет других особых точек.

Докажем, что понятие невырожденности особой точки инвариантно. Допустим, что выполнены соотношения (17) и (19) и что система векторов (20) линейно независима, и покажем, что система (18) также линейно независима. Мы имеем

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x^1} = \sum_{\alpha} \frac{\partial f(a)}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial \xi^\alpha(a)}{\partial x^1},$$

откуда, учитывая сделанные предположения, выводим

$$\frac{\partial \xi^\alpha(a)}{\partial x^1} = 0, \quad \alpha = 2, \ldots, k. \tag{21}$$

Так как якобиан $\left|\frac{\partial\xi^\alpha(a)}{\partial x^i}\right|$, $\alpha, i = 1, \ldots, k$ отличен от нуля, то из (21) следует

$$\frac{\partial\xi^1(a)}{\partial x^1} \neq 0, \qquad \left|\frac{\partial\xi^\alpha(a)}{\partial x^i}\right| \neq 0, \quad \alpha, i = 2, \ldots, k. \tag{22}$$

Из соотношений (21) получаем

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x^j} = \sum_{\alpha=2}^{k} \frac{\partial f(a)}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha(a)}{\partial x^j}, \qquad j = 2, \ldots, k. \tag{23}$$

Далее, имеем, учитывая (21) и (19),

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^1\partial x^i} = \sum_{\beta=1}^{k} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial\xi^1\partial\xi^\beta}\frac{\partial\xi^1(a)}{\partial x^1}\frac{\partial\xi^\beta(a)}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=2}^{k} \frac{\partial f(a)}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha(a)}{\partial x^1\cdot\partial x^i}, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{24}$$

Из соотношений (23), (24), (22) и линейной независимости системы (20) непосредственно вытекает линейная независимость системы (18).

Покажем теперь, что невырожденная особая точка a является изолированной. Для этого примем точку a за начало координат $x^1, \ldots, x^k$ и разложим векторы $\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, k$ в ряды Тейлора в окрестности точки a по координатам $x^1, \ldots, x^k$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^1} = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^1\partial x^\alpha}\cdot x^\alpha + \varepsilon_1, \tag{25}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = \frac{\partial f(a)}{\partial x^i} + \varepsilon_i, \qquad i = 2, \ldots, k, \tag{26}$$

где ε_1 есть величина второго порядка малости относительно $\rho = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2}$, а $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ суть величины первого порядка малости относительно ρ. Так как векторы системы (18) линейно независимы, то из соотношений (25) и (26) можно усмотреть, что векторы $\frac{\partial f(x)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x^k}$ линейно независимы для всех точек $x \neq a$, достаточно близких к a.

F) Пусть h — регулярное отображение класса $m \geqslant 2$ многообразия M^k в векторное пространство C^{2k}. Многообразие всех лучей u^* векторного пространства C^{2k} обозначим через S^{2k-1} (см. § 1, п. «Н»), а многообразие всех линейных элементов многообразия $h(M^k)$, т. е. многообразие всех пар (x, u^*), где $x \in M^k$, а u^* есть луч, касательный к $h(M^k)$ в точке $h(x)$, обозначим через L^{2k-1}. Определим отображение τ многообразия L^{2k-1} в многообразие S^{2k-1}, положив $\tau(x, u^*) = u^*$. Проекцию пространства C^{2k} в направлении прямой u^{**}, содержащей вектор u, обозначим через π_u. Уже отмечалось (см. § 2, п. «А»), что точка $a \in M^k$ тогда и только тогда является особой точкой отображения $\pi_u h$, когда луч u^* является касательным к $h(M^k)$ в точке $h(x)$, т. е. когда $(a, u^*) \in L^{2k-1}$. Оказывается, что особая точка a отображения $\pi_u h$ тогда и только тогда невырождена, когда отображение τ правильно в точке $(a, u^*) \in L^{2k-1}$.

Докажем последнее утверждение. Пусть a — особая точка отображения $f = \pi_{u_0} h$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_{2k}$ векторного пространства C^{2k} таким образом, чтобы векторы $e_1, \ldots, e_k$ были касательными к $h(M^k)$ в точке $h(a)$ и чтобы вектор e_1 совпадал с u_0. Пусть

$$y^j = h^j(x) = h^j(x^1, \ldots, x^k)$$

есть запись отображения h в координатах $y^1, \ldots, y^{2k}$, соответствующих базису $e_1, \ldots, e_{2k}$. Заметим, что якобиан $\left|\frac{\partial h^j(a)}{\partial x^i}\right|$, $i, j = i, \ldots, k$ отличен от нуля и потому соотношения

$$\xi^i = h^i(x^1, \ldots, x^k), \quad i = 1, \ldots, k,$$

вводят в окрестности точки a новые координаты $\xi^1, \ldots, \xi^k$ точки x. В новых координатах вектор $h(x)$ запишется в виде

$$h(x) = \sum_{i=1}^{k} \xi^i e_i + \sum_{j=1}^{k} \varphi^j(x) \cdot e_{k+j}, \tag{27}$$

где функции $\varphi^j(x)$ удовлетворяют условию:

$$\frac{\partial \varphi^j(x)}{\partial \xi^i} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, k. \tag{28}$$

Пусть (x, u^*) — элемент многообразия L^{2k-1}, близкий к элементу (a, u_0). Вектор u касателен к $h(M^k)$ в точке $h(x)$, и потому записывается в виде

$$u = \sum_{i=1}^{k} u^i \cdot \frac{\partial h(x)}{\partial \xi^i} = \sum_{i=1}^{k} u^i e_i + \sum_{i, j=1}^{k} u^i \cdot \frac{\partial \varphi^j(x)}{\partial \xi^i} e_{j+k}. \tag{29}$$

На луче u^* выберем такой вектор u, что $u^1 = 1$; тогда запись (29) принимает вид

$$u = e_1 + \sum_{i=2}^{k} u^i e_i + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi^j(x)}{\partial \xi^1} e_{k+j} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=2}^{k} u^i \frac{\partial \varphi^j(x)}{\partial \xi^i} e_{j+k}. \tag{30}$$

За координаты элемента (x, u^*) в многобразии L^{2k-1} можно принять числа $u^2, \ldots, u^k, \xi^1, \ldots, \xi^k$. Так как первая компонента вектора u в пространстве C^{2k} равна единице [см. (30)], то за координаты луча u^* в многобразии S^{2k-1} можно принять остальные компоненты $v^2, \ldots, v^{2k}$ вектора u в пространстве C^{2k}. В выбранных координатах отображение

τ записывается в силу (30) в виде

$$v^i = u^i,\ i = 2, \ldots, k;\ v^{k+j} = \frac{\partial\varphi^j(x)}{\partial\xi^1} + \sum_{i=2}^{k} u^i \cdot \frac{\partial\varphi^j(x)}{\partial\xi^i},\ j = 1, \ldots, k. \tag{31}$$

Простой подсчет показывает, что якобиан отображения τ в точке (a, u_0) равен

$$\left|\frac{\partial^2\varphi^j(a)}{\partial\xi^1 \cdot \partial\xi^i}\right|,\ i, j = 1, \ldots, k. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь отображение $\pi_{u_0} h$. Будем считать, что оно осуществляется в векторное пространство A^{2k-1} с базисом $e_2, \ldots, e_{2k}$ при помощи проектирования по прямой e_1^{**}. Мы имеем тогда [см. (27)]

$$f(x) = \pi_{u_0} h(x) = \sum_{i=2}^{k} \xi^i e_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \varphi^\alpha(x) \cdot e_{k+\alpha}. \tag{33}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial\xi^1 \partial\xi^i} = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial^2\varphi^\alpha(x)}{\partial\xi^1 \cdot \partial\xi^i} \cdot e_{k+\alpha},\ i = 1, \ldots, k,$$

$$\frac{\partial f(a)}{\partial\xi^j} = e_j,\quad j = 2, \ldots, k.$$

Таким образом, в данном случае векторы системы (19) линейно независимы тогда и только тогда, когда якобиан (32) отличен от нуля.

Итак, предложение «F» доказано.

Теорема 6. *Пусть f — гладкое класса $m \geqslant 3$ отображение компактного многообразия M^k размерности k в векторное пространство A^{2k-1} размерности $2k - 1$. Оказывается, что в любой близости класса m к отображению f существует отображение g, все особые точки которого невырождены и не лежат на крае M^{k-1} многообразия M^k.*

Доказательство. Векторное пространство A^{2k-1} будем рассматривать как подпространство векторного пространства C^{2k} размерности $2k$. Пусть B^1 — какое-либо одномерное подпространство пространства C^{2k}, не лежащее в A^{2k-1}. Проекцию пространства C^{2k} на пространство A^{2k-1} в направлении B^1 обозначим через π. Зададимся положительным числом ε, и пусть h — такое регулярное отображение многообразия M^k в векторное пространство C^{2k}, что отображение πh находится в ε-близости отображения f (см. теорему 3). Пусть L^{2k-1} — многообразие линейных элементов многообразия $h(M^k)$ (см. п. «F»); L^{2k-2} — подмногообразие многообразия L^{2k-1}, составленное из всех элементов вида (x, u^*), где $x \in M^{k-1}$, и, наконец, τ — отображение многообразия L^{2k-1} в сферу S^{2k-1}, построенное в «F». Непосредственно проверяется на основе предложения «F», что если $u^* \in S^{2k-1}$ не является особой точкой отображения τ и не принадлежит множеству $\tau(L^{2k-2})$, то все особые точки отображения $\pi_u h$ невырождены и не принадлежат краю многообразия M^k. В силу теорем 4 и 1, существует такой вектор u, что u^* удовлетворяет указанным выше условиям, а отображение $\pi_u h$ находится в ε-близости отображения πh. Таким образом, в 2ε-близости отображения f имеется отображение $g = \pi_u h$, удовлетворяющее требованиям теоремы.

Итак, теорема 6 доказана.

Канонический вид типичных критических точек и типичных нерегулярных точек

В предложениях «С» и «Е» некоторые особые точки отображений многообразия M^k в векторные пространства A^1 и соответственно A^{2k-1} были объявлены невырожденными. В теоремах 5 и 6 было доказано, что все вырожденные особые точки рассматриваемых отображений неустойчивы — устранимы малыми шевелениями отображения. Не было доказано, однако, что особые точки, названные невырожденными, устойчивы — сохраняются при малых шевелениях. Доказательство этого факта не представляет трудностей, но здесь оно приведено не будет. Не была также выяснена структура отображения в окрестности невырожденной особой точки. Сделать это со всей полнотой непросто, и здесь я привожу только результаты без доказательств.

G) Пусть a — невырожденная критическая точка действительной числовой функции $f^1(x)$, заданной на многообразии M^k. В предложении «А» отмечалось, что разложение функции $f^1(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a имеет вид (9). Оказывается, что (см. [7]) преобразованием координат в окрестности точки a это разложение можно привести к виду

$$f^1(x) = f^1(a) + (x^1)^2 + \ldots + (x^s)^2 - (x^{s+1})^2 - \ldots - (x^k)^2, \qquad (34)$$

где число s положительных квадратов является инвариантом точки a, т. е. не зависит от выбора координат в окрестности этой точки и не меняется при малом шевелении отображения. Таким образом, функция, заданная на k-мерном многообразии, имеет $k+1$ различных типов невырожденных критических точек ($s = 0, \ldots, k$). Так как отображение f многообразия M^k в прямую не определяет однозначно функцию $f^1(x)$, то точки различного типа для функции могут оказаться точками одного типа для отображения. Действительно, перемена знака функции $f^1(x)$ меняет ролями числа s и $k-s$, и потому соответствующие критические точки принадлежат одному типу особых точек отображений.

Следует отметить, что переход от выражения (9) к выражению (34) не достигается, как это может показаться, линейным преобразованием координат. Очевидное линейное преобразование является лишь первым шагом перехода от выражения (9) к выражению (34). При линейном преобразовании члены третьего и более высоких порядков сохраняются, между тем как в выражении (34) они отсутствуют.

Н) Пусть a — невырожденная особая точка отображения f многообразия M^k в векторное пространство A^{2k-1} (см. п. «Е»). Оказывается (см. [8]), что в окрестностях точек a и $f(a)$ можно так (вообще говоря, нелинейно) преобразовать системы координат, что отображение f вблизи точки a в координатной форме будет иметь вид

$$y^1 = (x^1)^2,\ y^2 = x^1x^2, \ldots, y^k = x^1x^k,$$
$$y^{k+1} = x^2,\ y^{k+2} = x^3, \ldots, y^{2k-1} = x^k. \quad (35)$$

Здесь точки a и $f(a)$ приняты за начала координатных систем.

Предложение «Н» представляет собой довольно сложно доказываемую теорему.

Пользуясь записью (35), можно хорошо представить себе геометрический характер отображения f вблизи точки a, особенно в случае $k = 2$.

Глава II

ОСНАЩЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

§ 5. ГЛАДКИЕ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

В настоящем параграфе показано, что при гомотопическом изучении отображений одного гладкого многообразия в другое достаточно рассматривать лишь гладкие отображения и их гладкие гомотопии. Это вытекает из следующих фактов: пусть M^k и N^l — два гладких класса m замкнутых многообразия. Оказывается, что в каждом гомотопическом классе отображений многообразия N^l в многообразие M^k существует гладкое класса $m-1$ отображение, а если два гладких класса $m-1$ отображения многообразия N^l в многообразие M^k гомотопны между собой, то существует гладкая класса $m-3$ гомотопия одного отображения в другое. Таким образом, при изучении отображений многообразий, класс гладкости которых равен m, приходится рассматривать гомотопии уже класса гладкости $m-3$. Такого снижения класса гладкости можно было бы избежать при помощи некоторых ухищрений, но так как результаты этого параграфа будут применяться лишь при изучении отображений сферы в сферу, а сфера есть многообразие аналитическое, то потеря гладкости на три единицы не играет роли и нет смысла осложнять доказательства для сохранения класса гладкости неизменным.

Структура окрестности гладкого подмногообразия

Нижеследующее предложение в настоящем параграфе будет использовано лишь в применении к замкнутым многообразиям, для которых доказательство значительно упрощается, как это непосредственно видно из самого хода доказательства. В следующем параграфе будет использован общий случай.

А) Пусть E^{n+k} — эвклидово пространство, в котором выбрана некоторая декартова система координат $y^1, \ldots, y^{n+k}$; E_0, E_1 — две гиперплоскости пространства E^{n+k}, определяемые уравнениями $y^{n+k}=c_0$ и $y^{n+k}=c_1$, где $c_0 < c_1$, и E_*^{n+k} — полоса пространства E^{n+k}, ограниченная этими гиперплоскостями, т. е. множество точек, удовлетворяющих условиям: $c_0 \leqslant y^{n+k} \leqslant c_1$. Пусть, далее, M^k — гладкое класса $m \geqslant 4$ (в случае замкнутого многообразия M^k достаточно $m \geqslant 2$) компактное подмногообразие (см. § 1, п. «F») полосы E_*^{n+k}, имеющее край M^{k-1}. Полную нормаль в точке z к многообразию M^k обозначим через N_z. Она представляет собой n-мерное линейное подпространство эвклидова пространства E^{n+k}. Относительно многообразия M^k мы будем предполагать еще, что в каждой своей краевой точке z оно ортогонально к краю полосы E_*^{n+k}, т. е. что при $x \in M^{k-1}$ имеем:

$$N_x \subset E_0 \cup E_1. \tag{1}$$

Открытый шар в эвклидовом пространстве N_z с центром в точке z и радиусом $\delta > 0$ обозначим через $H(z) = H_\delta(z)$, а объединение всех шаров $H_\delta(z)$ для всех $z \in P$, где $P \subset M^k$, обозначим через $H_\delta(P)$. Оказывается, что существует настолько малое положительное число δ, что при $z \neq z'$ шары $H_\delta(z)$ и $H_\delta(z')$ не пересекаются, а множество $W_\delta = H_\delta(M_k)$ образует окрестность многообразия M^k в E_*^{n+k}. Ставя в соответствие каждой точке $y \in W_\delta$ ту единственную точку $z \in M^k$, для которой $y \in H_\delta(z)$, мы получаем гладкое отображение $y \to z = \pi(y)$ многообразия W_δ в многообразие M^k; в случае замкнутого многообразия M^k это отображение имеет класс гладкости $m-1$.

Докажем предложение «A». Пусть $a \in M^k$; $x^1, \ldots, x^k$ — некоторые локальные координаты, определенные в окрестности точки a, принятой за их начало, и

$$y^j = f^j(x) = f^j(x^1, \ldots, x^k), \quad j = 1, \ldots, n+k \tag{2}$$

суть параметрические уравнения, определяющие многообразие M^k в окрестности точки a. Функции f^j определены для значений переменных $x^1, \ldots, x^k$, удовлетворяющих условиям

$$|x^i| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k \tag{3}$$

в случае, когда a есть внутренняя точка многообразия M^k, и условиям (3) вместе с условием

$$x^1 \leqslant 0 \tag{4}$$

в случае, когда a есть краевая точка многообразия M^k. Таким образом, функции f^j определяют отображение f_a открытого куба K_ε, определяемого неравенствами (3) или, соответственно, полукуба K'_ε, определяемого неравенствами (3) и (4). В случае краевой точки a продолжим функции f^j на положительные значения переменного x^1, положив

$$f^j(x) = f^j(x^1, \ldots, x^k) = f^j(0, x^2, \ldots, x^k) + \frac{\partial}{\partial x^1} f^j(0, x^2, \ldots, x^k) \cdot x^1 + \\ + \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} f^j(0, x^2, \ldots, x^k) \cdot x_1^2, \quad x^1 \geqslant 0.$$

Так продолженные функции f^j определяют гладкое регулярное гомеоморфное отображение f_a открытого куба K_ε (где ε есть положительное, достаточно малое число) для произвольной точки $a \in M^{k-1}$.

Уравнение полной нормали $N_{f_a(x)} = N_x$ к многообразию $f_a(K_\varepsilon)$ в точке $f_a(x)$ в векторной форме имеет вид

$$\left(\frac{\partial f_a(x)}{\partial x^i},\quad y - f_a(x)\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{5}$$

Здесь y есть вектор, описывающий нормаль N_x. Систему соотношений (5) будем рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных функций $x^1, \ldots, x^k$ независимых переменных $y^1, \ldots, y^{n+k}$ — компонент вектора y. При начальных значениях $y = f_a(0) = a$ система (5) имеет очевидное решение $x^i = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Функциональный определитель системы (5) при этих значениях равен $(-1)^k \left|\left(\frac{\partial f_a(a)}{\partial x^i}, \frac{\partial f_a(a)}{\partial x^j}\right)\right|$, $i, j = 1, \ldots, k$. Этот определитель отличен от нуля, так как отображение f_a регулярно в точке 0. Таким образом, система (5) разрешима. Пусть $x = \sigma(y)$ или, в координатной форме:

$$x^i = \sigma^i(y^1, \ldots, y^{n+k}), \quad i = 1, \ldots, k \tag{6}$$

есть ее решение, определенное для всех точек y, принадлежащих некоторой окрестности V_a точки a в пространстве E^{n+k}. При $y \in V_a$ существует, таким образом, одна и только одна точка $x \in K_\varepsilon$, удовлетворяющая условию $y \in N_x$; эта точка x определяется соотношением $x = \sigma(y)$. Иначе говоря, через каждую точку $y \in V_a$ проходит единственная нормаль N_x, где $x \in K_\varepsilon$. Из непрерывности функции $\sigma(y)$ легко следует существование настолько малых положительных чисел δ_a и ε_a, что при $\delta \leqslant \delta_a$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_a$ множество $H_\delta(f_a(K_\varepsilon))$ целиком содержится в V_a и является окрестностью точки a в пространстве E^{n+k}.

Покажем теперь, что для краевой точки a существуют настолько малые положительные числа δ'_a и ε'_a, что при $\delta \leqslant \delta'_a$ и $\varepsilon \leqslant \varepsilon'_a$ множество $H_\delta(f_a(K'_\varepsilon))$ есть окрестность точки a в полосе E_*^{n+k}. Для определенности будем считать, что $a \in E_1$; тогда имеем

$$\sigma^1(y^1, \ldots, y^{n+k-1}, c_1) = 0. \tag{7}$$

Непосредственно видно, далее, что

$$\frac{\partial \sigma^1(y^1, \ldots, y^{n+k-1}, c_1)}{\partial y^{n+k}} > 0. \tag{8}$$

Из сказанного следует, что для точки y, достаточно близкой к a, знак функции $\sigma^1(y^1, \ldots, y^{n+k})$ совпадает со знаком числа $y^{n+k} - c_1$, а это показывает, что при достаточно малых числах δ и ε мы имеем

$$H_\delta(f_a(K'_\varepsilon)) = H_\delta(f_a(K_\varepsilon)) \cap E_*^{n+k}. \qquad (9)$$

Так как $H_\delta(f_a(K_\varepsilon))$ есть окрестность точки a в пространстве E^{n+k}, то, в силу (9), множество $H_\delta(f_a(K'_\varepsilon))$ есть окрестность точки a в полосе E_*^{n+k}.

Для некраевой точки $a \in M^k$ положим $\delta'_a = \delta_a$, $\varepsilon'_a = \varepsilon_a$. Совокупность всех областей $U_a = f_a(K_{\varepsilon'_a}) \cap M^k$, $a \in M^k$ покрывает многообразие M^k. Пусть $U_{a_1}, \ldots, U_{a_p}$ — конечное покрытие многообразия M^k. Существует настолько малое число $\eta > 0$, что каждые две точки из M^k, расстояние между которыми не превосходит η, содержатся в какой-нибудь одной из областей указанного конечного покрытия. Пусть теперь δ — наименьшее из чисел δ'_{a_n}, $n = 1, \ldots, p$ и $\frac{\eta}{2}$. Так как $H_\delta(M^k) = H_\delta(U_{a_1}) \cup \ldots \cup H_\delta(U_{a_p})$, то $H_\delta(M^k)$ есть окрестность многообразия M^k в полосе E_*^{n+k}. Далее, для двух различных точек $z \in M^k$ и $z' \in M^k$ шары $H_\delta(z)$ и $H_\delta(z')$ не пересекаются. Действительно, если $\rho(z, z') \leqslant \delta$, то точки z и z' принадлежат одной области U_{a_n}, и потому, в силу ранее доказанного, шары $H_\delta(z)$ и $H_\delta(z')$ не могут пересечься. Если же $\rho(z, z') > \delta$, то эти шары не могут пересечься ввиду того, что расстояние между их центрами больше суммы их радиусов.

Итак, предложение «А» доказано.

Гладкие аппроксимации

В) Пусть $f^1(x)$ — *непрерывная* действительная числовая функция, заданная на гладком класса $m \geqslant 2$ компактном многообразии M^k и ε — положительное число. Существует тогда *гладкая* класса m действительная числовая функция $g^1(x)$, заданная на M^k и удовлетворяющая условию $|g^1(x) - f^1(x)| < \varepsilon$. Иначе говоря, непрерывную функцию на M^k можно с любой степенью точности аппроксимировать гладкой.

Докажем предложение «В». В силу теоремы 2, мы можем считать, что многообразие M^k вложено в эвклидово пространство E^l достаточно высокой размерности. Пусть Q — некоторый замкнутый куб, содержащий M^k. В силу известной теоремы Урысона (см. [9]), функцию $f^1(x)$, заданную на M^k, можно непрерывным образом распространить на весь куб Q. Эту функцию, заданную на Q, можно с точностью до ε аппроксимировать многочленом $g^1(x)$ от декартовых координат точки $x \in Q$. Рассматриваемая на M^k функция $g^1(x)$ является искомой.

Теорема 7. *Пусть M^k — гладкое класса $m \geqslant 2$ замкнутое многообразие, N^l — гладкое класса m компактное многообразие и f — непрерывное отображение многообразия N^l в многообразие M^k. Будем читать M^k метрическим пространством. Оказывается, что для* *любого положительного* ε *существует гладкое класса* $m-1$ *отображение* h *многообразия* N^l *в многообразие* M^k, *удовлетворяющее условию* $\rho(f(x),\ h(x))<\varepsilon$, $x\in N^l$. *Иначе говоря, непрерывное отображение многообразия* N^l *в* M^k *можно с любой степенью точности аппроксимировать гладким.*

Доказательство. В силу теоремы 2, мы можем считать, что многообразие M^k есть подмногообразие некоторого эвклидова пространства E^{n+k}. Пусть δ — число, определенное для этого подмногообразия в предложении «А», и $\varepsilon'<\frac{\delta}{\sqrt{n+k}}$. Компоненты вектора $f(x)$, $x\in N^l$ обозначим через $f^1(x),\ldots,f^{n+k}(x)$. В силу предложения «В» существует действительная числовая функция $g^i(x)$, $i=1,\ldots,n+k$ класса гладкости m, заданная на N^l и удовлетворяющая неравенству $|f^i(x)-g^i(x)|<\varepsilon$, $i=1,\ldots,n+k$. Вектор с компонентами $g^1(x),\ldots,g^{n+k}(x)$ обозначим через $g(x)$. Отображение g многообразия N^l в E^{n+k} имеет класс гладкости m и $g(N^l)\subset W_\delta$ (см. п. «А»). При достаточно малом ε' отображение $h=\pi g$ (см. п. «А») удовлетворяет требованиям теоремы.

C) Семейство непрерывных отображений f_t, $0\leqslant t\leqslant 1$ замкнутого многообразия N^l в многообразие M^k называется ***непрерывным семейством***, или *деформацией* отображения f_0 в отображение f_1, если $f_t(x)$ есть непрерывная функция пары переменных x, t. Пусть $N^l\times I$ — прямое произведение многообразия N^l на действительный числовой отрезок $I=[0, 1]$ (см. § 1, п. «K»). Положим $f_*(x, t)=f_t(x)$. Очевидно, что семейство f_t тогда и только тогда непрерывно, когда отображение f_* многообразия $N^l\times I$ непрерывно. Мы будем говорить, что семейство f_t является *гладким* класса m или что деформация f_t есть *гладкая* класса m, если отображение f_* является гладким класса m. Если отображения f_0 и f_1 связаны между собой гладкой деформацией, то они считаются *гладко гомотопными* между собой. Вполне очевидно, что отношение гладкой гомотопности отображений рефлексивно и симметрично. Однако транзитивность этого отношения не очевидна и требует доказательства. Проведем его.

Пусть f_{-1}, f_0, f_1 — три гладких класса m отображения многообразия N^l в многообразие M^k; f_t, $-1\leqslant t\leqslant 0$, — гладкая класса m деформация отображения f_{-1} в отображение f_0 и f_t, $0\leqslant t\leqslant 1$,— гладкая класса m деформация отображения f_0 в отображение f_1. Деформация f_t, $-1\leqslant t\leqslant 1$, очевидно, непрерывна, но при $t=0$ она может не быть гладкой, поэтому необходима ее перестройка для получения гладкой класса m деформации. Пусть n — нечетное натуральное число, причем $n\geqslant m$. Положим $g_t(x)=f_{t^n}(x)$. Легко видеть, что g_t, $-1\leqslant t\leqslant 1$, есть гладкая класса m деформация отображения $g_{-1}=f_{-1}$ в отображение $g_1=f_1$. Таким образом, транзитивность гладкой класса m гомотопности отображений доказана.

D) Пусть M^k и N^l — два гладких класса m замкнутых многообразия, причем многообразие M^k есть метрическое пространство. Существует тогда настолько малое положительное ε, что если f_0 и f_1 — два гладких класса m отображения многообразия N^l в многообразие M^k, отстоящих друг от друга меньше, чем на ε, т. е. удовлетворяющих условию $\rho(f_0(x), f_1(x)) < \varepsilon$, $x \in N^l$, то существует гладкая класса $m-1$ деформация отображения f_0 в отображение f_1.

Докажем предложение «D». В силу теоремы 2, можно считать, что M^k есть подмногообразие эвклидова пространства E^{n+k} достаточно высокой размерности. Пусть δ — число, определенное для $M^k \subset E^{n+k}$ в предложении «А». Будем считать, что метрика в многообразии M^k задана включением $M^k \subset E^{n+k}$, и выберем число ε настолько малым, что при $\rho(x, x') < \varepsilon$ отрезок, соединяющий точки x и x', лежит в W_δ. Положим

$$f_t(x) = \pi(f_0(x)(1-t) + f_1(x)t).$$

Очевидно, что f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, есть гладкая класса $m-1$ деформация отображения f_0 в отображение f_1 (см. п. «А»).

Теорема 8. *Пусть f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — такая непрерывная деформация отображений замкнутого многообразия N^l в замкнутое многообразие M^k, что отображения f_0 и f_1 являются гладкими класса m. Существует тогда гладкая класса $m-2$ деформация отображения f_0 в отображение f_1. Иными словами, если два гладких отображения можно связать непрерывной деформацией, то их можно связать и гладкой деформацией.*

Доказательство. Непрерывной деформации f_t соответствует (см. п. „С") непрерывное отображение f_* многообразия $N^l \times I$ в M^k. В силу теоремы 7, непрерывное отображение f_* можно с точностью до ε аппроксимировать гладким класса $m-1$ отображением g_* многообразия $N^l \times I$ в многообразие M^k. Гладкому отображению g_* соответствует гладкая деформация g_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, отображений многообразия N^l в M^k. При достаточно малом ε отображения f_i и g_i, $i = 0,1$ достаточно близки между собой, и потому существует между ними гладкая гомотопия класса $m-2$ (см. п. «D»). Из сказанного, в силу транзитивности понятия гладкой гомотопии, следует, что между отображениями f_0 и f_1 существует гладкая класса $m-2$ гомотопия.

Таким образом, теорема 8 доказана.

§ 6. ОСНОВНОЙ МЕТОД

В настоящем параграфе каждому гладкому отображению $(n+k)$-мерной сферы Σ^{n+k} в n-мерную сферу S^n ставится в соответствие *гладко оснащенное* подмногообразие M^k эвклидова пространства E^{n+k}. Оснащенность многообразия M^k означает, что в каждой его точке x

задана система $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ линейно независимых векторов, ортогональных к M^k, причем вектор $u_i(x)$ непрерывно зависит от $x \in M^k$. Оснащение называется гладким, если векторы $u_i(x)$ гладко зависят от x. Многообразие M^k вместе с его оснащением U называется *оснащенным многообразием* и обозначается через (M^k, U). Оказывается, что каждое гладко оснащенное многообразие (M^k, U) соответствует некоторому отображению сферы Σ^{n+k} в сферу S^n и что отображения, которым соответствуют совпадающие гладко оснащенные многообразия, гомотопны между собой. Двум гомотопным между собой непрерывным отображениям могут, однако, соответствовать не только не совпадающие, но даже не гомотопные между собой оснащенные многообразия. В связи с этим вводится понятие *гомологичности* двух оснащенных многообразий (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1), расположенных в одном эвклидовом пространстве E^{n+k}. Два оснащенных многообразия (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) называются гомологичными, если в произведении $E^{n+k} \times I$ пространства E^{n+k} на отрезок $I = [0, 1]$ существует компактное оснащенное подмногообразие (M^{k+1}, U), край которого состоит из заданных многообразий $M_0^k \times 0$ и $M_1^k \times 1$ и оснащение U которого на краю совпадает с оснащениями $U_0 \times 0$ и $U_1 \times 1$, заданными на $M_0^k \times 0$ и $M_1^k \times 1$. Оказывается, что два отображения сферы Σ^{n+k} в сферу S^n тогда и только тогда гомотопны между собой, когда соответствующие им гладко оснащенные многообразия гомологичны между собой (осуществляющее гомологию оснащение не предполагается гладким). Таким образом, проблема гомотопической классификации отображений сферы в сферу сводится к проблеме гомологической классификации гладко оснащенных многообразий. Следует, однако, признать, что вопрос о гомологической классификации оснащенных многообразий не является простым.

Оснащенные многообразия

Определение 2. Пусть E^{n+k} — эвклидово пространство, $y^1, \ldots, y^{n+k}$ — декартовы координаты в нем, E_0 и E_1 — две гиперплоскости пространства E^{n+k}, определяемые уравнениями $y^{n+k} = c_0$ и $y^{n+k} = c_1$, $c_0 < c_1$, и E_*^{n+k} — полоса, состоящая из всех точек пространства E^{n+k}, для которых $c_0 \leqslant y^{n+k} \leqslant c_1$. Пусть, далее, M^k — гладкое класса m компактное подмногообразие (см. § 1, п. «F») полосы E_*^{n+k} с краем M^{k-1}. Если многообразие M^k замкнуто, то гиперплоскости E_0 и E_1 не играют роли и мы будем считать, что $E_*^{n+k} = E^{n+k}$. Полную нормаль N_x в точке $x \in M^k$ будем рассматривать как векторное пространство с нулем в точке x и предположим, что

$$N_x \subset E_0 \cup E_1, \quad x \in M^{k-1},$$

т. е. что многообразие M^k ортогонально в точках своего края к краю полосы E_*^{n+k} (ср. § 5, п. «A»). Таким образом расположенное в полосе

E_*^{n+k} многообразие M^k будем считать *оснащенным*, если в каждом векторном пространстве N_x задан базис

$$u_1(x), \ldots, u_n(x),$$

причем вектор $u_i(x)$, рассматриваемый как вектор пространства E^{n+k}, является непрерывной функцией точки $x \in M^k$. Систему $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ будем называть *оснащением* многообразия M^k, а самое многообразие M^k вместе с оснащением $U(x)$ будем обозначать через $(M^k, U(x))$ и называть *оснащенным многообразием*. Оснащение $U(x)$ будем называть *ортонормальным*, если в каждой точке $x \in M^k$ базис $U(x)$ ортонормален. Оснащение $U(x)$ будем называть *гладким* класса m, если каждый вектор $u_i(x)$ есть гладкая класса m функция точки $x \in M^k$.

Следует отметить, что всякое оснащенное многообразие ориентируемо и получает *естественную ориентацию*, если содержащее его эвклидово пространство E^{n+k} ориентировано. Действительно, пусть $e_1, \ldots, e_k$ — линейно независимая система векторов, касающихся многообразия M^k в некоторой его точке x. Будем считать, что система $e_1, \ldots, e_k$ задает *естественную ориентацию* многообразия M^k, если система $e_1, \ldots, e_k, u_1(x), \ldots, u_n(x)$ соответствует положительной ориентации пространства E^{n+k}.

Нижеследующим определением устанавливается понятие гомологии между двумя k-мерными оснащенными подмногообразиями эвклидова пространства E^{n+k}.

Определение 3. Пусть (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) — два гладких оснащенных подмногообразия эвклидова пространства E^{n+k}. Пусть $E^{n+k+1} = E^{n+k} \times E^1$, где E^1 — действительная числовая прямая переменного t. Положим $E_t = E^{n+k} \times t$, $t = 0,1$ и обозначим через E_*^{n+k} полосу пространства E^{n+k+1}, ограниченную гиперплоскостями E_0 и E_1. Оснащенные многообразия (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) будем считать *гомологичными* между собой, если существует такое оснащенное подмногообразие (M^{k+1}, U) полосы E_*^{n+k+1}, что

$$M^{k+1} \cap E_0 = M_0^k \times 0, \quad M^{k+1} \cap E_1 = M_1^k \times 1,$$

причем оснащение U совпадает на $M_t^k \times t$ с оснащением $U_t \times t$, $t = 0,1$. Оснащенное многообразие (M_0^k, U_0) называется *гомологичным нулю*, если оно гомологично оснащенному многообразию (M_1^k, U_1), где M_1^k пусто. В этом случае оснащенное многообразие (M^{k+1}, U), осуществляющее гомологию, имеет своим краем многообразие M^k. Оказывается, что отношение гомологии рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что множество всех k-мерных оснащенных подмногообразий эвклидова пространства E^{n+k} распадается на классы попарно гомологичных между собой.

Очевидно, что соотношение гомологии для оснащенных многообразий рефлексивно и симметрично. Докажем его транзитивность. Пусть (M^k_{-1}, U_{-1}), (M^k_0, U_0) и (M^k_1, U_1) — три оснащенных многообразия эвклидова пространства E^{n+k}, для которых выполнены соотношения

$$(M^k_{-1}, U_{-1}) \sim (M^k_0, U_0), \quad (M^k_0, U_0) \sim (M^k_1, U_1).$$

Пусть, далее, $E^{n+k+1} = E^{n+k} \times E^1$ — прямое произведение эвклидова пространства E^{n+k} на действительную числовую прямую E^1 переменного t, в котором выделены полосы E_{*i}, $i-1 \leqslant t \leqslant i$, $i = 0,1$. Положим $E_* = E_{*0} \cup E_{*1}$. Будем считать, что гомология $(M^k_{i-1}, U_{i-1}) \sim (M^k_i, U_i)$ реализована в полосе E_{*i} многообразием (M^{k+1}_i, U_{*i}), $i = 0,1$. Пусть теперь m — достаточно большое нечетное натуральное число. Определим отображение ψ полосы E_* на себя, положив $\psi(x, t) = (x, \sqrt[m]{t})$, $x \in E^{n+k}$. Отображение ψ полосы E_* на себя, очевидно, гомеоморфно. Оно регулярно во всех точках (x, t), где $t \neq 0$. Легко проверить, что $M^{k+1} = \psi(M^{k+1}_0 \cup M^{k+1}_1)$ есть гладкое подмногообразие полосы E_*. Систему векторов $U_{*i}(x, t)$ обозначим через $U_*(x, t)$; это не может привести к недоразумению. Пусть N'_{xt} — нормаль к многообразию $M^{k+1}_0 \cup M^{k+1}_1$ в точке (x, t), $-1 \leqslant t \leqslant 1$, и N_{xt} — нормаль к многообразию M^{k+1} в точке $\psi(x, t)$. Легко проверяется, что ортогональное проектирование пространства N'_{xt} на пространство N_{xt} происходит без вырождения. Таким образом, принимая за $U(x, t)$ ортогональную проекцию системы $U_*(x, t)$ на N_{xt}, мы получаем оснащенное многообразие (M^{k+1}, U), осуществляющее гомологию $(M^k_{-1}, U_{-1}) \sim (M^k_1, U_1)$ в полосе E_*. Таким образом транзитивность отношения гомологии доказана.

