

Wilhelm Hort

**Die Differentialgleichungen
des Ingenieurs**

Zweite Auflage



Die Differentialgleichungen des Ingenieurs

Darstellung der für Ingenieure und Physiker wichtigsten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen einschließlich der Näherungsverfahren und mechanischen Hilfsmittel
Mit besonderen Abschnitten über Variationsrechnung und Integralgleichungen

von

Prof. Dr. Wilhelm Hort

Oberingenieur der AEG Turbinenfabrik
Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Berlin

Zweite
umgearbeitete und vermehrte Auflage
unter Mitwirkung von
Dr. phil. W. Birnbaum und Dr.-Ing. K. Lachmann

Mit 308 Abbildungen im Text
und auf 2 Tafeln



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1925

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1925

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1925

Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1925

Additional material to this book can be downloaded from <http://extras.springer.com>

ISBN 978-3-662-40944-2

ISBN 978-3-662-41428-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-41428-6

Vorwort zur ersten Auflage.

In den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, die für die Zwecke der Ingenieure gedacht sind, finden auch die Differentialgleichungen Berücksichtigung. Zumeist gehen jedoch diese Lehrbücher über eine Anfangseinführung in die Theorie der Differentialgleichungen nicht hinaus, so daß der Lernende nur einen flüchtigen Überblick über das Gebiet erhält.

Ferner werden die numerischen, graphischen und mechanischen Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen in der vorhandenen Lehrbuchliteratur fast gar nicht berücksichtigt.

Hiervon ausgehend habe ich versucht, die Lehre von den Differentialgleichungen, soweit sie für den Ingenieur von Bedeutung ist, im Zusammenhang an wichtigen technischen und physikalischen Beispielen darzustellen.

Ursprünglich hatte ich die Absicht, die Differential- und Integralrechnung überall in dem Werke als bekannt vorauszusetzen. Bald zeigte es sich jedoch als zweckmäßig, eine kurze Darlegung zur Verständigung vorzuschicken, die als Abschnitt I erscheint. Hier habe ich den Versuch gemacht, zuerst den Integralbegriff zu erörtern und dann erst zum Differentialquotienten überzugehen, da mich die Anknüpfung an den Flächeninhalt und an den Summenbegriff anschaulicher dünkt als die Anknüpfung an die Kurventangente, über deren inneren Zweck der Lernende zunächst im unklaren bleibt.

Abgesehen von den so gewonnenen Grundtatsachen der Differential- und Integralrechnung werden im Verlaufe des Buches eine Reihe von Formeln benutzt, deren Ableitung mit Rücksicht auf den verfügbaren Raum nicht gegeben werden konnte. Diese der Differential- und Integralrechnung entnommenen Ansätze habe ich als rechnerisches jedem zur Verfügung stehendes Handwerkszeug betrachtet, zu welchem Standpunkt ich mich berechtigt glaube, da es sich fast ausschließlich um Tatsachen handelt, die im Taschenbuch Hütte nachgeschlagen werden können. In den Anmerkungen habe ich die betreffenden Stellen

der Hütte zitiert. Ich möchte hier nicht verfehlen, die mathematische Formelsammlung der Hütte als nach meinen Erfahrungen recht geschickt ausgewählt zu bezeichnen. Ansätze, die die Hütte nicht gibt, sind ebenfalls in den Anmerkungen nach ihren Quellen namhaft gemacht.

Bei der Behandlung des eigentlichen Themas des Buches habe ich mich zunächst der üblichen Einteilung der Differentialgleichungen in gewöhnliche und partielle angeschlossen. Innerhalb dieser Einteilung werden die exakten Transformations- und Substitutionsmethoden dargelegt und auf zahlreiche Beispiele der Technik und Physik angewendet.

Da ich möglichst alle für Aufgaben des Ingenieurwesens wichtige Methoden bringen wollte, habe ich mich veranlaßt gesehen, die Reihenentwicklungen nach Frobenius nebst der damit in Zusammenhang stehenden Ermittlung der logarithmierten Integrale linearer Differentialgleichungen zu behandeln. Bekanntlich werden diese Verfahren in der Behältertheorie gebraucht. Daneben werden einige Fragen, die mit der Technik nicht in unmittelbarem Zusammenhang stehen, wie z. B. die Integration der Differentialgleichungen der Planetenbewegung, ihres allgemeinen Interesses halber erörtert.

Einen ausgedehnten Raum nimmt die Besprechung der Instrumente zur Ausführung von Integrationen sowie die Erörterung graphischer und rechnerischer Annäherungsverfahren ein. Es ist wohl das erste Mal, daß diese Stoffe in einem Lehrbuch der Differentialgleichungen umfangreichere Behandlung finden.

Im Interesse der Anwendungen sind auch die Differenzgleichungen wenigstens in einem kurzen Abriß aufgenommen worden.

Die partiellen Differentialgleichungen habe ich von einem etwas anderen Gesichtspunkt aus behandelt. Einerseits gibt es hier noch verhältnismäßig wenig Annäherungsverfahren, andererseits berührt die eigentliche Theorie der partiellen Differentialgleichungen den Ingenieur fast gar nicht. Es handelt sich stets um das Stoffgebiet der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Der zweite Teil des Buches hat infolgedessen ein etwas mehr theoretisches Gepräge als der erste. Ich hoffe aber, daß eine Darstellung der mannigfachen Operationen, die man mit den partiellen Differentialgleichungen der Physik vornehmen kann, auch Ingenieuren willkommen sein wird. Die Gleichungen der Elastizität, Hydrodynamik und Elektrodynamik sind ja neuerdings zur Bewältigung verwickelter praktischer Aufgaben unentbehrlich geworden. Ich erinnere nur an die Lorenzsche

Turbinentheorie und an die Ausgleichsvorgänge auf elektrischen Leitungen.

Sach- und Namenregister, Anmerkungen und Angaben der benutzten und weiterer Literatur nebst Formelverzeichnis werden, wie ich glaube, den Gebrauch des Buches erleichtern.

Beim Abschluß des Druckes ersehe ich aus Nr. 20 der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, daß der deutsche Ausschuß für technisches Schulwesen in seinem fünften Bericht den gleichen Anschauungen Ausdruck gibt, die mir den Anstoß zur Abfassung dieses Buches gegeben haben, weshalb ich zu hoffen wage, daß mein Werk als erster Versuch, die Lehre von den Differentialgleichungen in engeren Zusammenhang mit den Anwendungen zu bringen, wenigstens dem Grunde nach die Billigung der Fachgenossen findet.

Ich gestatte mir auch an dieser Stelle, Herrn Dr. L. Lichtenstein für Beratung zu § 44 sowie Herrn Dr. K. W. Wagner für Namhaftmachung von Literatur zu § 97 bestens zu danken.

Herr Dipl.-Ing. B. Feise, hat mich in dankenswerter Weise bei der Revision unterstützt.

Die Bildstöcke für die beschriebenen mathematischen Instrumente hat die Firma G. Coradi-Zürich zur Verfügung gestellt.

Und schließlich gebührt dem Herrn Verleger für die sorgfältige Herstellung der Figuren und die Ausstattung des Buches besondere Anerkennung.

Berlin-Siemensstadt, im September 1914.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die durchweg zustimmenden Besprechungen und der rasche Absatz der ersten Auflage haben gezeigt, daß mein Buch seiner Aufgabe, eine fühlbare Lücke in der Literatur der technischen Mathematik auszufüllen, gerecht geworden ist. Ich habe daher die zweite Auflage hauptsächlich im Sinne einer Vervollständigung der näherungsweise Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen und durch Hinzufügung von zwei Abschnitten über Variationsrechnung und Integralgleichungen bearbeitet. Für diese Erweiterungen habe ich die Herren Dr. K. Lachmann (§ 56—66) und Dr. W. Birnbaum (§ 120—129) als Mitverfasser gewonnen.

Als richtunggebend für meine Auffassung vom Wesen der technischen Mathematik darf ich auf den Aufsatz von H. Burkhardt (dem bekannten Mathematiker der Universität Zürich), „Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken“ (Jahresber. d. D. Math. Ver. Bd. 2, S. 49. 1901) verweisen. Hier wird über das Studium der (technischen) Mathematik gesagt, daß man sie am besten ähnlich wie eine Naturwissenschaft betreibe, die feineren Untersuchungen aber beiseite lasse und darauf vertraue, daß vor etwa entspringenden groben Fehlern der naturwissenschaftliche oder technische Takt bewahre oder schlimmstenfalls das Experiment eines besseren belehre. Diese Auffassung nebst der Zustimmung zahlreicher Leser und der meisten Rezensenten der ersten Auflage haben mich auch veranlaßt, das Einleitungskapitel beizubehalten.

Demnach findet man in meinem Buch zahlreiche technische und physikalische Beispiele zur Anwendung der vorgeführten Integrationsmethoden, aber wenig Existenz- und Konvergenzbetrachtungen. Überall tritt das Operieren mit den naturwüchsigen analytischen Gebilden (vgl. A. Kneser im Vorwort zur 6. Auflage von Schlömilchs Kompendium der höheren Analysis, Bd. 1) in den Vordergrund. Das Streben nach weitergehender Allgemeinheit und die Vertiefung der Begriffsformulierung bleibe den Lehrbüchern der reinen Mathematik vorbehalten, die zur Hand zu nehmen den Jüngern der Technik und Physik ausdrücklich empfohlen sein soll.

Ich schließe mit besonderem Dank an die Verlagsbuchhandlung, die das Buch mit gewohnter Sorgfalt ausgestattet hat, unbeirrt durch die mancherlei Verzögerungen, die die Berufstellung des Autors bei der Drucklegung verursachte.

Charlottenburg, Neujahr 1925.

Prof. Dr. W. Hort.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

I. Einleitung.

	Seite
§ 1. Allgemeine Festsetzungen über Koordinaten und Funktionen	1
§ 2. Die graphische Summierung der Geraden $y = a$	4
§ 3. Graphische Summierung der Geraden $y = a + bx$	8
§ 4. Graphische Summierung einer beliebigen Kurve	9
§ 5. Der Begriff des Integrals	11
§ 6. Berechnung eines bestimmten und eines unbestimmten Integrals	13
§ 7. Der Differenzen- und der Differentialquotient	15
§ 8. Der Zusammenhang zwischen den Formeln des unbestimmten Integrals und des Differentialquotienten	18
§ 9. Geometrische Betrachtungen über das Wesen des Differentialquotienten und Anwendungen	18
§ 10. Geometrische Betrachtungen über das Wesen der Integralkurve	23
§ 11. Die mechanische Herstellung der Integralkurve mittels des Integrals von Abdank-Abakanowicz	24
§ 12. Instrumente zur mechanischen Herstellung spezieller bestimmter Integrale: Flächen- und Momentenplanimeter	27
§ 13. Allgemeine Regeln für die Durchführung von Differentiationen	41
§ 14. Bestimmung der Differentialquotienten der einfachen Funktionen	45
§ 15. Zusammenstellung der Grundformeln der Differentialrechnung	49

II. Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 16. Differentialquotient und Differentialgleichung	50
§ 17. Anwendungsbeispiel: Die Spiegelkurve eines fließenden Gewässers. Angenäherte Integration einer Differentialgleichung	52
§ 18. Integration bei allgemeineren Formen der Differentialgleichung. Trennung der Variablen. Anwendungsbeispiel: Grundwasserspiegel	64
§ 19. Anwendungsbeispiel: Spiegelkurve des Grundwasserstromes in der Umgebung eines Brunnens	65
§ 20. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Bernoullis Substitutionsmethode	66
§ 21. Anwendungsbeispiel: Entstehung eines Wechselstromes	68

	Seite
§ 22. Das singuläre Integral	73
§ 23. Die Methode des integrierenden Faktors	77
III. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung.	
§ 24. Höhere Differentialquotienten. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Verschiedene Formen	81
§ 25. Die Differentialgleichung der Seilkurve	84
§ 26. Differentialgleichung der elastischen Linie	96
§ 27. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	100
§ 28. Nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	107
§ 29. Die Kettenlinie	108
§ 30. Genaue Form der Differentialgleichung der elastischen Linie	118
§ 31. Eindimensionale Differentialgleichungen. Beispiel: Formänderung eines dickwandigen Rohres nach Föppl	120
§ 32. Einführung der Störungsfunktion. Biegung kreisförmiger Platten	126
IV. Differentialgleichungen höherer Ordnung. Simultane Differentialgleichungen.	
§ 33. Differentialgleichungen n -ter Ordnung	129
§ 34. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	133
§ 35. Die Variation der Konstanten	137
§ 36. Die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	140
§ 37. Anwendungsbeispiele. Föppls Differentialgleichung der Formänderung einer Eisenbahnschwelle auf nachgiebiger Unterlage; Formänderung der Wandung eines Wasserbehälters	142
§ 38. Integration durch Reihen	147
§ 39. Anwendung der Integration durch Reihen auf ein Beispiel	153
§ 40. Aufsuchung des Fundamentalsystems, falls die Wurzeln der determinierenden Gleichung nicht sämtlich verschieden sind	157
§ 41. Simultane gewöhnliche Differentialgleichungen im allgemeinen. Systeme erster Ordnung	165
§ 42. Ein Beispiel simultaner Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: Dampfmaschine mit Regulator	169
§ 43. Die Zentralbewegung als Beispiel eines Systems nichtlinearer simultaner Differentialgleichungen	173
§ 44. Die Pendelgleichung. Elliptische Funktionen	183
V. Die Differenzgleichungen.	
§ 45. Definition linearer Differenzgleichungen	202
§ 46. Die linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten	204
§ 47. Anwendung der linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten	205
§ 48. Anwendung der Differenzgleichungen auf die Stromverteilung in einem Kettenleiter	210

	Seite
VI. Zeichnerische und rechnerische Näherungsbehandlung der Differentialgleichungen erster Ordnung.	
§ 49. Differentialgleichung erster Ordnung in graphischer Behandlung	216
§ 50. Einige technische Anwendungen der Differentialgleichungen erster Ordnung	220
§ 51. Das Isoklinenverfahren der Differentialgleichungen erster Ordnung	222
§ 52. Zwei Anwendungen des Isoklinenverfahrens	225
§ 53. Eine Sondergestalt des Isoklinenverfahrens	237
§ 54. Runges Methode zur angenäherten Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung	240
§ 55. Anwendung der Rungeschen Methode auf die Untersuchung des Bewegungsverlaufes einer Einzylinder-Dampfmaschine	253
§ 56. Numerische Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung nach G. Duffing	266
§ 57. Das Verfahren der schrittweisen Verbesserung bei Differentialgleichungen erster Ordnung	270
VII. Näherungsbehandlung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung.	
§ 58. Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe der Krümmungskreise	274
§ 59. Das Krümmungskreis-Verfahren von E. Meißner	282
§ 60. Das Verfahren der Seilkurve	288
§ 61. Methode von C. Runge zur zeichnerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung	292
§ 62. Das Verfahren von G. Duffing für Differentialgleichungen zweiter Ordnung	302
§ 63. Abgeändertes Verfahren nach G. Duffing	305
§ 64. Verfahren der schrittweisen Verbesserung bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung	309
§ 65. Anwendung der schrittweisen Verbesserung bei einer Randwertaufgabe	313
§ 66. Prüfung der Verfahren nach L. Gümbel und G. Duffing durch schrittweise Verbesserung	322
VIII. Mechanische Integration von Differentialgleichungen.	
§ 67. Integration linearer Differentialgleichungen nach E. Pascal	326
§ 68. Der Apparat von Lord Kelvin	329
Zweiter Teil. Partielle Differentialgleichungen.	
I. Einleitung.	
§ 69. Die Funktionen mehrerer Variablen	332
§ 70. Die partiellen Differentialgleichungen im allgemeinen	337
§ 71. Die Arten der Integrale partieller Differentialgleichungen im allgemeinen	340

	Seite
II. Einfache partielle Differentialgleichungen aus verschiedenen Gebieten.	
§ 72. Differentialgleichung der schwingenden Saite	348
§ 73. Rechnerische Ermittlung der Fourierschen Koeffizienten . .	355
§ 74. Mechanische Verfahren zur Bestimmung der Fourierschen Koeffizienten	358
§ 75. Die Differentialgleichung der Stabschwingungen. Biegungs- schwingungen	362
§ 76. Schiffsschwingungen	372
§ 77. Analytische Ermittlung der Eigentöne nicht gleichförmiger, insbesondere verjüngter Stäbe	376
§ 78. Differentialgleichung der Membranschwingungen	384
§ 79. Runde Membran. Besselsche Funktionen	389
§ 80. Schwingungen einer rotierenden Membran. Hypergeometrische Funktion	400
§ 81. Wärmeleitung	405
§ 82. Wärmeleitung in einem Stab mit Anfangstemperaturver- teilung	407
§ 83. Berücksichtigung der Oberflächenbedingung	410
§ 84. Wärmeleitung in einem Stabe bei veränderlicher Stab- endtemperatur	414
§ 85. Anwendung auf die Wärmebewegung in den Wandungen des Dampfmaschinenzylinders	416
§ 86. Stationäre ebene Bewegungen einer inkompressiblen Flüs- sigkeit	419
III. Die Differentialgleichung des Potentials.	
§ 87. Die allgemeine Massenanziehung, das Coulombsche Gesetz und die Laplace-Poissonsche Differentialgleichung	427
§ 88. Allgemeine Eigenschaften des Potentials	438
§ 89. Zusammenfassung und Übersicht über die Aufgaben der Potentialtheorie	445
§ 90. Der Integralsatz von Gauß	449
§ 91. Einführung der Greenschen Funktion	452
§ 92. Das Potential einfachster Massenordnungen und die Legendreschen Kugelfunktionen	455
§ 93. Die allgemeinen Kugelfunktionen	472
§ 94. Anwendung der Kugelfunktionen auf Elektrostatik	478
§ 95. Bestimmung der Greenschen Funktion für die Kugel und Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Kugellinnenraum	482
§ 96. Die Zylinderfunktionen	484
IV. Die Differentialgleichungen der Bewegungen elastischer Körper.	
§ 97. Aufstellung der Grundgleichungen	489
§ 98. Ermittlung des räumlichen Spannungszustandes und der Oberflächenbedingungen elastischer Probleme	495
§ 99. Erzwungene gedämpfte Schwingungen von Stäben	497

	Seite
§ 100. Schwingungen einer kreisförmigen Platte nach Kirchhoff	500
§ 101. Schwingungen kreisförmiger Platten mit punktförmigen Randmassen	504
§ 102. Schallbewegungen in einem unbegrenzt ausgedehnten elasti- schen Medium. Longitudinale und transversale Wellen	507
§ 103. Radiale Schwingungen einer Kugel	511
§ 104. Das Ritz-Lorenzsche Verfahren der näherungsweise Lösung von Elastizitätsaufgaben	519

V. Die Differentialgleichungen der Hydrodynamik.

§ 105. Aufstellung der Eulerschen Grundgleichungen für Flüssig- keiten mit und ohne Reibung	523
§ 106. Die Grenzbedingungen bei hydrodynamischen Aufgaben	531
§ 107. Integration der Eulerschen Gleichungen im Falle einer idealen wirbelfreien inkompressiblen Flüssigkeit	533
§ 108. Dirichlets Untersuchung der Bewegung einer reibungsfreien Flüssigkeit um eine Kugel	535
§ 109. Die Differentialgleichungen der Bewegung inkompressibler Flüssigkeiten von Lagrange	542
§ 110. Der Integralsatz von Stokes	545
§ 111. Die Sätze von Helmholtz über die Wirbelbewegungen	549
§ 112. Umformung der Eulerschen Differentialgleichungen auf Zylinderkoordinaten	552
§ 113. Grundlegung der Turbinen-Theorie von H. Lorenz	558

VI. Die Differentialgleichungen der Elektrodynamik.

§ 114. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik	560
§ 115. Aufstellung der Maxwellschen Gleichungen	567
§ 116. Untersuchung ebener elektromagnetischer Wellen	569
§ 117. Elektromagnetische Eigenschaften von Gleichströmen in linear ausgestreckten Leitern	575
§ 118. Elektromagnetische Vorgänge bei Wechselströmen in gerad- linigen Leitern. Ferantiphänomen	579
§ 119. Ausgleichsvorgänge in linearen Leitern	592
§ 120. Der Skineneffekt	605
§ 121. Herleitung der Konstanten der Heavisideschen Gleichung aus den Maxwellschen Gleichungen des axialsymmetrischen Feldes	608

Dritter Teil. Grundzüge der Variationsrechnung.

§ 122. Die Aufgaben der Variationsrechnung	612
§ 123. Variationsproblem mit einer Unbekannten und ihrer ersten Ableitung bei einer Unabhängigen	615
§ 124. Höhere Variationsprobleme Schwingungen eines Flugzeug- flügels	621
§ 125. Variation mehrfacher Integrale. Stab- und Plattenschwin- gungen	626

**Vierter Teil. Einführung in die Theorie der linearen
Integralgleichungen.**

§ 126.	Anwendung der Einflußlinien auf das Problem der schwingenden Saite	639
§ 127.	Die Fredholmschen Sätze und die Lösung der Integralgleichungen nach Neumann und J. Fredholm	649
§ 128.	Die Hilbertschen Sätze über die linearen Integralgleichungen mit symmetrischem Kern und die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigen-Funktionen	656
§ 129.	Die erzwungenen Schwingungen biegsamer Stäbe	661
	Anmerkungen, Literaturangaben, Verbesserungen	668
	Verzeichnis der behandelten Differentialgleichungen	682
	Namenverzeichnis	693
	Sachverzeichnis	695

Erster Teil.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

I. Einleitung.

§ 1. Allgemeine Festsetzungen über Koordinaten und Funktionen.

Es gibt Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung wie auch der Differentialgleichungen, in denen keine Figuren vorkommen. Dies ist möglich, weil geometrische Vorstellungen für den Aufbau der genannten Disziplinen nicht unbedingt erforderlich sind.