Переход от отображений к оснащенным многообразиям

А) Пусть E^{r+1} — эвклидово векторное пространство. Сфера S^r размерности r и радиуса $\frac{1}{2}$ определяется в E^{r+1} уравнением

$$(x, x) = \frac{1}{4}.$$

Пусть p и q — две диаметрально противоположные точки сферы S^r, первую из которых будем называть *северным*, а вторую — *южным полюсом*. Пусть, далее, T_p и T_q — касательные пространства сферы S^r соответственно в точках p и q, а $e_1, \ldots, e_r$ — ортонормальный базис пространства T_p, задающий положительную ориентацию сферы S^r. Базис пространства T_q получим параллельным переносом векторов $e_1, \ldots, e_r$ из p в q. Выбранным базисам соответствуют в T_p и T_q определенные координатные системы. Введем теперь в областях $S^r \setminus q$, $S^r \setminus p$ координаты, определяемые системой $(p; e_1, \ldots, e_r)$.

Для этого обозначим через $\varphi(x)$ центральную проекцию точки $x \in S^r \setminus q$ из центра q на пространство T_p и примем координаты $x^1, \ldots, x^r$ точки $\varphi(x)$ в T_p за координаты точки x в $S^r \setminus q$. Точно так же при помощи центральной проекции из центра p на T_q мы определим координаты $y^1, \ldots, y^r$ точки $x \in S^r \setminus p$. Легко видеть, что при $x \in S^r \setminus (p \cup q)$ имеем

$$y^i = \frac{x^i}{(x^1)^2 + \ldots + (x^r)^2}, \tag{1}$$

$$x^i = \frac{y^i}{(y^1)^2 + \ldots + (y^r)^2}. \tag{2}$$

Таким образом, S^r есть аналитическое многообразие.

Поставим теперь в соответствие каждому гладкому отображению $(n+k)$-мерной ориентированной сферы Σ^{n+k} в n-мерную ориентированную сферу S^n некоторое замкнутое оснащенное многообразие (M^k, U) размерности k, расположенное в эвклидовом пространстве E^{n+k} размерности $n+k$.

Определение 4. Пусть f — гладкое отображение ориентированной сферы Σ^{n+k} в ориентированную сферу S^n. Зафиксируем северный полюс p' сферы Σ^{n+k}, южный ее полюс обозначим через q', касательное пространство в точке p' — через E^{n+k}, а центральную проекцию области $\Sigma^{n+k} \setminus q'$ на E^{n+k} из q' — через φ. За северный полюс p сферы S^n выберем произвольную правильную точку отображения f, отличную от $f(q')$ (см. теорему 4). Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторая ортонормальная система векторов, касательных к S^n в точке p, задающая ориентацию сферы S^n. Касательное пространство к сфере S^n в p обозначим через T_p. Так как p — правильная точка отображения f, то множество $f^{-1}(p)$ является гладким k-мерным подмногообразием многообразия Σ^{n+k} (см. § 1, п. «F»). Так как, сверх того, множество $f^{-1}(p)$ не содержит точки q', то $M^k = \varphi f^{-1}(p)$ есть гладкое замкнутое подмногообразие эвклидова пространства E^{n+k}. Отображение $f\varphi^{-1}$ многообразия E^{n+k} в многообразие S^n правильно в каждой точке $x \in M^k$. Касательное в точке x к многообразию E^{n+k} векторное пространство обозначим через E_x^{n+k} (см. § 1, п. «С»). Так как многообразие E^{n+k} есть эвклидово пространство, то пространство E_x^{n+k} можно отождествить с пространством E^{n+k}, приняв за начало точку x. Полную нормаль и полную касательную к многообразию M^k в точке x обозначим соответственно через N_x и T_x. Линейное отображение векторного пространства E_x^{n+k} на векторное пространство T_p, соответствующее отображению $f\varphi^{-1}$, обозначим через f_x (см. § 1, п. «Е»). Так как отображение $f\varphi^{-1}$ правильно в точке x, то $f_x(E^{n+k}) = T_p$, а так как $f\varphi^{-1}(M^k) = p$, то $f_x(T_x) = p$. Из этого следует, что отображение f_x векторного пространства N_x в векторное пространство T_p есть невырожденное отображение на T_p. Прообраз вектора e_i в пространстве N_x при отображении f_x обозначим через $u_i(x)$. Система $U(x)=\{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$, $x \in M^k$ составляет гладкое оснащение многообразия M^k. Оснащенное многообразие (M^k, U) мы ставим в соответствие отображению f: $f \rightarrow (M^k, U)$. Соответствие $f \rightarrow (M^k, U)$ зависит от случайного выбора системы $p, e_1, \ldots, e_n$, так что более полно соответствие $f \rightarrow (M^k, U)$ следует записать в виде

$$(f;\ p,\ e_1, \ldots, e_n) \rightarrow (M^k,\ U).$$

Полюс p' сферы Σ^{n+k} зафиксирован, т. е. будет оставаться неизменным при изучении всех отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n. Полюс p сферы S^n должен быть правильной точкой отображения f, отличной от $f(q')$, и потому его нельзя зафиксировать.

Нижеследующая теорема, показывающая, что гомотопным отображениям соответствуют гомологичные оснащенные многообразия, показывает, в частности, несущественность случайного выбора системы $p, e_1, \ldots, e_n$.

В дальнейшем будет показано (см. теорему 10), что из гомологичности оснащенных многообразий следует гомотопность соответствующих отображений.

Теорема 9. *Пусть f_0 и f_1—два гладких отображения ориентированной сферы Σ^{n+k} в ориентированную сферу S^n $(n \geqslant 2,\ k \geqslant 0)$ и пусть*

$$(f_0;\ p_0,\ e_{10}, \ldots, e_{n0}) \rightarrow (M_0^k,\ U_0),$$

$$(f_1;\ p_1,\ e_{11}, \ldots, e_{n1}) \rightarrow (M_1^k,\ U_1)$$

(см. определение 4). *Оказывается, что если при $n \geqslant 2$ отображения f_0 и f_1 гомотопны между собой, то оснащенные многообразия (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) гомологичны между собой.*

Доказательство. Так как ориентации сферы S^n, определяемые в ней касательными системами $e_{10}, \ldots, e_{n0}$ и $e_{11}, \ldots, e_{n1}$, совпадают, то существует изометрическое отображение ϑ сферы S^n на себя, осуществляемое путем непрерывного вращения, и потому гомотопное тождественному, причем такое, что система $p_0, e_{10}, \ldots, e_{n0}$ переходит при отображении ϑ в систему $p_1, e_{11}, \ldots, e_{n1}$. Положим $g_0=f_0$, $g_1=\vartheta^{-1}f_1$. Поскольку отображение ϑ гомотопно тождественному, то отображения g_0 и g_1 гомотопны между собой. Кроме того, легко видеть, что

$$(g_0;\ p,\ e_1, \ldots, e_n) \rightarrow (M_0^k,\ U_0),$$

$$(g_1,\ p,\ e_1, \ldots, e_n) \rightarrow (M_1^k,\ U_1),$$

где

$$(p,\ e_1, \ldots, e_n) = (p_0,\ e_{10}, \ldots, e_{n0}).$$

Так как гладкие отображения g_0 и g_1 гомотопны между собой, то существует гладкая гомотопия g_t, связывающая их (см. теорему 8); этой деформации соответствует гладкое отображение g_* многообразия $\Sigma^{n+k} \times I$ в S^n (см. § 5, п. «С»). Определим отображение φ_* многообразия $(\Sigma^{n+k} \setminus q') \times I$ на прямое произведение $E^{n+k} \times I$, положив

$$\varphi_*(x, t) = (\varphi(x), t), \tag{3}$$

и будем рассматривать произведение $E^{n+k} \times I$ как полосу E_*^{n+k+1} в пространстве $E^{n+k+1} = E^{n+k} \times E^1$, где E^1 — действительная числовая прямая. Относительно отображения g_* сделаем следующее допущение.

a) Точка p является правильной точкой отображения g_* многообразия $\Sigma^{n+k} \times I$ и не принадлежит множеству $g\ (q' \times I)$.

В силу предположения «а», множество $M^{k+1} = \varphi_* g_*^{-1}(p)$ есть гладкое компактное подмногообразие полосы E_*^{n++1}. Через N_x обозначим нормаль в пространстве E^{n+k+1} к многообразию M^{k+1} в точке $x \in M^{k+1}$. Так как отображение $g_* \varphi_*^{-1}$ правильно в точке x, то на многообразии N_x оно регулярно в точке x и потому системе векторов $e_1, \ldots, e_n$ соответствует в N_x система векторов $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ (ср. определение 4). Сделаем относительно отображения g_* еще одно допущение.

b) Многообразие M^{k+1} на своей границе ортогонально к краю полосы E_*^{n+k+1} (см. определение 2).

Из допущения «b» следует, что $U(x)$ есть оснащение многообразия M^{k+1}, и легко видеть, что оснащенное многообразие (M^{k+1}, U) осуществляет гомологию между оснащенными многообразиями (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) (см. определение 3). Таким образом, для доказательства теоремы нам достаточно построить такую гладкую гомотопию g_t, соединяющую отображения g_0 и g_1, для которой допущения «а» и «b» были бы выполнены. Займемся этим.

Пусть h_t — произвольная гладкая гомотопия, связывающая отображения g_0 и g_1. Подправим ее так, чтобы реализовать допущение «а». Предполагается, что p является правильной точкой отображений g_0 и g_1 и не совпадает с точками $g_0(q')$ и $g_1(q')$. Из этого следует, что существует положительное число ε, удовлетворяющее следующим условиям. При $p_* \in S^n$, $\rho(p, p_*) < \varepsilon$ и $t \leqslant \varepsilon$ или же $t \geqslant 1 - \varepsilon$ точка p_* является правильной для отображения h_t и $\rho(h_t(q'), p) > \varepsilon$. Фиксируем положительное число ε, обладающее указанными свойствами, и пусть p_* — правильная точка отображения g_*, не принадлежащая множеству $h_*(q' \times I)$ и удовлетворяющая условию $\rho(p, p_*) < \varepsilon$. В силу теорем 4 и 1, такая точка p_* существует. Будем считать, что сфера S^n расположена в эвклидовом векторном пространстве E^{n+1} и пусть E^{n-1} — линейное подпространство пространства E^{n+1}, ортогональное к векторам p и p_*. Вращение сферы S^n на угол α вокруг E^{n-1} обозначим через ϑ_α, и пусть $\vartheta_\beta(p)=p_*$, $0<\beta<\pi$. Допустим, что $\chi(t)$ — гладкая действительная числовая функция параметра t, заданная на отрезке $0\leqslant t\leqslant 1$ и обладающая следующими свойствами

$$0\leqslant\chi(t)\leqslant 1,\quad \chi(0)=\chi(1)=0;$$

$$\chi(t)=1 \text{ при } \varepsilon\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon.$$

Положим $\eta_t=\vartheta_{\beta\chi(t)}$. Так определенное вращение η_t сферы S^n вокруг E^{n-1}, зависящее от параметра t, переводит при изменении t от 0 до ε точку p в точку p_*, а впоследствии при изменении t от $1-\varepsilon$ до 1 возвращает точку p в исходное положение. Определим теперь семейство отображений l_t, положив

$$l_t=(\eta_t)^{-1}h_t.$$

Семейство это гладко и соединяет отображения g_0 и g_1. Оказывается, что при $g_t=l_t$ допущение «а» выполнено. При $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$ или $1-\varepsilon\leqslant\leqslant t\leqslant 1$ имеем $l_t(q')\neq p$. При $\varepsilon\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon$ множество $l_t^{-1}(p)$ совпадает с множеством $h_t^{-1}(p_*)$ и потому $l_t(q')$ не совпадает с p и в этом случае. Докажем, что p есть правильная точка отображения l_*. Пусть $(a, t_0)\in l_*^{-1}(p)$, и пусть $x^1, \ldots, x^{n+k}$ — локальные координаты в окрестности точки a. Чтобы точка (a, t_0) была правильной для отображения l_*, необходимо и достаточно иметь среди векторов

$$\frac{\partial\varphi l_*(a, t_0)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\varphi l_*(a, t_0)}{\partial x^{n+k}}, \frac{\partial\varphi l_*(a, t_0)}{\partial t}$$

n линейно независимых. При $0\leqslant t_0\leqslant\varepsilon$ или $1-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant 1$ уже среди первых $n+k$ из этих векторов содержится n линейно независимых в силу выбора числа ε. При $\varepsilon\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon$ среди выписанных $n+k+1$ векторов имеется n линейно независимых, в силу выбора точки p_*. Таким образом, при $g_t=l_t$ допущение «а» выполнено.

Чтобы реализовать допущение «b», построим гладкую действительную числовую функцию $s(t)$ параметра t, $0\leqslant t\leqslant 1$, удовлетворяющую условиям

$$s(t)=0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3},$$

$$s(t)=1 \text{ при } \frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\frac{ds}{dt}>0 \text{ при } \frac{1}{3}<t<\frac{2}{3},$$

и положим

$$g_t=l_{s(t)}.$$

Покажем прежде всего, что для гомотопии g_t попрежнему выполнено допущение «а». Так как $l_{s(t)}(q')\neq p$, то и $g_t(q')\neq p$. Пусть теперь (a, t_0) — произвольная точка множества $g_*^{-1}(p)\subset\Sigma^{n+k}\times I$, и $x^1, \ldots, x^{n+k}$ — координаты в окрестности точки a в Σ^{n+k}. Из $(a, t_0)\in g_*^{-1}(p)$ следует, что $(a, s(t_0)) \in l_*^{-1}(p)$. Чтобы отображение g_* было правильно в точке (a, t_0), необходимо и достаточно иметь среди векторов

$$\frac{\partial\varphi g_*(a, t_0)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\varphi g_*(a, t_0)}{\partial x^{n+k}}, \frac{\partial\varphi g_*(a, t_0)}{\partial t}$$

n линейно независимых. Чтобы точка $(a, s(t_0))$ была правильной точкой отображения l_*, необходимо и достаточно среди векторов

$$\frac{\partial\varphi\, l_*(a, s(t_0))}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\varphi\, l_*(a, s(t_0))}{\partial x^{n+k}}, \frac{\partial\varphi\, l_*(a, s(t_0))}{\partial s}$$

иметь n линейно независимых. При $\frac{1}{3} \leqslant t_0 \leqslant \frac{2}{3}$ мы имеем $\frac{\partial\varphi\, g_*(a, t_0)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi\, l_*(a, s(t_0))}{\partial s} \cdot \frac{ds(t_0)}{dt}$, где $\frac{ds(t_0)}{dt} > 0$, и потому из правильности точки $(a, s(t_0))$ отображения l_* следует правильность точки (a, t_0) отображения g_*. При $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1$ точка a принадлежит $l_0^{-1}(p)$ или соответственно $l_1^{-1}(p)$, а потому уже среди векторов

$$\frac{\partial\varphi g_*(a, t_0)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\varphi g_*(a, t_0)}{\partial x^{n+k}}$$

содержится n линейно независимых. Таким образом, для отображения g_t выполнено допущение «а».

Так как при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1$ мы имеем $g_t = g_0$ или соответственно $g_t = g_1$, то ортогональность многообразия M^{k+1} к краю полосы E_*^{n+k+1} очевидна.

Таким образом, теорема 9 доказана.

Теорема 9 доказана здесь лишь для случая $n \geqslant 2$; ее нетрудно было бы доказать и для $n = 1$. Однако для этого случая она не представляет интереса, так как классификация отображений сферы Σ^{k+1} в сферу S^1 весьма элементарна (см. теорему 12 относительно случая $k = 0$ и теорему 18 относительно случая $k > 0$).

Переход от оснащенных многообразий к отображениям

В) Пусть $\dot{N}^r$ — векторное пространство с фиксированным в нем базисом $u_1, \ldots, u_r$. Через K'_α обозначим область пространства N^r, образованную векторами $\xi = \xi^1 u_1 + \ldots + \xi^r u_r$, удовлетворяющими неравенству $(\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^r)^2 < \alpha^2$. Определим отображение λ_α пространства N^r на сферу S^r, переводящее точку $\xi \in K'_\alpha$ в точку сферы S^r с координатами

$$x^i = \frac{\xi^i \cdot \alpha^{2m}}{[\alpha^2 - (\xi^1)^2 - \ldots - (\xi^r)^2]^m}$$

(см п. «А») и переводящее все множество $N^r \diagdown K'_\alpha$ в точку $q \in S^r$. Из соотношений (1) и (2) непосредственно следует, что отображение λ_α имеет класс гладкости m. Непосредственно проверяется, далее, что функциональная матрица отображения λ_α в точке $\xi=(0,\ldots,0)$ является единичной. Примем теперь за N^r пространство T_p с базисом $e_1,\ldots,e_r$ и положим $\omega_\alpha(x)=\lambda_\alpha\varphi(x)$, $x\in S^r\diagdown q$ и $\omega_\alpha(q)=q$. Полученное так гладкое класса m отображение ω_α сферы S^r на себя, как легко видеть, гомотопно тождественному. Оно гладко гомеоморфно отображает шаровую окрестность $K_\alpha=\varphi^{-1}(K'_\alpha)$ на $S^r\diagdown q$ и переводит все множество $S^r\diagdown K_\alpha$ в точку q.

Теорема 10. *Пусть Σ^{n+k} и S^n — две ориентированные сферы, p' — фиксированная точка сферы Σ^{n+k} и E^{n+k} — пространство, касательное к Σ^{n+k} в точке p'. Пусть, далее, p_0 и p_1 — две точки сферы S^n, и $e_{10},\ldots,e_{n0}$; $e_{11},\ldots,e_{n1}$ — ортонормальные системы векторов, касательных к S^n в точках соответственно, p_0 и p_1, а (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) — два гомологичных между собой гладко оснащенных многообразия из E^{n+k}. Оказывается, что существует такое отображение g_0 сферы Σ^{n+k} в сферу S^n, что (см. определение 4)*

$$(g_0;\ p_0,\ e_{10},\ldots,e_{n0})\to(M_0^k,\ U_0).$$

Далее оказывается, что если f_0 и f_1 — два таких отображения сферы Σ^{n+k} в сферу S^n, что

$$(f_0;\ p_0,\ e_{10},\ldots,e_{n0})\to(M_0^k,\ U_0),$$

$$(f_1;\ p_1,\ e_{11},\ldots,e_{n1})\to(M_1^k,\ U_1),$$

то отображения f_0 и f_1 гомотопны между собой.

Доказательство. Так как системы касательных векторов $e_{10},\ldots,e_{n0}$ и $e_{11},\ldots,e_{n1}$ задают на сфере S^n одну и ту же ориентацию, то существует изометрическое отображение ϑ сферы S^n на себя, получающееся из тождественного непрерывным вращением, при котором система $p_0,\ e_{10},\ldots,e_{n0}$ переходит в систему $p_1,\ e_{11},\ldots,e_{n1}$. Отображения f_1 и $\vartheta^{-1}f_1$ гомотопны между собой и

$$(\vartheta^{-1}f_1,\ p_0,\ e_{10},\ldots,e_{n0})\to(M_1^k,\ U_1).$$

Таким образом, для доказательства второй части теоремы нам достаточно рассмотреть лишь случай, когда

$$(p_0,\ e_{10},\ldots,e_{n0})=(p_1,\ e_{11},\ldots,e_{n1}),$$

т. е. доказать, что из соотношений

$$(f_0;\ p,\ e_1,\ldots,e_n)\to(M^k,\ U),\tag{4}$$

$$(f_1,\ p,\ e_1,\ldots,e_n)\to(M^k,\ U)\tag{5}$$

следует гомотопность отображений f_0 и f_1.

Докажем прежде всего, что если

$$(M_0^k,\ U_0)=(M_1^k,\ U_1)=(M^k,U), \tag{6}$$

то отображения f_0 и f_1 гомотопны между собой.

Пусть N_α — нормаль в точке a к многообразию M^k в эвклидовом пространстве E^{n+k}, а $\eta^1, \ldots, \eta^n$ — компоненты вектора $\eta \in N_a$ относительно базиса $u_1(a), \ldots, u_n(a)$ пространства N_a. В окрестности $S^n \setminus q$ точки p в сфере S^n введем координаты $x^1, \ldots, x^n$, исходя из северного полюса p и ортонормальной системы $e_1, \ldots, e_n$, заданной в p (см п. «А»). Из соотношений (4)—(6) следует, что в координатной форме отображения f_0 и f_1 пространства N_a в S^n вблизи точки a записываются в виде

$$x^i = \eta^i + \ldots; \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$x^i = \eta^i + \ldots; \quad i = 1, \ldots, n,$$

где выписаны лишь члены первого порядка, а члены более высоких порядков опущены. Таким образом, отображения f_0 и f_1 пространства N_a в S^n вблизи точки a совпадают с точностью до членов второго порядка. Из этого следует, что при $\eta \in W_\delta$, где δ — достаточно мало (см. § 5, п. «А»), геодезический отрезок $(f_0\varphi^{-1}(\eta),\ f_1\varphi^{-1}(\eta))$ на сфере S^n, соединяющий точки $f_0\varphi^{-1}(\eta)$ и $f_1\varphi^{-1}(\eta)$, не проходит через точку p. Положим $W'_\delta = \varphi^{-1}(W_\delta)$. Так как область W'_δ содержит множество $f_0^{-1}(p) = f_1^{-1}(p) = \varphi^{-1}(M^k)$, то замкнутые множества $f_0(S^n \setminus W'_\delta)$ и $f_1(S^n \setminus W'_\delta)$ не содержат точки p. При $\xi \in W'_\delta$ положим $\sigma(\xi) = \rho(\varphi(\xi), \pi\varphi(\xi))$. Точку $f_0(\xi)$, $\xi \in W'_\delta$ заставим равномерно перемещаться по геодезическому отрезку $(f_0(\xi), f_1(\xi))$ так, чтобы она прошла этот отрезок за единицу времени. Положение движущейся точки в момент времени t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, обозначим через $h(\xi, t)$. Пусть $\chi(\sigma)$ — действительная числовая функция переменного σ, заданная на отрезке $0 \leqslant \sigma \leqslant \delta$ и обладающая следующими свойствами:

$$\chi(\sigma) = 1 \text{ при } 0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}\delta, \quad \chi(\delta) = 0,$$

$$0 \leqslant \chi(\sigma) \leqslant 1 \text{ при } 0 \leqslant \sigma \leqslant \delta.$$

Положим

$$h_t(\xi) = h(\xi, t\chi(\sigma(\xi))) \text{ при } \xi \in W'_\delta,$$

$$h_t(\xi) = f_0(\xi) \text{ при } \xi \in S^n \setminus W'_\delta.$$

Семейство отображений h_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ осуществляет непрерывную деформацию отображения $f_0 = h_0$ в отображение h_1. При этом отображение h_1 обладает следующими свойствами. Существует настолько малая шаровая окрестность K_α точки p в сфере S^n, что

$$h_1^{-1}(K_\alpha) = f_1^{-1}(K_\alpha) = V \subset W'_\delta,$$

и при $\xi \in V$ имеем

$$h_1(\xi) = f_1(\xi). \tag{7}$$

Теперь уже легко доказать, что отображения f_0 и f_1 гомотопны между собой. Из (7) следует, что отображения $\omega_\alpha h_1$ и $\omega_\alpha f_1$ (см. п. «В») совпадают. Так как отображение ω_α гомотопно тождественному, то отображения h_1 и f_1 гомотопны между собой, а потому гомотопны между собой и отображения f_0 и f_1.

Итак, доказано, что при условии (6) из (4) и (5) следует гомотопность отображений f_0 и f_1.

Покажем теперь, что из гомологичности оснащенных многообразий (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1), соответствующих отображениям f_0 и f_1, следует гомотопность этих отображений. Пусть (M^{k+1}, U) — оснащенное подмногообразие полосы $E^{n+k} \times I \subset E^{n+k} \times E^1 = E^{n+k+1}$, осуществляющее гомологию между оснащенными многообразиями (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) (см. определение 3). Нормаль в точке $a \in M^{k+1}$ к многообразию M^{k+1} в пространстве E^{n+k+1} обозначим через N_a, и пусть W_δ — окрестность многообразия M^{k+1} в полосе $E^{n+k} \times I$, построенная в § 5 в предложении «А». В векторном пространстве N_a задан базис $U(a)$. Положительное число α выберем так, чтобы для произвольной точки $a \in M^{k+1}$ имело место включение $\overline{K}_\alpha \subset W_\delta$ (см. п. «В»). Определим теперь отображение g_* многообразия $\Sigma^{n+k} \times I$ в сферу S^n, положив

$$g_*(\xi) = \lambda_\alpha(\varphi_*(\xi)) \text{ при } \varphi_*(\xi) \in H_\delta(a) \text{ (см. § 5, п. «А»)},$$

$$g_*(\xi) = q \text{ при } \varphi_*(\xi) \notin W_\delta \text{ [см. (3)]}.$$

Отображению g_* многообразия $\Sigma^{n+k} \times I$ в сферу S^n соответствует деформация g_t отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n. Из свойств отображения λ_α (см. п. «В») непосредственно вытекает, что оснащенные многообразия, соответствующие отображениям g_0 и g_1 совпадают с заданными оснащенными многообразиями (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1). Так как отображениям f_0 и g_0 соответствует одно и то же оснащенное многообразие (M_0^k, U_0), то отображения f_0 и g_0, в силу доказанного ранее, гомотопны между собой. В силу тех же соображений, гомотопны между собой и отображения f_1 и g_1. Так как отображения g_0 и g_1 связаны гомотопией g_t, то они также гомотопны между собой. Из сказанного и из транзитивности понятия гомотопии следует, что отображения f_0 и f_1 гомотопны между собой.

Итак, вторая часть теоремы доказана. Доказательство первой части содержится в последней конструкции. Проведем его. Нам задано оснащенное многообразие (M^k, U). Нормаль в точке $a \in M^k$ обозначим через N_a. В векторном пространстве N_a имеется базис $U(a)$. Положительное число α определим так, чтобы для произвольной точки $a \in M^k$

выполнялось включение $\overline{K}_\alpha \subset W_\delta$ (см. § 5, п. «А»). Отображение g сферы Σ^{n+k} в сферу S^n зададим соотношениями

$$g(\xi) = \lambda_\alpha(\varphi(\xi)) \text{ при } \varphi(\xi) \in H_\delta(a),$$
$$g(\xi) = q \qquad \text{ при } \varphi(\xi) \notin W_\delta.$$

Из свойств отображения λ_α непосредственно следует, что отображению g соответствует оснащенное многообразие (M^k, U). Таким образом, первая часть теоремы также доказана.

Итак, теорема 10 полностью доказана.

Было бы легко доказать, что каждое оснащенное подмногообразие (M^k, U) эвклидова пространства E^{k+1} гомологично нулю. Таким образом, для $n = 1$ теоремы 9 и 10 интереса не представляют.

§ 7. ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУППА ОСНАЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В настоящем параграфе прежде всего определяется понятие деформации оснащенного многообразия. Если многообразие гладко без самопересечений деформируется в эвклидовом пространстве, а его оснащение непрерывно следует за ним, то говорят, что мы имеем непрерывную деформацию оснащенного многообразия. Легко доказывается, что два оснащенных многообразия, получаемые друг из друга деформацией, гомологичны между собой. Далее вводится операция сложения классов гомологий оснащенных многообразий эвклидова пространства, так что при этом множество всех классов гомологий превращается в коммутативную группу. Если π_1 и π_2 — два класса гомологий, а $(M^k, U_1) \in \pi_1$ и $(M_2^k, U_2) \in \pi_2$, то сумма $\pi_1 + \pi_2$ определяется как класс, содержащий объединение обоих оснащенных многообразий. При этом необходимо, конечно, чтобы многообразия M_1^k и M_2^k не пересекались между собой и чтобы они не были «запутаны» между собой, что возможно, когда размерность объемлющего эвклидова пространства меньше $2k + 2$. Отсутствие запутанности означает, что многообразия M_1^k и M_2^k можно далеко отодвинуть друг от друга при помощи деформации каждого из них. Чтобы оба эти условия были осуществлены, предполагается, что многообразия M_1^k и M_2^k лежат по разные стороны некоторой гиперплоскости.

Гомотопии оснащенных многообразий

А) Пусть E^r — эвклидово пространство, X — некоторое компактное метрическое пространство и $N_{x,t}^n$ — его линейное подпространство с фиксированным в нем началом $O(x, t)$, непрерывно зависящее от пары (x, t), $x \in X$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть, далее, $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ — базис векторного пространства $N_{x,0}^n$, непрерывно зависящий от $x \in X$. Существует тогда базис $U(x, t)$ пространства $N^n_{x,t}$, непрерывно зависящий от пары x, t и совпадающий с $U(x)$ при $t=0$. Если при этом векторное пространство $N^n_{x,t}$ не зависит от t для $x \in Y \subset X$, то имеем $U(x, t) = U(x)$ при $x \in Y$.

Докажем предложение «А». Пусть ε — настолько малое положительное число, что при $|t-t'| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$ ортогональное проектирование пространства $N^n_{x,t}$ на пространство $N^n_{x,t'}$ происходит без вырождения. Положим $U(x, 0) = U(x)$. Допустим, что базис $U(x, t)$ уже построен при $0 \leqslant t \leqslant p\varepsilon < 1$, $x \in X$ (p — целое неотрицательное). Для $p\varepsilon \leqslant t \leqslant (p+1)\varepsilon$ базис $U(x, t)$ построим, параллельно перенося базис $U(x, p\varepsilon)$ в точку $O(x, t)$ и проектируя его затем ортогонально на $N^n_{x,t}$.

В) Пусть E^{n+k} — эвклидово пространство с выбранными в нем декартовыми координатами $y^1, \ldots, y^{n+k}$; E^{n+k}_* — полоса, определяемая условием $c_0 \leqslant y^{n+k} \leqslant c_1$, ограниченная гиперплоскостями E_0 и E_1, и M^k — гладкое подмногообразие полосы E^{n+k}_*, ортогональное в своих краевых точках к краю $E_0 \cup E_1$ полосы E^{n+k}_* (см. § 5, п. «А»). Гладкое семейство отображений e_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ многообразия M^k в полосу E^{n+k}_*, будем называть гладкой деформацией подмногообразия M^k полосы E^{n+k}_*, если e_0 есть тождественное отображение, а e_t — регулярное гомеоморфное отображение многообразия M^k на подмногообразие $e_t(M^k)$ полосы E^{n+k}_*, ортогональное в своих краевых точках к краю полосы E^{n+k}_*. Если U есть оснащение многообразия M^k и определено оснащение $e_t(U)$ многообразия $e_t(M^k)$, непрерывно зависящее от параметра t, причем $e_0(U) = U$, то будем говорить, что e_t есть деформация оснащенного многообразия (M^k, U). (В случае замкнутого многообразия M^k будем считать, что $E^{n+k}_* = E^{n+k}$.) Если при произвольном t отображение e_t многообразия M^k является тождественным, то e_t дает деформацию оснащения U фиксированного многообразия M^k, осуществляющую гомотопию оснащений $e_0(U)$ и $e_1(U)$ многообразия M^k. Оказывается, что если e_t есть гладкая деформация подмногообразия M^k полосы E^{n+k}_* и задано некоторое оснащение U многообразия M^k, то существует деформация e_t оснащенного многообразия (M^k, U). Если при этом деформация e_t оставляет краевые точки многообразия M^k неподвижными, то оснащение $e_t(U)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ многообразия $e_t(M^k)$ можно построить так, что на краях многообразия $e_t(M^k)$ оно будет совпадать с исходным оснащением U.

Докажем предложение «В». Пусть (M^k, U) — оснащенное подмногообразие полосы E^{n+k}_*, и e_t — заданная гладкая деформация подмногообразия M^k полосы E^{n+k}_*. Построим оснащение $e_t(U)$ подмногообразия $e_t(M^k)$, непрерывно зависящее от параметра t так, чтобы $e_0(U) = U$. Нормаль в точке $e_t(x)$ к многообразию $e_t(M^k)$ обозначим через N_{xt}.

Принимая систему векторов $U(x)$ за исходный базис пространства N_{x0}, мы получим, согласно «А», базис $U(x, t)$ векторного пространства N_{xt} с началом в точке $e_t(x)$. Системы векторов $U(x, t)$, $x \in M^k$ образуют при фиксированном t искомое оснащение $e_t(U)$. Таким образом, предложение «В» доказано.

С) Пусть (M^k, U) — гладкое оснащенное подмногообразие эвклидова пространства E^{n+k}, и e_t — его деформация в E^{n+k}. Оказывается, что оснащенные многообразия $(e_0(M^k), e_0(U))$ и $(e_1(M^k), e_1(U))$ гомологичны между собой.

Докажем это. Положим $s(t) = 3t^2 - 2t^3$. Непосредственно проверяется, что функция $s(t)$ удовлетворяет условиям

$$s(0) = 0, \ s(1) = 0, \ s'(0) = 0, \ s'(1) = 0,$$

$$s'(t) > 0 \text{ при } 0 < t < 1.$$

Введем деформацию f_t оснащенного многообразия (M^k, U), положив $f_t = e_{s(t)}$. Мы имеем, очевидно,

$$f_0 = e_0, \ f_1 = e_1.$$

Для доказательства гомологичности оснащенных многообразий $(f_0(M^k), f_0(U))$ и $(f_1(M^k), f_1(U))$ в полосе $E_*^{n+k+1} = E^{n+k} \times I \subset E^{n+k+1}$, определим подмногообразие M^{k+1} как совокупность всех точек вида $(f_t(x), t)$, $x \in M^k$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть N'_{xt} — нормаль в точке $f_t(x)$ к многообразию $f_t(M^k)$ в пространстве E^{n+k}. В пространстве E^{n+k+1} нормаль к многообразию M^{k+1} в точке $(f_t(x), t)$ обозначим через N_{xt}. Легко видеть, что $N_{xt} = (N'_{xt}, t)$ при $t = 0, 1$, т. е. что в краевых точках многообразие M^{k+1} ортогонально к краю полосы E_*^{n+k+1}. В точках $(f_t(x), t)$, где t отлично от нуля и единицы, нормали (N'_{xt}, t) и N_{xt} различны, и потому система $f_t(U(x))$ не лежит в N_{xt}. Для получения из системы $f_t(U(x))$ системы $U(x, t)$, лежащей в N_{xt}, спроектируем систему $f_t(U(x))$ ортогонально на пространство N_{xt}. Легко видеть, что это проектирование происходит без вырождения. Таким образом, система $U(x, t)$ линейно независима и потому составляет оснащение многообразия M^{k+1}. Так как на краях $(f_0(M^k), 0)$ и $(f_1(M^k), 1)$ оснащение $U(x, t)$ совпадает с заданными оснащениями $(f_0(U), 0)$ и $(f_1(U), 1)$, то оснащенное многообразие (M^{k+1}, U) осуществляет гомологию между оснащенными многообразиями

$$(f_0(M^k), f_0(U)) \text{ и } (f_1(M^k), f_1(U)).$$

D) Всякое оснащение гладкого класса m многообразия гомотопно гладкому класса $m-1$ оснащению того же многообразия.

Пусть M^k — гладкое класса m подмногообразие полосы E_*^{n+k} и $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ — некоторое его оснащение. Компоненты вектора $u_i(x)$ в пространстве E^{n+k} обозначим через $u_i^1(x), \ldots, u_i^{n+k}(x)$. Пусть ε — положительное число и $v_i^j(x)$ — такая действительная числовая функция класса гладкости m, заданная на M^k, что $|u^j(x) - v_i^j(x)| < \varepsilon$ (см. § 5, п. «В»). Вектор пространства E^{n+k} с компонентами $v_i^1(x), \ldots, v_i^{n+k}(x)$ обозначим через $v_i(x)$, и пусть $w_i(x)$ есть ортогональная проекция вектора $v_i(x)$ на N_x. Положим

$$W_t(x) = \{u_i(x)\cdot(1-t) + w_i(x)\cdot t\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Система $W_t(x)$ невырождена при достаточно малом ε и осуществляет деформацию исходного оснащения $U(x) = W_0(x)$ в гладкое класса $m-1$ оснащение $W_1(x)$.

В § 6 указывалось, что гомотопическая классификация отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n эквивалентна гомологической классификации гладко оснащенных k-мерных подмногообразий эвклидова пространства E^{n+k} (см. теоремы 9 и 10). В силу предложений «С» и «D», можно снять требование гладкости оснащения и рассматривать произвольные непрерывные оснащения гладких многообразий. Действительно, каждое непрерывное оснащение гладкого многообразия гомотопно гладкому оснащению (см. п «D»), а гомотопные между собой (не обязательно гладким образом) гладкие оснащения одного и того же многообразия гомологичны между собой (см. п. «С») и потому соответствуют гомотопным отображениям сфер.

Гомологическая группа Π_n^k оснащенных многообразий

Е) Пусть (M^k, U) — оснащенное подмногообразие эвклидова пространства E^{n+k} и f — отображение подобия пространства E^{n+k} на себя. Очевидно, что $(f(M^k), f(U))$ также представляет собой оснащенное подмногообразие эвклидова пространства E^{n+k}. Если отображение f сохраняет ориентацию пространства E^{n+k}, то, как легко видеть, существует такое гладко зависящее от параметра t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ семейство f_t отображений подобия пространства E^{n+k} на себя, что f_0 есть тождественное отображение, а $f_1 = f$. Семейство f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ осуществляет гладкую деформацию оснащенного многообразия (M^k, U) в оснащенное многообразие $(f(M^k), f(U))$. Таким образом, эти оснащенные многообразия гомологичны между собой (см. «С»). Из сказанного следует, что если оснащенное многообразие переместить в пространстве как твердое тело или подобно сжать, то оно не выйдет из своего класса гомологий.

Определение 5. Совокупность всех оснащенных k-мерных подмногообразий эвклидова пространства E^{n+k} разобьем на классы попарно гомологичных между собой. Множество всех полученных классов гомологий обозначим через Π_n^k и следующим образом определим в нем операцию сложения. Пусть π_1 и π_2 — два элемента из Π_n^k. Выберем в E^{n+k} произвольным образом гиперплоскость E^{n+k-1}, а из классов π_1 и π_2 выберем по одному представителю (M_1^k, U_1) и (M_2^k, U_2) таким образом, чтобы многообразия M_1^k и M_2^k лежали по разные стороны от гиперплоскости E^{n+k-1}. В силу предложения «E», это всегда возможно. Оснащенное многообразие $(M^k, U)=(M_1^k, U_1)\cup(M_2^k, U_2)$ определим как объединение многообразий M_1^k и M_2^k, взятых с имеющимися на них оснащениями. Оказывается, что класс гомологий π оснащенного многообразия (M^k, U) не зависит от случайного выбора гиперплоскости E^{n+k-1} и представителей (M_1^k, U_1), (M_2^k, U_2) классов гомологий π_1, π_2. По определению будем считать, что $\pi=\pi_1+\pi_2$. Оказывается, далее, что в силу этого определения сложения множество Π_n^k представляет собой коммутативную группу. Нулем группы Π_n^k служит класс гомологичных нулю оснащенных многообразий. Элемент $-\pi$, противоположный элементу π, можно описать следующим образом. Пусть E^{n+k-1} — произвольная гиперплоскость из $\hat{E}^{n+k}$, $(\hat{M}^k, \hat{U})$ — некоторое оснащенное многообразие класса π и σ — симметрия пространства E^{n+k} относительно гиперплоскости E^{n+k-1}. Класс гомологий $-\pi$ содержит оснащенное многообразие $(\sigma(M^k), \sigma(U))$.

Докажем прежде всего, что так определенная операция сложения в множестве Π_n^k инвариантна. Пусть наряду с гиперплоскостью E^{n+k-1} и оснащенными многообразиями (M_1^k, U_1) и (M_2^k, U_2) в пространстве E^{n+k} выбрана гиперплоскость $\hat{E}^{n+k-1}$ и оснащенные многообразия $(\hat{M}_1^k, \hat{U}_1)$ и $(\hat{M}_2^k, \hat{U}_2)$ из классов π_1 и π_2. Покажем, что оснащенные многообразия $(M_1^k, U_1)\cup(M_2^k, U_2)$ и $(\hat{M}_1^k, \hat{U})\cup(\hat{M}_2^k, \hat{U}_2)$ принадлежат к одному классу гомологий. Этим инвариантность сложения будет доказана. Очевидно, что существует сохраняющее ориентацию изометрическое отображение f пространства E^{n+k} на себя, при котором $f(\hat{E}^{n+k-1})=E^{n+k-1}$, а многообразия $f(\hat{M}_1^k)$ и M_1^k находятся по одну сторону от гиперплоскости E^{n+k-1}. В силу замечания «E» имеем

$$f(\hat{M}_i^k, \hat{U}_i)\sim(\hat{M}_i^k, \hat{U}_i), \quad i=1, 2;$$

$$f((\hat{M}_1^k, \hat{U}_1)\cup(\hat{M}_2^k, \hat{U}_2))\sim(\hat{M}_1^k, \hat{U}_1)\cup(\hat{M}_2^k, \hat{U}_2).$$

Таким образом, дело сводится к случаю, когда $\hat{E}^{n+k-1}=E^{n+k-1}$, а оба представителя $(\hat{M}_1^k, \hat{U}_1)$ и (M_1^k, U_1) класса π_1 лежат по одну сторону гиперплоскости E^{n+k-1} в полупространстве E_-^{n+k}, между тем как оба представителя $(\hat{M}_2^k, \hat{U}_2)$ и (M_2^k, U_2) класса π_2 лежат по другую сторону гиперплоскости E^{n+k-1} в полупространстве E_+^{n+k}. Пусть (M_1^{k+1}, U_1^*) — оснащенное подмногообразие полосы $E^{n+k}\times I$, осуществляющее гомологию $(\hat{M}_1^k, \hat{U}_1)\sim(M_1^k, U_1)$, и (M_2^{k+1}, U_2^*) — оснащенное подмногообразие полосы $E^{n+k}\times I$, осуществляющее гомологию $(\hat{M}_2^k, \hat{U}_2)\sim(M_2^k, U_2)$. Если бы имели место включения $M_1^{k+1}\subset E_-^{n+k}\times I$ и $M_2^{k+1}\subset E_+^{n+k}\times I$, то оснащенные многообразия (M_1^{k+1}, U_1^*) и (M_2^{k+1}, U_2^*) не пересекались бы, и их объединение было бы оснащенным многообразием, осуществляющим гомологию $(\hat{M}_1^k, \hat{U}_1) \cup (\hat{M}_2^k, \hat{U}_2) \sim (M_1^k, U_1) \cup (M_2^k, U_2)$. Пусть e — вектор пространства E^{n+k}, ортогональный к E^{n+k-1} и направленный в полупространство E_+^{n+k}. Обозначим через g_t отображение пространства E^{n+k} на себя, переводящее точку x в точку $x+te$. Выберем вектор e настолько длинным, чтобы имели место включения

$$g_{-1}(M_1^{k+1}) \subset E_-^{n+k} \times I, \quad g_1(M_2^{k+1}) \subset E_+^{n+k} \times I.$$

Заметим, наконец, что оснащенное многообразие $g_{-t}(\hat{M}_1^k, \hat{U}_1) \cup g_t(\hat{M}_2^k, \hat{U}_2)$ осуществляет деформацию многообразия $(\hat{M}_1^k, \hat{U}_1) \cup (\hat{M}_2^k, U_2)$ в многообразие $g_{-1}(\hat{M}_1^k, \hat{U}_1) \cup g_1(\hat{M}_2^k, \hat{U}_2)$, так что в силу «С» имеет место гомология $g_{-1}(\hat{M}_1^k, \hat{U}_1) \cup g_1(\hat{M}_2^k, \hat{U}_2) \sim (\hat{M}_1^k, \hat{U}_1) \cup (\hat{M}_2^k, \hat{U}_2)$. Точно так же $g_{-1}(M_1^k, U_1) \cup g_1(M_2^k, U_2) \sim (M_1^k, U_1) \cup (M_2^k, U_2)$. Таким образом, $(\hat{M}_1^k, \hat{U}_1) \cup (\hat{M}_2^k, \hat{U}_2) \sim (M_1^k, U_1) \cup (M_2^k, U_2)$.

Из независимости операции сложения от выбора представителей следует, что нулем группы Π_n^k служит класс, содержащий пустое оснащенное многообразие, т. е. класс гомологичных нулю оснащенных многообразий. Докажем, что противоположный элемент $-\pi$ к элементу π описывается указанным в определении способом.

Будем считать, что эвклидово пространство E^{n+k} лежит в эвклидовом пространстве E^{n+k+1}, где оно определяется уравнением $y^{n+k+1} = 0$. Будем также считать, что все точки многообразия M^k находятся на расстоянии, меньшем единицы, от гиперплоскости E^{n+k-1} (см. п. «С»). Пусть E_+^{n+k} и E_-^{n+k} — те полупространства пространства E^{n+k}, на которые гиперплоскость E^{n+k-1} его разбивает, причем $M^k \subset E_+^{n+k}$. Будем вращать полупространство E_+^{n+k} в полупространстве $y^{n+k+1} \geqslant 0$ пространства E^{n+k+1} до совмещения с полупространством E_-^{n+k}; тогда в процессе движения оснащенное многообразие (M^k, U) опишет оснащенное подмногообразие (M^{k+1}, U^*) полупространства $y^{n+k+1} \geqslant 0$. Оснащенное многообразие (M^{k+1}, U^*) целиком лежит в полосе $0 \leqslant y^{n+k+1} \leqslant 1$ пространства E^{n+k+1} и осуществляет гомологию оснащенного многообразия $(M^k, U) \cup (\sigma(M^k), \sigma(U))$ нулю.

Множество всех отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n разобьем на классы попарно гомотопных между собой и совокупность всех этих классов обозначим через $\pi^{n+k}(S^n)$. Так как между элементами группы Π_n^k и элементами множества $\pi^{n+k}(S^n)$ существует вполне определенное взаимно однозначное соответствие (см. § 6), то операция сложения, определенная в Π_n^k, индуцирует операцию сложения в $\pi^{n+k}(S^n)$. Нетрудно показать, что так определенная в множестве $\pi^{n+k}(S^n)$ операция сложения совпадает с обычной операцией сложения элементов гомотопической группы (см. [10]). Однако это обстоятельство в настоящей работе ни доказываться, ни использоваться не будет. Для читателя владеющего элементами гомотопической теории, доказательство этого факта не составит никакого труда.

Ортогонализация оснащений

Нижеследующее предложение «G» показывает, что в теории гомологий оснащенных многообразий можно ограничиться рассмотрением ортонормальных оснащений. Предложение «Н» дает подход к вопросу о гомотопической классификации ортонормальных оснащений подмногообразий эвклидова пространства.

F) Пусть $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ — линейно независимая система векторов эвклидова векторного пространства E^l. Подвергнем эту систему ортогонализации, т. е. найдем ортонормальную систему $\overline{U} = \{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n\}$, получаемую из системы U по формулам

$$\overline{u}_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i u_i, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где коэффициенты a_j^i удовлетворяют условиям

$$a_j^i = 0 \text{ при } i > j; \quad a_j^i > 0 \text{ при } i = j.$$

Этими условиями коэффициенты a_j^i определяются однозначно — они выражаются через скалярные произведения векторов системы U. Если система U ортонормальна, то $\overline{U} = U$. Положим

$$U^t = \{u_1^t, \ldots, u_n^t\},$$

где

$$u_i^t = u_i \cdot (1 - t) + \overline{u}_i \cdot t.$$

Система U^t линейно независима, так как матрица $\| (1-t)\delta_j^i - t a_j^i \|$ невырождена. Таким образом, система $\overline{U} = U^1$ получается из системы $U = U^0$ при помощи непрерывной деформации, однозначно определенной системой U.

G) Пусть $U(x)$ — некоторое оснащение многообразия M^k. Оснащение $U^t(x)$ (см. п. «F») осуществляет непрерывную деформацию исходного оснащения $U(x)$ в ортонормальное оснащение $\overline{U}(x)$. Если исходное оснащение является гладким класса m, то вся деформация U^t также является гладкой класса m. Наконец, если имеется деформация $U_t(x)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ некоторого ортонормального оснащения $U_0(x)$ в другое ортонормальное оснащение $U_1(x)$, то существует и ортонормальная деформация $\overline{U}_t(x)$ оснащения $U_0(x)$ в оснащение $U_1(x)$.

H) Пусть (M^k, V) — ортонормально оснащенное подмногообразие ориентированного эвклидова пространства E^{n+k}. В силу замечания к определению 2 многообразие M^k имеет определенную ориентацию, и мы будем говорить, что V есть оснащение *ориентированного* многообразия M^k. Пусть U — произвольное ортонормальное оснащение ориентированного многообразия M^k. Сравним оснащения V и U. В каждой нормали N_x к многообразию M^k имеются две ортонормальные системы векторов

$$V(x) = \{v_1(x), \dots, v_n(x)\} \text{ и } U(x) = \{u_1(x), \dots, u_n(x)\};$$

поэтому мы имеем

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x) \cdot v_j(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $f(x) = \| f_{ij}(x) \|$ — ортогональная матрица с положительным детерминантом. Таким образом, каждому ортонормальному оснащению U при фиксированном V соответствует отображение f многообразия M^k в многообразие H_n всех ортогональных матриц с положительным детерминантом: $U \to f$. Очевидно, что и обратно, всякому отображению f многообразия M^k в H_n однозначно соответствует ортонормальное оснащение U: $f \to U$. Допустим, что наряду с фиксированным оснащением V имеются два ортонормальных оснащения U_0 и U_1 ориентированного многообразия M^k, и пусть $U_0 \to f_0$, $U_1 \to f_1$. Легко видеть, что оснащения U_0 и U_1 тогда и только тогда гомотопны между собой, когда отображения f_0 и f_1 гомотопны. Таким образом, гомотопическая классификация всех оснащений ориентированного подмногообразия M^k ориентированного эвклидова пространства E^{n+k} эквивалентна гомотопической классификации отображений многообразия M^k в многообразие H_n всех ортонормальных матриц порядка n с положительным детерминантом.

§ 8. ОПЕРАЦИЯ НАДСТРОЙКИ

В настоящем параграфе будет определена и до некоторой степени изучена операция надстройки над оснащенным многообразием, играющая важную роль в вопросе о гомотопической классификации отображений сферы в сферу. Пусть (M^k, U) — оснащенное подмногообразие эвклидова пространства E^{n+k}, расположенного в эвклидовом пространстве E^{n+k+1}. В каждой точке $x \in M^k$ проведем в E^{n+k+1} единичный вектор $u_{n+1}(x)$, перпендикулярный к гиперплоскости E^{n+k}, так чтобы все векторы $u_{n+1}(x)$, $x \in M^k$ были направлены в одну сторону, и положим $EU(x) = \{u_1(x), \dots, u_n(x), u_{n+1}(x)\}$. Оснащенное многообразие $E(M^k, U) = (M^k, EU)$ эвклидова пространства E^{n+k+1} называется *надстройкой* над оснащенным многообразием (M^k, U). Оказывается, что гомологичным оснащенным многообразиям соответствуют гомологичные надстройки и что возникающее так отображение E группы Π_n^k в группу Π_{n+1}^k (см. определение 5) есть гомоморфизм. В теореме

11 доказывается, что при $n \geqslant k+1$ гомоморфизм E есть гомоморфизм на, а при $n \geqslant k+2$ — изоморфизм, так что группы Π^k_{k+2}, $\Pi^k_{k+3}, \ldots$ все естественным образом изоморфны между собой.

В терминах отображений сфер операцию надстройки можно описать следующим образом. Пусть p' и q' — полюсы сферы Σ^{n+k+1}, а Σ^{n+k} — ее экватор, т. е. сечение гиперплоскостью, перпендикулярной к отрезку $p'q'$ и проходящей через середину этого отрезка. Точно так же, пусть p и q — полюсы сферы S^{n+1}, а S^n — ее экватор. Отображению f сферы Σ^{n+k} в сферу S^n ставится в соответствие отображение Ef сферы Σ^{n+k+1} в сферу S^{n+1}, изометрично налагающее меридиан $p'xq'$, $x \in \Sigma^{n+k}$ сферы Σ^{n+k+1} на меридиан $pf(x)q$ сферы S^{n+1}. Надстройка Ef над отображением f в описанной здесь форме была введена Фрейденталем [11]. В настоящей работе она использоваться на будет. То обстоятельство, что надстройка над отображением и надстройка над оснащенным многообразием соответствуют друг другу в смысле определения 4, доказывается легко, но доказательство здесь не приводится.

Определение 6. Пусть (M^k, U), $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ — оснащенное подмногообразие ориентированного эвклидова пространства E^{n+k} и E^{n+k+1} — ориентированное эвклидово пространство, содержащее E^{n+k}. Пусть $e_1, \ldots, e_{n+k}$ — базис векторного пространства E^{n+k}, задающий его ориентацию, и e_{n+k+1} — такой единичный вектор пространства E^{n+k+1}, ортогональный к E^{n+k}, что базис $e_1, \ldots, e_{n+k}, e_{n+k+1}$ задает ориентацию пространства E^{n+k+1}. Обозначим через $u_{n+1}(x)$ вектор, выходящий из точки $x \in M^k$ и получаемый из вектора e_{n+k+1} параллельным переносом. Положим

$$EU(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x), u_{n+1}(x)\}.$$

Тогда $E(M^k, U) = (M^k, EU)$ есть оснащенное подмногообразие эвклидова пространства E^{n+k+1}. Оснащенное многообразие $E(M^k, U)$ называется *надстройкой* над оснащенным многообразием (M^k, U). Оказывается, что из $(M^k_0, U_0) \sim (M^k_1, U_1)$ следует, что $E(M^k_0, U_0) \sim E(M^k_1, U_1)$. Таким образом, соответствие $(M^k, U) \to E(M^k, U)$ порождает отображение группы Π^k_n в группу Π^k_{n+1}. Это отображение оказывается гомоморфизмом; мы будем обозначать его также через E.

Покажем, что если $(M^k_0, U_0) \sim (M^k_1, U_1)$, то $E(M^k_0, U_0) \sim E(M^k_1, U_1)$. Пусть (M^{k+1}, U^*) — оснащенное подмногообразие полосы $E^{n+k} \times I$, осуществляющее гомологию $(M^k_0, U_0) \sim (M^k_1, U_1)$. В полосе $E^{n+k+1} \times I$ в точке $y \in M^{k+1}$ выберем единичный вектор $\overset{*}{u}_{n+1}(y)$, ортогональный к полосе $E^{n+k} \times I$ и направленный так же, как вектор e_{n+k+1}. Положим $EU^*(y) = \{\overset{*}{u}_1(y), \ldots, \overset{*}{u}_n(y), \overset{*}{u}_{n+1}(y)\}$. Очевидно, что оснащенное подмногообразие $E(M^{k+1}, U^*) = (M^{k+1}, EU^*)$ полосы $E^{n+k+1} \times I$ осуществляет гомологию $E(M^k_0, U_0) \sim E(M^k_1, U_1)$.

Гомоморфность отображения E проверяется еще проще. Гомоморфизм E группы Π_n^k в группу Π_{n+1}^k в ряде случаев оказывается гомоморфизмом на или даже изоморфизмом на. Займемся изучением этих случаев. Для этого предварительно докажем следующее предложение.

А) Пусть E^{n+k+1} — ориентированное эвклидово пространство и E^{n+k} — его ориентированная гиперплоскость. Пусть, далее, (M^{k+1}, V) — ортонормально оснащенное подмногообразие полосы $E^{n+k+1} \times I$, причем само многообразие M^{k+1} лежит в полосе $E^{n+k} \times I$. Случай замкнутого многообразия M^{k+1} не исключается. Будем считать, что край многообразия M^{k+1} состоит из многообразий $M_0^k \times 0$ и $M_1^k \times 1$, причем $M_0^k \subset E^{n+k}$, $M_1^k \subset E^{n+k}$. Допустим, что на краях $M_0^k \times 0$ и $M_1^k \times 1$ оснащение V является надстройкой, т. е.

$$V(x, \tau) = EU_\tau(x) \times \tau, \quad \tau = 0,1,$$

где U_τ есть оснащение многообразия M_τ^k, $\tau = 0,1$ в пространстве E^{n+k}. В каждой точке $x \in M^{k+1}$ выберем единичный вектор $u_{n+1}(x)$, ортогональный к $E^{n+k} \times I$ и надлежащим образом направленный. В нормали N_x к многообразию M^{k+1} в точке x в пространстве $E^{n+k+1} \times I$ имеется базис $v_1(x), \ldots, v_{n+1}(x)$. Поэтому для вектора $u_{n+1}(x)$, также лежащего в N_x, мы имеем

$$u_{n+1}(x) = \psi^1(x) \cdot v_1(x) + \ldots + \psi^{n+1}(x) \cdot v_{n+1}(x). \tag{1}$$

Пусть N — эвклидово пространство размерности $n+1$ с фиксированной в нем декартовой системой координат, и $\mathfrak{S}^n$ — единичная сфера этого пространства с центром в начале координат. Точку $(0, \ldots, 0, 1)$ сферы $\mathfrak{S}^n$ обозначим через $\mathfrak{P}$. Каждой точке $x \in M^{k+1}$ поставим теперь в соответствие точку $\psi(x)$ сферы $\mathfrak{S}^n$ с координатами $\psi^1(x), \ldots, \psi^{n+1}(x)$. Таким образом, ψ есть отображение многообразия M^{k+1} в сферу $\mathfrak{S}^n$, переводящее весь край в точку $\mathfrak{P}$. Допустим, что существует непрерывная деформация ψ_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ отображения $\psi = \psi_0$ в отображение ψ_1, переводящее все многообразие M^{k+1} в точку $\mathfrak{P}$, в течение которой край многообразия M^{k+1} остается все время отображенным в точку $\mathfrak{P}$. Оказывается тогда, что существует деформация оснащения V в оснащение EU, где U есть оснащение многообразия M^{k+1} в $E^{n+k} \times I$, причем в течение деформации оснащение остается неизменным на крае многообразия M^{k+1}. Для замкнутого многообразия M^{k+1} это означает, что оснащенное многообразие (M^{k+1}, V) гомологично оснащенному многообразию $E(M^{k+1}, U)$. Для незамкнутого многообразия M^{k+1} это позволяет из гомологии $E(M_0^k, U_0) \sim E(M_1^k, U_1)$, осуществленной оснащенным многообразием (M^{k+1}, V), вывести гомологию $(M_0^k, U_0) \sim (M_1^k, U_1)$.

Докажем предложение «А». Введем в N_x декартовы координаты, соответствующие базису $v_1(x), \ldots, v_{n+1}(x)$, и пусть λ_x — покоординатное отображение пространства N на пространство N_x. Положим $\psi(x, t) = \lambda_x \psi_{1-t}(x)$. Вектор $\psi(x, t)$ пространства $E^{n+k+1} \times I$ лежит в N_x и непрерывно зависит от пары переменных x, t, причем $\psi(x, 0) = v_{n+1}(x)$, а $\psi(x, 1) = u_{n+1}(x)$. Ортогональное к вектору $\psi(x, t)$ подпространство пространства N_x обозначим через P_{xt}. Так как $\psi(x, 0) = v_{n+1}(x)$, то векторы $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ составляют базис пространства P_{x0}. Принимая его за начальный и применяя к переменному векторному пространству P_{xt} предложение «А» § 7, мы получим базис $U(x, t)$ этого пространства. Вместе с вектором $\psi(x, t)$ этот базис и дает нам искомую деформацию оснащения V. Таким образом, предложение «А» доказано.

Теорема 11. *Гомоморфизм E группы Π_n^k в группу Π_{n+1}^k есть гомоморфизм* ***на*** *при $n \geqslant k+1$ и есть* ***изоморфизм на*** *при $n \geqslant k+2$. Таким образом, группы Π_{k+2}^k, Π_{k+3}^k, ... естественным образом изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть $n \geqslant k+1$, $\hat{\pi} \in \Pi_{n+1}^k$ и $(\hat{M}^k, \hat{U})$—оснащенное подмногообразие эвклидова пространства E^{n+k+1}, входящее в класс гомологий $\hat{\pi}$. В силу предложения «D» § 2, существует такое одномерное направление E^1 проектирования, при котором многообразие $\hat{M}^k$ проектируется регулярно без самопересечений на многообразие M^k. Проектирование в направлении E^1 будем осуществлять на гиперплоскость E^{n+k} пространства E^{n+k+1}, ортогональную к E^1, так что $M^k \subset E^{n+k}$. Каждую точку $x \in \hat{M}^k$ заставим прямолинейно и равномерно двигаться в направлении E^1 до совпадения с ее проекцией на M^k так, чтобы она прошла весь путь за единицу времени. Это дает деформацию многообразия $\hat{M}^k$ в многообразие M^k. В силу предложений «В» и «G» § 7, существует деформация оснащенного многообразия $(\hat{M}^k, \hat{U})$ в ортонормально оснащенное многообразие (M^k, V). Так как $n \geqslant k+1$, то отображение ψ многообразия M^k в сферу $\mathfrak{S}^n$, построенное в предложении «А», гомотопно отображению многообразия M^k в точку $\mathfrak{P}$, и потому оснащение V многообразия M^k гомотопно оснащению EU того же многообразия. В силу предложения «С» § 7, имеем $(\hat{M}^k, \hat{U}) \sim E(M^k, U)$. Пусть $\pi \in \Pi_n^k$ — класс гомологий оснащенного многообразия (M^k, U); тогда мы имеем $\hat{\pi} = E\pi$. Таким образом доказано, что $\Pi_{n+1}^k = E\Pi_n^k$ при $n \geqslant k+1$.

Допустим теперь, что $n \geqslant k+2$, и покажем, что E есть изоморфизм, т. е. что при $\pi_0 \in \Pi_n^k$, $\pi_1 \in \Pi_n^k$ из соотношения $E\pi_0 = E\pi_1$ вытекает, что $\pi_0 = \pi_1$. Пусть (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) — ортонормально оснащенные многообразия из классов гомологий π_0 и π_1, расположенные в эвклидовом пространстве $E^{n+k} \subset E^{n+k+1}$. Пусть, далее, $(\hat{M}^{k+1}, \hat{U})$ — оснащенное подмногообразие полосы $E^{n+k+1} \times I$, осуществляющее гомологию $E(M_0^k, U_0) \sim E(M_1^k, U_1)$. Обозначим через $\hat{E}^1$ одномерное направление в пространстве $E^{n+k+1} \times I$, ортогональное к полосе $E^{n+k} \times I$. В силу предложения «D» § 2, в любой близости к направлению $\hat{E}^1$ существует проектирующее направление E^1, проектирование по которому многообразия $\check{M}^{k+1}$ происходит регулярно и без самопересечений. Выберем E^1 настолько близким к $\check{E}^1$, чтобы проекция M^{k+1} многообразия $\hat{M}^{k+1}$ в направлении E^1 лежала в полосе $E^{n+k} \times I$. Деформация многообразия $\hat{M}^{k+1}$ в многообразие M^{k+1} оставляет неподвижным край, и потому имеющаяся, в силу предложений «В» и «G» § 7, деформация оснащенного многообразия $(\hat{M}^{k+1}, \hat{U})$ в ортонормально оснащенное многообразие (M^{k+1}, V) оставляет оснащение на краю неизменным. Таким образом, теперь гомология $E(M_0^k, U_0) \sim E(M_1^k, U_1)$ осуществляется оснащенным многообразием (M^{k+1}, V), причем $M^{k+1} \subset E^{n+k} \times I$, т. е. выполнены условия предложения «А», и, следовательно, оснащенные многообразия (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) гомологичны между собой. Таким образом, $\pi_0 = \pi_1$.

Итак, теорема 11 доказана.

Глава III

ХОПФОВСКИЙ ИНВАРИАНТ

§ 9. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ n-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В n-МЕРНУЮ СФЕРУ

В настоящем параграфе дается гомотопическая классификация отображений гладких замкнутых ориентированных многообразий размерности n в n-мерную сферу. Результат этот хорошо известен и для негладких многообразий, но в настоящей работе он играет важную вспомогательную роль. Доказательство проводится специфическими для гладких многообразий методами, что упрощает применение этого результата в последующих параграфах работы. В первую очередь определяется степень отображения и доказываются простейшие ее свойства. Далее, на основе построенной ранее теории дается классификация отображений n-мерной сферы в n-мерную, что дает элементарную иллюстрацию общих результатов предыдущих параграфов. Наконец, классификация отображений n-мерного многообразия в n-мерную сферу сводится к классификации отображений n-мерной сферы в n-мерную.

Степень отображения

Определение 7. Пусть f — гладкое отображение r-мерного ориентированного многообразия P^r в r-мерное ориентированное многообразие Q^r, и b — такая внутренняя точка многообразия Q^r, являющаяся правильной точкой отображения f, полный прообраз которой компактен и не пересекается с краем многообразия P^r. В этих предположениях полный прообраз $f^{-1}(b)$ состоит из конечного числа точек $a_1, \ldots, a_p$, в каждой из которых функциональный определитель отображения f отличен от нуля, и потому имеет определенный знак (многообразия P^r и Q^r ориентированы). Знак функционального определителя отображения f в точке a_i обозначим через $\varepsilon_i (= \pm 1)$, $i=1, \ldots, p$ и будем называть его *степенью* отображения f в точке a_i. Сумма $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p$ называется *степенью* отображения f в точке b. Если теперь оба многообразия P^r и Q^r замкнуты, то множество G всех точек b, для которых выполнены выдвинутые выше требования, составляет всюду плотную в Q^r область (см. теорему 4). Ниже будет показано (см. «В»), что если сверх того многообразие Q^r связно, то во всех точках $b \in G$ степень отображения f одинакова; она называется *степенью* отображения f. Ниже будет также показано (см. «В»), что степени гомотопных между собой отображений совпадают. Таким образом, в случае, когда многообразие P^r замкнуто, а многообразие Q^r связно и замкнуто, степень отображения является инвариантом класса гомотопных между собой отображений и потому определена для любого непрерывного отображения.

А) Пусть Q^r — связное замкнутое многообразие, P^{r+1} — компактное многообразие с границей P^r; f — гладкое отображение многообразия P^{r+1} в многообразие Q^r и, наконец, $b \in Q^r$ — правильная точка отображения f многообразия P^r в Q^r. Оказывается, что степень отображения f в точке b равна нулю.

Докажем это. Пусть V — связная окрестность точки b в Q^r, состоящая из правильных точек отображения f многообразия P^r в Q^r. Легко видѣть, что во всех точках $b' \in V$ степень отображения f многообразия P^r в Q^r одна и та же. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что точка b есть правильная точка отображения f многообразия P^{r+1} в Q^r (см. теорему 4). Таким образом, $f^{-1}(b)$ есть одномерное подмногообразие M^1 многообразия P^{r+1} и потому состоит из конечного числа компонент, некоторые из которых гомеоморфны окружности, а остальные — отрезку. Все точки полного прообраза точки b в P^r являются концами компонент многообразия M^1. Пусть L^1 — компонента многообразия M^1, гомеоморфная отрезку; концы ее мы обозначим через a_0 и a_1. В силу результатов § 4 [см. (2)] для заданной системы координат $y^1, \ldots, y^r$ с началом в b, определенной в некоторой окрестности точки b можно выбрать такие координаты $x^1, \ldots, x^{r+1}$ в окрестности точки $a \in L^1$, что отображение f в этих координатах записывается формулами:

$$y^i = x^i, \; i = 1, \ldots, r.$$

Будем считать, что координаты $y^1, \ldots, y^r$ задают ориентацию многообразия Q^r. В координатах $x^1, \ldots, x^{r+1}$ кривая L^1 задается уравнениями $x^1 = 0, \ldots, x^r = 0$, т. е. x^{r+1} — переменный параметр на кривой L^1. Будем считать, что при возрастании параметра x^{r+1} точка на кривой L^1 движется от a_0 к a_1. При этих условиях координаты $x^1, \ldots$ $\ldots, x^{r+1}$ могут не определять заданную ориентацию многообразия P^{r+1}, и мы обозначим через $\varepsilon (= \pm 1)$ знак, отличающий ориентацию, заданную в P^{r+1} от ориентации, определяемой координатами $x^1, \ldots, x^{r+1}$. Легко проверяется, что ε не зависит от случайного выбора системы $x^1, \ldots, x^{r+1}$ и не меняется при перемещении точки a вдоль кривой L^1. Из определения ориентации границы (см. § 1, п. «В») следует, что степень отображения f многообразия P^r равна $-\varepsilon\cdot(-1)^r$ в точке a_0 и равна $\varepsilon\cdot(-1)^r$ в точке a_1. Применяя это рассмотрение ко всем гомеоморфным отрезку компонентам многообразия M^1, мы убеждаемся, что степень отображения f в точке b равна нулю.

В) Пусть f_0 и f_1 — два гомотопных между собой гладких отображения замкнутого ориентированного многообразия P^r в связное замкнутое ориентированное многообразие Q^r; G_t — множество всех правильных точек $b \in Q^r$ отображения f_t, $t = 0,1$. Оказывается, что при $b \in G_0 \cap G_1$ степени отображений f_0 и f_1 в точке b равны между собой. Далее оказывается, что если b_0 и b_1 — две точки из G_0, то степени отображения f_0 в точках b_0 и b_1 равны между собой.

Докажем предложение «В». Так как отображения f_0 и f_1 гомотопны, то существует гладкое семейство f_t, связывающее их (см. теорему 8). Семейству f_t соответствует отображение f_* произведения $P^r \times I$ (см. § 5, п. «С»). Край многообразия $P^r \times I$ состоит из многообразий $P^r \times 0$ и $P^r \times 1$. Выберем ориентацию многообразия $P^r \times I$ таким образом, чтобы многообразие $P^r \times 0$ входило в границу произведения $P^r \times I$ со знаком плюс; тогда многообразие $P^r \times 1$ будет входить в границу произведения $P^r \times I$ со знаком минус. Из этого и из предложения «А» следует, что степени отображений f_0 и f_1 в точке b совпадают.

Покажем теперь, что степени отображения f_0 совпадают во всех точках $b \in G_0$. Пусть X — некоторая система координат с началом в точке $c \in Q^r$; V — шаровая окрестность точки c, взятая в этой системе координат. Пусть, далее, b_0 и b_1 — две точки из $V \cap G_0$. Легко построить регулярное гомеоморфное отображение φ многообразия Q^r на себя, при котором все точки множества $Q^r \setminus V$ остаются на месте, а точка b_0 переходит в точку b_1. Такое отображение φ, очевидно, гомотопно тождественному. Очевидно также, что степень отображения φf_0 в точке b_1 равна степени отображения f_0 в точке b_0, а так как отображения φf_0 и f_0 гомотопны между собой, то степени их в точке b_1 совпадают. Таким образом, степени отображения f_0 во всех точках $b \in V \cap G$ равны между собой. Из этого в силу того, что Q^r связно, а множество G_0 всюду плотно в Q^r, следует, что степень отображения f_0 во всех точках $b \in G_0$ одинакова.

Отображения n-мерной сферы в n-мерную

С) Пусть (M^0, U) — нульмерное оснащенное подмногообразие ориентированного эвклидова пространства E^n. Так как M^0 есть компактное подмногообразие, то оно состоит из конечного числа точек $a_1, \ldots, a_r$. Точке a_i припишем индекс $+1$, если векторы $u_1(a_i), \ldots, u_n(a_i)$ дают положительную ориентацию пространства E^n, и индекс -1 в противоположном случае. Сумму $I(M^0, U)$ индексов всех точек $a_1, \ldots, a_r$ будем называть *индексом* оснащенного многообразия. Очевидно, что индекс оснащенного многообразия (M^0, U) равен степени соответствующего отображения (см. определение 4) ориентированной сферы Σ^n в ориентированную сферу S^n.

Теорема 12. *Если два отображения f_0 и f_1 ориентированной сферы Σ^n в ориентированную сферу S^n имеют одинаковую степень, то они гомотопны между собой. При этом существуют отображения с любой заданной целочисленной степенью.*

Доказательство. Из предложения «С» и теоремы 10 следует, что для доказательства теоремы достаточно установить гомологичность оснащенных нульмерных многообразий с одинаковым индексом и существование нульмерных оснащенных многообразий с любым индексом. Легко видеть, что два оснащенных многообразия (M_0^0, U_0) и (M_1^0, U_1), каждое из которых состоит из одной точки и имеет индекс $+1$, получаются друг из друга деформацией (см. § 7, п. «В») и потому принадлежат одному классу гомологий (см. § 7, п. «С»). Таким образом, все «одноточечные» оснащенные многообразия, имеющие индекс $+1$, принадлежат одному классу гомологий ε. Точно так же, все «одноточечные» оснащенные многообразия, имеющие индекс -1, принадлежат одному классу гомологий ε'. Так как при симметрии относительно любой гиперплоскости пространство E^n меняет ориентацию, то $\varepsilon' = -\varepsilon$ (см. определение 5). Так как, далее, каждое нульмерное оснащенное многообразие (M^0, U) является объединением конечного числа «одноточечных» оснащенных многообразий, часть из которых имеет индекс $+1$, а часть — индекс -1, то ε есть образующая группы Π_n^0, причем (M^0, U) принадлежит классу $I(M^0, U)\cdot\varepsilon$. Таким образом, два нульмерных оснащенных многообразия с одинаковыми индексами гомологичны между собой. Ясно также, что существуют нульмерные оснащенные многообразия с любым целым индексом.