Zweifellos erleichtert jedoch der Gebrauch geometrischer Vorstellungen das Eindringen in unsere Aufgabe ungem¹).

Der Verständigung über diese Vorstellungen sollen die folgenden Vorbemerkungen dienen.

I. Im rechtwinkligen Koordinatensystem gibt es folgende Richtungen (Fig. 1):

- $O + X =$ Richtung der positiven x -Achse.
- $O - X =$ " " negativen x -Achse.
- $O + Y =$ " " positiven y -Achse.
- $O - Y =$ " " negativen y -Achse.

sowie die Quadranten I, II, III, IV.

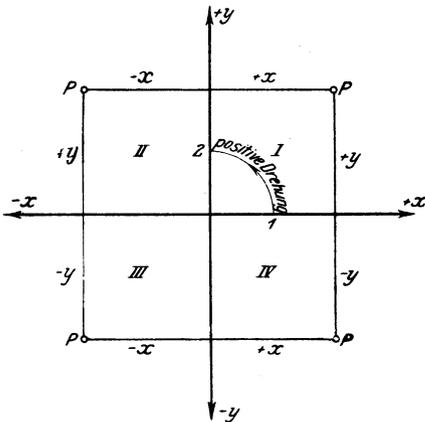


Fig. 1. Die vier Quadranten des Koordinatensystems.

Die Vorzeichen der Koordinaten eines Punktes sind im

I. Quadranten:	+	+
II. „	-	+
III. „	-	-
IV. „	+	-

Der Pfeil 1—2 bezeichnet den positiven Umlaufsinn oder die positive Drehrichtung in der xy -Ebene.

II. Die Gleichung

$$y = f(x) \quad (1)$$

wird gelesen: Die Ordinate y ist eine Funktion der Abszisse x oder kürzer: $y =$ Funktion x . Die Größen x und y heißen die Variablen. x ist die unabhängige, y die abhängige Variable. Die unabhängige Variable nennt man auch das Argument der Funktion.

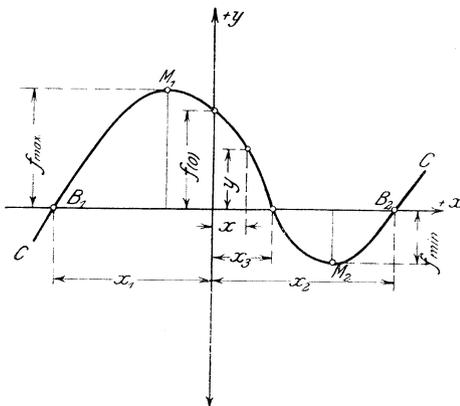


Fig. 2. Graphische Darstellung einer Funktion und ihrer Nullpunkte.

Die Funktion $y = f(x)$ wird in der xy -Ebene dargestellt durch die Kurve CC (Fig. 2). Man sagt auch: Die Kurve $y = f(x)$. Andererseits definiert jeder graphisch gegebene Linienzug CC eine Funktion y von x , die man auch analytisch festlegen kann.

Besondere Punkte der Kurve bzw. Werte der Funktion sind:

$f(0)$ ist derjenige Funktionswert, der sich ergibt, wenn in der

Funktion $f(x)$ das Argument $x = 0$ gesetzt wird. Graphisch ergibt sich der Schnittpunkt der Kurve mit der y -Achse. Ergibt ferner die Auflösung der Gleichung

$$f(x) = 0 \quad (2)$$

nach x einen oder mehrere Werte $x = x_1, x_2, \dots$, so sind diese die Nullpunkte oder Nullstellen der Funktion. Graphisch erhält man die Schnittpunkte der Kurve mit der x -Achse.

Diejenigen Werte x , für die der Funktionswert y unendlich wird, heißen die Pole der Funktion (Fig. 3). Die entsprechende Kurve hat in den Polen Asymptoten, die der y -Achse parallel sind.

Die Punkte M_1 und M_2 , in denen die Kurve horizontale Tangenten hat, nennt man Extrempunkte. Die zugehörigen Funktionswerte heißen Extreme der Funktion.

Es gibt zwei verschiedene Arten der Extreme: Maxima (M_1) und Minima (M_2), deren Kennzeichen später besprochen werden.

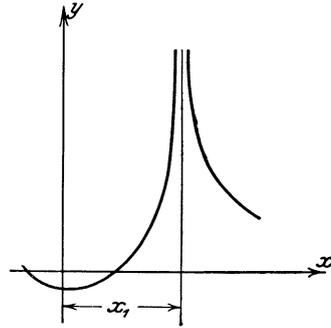


Fig. 3. Pol einer Funktion.

III. Die Funktionen $f(x)$ gliedert man in:

a) algebraische, b) transzendente.

a) Die ersteren sind solche Funktionen $f(x)$, die aus x durch eine „begrenzte Anzahl von Anwendungen der 4 Spezies und von Wurzelziehungen“ gewonnen werden^{1a)}. Sie zerfallen in mehrere Unterabteilungen:

1. Rationale ganze Funktionen, z. B.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (3)$$

2. Rationale gebrochene Funktionen, z. B.

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3} \quad (4)$$

3. Irrationale Funktionen, z. B.

$$\sqrt{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} \quad (5)$$

oder

$$a_0 + a_1 x^{\frac{1}{m}} + b_1 x^{\frac{1}{m+1}} \quad (6)$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt[m]{b_0 + b_1 x + b_1 x^2}} \quad (7)$$

b) Zu den transzendenten Funktionen gehören als einfachste Repräsentanten der Logarithmus $\lg x$, die Exponentialfunktion e^x , die Winkelfunktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cot} x$,

die Kreisfunktionen $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccot} x$, die Hyperbelfunktionen $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{coth} x$, die auch mit $\mathfrak{S}in x$, $\mathfrak{C}os x$, $\mathfrak{T}g x$, $\mathfrak{C}ot x$ bezeichnet werden.

Diesen reiht sich noch eine unbegrenzt große Zahl weiterer Formen an. Das gemeinsame Kennzeichen der transzendenten Funktionen kann zunächst nur negativ gegeben werden: Alle Funktionen, die weder rational noch irrational sind, sind transzendent.

IV. Besondere Arten der Darstellung von Funktionen $f(x)$ sind nun die unendlichen Summen und Produkte. Erstere schreibt man in der Form

$$y = \sum_n a_n f_n(x), \quad (8)$$

letztere

$$y = \prod_n a_n f_n(x). \quad (9)$$

Sowohl für die „Koeffizienten“ a_n wie für die $f_n(x)$ müssen „Bildungsgesetze“ vorgeschrieben sein. Beide Arten von Darstellungen, sowohl die Summen- wie die Produktdarstellung, sind wichtige Hilfsmittel zur numerischen Berechnung von Funktionen, besonders von transzendenten Funktionen.

V. a) Eine Größe y wird als Funktion von x auch definiert durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0 \quad (10)$$

auch wenn diese nicht nach y auflösbar ist. Dies ist die nicht explizite oder unentwickelte Art der Darstellung der Funktion y von x .

b) Hierher gehört weiter die Parameterdarstellung einer funktionalen Abhängigkeit

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

In diesen beiden Gleichungen braucht t nicht eliminierbar zu sein.

§ 2. Die graphische Summierung der Geraden $y = a$.

In der Figur 4 sei eine Gerade A im Abstände $+a$ von der Abszissenachse gezeichnet. Ihre Gleichung schreibt man

$$y = a. \quad (1)$$

Bei der Abszisse x ziehen wir eine Ordinate und berechnen den Inhalt des durch die Koordinatenachsen, die Gerade A und die Ordinate begrenzten Rechtecks:

$$F = ax \quad (2)$$

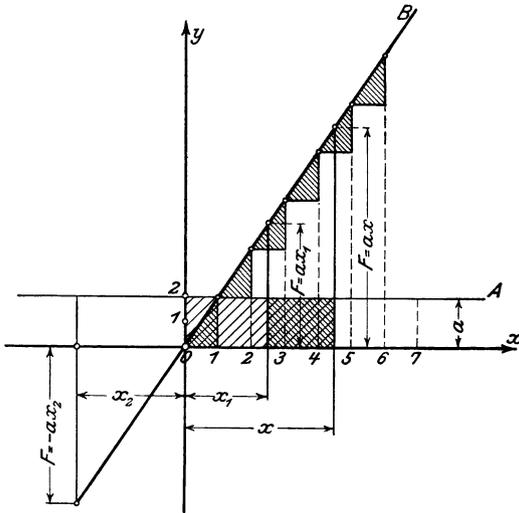


Fig. 4. Graphische Summierung der Geraden $y = ax$.

Der Rechtecksinhalt verschwindet für $x = 0$ und wächst mit x ins Unendliche. Für jeden Wert von x gibt es einen Wert des Rechtecksinhaltes. Der Rechtecksinhalt ist eine Funktion von x .

Diese Funktion soll durch eine Kurve $y = ax$ dargestellt werden in der Weise, daß die Zahlenwerte der Kurvenordinaten gleich den durch sie abgeschnittenen Rechtecksinhalten sind.

Wir bestimmen diese Kurve punktweise. Es werden für die Abszissen:

$$x = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3 \dots$$

die zugehörigen Rechtecksinhalte und damit die Ordinaten der gesuchten Kurve:

$$y = 0, \frac{a}{2}, a, 2a, 3a \dots$$

Durch Auftragung dieser Werte ergibt sich die Gerade OB , die man sich auch entstanden denken kann durch fortgesetzte Addition der Ordinatenwerte der Geraden A

$$y = a$$

auf den Ordinaten durch die x -Achsenpunkte

$$x = 1, 2, 3, 4 \dots$$

Die Gerade OB ist also das Ergebnis einer graphischen Summation. Wir nennen OB die Inhaltskurve.

Mit Hilfe der Geraden OB ergibt sich auch sofort der Inhalt des Rechtecks, welcher von zwei verschiedenen Ordinaten x , z. B. x und x_1 , begrenzt wird:

$$F_{x-x_1} = F_x - F_{x_1} = ax - ax_1 = a(x - x_1) \quad (3)$$

Als Regel gilt: Man findet den Inhalt des Rechtecks, indem man von dem oberen Ordinatenwert der Inhaltskurve den untern subtrahiert.

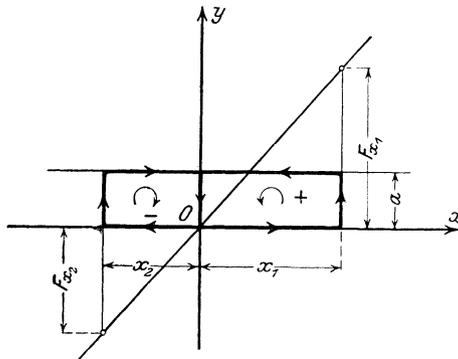


Fig. 5. Positiver und negativer Umlaufsinn.

Das bisher Entwickelte gilt auch bei Fortsetzung der Geraden A und OB in das Gebiet der negativen x . Es handelt sich darum, den Inhalt des über der Abszisse $Ox_2 = -x_2$ stehenden Rechtecks graphisch aufzutragen. Dieses Rechteck unterscheidet sich, wie wir festsetzen, von dem inhaltlich gleich großen Rechteck über $+x_2$ durch das Vorzeichen.

Dies ergibt sich daraus, daß man verschiedene Umlaufsrichtungen erhält, wenn man die Umfänge durchläuft, von O beginnend und zuerst das Abszissenachsenstück des Umfanges

zurücklegend. Der Umfang des Rechtecks über $+x_1$ wird demnach entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne durchlaufen, der Umfang des Rechtecks über $+x_2$ im Sinne des Uhrzeigers. Wir setzen fest, daß Rechtecke der ersten Art positiv, der zweiten Art negativ gerechnet werden sollen (Fig. 5).

Hiermit ergibt sich, daß die Addition der links von der Ordinatenachse liegenden Ordinaten im Sinne der negativen y -Achse zu erfolgen hat. Die obigen Formeln lassen sich dann direkt übertragen. Es wird der Inhalt des Rechtecks zwischen den Ordinaten x_1 und x_2 :

$$F_{x_1-x_2} = F_{x_1} - F_{x_2} = ax_1 - (-ax_2) = a(x_1 + x_2) \quad (4)$$

Es ergibt sich also eine positive Größe, was mit dem obigen nicht in Widerspruch steht. Denn mit der oben angeschriebenen Formel (4) haben wir den Inhalt des Rechtecks, von dem Abszissenpunkt $x = -x_2$ beginnend und nach Richtung der positiven x fortschreitend, bestimmt. Die oben festgesetzte Regel der Bestimmung des Vorzeichens mittels des Umlaufsinnnes ergibt das positive Vorzeichen (Fig. 6).

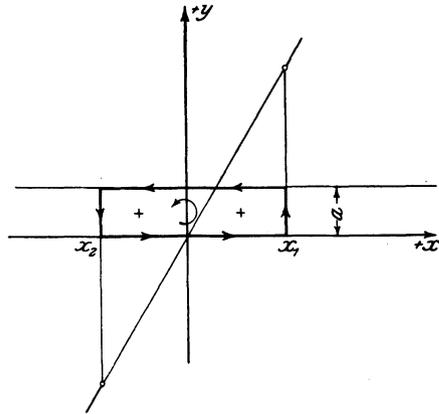


Fig. 6. Vorzeichenfestlegung des Flächeninhaltes.

Als oberer Wert gilt stets derjenige, dessen Ordinate das Rechteck nach der Richtung der positiven x hin begrenzt.

Oben wurde die graphische Addition im Anfangspunkte der Koordinaten begonnen. Man kann sie jedoch ebenso gut im Punkte

$$x = b \quad (5)$$

beginnen lassen. Die Rechteckinhalte werden hierbei

$$F_x = b + ax, \quad (6)$$

d. h. sie werden von der Ordinate durch

$$x_0 = -\frac{b}{a} \quad (7)$$

an gezählt. Der oben ausgesprochene Satz ändert sich hierbei nicht.

Denn es ist

$$F_x - F_{x_1} = (b + ax) - (b + ax_1) = a(x - x_1). \quad (8)$$

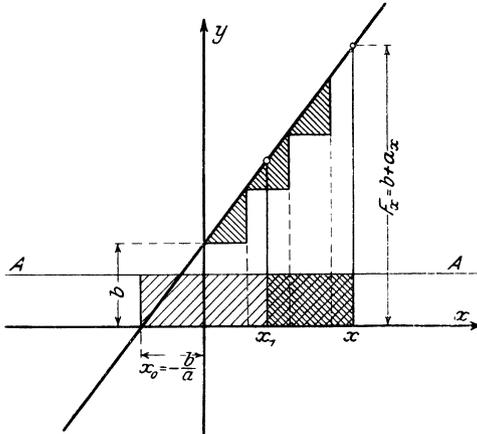


Fig. 7. Summierung mit verschiedenen Ausgangspunkten.

§ 3. Graphische Summierung der Geraden $y = a + bx$.

Als weitere Aufgabe soll der Inhalt der von der Geraden AA , der Abszissenachse und zwei Ordinaten y und y_1 begrenzten Trapeze bestimmt werden. Man bestimmt (Fig. 8) auf der Abszissenachse eine Anzahl von Punkten, die untereinander gleiche Abstände etwa $= 1$ haben. Dann trägt man die mittlere Höhe des Trapezes über $0\ 1$ auf der Ordinate $1,ab$; die Summe der mittleren Höhen der Trapeze über $0\ 1$ und $1\ 2$ auf der Ordinate 2 usw. Die Trapeze zwischen den Punkten O und C_2 sind negativ zu rechnen, die Trapeze zwischen C_3 und $-\infty$ wieder positiv, wie sich aus der oben geschaffenen Festsetzung des Umlaufsinnnes ergibt. Die mittlere Höhe des Trapezes über $0 - 1$ ist also auf der Ordinate -1 in Richtung der negativen y -Achse abzutragen; ebenso die Summe der mittleren Höhen des Trapezes über $0 - 1$ und des Dreiecks über $-1 - 2$ auf der Ordinate -2 . Der Inhalt des nun folgenden Dreiecks über $-2 - 3$ ist positiv zu rechnen und muß nach Richtung der positiven y -Achse aufgetragen werden. Auf diese Weise ergibt sich die Kurve CC , die Inhaltskurve der Geraden AA .

Auch hier gilt die Gleichung:

$$J_{x-x_1} = F_x - F_{x_1}$$

Auch hier ist es nicht erforderlich, den Anfangspunkt der Summation im Koordinaten-Nullpunkt zu wählen, jeder andere Punkt der y -Achse, z. B. $y = +b$, ist ebenso geeignet und liefert eine andere Kurve, die CC kongruent und in Richtung der positiven y -Achse um die Strecke $+b$ verschoben ist.

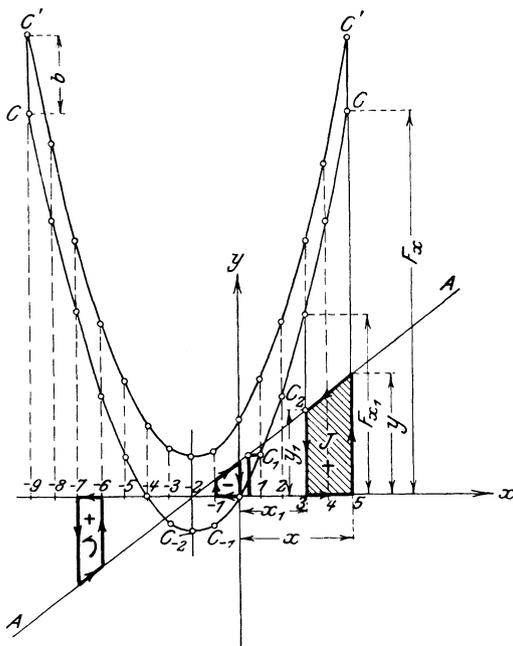


Fig. 8. Summierung der Geraden $y = a + bx$.

§ 4. Graphische Summierung einer beliebigen Kurve.

In der geschilderten Weise kann man die Bestimmung der Inhaltskurve für jeden graphisch gegebenen Linienzug vornehmen. Den gegebenen Linienzug nennen wir die Grundkurve.

Man teilt wieder (Fig. 9) die zwischen der Kurve AA und der x -Achse befindliche Fläche durch Ordinaten gleichen Abstands in Trapeze bzw. Dreiecke. Zur Erreichung größerer Genauigkeit ist hier der Ordinatenabstand eventuell kleiner zu wählen als 1.

Natürlich sind dann die auf den Ordinaten abzutragenden mittleren Trapezhöhen auf die Basis 1 zu reduzieren. Man nennt dies Verfahren auch eine Quadratur.

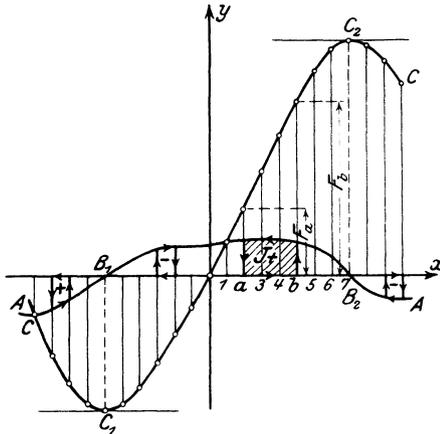


Fig. 9. Quadratur einer beliebigen graphisch gegebenen Kurve. Maximum und Minimum.

Es gibt unendlich viele Inhaltskurven, die unter sich kongruent sind und auseinander durch Verschiebung parallel zur y -Achse entstehen.

Auch hier gilt:

$$J_{b-a} = F_b - F_a \quad (1)$$

Besondere Betrachtung verdienen die Punkte B_1 und B_2 , in denen die Kurve AA die x -Achse schneidet.

Wie sich aus der Entstehung der Kurve CC ohne weiteres ergibt, haben die zugehörigen Punkte C_1 und C_2 die Eigenschaft, daß hier die Kurve

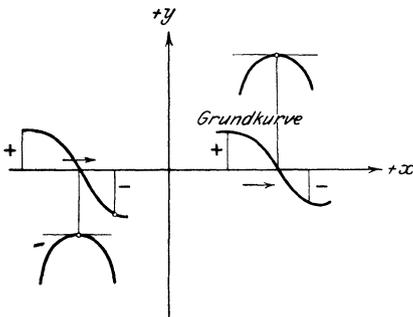


Fig. 10. Kennzeichen des Maximums.

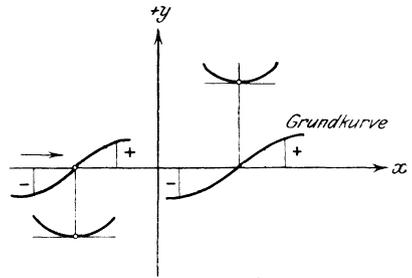


Fig. 11. Kennzeichen des Minimums.

CC umkehrt, daß sie hier eine horizontale Tangente hat. In den Punkten liegt insofern eine Verschiedenheit vor, als in C_1 die Tangente unterhalb der Kurve, in C_2 oberhalb liegt.

Man bezeichnet Punkte der ersten Art als Minima, der zweiten Art als Maxima. Ganz allgemein kennzeichnen sich

Minima und Maxima dadurch, daß die Grundkurve hier die Abszissenachse schneidet und zwar in der Weise, daß sie beim Minimum (Fig. 11) von negativen Ordinatenwerten zu positiven übergeht, wenn man in Richtung wachsender Abszissen fortschreitet, und beim Maximum (Fig. 10) umgekehrt.

§ 5. Der Begriff des Integrals.

Wir haben oben in verschiedenen Fällen den Inhalt eines Flächenstückes berechnet, welches begrenzt war durch

1. ein Stück einer gegebenen Kurve

$$y = f(x) \tag{1}$$

2. zwei Ordinaten der Abszissen a und b ($b > a$),
3. die Abszissenachse.

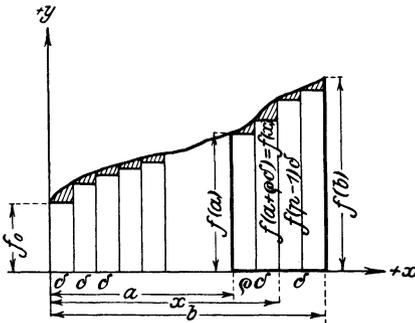


Fig. 12. Analytische Summation unendlich vieler Flächenelemente.

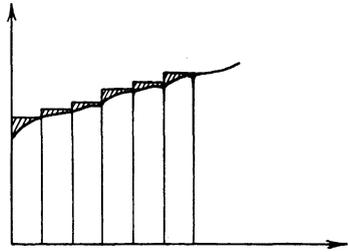


Fig. 13. Der Summationsfehler.

Wir berechneten dies Flächenstück J_{b-a} als Differenz zwischen den Ordinaten F_b und F_a der Kurve CC' , die aus AA durch den „Summationsprozeß“ gefunden war

$$J_{b-a} = F_b - F_a. \tag{2}$$

Dieser Prozeß bestand in einer Zerlegung der Flächenstücke in trapezförmige Streifen, deren mittlere Höhen graphisch addiert wurden.

Um nun den Summationsprozeß auch rechnerisch verfolgen zu können, wollen wir die Streifen nicht als Trapeze, sondern als Rechtecke betrachten. Wir verfahren so etwas ungenauer, umgehen aber die Berechnung der mittleren Trapezhöhen. Der be-

gangene Fehler besteht (s. Fig. 12) in der Vernachlässigung der schraffierten Dreiecke, wenn wir ansetzen:

$$\begin{aligned} F_b &= f(o) \delta + f(\delta) \delta + f(2\delta) \delta + \dots + f(\overline{p-1}\delta) \delta \\ &\qquad p\delta = b \\ F_a &= f(o) \delta + f(\delta) \delta + \dots + f(\overline{q-1}\delta) \delta \\ &\qquad q\delta = a \end{aligned} \quad (3)$$

Hier bedeutet δ den gewählten Ordinatenabstand; die einzelnen Glieder obiger Summen sind die Inhalte der kleinen Elementarrechtecke.

Wir würden diesen Fehler in entgegengesetzter Richtung begehen, wenn wir ansetzen:

$$F_b = f(\delta) \delta + f(2\delta) \delta + \dots + f(p\delta) \delta \quad (4)$$

und

$$F_a = f(\delta) \delta + f(2\delta) \delta + \dots + f(q\delta) \delta$$

womit offenbar F_b und F_a um die in Figur 13 schraffierten Dreiecke zu groß gefunden sind.

Wir bleiben aber bei den Formeln (3), da wir finden werden, daß der begangene Fehler überhaupt herausfällt.

Es folgt

$$\begin{aligned} J_{b-a} &= F_b - F_a = \\ &= [f(q\delta) + f[(q+1)\delta] + \dots + f\{[q+p-q-1]\delta\}] \delta \\ &= [f(a) + f(a+\delta) + \dots + f\{a+(n-1)\delta\}] \delta \end{aligned} \quad (5)$$

$$p - q = n, \quad \delta = \frac{b-a}{n}$$

oder

$$F_b - F_a = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \delta f(a + \varrho\delta) = \sum_{x=a}^{x=a+(n-1)\delta} \delta f(x) = \sum_{x=a}^{x=b} \delta f(x). \quad (6)$$

Da δ hier die Differenz von zwei benachbarten Werten von x bedeutet, kann man auch schreiben:

$$\delta = \Delta x$$

$$\text{und} \quad F_b - F_a = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \Delta x. \quad (7)$$

Diese Summationsformel geht über in die Integrationsformel

$$F_b - F_a = \int_a^b f(x) dx, \quad (8)$$

indem man den Ordinatenabstand $\delta = \Delta x$ sehr (unendlich) klein werden läßt, also das Flächenstück J_{b-a} aus sehr (unendlich) vielen sehr (unendlich) schmalen Rechtecksstreifen zusammensetzt, d. h. n sehr groß werden läßt und zur Kennzeichnung dieses Überganges das Differenzenzeichen Δ mit dem Differentialzeichen d und das Summenzeichen Σ mit dem Integralzeichen \int vertauscht.

Man nennt den Ausdruck:

$$\int_a^b f(x) dx$$

das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ genommen zwischen den Grenzen a und b , oder über das Intervall von a bis b . Das Integral ist ein Symbol für den oben ausgeführten Summationsprozeß, dessen Ausführung im speziellen Fall nicht nötig ist, weil, wie im folgenden entwickelt wird, das Symbol sich bei speziellen Funktionen $f(x)$ in eine Rechenvorschrift verwandelt. Setzt man die obere Grenze $b = x$, so erhält man

$$J_{x-a} = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx \quad (9)$$

$F(x) - F(a)$ ist aber der Inhalt des Flächenstücks zwischen den Ordinaten a und x , d. h. bei festgewähltem a und veränderlichem x eine Funktion von x . Ersetzt man in dieser Gleichung $-F(a)$ durch den Buchstaben C , der eine Konstante bedeuten soll, so läßt man es dahingestellt, bei welcher Ordinate die Summation beginnen soll und man nennt den entstandenen Ausdruck $C + F(x)$ das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$. Man verzichtet in diesem Falle überhaupt auf die Angabe der Grenzen und schreibt

$$\int f(x) dx = C + F(x).$$

Hiermit begründet das Symbol \int einen Zusammenhang zwischen den Funktionen $f(x)$ und $F(x)$, der im folgenden weiter erörtert wird.

§ 6. Berechnung eines bestimmten und eines unbestimmten Integrals.

Es soll im folgenden zunächst das bestimmte Integral der Funktion $y = f(x) = 0,75x$ berechnet werden, und zwar zwischen den Grenzen a und b .

Wir haben auf Grund der Gleichung

$$F(b) - F(a) = \{ f(a) + f(a + \delta) + \dots + f(a + \overline{n-1} \delta) \} \delta \quad (1)$$

im vorliegenden Falle zu schreiben:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \{0,75a + 0,75(a + \delta) + \dots + 0,75(a + n - 1)\delta\} \delta \\ &= n \cdot 0,75a\delta + 0,75(1 + 2 + 3 + \dots + n - 1)\delta^2 \quad (2) \\ &= 0,75 \{na\delta + (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1)\delta^2\}. \end{aligned}$$

Hier ist die Summe der arithmetischen Reihe

$$\Sigma_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 \quad (2)$$

zu berechnen. Man findet

$$\Sigma_n = \frac{n(n-1)}{2} \quad (3)$$

und mithin wird

$$F(b) - F(a) = 0,75 \left\{ na\delta + \frac{n(n-1)}{2} \delta^2 \right\}. \quad (4)$$

Da aber

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

ist, so entsteht nunmehr die Gleichung

$$F(b) - F(a) = 0,75 \left\{ a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\}. \quad (5)$$

Läßt man in dieser Formel nach Vorschrift des vorigen Paragraphen n unendlich groß, d. h. $\frac{1}{n} = \text{Null}$ werden, so geht sie in die Formel des bestimmten Integrals über:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= 0,75 \left\{ a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 \right\} \\ &= 0,75 \frac{b^2 - a^2}{2} = 0,75 \cdot \frac{b^2}{2} - 0,75 \frac{a^2}{2}. \quad (6) \end{aligned}$$

Ersetzt man hier die obere Grenze durch den Buchstaben x und die Glieder $-F(a) - \frac{0,75a^2}{2}$ durch die Konstante C , so resultiert die Formulierung des unbestimmten Integrals:

$$F(x) = \int 0,75 x dx = C + 0,75 \frac{x^2}{2}.$$

Hiermit haben wir für die spezielle Funktion $0,75x$ die Rechenvorschrift gefunden, die der Gebrauch des Symbols $\int dx$ einschließt. Auf analoge Weise kann man für jede Funktion die Rechenvorschrift ermitteln. Die angegebene Methode ist aber

bei komplizierteren Funktionen viel zu umständlich, weshalb zunächst ein scheinbarer Umweg eingeschlagen wird, der aber die Bedeutung des Integrals in viel hellerem Lichte zeigen wird.

§ 7. Der Differenzen- und der Differentialquotient.

Wir wollen jetzt die erste Formel des § 6 für das Intervall von

$$a = x \quad \text{bis} \quad b = x + \delta$$

anschreiben. Hierdurch erhalten wir folgende Formel

$$F(x + \delta) - F(x) = f(x) \cdot \delta.$$

Hier vertauschen wir jetzt das Zeichen δ mit dem Zeichen Δx und schreiben nach Division mit Δx

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Diese Formel ist der analytische Ausdruck der Umkehrung des oben auseinandergesetzten Summationsprozesses, durch den die Integralkurve $F(x)$ aus der gegebenen Kurve $f(x)$ entwickelt wurde. Mit Hilfe dieser Formel kann man die Kurve $f(x)$ finden, wenn die Kurve $F(x)$ gegeben ist (Fig. 14).

Hat man es nun mit einer nicht graphisch oder tabellarisch, sondern in allgemeinen Zahlzeichen gegebenen Funktion $F(x)$ zu tun, so steht zwar nichts im Wege, zunächst $F(x)$ graphisch oder tabellarisch auszuwerten und dann $f(x)$ mit Hilfe der Formel

$$f(x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

graphisch oder tabellarisch zu ermitteln^{2a}). Hierdurch würde es aber nicht möglich sein, $f(x)$ in allgemeinen Zahlzeichen zu erhalten, was für weitere Operationen mit dieser Funktion erforderlich ist. Um nun die Ableitung der Funktion aus $F(x)$ allgemein durchzuführen, rechnet man den Ausdruck

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

tatsächlich aus. Dies ist für jede Funktion möglich. Z. B. wählen wir

$$F(x) = ax^m$$

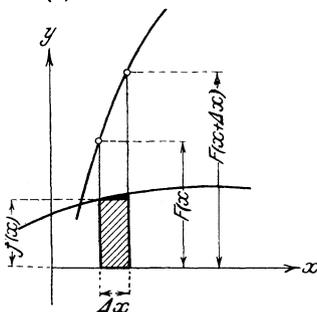


Fig. 14. Differentiation einer Kurve.

Es wird

$$\begin{aligned}
 F(x + \Delta x) &= a(x + \Delta x)^m = \\
 &= ax^m + \binom{m}{1} x^{m-1} \Delta x + \binom{m}{2} x^{m-2} \Delta x^2 + \dots \\
 \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= a \left(mx^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2} \Delta x + \dots \right) \\
 f(x) &= a \left(mx^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2} \Delta x + \dots \right).
 \end{aligned}$$

In dieser Gestalt erinnert die Formel immer noch an das graphische oder tabellarische Verfahren, welches, wie wir gesehen haben, nur eine Annäherung darstellt, die um so größer wird, je kleiner Δx (bzw. oben δ) gewählt wurde.

Bei der Rechnung mit allgemeinen Zahlzeichen kommt es nun auf genaue Rechnung an, d. h. man muß hier Δx so klein als möglich wählen. Dieser Forderung werden wir sehr einfach gerecht, indem wir $\Delta x = 0$ wählen. Hiermit geht aber die Formel über in

$$f(x) = amx^{m-1}, \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

da alle mit Δx behafteten Glieder Null werden (verschwinden).

Wir haben somit aus der Funktion $F(x) = ax^m$ die Funktion $f(x) = amx^{m-1}$ abgeleitet. Man nennt $f(x)$ geradezu die Ableitung von $F(x)$ und meint dabei stets die oben auseinandergesetzte Methode der Ableitung, mit der es möglich ist, zu jeder Funktion $F(x)$ die Ableitung $f(x)$ zu finden.

Um nun auch in der allgemeinen Formel

$$f(x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

einen Ausdruck für die Methode der Ableitung zu haben, die darin besteht, daß man die Differenz Δx gegen Null abnehmen läßt, schreibt man wie folgt:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

und liest: $f(x)$ ist gleich dem Grenzwert (limes = Grenze) des Quotienten

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

den man für unendlich klein werdendes Δx erhält. Oben haben wir bereits Δx als Differenz bezeichnet; nunmehr bemerken wir, daß auch

$$F(x + \Delta x) - F(x)$$

eine Differenz ist, so daß wir schreiben können

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x).$$

Hiermit erhalten wir aber

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

und erkennen die Funktion $f(x)$ als den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

für unendlich abnehmendes Δx . Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise wird nun stets der besondere Hinweis darauf, daß ein Grenzübergang vorliegt, fortgelassen und hierfür statt des Differenzzeichens Δ das Differentialzeichen d eingeführt. Man schreibt also kurz

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

und liest: $f(x)$ ist der Differentialquotient von $F(x)$.

§ 8. Der Zusammenhang zwischen den Formeln des unbestimmten Integrals und der Differentialquotienten.

Das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$ lautete (§ 5)

$$\int f(x) dx = F(x) + C \tag{1}$$

Hier war die unbestimmte Konstante C beliebig wählbar; sie kann also auch = Null gesetzt werden.

Dagegen lautete der Differentialquotient der Funktion $F(x)$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{2}$$

Diese beiden Formeln stehen zueinander in der Beziehung der Umkehrung. Man erkennt dies, wenn man an der Formel (2) die durch Formel (1) angedeuteten Operationen vornimmt.

Zunächst folgt durch Multiplikation mit dx

$$f(x) dx = \frac{dF(x)}{dx} \cdot dx = dF(x) \quad (3)$$

Nunmehr ergibt die Integration

$$\int f(x) dx = \int dF(x) = F(x) + C \quad (4)$$

nach Formel (1). Das Integralzeichen \int und das Differentialzeichen d heben also einander auf.

Ebenso gilt der Satz: Ist $f(x)$ der Differentialquotient einer Funktion $F(x)$, so ist $F(x) + C$ das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$.

Auf Grund dieses Satzes kann man indirekt unbestimmte Integrale

$$F(x) + C$$

ermitteln, indem man zunächst die Differentialquotienten gegebener Funktionen $F(x)$ bestimmt. Der im § 7 an der Funktion ax^m geschilderte Grenzübergang zwecks Gewinnung des Differentialquotienten ist nämlich stets leichter auszuführen als die Summation in § 6 zwecks Gewinnung des Integrals.

§ 9. Geometrische Betrachtungen über das Wesen des Differentialquotienten und Anwendungen.

1. Wir greifen zurück auf die Definition des Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

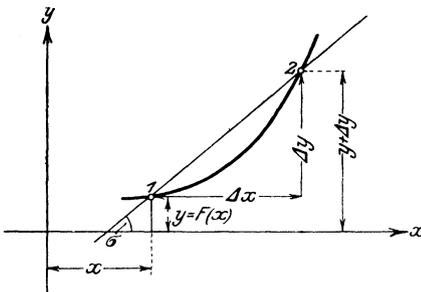


Fig. 15. Der Differenzenquotient ist gleich dem Richtungstangens der Sekante.

und betrachten nebenstehende Figur 15, in welcher die Funktion $F(x)$ als Kurve

$$y = F(x)$$

aufgezeichnet ist. Der Punkt (x/y) ist mit 1 markiert, während der Punkt $(x + \Delta x/y + \Delta y)$ mit der Ziffer 2 bezeichnet ist. Unmittelbar aus der Figur ergibt sich, daß der Diffe-

renzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gleich ist dem Tangens des Neigungswinkels der die Punkte 1 und 2 verbindenden Sekante gegen die x -Achse $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg } \sigma$. Wir drücken uns kürzer aus, wenn wir sagen: Der Differenzenquotient ist gleich dem Richtungstangens der Sekante.

Führen wir nun den Grenzübergang

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

aus, so heißt dies am Bilde der Kurve verfolgt nichts anderes, als daß der Punkt 2 mit abnehmendem Δx immer mehr zum Punkte 1 hinwandert. Die Sekante 1—2 führt hierbei eine Drehung um den Punkt 1 aus, bis sie schließlich beim Zusammenfallen der Punkte 1—2 zur Tangente wird (s. Fig. 16). In diesem Augenblick ist aber auch der Grenzübergang vollendet, der Differenzenquotient ist in den Differentialquotienten übergegangen und

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

geworden. Hieraus aber ergibt sich sofort, daß der Differentialquotient auch dem Tangens des Neigungswinkels der Tangente sein muß

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \tau.$$

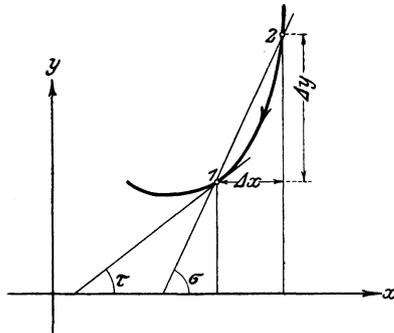


Fig. 16. Beim Übergang des Differenzenquotienten in den Differentialquotienten geht die Sekante in die Tangente über.

Wir sagen: Der Differentialquotient ist gleich dem Richtungstangens der Kurve. Hierbei liegt die Auffassung zugrunde, daß Kurve und Tangente im Berührungspunkte die gleiche Richtung haben.

Wir benutzen die soeben festgestellte geometrische Deutung des Differentialquotienten zur erneuten Behandlung des schon früher gewonnenen Satzes über die Maxima und Minima. Die in der Figur 15 gezeichnete Kurve $F(x)$ ist gleichbedeutend mit der Summationskurve CC Fig. 9, während die dort gezeichnete

Grundkurve AA nichts anderes ist als die graphische Auftragung des Differentialquotienten. Wir sehen, daß überall, wo der

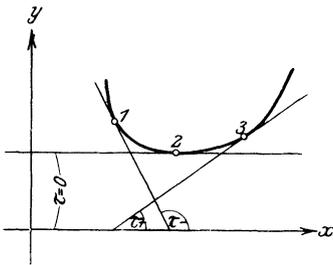


Fig. 17. Wenn der Differentialquotient mit wachsendem x von negativen Werten durch Null zu positiven Werten übergeht, liegt ein Minimum vor.

Differentialquotient = Null wird, die Kurve $y = F(x)$ eine horizontale Tangente haben muß, da bei horizontalen Tangenten der Richtungstangens = Null wird.

Ferner erkennen wir auch die Bedingung dafür, daß ein Minimum oder Maximum vorliegt. In der Fig. 17 gehen wir mit wachsender Abszisse x von dem Kurvenpunkt 1 zu 2 und 3. In 1 ist der Richtungstangens negativ, weil α größer als $\pi/2$ ist; in 3 haben wir dagegen einen positiven Richtungstangens.

Liegt dagegen ein Maximum vor, dann geht der Richtungstangens der Kurve und damit der Differentialquotient von positiven Werten durch Null zu negativen Werten über (Fig. 18).

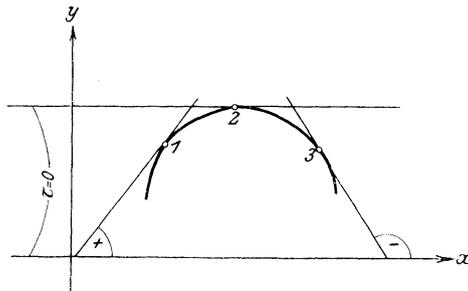


Fig. 18. Wenn der Differentialquotient mit wachsendem x von positiven zu negativen Werten übergeht, liegt ein Maximum vor.

Faßt man die beiden letzten Figuren gemeinsam ins Auge, so ergibt sich: Mit wachsendem x nimmt $F(x)$ zu (die Kurve steigt), solange der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ positiv ist.

Mit wachsendem x nimmt $F(x)$ ab (die Kurve fällt), solange der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ negativ ist.

2. Wir betrachten jetzt eine Kurve $y = F(x)$, die die Abszissenachse in den beiden Punkten A und B schneidet. Aus der Figur 19 ergibt sich ohne weiteres, daß zwischen diesen

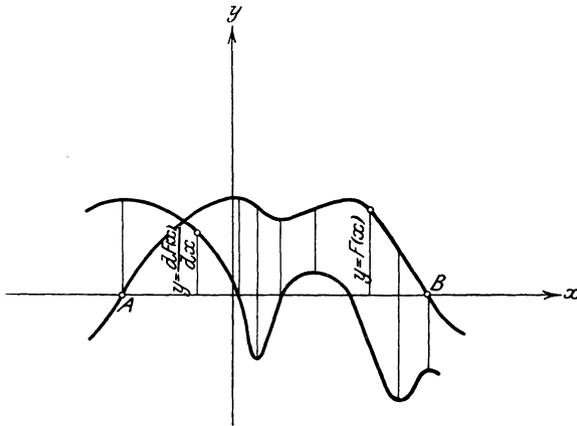


Fig. 19. Zwischen zwei Nullpunkten der Funktion $F(x)$ liegt mindestens ein Nullpunkt des Differentialquotienten $F'(x)$ (Satz v. Rolle).

beiden Punkten die Kurve mindestens einmal horizontale Richtung $\frac{dF(x)}{dx}$ haben muß. Da in diesen Punkten der Differentialquotient verschwindet, so ergibt sich der Satz: Zwischen zwei Nullpunkten einer Funktion $F(x)$ liegt mindestens ein Nullpunkt des Differentialquotienten $\frac{dF(x)}{dx}$.

Dieser Satz dient bei der Auflösung von Gleichungen dazu, deren Wurzeln zu trennen.

Ist z. B. die Gleichung dritten Grades

$$y = -x^3 + 6,6x^2 - 13,2x + 7,6 = 0$$

gegeben, so findet man nach Differentiation aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 13,2x - 13,2 = 0$$

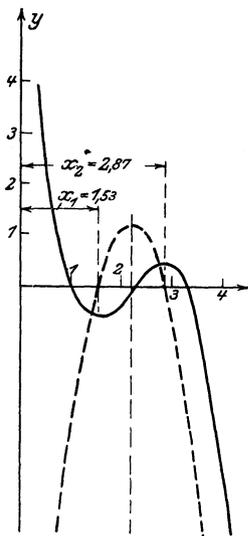


Fig. 20. Anwendung des Satzes von Rolle.

zwei Werte

$$x_1 = 1,53$$

und

$$x_2 = 2,87,$$

welche ein Minimum und ein Maximum bestimmen. Die Nullpunkte der Funktion y selbst sind

$$x = 1,0; 2,3; 3,3;$$

x_2 liegt also zwischen den Werten 2,3 und 3,3 (Fig. 20).