Итак, теорема 12 доказана.

Из теоремы 12 и п. «С» следует, что группа Π_n^0 или, что то же самое, группа $\pi^n(S^n)$ является свободной циклической.

D) Пусть f — гладкое отображение ориентированной сферы Σ^{n+k} в ориентированную сферу S^n и g — гладкое отображение сферы Σ^{n+k} в себя со степенью ν. Элемент группы Π_n^k, соответствующий отображению f, обозначим через π, а элемент группы Π_n^k, соответствующий отображению fg, — через π'. Оказывается тогда, что

$$\pi' = \nu\pi. \tag{1}$$

Докажем соотношение (1). Пусть p' и q' — северный и южный полюсы сферы Σ^{n+k}; E^{n+k} — касательная в точке p' к сфере Σ^{n+k} и φ — центральное проектирование из точки q' области $\Sigma^{n+k} \diagdown q'$ на пространство E^{n+k}. При $\nu = 1$ отображение g гомотопно тождественному (см. теорему 12), и потому в этом случае соотношение (1) верно. Докажем его для $\nu = -1$. Так как все отображения сферы Σ^{n+k} на себя, имеющие степень -1, гомотопны между собой, то достаточно рассмотреть одно какое-либо отображение g степени -1. Пусть E^{n+k-1} — какая-либо гиперплоскость пространства E^{n+k}, проходящая через точку p', и σ — симметрия пространства E^{n+k} относительно этой гиперплоскости. Отображение $g = \varphi^{-1}\sigma\varphi$ области $\Sigma^{n+k} \setminus q'$ на себя, дополненное соотношением $g(q') = q'$, является отображением сферы Σ^{n+k} на себя со степенью -1. Для построенного так отображения g соотношение (1) очевидно.

Пусть теперь g — гладкое отображение сферы Σ^{n+k} в себя, для которого множество $g^{-1}(p')$ состоит из правильных точек отображения g и не содержит точки q'; этого всегда можно достигнуть малым изменением любого заданного отображения g. Пусть $\varphi g^{-1}(p) = \{a_0, \ldots, a_r\}$; знак функционального определителя отображения g в точке $\varphi^{-1}(a_i)$ обозначим через ε_i. Пусть, далее, V_i — шар радиуса δ в пространстве E^{n+k} с центром в a_i. Будем считать δ настолько малым, что можно провести такую не пересекающую шары V_i гиперплоскость E_1^{n+k-1} пространства E^{n+k}, что любая заранее указанная часть множества $\{a_1, \ldots, a_r\}$ лежит по одну ее сторону, а остальная — по другую. Выберем настолько малое положительное число α, чтобы для шаровой окрестности K_α точки p' полный прообраз $g^{-1}(K_\alpha)$ состоял из правильных точек отображения g и распадался на области $A_1, \ldots, A_r$; $a_i \in A_i$, каждая из которых при помощи g гладко гомеоморфно отображается на K_α. Предположим, кроме того, число α настолько малым, что $\varphi(A_i) \subset V_i$. Определим теперь отображение h_i сферы Σ^{n+k} на себя как совпадающее с $\omega_\alpha g$ (см. п. «В») на A_i и переводящее множество $\Sigma^{n+k} \setminus A_i$ в точку q'. Так как отображение h_i имеет степень ε_i, то соответствующее отображению fh_i оснащенное многообразие $\{M_i^k, U_i\}$ принадлежит классу гомологий $\varepsilon_i\pi$. Очевидно, что $M_i^k \subset V_i$ и что отображению $f\omega_\alpha g$ соответствует оснащенное многообразие $(M_1^k, U_1) \cup \ldots \cup (M_r^k, U_r)$. Так как отображения $\omega_\alpha g$ и g гомотопны, то из сказанного и из возможности указанным ранее образом провести гиперплоскость E_1^{n+k-1} следует правильность соотношения (1).

Отображения n-мерного многообразия в n-мерную сферу

Нижеследующая теорема 13 полностью решает вопрос о гомотопической классификации отображений ориентируемых замкнутых n-мерных многообразий в n-мерную сферу. Теорема 13 доказывается путем сведения ее к теореме 12 о классификации отображений n-мерной сферы в n-мерную.

Теорема 13. *Два непрерывных отображения f_0 и f_1 связного ориентированного гладкого многообразия M^n в ориентированную сферу S^n тогда и только тогда гомотопны между собой, когда они имеют одинаковую степень* (см. определение 7). *Если, в част-*

ности, степень отображения равна нулю, то отображение гомотопно нулю, т. е. стягиваемо в точку. При этом существуют отображения с любой заданной целочисленной степенью.

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что если отображения f_0 и f_1 гладки и имеют одинаковую степень, то они гомотопны между собой. Для того чтобы свести доказательство этого факта к теореме 12, покажем прежде всего, что любая конечная совокупность Q точек многообразия M^n может быть включена в область B многообразия M^n, гладко гомеоморфную n-мерному шару.

Легко построить гладкую простую замкнутую кривую K, расположенную без самопересечений в M^n, содержащую все точки совокупности Q. Будем считать, что M^n есть подмногообразие эвклидова пространства E^{2n+1}, и обозначим через N_x взятую в E^{2n+1} нормаль к кривой K в точке $x \in K$. Так же как в предложении «A» § 5 обозначим через $H_\delta(x)$ шар эвклидова пространства N_x с центром в x и радиусом δ. Существует тогда настолько малое положительное число δ, что совокупность $W_\delta = H_\delta(K)$ есть окрестность кривой K в E^{2n+1} и что, ставя в соответствие каждой точке $y \in W_\delta$ ту точку $x = \pi(y)$, для которой $y \in H_\delta(x)$, мы получим гладкое отображение π многообразия W_δ на кривую K (см. § 5, п. «A»). Выделим на замкнутой кривой K отрезок L, содержащий все точки множества Q внутри себя, и введем на отрезке L гладким образом параметр t, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Таким образом, каждому значению параметра t, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ соответствует точка $x(t) \in K$. Касательную к многообразию M^k в точке $x \in K$ обозначим через T_x, и положим $N'_t = N_{x(t)} \cap T_{x(t)}$. В векторном пространстве N'_t выберем ортонормальный базис $e_1(t), \ldots, e_{n-1}(t)$. Пользуясь предложением «A» § 7 и процессом ортогонализации (см. § 7, п. «G»), нетрудно сделать это так, чтобы базис $e_1(t), \ldots, e_{n-1}(t)$ гладко зависел от параметра t. Пусть $W'_\delta = M^n \cap W_\delta$, и пусть π' — отображение π, рассматриваемое на W'_δ. Полный прообраз точки $x(t) \in L$ в W'_δ при отображении π' обозначим через H'_t. Пусть ε — положительное число. Обозначим через H^*_t шар радиуса $\varepsilon\sqrt{1-t^2}$ в пространстве N'_t с центром в $x(t)$. При ортогональном проектировании χ_t многообразия M^n на пространство $T_{x(t)}$ некоторая окрестность точки $x(t)$ в многообразии M^n проектируется гладко, регулярно и гомеоморфно на некоторую окрестность точки $x(t)$ в $T_{x(t)}$. Из этого следует, что при достаточно малом δ проектирование χ_t является гладким, регулярным и гомеоморфным отображением многообразия H'_t на некоторую окрестность точки $x(t)$ в N'_t, и потому существует настолько малое число ε, что $H^*_t \subset \chi_t(H'_t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Координаты точки $z \in H^*_t$ относительно базиса $e_1(t), \ldots, e_{n-1}(t)$ обозначим через $\varepsilon z^1, \ldots, \varepsilon z^{n-1}$ и числа $z^1, \ldots, z^{n-1}, t$ примем за координаты точки $\chi_t^{-1}(z)$. Совокупность B всех точек $\chi_t^{-1}(z)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $z \in H^*_t$ составляет область в M^n, в которой гладким образом введены координаты $z^1, \ldots, z^{n-1}, t$, удовлетворяющие условию $(z^1)^2 + \ldots + (z^{n-1})^2 + t^2 < 1$. Таким образом, область B гладко гомеоморфна открытому n-мерному шару.

Выберем теперь в сфере S^n точку p таким образом, чтобы множество $f_t^{-1}(p) = P_t$, $t = 0,1$ состояло из правильных точек отображения f_t (см. теорему 4). Положим $Q = P_0 \cup P_1$, и пусть B — шаровая область многообразия M^n, содержащая конечное множество Q. Точку p примем за северный полюс сферы S^n и обозначим через q ее южный полюс. Пусть α — настолько малое положительное число, что шаровая окрестность K_α (см. § 6, п. «В») точки p удовлетворяет условиям

$$\bar{A}_t \subset B, \text{ где } A_t = f_t^{-1}(K_\alpha),\ t = 0,1, \tag{2}$$

и пусть ω_α — отображение сферы S^n на себя, соответствующее выбранному числу α (см. § 6, п. «А»). Так как отображение ω_α гомотопно тождественному, то отображения $\omega_\alpha f_1$ и f_t, $t = 0,1$ гомотопны между собой. Будем считать, что B есть единичный шар некоторого эвклидова пространства R^n. Тогда существует такое положительное число $\beta < 1$, что шар B_β радиуса β, концентрический с B, содержит множества $\bar{A}_t$, $t = 0,1$. Пусть λ_β — отображение пространства R^n на сферу S^n, описанное в предложении «В» § 6. Отображение ϑ многообразия M^n на сферу S^n определим как совпадающее с λ_β на шаре $\bar{B}$ и переводящее множество $M^n \setminus B$ в точку q. Так как множество $\bar{A}_t$, $t = 0,1$, содержится в B_β, то отображение ϑ гомеоморфно на множестве $\bar{A}_t$. Определим теперь отображение g_t, $t = 0,1$ сферы S^n на себя следующим образом. На множестве $\vartheta(A_t)$ мы зададим его, положив $g_t = \omega_\alpha f_t \vartheta^{-1}$, а для $x \in S^n \setminus \vartheta(A_t)$ положим $g_t(x) = q$. Из этого определения отображения g_t следует, что

$$g_t \vartheta = \omega_\alpha f_t,\ t = 0,1. \tag{3}$$

Отображения f_t и $\omega_\alpha f_t$, очевидно, имеют одинаковую степень в точке p, а из соотношения (3) следует, что и отображения g_t и f_t также имеют одинаковую степень в точке p. Так как отображения f_0 и f_1 по предположению имеют равные степени, то равные степени имеют и отображения g_0 и g_1 сферы S^n на себя. Таким образом, отображения g_0 и g_1 сферы S^n на себя гомотопны между собой (см. теорему 12). Из этого следует, что и отображения $g_0\vartheta$ и $g_1\vartheta$ многообразия M^n в сферу S^n гомотопны между собой, а следовательно гомотопны и отображения $\omega_\alpha f_0$ и $\omega_\alpha f_1$ многообразия M^n на сферу S^n [см. (3)]. Так как отображения $\omega_\alpha f_0$ и $\omega_\alpha f_1$ соответственно гомотопны отображениям f_0 и f_1, то и эти последние гомотопны между собой.

Построение отображения $M^n \to S^n$, имеющего заданную целочисленную степень, проводится без труда.

Итак теорема 13 доказана.

§ 10. ХОПФОВСКИЙ ИНВАРИАНТ ОТОБРАЖЕНИЯ СФЕРЫ Σ^{2k+1} В СФЕРУ S^{k+1}

В гомотопической классификации отображений сферы в сферу важную роль играет хопфовский инвариант, введенный впервые для доказательства существования бесчисленного множества классов отображений трехмерной сферы в двухмерную [12]. Позже инвариант этот был определен Хопфом для отображений $(2k+1)$-мерной сферы в $(k+1)$-мерную. Впрочем, для четного k инвариант этот всегда равен нулю. Хопфовский инвариант определяется как коэффициент зацепления прообразов двух различных точек сферы S^{k+1} в сфере Σ^{2k+1}. В этом параграфе дается прежде всего определение коэффициента зацепления двух подмногообразий эвклидова пространства в форме, впервые предложенной Брауэром [13], т. е. при посредстве степени отображения, а не при помощи индекса пересечения (как это теперь принято). Эта форма более соответствует характеру всей работы. Далее определяется хопфовский инвариант и, наконец, этот инвариант описывается при помощи оснащенного многообразия, соответствующего отображению. При этом устанавливается ряд связей между свойствами оснащенных многообразий и свойствами хопфовского инварианта. Связи эти играют решающую роль при классификации отображений сферы размерности $n+2$ в сферу размерности n.

Коэффициент зацепления

Определение 8. Пусть M^k и N^l—два замкнутых гладких ориентированных многообразия размерностей k и l, а f и g — их непрерывные отображения в ориентированное эвклидово пространство E^{k+l+1} размерности $k+l+1$, причем множества $f(M^k)$ и $g(N^l)$ не пересекаются. Пусть, далее, S^{k+l} — единичная сфера пространства E^{k+l+1} с центром в произвольной точке O, взятая с той ориентацией, которую она имеет как граница шара, и $M^k\times N^l$ — ориентированное прямое произведение (см. § 1, п. «К») многообразий M^k и N^l. Каждой точке $(x, y)\in M^k\times N^l$, $x\in M^k$, $y\in N^l$ соответствует ненулевой отрезок $(f(x), g(y))$ в пространстве E^{k+l+1}, идущий из точки $f(x)$ в точку $g(y)$. Проведем из точки O луч, параллельный отрезку $(f(x), g(y))$, и пересечение этого луча с S^{k+1} обозначим через $\chi(x, y)$. Степень отображения χ ориентированного многообразия $M^k\times N^l$ в ориентированную сферу S^{k+l} (см. определение 7) называется *коэффициентом зацепления* отображенных многообразий (f, M^k) и (g, N^l) и обозначается через $\mathfrak{v}((f, M^k), (g, N^l))$. Очевидно, что если отображения f и g непрерывно изменяются: $f=f_t$, $g=g_t$ таким образом, что множества $f_t(M^k)$ и $g_t(N^l)$ не пересекаются ни при каком t, то отображение $\chi=\chi_t$ также меняется непрерывно, и потому коэффициент зацепления не меняется. В частном случае, когда многообразия M^k и N^l являются подмногообразиями пространства E^{k+l+1}, а отображения f и g суть тождественные, коэффициент зацепления также определен и обозначается в этом случае через $\mathfrak{v}(M^k, N^l)$. Оказывается, что

$$\mathfrak{v}((g, N^l), (f, M^k)) = (-1)^{(k+1)(l+1)} \mathfrak{v}((f, M^k), (g, N^l)). \qquad (1)$$

Докажем формулу (1). Пусть χ' — отображение многообразия $N^l \times M^k$ в S^{k+l}, аналогичное построенному выше отображению χ. Обозначим через λ отображение многообразия $N^l \times M^k$ на многообразие $M^k \times N^l$, переводящее точку (y, x) в точку (x, y), и пусть μ — отображение сферы S^{k+l} на себя, переводящее каждую ее точку в диаметрально противоположную. Очевидно, что степень отображения λ равна $(-1)^{kl}$, а степень отображения μ равна $(-1)^{k+l+1}$. Легко видеть, далее, что $\chi' = \mu\chi\lambda$. Из сказанного следует справедливость формулы (1).

A) Допустим, что вместо одного отображенного многообразия (g, N^l) имеется два отображенных многообразия (g_0, N_0^l) и (g^1, N_1^l). Допустим, далее, что существует ориентированное ограниченное компактное многообразие N^{l+1}, ориентированный край которого состоит из многообразий N_0^l и $-N_1^l$, и существует отображение g многообразия N^{l+1} в пространство E^{k+l+1}, совпадающее с g_0 на N_0^l и с g_1 на N_1^l, причем множества $f(M^k)$ и $g(N^{l+1})$ не пересекаются между собой. Оказывается тогда, что

$$\mathfrak{v}((f, M^k), (g_0, N_0^l)) = \mathfrak{v}((f, M^k), (g_1, N_1^l)). \qquad (2)$$

Докажем это. Границей многообразия $M^k \times N^{l+1}$ служит многообразие $M^k \times N_0^l - M^k \times N_1^l$. Каждой точке $(x, y) \in M^k \times N^{l+1}$ соответствует отрезок $(f(x), g(y))$. Проведем из точки O луч, параллельный отрезку $(f(x), g(y))$, и пересечение его со сферой S^{k+l} обозначим через $\chi(x, y)$. Таким образом, получается непрерывное отображение χ многообразия $M^k \times N^{l+1}$ в сферу S^{k+l}, и потому степень отображения χ на его границе равна нулю (см. § 9, п. «А»). Из этого непосредственно следует справедливость формулы (2).

Хопфовский инвариант

Определение 9. Пусть f — гладкое отображение ориентированной сферы Σ^{2k+1} размерности $2k+1$ в ориентированную сферу S^{k+1} размерности $k+1$, $k \geqslant 1$. Пусть, далее, p' и q' — северный и южный полюсы сферы Σ^{2k+1}; E^{2k+1} — касательная к сфере Σ^{2k+1} в точке p' и φ — центральная проекция множества $\Sigma^{2k+1} \setminus q'$ на пространство E^{2k+1}. В сфере S^{k+1} выберем (см. теорему 4) две отличных друг от друга и от $f(q')$ правильных точки a_0 и a_1 отображения f; тогда $M_0^k = \varphi f^{-1}(a_0)$ и $M_1^k = \varphi f^{-1}(a_1)$ суть замкнутые ориентированные подмногообразия эвклидова пространства E^{2k+1} (см. введение к § 4, ориентация прообраза точки). Положим

$$\gamma(f) = \gamma(f, p', a_0, a_1) = \mathfrak{v}(M_0^k, M_1^k). \qquad (3)$$

Оказывается, что $\gamma(f)$ есть гомотопический инвариант отображения f, не зависящий от случайного выбора точек p', a_0 и a_1, и что для четного k этот инвариант всегда равен нулю.

Докажем инвариантность числа $\gamma(f)$.

Пусть f_0 и f_1 — два гладких гомотопных между собой отображения сферы Σ^{2k+1} в S^k, и f_t — гладкая деформация, связывающая их. Деформации f_t соответствует отображение f_* произведения $\Sigma^{2k+1}\times I$ в S^{k+1} (см. § 5, п. «С»). Заметим, что при достаточно малом смещении точек a_0 и a_1 число $\gamma(f_t)$, $t=0,1$ не меняется, так как многообразия $\varphi f_t^{-1}(a_i)$ претерпевают лишь малую деформацию. Поэтому можно считать, что кривая $f_t(q')$, $0\leqslant t\leqslant 1$ не проходит через точки a_0 и a_1. Пусть r — настолько большое натуральное число, что при $|t'-t|<\frac{1}{r}$ множества $f_t^{-1}(a_0)$ и $f_{t'}^{-1}(a_1)$ не пересекаются между собой. Сдвинем теперь точки a_0 и a_1 так, чтобы они были правильными точками отображения f_* и отображений

$$f_t;\ t=0,\ \frac{1}{r},\ \dots,\ \frac{r-1}{r},1.$$

Докажем, что

$$\gamma(f_1)=\gamma(f_0).$$

Часть отрезка I, состоящую из точек, удовлетворяющих условию $\frac{s}{r}\leqslant t\leqslant\frac{s+1}{r}$, обозначим через I_s, и пусть $M_{s,i}^{k+1}$ — полный прообраз точки a_i в полосе $M^k\times I_s$ при отображении f_*. В силу условий, наложенных на точки a_0 и a_1, множество $M_{s,i}^{k+1}$ есть ориентированное подмногообразие многообразия $\Sigma^{2k+1}\times I_s$, имеющее своей границей многообразие $-f_{\frac{s}{r}}^{-1}(a_i)+f_{\frac{s+1}{r}}^{-1}(a_i)$. Проектирование многообразия $\Sigma^{2k+1}\times I$ вдоль оси I на сферу Σ^{2k+1} обозначим через π. Отображение $\varphi\pi$ многообразия $M_{s,i}^{k+1}$ определяет отображенное многообразие $(\varphi\pi,\ M_{s,i}^{k+1})$ с границей $-\varphi f_{\frac{s}{r}}^{-1}(a_i)+\varphi f_{\frac{s+1}{r}}^{-1}(a_i)$. Так как множества $\varphi\pi(M_{s,0}^{k+1})$ и $\varphi\pi(M_{s,1}^{k+1})$ не пересекаются между собой, то из «А» следует, что

$$\gamma(f_{\frac{s+1}{r}})=\gamma(f_{\frac{s}{r}}),$$

а потому $\gamma(f_1)=\gamma(f_0)$.

Докажем теперь, что $\gamma(f,p',a_0,a_1)$ не зависит от выбора точек a_0 и a_1. Пусть вместо точек a_0 и a_1 выбраны точки b_0 и b_1. Существует, очевидно, гладкий гомеоморфизм λ сферы S^{k+1} на себя, гомотопный тождественному, при котором $\lambda(a_i)=b_i$, $i=0,1$. Очевидно, что $\gamma(\lambda f,p',b_0,b_1)=\gamma(f,p',a_0,a_1)$, а так как отображения λf и f гомотопны между собой, то в силу уже доказанного раньше получаем $\gamma(f,p',b_0,b_1)=\gamma(f,p',a_0,a_1)$.

Аналогично доказывается, что $\gamma(f, p', a_0, a_1)$ не зависит от выбора точки p', так как существует вращение сферы Σ^{2k+1}, переводящее точку p' в произвольную другую точку сферы Σ^{2k+1}.

Покажем, наконец, что для четного k инвариант $\gamma(f)$ обращается в нуль. Так как число $\gamma(f)$ не зависит от выбора точек p_0 и p_1, то их можно поменять ролями, и мы имеем

$$\mathfrak{v}(M_0^k, M_1^k) = \mathfrak{v}(M_1^k, M_0^k).$$

Так как, сверх того, в силу (1),

$$\mathfrak{v}(M_1^k, M_0^k) = (-1)^{(k+1)^2}\mathfrak{v}(M_0^k, M_1^k),$$

то при четном k имеем $\mathfrak{v}(M_0^k, M_1^k) = 0$.

Хопфовский инвариант оснащенного многообразия

Поскольку гомотопические классы отображений $(2k+1)$-мерной сферы в $(k+1)$-мерную сферу находятся во взаимно однозначном соответствии с гомологическими классами оснащенных k-мерных многообразий $(2k+1)$-мерного эвклидова пространства, то инвариант $\gamma(f)$ может быть выражен как инвариант гомологического класса оснащенных k-мерных многообразий в $(2k+1)$-мерном пространстве. Дадим это выражение инварианта $\gamma(f)$.

В) Пусть (M^k, U), $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_{k+1}(x)\}$ — оснащенное подмногообразие ориентированного эвклидова пространства E^{2k+1}, и N_x—нормаль к многообразию M^k в точке $x \in M^k$. Эту нормаль мы будем рассматривать как векторное пространство с началом в точке x, так что $U(x)$ есть базис пространства N_x. Выберем произвольно вектор $c = \{c^1, \ldots, c^{k+1}\}$ некоторого координатного эвклидова пространства N и поставим в соответствие каждой точке $x \in M^k$ точку $c(x) = c^1u_1(x) + \ldots + c^{k+1}u_{k+1}(x)$ пространства N_x. При достаточно малом векторе c отображение c есть гомеоморфное отображение многообразия M^k в пространство E^{2k+1} (см. § 5, п. «А»). Очевидно, что при $c \neq 0$ многообразия M^k и $c(M^k)$ не пересекаются между собой и что для двух различных ненулевых векторов c и c' многообразия $c(M^k)$ и $c'(M^k)$ гомотопны между собой в пространстве $E^{2k+1} \diagdown M^k$. Таким образом, при достаточно малом, отличном от нуля векторе c коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(M^k, c(M^k))$ не зависит от вектора c, и мы положим

$$\gamma(M^k, U) = \mathfrak{v}(M^k, c(M^k)).$$

Оказывается, что если $f \rightarrow (M^k, U)$ (см. определение 4), то

$$\gamma(f) = \gamma(M^k, U). \tag{4}$$

Так как $\gamma(f)$ есть гомотопический инвариант отображения f, то $\gamma(M^k, U)$ есть гомологический инвариант оснащенного многообразия (M^k, U).

Докажем формулу (4). Пусть f — гладкое отображение сферы Σ^{2k+1} в сферу S^{k+1}, и $p \in S^{k+1}$ — правильная точка отображения f, отличная от $f(q')$. Тогда для построения оснащенного многообразия (M^k, U), соответствующего отображению f, точку p можно принять за северный полюс сферы S^{k+1} (см. определение 4). Пусть $e_1, \dots, e_{k+1}$ — некоторый ортонормальный базис касательной плоскости в точке p к сфере S^{k+1} и $x^1, \dots, x^{k+1}$ — соответствующие этому базису координаты в области $S^{k+1} \diagdown q$ (см. § 6, п. «А»). Для построения инварианта $\gamma(f)$ примем за точку a_0 полюс p, а за точку a_1 — точку с координатами $x^1 = c^1, \dots, x^{k+1} = c^{k+1}$. При таком выборе точек a_0 и a_1 многообразие M_0^k, очевидно, совпадает с многообразием M^k, а многообразие M_1^k находится от многообразия $c(M^k)$ в близости второго порядка относительно величины вектора c. Ввиду этого $\mathfrak{v}(M^k, c(M^k)) = \mathfrak{v}(M_0^k, M_1^k)$, и соотношение (4) доказано.

C) Пусть Π_{k+1}^k — гомологическая группа оснащенных k-мерных многообразий эвклидова ориентированного пространства E^{2k+1}. Каждому элементу $\pi \in \Pi_{k+1}^k$ поставим в соответствие целое число $\gamma(\pi) = \gamma(M^k, U)$, где (M^k, U) есть оснащенное многообразие класса π. В силу доказанного ранее (см. п. «B») число $\gamma(\pi)$ зависит лишь от элемента π и не зависит от случайного выбора оснащенного многообразия (M^k, U). Оказывается, что γ есть гомоморфное отображение группы Π_{k+1}^k в аддитивную группу целых чисел. Из этого следует, что множество Π_{k+1}^k всех элементов $\pi \in \Pi_{k+1}^k$, для которых $\gamma(\pi) = 0$, есть подгруппа группы Π_{k+1}^k.

Докажем предложение «C». Пусть π_1 и π_2 — два элемента группы Π_{k+1}^k, а (M_1^k, U_1) и (M_2^k, U_2) — оснащенные многообразия, принадлежащие соответственно классам π_1 и π_2 и лежащие по разные стороны от некоторой гиперплоскости E^{2k} пространства E^{2k+1}. Пусть, далее, S^{2k} — единичная сфера пространства E^{2k+1} с центром O, принадлежащим E^{2k}. Выберем произвольно малый вектор c, определяющий смещения многообразия $M_1^k \cup M_2^k$ (см. п. «B»). Мы имеем:

$$\gamma(\pi_1 + \pi_2) = \mathfrak{v}(M_1^k \cup M_2^k,\ c(M_1^k \cup M_2^k)).$$

Коэффициент зацепления, стоящий в правой части, определяется как степень отображения χ многообразия $(M_1^k \cup M_2^k) \times c(M_1^k \cup M_2^k)$ на сферу S^{2k}, причем отображение χ строится по способу, указанному в определении 8. Степень отображения χ будем определять в точке p сферы S^{2k}, лежащей весьма близко к гиперплоскости E^{2k}. Благодаря такому выбору точки p, отрезок $(x, c(y))$, где $x \in M_1^k$, $y \in M_2^k$, не может быть параллелен отрезку (O, p). Точно так же, отрезок $(x, c(y))$, где $x \in M_2^k$, $y \in M_1^k$ не может быть параллелен отрезку (O, p). Из этого следует, что

$$\mathfrak{v}(M_1^k \cup M_2^k, c(M_1^k \cup M_2^k)) = \mathfrak{v}(M_1^k, c(M_1^k)) + \mathfrak{v}(M_2^k, c(M_2^k)),$$

т. е. что $\gamma(\pi_1 + \pi_2) = \gamma(\pi_1) + \gamma(\pi_2)$.

Таким образом, предложение «C» доказано.

D) Пусть f — гладкое отображение ориентированной сферы Σ^{2k+1} в ориентированную сферу S^{k+1}; g — отображение сферы Σ^{2k+1} в себя со степенью σ, а h — отображение сферы S^{k+1} в себя со степенью τ. Положим $f' = hfg$. Оказывается, что

$$\gamma(f') = \sigma\tau^2\gamma(f). \tag{5}$$

Предложение «D» достаточно доказать раздельно для случая, когда h есть тождественное отображение, и для случая, когда g есть тождественное отображение. Правильность соотношения (5) в случае, когда h есть тождественное отображение, следует из предложения «C» этого параграфа и предложения «D» § 9. Рассмотрим случай, когда g есть тождественное отображение, т. е. когда $f' = hf$. Пусть a_0 и a_1 — две различные отличные от $f'(q')$ точки сферы S^{k+1}, являющиеся правильными точками отображений h и hf. Тогда $h^{-1}(a_t) = \{a_{t1}, \ldots, a_{tr_t}\}$; $t = 0,1$, причем отображение f правильно в каждой из точек a_{ti}, $t = 0,1$; $i = 1,2, \ldots, r_t$. Знак функционального определителя отображения h в точке a_{ti} обозначим через ε_{ti}, $i = 1, \ldots, r_t$; $t = 0,1$. Касательную в северном полюсе p' сферы Σ^{2k+1} обозначим через E^{2k+1}, а центральное проектирование множества $\Sigma^{2k+1} \diagdown q'$ на нее из точки q' — через φ.

Положим $\varphi f'^{-1}(a_t) = M_t^k$, $t = 0,1$; $\varphi f^{-1}(a_{ti}) = M_{ti}^k$. Легко видеть, что

$$M_t^k = \varepsilon_{t1} M_{t1}^k \cup \varepsilon_{t2} M_{t2}^k \cup \ldots \cup \varepsilon_{tr_t} M_{tr_t}^k, \tag{6}$$

где знаки ε_{ti} учитывают ориентации прообразов. Так как a_{0i} и a_{1j} суть две различные точки сферы S^{k+1}, являющиеся правильными точками отображения f, то инвариант $\gamma(f)$ можно определить как $\mathfrak{v}(M_{0i}^k, M_{1j}^k)$. Из этого и из соотношения (6) следует, что

$$\gamma(f) = \mathfrak{v}(\varepsilon_{01} M_{01}^k \cup \ldots \cup \varepsilon_{0r_0} M_{0r_0}^k, \varepsilon_{11} M_{11}^k \cup \ldots \cup \varepsilon_{1r_1} M_{1r_1}^k) =$$
$$= \sum_{i=1}^{r_0} \sum_{j=1}^{r_1} \varepsilon_{0i}\varepsilon_{1j} \cdot \gamma(f) = \gamma(f) \cdot \left(\sum_{i=1}^{r_0} \varepsilon_{0i}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{r_1} \varepsilon_{1j}\right) = \tau^2 \cdot \gamma(f).$$

Таким образом, предложение «D» доказано.

E) Пусть (M^k, V), $V(x) = \{v_1(x), \ldots, v_{k+1}(x)\}$ — ортонормально и гладко оснащенное подмногообразие ориентированного эвклидова пространства E^{2k+1}, причем само многообразие M^k расположено в гиперплоскости E^{2k} этого пространства. Обозначим через $u(x)$ единичный вектор, выходящий из точки $x \in M^k$ и перпендикулярный к гиперплоскости E^{2k}. Тогда мы имеем

$$u(x) = \psi^1(x) \cdot v_1(x) + \ldots + \psi^{k+1}(x) \cdot v_{k+1}(x). \tag{7}$$

Здесь $\psi(x) = \{\psi^1(x), \ldots, \psi^{k+1}(x)\}$ есть единичный вектор координатного эвклидова пространства N, так что ψ есть отображение многообразия M^k на единичную сферу $\mathfrak{S}^k$ пространства N (отображение ψ было рассмотрено в предложении «А», § 8). Оказывается, что степень отображения ψ равна $\varepsilon\gamma(M^k, V)$, где $\varepsilon = \pm 1$ и зависит только от k.

Докажем предложение «Е». Будем считать, что точка $\mathfrak{P} = (0,\ldots,0,1) \in \mathfrak{S}^k$ есть правильная точка отображения ψ. Если бы это было не так, то этого можно было бы добиться единым ортогональным преобразованием всех систем $V(x)$, $x \in M^k$. Для вычисления $\gamma(M^k, V)$ выберем в пространстве E^{2k+1} единичную сферу S^{2k} с центром в некоторой точке O и примем за вектор c вектор $\{0, \ldots, 0, \delta\}$. Если перенести вектор $u(x)$ параллельно в точку O, то конец его окажется на сфере S^{2k} в точке, которую мы обозначим через u. Проведем из O луч, параллельный отрезку $(x, c(y))$; $x, y \in M^k$, и пересечение этого луча с S^{2k} обозначим через $\chi(x, y)$. По определению $\gamma(M^k, V)$ есть степень отображения χ многообразия $M^k \times M^k$ в сферу S^{2k}. Степень этого отображения будем вычислять в точке u. В процессе вычисления будет показано, что u есть правильная точка отображения χ. Пусть $\chi(a,b) = u$, тогда отрезок $(a, c(b))$ ортогонален к гиперплоскости E^{2k} и идет в направлении вектора u, так что $c(b) \in \overline{H_\delta(a)}$ (см. § 5, п. «А»). Так как сверх того $c(b) \in \overline{H_\delta(b)}$, то отсюда следует, что при достаточно малом δ имеем: $b = a$ (см. § 5, п. «А»). Таким образом, при $\chi(a, b) = u$ имеем $b = a$ и $\psi(a) = \mathfrak{P}$. Обратно, если $\psi(a) = \mathfrak{P}$, то $\chi(a, a) = u$. Примем точку a за начало координат O пространства E^{2k+1}, а за базис его примем векторы $u_1 = u_1(a), \ldots, u_{k+1} = u_{k+1}(a)$, $u_{k+2}, \ldots, u_{2k+1}$, где $u_{k+2}, \ldots, u_{2k+1}$ есть ортонормальная система векторов, касающихся многообразия M^k в точке a. Координаты точки $x \in M^k$ в этом базисе обозначим через $z^1(x), \ldots, z^{2k+1}(x)$. В окрестности точки a в M^k легко ввести такие координаты $x^1, \ldots, x^k$ точки x, что уравнение многообразия M^k получит вид

$$z' = z'(x), \ldots, \; z^{k+1} = z^{k+1}(x), \; z^{k+2} = z^{k+2}(x) = x^1, \ldots, \\ z^{2k+1} = z^{2k+1}(x) = x^k, \tag{8}$$

где $z^i(x), i = 1, \ldots, k+1$ есть малая второго порядка относительно $\rho(a, x)$. Перенося систему $V(y)$ параллельно в точку $O = a$, мы выразим ее векторы через базис $u_1, \ldots, u_{2k+1}$

$$v_j(y) = \sum_{\alpha=1}^{k+1} a_{j\alpha}(y) \cdot u_\alpha + \sum_{\beta=k+2}^{2k+1} b_{j\beta}(y) \cdot u_\beta. \tag{9}$$

Здесь $b_{j\beta}$ суть бесконечно малые второго порядка относительно $\rho(a, y)$, а $a_{j\alpha}, \alpha \neq j$ — бесконечно малые первого порядка относительно $\rho(a, y)$. Из этого в силу ортонормальности системы $V(y)$ непосредственно вытекает, что с точностью до малых второго порядка относительно $\rho(a, y)$ имеют место равенства

$$a_{jj}(y) = 1; \; a_{ji}(y) = -a_{ij}(y), \; i \neq j. \tag{10}$$

Так как $a_{ij}(y) = (u_i, v_j(y))$; $i, j = 1, \ldots, k+1$, то в силу соотношений (7), (9) и (10) мы имеем с точностью до малых второго порядка относительно $\rho(a, y)$: $\psi^j(y) = -a_{k+1,j}(y), j = 1, \ldots, k$; $\psi^{k+1}(y) = 1$. Таким образом, с точностью до малых второго порядка относительно $\rho(a, y)$ точка $c(y)$ имеет в базисе $u_1, \ldots, u_{2k+1}$ координаты $-\delta\psi^1(y), \ldots, -\delta\psi^k(y), \delta, y^1, \ldots, y^k$. Точно так же, точка x с точностью до малых второго порядка имеет в базисе $u_1, \ldots, u_{2k+1}$ координаты [см. (8)]

$$0, \ldots, 0, x^1, \ldots, x^k.$$

Таким образом, компоненты отрезка $(x, c(y))$ в базисе $u_1, \ldots, u_{2k+1}$ суть

$$-\delta\psi^1(y), \ldots, -\delta\psi^k(y), \delta, y^1 - x^1, \ldots, y^k - x^k$$

с точностью до малых второго порядка относительно $\rho(a, x) + \rho(a, y)$. Из этого следует, что в точке (a, a) функциональный определитель отображения χ имеет знак, отличающийся от знака функционального определителя отображения ψ в точке a множителем $\varepsilon = \pm 1$, который зависит лишь от размерности k. Итак, предположение «Е» доказано.