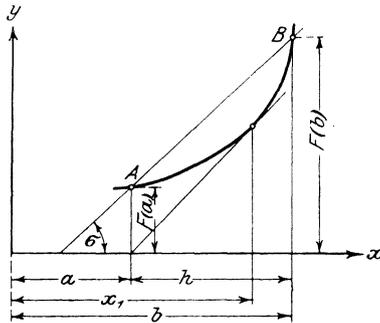


Fig. 21. Der Mittelwertsatz.

3. Wir betrachten jetzt zwei Funktionswerte $F(b)$ und $F(a)$, die wir durch die entsprechenden Kurvenpunkte A, B repräsentiert denken (Fig. 21). Zieht man die Sekante AB , so gilt

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

Nun ist aus der Figur offensichtlich, daß man an das Kurvenstück AB mindestens eine zur Sekante parallele Tangente legen kann, und zwar im Punkte $[x_1, F(x_1)]$. In diesem Punkte gilt:

$$f'(x_1) = F'(x_1) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

Setzt man hier $b - a = h$ und $x_1 = a + \vartheta h$, wo $0 < \vartheta < 1$, so folgt:

$$F(a + h) - F(a) = h F'(a + \vartheta h).$$

Diese Formel heißt der Mittelwertsatz, der für Inter- und Extrapolationen mit Vorteil benutzt wird.

§ 10. Geometrische Betrachtungen über das Wesen der Integralkurve.

Wir entschließen uns, die Kurve CC_1C_2C der Figur 9 die Integralkurve zur Kurve der Funktion $y = f(x)$ zu nennen. Abgesehen von der unbestimmten Integrationskonstanten ist dann die Gleichung der Integralkurve

$$y = F(x) = \int f(x) dx$$

(Fig. 22).

Ziehen wir an die Integralkurve CC in einem Punkte A die Tangente AT , so gilt für den Richtungswinkel:

$$\operatorname{tg} a = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Trägt man andererseits von dem zu A gehörigen Abszissenachsenpunkte P die Längeneinheit $= PT_1$ ab, so ist die Verbindungslinie T_1A_1 parallel zu TA .

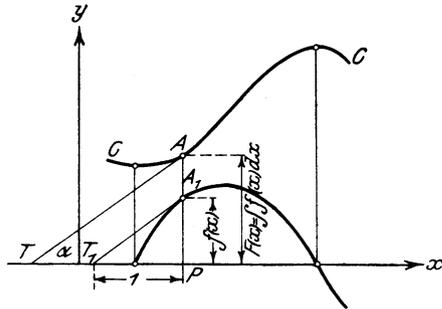


Fig. 22. Geometrische Eigenschaft der Integralkurve.

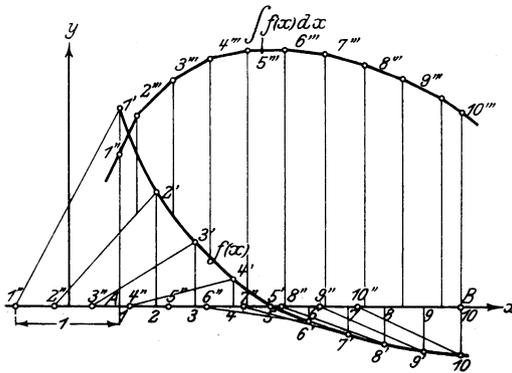


Fig. 23. Konstruktion der Integralkurve.

Aus diesen geometrischen Tatsachen ergibt sich ein einfaches Verfahren, aus der gegebenen Differentialkurve $y = f(x)$ die Integralkurve $y = F(x)$ angenähert herzustellen.

Man teilt das Integrationsintervall AB (Fig. 23) in eine Anzahl am besten gleicher Teile (hier 9). Die durch die Teil-

punkte $1 \dots 10$ gezogenen Ordinaten bestimmen auf der Kurve $y = f(x)$ die Punkte $1' \dots 10'$.

Von den Punkten $1-10$ trägt man die Längenheit auf der x -Achse wie gezeichnet ab, wodurch die Punkte $1''-10''$ erhalten werden.

Zieht man jetzt zu den Verbindungslinien $1'' 1' \dots 10'' 10'$ Parallele $1'''-10'''$, so, daß die aufeinanderfolgenden Parallelen sich auf den Mittellinien der Trapeze $12 - 23 \dots 9 10$ schneiden, so ist der Linienzug $1''' \dots 10'''$ näherungsweise die Integralkurve

$$y = F(x)$$

zu

$$y = f(x).$$

Dieser Linienzug ist nichts anderes als ein mit dem Polabstand 1 gezeichnetes Seileck, dessen Kräfteplan erhalten wird, indem man die Differentiallinie auf die y -Achse projiziert. Vgl. Fig. 24.

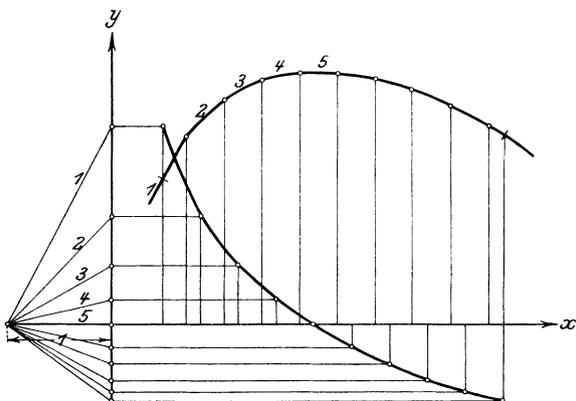


Fig. 24. Die Integralkurve als Seileck.

§ 11. Die mechanische Herstellung der Integralkurve mittels des Integraphen vom Abdank-Abakanowicz:

Den in § 10 behandelten Zusammenhang zwischen der Integralkurve und der Differentialkurve hat Abdank-Abakanowicz 1882 zur Grundlage für die Konstruktion eines Instrumentes zum Aufzeichnen der Integralkurve gemacht.

Es handelt sich darum, eine kinematische Vorrichtung zu finden, vermöge deren ein Punkt A mit einem Punkte A_1 , der eine Kurve D durchläuft, derart verknüpft ist, daß er eine Kurve J

so beschreibt, daß deren Tangente in A parallel zur Richtlinie $A_1 T_1$ ist (Fig. 25).

Das wichtigste Element dieser Vorrichtung ist die scharfkantige Rolle (Fig. 26), deren auf der Zeichenebene senkrechte Ebene stets parallel der Richtlinie $T_1 A_1$ gehalten wird. Sie beschreibt dann die Integralkurve.

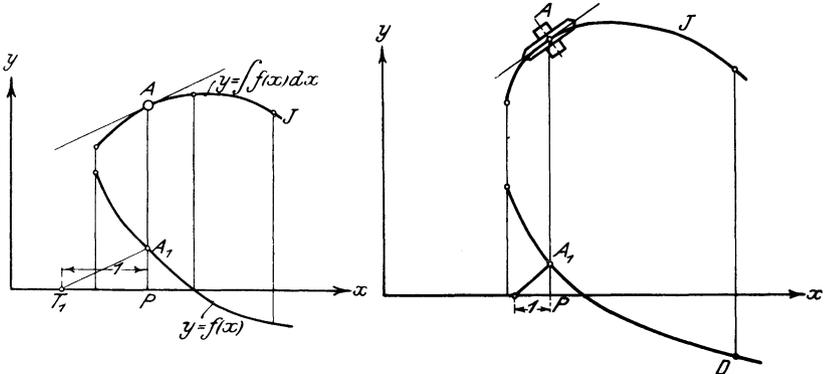


Fig. 25. Prinzip des Integraphen. Fig. 26. Die Rolle als wesentliches Element des Integraphen.

Nach vielen Zwischenkonstruktionen nach diesem Prinzip, die durch die Firma Coradi in Zürich geschaffen worden sind, liegt heute der Integraph in der nachstehend beschriebenen Form vor (Fig. 27)³).

Die Differentialkurve D wird von dem Fahrpunkt A_1 durchlaufen. Dieser ist angebracht an dem Wagen W , der auf einer Stange L des Instrumentrahmens in Richtung der Ordinatenachse verschieblich ist. Der Rahmen kann sich vermöge der Tragrollen $R R$ in Richtung der x -Achse bewegen. Jeder Punkt des Wagens W durchläuft die Differentialkurve, wenn A_1 sie durchläuft.

Um eine, hier aber nicht notwendig durch A_1 gehende, zur Zeichenebene senkrechte Achse ist das Richtlineal M drehbar angeordnet. Dieses Lineal gleitet in einer Führungshülse g , die sich um eine ebenfalls zur Zeichenebene senkrechte Achse T_1 dreht. Der horizontal gemessene Abstand der Punkte T und A_1 ist gleich der Einheit des Zeichenmaßstabes und kann an den ausgeführten Instrumenten durch Einstellung verändert werden. Dieser Abstand heißt die Basis des Apparates.

Die Richtung des Richtlineals wird nun von der auf diesem verschiebbaren Hülse W_2 (in Wirklichkeit als Wagen ausgebildet, der auf dem Richtlineal rollt) mittels des Parallelogramms pp

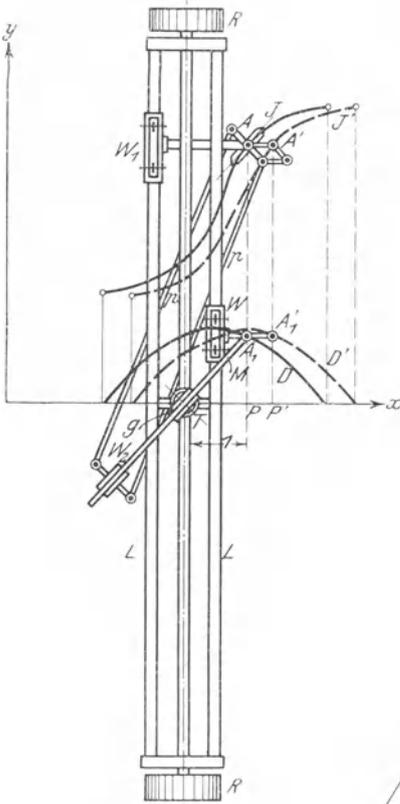


Fig. 27. Der Integrgraph von Abakanowies-Coradi.

der Integrierrolle A mitgeteilt, deren Ebene sich um eine von dem Integrierwagen W_1 getragene senkrechte Achse drehen kann.

Der Berührungspunkt von A mit der Zeichenebene beschreibt die Integralkurve J .

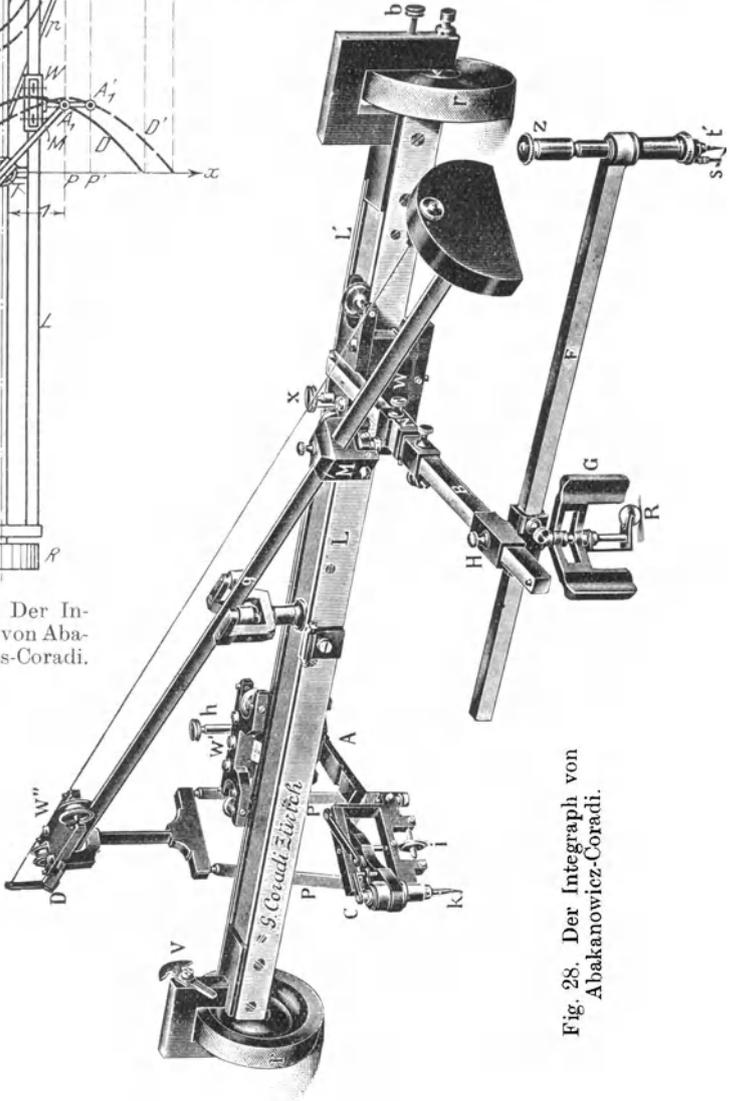


Fig. 28. Der Integrgraph von Abakanowicz-Coradi.

Bei den ausgeführten Instrumenten ist mit dem Wagen W ein Fahrstift A_1 und mit dem Integrierwagen eine Ziehfeder A' verbunden, deren Schreibrichtung der Rollenrichtung stets parallel gehalten wird.

§ 12. Instrumente zur mechanischen Herstellung spezieller bestimmter Integrale: Flächen- und Momentenplanimeter⁴.

In der Technik sind besonders diejenigen bestimmten Integrale von Wichtigkeit, welche Flächeninhalte oder Momente darstellen.

I. Der Flächeninhalt eines gegebenen Kurvenzuges $y = f(x)$ findet sich als bestimmtes Integral

$$F = \int_0^a f(x) dx$$

wenn die Figur durch ein Kurvenstück, die x -Achse und die Ordinaten durch A und C begrenzt ist (Fig. 29). Eine Befahrung der Kurve ABC mit dem Integraphen $A'B'C'$, deren Endordinate $b = C'C_1'$ gleich dem Flächeninhalt

$$F = \int_0^a f(x) dx \quad (1)$$

ist.

II. Die Elemente dy_1 von $C'C_1'$ entsprechen den Elementen $y dx$ von F . Durch Multiplikation der Elemente dy_1 mit $a - x$ erhält man die Elemente

$$(a - x) dy_1 = (a - x) y dx$$

der Fläche F_1 , die als Integral gefunden wird:

$$F_1 = \int_0^b (a - x) dy_1 = \int_0^a (a - x) y dx. \quad (2)$$

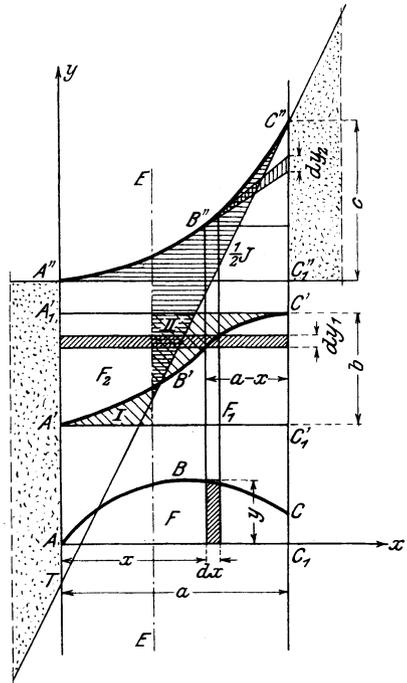


Fig. 29. Ermittlung von Flächeninhalten und statischen Momenten.

Dies letztere ist aber nichts anderes als das statische Moment der Fläche F in bezug auf die C -Achse. Überfährt man die Kurve $A'B'C'$ mit dem Integraphen, so wird $A''B''C''$ die zweite Integralkurve zu ABC und ihre Endordinate $c = C_1''C''$ liefert das statische Moment von F in bezug auf die C -Achse.

In analoger Weise wird:

$$F_2 = \int_0^b x dy_1 = \int_0^a xy dx \quad (3)$$

das statische Moment von F in bezug auf die AY -Achse. Soll das statische Moment in bezug auf eine beliebige zwischen AY und C_1C_1'' gelegene Achse EE bestimmt werden, so hat man nur die Differenz der beiden schraffierten Flächen I und II zu bilden.

III. Für das Folgende ist zunächst eine Zwischenbetrachtung erforderlich.

In der Fig. 30 sei $A_1B_1C_1$ die Integralkurve zu ABC . Dann ist, wie wir wissen, die Endordinate C_1C_1' gleich dem Flächeninhalt von $ABCD$. Jeder Elementarstreifen $y dx$ von $ABCD$ entspricht einem Streckenelement dy_1 von C_1C_1' , welches gefunden wird, indem man dx zu-

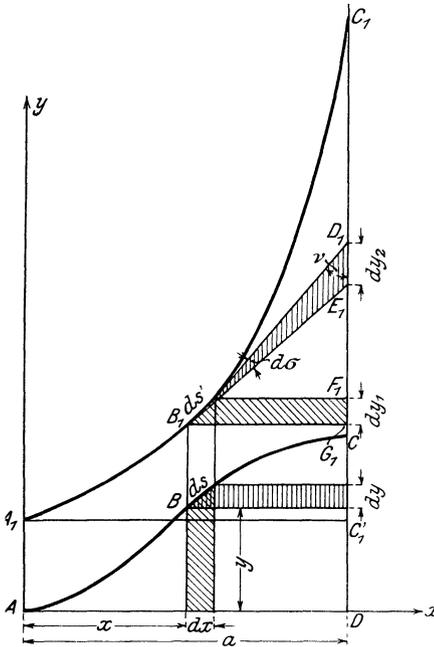


Fig. 30. Ermittlung der Trägheitsmomente.

nächst rechtwinklig auf die Integralkurve und von da auf die C -Achse projiziert.

Nun kann man aber die Fläche $ABCD$, statt aus vertikalen Elementen $y dx$, auch aus horizontalen Elementen $(a - x) dy$ zusammengesetzt denken. Welches sind nun die Streckenelemente von C_1C_1' , welche den Streifen $(a - x) dy$ entsprechen?

Wir werden beweisen, daß man die Streckenelemente dy_2 erhält durch rechtwinklige Projektion von dy auf die Integralkurve (siehe Figur) und Herstellung der beiden Tangenten in den Endpunkten des so erhaltenen Integralkurvenelementes ds .

Die Tangenten schneiden die C -Achse in D_1 und E_1 ; die Strecke D_1E_1 ist das gesuchte Element dy_2 .

Zum Beweise betrachten wir das Dreieck $B_1D_1E_1$, in welchem wir zunächst die beiden Winkel $d\sigma$ und ν bestimmen. Aus der geometrischen Eigenschaft der Integralkurve (§ 10) ergibt sich:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \operatorname{arccot} y - \operatorname{arccot}(y + dy) \\ &= -\frac{d \operatorname{arccot} y}{dy} dy = \frac{1}{1+y^2} dy \end{aligned} \quad (4)$$

und $\nu = \operatorname{arccot} y. \quad (5)$

Ferner findet man die Seite B_1E_1 des Dreiecks $B_1D_1E_1$:

$$B_1E_1 = \frac{a-x}{\sin \operatorname{arccot} y}.$$

Für das Dreieck gilt jetzt die Proportion:

$$B_1E_1 : dy_2 = \sin \nu : \sin d\sigma$$

oder nach dy_2 aufgelöst:

$$dy_2 = \frac{a-x}{\sin^2 \operatorname{arccot} y} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy. \quad (6)$$

Nach einer bekannten Formel⁵⁾ ist aber

$$\operatorname{arccot} y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}. \quad (7)$$

Mithin

$$\sin^2 \operatorname{arccot} y = \frac{1}{1+y^2}$$

und

$$dy_2 = (a-x) dy. \quad (8)$$

Hiermit ist bewiesen, daß das nach der obigen Vorschrift gefundene dy_2 gleich dem horizontalen Flächenelement $(a-x) dy$ ist.

IV. Kehren wir jetzt zur Figur 29 zurück, so finden wir, daß sich die Fläche $A''B''C''C_1''$ der zweiten Integralkurve aus dreieckigen Elementen zusammensetzt, deren einzelnes den Wert hat:

$$\frac{1}{2}(a-x) dy_2 = \frac{1}{2}(a-x)^2 dy_1 = \frac{1}{2}(a-x)^2 y dx. \quad (9)$$

Die gesamte Fläche wird demnach

$$\frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 y dx.$$

Dies ist aber nichts anderes als das halbe Trägheitsmoment $\frac{1}{2} J$ der Fläche $ABCC_1$ in bezug auf die C -Achse.

Das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse AY ergibt sich analog als doppelter Inhalt der Fläche $A''C''T$, wo $C''T$ Tangente an die Kurve $A''B''C''$ in C'' ist. Für eine beliebige Achse EE innerhalb a wird das Trägheitsmoment gleich dem doppelten Inhalt der horizontal schraffierten Fläche; für Achsen außerhalb a kommen die punktierten Stücke zu $A''B''C''C_1''$ bzw. zu $A''B''C''T$ hinzu.

V. Neben dem Integraphen gibt es noch einfachere Instrumente, welche gestatten, die Fläche, das statische Moment und das Trägheitsmoment einer gegebenen Figur zu bestimmen: die Planimeter.

Die Flächenplanimeter beruhen auf den Eigenschaften der gleitenden Rolle.

Wird eine Rolle R (Fig. 31) mit glattem Rand auf einer Kurve C längs des kleinen Elementes ds , die Unterlage in P berührend,

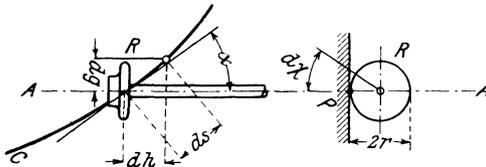


Fig. 31. Eigenschaft der gleitenden Rolle.

so geführt, daß ihre Achse AA mit C den Winkel α bildet, so kann man diese Bewegung offenbar auch dadurch hervorbringen, daß man zunächst die Rolle in Richtung ihrer Achse um das Element dh und dann senkrecht zur Achse um das Element dg bewegt. Offenbar hat nur die letztere Bewegung eine Drehung der Rolle zur Folge, und zwar dreht sich die Rolle um den Winkel $d\chi$. Es ist (siehe Figur)

$$rd\chi = ds \sin \alpha. \quad (10)$$

Ein Planimeter, welches die gleitende Rolle benutzt, besteht aus einer Stange AB von der Länge l , die in der Entfernung a auf der Verlängerung über B hinaus die Rolle R trägt (Fig. 32).

Dieses Instrument wird so benutzt, daß man den als Fahrstift ausgebildeten Punkt A die zu planimetrierende Kurve C durchlaufen läßt, während B gezwungen ist, auf einer gegebenen, zunächst beliebigen „Leit“-Kurve C' zu bleiben. Man sieht an der Figur, daß AB eine Fläche beschreibt, die doppelt überdeckt

ist, soweit nicht das von C umschlossene Areal in Frage kommt. Der doppelt überdeckte Teil ist aber gleich Null zu setzen, weil jedes Element desselben positiv und negativ beschrieben wird. Die von AB beschriebene Fläche ist also nichts anderes als der Inhalt der Kurve C .

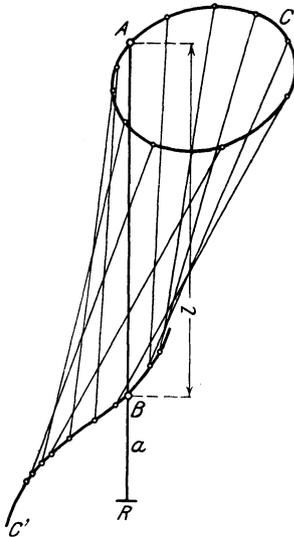


Fig. 32. Planimeter mit gleitender Rolle.

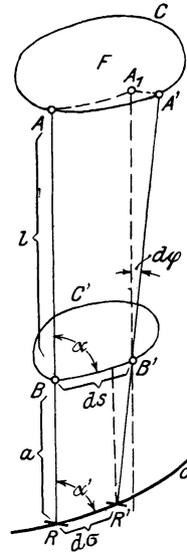


Fig. 33. Ableitung der Planimetergrundformel.

Wir betrachten nun eine Elementarverschiebung von ABR nach $A'B'R'$ und berechnen das hierbei von AB beschriebene Flächenelement $AA'B'B = dF$. Es ist (Fig. 33)

$$dF = l ds \sin \alpha + \frac{l^2}{2} d\varphi \quad (11)$$

d. h. gleich dem Parallelogramm AA_1B_1B + Dreieck $A_1A'B_1$. Inzwischen hat die Rolle R das Wegelement $d\sigma$ beschrieben, welches mit ds durch die Beziehung zusammenhängt:

$$ds \sin \alpha = d\sigma \sin \alpha' + a d\varphi. \quad (12)$$

Dies führt man in die Gleichung für dF ein und erhält:

$$dF = l d\sigma \sin \alpha' + \left(a l + \frac{l^2}{2} \right) d\varphi. \quad (13)$$

Hier ist aber $d\sigma \sin \alpha'$ nichts anderes als die zugehörige Bewegung eines Randpunktes der Rolle $= r d\chi$, so daß sich ergibt

$$dF = lr d\chi + \left(al + \frac{l^2}{2} \right) d\varphi. \quad (14)$$

Beginnt man nun die Umfahrung mit den Anfangswerten χ_0 und φ_0 , so wird man im allgemeinen nach Beendigung der Umfahrung der Figur an der Rolle den Winkel χ_1 ablesen, während die Anfangslage φ_0 der Stange AB wieder dieselbe ist. Der Flächeninhalt ist dann

$$F = lr(\chi_1 - \chi_0). \quad (15)$$

Umschließt jedoch die umfahrene Kurve C die Leitkurve C' ganz (Fig. 34), so wird $\varphi_1 + \varphi_0 + 2\pi$ und

$$F + lr(\chi_1 - \chi_0) + \left(al + \frac{l^2}{2} \right) 2\pi, \quad (16)$$

welche Größe gleich dem zwischen C und C' enthaltenen Areal ist. Soll der Inhalt F_C von C selbst gefunden werden, so ist noch $F_{C'}$ hinzuzuzählen:

$$F_C = lr(\chi_1 - \chi_0) + \left(al + \frac{l^2}{2} \right) 2\pi + F_{C'}. \quad (17)$$

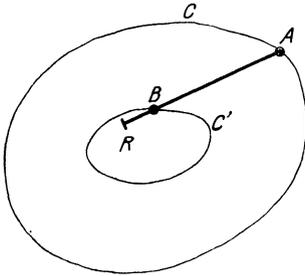


Fig. 34. Ganz umschlossene Leitkurve.

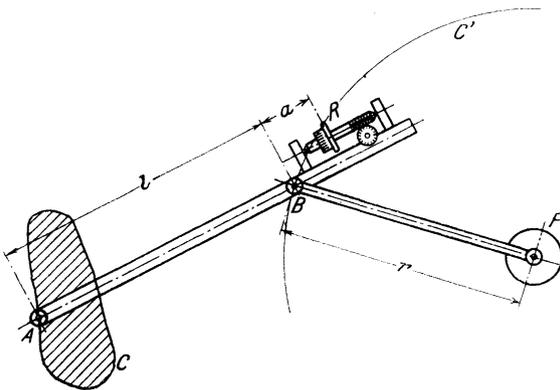


Fig. 35. Polarplanimeter.

Die am meisten verwendete ausgeführte Planimeterform ist das Polarplanimeter (Fig. 35), bei welchem die Leit-Kurve C' ein Kreis ist. Der Kreis wird hergestellt, indem man B durch

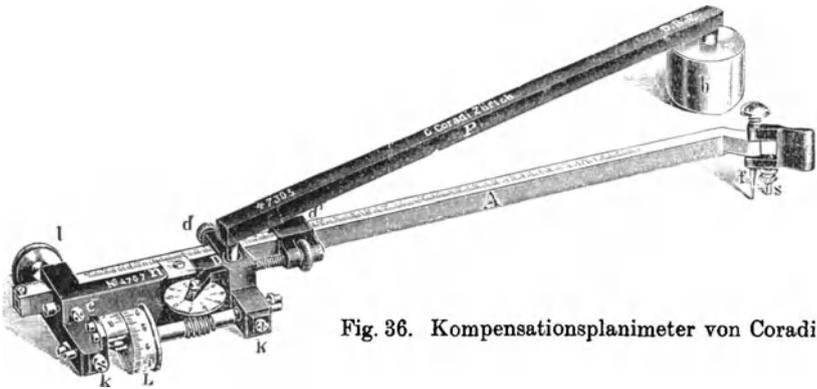


Fig. 36. Kompensationsplanimeter von Coradi.

den Polararm PB an den auf der Zeichenebene festliegenden Pol P heftet. Die Fig. 36 gibt das Kompensationsplanimeter der Firma Coradi-Zürich wieder.

VI. Planimeter, die als Leitkurve die gerade Linie benutzen, heißen Linearplanimeter.

Die geradlinige Bewegung von B wird hergestellt, indem B auf dem Gestell eines Wagens angebracht wird, der mit

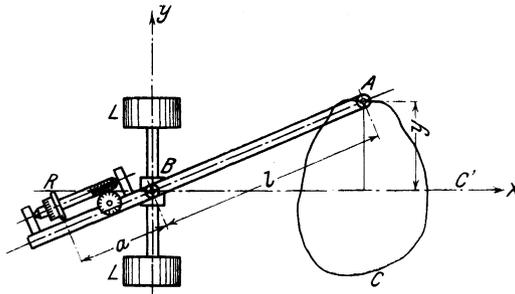


Fig. 37. Linearplanimeter.

breiten geriffelten Rädern LL parallel mit sich selbst und geradlinig auf der Zeichenebene rollt (Fig. 37).

Vielfach verzichtet man darauf, die Rolle R die Zeichenebene berühren zu lassen. In diesem Falle ordnet man be-

sondere Flächen an, in Berührung mit denen die Zählrolle ihre Bewegung ausführt.

Typisch für diese Art von Instrumenten ist das Kugelrollplanimeter von Coradi (Fig. 38).

Die Grundform Fig. 37 ist beibehalten. Das Wagengestell BB rollt mittels der geriffelten Räder $R'R'$ auf der Zeichen-

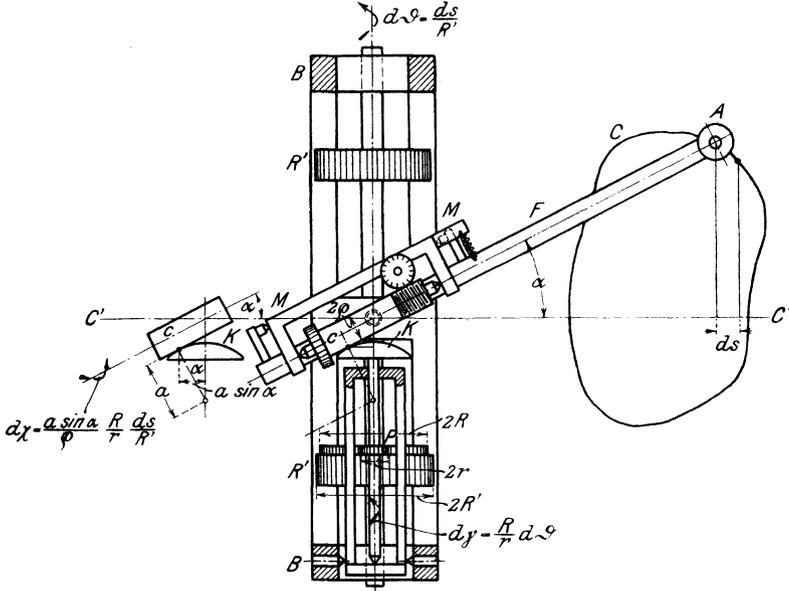


Fig. 38. Kugelrollplanimeter von Coradi.

ebene. Durchläuft der Fahrstift das Kurvenelement ds' , so rollt der Wagen um das Maß ds vorwärts. Dabei drehen sich die Räder (die durch eine in Spitzen gelagerte Achse verbunden sind) um den Winkel $d\vartheta = \frac{ds}{R}$.

Auf der Achse sitzt ein gezahntes Rad B , welches seine Drehung $d\vartheta$ durch den Trieb P auf das Kugelsegment K vom Radius a überträgt.

Dieses durchläuft infolgedessen den Winkel $d\gamma = \frac{R}{r} d\vartheta$. Mit

K in Kontakt steht der Zylinder c des Meßapparates, auf den sich die Drehung von K überträgt nach Maßgabe des Winkels α , den der Fahrarm mit der Fahrtrichtung des Wagens bildet.

Bezeichnet $d\chi$ den Drehwinkel des Zylinders c , so hat man nach der Fig. 38:

$$d\chi = \frac{a \sin \alpha R}{\varrho r} d\vartheta \quad (18)$$

und nach Einführung von $d\vartheta = \frac{ds}{R'}$

$$d\chi = \sin \alpha ds \frac{R}{R' \varrho r}.$$

Aus dieser Gleichung leitet man ab

$$\sin \alpha ds = \frac{R' \varrho r}{R a} d\chi, \quad (19)$$

welchen Ausdruck man in die allgemeine Planimeterformel (11) einführt:

$$dF = \frac{R' \varrho r l}{R a} d\chi + \frac{l^2}{2} d\varphi, \quad (20)$$

woraus sich nach Integration und bei Rückkehr zu der anfänglichen Lage des Fahrarmes ergibt

$$F = \frac{R' \varrho r l}{R a} (\chi_1 - \chi_0). \quad (21)$$

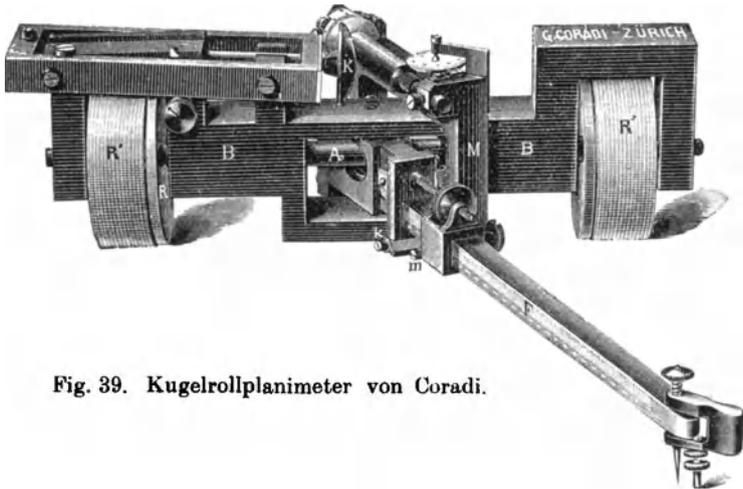


Fig. 39. Kugelrollplanimeter von Coradi.

Hier ist $\frac{R' \varrho r l}{R a}$ eine Instrument-Konstante und $\chi_1 - \chi_0$ die Ableseung des Meßrädchens. Fig. 39 gibt eine Ansicht des ausgeführten Instrumentes.

VII. Zur Ermittlung von statischen und Trägheitsmomenten geht man von folgender Betrachtung aus.

Es gilt (Fig. 40) für das statische Moment in bezug auf die x -Achse:

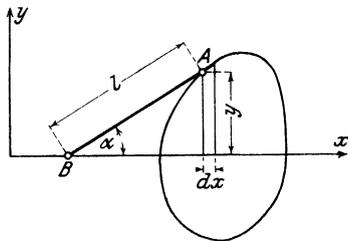


Fig. 40. Grundlage der Integratoren.

$$M_x = \frac{1}{2} \int y^2 dx = \frac{1}{2} \int l^2 \sin^2 \alpha dx \quad (22)$$

und für das Trägheitsmoment⁶⁾

$$J_x = \frac{1}{3} \int y^3 dx = \frac{1}{3} \int l^3 \sin^3 \alpha dx. \quad (23)$$

Setzt man in (22)

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right). \quad (24)$$

so wird

$$M_x = \frac{l^2}{4} \int \left\{ dx - \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) dx \right\}. \quad (25)$$

Betrachtet man hier l als Fahrarm eines Planimeters mit gleitender Rolle, so wird $\int dx$ nach Umfahrung der Figur (Rückkehr zur Anfangslage des Armes) = Null, während in dem übrigbleibenden Ausdruck

$$M_x = - \frac{l^2}{4} \int \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) dx \quad (26)$$

das Integral die Winkelbewegung einer Rolle darstellt, deren Drehachse dauernd um das Maß $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ zur x -Achse geneigt ist.

Bringt man mit dem Fahrarm $BA = l$ eine gleitende Rolle, etwa durch ein Zahnräderpaar der Radien r und $\frac{r}{2}$ nach der Fig. 42 in Verbindung, so registriert die Rolle das Integral

$$\int \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2 \alpha \right) dx = \chi_1'' - \chi_0'', \quad (27)$$

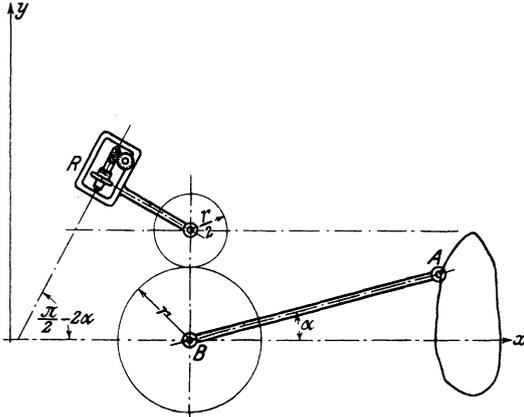


Fig. 41. Momenten-Integrator.

wo $\chi_1'' - \chi_0''$ die Meßbrädchen-Ablesung ist, und liefert somit nach Formel (26) abgesehen vom Vorzeichen das statische Moment.

Das Trägheitsmoment

$$J_x = \frac{l^3}{3} \int \sin^3 \alpha dx \quad (28)$$

entwickeln wir in:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{l^3}{3} \int \left(\frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{\sin 3 \alpha}{4} \right) dx \\ &= \frac{l^3}{12} \left(3 \int \sin \alpha dx - \int \sin 3 \alpha dx \right). \end{aligned}$$

Hier ist

$$\int \sin \alpha dx = \chi_1' - \chi_0'$$

die Ablesung einer Meßrolle, deren Drehachse mit dem Fahrarm parallel bleibt (Fig. 42) (daher dem Flächeninhalt proportional), während

$$\int \sin 3 \alpha dx = \chi_1''' - \chi_0'''$$

die Ablesung einer Meßrolle ist, deren Achse ständig den Winkel 3α mit dem Fahrarm einschließt. Einen derartigen Zusammenhang zwischen Fahrarm und Meßrollenbewegung kann man durch ein Zahnräderpaar $Z_1 Z_3$ der Radien r und $\frac{1}{3}r$ nach Fig. 42 herstellen. Natürlich muß ebenso wie bei Fig. 41 dafür gesorgt werden, daß die Achsen der Zahnräder, die senkrecht zur Zeichenebene stehen, während der Integration in einer zur x -Achse senkrechten Ebene verbleiben.

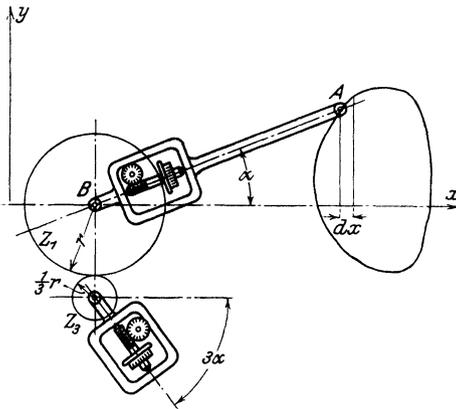


Fig. 42. Flächen- und Momenten-Integrator.

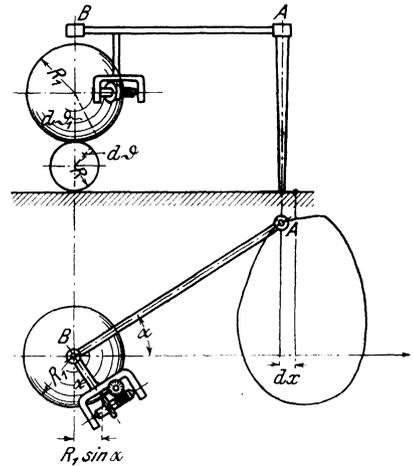


Fig. 43. Kugelroll-Integrator.

Statt nun die Meßrollen auf dem Papier gleiten zu lassen, hat Hele-Shaw sie auf einer Kugel K gleitend angeordnet (Fig. 43).

Die Fortschreitung dx des Fahrstiftes wird durch die Rolle R auf die Kugel K übertragen und liefert eine Drehung dieser:

$$d\vartheta_1 = \frac{dx}{R_1}$$

und damit eine Meßrollendrehung

$$\begin{aligned} d\chi &= \frac{dx}{R_1} R_1 \sin \alpha \\ &= dx \sin \alpha \end{aligned}$$

bzw. nach Integration:

$$\chi_1 - \chi_0 = \int dx \sin \alpha.$$

Für die Integrale

$$\int \sin 3 \alpha dx \quad \text{und} \quad \int \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2 \alpha \right) dx$$

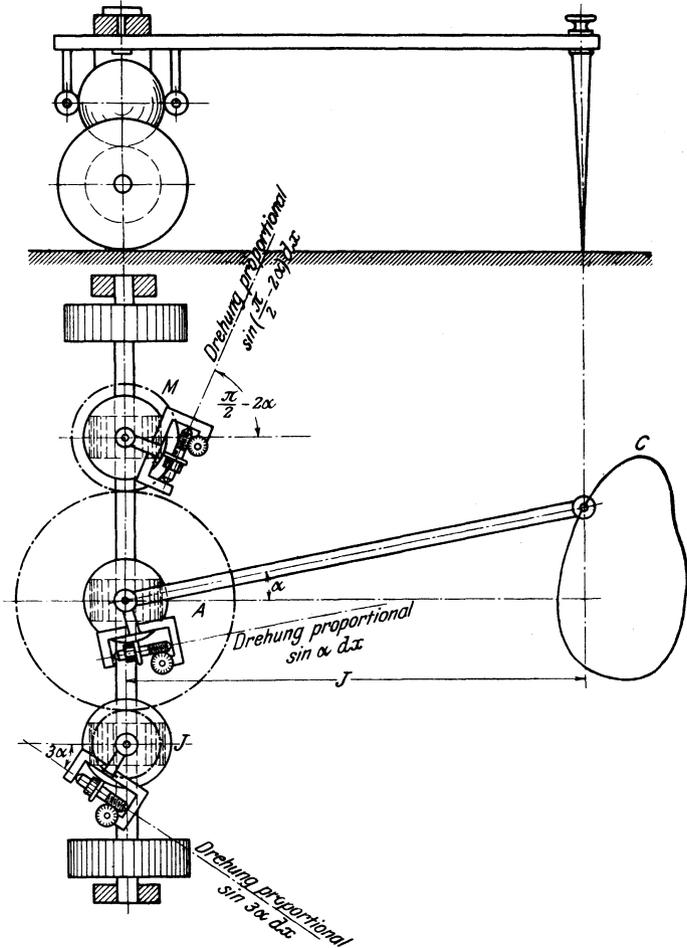


Fig. 44. Integrator für Flächen, statische und Trägheitsmomente nach Hele-Shaw.

läßt sich das Prinzip der Rollkugel in der gleichen Weise anwenden.