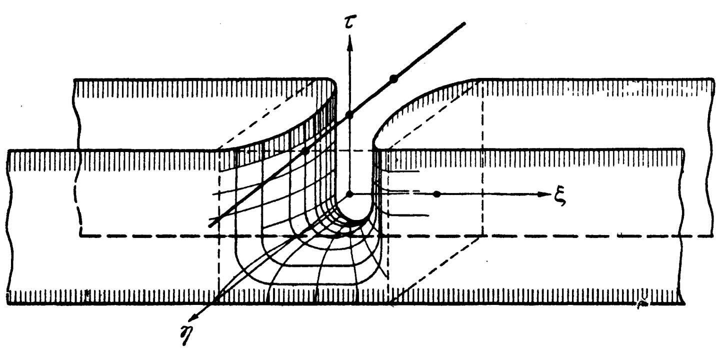
§ 11. ОСНАЩЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ С РАВНЫМ НУЛЮ ХОПФОВСКИМ ИНВАРИАНТОМ

Основной целью этого параграфа является доказательство теоремы 16 о том, что каждое оснащенное многообразие с хопфовским инвариантом, равным нулю, гомологично надстройке. Теорема эта представляет собой развитие теоремы 11. Так как хопфовский инвариант четномерного многообразия всегда равен нулю, то из теоремы 16 следует, что всякое четномерное оснащенное подмногообразие (M^k, U) эвклидова пространства E^{2k+1} гомологично надстройке. Это предложение в настоящей работе будет использовано лишь для случая $k = 2$ при классификации отображений сферы Σ^{n+2} в сферу S^n. Из него и теоремы 11 вытекает, что число классов отображений сферы Σ^{n+2} в сферу S^n, $n \geqslant 2$ не превосходит числа классов отображений сферы Σ^4 в сферу S^2.

При доказательстве теоремы 16, а также в некоторых других случаях желательно иметь дело со связными оснащенными многообразиями. Теорема 14 утверждает, что каждое оснащенное многообразие гомологично связному. Для доказательства этой теоремы приходится производить перестройку многообразия с тем, чтобы превратить его в связное. Перестройка эта довольно громоздко описывается в нижеследующем предложении «А», но геометрический смысл ее прост и состоит в следующем. Уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = -t$ представляет собой двуполостный гиперболоид при $t > 0$ и однополостный гиперболоид при $t < 0$. В полосе пространства переменных x, y, z, t, определяемой неравенством $-1 \leqslant t \leqslant 1$, выписанное уравнение определяет подмногообразие, часть границы которого, лежащая в гиперплоскости $t=-1$, несвязна, а часть границы, лежащая в гиперплоскости $t=1$, связна. В предложении «А» описанная здесь перестройка припасовывается гладким образом к паре параллельных плоскостей. В этих плоскостях образуются «вмятины», которые, сближаясь друг с другом подобно полостям двуполостного гиперболоида, образуют затем трубочку, связывающую шаровые отверстия в плоскостях. Для того, чтобы применить описанную перестройку к произвольному многообразию, доказывается почти очевидное предложение «С» о том, что вблизи любой точки многообразие можно продеформировать в плоское. Уплощая многообразие в двух его точках, принадлежащих к различным компонентам, мы получаем возможность применить перестройку «А», связывающую две компоненты многообразия в одну. Так как перестраивать приходится оснащенные многообразия, то нужно заботиться и о перестройке оснащений. Этим конструкциям посвящены предложения «В» и «D». Перестройка «А» применяется не только для получения связного многообразия, но и для того, чтобы можно было k-мерное многообразие вместить в $2k$-мерное эвклидово пространство.

Перестройка многообразий

А) Пусть E^{k+2} — эвклидово пространство с координатами $\xi^1,\ldots,\xi^k$, η,τ; E_*^{k+2} — полоса, определенная в нем неравенствами $-1\leqslant\tau\leqslant+1$, граница которой состоит из гиперплоскостей E_{-1}^{k+1} и E_{+1}^{k+1} с уравне-



Фиг. 1

ниями $\tau=-1$ и $\tau=+1$. Пусть, наконец, H^{k+2} — часть полосы E_*^{k+2}, определяемая неравенствами

$$(\xi^1)^2+\ldots+(\xi^k)^2\leqslant 1;\quad -1\leqslant\eta\leqslant 1. \tag{1}$$

Оказывается, что существует гладкое подмногообразие P^{k+1} полосы E_*^{k+2}, ортогональное в своих краевых точках к краю полосы E_*^{k+2} и обладающее следующими свойствами (см. фиг. 1):

a) Вне множества H^{k+2} многообразие P^{k+1} состоит из всех точек, удовлетворяющих условию $|\eta| = 1$.

b) Многообразие $P^k_{-1} = P^{k+1} \cap E^{k+1}_{-1}$ состоит из всех точек гиперплоскости E^{k+1}_{-1}, удовлетворяющих условию $|\eta| = 1$.

c) Пересечение многообразия $P^k_1 = P^{k+1} \cap E^{k+1}_1$ с гиперплоскостью, определяемой уравнением $\eta = \alpha$, при $|\alpha| < 1$ представляет собой сферу положительного радиуса $\rho(\alpha) < 1$, определяемую в плоскости $\eta = \alpha$; $\tau = 1$ уравнением $(\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^k)^2 = \rho^2(\alpha)$, причем $\rho(\alpha)$ стремится к единице, когда $|\alpha|$ стремится к единице. Таким образом, множество $P^k_1 \cap H^{k+2}$ не пересекается с прямой $\xi^1 = 0, \ldots, \xi^k = 0; \tau = 1$, причем это множество при $k > 1$ связно, а при $k = 1$ состоит из двух простых дуг.

При построении многообразия P^{k+1} рассмотрим сперва для наглядности случай $k = 1$. Имеющиеся в пространстве E^3 координаты ξ^1, η, τ обозначим теперь через x, y, t. Пусть

$$\varphi(x, y, t) = y^2 - (1 + t) \cdot x^2 + t.$$

Рассмотрим поверхность Q^2 с уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$. Непосредственно проверяется, что эта поверхность не имеет особых точек, т. е. что уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad \varphi = 0$$

не совместны. Рассмотрим сечение C_β поверхности Q^2 плоскостью $t = \beta$, $(|\beta| \leqslant 1)$. Кривая C_{-1} распадается на пару параллельных прямых $y = \pm 1$. При $-1 < \beta < 0$ кривая C_β представляет собой гиперболу, действительной осью которой является прямая $t = \beta$, $x = 0$. Кривая C_0 распадается в пару пересекающихся прямых $y = \pm x$. Наконец, при $0 < \beta \leqslant +1$ кривая C_β представляет собой гиперболу, действительной осью которой служит прямая $t = \beta$, $y = 0$. При всех значениях β кривая C_β проходит через точки $(\pm 1, \pm 1, \beta)$ и симметрична относительно координатных плоскостей $x = 0$ и $y = 0$. В нашем случае множество H^3_0 представляет собой куб, определяемый неравенствами $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|t| \leqslant 1$. Часть Q^2_* поверхности Q^2, лежащую в кубе H^3, дополним точками, удовлетворяющими условиям $|y| = 1, |x| \geqslant 1, |t| \leqslant 1$. Так полученную поверхность обозначим через $\hat{P}^2$. Поверхность $\hat{P}^2$ удовлетворяет условиям «a»—«c», но она не является гладкой и на своих краях не ортогональна к краям полосы E^3_* $(|t| \leqslant 1)$.

Обратимся теперь к случаю произвольного k. Введем функцию $\varphi(x^1, \ldots, x^k, y, t)$, положив

$$\varphi(x^1, \ldots, x^k, y, t) = y^2 - (1 + t)((x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2) + t.$$

Непосредственно проверяется, что гиперповерхность Q^{k+1}, определяемая в пространстве E^{k+2} с координатами $x^1, \ldots, x^k$, y, t уравнением

$\varphi(x^1, \ldots, x^k, y, t) = 0$, не имеет особых точек, т. е. что уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} = 0, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad \varphi = 0$$

не совместны. Гиперповерхность Q^{k+1} можно наглядно себе представить, заметив, что сечение ее любым трехмерным пространством, содержащим координатную плоскость (y, t), представляет собой описанную выше поверхность Q^2. Положим $Q_*^{k+1} = Q^{k+1} \cap H^{k+2}$. Множество Q_*^{k+1} дополним точками, удовлетворяющими условию $|y| = 1$, $(x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 > 1$, $|t| \leqslant 1$. Так полученное множество $\hat{P}^{k+1}$ является многообразием, удовлетворяет условиям «а»—«с», но не является гладким в точках пересечения с границей множества H^{k+2}. Кроме того, в краевых точках оно не ортогонально к краям полосы E_*^{k+2}. Займемся исправлением многообразия $\hat{P}^{k+1}$.

Пусть $\chi(s)$ — гладкая класса $m \geqslant 1$ нечетная, монотонно возрастающая функция переменного s, определенная на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 1$, обладающая следующими свойствами:

$$\chi(-1) = -1, \ \chi(1) = 1,$$

$$\chi'(-1) = \chi''(-1) = \ldots = \chi^{(m)}(-1) = \chi'(1) = \chi''(1) = \ldots = \chi^{(m)}(1) = 0,$$

$$\chi'(s) > 0 \text{ при } |s| < 1.$$

Такая функция, очевидно, существует. Определим теперь отображение σ:

$$\sigma(x^1, \ldots, x^k, y, t) = (\xi^1, \ldots, \xi^k, \eta, \tau)$$

множества H^{k+2} на себя, положив

$$\xi^1 = x^1, \ldots, \xi^k = x^k, \ \eta = \chi(y), \ \tau = \chi^{-1}(t),$$

где χ^{-1} — функция, обратная к χ. Очевидно, что отображение σ множества H^{k+2} на себя гомеоморфно, а отображения σ и σ^{-1} гладки во всех внутренних точках множества H^{k+2}. Гладкость отображения σ нарушается только при $t = \pm 1$, а гладкость отображения σ^{-1} нарушается только при $\eta = \pm 1$. Легко проверяется, что, заменяя часть Q_*^{k+1} многообразия $\hat{P}^{k+1}$ множеством $\sigma(Q_*^{k+1})$, мы получаем многообразие P^{k+1}, удовлетворяющее всем условиям предложения «А».

В) Пусть W^{k+2} есть ε — окрестность множества H^{k+2} в эвклидовом пространстве E^{k+2} (см. п. «А»), и ϑ — гладкий ее гомеоморфизм в эвклидово пространство E^{n+k+1}. Существует тогда оснащение $V(\zeta) = \{v_1(\zeta), \ldots, v_n(\zeta)\}$ многообразия $\vartheta(P^{k+1} \cap W^{k+2})$ в пространство E^{n+k+1}, индуцирующее на этом многообразии заданную ориентацию.

Докажем предложение «В». Пусть O — центр фигуры H_{k+2} и X — граница выпуклого множества W^{k+2}. Пусть, далее, ζ — произвольная точка из W^{k+2} и (O, x) — отрезок, проходящий через ζ

и соединяющий точку O с граничной точкой $x \in X$. Отношение длин отрезков (O, ζ) и (O, x) обозначим через t, и положим $\zeta = (x, t)$. Этим самым в области W^{k+2} введены полярные координаты, причем $(x, 0) = O$. Нормаль в точке $\vartheta(\zeta)$ к многообразию $\vartheta(W^{k+2})$ в пространстве E^{n+k+1} обозначим через N_{xt}. В нормали N_{x0} выберем произвольным образом базис $v_1, \ldots, v_{n-1}$. В силу предложения «А» § 7 базис $v_1(x, t), \ldots, v_{n-1}(x, t)$ нормали N_{xt} можно выбрать так, чтобы он непрерывно зависел от пары x, t и при $t = 0$ совпадал с базисом $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Положим $v_i(\zeta) = v_i(x, t)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Вектор $v_n(\zeta)$ в точке $\vartheta(\zeta)$, где $\zeta \in P^{k+1} \cap W^{k+2}$, выберем как единичный вектор, нормальный к многообразию $\vartheta(P^{k+1})$ в точке $\vartheta(\zeta)$ и касательный к многообразию $\vartheta(W^{k+2})$. Этим условием вектор $v_n(\zeta)$ с точностью до знака определен однозначно. Так как многообразие $P^{k+1} \cap W^{k+2}$ связно, то все поле $v_n(\zeta)$ однозначно определено с точностью до знака, и, выбирая направление вектора $v_n(\zeta)$ надлежащим образом, мы можем добиться того, чтобы построенное оснащение V (ζ), $\zeta \in P^{k+1} \cap W^{k+2}$, индуцировало на $\vartheta(P^{k+1} \cap W^{k+2})$ заданную ориентацию.

C) Пусть M^k — гладкое замкнутое подмногообразие эвклидова пространства E^{n+k}, $a \in M^k$; T^k — касательная к M^k в точке a и δ — некоторое положительное число. Оказывается, что существует гладкая деформация τ_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ многообразия M^k, обладающая следующими свойствами. Пусть $x \in M^k$, тогда: a) при $\rho(a, x) \geqslant \delta$ имеем $\tau_t(x) = x$; b) при $\rho(a, x) \leqslant \delta$ величина $\rho(x, \tau_t(x))$ имеет второй порядок малости относительно $\rho(x, a)$, т. е. $\rho(x, \tau_t(x)) < c \cdot \rho^2(x, a)$, где c — константа, не зависящая от δ; c) при $\rho(x, a) < \frac{\delta}{2}$ имеем $\tau_1(x) \in T^k$. Докажем предложение «C». Будем считать число δ настолько малым, что при ортогональном проектировании π на плоскость T^k δ — окрестность точки a в M^k отображается в T^k гладко, регулярно и гомеоморфно. Пусть, далее, $\mu(s)$ — гладкая четная функция параметра s, $-\infty < s < \infty$, обращающаяся в нуль при $0 < s < \frac{\delta}{2}$, монотонно возрастающая при $\frac{\delta}{2} \leqslant s \leqslant \delta$ и равная единице при $s > \delta$. Тогда искомая деформация τ_t определяется формулой:

$$\tau_t(x) = x\lambda t + \pi(x) \cdot (1 - \lambda) t + x(1 - t),$$

где $\lambda = \mu(\rho(x, a))$.

D) Пусть (M^k, U) — оснащенное подмногообразие полосы E_*^{n+k} эвклидова пространства E^{n+k} и K' — такая окрестность некоторой внутренней точки $a \in M^k$, что ее замыкание $\overline{K'}$ гомеоморфно шару k-мерного эвклидова пространства. Будем считать, что $\overline{K'}$ есть шар с центром a, и пусть K — шар меньшего радиуса, концентрический с шаром K'. Если на части $\overline{K'}$ многообразия M^k задано некоторое оснащение V, индуцирующее на K' ту же самую ориентацию, что и оснащение

U, то существует оснащение U' всего многообразия M^k, гомотопное оснащению U и совпадающее с ним на $M^k \setminus K'$, и с оснащением V на K.

Докажем предложение «D». Пусть

$$U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}, \quad V(x) = \{v_1(x), \ldots, v_n(x)\};$$

тогда мы имеем:

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(x) \cdot v_j(x), \qquad x \in \overline{K'},$$

где $\lambda(x) = \|\lambda_{ij}(x)\|$ есть матрица с положительным детерминантом, непрерывно зависящая от точки $x \in \overline{K'}$, так что λ есть непрерывное отображение шара $\overline{K'}$ в многообразие L всех матриц порядка n с положительным детерминантом. Будем рассматривать $\overline{K'}$ как шар эвклидова пространства E^k, являющегося гиперплоскостью эвклидова пространства E^{k+1}, и пусть L — прямолинейный отрезок пространства E^{k+1}, перпендикулярный гиперплоскости E^k и упирающийся одним своим концом в центре a шара $\overline{K'}$. Другой конец отрезка L обозначим через b. Нетрудно построить деформацию ψ_t отображений шара $\overline{K'}$ в множество $\overline{K'} \cup L$, при которой все точки границы шара $\overline{K'}$ остаются неподвижными, а в результате деформации шар K переходит в точку b, т. е. $\psi_1(K) = b$. Так как многообразие L_n связно, то отображение λ шара $\overline{K'}$ можно распространить в непрерывное отображение λ множества $\overline{K'} \cup L$ в L_n, при котором точка b переходит в единичную матрицу. Таким образом, $\|\mu_{ij}(x)\| = \mu(x) = \lambda\psi_1(x)$ есть матрица с положительным детерминантом, непрерывно зависящая от $x \in \overline{K'}$. Оснащение U' на шаре $\overline{K'}$ определим, положив

$$u_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}(x) \cdot v_j(x).$$

На множестве $M^k \setminus K'$ оснащение U' определим как совпадающее с U. Очевидно, что оснащение U' является искомым.

Многообразия с нулевым хопфовским инвариантом

Теорема 14. *Всякое оснащенное подмногообразие эвклидова пространства гомологично связному оснащенному подмногообразию того же эвклидова пространства.*

Доказательство. Пусть (M_{-1}^k, U) — ориентированное оснащенное подмногообразие ориентированного эвклидова пространства E^{n+k}, причем $n \geqslant 2$. Случай $n = 1$ не интересен, так как в этом случае оснащенное многообразие всегда гомологично нулю (см. конец § 6). Предположим, что многообразие M_{-1}^k несвязно, и покажем, что существует оснащенное многообразие (M_1^k, U_*), гомологичное исходному, причем число компонент многообразия M_1^k на единицу меньше числа компонент многообразия M_{-1}^k. Этим теорема будет доказана. Пусть a_{-1} и a_1 — две точки многообразия M_{-1}^k, принадлежащие различным его компонентам. В силу предложения «С» мы можем считать, что в окрестностях точек a_{-1} и a_1 многообразие M_{-1}^k является плоским. Так как $n \geqslant 2$, то многообразие M_{-1}^k не разбивает пространства E^{n+k}. Из этого легко следует, что в пространстве E^{n+k} существует простая замкнутая гладкая кривая L с параметрическим уравнением

$$y = y(\eta), \qquad -2 \leqslant \eta \leqslant 2; \qquad y(-2) = y(2),$$

пересекающаяся с многообразием M^k лишь в точках a_{-1} и a_1 при $\eta = -1$ и 1 соответственно. Мы предположим еще, что кривая L ортогональна к многообразию M_{-1}^k в точках a_{-1} и a_1. Пользуясь предложением «А» § 7 и процессом ортогонализации, можно отрезок $-1{,}5 \leqslant \eta \leqslant 1{,}5$ кривой L ортонормально оснастить, т. е. построить в каждой точке $y(\eta)$ этого отрезка ортонормальную систему векторов $e_1(\eta), \ldots, e_{n+k-1}(\eta)$, ортогональных к кривой L в точке $y(\eta)$ и гладко зависящих от параметра η. Будем считать, что векторы $e_1(-1), \ldots$ $\ldots, e_k(-1)$ касаются многообразия M_{-1}^k в точке a_{-1} и определяют в ней его ориентацию, а векторы $e_1(1), \ldots, e_k(1)$ касаются многообразия M_{-1}^k в точке a_1 и определяют в ней ориентацию, противоположную ориентации многообразия M_{-1}^k. Этого можно достичь, подвергая векторы $e_1(\eta), \ldots, e_{n+k-1}(\eta)$ ортогональному преобразованию, гладко зависящему от параметра η. Пусть $E_*^{n+k+1} = E^{n+k} \times I$, где I есть числовой отрезок $-1 \leqslant t \leqslant 1$, и будем рассматривать прямое произведение E_*^{n+k+1} как полосу эвклидова пространства E^{n+k+1}. Построим теперь отображение ϑ множества H^{k+2} (см. п. «А») пространства E^{k+2} в E^{n+k+1}, зависящее от положительного числа ρ, переводящее точку $(\xi^1, \ldots, \xi^k, \eta, \tau) \in H^{k+2}$ в точку $(z, t) \in E_*^{n+k+1}$:

$$z = y(\eta) + \sum_{i=1}^{k} \rho\xi^i e_i(\eta), \tag{1}$$

$$t = \tau.$$

Здесь z, $y(\eta)$ — векторы пространства E^{n+k}. Написанные соотношения определяют отображение ϑ не только на множестве H^{k+2}, но и на некоторой его ε-окрестности W^{k+2} в эвклидовом пространстве E^{k+2}. Ясно, что при достаточно малом ρ отображение ϑ является гладким регулярным гомеоморфизмом многообразия W^{k+2}. При достаточно малом ρ пересечение множества $\vartheta(W^{k+2})$ с многообразием $M_{-1}^k \times (-1)$ содержится в окрестностях точек $a_{-1} \times (-1)$ и $a_1 \times (-1)$ этого многообразия. Будем считать число ρ настолько малым, что это пересечение содержится в тех окрестностях точек $a_{-1} \times (-1)$ и $a_1 \times (-1)$ многообразия $M^k_{-1} \times (-1)$, в которых это многообразие является плоским. В полосе $E^{n+k} \times I$ содержится ее подмногообразие $M^k_{-1} \times I$. Заменим в этом подмногообразии его часть, лежащую в $\vartheta(H^{k+2})$, куском $\vartheta(P^{k+1} \cap H^{k+2})$ (см. п. «А»), именно положим:

$$M^{k+1} = (M^k_{-1} \times I \setminus \vartheta(H^{k+2})) \cup \vartheta(P^{k+1} \cap H^{k+2}).$$

Непосредственно видно, что M^{k+1} есть гладкое подмногообразие полосы E^{n+k+1}_*, ортогональное в краевых точках к краю этой полосы, причем часть границы многообразия M^{k+1}, лежащая в гиперплоскости $E^{n+k} \times (-1)$, совпадает с многообразием $M^k_{-1} \times (-1)$, а часть $M^k_1 \times 1$, лежащая в гиперплоскости $E^{n+k} \times 1$, имеет на одну компоненту меньше, чем многообразие M^k_{-1}.

Займемся теперь построением оснащения V многообразия M^{k+1}, нужного для осуществления гомологии $(M^k_{-1}, U) \sim (M^k_1, U_*)$. Оснащение V многообразия $\vartheta(P^{k+1} \cap W^{k+2})$ выберем, как это указано в «В», так, чтобы в точке $a_{-1} \times (-1)$ векторы $v_1, \ldots, v_n$ и векторы $u_1 \times (-1), \ldots$ $\ldots, u_n \times (-1)$ получились друг из друга преобразованием с положительным детерминантом. В силу предложения «D» можно считать, что векторы $u_1 \times (-1), \ldots, u_n \times (-1)$ совпадают с построенными нами векторами $v_1, \ldots, v_n$ в пересечении $M^k_{-1} \times (-1) \cap \vartheta(H^{k+2})$. Оснащение V многообразия M^{k+1} уже построено нами на его части $\vartheta(P^{k+1} \cap H^{k+2})$. На части $M^{k+1} \setminus \vartheta(P^{k+1} \cap H^{k+2})$ в точке (x, t); $x \in M^{k+1}$, $t \in I$, векторы $v_1, \ldots, v_n$ мы определим как параллельные векторам $u_1(x) \times (-1), \ldots$ $\ldots, u_n(x) \times (-1)$. Таким образом, оснащенное многообразие (M^{k+1}, V) построено.

Итак, теорема 14 доказана.

Теорема 15. *Пусть (M^k_{-1}, U) — оснащенное подмногообразие эвклидова пространства E^{n+k}, $n \geqslant k + 1$. Существует тогда такое оснащенное подмногообразие (M^k, W) пространства E^{n+k}, гомологичное многообразию (M^k_{-1}, U), что многообразие M^k связно и лежит в $2k$-мерном линейном подпространстве E^{2k} пространства E^{n+k}.*

Доказательство. В силу теорем 11 и 14 доказательство теоремы 15 достаточно провести лишь для случая, когда $n = k + 1$ и многообразие M^k_{-1} связно. В силу предложения «В» § 4 существует гиперплоскость E^{2k} пространства E^{2k+1}, ортогональное проектирование π многообразия M^k_{-1} на которую типично. Пусть a_{-1} и a_1 — две различные точки из M^k_{-1}, удовлетворяющие условию $\pi(a_{-1}) = \pi(a_1)$. Таких пар в многообразии M^k_{-1} имеется лишь конечное число (см. § 4, п. «А»). Произведем перестройку многообразия M^k_{-1} в окрестности отрезка (a_{-1}, a_1). Такие же перестройки должны быть произведены для каждой пары самопересечения отображения π многообразия M^k_{-1}.

В силу «С», можно считать, что многообразие M_{-1}^k плоско в окрестностях точек a_{-1} и a_1. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — система линейно независимых векторов, касательных к M_{-1}^k в точке a_{-1} и задающих ориентацию многообразия M_{-1}^k, а $e_{k+1}, \ldots, e_{2k}$ — система линейно независимых векторов, касательных к M_{-1}^k в точке a_1 и задающая ориентацию, противоположную ориентации многообразия M_{-1}^k. Через e_{2k+1} обозначим вектор с началом в середине O отрезка (a_{-1}, a_1) и концом в точке a_1. Принимая точку O за начало координат и перенося в нее все построенные векторы, мы получим базис $e_1, \ldots, e_{2k+1}$ векторного пространства E^{2k+1}. Пусть $E_*^{2k+2} = E^{2k+1} \times I$, где I — числовой отрезок $-1 \leqslant t \leqslant 1$; будем рассматривать произведение E_*^{2k+2} как полосу эвклидова пространства E^{2k+2}. Построим отображение ϑ множества H^{k+2} (см. п. «А») пространства E^{k+2} в E^{2k+2}, зависящее от положительного числа ρ, достаточно малого для возможности проведения дальнейших построений, переводящее точку $(\xi^1, \ldots, \xi^k, \eta, \tau) \in H^{k+2}$ в точку $(z, t) \in E_*^{2k+2}$

$$z = \eta e_{2k+1} + \rho \sum_{i=1}^{k} \xi^i \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\eta + \frac{\pi}{4}\right) e_i + \sin\left(\frac{\pi}{4}\eta + \frac{\pi}{4}\right) e_{i+k}\right),$$
$$t = \tau.$$

Написанные соотношения определяют отображение ϑ не только на множестве H^{k+2}, но и на некоторой его ε — окрестности W^{k+2} в эвклидовом пространстве E^{k+2}. Здесь z есть отображение множества $H_{\tau_0}^{k+1}$ точек $(\xi^1, \ldots, \xi^k, \eta, \tau_0)$, удовлетворяющих условиям (1), в векторное пространство E^{2k+1}. Отметим, что отображение πz множества H_τ^{k+1} регулярно и гомеоморфно всюду, кроме точек отрезка $\xi^i = 0$, $|\eta| \leqslant 1$, так что отображение πz многообразия $P_1^k \subset H_1^{k+1}$ в пространство E^{2k} регулярно и гомеоморфно. Заменим в подмногообразии $M_{-1}^k \times I$ полосы $E^{2k+1} \times I$ его часть, лежащую в $\vartheta(H^{k+2})$, куском $\vartheta(P^{k+1} \cap H^{k+2})$ (см. п. «А»), именно положим

$$M^{k+1} = (M_{-1}^k \times I \setminus \vartheta(H^{k+2})) \cup \vartheta(P^{k+1} \cap H^{k+2}).$$

Непосредственно видно, что M^{k+1} есть гладкое подмногообразие полосы E_*^{2k+2}, ортогональное в краевых точках к краю этой полосы, причем часть границы многообразия M^{k+1}, лежащая в гиперплоскости $E^{2k+1} \times (-1)$, совпадает с $M_{-1}^k \times (-1)$, а часть $M_1^k \times 1$, лежащая в гиперплоскости $E^{2k+1} \times 1$, такова, что многообразие M_1^k имеет при проектировании π на одну пару самопересечений меньше, чем многообразие M_{-1}^k. В случае $k > 1$ из связности многообразия M_{-1}^k следует связность многообразия M_1^k. Для $k = 1$ теорема 15 будет непосредственно следовать из предложения «D» § 13; приводимое здесь доказательство для $k = 1$ непригодно, так как построенное многообразие M_1^1 может оказаться несвязным.

Займемся теперь построением оснащения V многообразия M^{k+1}, нужного для осуществления гомологии $(M_{-1}^k, U) \sim (M_1^k, U_*)$.

Оснащение V многообразия $\vartheta(P^{k+1} \cap W^{k+2})$ выберем, как указано в «B» (здесь $n = k+1$), причем так, чтобы в точке $a_{-1} \times (-1)$ векторы $v_1, \ldots, v_{k+1}$ и векторы $u_1 \times (-1), \ldots, u_{k+1} \times (-1)$ получались друг из друга преобразованием с положительным детерминантом. В силу предложения «D» можно считать, что векторы $u_1 \times (-1), \ldots, u_{k+1} \times (-1)$ совпадают с построенными нами векторами $v_1, \ldots, v_{k+1}$ в пересечении $M_{-1}^k \times (-1) \cap \vartheta(H^{k+2})$. Оснащение V многообразия M^{k+1} уже построено нами на его части $\vartheta(P^{k+1} \cap H^{k+2})$. На части $M^{k+1} \setminus \vartheta(P^{k+1} \cap H^{k+2})$ в точке (x, t); $x \in M^{k+1}$, $t \in I$ векторы $v_1, \ldots, v_{k+1}$ мы определим как параллельные векторам $u_1(x) \times (-1), \ldots, u_{k+1}(x) \times (-1)$. Таким образом, оснащенное многообразие (M^{k+1}, V) построено.

Будем считать, что указанная перестройка многообразия M_{-1}^k проведена одновременно для всех пар самопересечения отображения π. Тогда полученное многообразие M_1^k при проектировании π отображается регулярно и гомеоморфно на подмногообразие $M^k = \pi(M_1^k)$ пространства E^{2k}. Это проектирование можно осуществить путем деформации гладкого подмногообразия M_1^k в гладкое подмногообразие M^k. В силу предложения «B» § 7, деформацию эту можно распространить в деформацию оснащенного многообразия. Таким образом, мы получаем искомое оснащенное подмногообразие (M^k, W) пространства E^{2k+1}.

Итак, теорема 15 доказана.

Теорема 16. *Пусть* (M_0^k, U_0) — *оснащенное подмногообразие эвклидова пространства* E^{2k+1}, *для которого* $\gamma(M_0^k, U_0) = 0$ (что всегда верно при четном k, см. определение 9), (см. § 10, п. «B») *Тогда в гиперплоскости* E^{2k} *пространства* E^{2k+1} *существует такое оснащенное подмногообразие* (M_1^k, V_1), *что* $(M_0^k, U_0) \sim E(M_1^k, V_1)$, (см. определение 6).

Доказательство. В силу теорем 14 и 15 существует такое связное замкнутое оснащенное подмногообразие (M_1^k, U_1) пространства E^{2k+1}, которое гомологично заданному оснащенному многообразию (M_0^k, U_0), причем $M_1^k \subset E^{2k}$. В силу предложения «B» § 10 имеем $\gamma(M_1^k, U_1) = 0$. Таким образом, в силу предложения «E» § 10 степень отображения ψ многообразия M_1^k на сферу $\mathfrak{S}^k$ равна нулю и потому отображение ψ гомотопно нулю (см. теорему 13). В силу предложения «A» § 8 оснащенное многообразие (M_1^k, U_1) гомологично оснащенному многообразию $E(M_1^k, V)$, где (M_1^k, V) есть оснащенное подмногообразие пространства E^{2k}.

Таким образом, теорема 16 доказана.

Глава IV

КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ $(n+1)$-МЕРНОЙ И $(n+2)$-МЕРНОЙ СФЕР В n-МЕРНУЮ

§ 12. ГРУППА ВРАЩЕНИЙ ЭВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Основной целью настоящего параграфа является установление простейших топологических свойств группы H_n всех вращений n-мерного эвклидова векторного пространства E^n, свойств, которые используются для классификации отображений сферы Σ^{n+k} в сферу S^n при $k=1, 2$. Доказывается (см. теорему 17), что многообразие H_n связно и что при $n \geqslant 3$ существует ровно два гомотопических класса отображений окружности в многообразие H_n. В качестве средства для установления этих топологических свойств многообразия H_n используется известная лемма о накрывающей гомотопии, имеющая большое самостоятельное значение, а также описание группы H_3 при помощи кватернионов, которое также имеет значительный самостоятельный интерес и используется в дальнейшем.

Кватернионы

Напомним понятие *кватерниона*, которое будет использовано как в этом, так и в следующем параграфах.

А) Пусть K — четырехмерное эвклидово векторное пространство с фиксированной в нем системой декартовых координат. Произвольный вектор $x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in K$ запишем в виде: $x = x^1 + ix^2 + jx^3 + kx^4$, где i, j, k суть *кватернионные единицы*. Определим закон перемножения в множестве K, считая, что умножение дистрибутивно, что действительные числа перестановочны с кватернионными единицами и что сами кватернионные единицы перемножаются по формулам

$$ij = -ji = k;\quad jk = -kj = i;\quad ki = -ik = j;\quad i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1. \tag{1}$$

Легко проверяется, что так определенное в K умножение ассоциативно. Кватернион $\bar{x}$, *сопряженный* к кватерниону x, определим, положив $\bar{x} = x^1 - ix^2 - jx^3 - kx^4$. Непосредственно проверяется, что

$$\overline{xy} = \bar{y} \cdot \bar{x}. \tag{2}$$

Модуль кватерниона x определим как неотрицательное действительное число $|x| = \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}$. Мы имеем $|xy|^2 = xy \cdot \overline{xy} = xy\bar{y}\bar{x} = x \cdot |y|^2 \cdot \bar{x} = |y|^2 \cdot x\bar{x} = |x|^2 \cdot |y|^2$. Таким образом

$$|xy| = |x| \cdot |y|. \tag{3}$$

Если $x \neq 0$, то $|x| \neq 0$, и существует кватернион x^{-1}, *обратный* к кватерниону x, именно $x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$. Таким образом, совокупность K всех кватернионов образует алгебраическое тело. Тело K кватернионов содержит поле действительных чисел D, состоящее из всех кватернионов вида $x = x^1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$. Совокупность G всех кватернионов x, удовлетворяющих условию $|x| = 1$, образует в силу (3) группу по умножению. Множество G есть трехмерная сфера эвклидова пространства K. Кватернионы вида $x^2 \cdot i + x^3 \cdot j + x^4 \cdot k$ называются *чисто мнимыми*. Их совокупность J образует трехмерное векторное пространство, ортогональное в K прямой D.

В) Пусть K — тело кватернионов, D — содержащееся в нем поле действительных чисел, J — совокупность всех чисто мнимых кватернионов и G — группа кватернионов, по модулю равных единице (см. п. «А»). Каждому кватерниону $g \in G$ поставим в соответствие отображение ψ_g пространства K в себя, положив

$$\psi_g(x) = gxg^{-1}. \tag{4}$$

Так как в силу (3) $|gxg^{-1}| = x$, то преобразование ψ_g, будучи линейным, является вращением эвклидова пространства K. Так как $\psi_g(D) = D$, то и ортогональное к прямой D векторное подпространство J при преобразовании ψ_g переходит в себя, т. е. претерпевает вращение. Оказывается, что, ставя в соответствие каждому кватерниону $g \in G$ вращение $v(g) = \psi_g$ эвклидова пространства J, мы получаем гомоморфное отображение v группы G на группу H_3 всех вращений трехмерного эвклидова пространства J. Ядро гомоморфизма v состоит из двух элементов 1 и -1. Оказывается, далее, что подгруппа S^1 всех кватернионов $g \in G$, удовлетворяющих условию $\psi_g(i) = i$, состоит из всех кватернионов вида $\cos\alpha + i \sin\alpha$.

Докажем предложение «В». Прежде всего имеем

$$\psi_{gh}(x) = gh\,xh^{-1}g^{-1} = \psi_g(hxh^{-1}) = \psi_g\psi_h(x),$$

так что v есть гомоморфное отображение группы G в группу H_3. Покажем, что $v(G) = H_3$. Пусть $l = aj + bk$, где $a^2 + b^2 = 1$. Легко видеть, что

$$l^2 = -1, \qquad li = -il. \tag{5}$$

Пусть теперь $g = \cos\beta + l\sin\beta$. Из (5) следует, что

$$\psi_g(i) = (\cos\beta + l\sin\beta)\, i\,(\cos\beta - l\sin\beta) = (\cos\beta + l\sin\beta)^2 \cdot i =$$
$$= (\cos 2\beta + l\sin 2\beta)\, i = i\cos 2\beta + (bj - ak)\sin 2\beta, \qquad (6)$$

а из этого следует, что подбирая надлежащим образом числа a, b и β, мы можем перевести кватернион i при помощи преобразования ψ_g в любой кватернион множества $S^2 = J \cap G$. Далее, полагая $a = 0$, $b = 1$ мы получаем из формулы (6)

$$\psi_g(i) = i\cos 2\beta + j\sin 2\beta, \qquad (7)$$

и так как в этом случае g перестановочно с k, то преобразованиями вида ψ_g можно осуществить любое вращение пространства J вокруг оси k. Так как G есть группа, то из сказанного следует, что преобразованиями вида ψ_g, $g \in G$ можно осуществить любое вращение пространства J. Заметим, далее, что из закона перемножения (1) следует, что перестановочными с кватернионом i являются лишь такие кватернионы из G, которые имеют вид $\cos\alpha + i\sin\alpha$, так что группа S^1 состоит из кватернионов указанного вида. Точно так же перестановочными с j являются в G кватернионы вида $\cos\alpha + j\sin\alpha$. Таким образом, ядро гомоморфизма v состоит лишь из двух элементов $+1$ и -1.