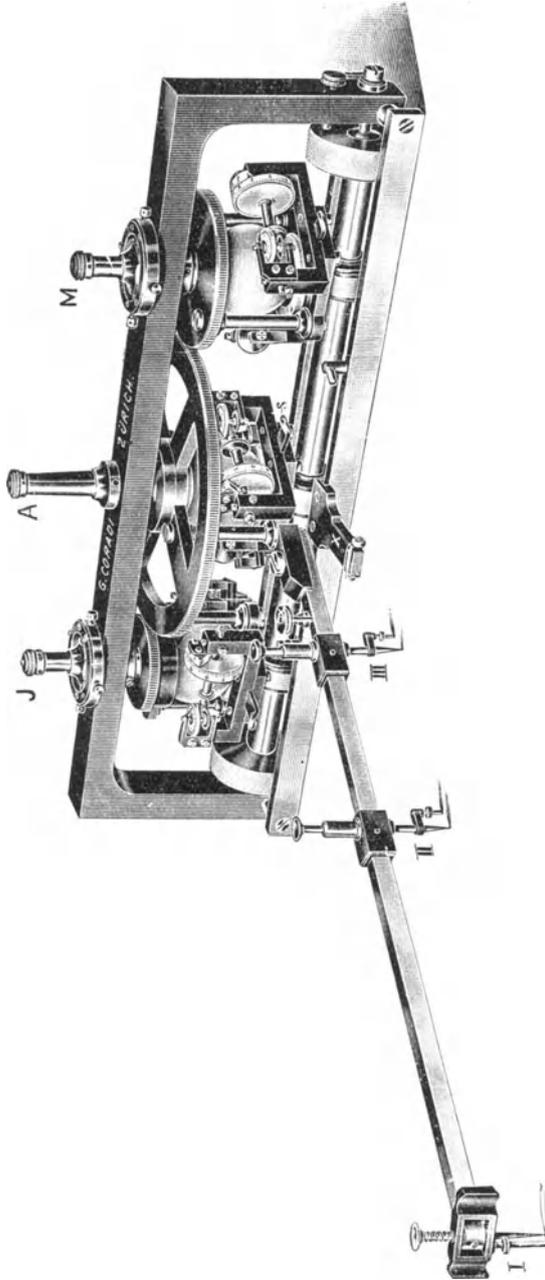


Fig. 45. Ausführung des Hele-Shaw Integrators durch Coradi.

Zur Gewinnung der Integrale

$$\int \sin \alpha dx$$

$$\int \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2 \alpha \right) dx$$

$$\int \sin 3 \alpha dx$$

würden also 3 Planimeter erforderlich sein, die man in einem einzigen Instrument vereinigen kann.

Ein solches Instrument, welches aus einer einzigen Umfahrung den Flächeninhalt, das statische Moment und das Trägheitsmoment liefert, kann sowohl mit Rollen, die auf der Zeichenebene direkt gleiten, wie auch nach dem Rollkugelprinzip ausgeführt sein.

Fig. 44 zeigt Grund und Aufriß des Integrators nach H. S. Hele-Shaw. Das Instrument wird nach Fig. 45 von Coradi, Zürich, ausgeführt.

§ 13. Allgemeine Regeln für die Durchführung von Differentiationen.

1. Wie gestaltet sich der Grenzübergang:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

wenn $F(x)$ einer Konstanten C gleich ist? Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0. \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Differentialquotient einer Konstanten ist Null.

2. $F(x)$ sei eine Summe von zwei Funktionen:

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Bildung des Differenzenquotienten;

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) + \psi(x + \Delta x) - \varphi(x) - \psi(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Übergang zum Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d[\varphi(x) + \psi(x)]}{dx} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Differentialquotient einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen.

3. $F(x)$ sei ein Produkt von zwei Funktionen:

$$y = F(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

Bildung des Differenzen-Quotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) \cdot \psi(x + \Delta x) - \varphi(x) \cdot \psi(x)}{\Delta x}$$

Wir subtrahieren und addieren im Zähler

$$\varphi(x) \psi(x + \Delta x)$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{[\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)] \psi(x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &\quad + \frac{\varphi(x) [\psi(x + \Delta x) - \psi(x)]}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Führen wir jetzt den Grenzübergang $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} &= \frac{d\varphi(x)}{dx} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \psi(x + \Delta x) &= \psi(x) \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} &= \frac{d\psi(x)}{dx}; \end{aligned}$$

und als Gesamtergebnis:

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x) \frac{d\psi(x)}{dx},$$

d. h. der Differentialquotient des Produktes zweier Funktionen wird erhalten, indem man jede Funktion mit dem Differentialquotienten der anderen multipliziert und die erhaltenen beiden Produkte addiert.

4. $F(x)$ sei der Quotient zweier Funktionen

$$y = F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Nach Bildung des Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{\varphi(x + \Delta x)}{\psi(x + \Delta x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}{\Delta x}.$$

und kreuzweiser Multiplikation findet sich:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{\varphi(x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \psi(x) - \frac{\varphi(x)}{\Delta x} \cdot \psi(x + \Delta x)}{\psi(x + \Delta x) \cdot \psi(x)}.$$

Nach Subtraktion und Addition von:

$$\frac{\varphi(x)\psi(x)}{\Delta x}$$

im Zähler kommt:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \psi(x) - \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \varphi(x)}{\psi(x + \Delta x) \psi(x)}.$$

Beim Grenzübergang erhält man dann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \psi(x) - \frac{d\psi(x)}{dx} \varphi(x)}{\psi^2(x)}.$$

In Worten: Der Differentialquotient des Quotienten zweier Funktionen wird erhalten durch die Operation: Nenner mal Diff.-Qu. des Zählers minus Zähler mal Diff.-Qu. des Nenners, das Ganze dividiert durch das Quadrat des Nenners.

5. $F(x)$ sei die Funktion einer Funktion $\varphi(x)$

$$y = F[\varphi(x)].$$

Nach Bildung des Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F[\varphi(x + \Delta x)] - F[\varphi(x)]}{\Delta x}$$

Folgt Multiplikation mit:

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}$$

und ergibt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F[\varphi(x + \Delta x)] - F[\varphi(x)]}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Setzen wir jetzt im ersten Quotienten:

$$\varphi(x) = z,$$

so wird:

$$\varphi(x + \Delta x) = z + \Delta z; \quad \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta z$$

$$F[\varphi(x + \Delta x)] = F[z + \Delta z]; \quad F[\varphi(x)] = F[z]$$

und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F[z + \Delta z] - F(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

und nach Vornahme des Grenzüberganges ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Auf eine Einkleidung der Regel in Worte verzichten wir, da die Ausdrucksweise zu umständlich würde und geben lieber einige Beispiele.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad y &= F[\varphi(x)] = [a + bx^m]^3 \\ y &= F(z) = z^3; \quad z = \varphi(x) = a + bx^m \end{aligned}$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = 3z^2 = 3[a + bx^m]^2$$

$$\frac{dz}{dx} = mbx^{m-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 3mb[a + bx^m]^2 \cdot x^{m-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad y &= F[\varphi(x)] = \sqrt{a + \beta x} \\ y &= F(z) = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}; \quad z = \varphi(x) = a + \beta x \end{aligned}$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a + \beta x}}; \quad \frac{dz}{dx} = \beta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{\beta}{2\sqrt{a + \beta x}}.$$

6. Differentiation der inversen Funktion. Aus $y = F(x)$ folge durch Auflösung

$$x = \Phi(y).$$

Die Differenzenquotienten sind:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

und

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta \Phi(y)}{\Delta y} = \frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y}.$$

Durch Multiplikation der beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y}$$

und nach Übergang zur Grenze

$$1 = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{d\Phi(y)}{dy},$$

oder

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{d\Phi(y)}{dy}}$$

In Worten: Das Produkt der Differentialquotienten zweier zueinander inversen Funktionen ist = 1.

§ 14. Bestimmung des Differentialquotienten der einfachen Funktionen.

1. Differentiation der Sinusfunktion $y = \sin x$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d \sin x}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Hier wird mit abnehmendem Δx $\lim \cos \Delta x = 1$, mithin ist $\lim (\sin x \cos \Delta x - \sin x) = 0$. Es bleibt übrig:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Hier wird jedoch mit abnehmendem Δx der Quotient $\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$, so daß sich das endgültige Resultat ergibt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \sin x}{dx} = + \cos x.$$

2. In analoger Weise führt man die Differentiation der Kosinusfunktion

$$y = \cos x \quad (2)$$

durch. Es resultiert:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

3. Differentiation der Tangensfunktion

$$y = \operatorname{tg} x. \quad (3)$$

Wir erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4. Die Arcussinusfunktion

$$y = \arcsin x \quad (4)$$

hat zum Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}.$$

Nun folgt aus (4):

$$x = \sin y$$

$$\sin(y + \Delta y) = x + \Delta x$$

$$\Delta x = \sin(y + \Delta y) - \sin y;$$

also ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta y}{\sin(y + \Delta y) - \sin y} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin(y + \Delta y) - \sin y}{\Delta y}}. \end{aligned}$$

Die Ausführung des Grenzüberganges liefert

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

und wegen

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5. Die Arcuscosinusfunktion

$$y = \arccos x. \quad (5)$$

Da

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

ist, haben wir

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{d \arcsin x}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. Die Arcustangensfunktion

$$y = \operatorname{arctg} x. \quad (6)$$

Wir bilden die inverse Funktion

$$x = \operatorname{tg} y$$

und differenzieren: nach (3)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\cos^2 y} \\ \cos^2 y &= \frac{\sin^2 y}{\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \\ \frac{dx}{dy} &= 1 + x^2; \end{aligned}$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

7. Die logarithmische Funktion

$$y = \lg x. \quad (7)$$

Nach Bildung der Differenzen-Quotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lg(x + \Delta x) - \lg x}{\Delta x}$$

und folgender Umformung

$$\frac{\lg \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{\lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x}$$

kann man mit $\frac{\Delta x}{x}$ multiplizieren, wenn man zugleich den Klammerausdruck $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ zur $\frac{x}{\Delta x}$ -ten Potenz erhebt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{x} \frac{\lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{x} \lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}. \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang haben wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \lg x}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

ist aber $= e$, der Basis der natürlichen Logarithmen⁷⁾, und wir erhalten:

$$\frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{x} \lg e.$$

Verstehen wir auch hier unter $\lg x$ den natürlichen Logarithmus, so wird $\lg e = 1$ und

$$\frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

8. Die Exponentialfunktion

lautet nach Inversion: $y = e^x$ (8)

$$x = \lg y.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^x}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^x}{dx} = e^x,$$

d. h. die Differentiation der Exponentialfunktion liefert wieder die Exponentialfunktion.

**§ 15. Zusammenstellung der Grundformeln
der Differentialrechnung.**

1. Differentiation der Konstanten:

$$\frac{dC}{dx} = 0.$$

2. Diff. der Summe:

$$\frac{d[\varphi(x) + \psi(x)]}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx} = \varphi'(x) + \psi'(x).$$

3. Diff. des Produkts:

$$\frac{d[\varphi(x) \cdot \psi(x)]}{dx} = \varphi(x) \psi'(x) + \varphi'(x) \psi(x).$$

4. Diff. des Quotienten:

$$\frac{d\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)}{dx} = \frac{\psi(x) \varphi'(x) - \psi'(x) \varphi(x)}{\psi^2(x)}.$$

5. Diff. der Funktion einer Funktion:

$$\frac{dF(z)}{dx} [z = \varphi(x)] = \frac{dF(z)}{dz} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} = F'(z) \cdot \varphi'(x).$$

6. Die Differentialquotienten zueinander inverser Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$: liefern miteinander multipliziert die Einheit:

$$\varphi'(x) \cdot f'(x) = 1.$$

7. Diff. der Potenz:

$$\frac{dax^m}{dx} = amx^{m-1}.$$

8. Diff. der Sinusfunktion:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

9. Diff. der Kosinusfunktion:

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

10. Diff. der Tangensfunktion:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

11. Diff. der Cotangensfunktion:

$$\frac{d \cot x}{dx} = - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

12. Diff. der Arcussinusfunktion:

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

13. Diff. der Arcuscosinusfunktion:

$$\frac{d \arccos x}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

14. Diff. der Arcustangensfunktion:

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = + \frac{1}{1+x^2}.$$

15. Diff. der Arcuscotangensfunktion:

$$\frac{d \operatorname{arccot} x}{dx} = - \frac{1}{1+x^2}.$$

16. Diff. der Logarithmusfunktion:

$$\frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

17. Diff. der Exponentialfunktion:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

II. Differentialgleichungen erster Ordnung^{7a)}.

§ 16. Differentialquotient und Differentialgleichung.

Allgemein heißt eine Gleichung zwischen Variablen und ihren ersten Differentialquotienten Differentialgleichung erster Ordnung. Sind die Variablen x, y , die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, so lautet die Form der Differentialgleichung allgemein

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (1)$$

Sehr einfache Differentialgleichungen dieser Art haben wir bereits kennen gelernt. Jede unserer Differentiationsformeln in

§ 15 ist eine Differentialgleichung. Man erkennt dies sofort, wenn man z. B. Formel (7) in § 15 folgendermaßen schreibt:

$$\frac{dy}{dx} - amx^{m-1} = 0. \quad (2)$$

Die „Lösung dieser Differentialgleichung verlangt diejenige Funktion y von x anzugeben, deren erster Differentialquotient $= amx^{m-1}$ ist. Wir wissen, wie wir zu verfahren haben. Wir schreiben

$$dy = amx^{m-1} dx$$

und integrieren

$$\begin{aligned} y &= C + \int amx^{m-1} dx \\ y &= C + ax^m \end{aligned} \quad (3)$$

Hier ist die Integrationskonstante C (die wir mit Rücksicht auf die Lehren vom unbestimmten Integral hinzugefügt haben) bemerkenswert. Unbestimmte Integrationskonstanten spielen bei der Lösung von Differentialgleichungen eine wichtige Rolle, wie wir noch sehen werden.

Vorläufig merken wir an, daß eine „Integralgleichung“ $y = C + ax^m$, die eine Integrationskonstante C enthält, das allgemeine Integral der Differentialgleichung heißt. Jede spezielle Wertfestsetzung für C liefert ein partikuläres Integral. Insbesondere ist also mit $C = 0$ $y = ax^m$ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (2).

Die Lösung der angeschriebenen Differentialgleichung war sehr einfach, und zwar in erster Linie deshalb, weil abgesehen von der Variablen x nur der erste Differentialquotient der unbekannteren Funktion y vorkam, mit anderen Worten, weil die Differentialgleichung von der ersten Ordnung war. Wir stellen fest, daß bei Differentialgleichungen folgender Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x) = 0, \quad (4)$$

wo $f(x)$ eine beliebige Funktion von x sei, sich ohne weiteres durch eine „Quadratur“ das allgemeine Integral

$$y = C + \int f(x) dx \quad (5)$$

finden läßt.

Ebenso einfach ist die Lösung von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} - \varphi(y) = 0. \quad (6)$$

Wir schreiben
$$\frac{dy}{\varphi(y)} = dx \quad (7)$$

und finden das allgemeine Integral:

$$x = C + \int \frac{dy}{\varphi(y)}, \quad (8)$$

wo $\varphi(y)$ in y ebenfalls beliebig sein kann.

Dieses allgemeine Integral

$$y = C + \int f(x) dx \quad (9)$$

schreiben wir mit

$$\int f(x) dx = F(x)$$

wie folgt:

$$y = C + F(x). \quad (10)$$

Deuten wir diese Gleichung geometrisch in einem recht winkligen Koordinatensystem, so erhalten wir eine Mehrzahl von Kurven, und zwar für jede spezielle Auswahl von C eine Kurve.

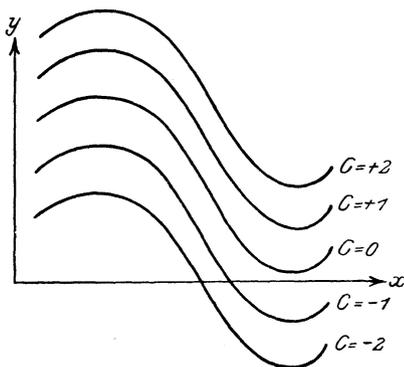


Fig. 46. Integralkurvenschar.

Es entsteht so, wenn wir C alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen, eine Mannigfaltigkeit von Kurven (Fig. 46), die einander kongruent und gegeneinander in Richtung der y -Achse verschoben sind. Jedes Individuum der Mannigfaltigkeit oder Kurvenschar stellt ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung dar.

§ 17. Anwendungsbeispiel: Die Spiegelkurve eines fließenden Gewässers.

Angenäherte Integration einer Differentialgleichung.

Ein technisches Beispiel für Differentialgleichungen der letztgenannten Art bietet die Untersuchung der Staukurven, bei der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} = J \quad (1)$$

für die Gestalt des Spiegels eines stationär ungleichförmig fließenden Gewässers resultiert.

Zur Aufstellung dieser Gleichung geht man aus von der Bewegung eines gleichförmig fließenden Gewässers⁸⁾.

Bezeichnet (Fig. 47) x den auf der Gerinneachse gemessenen Abstand eines Gerinnequerschnittes AB von einem

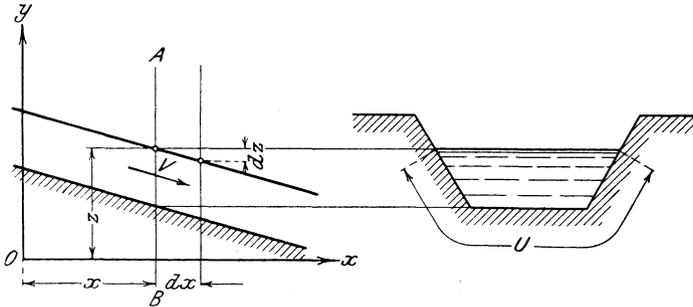


Fig. 47. Betrachtung einer gleichförmigen Wasserbewegung.

Anfangsquerschnitte OY , dann ist klar, daß bei der gleichförmigen Bewegung die Arbeit des fallenden Wassers zur Überwindung der Bewegungswiderstände dient. Bezeichnet F den Gerinnequerschnitt, U den Gerinneumfang, r den Profilradius, gegeben durch

$$r = \frac{F}{U}, \quad (2)$$

V die mittlere Wassergeschwindigkeit, γ das spezifische Gewicht, dann ist

$$A = \gamma r UV dz \quad (3)$$

die Gefällarbeit bei Durchströmung des Abschnitts dx . Die Reibungsarbeit R ist empirisch proportional dem benetzten Umfang U und dem Geschwindigkeitsquadrat V^2 . Sie findet sich mit der Proportionalitätskonstante $\frac{\lambda}{2g}$

$$R = \frac{\lambda}{2g} UV^2 \cdot V dx. \quad (4)$$

Durch Gleichsetzung der beiden Arbeitsausdrücke (3) und (4) und Streichen der Größe VU ergibt sich, wenn nach geeigneter Wahl des Maßsystems $\gamma = 1$ gesetzt wird,

$$r \frac{dz}{dx} = \frac{\lambda}{2g} V^2. \quad (5)$$

Bei gleichförmiger Bewegung wird nun V , r und $\frac{dz}{dx}$ längs der Gerinneachse konstant und man kann mit

$$\frac{dz}{dx} = J \quad (6)$$

schreiben

$$rJ = \frac{\lambda}{2g} V^2, \quad (7)$$

wo J das „Gefälle“ des Gerinnes bedeutet. Hier wollen wir stets für $\frac{\lambda}{2g}$ den Eytelweinschen Wert 0,00037 benutzen, wobei wir bemerken, daß es noch andere kompliziertere empirische Ausdrücke dafür gibt. Hierbei ist r in m, V in [msec^{-1}] einzusetzen; $\frac{\lambda}{2g}$ hat demnach die Dimension [$\text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2$], also einer reziproken Beschleunigung.

Die Formel (7) wird z. B. bei der Berechnung von Kanälen benutzt. Meistens ist die vom Kanal fortzuführende Wassermenge Q und das zur Verfügung stehende Gefälle J durch die Naturverhältnisse gegeben, die Breite b des Kanals durch den Bodenpreis nach oben begrenzt. Aus diesen Daten kann man mit (7) den erforderlichen Profilradius und damit die Gestalt des Gerinnequerschnittes bestimmen. Hat man z. B. einen sehr breiten Kanal der Breite b , dann kann man den Profilradius gleich der Wassertiefe h und den Umfang statt der Breite setzen und es wird

$$V = \frac{Q}{bh}$$

und

$$hJ = \frac{\lambda}{2g} \frac{Q^2}{b^2 h^2}$$

oder

$$h^3 = \frac{\lambda Q^2}{2g b^2 J}; \quad (8)$$

h ist also in diesem Falle die Wassertiefe.