Итак, предложение «В» доказано.

Накрывающая гомотопия

Лемма 1. Пусть φ — гладкое, правильное во всех точках отображение замкнутого многообразия P^p в замкнутое многообразие Q^q, $p \geqslant q$. Пусть, далее, f — непрерывное отображение компактного метрического пространства R в многообразие P^p и g_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — такая непрерывная деформация отображений пространства R в многообразие Q^q, что $g_0 = \varphi f$. Существует тогда такая непрерывная деформация f_t отображений пространства R в многообразие P^p, что $f_0 = f$ и $\varphi f_t = g_t$. Деформация f_t называется *накрывающей* для деформации g_t. Если для некоторой точки $x \in R$ имеем $g_t(x) = g_0(x)$ для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то также $f_t(x) = f_0(x)$. Далее, если R — гладкое многообразие, f — гладкое отображение, а g_t — гладкая деформация, то отображение f_1 также является гладким.

Доказательство. Полный прообраз точки $y \in Q^q$ в многообразии P^p при отображении φ обозначим через M_y: $M_y = \varphi^{-1}(y)$. Из формулы (2) § 4 следует, что M_y есть $(p-q)$-мерное подмногообразие многообразия P^p. В силу теоремы 2 можно считать, что P^p есть гладкое подмногообразие эвклидова векторного пространства A достаточно большого числа измерений. Нормаль в точке $x_0 \in M_{y_0}$ к многообразию M_{y_0} в пространстве A обозначим через N_{x_0}. Покажем теперь, что если точка y достаточно близка к точке y_0, то существует лишь одна точка $\gamma(x_0, y)$ пересечения нормали N_{x_0} с многообразием M_y, достаточно близкая к точке x_0. Для доказательства этого введем в окрестностях точек x_0 и y_0 многообразий P^p и Q^q локальные координаты $x^1, \ldots, x^p$ и $y^1, \ldots, y^q$ с началами соответственно в x_0 и y_0, в которых отображение φ записывается в виде

$$y^1 = x^1, \ldots, y^q = x^q \tag{8}$$

[см. § 4, формулу (2)]. Пусть $x = \vartheta(x^1, \ldots, x^p)$ — параметрическое уравнение многообразия P^p в окрестности точки x_0. Нормаль N_{x_0} в эвклидовом векторном пространстве A определяется системой уравнений

$$\left(x - x_0, \frac{\partial\vartheta(0, \ldots, 0)}{\partial x^i}\right) = 0, \quad i = q+1, \ldots, p, \tag{9}$$

где x есть радиус-вектор, описывающий линейное пространство N_{x_0}. Параметрическим уравнением многообразия M_y служит уравнение

$$x = \vartheta(y^1, \ldots, y^q, x^{q+1}, \ldots, x^p), \tag{10}$$

где $y^1, \ldots, y^q$ — координаты точки y, а $x^{q+1}, \ldots, x^p$ — локальные координаты в многообразии M_y. Таким образом, для нахождения точки $\gamma(x_0, y)$ следует подставить значение x из уравнения (10) в уравнения (9) и затем решить полученную систему уравнений относительно неизвестных $x_{q+1}, \ldots, x_p$. При указанной подстановке получаем

$$\left(\vartheta(y^1, \ldots, y^q, x^{q+1}, \ldots, x^p) - \vartheta(y_0^1, \ldots, y_0^q, x_0^{q+1}, \ldots, x_0^p), \frac{\partial\vartheta(0, \ldots, 0)}{\partial x^i}\right) = 0,$$
$$i = q+1, \ldots, p. \tag{11}$$

Здесь мы имеем систему из $p - q$ уравнений относительно $p - q$ неизвестных $x^{q+1}, \ldots, x^p$. При начальных условиях $y^1 = 0, \ldots, y^q = 0$ система (11) имеет очевидное решение $x^{q+1} = 0, \ldots, x^p = 0$. Функциональным определителем системы (10) при этих начальных условиях служит детерминант

$$\left|\left(\frac{\partial\vartheta(0, \ldots, 0)}{\partial x^j}, \frac{\partial\vartheta(0, \ldots, 0)}{\partial x^i}\right)\right|; \quad i, j = q+1, \ldots, p,$$

который отличен от нуля, так как векторы $\dfrac{\partial\vartheta(0, \ldots, 0)}{\partial x^i}$, $i = q+1, \ldots, p$ линейно независимы. Таким образом, для достаточно близкой к y_0 точки y существует лишь одна точка x, достаточно близкая к x_0 и удовлетворяющая условию

$$x = \gamma(x_0, y) \in N_{x_0} \cap M_y.$$

Из компактности многообразия P^p следует, что существует настолько малое положительное число δ, что при $\rho(y, \varphi(x_0)) < \delta$ функция $\gamma(x_0, y)$ определена и является непрерывной функцией своих аргументов $x_0 \in P^p$

и $y \in Q^q$. Эта функция обладает следующими двумя свойствами

$$\gamma(x_0, \varphi(x_0)) = x_0, \tag{12}$$

$$\varphi(\gamma(x_0, y)) = y. \tag{13}$$

Только эти ее свойства в дальнейшем и будут использоваться.

Перейдем теперь к построению деформации f_t, используя при этом функцию $\gamma(x_0, y)$. Отображение f_0 определим, положив $f_0 = f$. Пусть ε — настолько малое положительное число, что при $|t - t'| \leqslant \varepsilon$ имеем $\rho(g_t(u), g_t(u)) < \delta$, $u \in R$. Допустим, что отображение f_t определено для всех значений t, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant t \leqslant n\varepsilon < 1$, где n — целое неотрицательное число. Отображение f_t для значений t, удовлетворяющих неравенствам $n\varepsilon \leqslant t \leqslant (n+1)\varepsilon$ определим, положив

$$f_t(u) = \gamma(f_{n\varepsilon}(u), g_t(u)). \tag{14}$$

Из соотношений (12) и (13) следует, что так определенное отображение f_t дает непрерывную деформацию и удовлетворяет условию $g_t = \varphi f_t$.

Итак, лемма 1 доказана.

Группа вращений эвклидова пространства

C) Пусть E^n — эвклидово векторное пространство, S^{n-1} — сфера в нем, определяемая уравнением $(x, x) = 1$; H_n — группа всех вращений пространства E^n и a — фиксированная точка из S^{n-1}. Оказывается, что H_n есть гладкое многообразие размерности $\frac{n(n-1)}{2}$ и что, ставя в соответствие каждому его элементу h точку $\chi(h) = h(a)$, мы получаем гладкое правильное во всех точках отображение χ многообразия H_n на многообразие S^{n-1}.

Докажем предложение «C». Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый ортонормальный базис пространства E^n. Если $h \in H_n$, то

$$h(e_j) = \sum_i h_{ij} e_i. \tag{15}$$

Таким образом, каждому вращению h пространства E^n соответствует некоторая ортогональная матрица $\| h_{ij} \|$ с положительным определителем: $h \to \| h_{ij} \|$, и, наоборот, каждой ортогональной матрице $\| h_{ij} \|$ с положительным определителем соответствует в силу (14) определенное вращение пространства E^n. В силу соответствия $h \to \| h_{ij} \|$ отождествим группу H_n с группой всех ортогональных матриц порядка n, имеющих положительный детерминант. Как известно, условия ортогональности матрицы имеют вид

$$F_{ij} = \delta_{ij}, \text{ где } F_{ij} = \sum_\alpha h_{i\alpha} h_{j\alpha}. \tag{16}$$

Покажем, что вблизи единичной матрицы $\| \delta_{ij} \|$ за локальные координаты матрицы $h \in H_n$ можно принять числа h_{ij}, где $i > j$. Для этого достаточно показать, что при начальных значениях $h_{ij} = \delta_{ij}$ система уравнений (16) разрешима относительно переменных h_{ij}, где $i \leqslant j$. Заметим, что так как $F_{ij} = F_{ji}$, то можно рассматривать лишь функции F_{ij} для $i \leqslant j$, так что число уравнений равно числу неизвестных. Мы имеем

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial h_{kl}} = \sum_{\alpha} (\delta_{ik}\delta_{\alpha l} h_{j\alpha} + h_{i\alpha}\delta_{jk}\delta_{\alpha l});$$

при $h_{ij} = \delta_{ij}$ это дает $\frac{\partial F_{ij}}{\partial h_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}$. Если хотя бы одно из неравенств $i \leqslant j$, $k \leqslant l$ является строгим, то равенства $j = k$, $i = l$ невозможны, и второе слагаемое равно нулю. Таким образом функциональная матрица системы функций F_{ij}, $i \leqslant j$ по переменным h_{kl}, $k \leqslant l$ является диагональной, причем по диагонали стоят единицы и двойки, и разрешимость системы (2) доказана. Пусть U — окрестность единичной матрицы, в которой указанная разрешимость имеет место и в которой за координаты можно, следовательно, принять числа h_{ij}, $i > j$. Пусть $h_0 \in H_n$; тогда Uh_0 есть окрестность матрицы h_0, и мы примем за координаты элемента $hh_0 \in Uh_0$ в окрестности Uh_0 координаты элемента h в окрестности U. Пусть Uh_0 и Uh_1 — две перекрывающиеся окрестности. Легко видеть, что переход от координат, имеющихся в Uh_0, к координатам, имеющимся в Uh_1, осуществляется гладкими функциями. Таким образом, H_n есть гладкое многообразие.

Так как H_n есть группа, способная переводить точку a в произвольную точку сферы, то $\chi(H_n) = S^{n-1}$, и правильность отображения χ достаточно показать лишь в одной точке многообразия H_n, например, в точке $\| \delta_{ij} \|$. При $a = e_1$ матрице $\| h_{ij} \|$ в силу отображения χ соответствует точка сферы S^{n-1} с координатами h_{i1}, $i = 1, \ldots, n$. Так как $h_{21}, h_{31}, \ldots, h_{n1}$ являются координатами элемента h_{ij} в U, а за координаты точки $\chi(h)$ сферы S^{n-1} можно принять числа $h_{21}, \ldots, h_{n1}$, то правильность отображения χ в точке $\| \delta_{ij} \|$ очевидна.

Таким образом, предложение «С» доказано.

Теорема 17. *Пусть H_n — группа всех вращений эвклидова векторного пространства E^n, $n \geqslant 3$. Оказывается, что H_n есть связное многообразие и существует в точности два гомотопических класса отображений окружности S^1 в многообразие H_n, из которых один состоит из всех отображений, гомотопных нулю, а другой — из всех отображений, негомотопных нулю. Негомотопные нулю отображения окружности S^1 в многообразие H_n можно описать следующим образом. Пусть E^2 — произвольное двумерное подпространство векторного пространства E^n и E^{n-2} — его ортогональное дополнение. Группу H_2 вращений плоскости E^2, гомеоморфную* *окружности, естественно рассматривать как подгруппу группы H_n, если каждое вращение плоскости E^2 распространить на все пространство E^n, считая его на E^{n-2} тождественным. Оказывается, что отображение g окружности S^1 в окружность H_2 тогда и только тогда гомотопно нулю в H_n, когда степень отображения g четна. Оказывается, далее, что всякое отображение h окружности S^1 в многообразие H_n можно таким образом непрерывно продеформировать в отображение g окружности S^1 в H_2, что в течение деформации всякая точка x, для которой $h(x) \in H_2$, не перемещается в течение деформации.*

Доказательство. Пусть S^{n-1} — единичная сфера пространства E^n, $a \in S^{n-1}$ и χ — отображение многообразия H_n в сферу S^{n-1}, построенное в предложении «С». Очевидно, что множество $\chi^{-1}(a)$ есть подгруппа H_{n-1} группы H_n, представляющая собой группу всех вращений пространства E^{n-1}, ортогонального к вектору a.

Пусть f_0 — гладкое отображение компактного многообразия M^r, $r \leqslant n-2$ в H_n. Покажем, что существует деформация f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ отображения f_0, сохраняющая на месте каждую точку многообразия M^r, перешедшую в H_{n-1}, и переводящая все многообразие M^r в H_{n-1}: $f_1(M^r) \subset H_{n-1}$. В силу теоремы 1 множество $\chi f_0(M^r)$ нигде не плотно в S^{n-1}, и поэтому существует гладкая деформация g_t отображения $g_0 = \chi f_0$, при которой каждая точка многообразия M^r, перешедшая в a, остается неподвижной, а отображение g_1 переводит все многообразие M^r в точку a. Деформация f_t, накрывающая деформацию g_t, является, как легко видеть, искомой (см. лемму 1).

Применяя это замечание к случаю $M^r = S^1$, мы видим, что любое отображение окружности S^1 в многообразие H_n гомотопно некоторому отображению ее в подмногообразие H_{n-1}. Если $n-1 \geqslant 3$, то, повторно применяя то же рассуждение, мы убеждаемся, что любое отображение окружности S^1 в H_n гомотопно некоторому ее отображению в H_{n-2}, где H_{n-2} есть группа всех вращений некоторого подпространства E^{n-2} пространства E^{n-1}. Продолжая этот процесс дальше, убеждаемся, что любое отображение окружности S^1 в H_n гомотопно ее отображению в $H_2 \subset H_n$.

Покажем, что если отображение g окружности S^1 в H_2 гомотопно нулю в H_n, то оно гомотопно нулю и в H_3, где $H_2 \subset H_3 \subset H_n$. Пусть K^2 — некоторый круг, ограниченный окружностью S^1. Так как отображение g окружности S^1 гомотопно нулю в H_n, то его можно распространить в отображение g всего круга K^2 в многообразие H_n. Применяя последовательно вышеприведенное замечание к случаю $M^r = K^2$, мы убеждаемся, что отображение g окружности S^1 в H_2 гомотопно нулю в H_3. Для доказательства теоремы нам остается установить, что отображение g окружности S^1 в окружность H_2 тогда и только тогда гомотопно нулю в H_3, когда степень σ отображения g является четной.

Для доказательства этого факта воспользуемся гомоморфным отображением v группы G на группу H_3 (см. п. «В»). Отображение v гладко, правильно во всех точках и переводит в каждую точку многообразия H_3 ровно две точки из G. Заметим еще, что $\Sigma^1 = v^{-1}(H_2)$ есть окружность, которая при помощи v отображается на окружность H_2 со степенью два [см. (7)].

Допустим, что $\sigma = 2\rho$, и пусть ν отображение окружности S^1 в окружность Σ^1 со степенью ρ. Тогда отображение $v\nu$ окружности S^1 в окружность H_2 имеет степень $2\rho = \sigma$, и потому гомотопно отображению g. Так как отображение ν гомотопно нулю в сфере G, то и отображение $v\nu$ гомотопно нулю в H_3. Таким образом, и отображение g гомотопно нулю в H_3.

Допустим теперь, что отображение g окружности S^1 в H_2 гомотопно нулю в H_3, так что существует такая непрерывная деформация g_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ отображений окружности S^1 в многообразие H_3, что $g_1 = g$, а $g_0(S^1)$ есть единственная точка из H_3. Пусть p — такая точка из G, что $v(p) = g_0(S^1)$, и f_0 — отображение окружности S^1 в точку p; тогда $vf_0 = g_0$, и в силу леммы 1 существует накрывающая деформация f_t для деформации g_t. Таким образом, $vf_1 = g_1$ и, следовательно, f_1 есть отображение окружности S^1 в окружность Σ^1, а так как $vf_1 = g_1$, то степень отображения g_1 должна быть четной (ибо степень отображения v равна двум).

Связность многообразия H_n легко доказывается непосредственно. Она следует также из того, что существует лишь один класс гомотопных нулю отображений окружности S^1 в многообразие H_n.

Итак, теорема 17 доказана.

D) Каждому отображению h одномерного многообразия M^1 в группу H_n вращений n-мерного эвклидова пространства, $n \geqslant 2$, поставим в соответствие вычет $\beta(h)$ по модулю 2. При $n \geqslant 3$ для однокомпонентного многообразия M^1 вычет $\beta(h)$ будем считать равным нулю, когда отображение h гомотопно нулю в H_n и единице в противоположном случае. Для многокомпонентного многообразия M^1 вычет $\beta(h)$ определим как сумму вычетов $\beta(h)$ по всем компонентам. При $n = 2$ вычет $\beta(h)$ определим как редуцированную по модулю 2 степень отображения многообразия M^1 в окружность H_2. Имея два отображения f и g окружности S^1 в группу H_n, определим их *групповое произведение* $h = fg$, положив

$$h(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad x \in S^1,$$

где справа стоит групповое произведение элементов $f(x)$ и $g(x)$ группы H_n. Оказывается, что

$$\beta(h) = \beta(f) + \beta(g). \tag{17}$$

Докажем формулу (17). Пусть $T^2 = S^1 \times S^1$ — прямое произведение окружности S^1 на себя, т. е. совокупность всех пар (x, y), где $x \in S^1$, $y \in S^1$. Определим отображение φ тора T^2 в H_n, положив

$$\varphi(x, y) = f(x) \cdot g(y).$$

Пусть, далее, a — фиксированная точка окружности S^1. Без ограничения общности можно предполагать, что $f(a) = g(a) = e \in H_n$. Определим три отображения f', g', h' окружности S^1 в тор T^2, положив

$$f'(x) = (x, a), \qquad g'(x) = (a, x), \qquad h'(x) = (x, x).$$

Очевидно, что

$$\varphi f' = f, \qquad \varphi g' = g, \qquad \varphi h' = h.$$

Известно и легко проверить, что отображение h' окружности S^1 в тор T^2 гомотопно отображению $\hat{h}$ окружности S^1 в лемнискату $S^1 \times a \cup a \times S^1$, при котором окружность S^1 отображается со степенью единица как на $S^1 \times a$, так и на $a \times S^1$. Таким образом, отображения $\varphi h'$ и $\varphi \hat{h}$ гомотопны между собой. Между тем, для отображения $\varphi \hat{h}$ непосредственно проверяется, что $\beta(\varphi \hat{h}) = \beta(\varphi f') + \beta(\varphi g')$. Таким образом, формула (16) доказана.

§ 13. КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЫ В ДВУМЕРНУЮ

В настоящем параграфе дается гомотопическая классификация отображений сферы Σ^3 в сферу S^2, именно, доказывается, что хопфовский инвариант γ (см. § 10) является в этом случае *единственным* гомотопическим инвариантом отображения и может принимать любое целочисленное значение. Важную роль при доказательстве этого факта играет хопфовское отображение ω сферы Σ^3 на сферу S^2, которое хорошо описывается при помощи кватернионов. Пусть K — тело кватернионов, G — совокупность всех кватернионов, по модулю равных единице, и J — совокупность всех чисто мнимых кватернионов (см. § 12, п. «А»). За сферу Σ^3 примем G, а за сферу S^2 — пересечение $G \cap J$. Каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие элемент $\omega(g)$, положив $\omega(g) = gig^{-1}$, где i есть кватернионная единица. Оказывается, что так определенное отображение ω правильно во всех точках и имеет хопфовский инвариант, равный единице. Только эти свойства отображения ω и используются для проведения классификации отображений сферы Σ^3 в сферу S^2. При проведении этой классификации используется также тот факт, что всякое отображение сферы S^n, $n \geqslant 2$ в окружность S^1 гомотопно нулю. Доказательство этой совершенно элементарной теоремы здесь также приводится.

Отображения сферы в окружность

Теорема 18. *Всякое отображение сферы S^n в сферу S^1 при $n \geqslant 2$ гомотопно нулю.*

Доказательство. Пусть p и q — северный и южный полюсы сферы S^n, а S^{n-1} — ее экватор, т. е. сечение гиперплоскостью, перпендикулярной к отрезку pq и проходящей через его середину. Для всякой точки $x \in S^{n-1}$ существует единственный меридиан pxq сферы S^n, проходящий через точку x, т. е. большая полуокружность сферы S^n, соединяющая точки p и q и проходящая через x. На меридиане pxq введем угловую координату α, отсчитываемую от точки p. Точку y меридиана pxq с угловой координатой α обозначим через (x, α). Мы имеем $(x, 0) = p$, $(x, \pi) = q$, а для каждой точки $y \in S^n \setminus (p \cup q)$ имеется однозначная запись $y = (x, \alpha)$, где $0 < \alpha < \pi$.

Пусть f — произвольное отображение сферы S^n в сферу S^1. На окружности S^1 введем угловую координату β, приняв за начало отсчета точку $f(p)$. Координата β точки $f(x, \alpha)$ представляет собой число, определенное с точностью до слагаемого, кратного 2π. Определим теперь непрерывную числовую функцию $g(x, \alpha)$, превращающуюся в $f(x, \alpha)$ с помощью редуцирования по модулю 2π. Для этого положим $g(x, 0) = 0$, и при фиксированной точке $x \in S^{n-1}$ определим числовую функцию $g(x, \alpha)$ так, чтобы она была непрерывной функцией числа α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Очевидно, что так построенная функция $g(x, \alpha)$ есть непрерывная функция переменных x, α. Покажем, что $g(x, \pi)$ есть константа. Пусть x_0 и x_1 — две произвольные точки из S^{n-1} и x_t — точка из S^k, непрерывно зависящая от параметра t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Числовая функция $g(x_t, \pi)$ параметра t непрерывна, и так как при редуцировании по модулю 2π она, очевидно, не зависит от параметра t, ибо $f(x_t, \pi) = f(q)$, то и числовая функция $g(x_t, \pi)$ не зависит от параметра t. Таким образом, $g(x_t, \pi)$ есть константа. Редуцируя по модулю 2π числовую функцию $(1-t)\, g(x, \alpha)$, мы получаем угловую функцию $f_t(x, \alpha)$ двух переменных x и α, удовлетворяющую условиям $f_0(x, \alpha) = f(x, \alpha)$, $f_1(x, \alpha) = 0$. Функция $f_t(x, \alpha)$ определяет деформацию отображения $f = f_0$ в отображение f_1, которое переводит всю сферу S^n в одну точку.

Итак, теорема 18 доказана.

Хопфовское отображение трехмерной сферы в двумерную

А) В эвклидовом пространстве E^3 с координатами y^1, y^2, y^3 и началом O построим для заданного целого числа r оснащенное многообразие $(S^1, V_{(r)})$, где S^1 есть окружность с параметрическим уравнением

$$y^1 = \cos x, \quad y^2 = \sin x, \quad y^3 = 0, \tag{1}$$

а $\gamma(S^1, V_{(r)}) = r$ (см. § 10, п. «В»). Нормаль N_x^2 в точке x окружности S^1 зададим параметрическими уравнениями

$$y^1 = (1 + t^1)\cos x, \ y^2 = (1 + t^1)\sin x, \ y^3 = t^2, \tag{2}$$

где t^1, t^2 суть декартовы координаты в плоскости N_x^2 с началом в точке x. Базисные векторы в этой системе координат в плоскости N_x^2 обозначим через $u_1(x)$ и $u_2(x)$: $u_1(x) = \{1,0\}$, $u_2(x) = \{0,1\}$. Векторы $v_1(x)$ и $v_2(x)$ оснащения $V_{(r)}$ определим соотношениями

$$\left.\begin{aligned} v_1(x) &= u_1(x)\cdot\cos rx + u_2(x)\cdot\sin rx, \\ v_2(x) &= -u_1(x)\cdot\sin rx + u_2(x)\cdot\cos rx. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для вычисления числа $\gamma(S^1, V_{(r)})$ применим предложение «Е», § 10. Мы имеем

$$u_2(x) = v_1(x)\sin rx + v_2(x)\cos rx,$$

а из этого следует, что степень отображения ψ многообразия S^1 в сферу $\mathfrak{S}^1$ равна $\pm r$. Таким образом, при надлежаще выбранной ориентации пространства E^3 мы получаем: $\gamma(S^1, V_{(r)}) = + r$.

Лемма 1. Существует гладкое, правильное во всех точках отображение ω трехмерной сферы Σ^3 на двумерную сферу S^2, при котором прообраз $\omega^{-1}(y)$ каждой точки $y \in S^2$ гомеоморфен окружности, а $\gamma(\omega) = + 1$.

Доказательство. Пусть K — тело кватернионов, G — группа всех кватернионов, по модулю равных единице, и J — совокупность всех чисто мнимых кватернионов (см. § 12, п. «А»). Положим $\Sigma^3 = G$, $S^2 = J \cap G$, и отображени ω определим, положив $\omega(g) = \psi_g(i) = gig^{-1}$ (см. § 12, п. «В»). Так как для каждого элемента $y \in S^2$ найдется такой элемент $g \in G$, что $\psi_g(i) = y$, то прообразы всех точек сферы S^2 при отображениии ω гомеоморфны между собой, а так как прообраз точки i гомеоморфен окружности (см. § 12, п. «В»), то все они гомеоморфны окружности.

Правильность отображения ω следует из того, что $\omega = \chi v$ (см. § 12, пп. «В», «С») и что каждое из отображений χ, v правильно во всех точках.

Перейдем к построению оснащенного многообразия (S^1, V), соответствующего (см. определение 4) отображению ω. Для этого примем за северный полюс p' сферы $\Sigma^3 = G$ кватернион k, а за φ — проекцию области $G \setminus k$ из точки k на пространство E^3, состоящее из кватернионов вида $y^1 + iy^2 + jy^3$. Хотя эта плоскость не является касательной к сфере G в точке $-k$, но она параллельна ей, и потому такая замена может повлечь лишь подобное преобразование оснащенного многообразия, что не меняет его класса гомологий. За полюс p сферы S^2 примем кватернион i; тогда $\omega^{-1}(p) = S^1$, причем $\varphi(S^1) = S^1$ (см.

§ 12, п. «В»). Здесь S^1 состоит из всех кватернионов вида $\cos x + i\sin x$.

Путь I — подпространство векторного пространства K с базисом j, k. Обозначим через P^3_x касательное пространство к сфере G в точке $\cos x + i\sin x \in S^1$, а через R^2 — касательное подпространство к сфере S^2 в точке i. Ставя в соответствие точке $\xi \in I$ точку $q_x(\xi) = \cos x + i\sin x + \xi$, мы получаем изометрическое отображение q_x плоскости I на плоскость Q_x, содержащуюся в P^3_x. Точно так же, ставя в соответствие точке $\xi \in I$ точку $r(\xi) = i + \xi i$, мы получаем изометрическое отображение плоскости I на плоскость R^2. Отображению ω сферы G на S^2 соответствует линейное отображение ω_x касательной P^3_x в касательную R^2 (см. § 1, п. «Е») и, в частности, отображение ω_x плоскости Q_x в плоскость R^2. В дальнейшем мы будем рассматривать отображение ω_x только на Q_x, и для его изучения положим $\tilde{\omega}_x = r^{-1}\omega_x q_x$. Таким образом, $\tilde{\omega}_x$ есть линейное отображение векторного пространства I на себя. Вычислим отображение $\tilde{\omega}_x$. Пусть

$$g = 1 + x^3 j + x^4 k + \varepsilon$$

есть элемент группы G, близкий к единице, где ε — кватернион второго порядка малости относительно $\sqrt{(x^3)^2 + (x^4)^2}$. Из формулы (6) § 12 вытекает, что отбрасывая малые второго порядка, мы имеем

$$\omega(g) = i + 2(x^3 \cdot j + x^4 \cdot k) \cdot i. \tag{4}$$

Пусть теперь

$$\begin{aligned} h &= \cos x + i\sin x + x^3 \cdot j + x^4 \cdot k = \\ &= [1 + (x^3 \cdot j + x^4 \cdot k)(\cos x - i\sin x)](\cos x + i\sin x) \end{aligned}$$

есть элемент группы G, который близок к элементу $\cos x + i\sin x$ и в записи которого отброшены малые второго порядка. Так как элемент $\cos x + i\sin x$ перестановочен с i, то из (4), отбрасывая малые второго порядка, получаем

$$\omega(h) = i + 2(x^3 \cdot j + x^4 \cdot k)(\cos x - i\sin x) \cdot i. \tag{5}$$

Из этого следует, что

$$\tilde{\omega}_x(\xi) = 2\xi \cdot (\cos x - i\sin x). \tag{6}$$

Таким образом, если записать кватернионы ξ в полярных координатах ρ, β, т. е. положить

$$\xi = j\rho(\cos\beta - i\sin\beta),$$

то видно, что $\tilde{\omega}_x$ есть вращение плоскости I на угол x с одновременным растяжением вдвое.

Нормаль N^2_x в точке $\cos x + i\sin x$ к окружности S^1 в E^3 описывается параметрическими уравнениями (2). Как и в предложении «А» положим $u_1(x) = \{1, 0\}$, $u_2(x) = \{0, 1\}$. Отображению φ соответствует отображение φ_x касательной P_x^3 к сфере G в точке x на линейное пространство E^3 (см. § 1, п. «Е»). Непосредственно видно, что

$$\varphi_x q_x(j) = u_2(x), \quad \varphi_x q_x(k) = u_1(x). \tag{7}$$

Согласно определению 4 для построения оснащения $V = \{v_1(x), v_2(x)\}$, соответствующего отображению ω, мы должны выбрать в R^2 векторы e_1 и e_2 и для линейного отображения $(\omega\varphi^{-1})_x$ пространства N_x^2 на R^2 найти такие векторы $v_1(x)$ и $v_2(x)$ в N_x^2, что $e_1 = (\omega\varphi^{-1})_x v_1(x)$, $e_2 = (\omega\varphi^{-1})_x v_2(x)$. Для выбора векторов e_1 и e_2 и вычисления векторов $v_1(x)$ и $v_2(x)$ заметим, что

$$(\omega\varphi^{-1})_x^{-1} = \varphi_x \omega_x^{-1} = \varphi_x q_x q_x^{-1} \omega_x^{-1} r r^{-1} = (\varphi_x q_x) \cdot \tilde{\omega}_x^{-1} \cdot r^{-1}. \tag{8}$$

Поэтому, взяв $e_1 = r\left(\frac{k}{2}\right)$, $e_2 = r\left(\frac{j}{2}\right)$, получим, согласно (6) — (8),

$$v_1(x) = (\varphi_x q_x)\, \tilde{\omega}_x^{-1}\left(\frac{k}{2}\right) = \varphi_x q_x (k(\cos x + i \sin x)) =$$
$$= \varphi_x q_x (k \cos x + j \sin x) = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x,$$

$$v_2(x) = (\varphi_x q_x)\, \tilde{\omega}_x^{-1}\left(\frac{j}{2}\right) = \varphi_x q_x (j(\cos x + i \sin x)) =$$
$$= \varphi_x q_x (-k \sin x + j \cos x) = -u_1(x) \sin x + u_2(x) \cos x.$$

Таким образом, в силу «А», мы получаем $\gamma(S^1, V) = 1$ и поэтому $\gamma(\omega) = 1$.

Итак, лемма 1 доказана.

Классификация отображений трехмерной сферы в двумерную

Лемма 2. Пусть $\pi^n(S^r)$ — совокупность всех гомотопических классов отображений сферы S^n в сферу S^r, $n \geqslant 3$, $r = 2{,}3$ и ω — отображение сферы Σ^3 на сферу S^2, построенное в лемме 1. Очевидно, что если f_0 и f_1 суть два гомотопных между собой отображения сферы S^n в сферу Σ^3, то отображения ωf_0 и ωf_1 сферы S^n в сферу S^2 также гомотопны между собой. Таким образом, при $\alpha \in \pi^n(\Sigma^3)$ совокупность $\omega\alpha$ принадлежит к одному классу $\hat{\omega}(\alpha) \in \pi^n(S^2)$. Оказывается, что $\hat{\omega}$ есть отображение множества $\pi^n(\Sigma^3)$ на все множество $\pi^n(S^2)$ и что в нулевой элемент множества $\pi^n(S^2)$ переходит при отображении $\hat{\omega}$ лишь нулевой элемент множества $\pi^n(\Sigma^3)$.

Из определения сложения в группе $\pi^n(S^r)$, которое в данной работе не приведено, непосредственно следует, что $\hat{\omega}$ есть гомоморфное отображение группы $\pi^n(\Sigma^3)$ в группу $\pi^n(S^2)$. Таким образом из леммы 2 вытекает, что $\hat{\omega}$ есть изоморфное отображение группы $\pi^n(\Sigma^3)$ на группу $\pi^n(S^2)$. Этот результат в дальнейшем, однако, использоваться не будет.

Доказательство. Покажем прежде всего, что в нулевой элемент множества $\pi^n(S^2)$ отображается лишь нулевой элемент множества $\pi^n(\Sigma^3)$. Пусть f — такое отображение сферы S^n в сферу Σ^3, что ωf есть гомотопное нулю отображение сферы S^n в сферу S^2. Тогда существует такое непрерывное семейство отображений g_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ сферы S^n в сферу S^2, что $g_0 = \omega f$, а g_1 есть отображение сферы S^n в одну точку c сферы S^2. В силу леммы 1 существует такое непрерывное семейство f_t отображений сферы S^n в сферу Σ^3, что $f_0 = f$, а $\omega f_t = g_t$ (см. лемму 1 § 12). Так как $g_1(S^n) = c$, то $f_1(S^n) \subset \omega^{-1}(c)$, а в силу леммы 1 множество $\omega^{-1}(c)$ гомеоморфно окружности. Таким образом, отображение f_1, а следовательно и f_0 гомотопно нулю в Σ^3 согласно теореме 18.

Покажем теперь, что для всякого элемента $\beta \in \pi^n(S^2)$ найдется такой элемент $\alpha \in \pi^n(\Sigma^3)$, что $\hat{\omega}(\alpha) = \beta$. Сферу S^n будем мыслить как сферу с радиусом единица и центром в начале координат эвклидова пространства E^{n+1} с некоторой фиксированной системой координат $x^1, \ldots, x^{n+1}$. Множество всех точек сферы S^n, удовлетворяющих условию $x^{n+1} \leqslant 0$, обозначим через E_-, множество всех точек сферы S^n, удовлетворяющих условию $x^{n+1} \geqslant 0$, обозначим через E_+, а множество всех точек сферы S^n, удовлетворяющих условию $x^{n+1} = 0$, обозначим через S^{n-1}. За северный полюс сферы S^n примем точку $p = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, а за южный — точку $q = (0, 0, \ldots, 0, -1)$. Очевидно, что существует гомотопное тождественному отображению сферы S^n на себя, при котором полусфера E_- переходит в точку q. Из этого следует, что в классе отображений β можно выбрать отображение g, переводящее полусферу E_- в одну точку $c \in S^2$. Пусть P_x^2 — полуплоскость пространства E^{n+1}, ограниченная прямой, проходящей через точки p, q, и проходящая через точку $x \in S^{n-1}$. Пересечение полуплоскости P_x^2 сферы S^n и гиперплоскости $x^{n+1} = 1 - t$ обозначим через (x, t). Таким образом, паре (x, t), $x \in S^{n-1}$, соответствует вполне определенная точка $(x, t) \in E_+$, и каждая точка $y \in E_+$ может быть записана в форме $y = (x, t)$, причем эта запись однозначна при $y \neq p$, а $p = (x, 0)$, где x — произвольная точка сферы S^{n-1}. Положим $g_t(x) = g(x, t)$. Так определяется семейство g_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ отображений сферы S^{n-1} в сферу S^2, причем $g_1(S^{n-1}) = c$, а $g_0(S^{n-1}) = g(p) = b$. Пусть a — произвольная точка окружности $\omega^{-1}(b)$ и f — отображение сферы S^{n-1} в сферу S^3, переводящее ее в одну точку a. В силу леммы 1 § 12 существует такая деформация f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ отображений сферы S^n в сферу S^3, что $f_0 = f$, а $\omega f_t = g_t$. Положим теперь $f(x, t) = f_t(x)$. Этим определяется отображение f полусферы E_+, при котором S^{n-1} переводится в окружность $\omega^{-1}(c)$. Так как отображение сферы S^{n-1} гомотопно нулю в окружности $\omega^{-1}(c)$ (см. теорему 18), то отображение f полусферы E_+ можно продолжить в отображение f всей сферы S^n, при котором $f(E_-) \subset \omega^{-1}(c)$. Так построенное отображение f удовлетворяет условию $\omega f = g$.

Итак, лемма 2 доказана.

Теорема 19. *Гомоморфное отображение* γ *группы* Π_2^1 *в группу целых чисел есть изоморфизм на* (см. § 10, п. «С»). Из этого следует, что два отображения f_0 и f_1 сферы Σ^3 в сферу S^2 тогда и только тогда гомотопны, когда $\gamma(f_0)=\gamma(f_1)$, и, сверх того, что для каждого целого числа c существует такое отображение f сферы Σ^3 в сферу S^2, что $\gamma(f)=c$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что ядро гомоморфизма γ содержит лишь нуль группы Π_2^1. Для этого достаточно показать, что отображение g сферы Σ^3 в S^2, удовлетворяющее условию $\gamma(g)=0$, гомотопно нулю. В силу леммы 2, существует такое отображение f сферы Σ^3 в себя, что отображение ωf гомотопно g, и, следовательно, $\gamma(\omega f)=0$. В силу предложения «D» § 10 степень σ отображения f сферы Σ^3 в себя определяется из уравнения $\gamma(\omega f)=1^2\cdot\sigma$, так что $\sigma=0$. Таким образом (см. теорему 12), отображение f сферы Σ^3 в себя, а следовательно, и отображения ωf и g гомотопны нулю.