Bei der gleichförmigen Bewegung ist J ein Maß sowohl des Spiegelgefälles wie des Sohlgefälles, da beide einander gleich sind. Wird nun eine gleichförmige Wasserbewegung da-

durch gestört, daß man in das Gerinne ein Hindernis, etwa ein Wehr, einbaut, dann weichen Spiegelgefälle und Sohlengefälle der abgeänderten Wasserbewegung voneinander ab. Betrachten wir wieder zwei Gerinnequerschnitte AB und $A'B'$ im Abstände dx , dann haben wir die Spiegelkurve

$$z = f(x)$$

von der Sohlenkurve

$$s = \varphi(x)$$

zu unterscheiden (Fig. 48). $s = \varphi(x)$ ist eine im allgemeinen gegebene Funktion. Gesucht wird die Gleichung des Spiegels, und zwar bezogen auf die Sohle, d. h.

$$x = z - s = f(x) - \varphi(x),$$

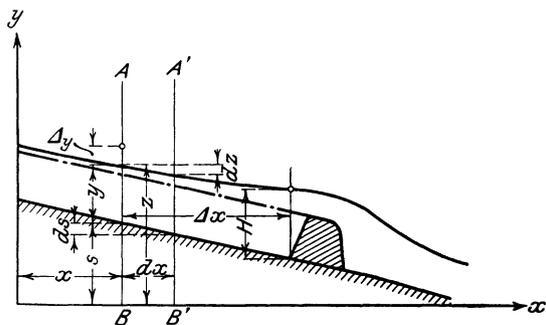


Fig. 48. Betrachtung einer ungleichförmigen Wasserbewegung.

also die Wassertiefe in Abhängigkeit von der Gerinnelänge x . Hierbei muß der Anfangspunkt für die Zählung der Länge x aus den besonderen Bedingungen der Aufgabe noch bestimmt werden.

Das nachfolgende Verfahren wird y direkt liefern, ohne vorherige Aufsuchung von $f(x)$.

Zur Gewinnung einer Gleichung für y gehen wir wieder von dem Satz aus, daß innerhalb des Intervalles dx die zur Verfügung stehende Gefällearbeit die Widerstandsverluste decken muß.

Zur Verfügung steht die Arbeit $Q dz$, wo Q die sekundliche Wassermenge bedeutet. Diese Arbeit wird aber nicht ganz auf die Deckung des Widerstandsverlustes verwendet, da ein Teil dieser zwischen AB und $A'B'$ zur Veränderung der kinetischen Energie des strömenden Wasserquantums verbraucht wird. Das

strömende Wasserquantum Q hat im Querschnitte AB die kinetische Energie

$$\frac{1}{2g} Q \cdot V^2;$$

im Querschnitte $A'B'$ dagegen

$$\frac{1}{2g} Q (V + dV)^2.$$

Die Änderung beträgt demnach

$$+ \frac{1}{g} Q V \cdot \frac{dV}{dy} \cdot dx.$$

Setzen wir nun einen breiten Kanal rechteckigen Querschnittes voraus, dann gilt die Beziehung

$$Q = V \cdot b \cdot y,$$

d. h. die sekundliche Wassermenge ist gleich: Geschwindigkeit V mal Breite b mal Tiefe y und hieraus folgend:

$$V = \frac{Q}{by}.$$

Es wird also:

$$\frac{dV}{dx} = - \frac{Q}{by^2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

und die Änderung der kinetischen Energie

$$- \frac{1}{g} \cdot Q \cdot \frac{Q^2}{b^2 y^3} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx.$$

Zur Deckung des Reibungsverlustes

$$\frac{\lambda}{2g} UV^3 dx$$

oder, da bei breiten Kanälen der Umfang U annähernd gleich der Breite b gesetzt werden kann,

$$\frac{\lambda}{2g} \cdot \frac{Q^3}{b^2 y^3} dx;$$

bleibt also von der Gefällearbeit $Q dz$ nur übrig:

$$Q dz - \frac{1}{g} Q V dV = Q dz + \frac{1}{g} \frac{Q^3}{b^2 y^3} \frac{dy}{dx} dx. \quad (9)$$

Es entsteht also mit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{ds}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

die Differentialgleichung:

$$Q \left(\frac{ds}{dx} - \frac{dy}{dx} \right) + \frac{1}{g} \frac{Q^3}{b^2 y^3} \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{2g} \frac{Q^3}{b^2 y^3} \quad (10)$$

oder nach beiderseitiger Hebung von Q und mit dem konstanten Sohlengefälle

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= J \\ J - \frac{dy}{dx} - \frac{\lambda}{2g} \frac{Q^2}{b^2 y^3} &= - \frac{1}{g} \frac{Q^2}{b^2 y^3} \frac{dy}{dx}. \end{aligned} \quad (11)$$

Setzt man hier zur Abkürzung die Konstanten

$$\frac{\lambda}{2g} \frac{Q^2}{b^2 J} = k^3$$

und

$$\frac{1}{g} \frac{Q^2}{b^2} = k^3$$

ein, so entsteht einfacher

$$\frac{dy}{dx} (y^3 - k^3) = J (y^3 - h^3) \quad (12)$$

oder

$$\frac{dy}{dx} \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} = + J, \quad (13)$$

d. h. die im Anfang des Paragraphen angeschriebene Gleichung.

Hier ist zunächst h mit der bereits oben festgestellten Wassertiefe bei gleichförmiger Strömung der Wassermenge Q auf dem Gefälle J identisch. k dagegen ist identisch mit der Wassertiefe der gleichförmigen Strömung in einem Kanal, für welchen

$$\frac{\lambda}{2J} = 1$$

gilt, d. h. für welchen das Gefälle J den Wert hat:

$$J = \frac{\lambda}{2} = 0,0036 = \sim 1:280.$$

Zwischen h und k besteht die Beziehung:

$$k = h \sqrt[3]{\frac{2J}{\lambda}}.$$

Wir gehen nun über zur Integration der gefundenen Differentialgleichung. Es ergibt sich

$$Jx = C + \int \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} dy. \quad (14)$$

Dies ist die endliche Gleichung der Spiegelkurve. Um die unbestimmte Konstante C fortzuschaffen, muß man die Wassertiefe an irgendeiner Stelle kennen, z. B. H dicht an dem Einbau. Ist an dieser Stelle $x = A$, dann ergibt sich für C

$$J \cdot A - \left[\int \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} dy \right]_{y=H} = C$$

und als Spiegelgleichung:

$$J(x - A) = - \left[\int \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} dy \right]_{y=H} + \int \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} dy. \quad (15)$$

Ehe wir an die genaue Auswertung und Untersuchung dieses Integrals herangehen, wollen wir die gefundene Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = J \frac{y^3 - h^3}{y^3 - k^3}$$

zur angenäherten Bestimmung der Spiegelkurve benutzen

Dies geschieht in der Weise, indem wir einen Punkt der Spiegelkurve z. B. dicht am Wehr festlegen durch Auswahl

$$y = H.$$

Hiermit ist bei $y = H$ der Differentialquotient

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=H} = J \frac{H^3 - h^3}{H^3 - k^3} \quad (16)$$

festgelegt, und da die Spiegelkurve nur schwach gekrümmt ist, können wir annehmen, daß derselbe Wert des Differentialquotienten noch ein endliches Stück Δx stromauf gilt. Am Endpunkte dieses Stückes wird dann

$$\Delta y = + \Delta y \cdot J \frac{H^3 - h^3}{H^3 - k^3} \quad (17)$$

d. h. Δy ist die Änderung der Wassertiefe an dieser Stelle.

Ein Beispiel wird das Verfahren verdeutlichen. Es liege ein Kanal des Gefälles $J = 0,00037$ vor mit einer Wassergeschwindigkeit $V = 1,2$ m. Dann beträgt die Wassertiefe der gleichförmigen Strömung

$$h = \frac{\lambda}{2g} \frac{V^2}{J} = 0,00037 \frac{1,44}{0,00037} = \sim 1,44 \text{ m,}$$

während man

$$k = h \sqrt[3]{\frac{2J}{\lambda}} = 1,44 \sqrt[3]{\frac{1}{10,03}} = 0,670$$

findet.

Stauen wir jetzt die gleichförmig dahinfließende Strömung an irgendeiner Stelle auf $H = 1,8$ m auf, so ergibt sich folgende Gleichung für die Abnahme Δy der Wassertiefe in der Entfernung Δx vom Stau:

$$\begin{aligned} \Delta x = + \Delta x \cdot 0,00037 \frac{5,832 - 2,986}{5,832 - 0,301} &= + \Delta x \cdot 0,00037 \cdot \frac{2,846}{5,531} \\ &= + \Delta x \cdot 0,00019, \end{aligned}$$

d. h. in der Entfernung $\Delta x = - 500$ m oberhalb hat sich die Stautiefe um $\Delta y = - 0,095$ m = $- 9,5$ cm geändert, d. h. sie ist kleiner geworden; sie beträgt $H = 1,705$. Berechnet man mit diesem H von neuem die obige Formel, so entsteht

$$\Delta y = + \Delta x \cdot 0,00037 \cdot \frac{4,913 - 2,986}{4,913 - 0,301} = + \Delta x \cdot 0,000155,$$

womit man wieder mit $\Delta x = - 500$ m stromauf die Tiefenabnahme

$$\Delta y = 0,077 \text{ m} = 7,7 \text{ cm}$$

findet. So rechnet man fort und gelangt zu immer geringeren Wassertiefen, ohne indessen die ursprüngliche Tiefe 1,44 m zu erreichen: der Stauspiegel schmiegt sich asymptotisch dem ursprünglichen Spiegel an. Vgl. Fig. 48.

Einen allgemeinen Überblick über die durch die Differentialgleichung in definierten Staukurven liefert die Durchführung der Integration und die genaue Diskussion der entstehenden Gleichung.

Es handelt sich also um die Auswertung des Integrals

$$J(x - A) = - \left[\int \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} dy \right]_{y=H} + \int \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} dy \quad (18)$$

Zunächst ist identisch

$$\frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} = 1 + \frac{h^3 - k^3}{y^3 - h^3}.$$

Macht man jetzt die Substitutionen

$$y = h\eta, \quad dy = h d\eta, \quad \frac{H}{h} = \eta_H,$$

so folgt

$$= -h \int_{\frac{H}{h}} d\eta - \frac{h^3 - k^3}{k^2} \int_{\frac{H}{h}} \frac{1}{\eta^3 - 1} d\eta + \int dy + \int \frac{(h^3 - k^3)h}{h^2(\eta^3 - 1)} d\eta \quad (19)$$

und nach Einführung der Abkürzung:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{k}{h} \\ J(x - A) &= \\ &= (y - H) - h(1 - \xi^3) \left\{ - \int_{\frac{y}{h}} \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} - \left(- \int_{\frac{H}{h}} \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} \right) \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

Hier ist eine Vereinfachung zu erzielen, wenn man den Punkt $x = A, y = H$ so wählt, daß er in den Anfangspunkt des Koordinatensystems fällt. Es resultiert dann als Gleichung:

$$Jx = y - h(1 - \xi^3) \left\{ \left(- \int_{\eta = \frac{y}{h}} \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} \right) - \left(- \int_{\eta = 0} \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} \right) \right\} \quad (21)$$

In dieser letzten Formel bleibt noch die Berechnung des Integrals

$$- \int \frac{d\eta}{\eta^3 - 1}$$

übrig, welches man mit Hilfe der Partialbruchzerlegung⁹⁾

$$- \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} = - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\eta - 1} - \frac{\eta + 2}{\eta^2 + \eta + 1} \right) d\eta$$

findet

$$= \frac{1}{6} \left\{ \lg \frac{\eta^2 + \eta + 1}{(\eta - 1)^2} - 2\sqrt{3} \operatorname{arccot} \frac{2\eta + 1}{\sqrt{3}} \right\}. \quad (22)$$

Diese Funktion, die kurz mit $f(\eta)$ bezeichnet werde, hat Bresse¹⁰⁾ tabellarisch berechnet.

Den ungefähren Verlauf der Funktion gibt von

$$\eta = 0,5 \quad \text{bis} \quad \eta = 2,0$$

Fig. 49 wieder.

Die Funktion $f(y)$ hat folgende ausgezeichnete Werte

$$f(0) = -0,605, \quad f(1) = \infty, \quad f(\infty) = 0.$$

Es ist also

$$-\int_{\eta=0}^{\eta} \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} = -0,605,$$

wonach die Formel (21) übergeht in:

$$Jx = y - h(1 - \xi^3) [f(\eta) = 0,605]_{\eta = \frac{y}{h}}. \quad (23)$$

Diese Gleichung wird durch $x = 0$, $y = 0$, $\eta = 0$ befriedigt, also geht die durch sie dargestellte Kurve durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems, wie soeben festgesetzt.

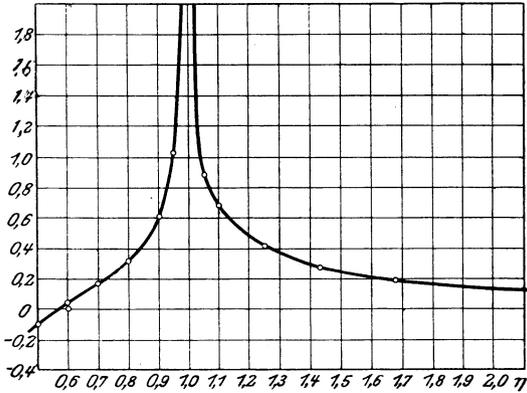


Fig. 49. Verlauf der Bresserschen Funktion $f(\eta)$.

Ferner wird für $y = h$ die Gerinnelänge $x = \infty$, da $f(\eta)$ für $\eta = 1 \infty$ wird, d. h. die Kurve berührt asymptotisch die zur Kanalsohle im Abstand $y = h$ Parallele, d. h. den Spiegel der ungestörten Strömung.

Weiterhin folgt nach Differentiation der Gleichung¹¹⁾ (13):

$$J \frac{dx}{dy} = \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} = 1 + \frac{h^3 - k^3}{y^3 - h^3} \quad (13)$$

$$J \frac{d^2x}{dy^2} = -3 \frac{h^3 - k^3}{(y^3 - h^3)^2} y^2. \quad (24)$$

Das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2x}{dy^2}$ ist maßgebend für Krümmung der Kurve. Ist $\frac{d^2x}{dy^2}$ negativ¹²⁾, dann

ist die Staukurve in Richtung des positiven x , also stromab, konvex. Das ist offenbar dann der Fall, wenn

$$h^3 - k^3 > 0$$

oder

$$h^3 - \lambda^3 h^3 > 0$$

oder

$$1 > \lambda^3.$$

In diesem Falle ist die Kurve überall konvex in Richtung der Strömung (Fig. 50).

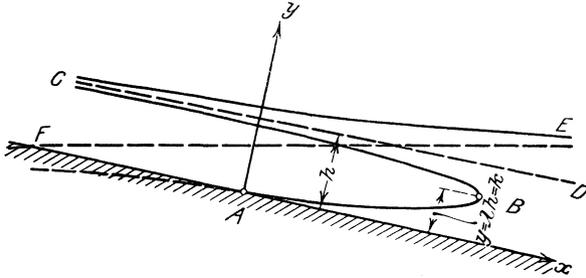


Fig. 50. Gestalt der Staukurve bei einem Fluß $h > k$.

Wasserläufe, bei denen die Bedingung $1 > \lambda^3$ erfüllt ist, nennt man nach de Saint-Venants Vorgang Flüsse. Im Anfangspunkt A beginnt die Kurve mit unendlich schwacher Krümmung ($\frac{d^2 x}{dy^2} = 0$) und mit wachsendem y nimmt x zu. Mit

$$y = \lambda h - k$$

wird

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} = 0,$$

d. h. die Kurve hat hier eine zur Kanalsohle senkrechte Tangente; dies findet im Punkte B statt. Hier kehrt die Kurve in Richtung des Oberlaufes um und nähert sich asymptotisch (wie oben nachgewiesen) der Spiegelkurve CD der ungestörten Strömung, der im Punkte $y = h$, $x = -\infty$ erreicht wird.

Für weiter wachsende $y > h$, $\eta > 1$ wird x wieder endlich; $\frac{dx}{dy}$ wird positiv und wächst bis zum Werte $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{J}$ bei $y = +\infty$. Der entstehende Kurvenzug CE geht asymptotisch von der Geraden CD aus und nähert sich ebenfalls asymptotisch der Geraden FE , die die Gleichung besitzt:

$$Jx = y + 0,605 (\lambda^3 - 1)h.$$

Soweit der Verlauf der Kurve oberhalb der Gerinnesohle. Ein Stück der Kurve liegt noch unterhalb der Gerinnesohle und ist in der Fig. 50 punktiert gezeichnet; es kommt für die Spiegelgestalt nicht in Betracht.

Ist dagegen die Bedingung

$$h^3 - k^3 < 0$$

oder

$$\lambda^3 > 1$$

erfüllt, dann bezeichnet man den Wasserlauf mit de Saint-Venant als Wildbach. Dann ist der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -3 \frac{h^3 - k^3}{(y^3 - h^3)^2} y^2$$

überall positiv, die Staukurve also überall konkav in Richtung der Strömung. Es ergibt sich folgendes Kurvenbild (Fig 51):

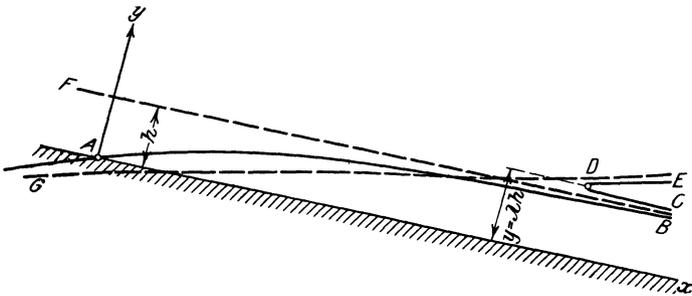


Fig. 51. Staukurvenverlauf bei einem Wildbach $h < k$.

Wieder beginnt die Kurve im Anfangspunkte A mit unendlich schwacher Krümmung ($\frac{d^2x}{dy^2} = 0$; Wendetangente) und nähert sich mit positivem $\frac{dx}{dy}$ asymptotisch dem Spiegel der ungestörten Strömung, der mit $x = +\infty, y = h, \frac{dx}{dy} = \infty$ erreicht wird. Mit weiter wachsendem y wird $\frac{dx}{dy}$ negativ endlich, um bei $y = \lambda h$ zu verschwinden. Dies tritt ein im Punkte D, in welchem die Kurve eine zur Kanalsohle senkrechte Tangente hat. Gleichzeitig ist D ein Umkehrpunkt für die Kurve; mit $y > \lambda h$ wird $\frac{dx}{dy}$ positiv, um sich mit $x = \infty, y = \infty$ (welches Wertepaar die Kurve befriedigt)

dem Werte $\frac{1}{J}$ zu nähern. Dieser Kurvenzweig (DE in der Figur) hat also ebenfalls eine Asymptote, deren Gleichung ist:

$$Jx = y + 0,605(\lambda^3 - 1)h.$$

Im Falle $\lambda^3 = 1$, wenn also weder ein Fluß noch ein Wildbach vorliegt, wird

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{J},$$

d. h. der Spiegel ist überall eine horizontale Gerade, und zwar ist es die durch die Gleichung $Jx = y$ gegebene.

§ 18. Integration bei allgemeineren Formen der Differentialgleichung. Trennung der Variablen.

Anwendungsbeispiel: Grundwasserspiegel.

Eine etwas kompliziertere Form der Differentialgleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ist folgende Gleichung:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(y)} + \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1)$$

Auch hier findet sich leicht eine Gestalt der Gleichung, von der aus die Integration sofort vorgenommen werden kann. Man schreibt für (2) nach Multiplikation mit $\psi(y) \cdot dx$:

$$\varphi(x) dx + \psi(y) dy = 0. \quad (2)$$

Man nennt diese Umformung „Trennung der Variablen“ und hat sofort als allgemeines Integral von (3) die Gleichung:

$$\int \varphi(x) dx + \int \psi(y) dy + C = 0. \quad (3)$$

Die Integration einer Differentialgleichung gelingt immer, wenn sich die Trennung der Variablen durchführen läßt. Hierher gehört auch die noch allgemeinere Form:

$$\varphi(x) \psi(y) dx + \varphi_1(x) \psi_1(y) dy = 0. \quad (4)$$

Hier gelangt man durch Division mit $\psi(y) \cdot \varphi_1(x)$ zur Trennung der Variablen:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{\psi_1(y)}{\psi(y)} dy = 0 \quad (5)$$

und zum allgemeinen Integral:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\psi_1(y)}{\psi(y)} dy + C = 0. \quad (6)$$

§ 19. Anwendungsbeispiel: Spiegelkurve des Grundwasserstromes in der Umgebung eines Brunnens.

Ein Beispiel möge das Verfahren der Trennung der Variabeln erläutern.

Es handle sich um die Ermittlung der Spiegelkurve des Grundwasserstromes in der Umgebung eines Brunnens.

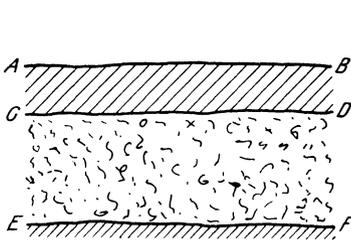


Fig. 52. Ungestörter Grundwasserstrom.

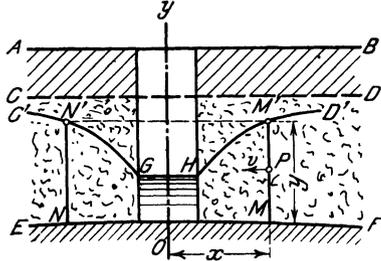


Fig. 53. Brunnen im Grundwasserstrom.

In der Figur 52 sei AB die Erdoberfläche, CD der Grundwasserspiegel vor Anlegung des Brunnens, EF eine den Grundwasserstrom nach unten begrenzende undurchlässige Schicht, etwa aus Ton bestehend.

Wird nun an irgendeiner Stelle ein Brunnenschacht etwa bis auf die undurchlässige Schicht EF getrieben und in diesem Schacht der Wasserspiegel durch Wasserentnahme auf dem Niveau GH gehalten, so senkt sich der Grundwasserspiegel in der Umgebung des Brunnens (Fig. 53). Die ursprünglich geradlinige Spiegelkurve CD geht in zwei gekrümmte Zweige $C'G$ und $D'H$ über, die sich an den Wasserstand GH anschließen. Der Spiegel selbst ist eine Rotationsfläche um die Achse OY mit GC' oder HD' als erzeugender Meridianlinie.