Покажем, что для каждого целого числа σ существует такое отображение g сферы Σ^3 в сферу S^2, что $\gamma(g)=\sigma$, т. е. что γ есть гомоморфизм на. Действительно, пусть f — отображение сферы S^3 на себя со степенью σ. Тогда для отображения $g=\omega f$ имеем, согласно «D» § 10, $\gamma(\omega f)=\sigma\cdot 1=\sigma$.

Итак, теорема 19 доказана.

В) Сопоставляя предложение «А» и теорему 19, мы видим, что каждое одномерное оснащенное многообразие трехмерного эвклидова пространства гомологично оснащенному многообразию $(S^1, V_{(r)})$, построенному в «А», где r — надлежаще выбранное целое число.

§ 14. КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ $(n+1)$-МЕРНОЙ СФЕРЫ В n-МЕРНУЮ

В этом параграфе доказывается, что при $n\geqslant 3$ существует ровно два гомотопических класса отображений сферы Σ^{n+1} в сферу S^n. Доказательство опирается на построение гомологического инварианта $\delta(M^1, U)$ оснащенного многообразия эвклидова пространства E^{n+1}, $n\geqslant 2$, который представляет собой вычет по модулю два и может принимать оба значения 0 и 1. Таким образом, уже из существования инварианта δ следует существование по крайней мере двух классов отображений сферы Σ^{n+1} в сферу S^n при $n\geqslant 2$. Инвариант δ описывается следующим образом. Пусть $U(x)=\{u_1(x),\ldots,u_n(x)\}$ — ортонормальное оснащение многообразия M^1, а $u_{n+1}(x)$ — единичный вектор, касательный к M^1 в точке $x\in M^1$. Система $U'(x)=\{u_1(x),\ldots,u_{n+1}(x)\}$ получается из некоторого фиксированного ортонормального базиса пространства E^{n+1} вращением $h(x)$. Таким образом возникает непрерывное отображение h многообразия M^1 в многообразие H_{n+1} всех вращений пространства

E^{n+1}. В случае однокомпонентной кривой M^1 инвариант δ считается равным нулю, если отображение h *не* гомотопно нулю, и единице в противоположном случае. В случае многокомпонентной кривой инвариант δ определяется как сумма по модулю 2 значений инварианта δ на компонентах.

Для доказательства инвариантности вычета δ предварительно доказывается общая лемма 1, в которой оснащенное многообразие (M^{k+1}, U), осуществляющее гомологию, подвергается улучшению. Улучшенное многообразие (M^{k+1}, U) обладает тем свойством, что его сечение с плоскостью $E^{n+k} \times t$ представляет собой оснащенное многообразие (M_t^k, U_t) для всех значений параметра t за исключением лишь конечного числа критических значений. Так как при некритических значениях параметра t оснащенное многообразие (M_t^k, U_t) непрерывно зависит от параметра t, то инвариантность вычета δ приходится доказывать лишь при прохождении параметра t через критическое значение. При прохождении через критическое значение многообразие (M_t^k, U_t) претерпевает сравнительно обозримую перестройку, благодаря чему и проходит доказательство инвариантности вычета δ.

Для одномерного оснащенного подмногообразия трехмерного пространства определены инварианты γ и δ; оказывается, что δ есть вычет, получающийся от приведения по модулю 2 целого числа γ. Так как каждое одномерное оснащенное многообразие получается при помощи надстроек из одномерного оснащенного подмногообразия трехмерного пространства (см. теорему 11), то при классификации отображений сферы Σ^{n+1} в сферу S^n при $n \geqslant 3$ можно использовать классификацию отображений трехмерной сферы в двумерную. Именно на этом пути доказывается, что если $\gamma(M^1, U)$ четно, то $E(M^1, U) \sim 0$. Таким образом устанавливается, что существует не более двух классов отображений сферы Σ^{n+1} в сферу S^n при $n \geqslant 3$.

Улучшение оснащенного многообразия, осуществляющего гомологию

Лемма 1. Пусть (M_0^k, U_0) и (M_1^k, U_1) — два оснащенных подмногообразия эвклидова пространства E^{n+k}, гомологичных между собой, так что существует оснащенное подмногообразие (M^{k+1}, U) полосы $E^{n+k} \times I$, осуществляющее гомологию $(M_0^k, U_0) \sim (M_1^k, U_1)$. Точку (x_0, t_0) многообразия M^{k+1} будем называть *критической*, а значение t_0 параметра t — *критическим значением*, если касательная T_0^{k+1} к многообразию M^{k+1} в точке (x_0, t_0) лежит в гиперплоскости $E^{n+k} \times t_0$. Оказывается, что оснащенное многообразие (M^{k+1}, U), осуществляющее гомологию между заданными оснащенными многообразиями, всегда можно выбрать так, что a) существует лишь конечное число критических точек многообразия M^{k+1}, и критические значения параметра t в различных критических точках различны; b) для любой критической точки

(x_0, t_0) многообразия M^{k+1} можно выбрать такой ортонормальный базис $e_1, \ldots, e_{n+k}$, что в соответствующих этому базису координатах $x^1, \ldots, x^{n+k}$ с началом в x_0 многообразие M^{k+1} вблизи точки x_0 задается уравнениями

$$t = t_0 + \sum_{i=1}^{k+1} \sigma^i \cdot (x^i)^2, \ \sigma^i = \pm 1; \ x^{k+2} = \ldots = x^{n+k} = 0, \tag{1}$$

а оснащение $U = \{u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t)\}$ вблизи точки (x_0, t_0) задается формулами

$$u_1(x, t) = \sigma \left(e - \sum_{i=1}^{k} 2\sigma^i x^i e_i\right), \sigma = \pm 1; u_2(x, t) = e_{k+2}, \ldots, u_n(x, t) = e_{n+k}, \tag{2}$$

где e — единичный вектор полосы $E^{n+k} \times I$, направленный по оси t.

Доказательство. Пусть (N_0^{k+1}, V_0) — некоторое оснащенное многообразие, осуществляющее гомологию $(M_0^k, U_0) \sim (M_1^k, U_1)$. Каждой точке $y = (x, t)$ многообразия N_0^{k+1} поставим в соответствие число $f(y) = f(x, t) = t$. В силу теоремы 5 существует такая действительная числовая функция $g(y)$, заданная на многообразии N_0^{k+1}, совпадающая с $f(y)$ вблизи границы многообразия N_0^{k+1}, и находящаяся в ε — близости первого порядка к функции f, что все ее критические точки невырождены, а критические значения в различных критических точках различны. Поставим теперь в соответствие каждой точке $y = (x, t)$ многообразия N_0^{k+1} точку $\varphi_s(y) = (x, t + s(g(y) - f(y)))$, где s — фиксированное число, $0 \leqslant s \leqslant 1$. При достаточно малом ε отображение φ_s регулярно и гомеоморфно (см. теорему 3). Таким образом, φ_s есть деформация гладкого подмногообразия N_0^{k+1} в подмногообразие $N_1^{k+1} = \varphi_1(N_0^{k+1})$.

Очевидно, что критические точки функции $g(y)$ совпадают с критическими точками многообразия N_1^{k+1}. Таким образом, условие «а» уже осуществлено для многообразия $M^{k+1} = N_1^{k+1}$.

Подвергнем теперь многообразие N_1^{k+1} дальнейшему исправлению, чтобы для него было выполнено и условие «b».

Пусть $y_0 = (x_0, t_0)$ — произвольная критическая точка многообразия N_1^{k+1} и T_0^{k+1} — касательная к многообразию N_1^{k+1} в точке y_0. Плоскость T_0^{k+1} лежит в плоскости $E^{n+k} \times t_0$, так что $T_0^{k+1} = T^{k+1} \times t_0$; $T^{k+1} \subset E^{n+k}$. В пространстве E^{n+k} выберем базис $e_1, \ldots, e_{n+k}$ так, чтобы векторы $e_1, \ldots, e_{k+1}$ лежали в T^{k+1}. В окрестности точки (x_0, t_0) многообразие N_1^{k+1} описывается в соответствующих координатах уравнениями

$$t = t_0 + \varphi(x^1, \ldots, x^{k+1}) + \psi(x^1, \ldots, x^{k+1}), \tag{3}$$

$$x^{k+j} = \psi^j(x^1, \ldots, x^{k+1}), \ j = 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где φ — невырожденная квадратичная форма относительно переменных $x^1, \ldots, x^{k+1}$; ψ — функция третьего порядка малости относительно

$\xi = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^{k+1})^2}$, а ψ^j — функции второго порядка малости относительно ξ. Выбирая оси в плоскости T^{k+1} надлежащим образом, мы можем привести форму φ к виду

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda^i \cdot (x^i)^2, \tag{5}$$

где λ^i — отличные от нуля действительные числа. Приступим к исправлению многообразия N_1^{k+1} в окрестности точки (x_0, t_0). Пусть $\chi(\eta)$ — гладкая действительная числовая монотонная функция переменного $\eta \geqslant 0$, удовлетворяющая условиям

$$\chi(\eta) = 0 \text{ при } 0 \leqslant \eta \leqslant \frac{1}{2}; \ \chi(\eta) = 1 \text{ при } \eta \geqslant 1.$$

Положим

$$\chi(\xi, s) = s \cdot \chi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) + (1 - s),$$

где α — достаточно малое положительное число. Определим многообразие N_{1+s}^{k+1} уравнениями

$$t = t_0 + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda^i \cdot (x^i)^2 + \chi(\xi, s) \cdot \psi(x^1, \ldots, x^{k+1}),$$

$$x^{k+j} = \chi(\xi, s) \cdot \psi^j(x^1, \ldots, x^{k+1}), \quad j = 2, \ldots, n,$$

при $\xi \leqslant \alpha$, $|t - t_0| \leqslant \alpha$, и будем считать, что $N_{1+s}^{k+1} = N_1^{k+1}$ в остальных точках. Очевидно, что подмногообразие N_{1+s}^{k+1} осуществляет гладкую деформацию подмногообразия N_1^{k+1} в подмногообразие N_2^{k+1}, причем последнее при $\xi \leqslant \alpha$, $|t - t_0| \leqslant \alpha$ определяется уравнениями

$$t = t_0 + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda^i \cdot (x^i)^2 + \chi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \cdot \psi(x^1, \ldots, x^{k+1}) \tag{6}$$

$$x^{k+j} = \chi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \cdot \psi^j(x^1, \ldots, x^{k+1}), \ j = 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Очевидно, что в достаточно малой окрестности точки (x_0, t_0), а именно, при $\xi < \frac{\alpha}{2}$ многообразие N_2^{k+1} задается уравнениями

$$t = t_0 + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda^i \cdot (x^i)^2; \quad x^{k+j} = 0, \ j = 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Покажем, что многообразие N_2^{k+1} не имеет критических точек, отличных от критических точек многообразия N_1^{k+1}. Для этого достаточно изучить лишь точки многообразия N_2^{k+1}, определяемые уравнениями (6), (7) и удовлетворяющие условию $\xi \leqslant \alpha$, и показать, что среди них лишь точка $\xi = 0$ является критической.

Мы имеем

$$\frac{dt}{dx^i} = 2\lambda^i (x^i + \vartheta^i),$$

где

$$2\lambda^i \vartheta^i = \frac{\chi'\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}{\alpha} \cdot \frac{x^i}{\xi} \cdot \psi(x^1, \ldots, x^{k+1}) + \chi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \cdot \frac{\partial \psi(x^1, \ldots, x^{k+1})}{\partial x^i}.$$

Таким образом,

$$|\vartheta^i| \leqslant \frac{c_1}{\alpha} \xi^3 + c_2 \xi^2.$$

Очевидно, что при достаточно малом α мы имеем

$$|\vartheta^i| \leqslant \frac{1}{k+1} \cdot \xi, \quad \xi \leqslant \alpha.$$

Если теперь при $\xi \leqslant \alpha$ имеем $\frac{dt}{dx^i} = 0$, $i = 1, \ldots, k+1$, то

$$x^i = -\vartheta^i. \tag{9}$$

Отсюда путем возведения в квадрат каждого из равенств (9) и суммирования получаем $\xi^2 = \sum \vartheta_i^2 < \frac{k+1}{(k+1)^2} \cdot \xi^2$, так что $\xi^2 \leqslant \frac{1}{k+1} \cdot \xi^2$, а это возможно лишь при $\xi = 0$.

Подвергнем теперь многообразие N_2^{k+1} дальнейшему исправлению так, чтобы уравнения его в окрестности критической точки (x_0, t_0) получили вид (1). Числа λ^i запишем в виде $\lambda^i = \frac{\sigma^i}{a_i^2}$, где a_i есть положительное число, а $\sigma^i = \pm 1$. Пусть α' — настолько малое положительное число, что при $|x^i| \leqslant \alpha'$, $|t - t_0| \leqslant \alpha'$ многообразие N_2^{k+1} определяется уравнениями (8). Определим теперь гладкую функцию $\varkappa_a(\eta)$ переменного η, $|\eta| \leqslant \alpha'$, зависящую от положительного числа a и удовлетворяющую условиям

$$\varkappa_a'(\eta) > 0; \quad \varkappa_a(\eta) = a\eta \text{ при } |\eta| \leqslant \beta; \quad \varkappa_a(\eta) = \eta \text{ при } |\eta| > \frac{\alpha'}{2}.$$

Здесь β — настолько малое положительное число, что функция $\varkappa_a(\eta)$, удовлетворяющая указанным условиям, существует. Определим многообразие N_{2+s}^{k+1} при $|x^i| \leqslant \alpha$ уравнениями

$$t = t^0 + \sum \lambda^i \cdot [(1-s) \cdot x^i + s \cdot \varkappa_{a_i}(x^i)]^2; \quad x^{k+j} = 0, \; j = 2, \ldots, n, \tag{10}$$

а в остальных точках будем считать его совпадающим с многообразием N_2^{k+1}. Непосредственно проверяется, что многообразие N_{2+s}^{k+1} осуществляет гладкую деформацию многообразия N_2^{k+1} в многообразие N_3^{k+1} и что критические точки многообразий N_2^{k+1} и N_3^{k+1} совпадают. При этом уравнения многообразия N_3^{k+1} вблизи точки (x_0, t_0) имеют вид (1).

Производя указанную перестройку вблизи каждой критической точки многообразия N_1^{k+1}, мы построим многообразие M^{k+1}, а так как оно получается из многообразия N_0^{k+1} в результате ряда последовательных гладких деформаций, то существует такое оснащение V многообразия M^{k+1}, что оснащенное многообразие (M^{k+1}, V) осуществляет гомологию $(M_0^k, U_0) \sim (M_1^k, U_1)$. Выбирая надлежащим образом число $\sigma = \pm 1$ в формуле (2), мы можем добиться того, что оснащения U и V определяют одну и ту же ориентацию многообразия M^{k+1} и потому вблизи критической точки (x_0, t_0) можно так продеформировать оснащение V, чтобы оно перешло в оснащение U (см. § 11, п. «D»). Производя такое исправление оснащения вблизи каждой критической точки многообразия M^{k+1}, мы получим нужное нам оснащение U.

Итак, лемма 1 полностью доказана.

Инвариант δ отображений сферы Σ^{n+1} в S^n

Теорема 20. *Пусть (M^1, U) — одномерное ортонормально оснащенное подмногообразие ориентированного эвклидова пространства E^{n+1}, $n \geqslant 2$, $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$. В каждой точке $x \in M^1$ проведем единичный касательный вектор $u_{n+1}(x)$ к кривой M^1, направленный так, чтобы последовательность $u_1(x), \ldots, u_n(x), u_{n+1}(x)$ задавала положительную ориентацию пространства E^{n+1}. Пусть, далее, $e_1, \ldots, e_{n+1}$ — некоторый ортонормальный базис пространства E^{n+1}, задающий его положительную ориентацию. Тогда*

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{n+1} h_{ij}(x) \cdot e_j, \quad i = 1, \ldots, n+1, \tag{11}$$

где $h(x) = \| h_{ij}(x) \|$ есть ортогональная матрица с положительным определителем, непрерывно зависящая от $x \in M^1$. Таким образом, h есть непрерывное отображение кривой M^1 в многообразие H_{n+1} всех вращений эвклидова пространства E^{n+1}. Положим

$$\delta(M^1, U) \equiv \beta(h) + r(M^1) \pmod 2,$$

где $r(M^1)$ — число компонент многообразия M^1, а вычет $\beta(h)$ определен в предложении «D» § 12. Оказывается, что вычет $\delta(M^1, U)$ есть инвариант гомологического класса оснащенного многообразия (M^1, U), так что если отображению f сферы Σ^{n+1} в сферу S^n соответствует оснащенное многообразие (M^1, U), то, полагая

$$\delta(f) = \delta(M^1, U),$$

мы получаем инвариант $\delta(f)$ гомотопического класса отображения f. От ориентации пространства E^{n+1} и от случайности выбора базиса $e_1, \ldots, e_{n+1}$ вычет $\delta(M^1, U)$ также не зависит.

Доказательство. Докажем прежде всего инвариантность вычета $\delta(M^1, U)$ при изменении базиса $e_1, \ldots, e_{n+1}$. Пусть $e'_1, \ldots, e'_{n+1}$ — некоторый отличный от первоначального ортонормальный базис пространства E^{n+1}, также задающий его положительную ориентацию; тогда

$$e_j = \sum_{k=1}^{n+1} a_{jk} e'_k, \; j = 1, \ldots, n+1,$$

где $a = \|a_{jk}\|$ есть ортогональная матрица с положительным определителем. При базисе $e'_1, \ldots, e'_{n+1}$ оснащенному многообразию (M^1, U) соответствует уже не матрица $h(x)$, а матрица $h'(x) = h(x) \cdot a$. Так как многообразие H_{n+1} связно, то существует такая матрица $a_t \in H_{n+1}$, непрерывно зависящая от параметра t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что $a_1 = a$, а a_0 есть единичная матрица. Отображение $h_t = ha_t$ осуществляет непрерывную деформацию отображения h в отображение h', так что отображения эти гомотопны между собой, и потому вычет $\delta(M^1, U)$ не зависит от выбора базиса $e_1, \ldots, e_{n+1}$.

Докажем теперь независимость вычета $\delta(M^1, U)$ от ориентации пространства E^{n+1}. При изменении ориентации пространства E^{n+1} вектор $u_{n+1}(x)$ заменяется вектором $-u_{n+1}(x)$, а в базисе $e_1, \ldots, e_{n+1}$ можно для изменения ориентации заменить вектор e_{n+1} вектором $-e_{n+1}$. При этих заменах вместо матрицы $h(x)$ возникает матрица $h'(x)$, получающаяся из матрицы $h(x)$ умножением на -1 последнего столбца и последней строки. Поставим в соответствие каждой матрице $l \in H_{n+1}$ матрицу l', получаемую из l умножением на -1 ее последнего столбца и последней строки. Если принять за плоскость E^2 плоскость с базисом e_1, e_2, то видно, что при отображении $l \to l'$ не гомотопная нулю в H_{n+1} кривая H_2, указанная в теореме 17, отображается на себя тождественно. Таким образом, при изменении ориентации пространства E^{n+1} вычет $\delta(M^1, U)$ не меняется.

Докажем, наконец, главное свойство вычета $\delta(M^1, U)$ — инвариантность относительно выбора оснащенного многообразия (M^1, U) из класса гомологий.

Пусть (M^1_0, U_0) и (M^1_1, U_1) — два оснащенных подмногообразия пространства E^{n+1} и (M^2, U) — оснащенное подмногообразие полосы $E^{n+1} \times I$, осуществляющее гомологию $(M^1_0, U) \sim (M^1_1, U_1)$ и выбранное так, что выполнены условия «a» и «b» леммы 1. Пересечение $M^2 \cap (E^{n+t} \times t)$ лежит в $E^{n+1} \times t$ и потому имеет вид $M^1_t \times t$, где $M^1_t \subset E^{n+1}$. Легко видеть, что если (x, t) не есть критическая точка поверхности M^2 (см. лемму 1), то множество M^1_t вблизи точки x есть гладкая кривая, так что, когда t не есть критическое значение параметра, M^1_t есть гладкое подмногообразие пространства E^{n+1}. Построим оснащение V_t многообразия M^1_t. Пусть (x, t) — некритическая точка многообразия M^2; $V(x, t) \times t$ — ортогональная проекция системы векторов $U(x, t)$ на гиперплоскость $E^{n+1} \times t$ и $V_t(x)$ — система, получаемая из системы $V(x, t)$ при помощи процесса ортогонализации (см. § 7, п. «G»). Так как все векторы системы $U(x, t)$ ортогональны к M^2 в точке (x, t), то все векторы системы $V(x, t)$ ортогональны к M_t^1 в точке x. Из того, что точка (x, t) не есть критическая, следует, что векторы системы $V(x, t)$ линейно независимы. Таким образом, система $V_t(x)$ составляет оснащение многообразия M_t^1 при некритическом значении параметра t. Оснащенному многообразию (M_t^1, V_t) соответствует отображение h_t кривой M_t^1 в H_{n+1}. Из общих соображений непрерывности следует, что когда параметр t меняется непрерывно, не проходя через критическое значение, вычет $\delta(M_t^1, V_t)$ остается неизменным. Докажем, что он не меняется и при прохождении через критическое значение t_0 параметра t. Из этого в силу соотношений $V_0 = U_0$, $V_1 = U_1$ и будет следовать инвариантность вычета $\delta(M^1, U)$.

Пусть (x_0, t_0) — та единственная критическая точка многообразия M^2, в которой параметр t имеет критическое значение $t = t_0$. Вблизи точки (x_0, t_0) многообразие M^2 определяется уравнениями

$$t = t_0 + \sigma^1 \cdot (x^1)^2 + \sigma^2 \cdot (x^2)^2, \ \sigma_1 = \pm 1, \ \sigma_2 = \pm 1,$$
$$x^3 = \ldots = x^{n+1} = 0$$

[см. (1)]. Из этого следует, что при t, близком к t_0, уравнение многообразия M_t^1 вблизи точки x_0 имеет вид

$$\sigma^1 \cdot (x^1)^2 + \sigma^2 \cdot (x^2)^2 = t - t_0; \ x^3 = \ldots = x^{n+1} = 0. \tag{12}$$

Далее из (2) следует, что система $V_t(x)$ при достаточно малом $|t - t_0|$ и при x, близком к x_0, определяется формулами

$$(v_t)_1(x) = \sigma\left(\sigma^1 \cdot \frac{x^1}{\xi} \cdot e_1 + \sigma^2 \cdot \frac{x^2}{\xi} \cdot e_2\right); \ (v_t)_j(x) = e_{j+1}, \ j = 2, \ldots, n, \tag{13}$$

где $\xi = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$. При изучении вычета $\delta(M_t^1, V_t)$ за плоскость E^2 (см. теорему 17) примем плоскость с базисом e_1, e_2. Рассмотрим теперь два различных случая: 1) $\sigma^1 = \sigma^2$ и 2) $\sigma^1 = -\sigma^2$.

В случае 1 будем для определенности считать, что $\sigma^1 = \sigma^2 = -1$. В этом предположении многообразие M_t^1 при $t < t_0$ содержит компоненту, определяемую уравнением (12) и представляющую собой обыкновенную метрическую окружность малого радиуса. Эту компоненту мы обозначим через S^1. Непосредственно видно, что отображение h_t отображает окружность S^1 на окружность H_2 со степенью единица. При $t > t_0$ компонента, определяемая уравнением (12), становится мнимой, т. е. исчезает, в то время как все остальные компоненты кривой M_t^1 вместе с их оснащениями изменяются непрерывно. Таким образом в первом случае при прохождении параметра t через значение t_0 вычет $\beta(h_t)$ меняется на единицу, так же как и число компонент многообразия M_t^1, так что вычет $\delta(M_t^1, V_t)$ не меняется.

В случае 2 множество $M_{t_0}^1$ вблизи точки x_0 описывается уравнением $(x^1)^2-(x^2)^2=0$, т. е. представляет собой крест K_{t_0} — совокупность двух отрезков, пересекающихся в одной точке. Из этого видно, что компонента L_{t_0} множества $M_{t_0}^1$, содержащая крест K_{t_0}, гомеоморфна лемнискате. Так как поверхность M^2 ориентируема, то окрестность лемнискаты L_{t_0} на M^2 гомеоморфна двусвязной плоской области, и из этого видно, что часть L_t множества M_t^1, расположенная вблизи лемнискаты L_{t_0}, состоит из двух компонент S_1^1 и S_2^1 для t, лежащих по одну сторону от t_0, и из одной компоненты $\hat{S}^1$ при t, лежащем по другую сторону от t_0. Для определенности будем считать, что L_t состоит из двух компонент при $t<t_0$ и из одной компоненты при $t>t_0$. Если обозначить соответствующие компонентам $\hat{S}_1^1$, $\hat{S}_2^1$ и $\hat{S}^1$ вычеты $\beta(h_t)$ через β_1, β_2 и $\hat{\beta}$, то для доказательства инвариантности вычета $\delta(M^1, U)$ нам достаточно доказать, что $\beta_1+\beta_2\equiv\hat{\beta}+1 \pmod 2$. Докажем это. Часть кривой L_t, лежащую вблизи креста K_{t_0}, обозначим через K_t. Часть эта описывается уравнением $(x^1)^2-(x^2)^2=\sigma_1(t-t_0)$, т. е. представляет собой гиперболу. Из формул (13) видно, что $h_t(K_t)\subset H_2$, при этом видно, что при $t<t_0$ множество $h_t(K_t)$ покрывает две четверти окружности H_2, а при $t>t_0$ — две другие четверти окружности H_2. В силу теоремы 17, отображение h_t кривой L_t можно заменить гомотопным ему отображением h_t', так что при этом $h_t'(L_t)\subset H_2$, а отображения h_t' и h_t совпадают на K_t. Из сказанного легко вытекает, что сумма степеней отображения h_t' кривых S_1^1 и S_2^1 при $t<t_0$ отличается от степени отображения h_t' кривой $\hat{S}$ при $t>t_0$ на единицу. Таким образом, $\beta_1+\beta_2\equiv\hat{\beta}+1 \pmod 2$, и инвариантность вычета $\delta(M^1, U)$ полностью доказана.

Итак, теорема 20 доказана.

Отметим некоторые легко проверяемые свойства инварианта $\delta(M^1, U)$.

А) Пусть Π_n^1 — группа классов гомологий оснащенных одномерных подмногообразий эвклидова пространства E^{n+1}. Так как $\delta(M^1, U)$ есть инвариант класса гомологий, то можно положить $\delta(\pi)=\delta(M^1, U)$, где (M^1, U) есть оснащенное многообразие класса $\pi\in\Pi_n^1$. Непосредственно проверяется, что δ есть гомоморфизм группы Π_n^1 в группу вычетов по модулю два. Далее, очевидно, что если $E\pi$ есть надстройка над классом π, т. е. $E(M^1, U)\in E\pi$ (см. § 8), то $\delta(E\pi)=\delta(\pi)$.

Классификация отображений сферы Σ^{n+1} в сферу S^n

Теорема 21. *При $n\geqslant 3$ гомоморфизм δ группы Π_n^1 в группу вычетов по модулю два есть изоморфизм на, так что группа Π_n^1 есть циклическая второго порядка. Таким образом, существует ровно два гомотопических класса отображений сферы Σ^{n+1} в сферу S^n $(n\geqslant 3)$. Далее, гомоморфизм δ группы Π_2^1 в группу вычетов по* *модулю 2 есть гомоморфизм на, а так как группа* Π_2^1 *изоморфно отображается на группу целых чисел при помощи изоморфизма* γ (см. теорему 19), *то гомоморфизм* $\delta\gamma^{-1}$ *группы целых чисел на группу вычетов по модулю два есть редуцирование по модулю два.*

Доказательство. Пусть (S^1, U) — некоторое ортонормально оснащенное подмногообразие эвклидова пространства E^{n+1}, гомеоморфное окружности, $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$. Для вычисления инварианта $\delta(S^1, U)$ обозначим через $u_{n+1}(x)$ надлежаще направленный единичный касательный вектор к окружности S^1 в точке x, и пусть $e_1, \ldots, e_{n+1}$ — базис пространства E^{n+1}. Мы имеем

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{n+1} h_{ij}(x) e_j, \quad i = 1, \ldots, n+1, \tag{14}$$

так что $h(x) = \| h_{ij}(x) \|$ есть ортогональная матрица с положительным определителем, и h есть непрерывное отображение окружности S^1 в H_{n+1}. В силу определения инварианта $\delta(M^1, U)$ (см. теорему 20), имеем

$$\delta(S^1, U) \equiv \beta(h) + 1 \pmod 2. \tag{15}$$

Пусть, далее, $g(x) = \| g_{ij}(x) \|$ — ортогональная матрица порядка n с положительным детерминантом, так что g есть непрерывное отображение окружности S^1 в H_n. Положим

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x) \cdot u_j(x); \quad i = 1, \ldots, n,$$

и обозначим через $g[U]$ оснащение $V(x) = \{v_1(x), \ldots, v_{n+1}(x)\}$. Для вычисления инварианта $\delta(S^1, g[U])$ положим $v_{n+1}(x) = u_{n+1}(x)$ и обозначим через $g'(x)$ матрицу порядка $n+1$, получаемую из матрицы $g(x)$ дополнением ее элементами $g_{i,\,n+1}(x)$ и $g_{n+1,\,i}(x)$, причем только один из этих элементов $g_{n+1,n+1}(x)$ отличен от нуля и равен единице. Очевидно, что при $n \geqslant 2$ мы имеем

$$\beta(g') = \beta(g) \tag{16}$$

(см. § 12, п. «D»). Далее, мы имеем

$$v_i(x) = \sum_{j,k=1}^{n+1} g'_{ij}(x) \cdot h_{jk}(x) \cdot e_k; \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Таким образом, в силу предложения «D» § 12, имеем

$$\delta(S^1, g[U]) = \beta(g'h) + 1 = \beta(g') + \beta(h) + 1 = \delta(S^1, U) + \beta(g). \tag{17}$$

Из теоремы 11 и предложения «В» § 13 следует непосредственно, что для каждого оснащенного многообразия (M^1, W) эвклидова пространства E^{n+1} имеет место гомология

$$(M^1, W) \sim E^{n-2}(S^1, V_{(r)}), \tag{18}$$

где $(S^1, V_{(r)})$ — оснащенное подмногообразие трехмерного эвклидова пространства E^3, построенное в предложении «А» § 13, а E^{n-2} — операция надстройки, проведенная $n-2$ раза.

Мы имеем

$$V_{(r)} = g_{(r)}[V_{(0)}], \tag{19}$$

где

$$g_r(x) = \begin{Vmatrix} \cos rx & \sin rx \\ -\sin rx & \cos rx \end{Vmatrix}$$

(см. § 13, п. «А»). Таким образом,

$$\beta(g_{(r)}) \equiv r \pmod 2. \tag{20}$$

Непосредственно проверяется, что $\delta(S^1, V_{(0)}) = 0$. Отсюда в силу (17), (19) и (20) следует

$$\delta(S^1, V_{(r)}) \equiv r \pmod 2. \tag{21}$$

Так как $\gamma(S^1, V_{(r)}) = r$ (см. § 13, п. «А»), то из (21) вытекает, что гомоморфизм $\delta\gamma^{-1}$ группы целых чисел в группу вычетов по модулю два есть редукция целых чисел по модулю два. Этим вторая часть теоремы 21 доказана.

Далее, мы имеем

$$EV_{(r)} = g'_{(r)}[EV_{(0)}],$$

где

$$g'_{(r)}(x) = \begin{Vmatrix} \cos rx & \sin rx & 0 \\ -\sin rx & \cos rx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

так что $\beta(g'_{(r)}) \equiv r \pmod 2$. Так как $\gamma(S^1, V_{(0)}) = 0$, то $(S^1, V_{(0)}) \sim 0$ (см. теорему 19), и потому $E(S^1, V_{(0)}) \sim 0$. Следовательно, $E(S^1, V_{(r)}) \sim 0$, если отображение $g'_{(r)}$ окружности S^1 в H_3 гомотопно нулю (см. § 7, п. «Н»), что имеет место при четном r. Итак, $E(S_1, V_{(r)}) \sim 0$, если $\delta(E(S^1, V_{(r)})) = 0$. Отсюда и из соотношения (18) следует, что при $n \geqslant 3$ из $\delta(M^1, W) = 0$ следует, что $(M^1, W) \sim 0$. Так как $\delta(E^{n-2}(S^1, V_{(1)})) = 1$, то оснащенное многообразие $E^{n-2}(S^1, V_{(1)})$ не гомологично нулю. Таким образом, установлено, что гомоморфизм δ группы Π_n^1 в группу вычетов по модулю 2 есть изоморфизм на.

Итак, теорема 21 полностью доказана.

§ 15. КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ($n+2$)-МЕРНОЙ СФЕРЫ В n-МЕРНУЮ

В этом параграфе доказывается, что при $n \geqslant 2$ существует ровно два гомотопических класса отображений сферы Σ^{n+2} в сферу S^n. Доказательство опирается на построение гомологического инварианта $\delta(M^2, U)$ оснащенного многообразия (M^2, U) эвклидова пространства E^{n+2}, который представляет собой вычет по модулю 2 и может принимать оба значения 0 и 1. Таким образом, уже из существования инварианта δ следует существование по крайней мере двух классов отображений сферы Σ^{n+2} в сферу S^n. Инвариант δ описывается следующим образом. Пусть $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ — ортонормальное оснащение многообразия M^2, а C — гладкая простая замкнутая кривая на M^2. Единичную нормаль к кривой C, касающуюся поверхности M^2 в точке $x \in C$, обозначим через $u_{n+1}(x)$ и положим $V(x) = \{u_1(x), \ldots, u_{n+1}(x)\}$. Для одномерного оснащенного многообразия (C, V) определен инвариант $\delta(C, V)$ (см. § 14), который в данном случае мы обозначим через $\delta(C)$. Будем считать сперва, что M^2 есть связная поверхность и род ее обозначим через p. Существует на M^2 такая система $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots$ $\ldots, B_p$ гладких простых замкнутых кривых, что кривые A_i и B_i, $i = 1, \ldots, p$ пересекаются, не касаясь, в одной единственной точке, а две любые другие кривые вовсе не пересекаются. Оказывается, что вычет

$$\delta(M^2, U) = \sum_{i=1}^{p} \delta(A_i) \cdot \delta(B_i)$$

не зависит от всех случайностей построения и является гомологическим инвариантом оснащенного многообразия (M^2, U). В случае многокомпонентной поверхности инвариант δ для нее определяется как сумма значений его на компонентах.

Из теорем 11 и 16 следует, что число классов отображений сферы Σ^{n+2} в сферу S^n не превосходит числа классов отображений сферы Σ^4 в сферу S^2. Число же классов отображений сферы Σ^4 в сферу S^2, в силу леммы 2 § 13, не больше числа классов отображений сферы Σ^4 в сферу S^3, а последнее, в силу теоремы 21, равно двум. Таким образом устанавливается, что число классов отображений сферы Σ^{n+2} в сферу S^n больше двух.

A) Пусть M^2 — ориентируемая поверхность, т. е. гладкое замкнутое ориентируемое многообразие размерности два, и M^1 — кривая, т. е. гладкое замкнутое одномерное многообразие. Пусть, далее, f — гладкое регулярное отображение кривой M^1 в поверхность M^2, при котором никакие три различные точки кривой M^1 не переходят в одну точку поверхности M^2. Относительно отображения f мы будем предполагать еще, что если две различные точки a и b кривой M^1 переходят при отображении f в одну точку $c = f(a) = f(b)$ поверхности M^2, то окрестности точек a и b на кривой M^1 переходят при отображении f в кривые, имеющие в точке c различные касательные. При этих условиях множество $C = f(M^1)$ называется *гладкой кривой* на поверхности M^2. Если многообразие M^1 ориентировано, то кривая $C = f(M^1)$ также считается *ориентированной*. Точки вида $c=f(a)=f(b)$, где $a\neq b$ называются *двойными* точками кривой C. Легко видеть, что кривая на поверхности имеет лишь конечное число двойных точек. Если $C=f_1(M_1^1)=f_2(M_2^1)$, т. е. если кривая C получается в результате двух различных отображений f_1 и f_2 двух различных кривых M_1^1 и M_2^1, причем для f_1 и f_2 выполнены высказанные ранее условия, то существует гладкий гомеоморфизм φ кривой M_1^1 на кривую M_2^1, удовлетворяющий условию $f_2\varphi=f_1$. Ввиду этого, можно компоненту кривой C определить как образ компоненты кривой M^1. Случай пустой кривой мы также не будем исключать. Легко видеть, что если $C=f(M^1)$ есть кривая на поверхности, то при условии, что отображение f' достаточно близко к отображению f в смысле близости класса 1, множество $C'=f'(M^1)$ также есть кривая на поверхности. Мы будем говорить, что кривая C' получается из кривой C *малым сдвигом*.

В) Кривая C на поверхности M^2 считается *гомологичной нулю* (точнее, гомологичной нулю по модулю два), если существует на M^2 такое открытое множество G, что $C=\overline{G}\setminus G$ и в любой окрестности каждой точки $x\in C$ имеются точки поверхности M^2, не принадлежащие $\overline{G}$; в знаках $C=\Delta G$; $C\sim 0$. Очевидно, что при малом сдвиге кривая, гомологичная нулю, переходит в кривую, гомологичную нулю. Пусть C_1 и C_2 — две такие кривые на M^2, что двойные точки каждой из них не принадлежат другой, а в каждой точке пересечения обеих кривых касательные к ним различны. В этом случае $C_1\cup C_2$ есть также кривая, и мы будем говорить, что кривые C_1 и C_2 *допускают сложение*, а сумму $C_1\cup C_2$ их будем обозначать через C_1+C_2. Легко видеть, что если на M^2 заданы две любые кривые, то, подвергая одну из них надлежаще выбранному малому сдвигу, мы получим две кривые, допускающие сложение. Если две кривые C_1 и C_2 на поверхности M^2 допускают сложение и каждая из них гомологична нулю, то сумма их также гомологична нулю. Действительно, пусть $C_1=\Delta G_1$, $C_2=\Delta G_2$.

Положим: $G=(G_1\cup G_2)\setminus(\overline{G}_1\cap\overline{G}_2)$. Легко видеть, что $C_1+C_2=\Delta G$. Соотношение $C_1+C_2\sim 0$ иначе будем записывать в форме $C_1\sim C_2$. В силу этого соотношение $C_1\sim C_2$ имеет слысл лишь в том случае, когда кривые C_1 и C_2 допускают сложение. Если кривые C_1 и C_2 не допускают сложения, то, подвергая одну из них, например C_1, малому сдвигу, мы получим кривые C_1' и C_2, уже допускающие сложение. Если при этом $C_1'\sim C_2$, то считают, что $C_1\sim C_2$. Это определение законно, так как оно инвариантно относительно перехода от кривой C_1 к кривой C_1'. Соотношение $C_1\sim C_2$ оказывается рефлексивным, симметричным и транзитивным, так что все кривые на поверхности M^2 распадаются на классы попарно гомологичных. Совокупность этих классов обозначается через $\Delta^1(M^2)=\Delta^1$. В множестве Δ^1 вводится операция сложения. Если z_1 z_2 — два элемента из Δ^1, а $C_1 \in z_1$ и $C_2 \in z_2$, причем кривые C_1 и C_2 допускают сложение, то класс z, содержащий кривую $C_1 + C_2$, по определению считается суммой классов z_1 и z_2, $z = z_1 + z_2$. Так определенное правило сложения не зависит от случайности выбора кривых C_1 и C_2 из классов z_1 и z_2. Группа Δ^1 называется *группой связности* поверхности M^2. Все элементы ее имеют второй порядок. Конечная система кривых $C_1, \ldots, C_q$ на поверхности M^2 называется ее *базой гомологий*, если для каждой кривой C на поверхности M^2 имеет место соотношение

$$C \sim \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i C_i,$$

где $\varepsilon_i \equiv 0$ или $1 \pmod 2$, и если из соотношения

$$C \sim 0$$

следует, что вычеты ε_i равны нулю.

C) Пусть C_1 и C_2 — две кривые на поверхности M^2, допускающие сложение. Редуцированное по модулю два число точек пересечения этих кривых обозначается через $J(C_1, C_2)$ и называется *индексом пересечения*. Легко видеть, что

$$J(C_1 + C_2, C_3) = J(C_1, C_3) + J(C_2, C_3)$$

и что из $C_1 \sim 0$ следует $J(C_1, C_2) = 0$. Из этого вытекает, что если $C_1 \sim D_1$, $C_2 \sim D_2$, то $J(C_1, C_2) = J(D_1, D_2)$. Таким образом, полагая $J(z_1, z_2) = J(C_1, C_2)$, где $C_1 \in z_1$, $C_2 \in z_2$, мы получаем корректное определение *индекса пересечения* $J(z_1, z_2)$ двух классов гомологий. Оказывается, что на любой поверхности M^2 существует базис гомологий, составленный из кривых $A_1, \ldots, A_p$, $B_1, \ldots, B_p$, для которых выполнены соотношения

$$J(A_i, A_j) = J(B_i, B_j) = 0; \; J(A_i, B_i) = \delta_{ij}; \; i, j = 1, \ldots, p. \tag{1}$$

Такой базис называется *каноническим*. Из этого непосредственно следует, что для любого класса гомологий $z \in \Delta^1$ имеет место соотношение

$$J(z, z) = 0,$$

и, далее, если z_1 — отличный от нуля класс гомологий, то существует такой класс гомологий z_2, что

$$J(z_1, z_2) = 1.$$

В случае связной поверхности M^2 за кривые $A_1, \ldots, A_p$, $B_1, \ldots, B_q$ можно принять кривые, дающие *канонический разрез* поверхности

M^2. В этом случае p есть *род* поверхности. В случае несвязной поверхности нужный базис гомологий получается путем объединения базисов компонент. В этом случае p есть сумма родов компонент поверхности M^2.

Теорема 22. *Пусть (M^2, U) — ортонормально оснащенная поверхность эвклидова ориентированного пространства E^{n+2} с базисом $e_1, \ldots, e_{n+2}$, задающим его ориентацию, $U(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$, и пусть $C = f(M^1)$ — ориентированная кривая на M^2. Пусть $y \in M^1$. Обозначим через $\hat{u}_{n+2}(y)$ единичный вектор, касательный в точке $f(y)$ к кривой $f(M^1)$ и соответствующий ее ориентации, а через $\hat{u}_{n+1}(y)$ — единичный вектор, касательный к M^2 в точке $f(y)$, ортогональный к $\hat{u}_{n+2}(y)$ и направленный так, что векторы $u_1(f(y)), \ldots, u_n(f(y)), \hat{u}_{n+1}(y), \hat{u}_{n+2}(y)$ дают положительную ориентацию пространства E^{n+2}. Для удобства обозначений положим также $\hat{u}_i(y) = u_i(f(y))$, $i = 1, \ldots, n$. Мы имеем*

$$\hat{u}_i(y) = \sum_{j=1}^{n+2} h_{ij}(y) \cdot e_j; \; i = 1, \ldots, n+2,$$

где $h(y) = \| h_{ij}(y) \|$ есть ортогональная матрица с положительным детерминантом, так что h есть непрерывное отображение многообразия M^1 в группу H_{n+2}. Положим

$$\delta(M^2, u, C) = \delta(C) \equiv \beta(h) + r(C) + s(C), \tag{2}$$

где $\beta(h)$ определено в предложении «D» § 12, $r(C)$ — число компонент кривой C, а $s(C)$ — число ее двойных точек. Оказывается, что $\delta(C)$ является инвариантом класса гомологий $z \in \Delta^1$, содержащего кривую C, так что можно положить $\delta(M^2, U, z) = \delta(z) = \delta(C)$. Далее, оказывается, что для двух произвольных классов гомологий z_1 и z_2 поверхности M^2 мы имеем

$$\delta(z_1 + z_2) = \delta(z_1) + \delta(z_2) + J(z_1, z_2). \tag{3}$$

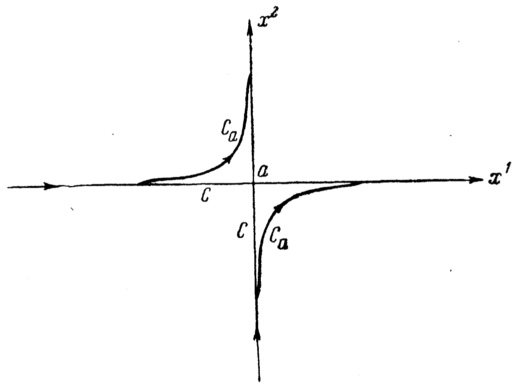
Доказательство. Докажем прежде всего, что вычет $\beta(h)$ не зависит от базиса $e_1, \ldots, e_{n+2}$ и ориентации кривой $C = f(M^1)$. Если вместо базиса $e_1, \ldots, e_{n+2}$ взять другой базис $e'_1, \ldots, e'_{n+2}$, то мы имеем

$$e_j = \sum_{k=1}^{n+2} l_{jk} e'_k; \; j = 1, \ldots, n+2,$$

где $l = \| l_{jk} \|$ есть ортогональная матрица с положительным детерминантом. На место матрицы $h(y)$ при такой замене встанет матрица $h'(y) = h(y) \cdot l$. Так как многообразие H_{n+2} связно, отображения h и h' гомотопны между собой, а из этого следует независимость вычета $\beta(h)$ от выбора базиса $e_1, \ldots, e_{n+2}$. Если теперь изменить на противоположную ориентацию однокомпонентной кривой $C=f(S^1)$, то векторы $\hat{u}_{n+1}(y)$ и $\hat{u}_{n+2}(y)$ придется заменить векторами $-\hat{u}_{n+1}(y)$ и $-\hat{u}_{n+2}(y)$. При такой замене матрица $h(y)$ заменится матрицей $h'(y)=l\cdot h(y)$, где $l_{ij}=0$ при $i\neq j$,

$$l_{11}=\ldots=l_{nn}=1,\ l_{n+1,n+1}=l_{n+2,n+2}=-1.$$

Так как матрица $l=\|l_{ij}\|$ принадлежит многообразию H_{n+2}, то отображения h и h' гомотопны между собой, а потому вычет $\beta(h)$ не зависит от ориентации однокомпонентной кривой C. То же, очевидно, справедливо и для произвольной кривой.



Фиг. 2

Для доказательства того, что $\delta(C)$ есть инвариант класса z гомологий, содержащего кривую C, введем операцию перестройки ориентированной кривой C вблизи ее двойной точки a, в результате которой кривая C переходит в ориентированную кривую $C_a=f_a(M_a^1)$. Отображение кривой M_a^1 в H_{n+2}, соответствующее кривой C_a, будем обозначать через h_a. Операция перестройки будет определена так, что кривая C_a имеет на одну двойную точку меньше, чем кривая C, и сверх того выполнены условия

$$C_a\sim C,\ \delta(C_a)=\delta(C).$$

В силу предложений п. «C» и «D» § 11 можно считать, что вблизи точки a поверхность M^2 совпадает с плоскостью E_2, кривая C — с двумя пересекающимися прямыми, а векторы $u_i(x)$ — с векторами e_i соответственно, $i=1,\ldots,n$. Эти прямые примем за оси координатной системы x^1, x^2, определенной вблизи точки a на M^2. Направление осей выберем так, чтобы возрастанию координат соответствовало движение по кривой в положительном направлении. Будем считать, что кривые C_a и C совпадают между собой вне окрестности точки a, вблизи же точки a кривая C_a задается уравнением $x^1\cdot x^2=-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ (см. фиг. 2). Таким образом, ориентация кривой C естественно переносится на кривую C_a. Легко усмотреть, что если обе ветви кривой C, проходящие через a, принадлежат одной ее компоненте, то после перестройки вместо этой компоненты появятся две различные компоненты кривой C_a. Напротив, если две ветви кривой C, проходящие через точку a, принадлежат различным компонентам кривой C, то в результате перестройки вместо этих двух компонент кривой C

появится одна компонента кривой C_a. Таким образом, в обоих случаях $r(C)+s(C)\equiv r(C_a)+s(C_a) \pmod 2$.

Покажем, что $\beta(h)=\beta(h_a)$. Действительно, отображение hf^{-1} переводит окрестность точки a на кривой C в две точки окружности H_2 (см. теорему 12), а отображение $h_a f_a^{-1}$ переводит близкие к точке a части кривой C_a в окружность H_2 со степенью 0. Из этого следует, что $\delta(C)=\delta(C_a)$. Гомологичность кривых C и C_a очевидна.

В результате конечного числа описанных перестроек, мы получаем из C кривую $O(C)$ без двойных точек, для которой выполнены соотношения

$$O(C)\sim C, \quad \delta(O(C))=\delta(C). \tag{4}$$

Покажем теперь, что если кривая C без двойных точек гомологична нулю на M^2, то

$$\delta(C)=0. \tag{5}$$

Пусть $C=\Delta G$; тогда $\overline{G}$ есть ограниченная кривой C гладкая поверхность. Легко задать на поверхности $\overline{G}$ гладкую функцию χ, положительную и меньшую 1 в G и равную нулю на C, полный дифференциал которой не обращается в нуль на C. В полосе $E^{n+2}\times I$, где I есть единичный отрезок $0\leqslant t\leqslant 1$, рассмотрим поверхность P^2, определяемую уравнением

$$t=+\sqrt{\chi(x)}, \qquad x\in\overline{G}.$$

Легко видеть, что поверхность эта имеет своим краем кривую $C\times 0$ и ортогональна к краю $E^{n+2}\times 0$ полосы $E^{n+2}\times I$. Так как поверхность P^2 гомеоморфна ориентируемой поверхности $\overline{G}$, то мы можем считать ее орентированной. Так как векторы системы $U(x)$ ортогональны к поверхности $\overline{G}$ в точке x, то векторы системы $U(x)\times t$ ортогональны к поверхности P^2 в точке $x\times t$. Дополним векторы системы $U(x)\times t$ единичным вектором $u_{n+1}(x,t)\times t$ так, чтобы полученная система $\tilde{U}(x,t)\times t$ составляла ортонормальное оснащение ориентированной поверхности P^2 в ориентированной полосе $E^{n+2}\times I$. Вектор $u_{n+1}(x,0)$, полученный таким образом, ортогонален к кривой C и касается поверхности M^2 в точке x. Таким образом, дополняя систему $U(x)$ вектором $u_{n+1}(x,0)$, мы получаем оснащение $V(x)$ кривой C, причем оснащенная кривая (C, V) оказывается гомологичной нулю. Далее, дополняя систему $V(x)$ вектором $u_{n+2}(x)$, касающимся кривой C в точке x, мы получим систему $\hat{U}(x)$, положенную в основу вычисления вычета $\delta(C)$. Сравнивая конструкцию вычета $\delta(C)$, данную здесь, с конструкцией вычета $\delta(C, V)$ (см. теорему 20), мы видим, что

$$\delta(C)=\delta(C, V).$$

Так как оснащенное многообразие (C, V) гомологично нулю, то $\delta(C)=$

$= \delta(C, V) = 0$ (см. теорему 20). Таким образом, соотношение (5) доказано.

Пусть C_1 и C_2 — две произвольные кривые на M^2, допускающие сложение. Мы имеем

$$s(C_1 + C_2) \equiv s(C_1) + s(C_2) + J(C_1, C_2) \pmod 2,$$
$$r(C_1 + C_2) = r(C_1) + r(C_2),$$
$$\beta(C_1 + C_2) = \beta(C_1) + \beta(C_2).$$

Отсюда следует, что

$$\delta(C_1 + C_2) = \delta(C_1) + \delta(C_2) + J(C_1, C_2). \tag{6}$$

Если, в частности, $C_1 \sim C_2$, то $J(C_1, C_2) = 0$ и из соотношений (6), (5) получаем

$$\delta(C_1) + \delta(C_2) = \delta(C_1 + C_2) = \delta(O(C_1 + C_2)) = 0.$$

Таким образом доказано, что $\delta(C)$ есть инвариант класса гомологий. Из этого и из соотношения (6), примененного к произвольным кривым C_1 и C_2, допускающим сложение, следует справедливость формулы (3).

Итак, теорема 22 доказана.

Теорема 23. *Пусть (M^2, U) — ортонормально оснащенное подмногообразие эвклидова пространства E^{n+2} и*

$$A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_p \tag{7}$$

есть произвольный канонический базис поверхности M^2. Оказывается что вычет

$$\delta = \delta(M^2, U) = \sum_{i=1}^{p} \delta(A_i)\,\delta(B_i) \tag{8}$$

не зависит от случайного выбора канонического базиса (7), *а является инвариантом оснащенного многообразия* (M^2, U).

Доказательство. Рассмотрим какой-либо канонический базис

$$A'_1, \ldots, A'_p, B'_1, \ldots, B'_p \tag{9}$$

поверхности M^2 и покажем, что

$$\sum_{i=1}^{p} \delta(A_i)\,\delta(B_i) = \sum_{i=1}^{p} \delta(A'_i)\,\delta(B'_i). \tag{10}$$

Непосредственное доказательство равенства (10) в случае произвольных канонических базисов (7) и (9) представляет значительные вычислительные трудности, поэтому будут рассмотрены три частных типа преобразований канонического базиса в канонический базис, причем для каждого отдельного типа преобразования справедливость формулы (10) устанавливается довольно легко. В заключение будет показано, что переход от произвольного канонического базиса (7) к любому другому каноническому базису (9) получается путем последовательного применения рассмотренных частных преобразований. Этим инвариантность вычета δ будет полностью доказана.

Преобразование 1. Пусть j — натуральное число, не превосходящее p. Положим

$$A'_j = B_j;\ B'_j = A_j;\ A'_i = A_i;\ B'_i = B_i,\ i \neq j. \tag{11}$$

Очевидно, что базис $A'_1, \ldots, A'_p, B'_1, \ldots, B'_q$, определяемый этим соотношением, снова является каноническим, и что соотношение (10) в этом случае справедливо.

Преобразование 2. Положим

$$A'_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} A_k,\ i = 1, \ldots, p, \tag{12}$$

$$B'_j = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} B_k,\ j = 1, \ldots, p, \tag{13}$$

где a_{ik} и b_{jk} — вычеты по модулю 2. Для того, чтобы базис (12)—(13) был каноническим, необходимо, чтобы матрица $a = \| a_{ij} \|$ была невырожденной, т. е. имела детерминант $+1$, и чтобы матрица $b = \| b_{ij} \|$ была связана с матрицей a соотношениями

$$\sum_k a_{ik} b_{jk} = \delta_{ij}, \tag{14}$$

т. е., обозначая через e единичную матрицу, а через b' — матрицу, получаемую из b транспонированием, $ab' = e$ или $a^{-1} = b'$, откуда $b'a = e$. Последнее соотношение дает

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij} b_{ik} = \delta_{ik}. \tag{15}$$

Таким образом,

$$\sum_i \delta(A'_i)\,\delta(B'_i) = \sum_i \delta\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} A_j\Big)\,\delta\Big(\sum_{k=1}^{p} b_{ik} B_k\Big) =$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{p} a_{ij} b_{ik} \delta(A_j)\,\delta(B_k) = \sum_{j,k=1}^{p} \delta_{jk} \delta(A_j)\,\delta(B_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \delta(A_j)\,\delta(B_j)$$

(см. (3)), и соотношение (10) в случае преобразования 2 выполнено. Отметим, что преобразование 2 однозначно определяется матрицей a, дающей преобразование (12). Преобразование (13), в силу формулы (14) определяется однозначно преобразованием (12). Мы будем говорить, что преобразования (12) и (13) *согласованы,* если для них выполнено соотношение 14.

Преобразование 3. Положим:

$$A_i' = A_i + \sum_k c_{ik} B_k, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{16}$$

$$B_i' = B_i, \qquad\qquad i = 1, \ldots, p. \tag{17}$$

Для выполнения соотношения $J(A_i', A_j') = 0$; $i, j = 1, \ldots, p$, необходимо и достаточно, чтобы

$$c_{ij} = c_{ji}. \tag{18}$$

Действительно,

$$J(A_i', A_j') = J\left(A_i, \sum_k c_{jk} B_k\right) + J\left(\sum_k c_{ik} B_k, A_j\right) =$$
$$= \sum_k c_{jk}\delta_{ik} + \sum c_{ik}\delta_{jk} = c_{ji} + c_{ij}.$$

Если соотношение (18) выполнено, то базис (16)—(17) является каноническим. Покажем, что при преобразовании 3 соотношение (10) выполнено. Мы имеем

$$\sum_i \delta(A_i')\,\delta(B_i') = \sum_i \delta\left(A_i + \sum_k c_{ik} B_k\right)\delta(B_i) =$$
$$= \sum_i \left(\delta(A_i) + \sum_k c_{ik}\delta(B_k) + \sum_k c_{ik} J(A_i, B_k)\right)\delta(B_i) =$$
$$= \sum_i \delta(A_i)\delta(B_i) + \sum_{i,k} c_{ik}\delta(B_k)\,\delta(B_i) + \sum_{i,k} c_{ik}\delta_{ik}\delta(B_i).$$

Далее,

$$\sum_{i,k} c_{ik}\delta(B_i)\,\delta(B_k) = \sum_i c_{ii}\delta(B_i)\,\delta(B_i) = \sum_i c_{ii}\delta(B_i)$$

(ибо вычисления проводятся по модулю 2) и

$$\sum_{i,k} c_{ik}\delta_{ik}\delta(B_i) = \sum_i c_{ii}\,\delta(B_i).$$

Итак, соотношение (10) выполняется.

Рассмотрим теперь произвольный переход от канонического базиса (7) к произвольному каноническому базису (9). Мы имеем

$$A_i' = \sum_j r_{ij} A_j + \sum_k s_{ik} B_k. \tag{19}$$

Ранг прямоугольной матрицы высоты p и длины $2p$, определяющей это преобразование, равен p, т. е. один из ее миноров порядка p отличен от нуля. Применяя к базису (7) несколько раз преобразование 1, мы можем придти к такому новому базису, который мы снова обозначим через $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_p$, что в формуле (19) отличен от нуля минор $|r_{ij}|$. Применяя к полученному базису $A_1, \ldots, A_p$, $B_1, \ldots, B_p$ преобразование 2 с матрицей $\|a_{ij}\| = \|r_{ij}\|$, мы приведем преобразование (19) к виду (16). Введем теперь канонический базис $A_1'', \ldots, A_p'', B_1'', \ldots, B_p''$, применив преобразование 2:

$$A_i'' = A_i + \sum_{k=1}^{p} c_{ik} B_k, \quad B_i'' = B_i.$$

Переход от этого базиса к базису (9) дается формулами

$$A_i' = A_i'',$$

$$B_i' = \sum_{j=1}^{p} r_{ij}' A_j'' + \sum_{k=1}^{p} s_{ik}' B_k''. \tag{20}$$

Соотношение $J(A_i', B_j') = \delta_{ij}$ дает $\sum_k s_{jk}' \delta_{ik} = \delta_{ij}$ или $s_{ij}' = \delta_{ij}$. Таким образом, преобразование (20) приобретает вид

$$B_i' = B_i'' + \sum_{j=1}^{p} r_{ij}' A_j'',$$

т. е. является преобразованием 3, в котором кривые A_i и B_i меняются ролями. Итак, переход от базиса (7) к базису (9) совершается последовательным применением преобразований 1—3.

Итак, теорема 23 доказана.

Теорема 24. *Если два оснащенных подмногообразия (M_0^2, U_0) и (M_1^2, U_1) эвклидовапространства E^{n+2} гомологичны между собой, то мы имеем*

$$\delta(M_0^2, U_0) = \delta(M_1^2, U_1) \tag{21}$$

[см. (8)]. *Таким образом, каждому элементу π группы Π_n^2 однозначно соответствует вычет $\delta(\pi)$, определяемый соотношением $\delta(\pi) = \delta(M^2, U)$, где (M^2, U) есть оснащенное многообразие класса π. Оказывается, что при $n \geqslant 2$ δ есть изоморфное отображение группы Π_n^2 на группу вычетов по модулю 2. Из сказанного вытекает, что существует ровно два класса отображений сферы Σ^{n+2} в сферу S^n, $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Докажем прежде всего соотношение (21). Пусть (M^3, U) — оснащенное подмногообразие полосы $E^{n+2} \times I$, осуществляющее гомологию $(M_0^2, U_0) \sim (M_1^2, U_1)$, построенное в лемме 1 § 14. Положим $M_t^2 \times t = M^2 \cap (E^2 \times t)$. Если точка $(x, t) \in M^3$ не является критической точкой многообразия M^3, то окрестность точки x в множестве M_t^2 представляет собой гладкую поверхность, так что при некритическом значении параметра t множество M_t^2 есть поверхность.

В случае, если (x_0, t_0) есть критическая точка многообразия M^3, множество M_t^2 при малом значении $|t - t_0|$ вблизи точки x_0, определяется уравнением

$$\sigma^1 \cdot (x^1)^2 + \sigma^2 \cdot (x^2)^2 + \sigma^3 \cdot (x^3)^2 = t - t_0; \quad x^4 = \cdots = x^{n+2} = 0 \tag{22}$$

[см. § 14, формулу (3)]. Если точка $(x, t) \in M^3$ не есть критическая точка многообразия M^3, то ортогональная проекция репера $U(x, t)$ на плоскость $E^{n+2} \times t$ представляет собой линейно независимую систему векторов. Систему, получающуюся из нее путем ортогонализации, обозначим через $V_t(x) \times t$. При некритическом значении параметра t система V_t составляет ортонормальное оснащение многообразия M_t^2. Когда параметр t непрерывно возрастает, не проходя через критическое значение, оснащенное многообразие (M_t^2, V_t) непрерывно деформируется, и из общих соображений непрерывности следует, что вычет $\delta(M_t^2, V_t)$ при этом не меняется. Таким образом, для доказательства соотношения (21) достаточно показать, что вычет $\delta(M_t^2, V_t)$ не меняется при прохождении параметра t через критическое значение $t = t_0$. Займемся этим. Для этого рассмотрим два различных случая.

Случай 1. Пусть $\sigma^1 = \sigma^2 = \sigma^3$. Для определенности будем считать, что $\sigma^1 = \sigma^2 = \sigma^3 = +1$. В этом предположении после прохождения через критическое значение поверхность M_t^2 приобретает новую компоненту, представляющую собой малую сферу, а в остальном она вместе со своим оснащением деформируется непрерывно. Так как присоединение сферы в виде отдельной компоненты не повышает рода поверхности, то канонический базис ее можно считать прежним, и потому вычет $\delta(M_t^2, V_t)$ не меняется.

Случай 2. Пусть среди чисел $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ имеются различные. Для определенности будем считать, что $\sigma^1 = \sigma^2 = +1$, $\sigma^3 = -1$. В этом предположении поверхность M_t^2 при $t < t_0$ вблизи точки x_0 имеет вид двуполостного гиперболоида, а при $t > t_0$ — вид однополостного гиперболоида. Эта перестройка равносильна приклеиванию к поверхности M_t^2, $t < t_0$, трубочки. Если трубочкой связываются две различные компоненты поверхности M_t^2, $t < t_0$, то базис поверхности M_t^2 при прохождении через t_0 не меняется, и потому вычет $\delta(M_t^2, V_t)$ остается инвариантным. Если трубочка приклеивается к одной компоненте, то базис поверхности должен быть пополнен двумя кривыми. Разберем это подробнее. Пусть $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_p$ — канонический базис поверхности M_t^2, $t < t_0$. Мы можем считать, что кривые, составляющие этот базис, проходят вдали от точки x_0, и потому при прохождении параметра t через критическое значение t_0 базис непрерывно меняется, так что при этом вычеты $\delta(A_i)$ и $\delta(B_i)$, $i = 1, \ldots, p$ остаются неизменными. За кривую A_{p+1} на поверхности M_t^2 примем окружность, высекаемую из части поверхности M_t^2, близкой к x_0, гиперплоскостью $x^3 = \varepsilon$, где ε — малое положительное число. При $t < t_0$ она, очевидно, гомологична нулю на M_t^2, а так как оснащение на ней при прохождении t через значение t_0 меняется непрерывно, то $\delta(A_{p+1}) = 0$. Пусть теперь B'_{p+1} — произвольная кривая на поверхности M_t^2, $t > t_0$, имеющая с A_{p+1} индекс пересечения, равный единице; такая кривая, очевидно, существует. Положим теперь

$$B_{p+1} = B'_{p+1} + \sum_{j=1}^{p} J(B_i, B'_{p+1}) A_i + \sum_{i=1}^{p} J(A_i, B'_{p+1}) \cdot B_i.$$

Очевидно, что кривые $A_1, \ldots, A_{p+1}, B_1, \ldots, B_{p+1}$ образуют канонический базис поверхности M_t^2, $t > t_0$ и так как $\delta(A_{p+1}), = 0$, то $\delta(A_{p+1})\,\delta(B_{p+1}) = 0$. Таким образом, вычет $\delta(M_t^2, V_t)$ сохраняется неизменным при прохождении параметра t через критическое значение t_0, и потому $\delta(M_0^2, V_0) = \delta(M_1^2, V_1)$. Так как $U_0 = V_0$, $U_1 = V_1$, то соотношение (21) верно.

Из сказанного вытекает, что δ есть отображение группы Π_n^2 в группу вычетов по модулю два. Самое определение сложения в группе Π_n^2 показывает, что δ есть гомоморфное отображение.

Докажем теперь, что δ есть гомоморфное отображение на всю группу вычетов по модулю два. Для этого достаточно показать, что существует оснащенное многообразие (M^2, U), для которого $\delta(M^2, U) = 1$. Так как, очевидно,

$$\delta(E(M^2, U)) = \delta(M^2, U), \quad n \geqslant 2,$$

где E есть операция надстройки, то достаточно рассмотреть случай $n = 2$.

Пусть E^4 — эвклидово векторное пространство с ортонормальным базисом e_1, e_2, e_3, e_4 и соответствующими координатами x^1, x^2, x^3, x^4; E^3 — линейное подпространство пространства E^4, определяемое уравнением $x^4 = 0$, и M^2 — обыкновенный метрический тор, лежащий в E^3 и имеющий своей осью вращения ось e_3. На торе M^2 введем обычные циклические координаты φ, ψ и поверхность M^2 зададим уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= (2 + \cos\varphi)\cos\psi, \\ x^2 &= (2 + \cos\varphi)\cdot\sin\psi, \\ x^3 &= \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Обозначим через A_1 кривую на M^2, определяемую уравнением $\psi = 0$, а через B_1 — кривую, определяемую уравнением $\varphi = 0$. Очевидно, что система A_1, B_1 составляет канонический базис поверхности M^2. Единичный вектор в пространстве E^3, нормальный к поверхности M^2 в ее точке $x = (\varphi, \psi)$ и направленный во внешнее пространство, обозначим через $v_1(x)$, а вектор, выходящий из x, параллельный вектору e_4, —

через $v_2(x)$. Оснащение $U(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ определим соотношениями

$$\begin{aligned} u_1(x) &= v_1(x)\cdot\cos(\varphi-\psi) - v_2(x)\cdot\sin(\varphi-\psi), \\ u_2(x) &= v_1(x)\cdot\sin(\varphi-\psi) + v_2(x)\cdot\cos(\varphi-\psi), \end{aligned} \tag{24}$$

и покажем, что

$$\delta(M^2, U) = 1. \tag{25}$$

Пусть C — любая простая замкнутая кривая на M^2. Единичный касательный вектор к кривой C в точке $x = (\varphi, \psi) \in C$ обозначим через $v_4(x)$, а единичный вектор, касающийся в точке x поверхности M^2 и ортогональный к вектору $v_4(x)$,— через $v_3(x)$. К соотношениям (24) прибавим соотношения

$$u_3(x) = v_3(x), \quad u_4(x) = v_4(x). \tag{26}$$

Соотношения (24) и (26) вместе дают переход от системы $V(x)$ к системе $U(x)$. Матрицу этого перехода обозначим через $f(x)$, $x \in C$. Легко видеть, что при $C = A_1$ и при $C = B_1$ мы имеем

$$\beta(f) = 1. \tag{27}$$

Далее, при $C = A_1$ мы имеем

$$\begin{gathered} x = (\varphi, 0); \quad v_1(x) = e_1\cos\varphi + e_3\sin\varphi; \quad v_2(x) = e_4; \\ v_3(x) = e_2; \quad v_4(x) = -e_1\sin\varphi + e_3\cos\varphi, \end{gathered}$$

так что переход от системы e_1, e_2, e_3, e_4 к системе $V(x)$ определяется ортогональной матрицей $g(x)$, причем

$$\beta(g) = 1. \tag{28}$$

При $C = B_1$ мы имеем аналогично

$$\begin{gathered} x = (0, \psi); \quad v_1(x) = e_1\cos\psi + e_2\sin\psi; \quad v_2(x) = e_4; \\ v_3(x) = -e_3; \quad v_4(x) = -e_1\sin\psi + e_2\cos\psi, \end{gathered}$$

так что переход от системы e_1, e_2, e_3, e_4 к системе $V(x)$ определяется матрицей $g(x)$, причем

$$\beta(g) = 1. \tag{29}$$

В обоих случаях при $C = A_1$ и при $C = B_1$ переход от системы e_1, e_2, e_3, e_4 к системе $U(x)$ определяется матрицей $h(x) = g(x)\cdot f(x)$, причем

$$\delta(h) = \delta(g) + \delta(f) = 0$$

[см. (27)—(29) и п. «D» § 12]. Таким образом, в силу формул (2) и (8) мы имеем

$$\delta(A_1) = 1, \quad \delta(B_1) = 1, \quad \delta(M^2, U) = 1.$$

Таким образом, соотношение (25) доказано.

Покажем, наконец, что δ есть изоморфное отображение. Для этого достаточно доказать, что группа Π_n^2 имеет не более двух элементов, ибо она отображается на всю группу вычетов по модулю 2. Из теорем 11 и 16 следует, что для каждого оснащенного многообразия (M^2, U) эвклидова пространства E^{n+2} мы имеем

$$(M^2, U) \sim E^{n-2}(N^2, V),$$

где (N^2, V) есть оснащенное многообразие четырехмерного эвклидова пространства, а E^{n-2} — операция надстройки, проведенная $n-2$ раз. Таким образом, нам достаточно показать, что Π_2^2 содержит не более двух элементов, т. е., что существует не более двух классов отображений сферы S^4 в сферу S^2. В силу леммы 2 § 13, число классов отображений сферы S^4 в сферу S^2 не больше числа классов отображений сферы S^4 в сферу S^3, последнее же в силу теоремы 21 равно двум.

Итак, теорема 24 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Классификация непрерывных отображений комплекса на сферу. 1, ДАН СССР, **19**, № 3, 147—149 (1938).
2. Понтрягин Л. С., Гомотопическая классификация отображений $(n+2)$-мерной сферы в n-мерную, ДАН СССР, **70**, № 6, 957—959 (1950).
3. Рохлин В. А., Классификация отображений $(n+3)$-мерной сферы в n-мерную, ДАН СССР, **81**, № 1, 19—22 (1951).
4. Serre J. P., Sur les groupes d'Eilenberg—Maclane, Comp. Rend., **234**, № 12, 1243—1245 (1952); Serre J. P., Sur la suspension de Freudenthal, Comp. Rend., **234**, № 13, 1340—1342 (1952).
5. Whitney H., Differentiable manifolds, Ann. of Math., 37, 645—680 (1936).
6. Дубовицкий А. Я., О дифференцируемых отображениях n-мерного куба в k-мерный куб, Мат. сборник, т. 32, № 2, 443—464 (1953).
7. Morse M., The calculus of variations in the large, Amer. math. soc. colloquium publ., 18 (1934).
8. Whitney H., The general type of singularity of a set of $(2n-1)$-smooth functions of n-variables, Duke Math. J., **10**, 162—172 (1943).
9. Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, М.—Л., 1937.
10. Рохлин В. А., Гомотопические группы. Успехи матем. наук, **1**, № 5—6 (15—16), 175 (1946).
11. Freudenthal H., Über die Klassen der Sphärenabbildungen, Comp. math., **5**, 299 (1937).
12. Hopf H., Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann., **104**, 639 (1931).
13. Brouwer, On looping coefficients, Proc. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam, **15**, 113 (1912).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III. Хопфовский инвариант

Глава IV. Классификация отображений $(n+1)$-мерной и $(n+2)$-мерной сфер в n-мерную

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
11	1 сн.	$\left.\dfrac{\partial\psi^{j}(a)}{\partial x^{i}}\right\|$	$\left\|\dfrac{\partial\psi^{j}(a)}{\partial x^{i}}\right\|$
16	7 сн.	$c\sqrt{\varepsilon}\cdot\varepsilon$	$c\sqrt{k}\cdot\varepsilon$
36	9 св.	$\varphi^{i}(x)$	$\varphi^{j}(x)$
48	1 сн.	читать	считать
56	13 св.	E_*^{n++1}	E_*^{n+k+1}
66	16 св.	$\hat{E}^{n+k}$	E^{n+k}
66	9 сн.	$E^{n+k-1}=E^{n+k-1}$	$\hat{E}^{n+k-1}=E^{n+k-1}$
67	10 св.	U_2	$\hat{U}_2$
73	3 св.	близким к E^1	близким к $\hat{E}^1$
87	12 сн.	$z'=z'(x)$	$z^1=z^1(x)$
87	6 сн.	$b_{f\beta}$	$b_{j\beta}$
106	15 св.	yh' и φh	yh' и $\varphi\hat{h}$
106	16 св.	$\beta(\varphi h)\hat{}$	$\beta(\varphi\hat{h})$
120	12 св.	$\hat{S}_1^1, \hat{S}_2^1$	S_1^1, S_2^1

Труды Математического ин-та, т. XLV