Zur Ermittlung der Kurve $H'D$ benutzt man den durch die Erfahrung hinreichend gesicherten Satz, daß die Strömungsgeschwindigkeit v des Wassers in einem Punkte P des durchlässigen Sandkörpers dem Gefälle $\frac{dy}{dx}$ der Spiegelkurve in dem senkrecht über P liegenden Punkte M' proportional ist. Bezeichnet man die Proportionalitätskonstante mit k , so ist anzusetzen

$$v = k \frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Nunmehr ergibt sich das durch den Mantel des Zylinders

$$N' N M M'$$

radial nach innen strömende Wasserquantum

$$Q = 2\pi xyv = 2\pi xyk \frac{dy}{dx}, \quad (2)$$

und da Q für alle Zylinder des Radius x denselben Wert haben muß, der der Entnahme aus dem Brunnen gleich ist, so gibt (2) sofort die Differentialgleichung des Problems.

Diese geht nach Trennung der Variablen über in

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\pi k}{Q} y dy \quad (3)$$

und nach Integration in

$$\lg x = C + \frac{\pi k}{Q} y^2. \quad (4)$$

Die unbekannte Integrationskonstante ermittelt man leicht aus der Bedingung, daß die Spiegelkurve $D'H$ in den Brunnen Spiegel GH übergehen muß. Wenn nämlich der Brunnendurchmesser $= 2r$ und die Wassertiefe im Brunnen $= h$ ist, dann muß für $x = r$ $y = h$ werden, d. h. es muß sein

$$\lg r = C + \frac{\pi k}{Q} h^2 \quad (5)$$

oder durch Auflösung nach C

$$C = \lg r - \frac{\pi h}{Q} h^2.$$

Führt man diesen Wert in die ursprüngliche Integralgleichung (4) ein, so ergibt sich

$$\lg \frac{x}{r} = \frac{\pi k}{Q} (y^2 - h^2), \quad (6)$$

womit wir in die Lage gesetzt sind, die Spiegelkurve zu berechnen¹³⁾.

§ 20. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Bernoullis Substitutionsmethode.

Lineare Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_0 = 0, \quad (1)$$

wo X und X_0 Funktionen von x allein bezeichnen, kommen sehr häufig vor. Eine Methode zu ihrer Lösung stammt von

Bernoulli. Sie besteht darin, daß man y als Produkt zweier Funktionen u und v von x zu erhalten sucht. Aus

$$y = uv \tag{2}$$

findet sich durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}. \tag{3}$$

Setzt man die Formeln (2) und (3) in (1) ein, so folgt die neue Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dx} + Xu\right)v + \left(u \frac{dv}{dx} + X_0\right) = 0. \tag{4}$$

Diese Differentialgleichung wird offenbar befriedigt, indem man die Klammerausdrücke einzeln = Null setzt, d. h. indem man die einfacheren Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dx} + Xu = 0 \tag{5}$$

und

$$u \frac{dv}{dx} + X_0 = 0 \tag{6}$$

löst. Von diesen ist die erste (5) sehr einfach. Man hat

$$\frac{du}{u} = -X dx \tag{7}$$

und nach Integration mit Hinzufügung einer Konstanten C_0

$$\lg u = C_0 - \int X dx \tag{8}$$

oder

$$u = C_1 e^{-\int X dx}, \tag{9}$$

wenn

$$C_1 = e^{C_0}$$

gesetzt wird.

Aus (6) ergibt sich aber

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{X_0}{u} \tag{10}$$

oder mit (9)

$$dv = -\frac{1}{C_1} X_0 e^{\int X dx} \cdot dx \tag{11}$$

oder nach Integration (mit einer neuen Integrationskonstanten C_2)

$$v = C_2 - \frac{1}{C_1} \int X_0 e^{\int X dx} \cdot dx. \tag{12}$$

Kehren wir nun zum Ansatz (2) zurück, so findet sich durch Einsetzen von (9) und (12)

$$y = uv = e^{-\int X dx} \left(C - \int X_0 e^{\int X dx} \cdot dx \right), \quad (13)$$

wenn $C_1 C_2 = C$ gesetzt wird, oder

$$\int X_0 e^{\int X dx} dx + y e^{\int X dx} = C. \quad (14)$$

§ 21. Anwendungsbeispiel: Entstehung eines Wechselstromes.

Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_0 = 0 \quad (1)$$

tritt auf bei der Ermittlung des Wechselstromes, der in einem mit Selbstinduktion behafteten Leiter nach Anlegung einer Wechselstromspannung $E = E_0 \sin \omega t$ entsteht. Diese Differentialgleichung erhalten wir, indem wir E gleich der Summe des Ohmschen Spannungsabfalles WJ und des induktiven Spannungsabfalles $L \frac{dJ}{dt}$ setzen:

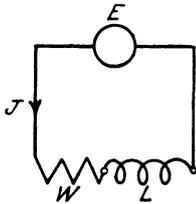


Fig. 54. Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion.

$$E = WJ + L \frac{dJ}{dt}. \quad (2)$$

Schreiben wir dies in der Form:

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{W}{L}J - \frac{E}{L} = 0, \quad (3)$$

so finden wir die Gestalt von (1), wenn wir setzen

$$J = y; \quad t = x; \quad \frac{W}{L} = X; \quad -\frac{E}{L} = X_0;$$

allerdings ist $\frac{W}{L} = X$ hier eine Konstante. Unter Anwendung von Formel (13) § 20 ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} J &= e^{\int -\frac{W}{L} dt} \left(C - \int -\frac{E}{L} e^{\int \frac{W}{L} dt} \cdot dt \right) \\ &= e^{-\frac{W}{L} t} \left(C + \frac{E_0}{L} \int e^{\frac{W}{L} t} \sin \omega t dt \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Hier ist das Integral nach einer Integraltafel (z. B. Hütte 1908 I. S. 78) zu bestimmen.

Wir erhalten

$$J = C e^{-\frac{W}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \sin(\omega t - \gamma), \quad (5)$$

wo für den Winkel γ gilt:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega L}{W}. \quad (6)$$

Die unbestimmte Konstante C bestimmt sich aus den „Anfangsbedingungen“. Soll z. B. im Beginn des Einschaltens, zur Zeit $t = 0$, der Strom $J = 0$ sein, so hat man

$$0 = C + \frac{-E_0 \sin \gamma}{\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}}$$

oder

$$C = \frac{E_0 \omega L}{W^2 + \omega^2 L^2}, \quad (7)$$

folglich

$$J = \frac{E_0 \omega L}{W^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{-\frac{W}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \gamma), \quad (8)$$

Die Stromstärke setzt sich also aus einem mit der Zeit „abklingenden“ Teil

$$\frac{E_0 \omega L}{W^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{W}{L}t}$$

und einem rein „periodischen“ Teil

$$\frac{E_0}{\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \gamma)$$

zusammen.

Zunächst interessiert die Geschwindigkeit des Abklingens des ersten Teiles. Diese ist gegeben durch die Abnahme der Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{W}{L}t} = e^{-bt}$$

mit wachsender Zeit.

Für $t = 0$ ist $e^{-\frac{W}{L}t} = 1$. Von diesem Wert nimmt e^{-bt} fortgesetzt ab. Die Geschwindigkeit der Abnahme ist um so

größer, je größer b ist, je größer also der Widerstand W im Verhältnis zur Selbstinduktion ist. Mit $b = 1$ (Widerstand = Selbstinduktion) haben wir die gewöhnliche reziproke Exponentialfunktion e^{-t} , deren Werte in nachfolgender Tabelle bis $t = 5$ sec zusammengestellt sind.

Tabelle 1.

t in sec	e^{-t}	t in sec	e^{-t}
0,0	0,0	3,5	0,0302
0,5	0,6065	4,0	0,0183
1,0	0,3679	4,5	0,0110
1,5	0,2232	5,0	0,0067
2,0	0,1353	5,5	0,0041
2,5	0,0818	6,0	0,0025
3,0	0,0498		

Diese kleine Tabelle ist mit dem Rechenschieber berechnet unter Benutzung der Reihenentwicklung

$$e^{-t} = 1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!}.$$

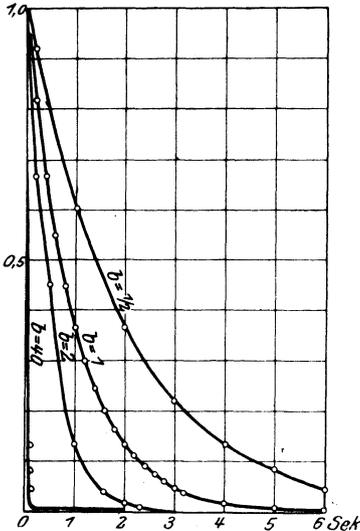


Fig. 55. Die Exponentialfunktion e^{-bt} für verschiedene Werte von b .

Zuerst berechnet man $e^{-0.5}$ auf 4 Dezimalen wie folgt

$$1,0 = 1,0000; \quad - t = - 0,5000$$

$$\frac{t^2}{2!} = 0,1250; \quad - \frac{t^3}{3!} = - 0,0208$$

$$\frac{t^4}{4!} = 0,0026; \quad - \frac{t^5}{5!} = - 0,0003$$

$$+ 1,1276 \quad - 0,5211$$

mithin:

$$e^{-0.5} = 0,6065;$$

ferner findet sich

$$e^{-1} = \frac{1}{2,7182} = 0,3679,$$

womit die beiden ersten Tabellenwerte festliegen. Alle übrigen finden sich aus diesen durch Multiplikation. Z.B. $e^{-2} = (0,3679)^2 = 0,1353$ und $e^{-2.5} = 0,1353 \times 0,6065 = 0,0818$.

Für $b = 2$ und $b = \frac{1}{2}$ findet man die Werte $e^{-\frac{1}{2}t}$ durch Quadrieren bzw. Radizieren der e^{-t} -Werte.

In Fig. 55 sind die errechneten Werte als Kurven zusammengetragen. Man erkennt, wie schon nach wenigen Sekunden die Funktion $e^{-\frac{W}{L}t}$ auf wenige Prozente ihres Anfangswertes „abgeklungen“ ist, womit ihr Beitrag zum Momentanwert des Wechselstromes praktisch als verschwunden betrachtet werden kann.

Es bleibt also jetzt noch übrig, den Wechselstrom

$$J = \frac{E_0}{\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \gamma) = J_0 \sin(\omega t - \gamma)$$

zu betrachten. Die Konstanten, die hier auftreten, tragen folgende Benennungen:

E_0 = der größte Momentanwert der Spannung,

$J_0 = \frac{E_0}{\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}}$ = der größte Momentanwert des Stromes,

$\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}$ = die Impedanz oder der scheinbare Widerstand des Wechselstromkreises,

ωL = die Reaktanz,

$\omega = 2\nu\pi$ = die Kreisfrequenz,

ν = die Frequenz,

$\gamma = \text{arctg} \frac{\omega L}{W}$ = die Phasenverschiebung.

Wichtig ist vor allem der Vergleich der beiden Funktionen $e = \sin \omega t$ und $i = \sin(\omega t - \gamma)$, die für den Verlauf von Spannung und Strom maßgebend sind. Die beiden Funktionen entsprechenden Kurven sind in Fig. 56 aufgetragen. Es ergibt sich, daß die Funktionswerte sind für

$$t = 0: e = 0; \quad i = -\sin \gamma$$

und für

$$t = \frac{\gamma}{\omega}: e = \sin \gamma; \quad i = 0,$$

woraus erhellt, daß die Stromsinuskurve i der der Spannungsinuskurve e nacheilt, und zwar im Kreismaß um den Winkel

$$\gamma = \text{arctg} \frac{\omega L}{W},$$

im Zeitmaß um die Zeit

$$t = \frac{\gamma}{\omega}.$$

Man nennt γ die Phasenverschiebung.

Berechnung eines Beispiels:

Es sei die Spannung $E_0 = 500$ Volt.

Es sei die Selbstinduktion $L = 0,0858$ Henry.

Es sei der Widerstand $W = 3,43$ Ohm,
also $a = -40,0$.

Es sei die Frequenz $\nu = 50/\text{sec}$,

also die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu = 314$.

Es ergibt sich die Reaktanz $\omega L = 26,9$.

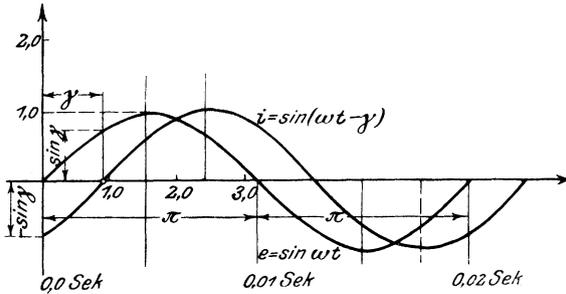


Fig. 56. Die Stromnacheilung.

$$\text{Mithin} \quad \omega^2 L^2 + W^2 = 723 + 12$$

und die Impedanz

$$\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2} = 27,11,$$

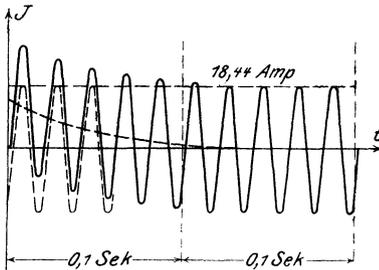


Fig. 57. Entstehung eines Wechselstromes.

also

$$J = \frac{E_0}{\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}} = 18,44 \text{ Amp},$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{\omega L}{W} = \frac{26,9}{3,43} = 7,82$$

oder die Phasenverschiebung

$$\gamma \cong 82^\circ 43'.$$

Infolge des hohen Wertes

$b = -40,0$ klingt das Glied

$$\frac{E_0 \omega L e^{-bt}}{W^2 + L^2 \omega^2},$$

welches zur Zeit $t = 0$ den Wert 18,16 Amp. hat, sehr schnell ab; bereits nach 0,1 sec ist es auf 0,018, nach 0,15 sec auf 0,0025 seines Anfangswertes gesunken, womit die volle Ausbildung des Wechselstromes beendet ist.

Es vergehen also nur wenige Stromwechsel, bis der Strom seinen regulären Wert J_0 erreicht hat. Die Fig. 57 stellt den Anfangsverlauf der Strombildung dar.

§ 22. Das singuläre Integral.

Im § 16 betrachteten wir eine Mannigfaltigkeit von Integralen einer gegebenen Differentialgleichung, die durch eine Kurvenschar graphisch dargestellt wurde.

Wir wollen die vorgelegte Differentialgleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

nun in der speziellen Form

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\varphi(x, y)\frac{dy}{dx} - \psi(x, y) = 0, \tag{2}$$

also in $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ quadratisch annehmen.

Durch Auflösung nach $\frac{dy}{dx}$ ergibt sich

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\varphi(x, y) + \sqrt{\varphi^2(x, y) + \psi(x, y)} \\ \frac{dy}{dx} &= -\varphi(x, y) - \sqrt{\varphi^2(x, y) + \psi(x, y)} \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

In jedem Punkt der xy -Ebene gibt es also zwei verschiedene Tangentenrichtungen (Fig. 58), mithin auch zwei verschiedene Kurven, die der gegebenen Differentialgleichung genügen.

Bezeichnen wir diese Kurven mit 1 bzw. 2 und sei

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{4}$$

das allgemeine Integral von (1), so ist

$$\Phi(x, y, C_1) = 0 \tag{5}$$

die Gleichung der Kurve 1 und

$$\Phi(x, y, C_2) = 0 \tag{6}$$

die Gleichung der Kurve 2. Die Werte C_1 und C_2 werden um einen endlichen Betrag voneinander verschieden sein, wenn die beiden Kurven 1 und 2 „weit“ auseinander liegen.

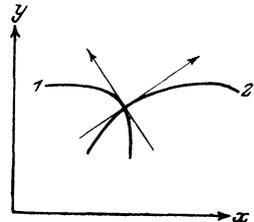


Fig. 58. Zwei getrennte Integralkurven.

Betrachten wir jedoch zwei solche Kurven, die unmittelbar aufeinander folgen, so werden die Beträge von C_1 und C_2 nicht mehr erheblich verschieden sein, so daß wir als Gleichungen der beiden konsekutiven Kurven 1 und 2 anschreiben können

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

und

$$\Phi(x, y, C + dC) = 0.$$

Aus der Figur 59 ergibt sich ferner, daß auch die beiden Tangentenrichtungen in dem Schnittpunkte zweier „konsekutiven“ Kurven nicht mehr sehr voneinander verschieden sind. Der Ort der Schnittpunkte der „konsekutiven“ Kurven genügt demnach ebenfalls der Differentialgleichung (1).

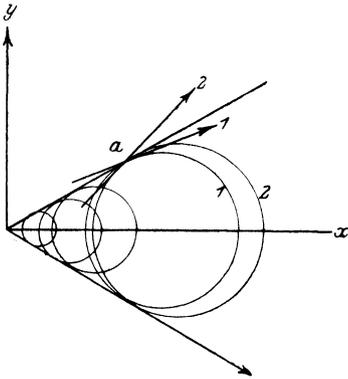


Fig. 59. Aufeinanderfolgende Integalkurven.

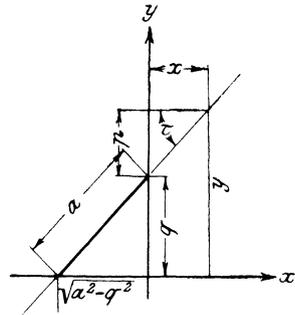


Fig. 60. Eigenschaft der Astroide.

Aus der analytischen Geometrie ist aber bekannt, daß der geometrische Ort der Schnittpunkte „konsekutiver“ Individuen einer Kurvenschar die einhüllende Kurve der Schar ist. Bekanntlich¹⁴⁾ erhält man die Gleichung der Einhüllenden durch Elimination des „Parameters“ C aus

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0 \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hieraus ergibt sich, daß ein Integral von (1) existieren kann, welches keine willkürliche Konstante C enthält. Diese besondere Art des Integrals nennt man das singuläre. Ein solches

existiert aber nur dann, wenn die gegebene Differentialgleichung (1) mindestens vom zweiten Grade in $\frac{dy}{dx}$ ist.

Man kann die Differentialgleichung einer Geraden aufstellen, die so liegt, daß die Koordinatenachsen auf ihr ein Stück von gegebener Länge a abschneiden (Fig. 60). Dies gelingt wie folgt:

Es ist

$$\frac{p}{x} = \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$$

oder

$$p = x \frac{dy}{dx}.$$

Ferner ist

$$q = y - p = y - x \frac{dy}{dx}$$

und

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 - q^2}} = \frac{dy}{dx}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$q = \frac{a \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

und hieraus durch Einsetzen in die vorletzte Gleichung

$$(y - x y') = \frac{a y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (8)$$

oder

$$y = x y' + \frac{a y'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (9)$$

Dies ist die Differentialgleichung einer Geraden, welche der oben gestellten Forderung genügt.

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist

$$y = x C + \frac{a C}{\sqrt{1 + C^2}}, \quad (10)$$

wie sich durch Einsetzen von

$$y' = C$$

in (9) ohne weiteres ergibt.

Differenziert man (10) nach Vorschrift (7) nach C , so folgt

$$0 = x + a \frac{\sqrt{1+C^2} - [C \cdot C \cdot \sqrt{1+C^2}]}{1+C^2},$$

$$0 = x + a \frac{1}{(1+C^2)\sqrt{1+C^2}}, \quad (11)$$

Setzt man (11) in (10) ein (zwecks Elimination von C), so findet sich

$$y = a \frac{C^3}{\sqrt{(1+C^2)^3}} \quad (12)$$

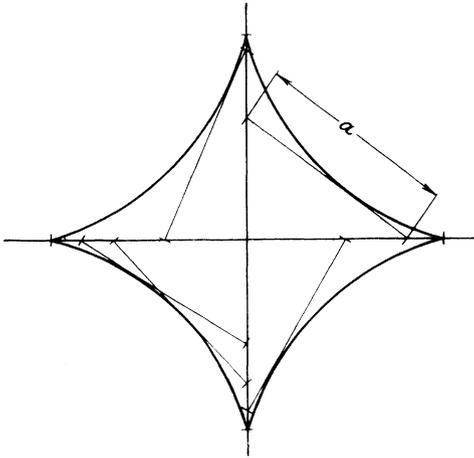


Fig. 61. Gestalt der Astroide.

während aus (11) durch Auflösung nach C folgt

$$C = \left[\left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{(1+C^2)^3}} = \frac{x}{a}.$$

Nach Einführung der Ergebnisse (13) in (12) folgt

$$y = x \left[\left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (14)$$

woraus sich endgültig findet

$$x^3 + y^3 = a^3 \quad (15)$$

als Gleichung der Einhüllenden und damit des singulären Integrales zu (g). Die so entstehende Kurve ist die Astroide (Fig. 61).

§ 23. Die Methode des integrierenden Faktors¹⁵⁾.

I. Die Differentialgleichung (4) des § 18 kann man in der Form schreiben

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0. \quad (1)$$

Dieser Ausdruck hat die Form des totalen Differentials einer Funktion $F(x, y)$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy, \quad (2)$$

da sowohl $\frac{\partial F}{\partial x}$ wie $\frac{\partial F}{\partial y}$ zwei verschiedene Funktionen von x und y sind.

Nun ist der Ausdruck (1) ohne Zweifel mit (2) identisch, wenn

$$f(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{und} \quad g(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (3)$$

gilt. Die Bedingungen (3) bestehen aber dann, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (4)$$

ist. Haben f und g die Eigenschaft (4), d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad (4a)$$

so ist die Integrabilitätsbedingung für (1) erfüllt, und es existiert ein allgemeines Integral der Form

$$F(x, y) = C, \quad (5)$$

wo C die willkürliche Integrationskonstante ist.

Zur Auffindung von F knüpfen wir an die Gleichung (3)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y)$$

an, die wir partiell in bezug auf x bei konstantem y integrieren können

$$F = \int f(x, y) dx + G(y). \quad (6)$$

Hier ist G die unbestimmte Integrationskonstante, die y , aber nicht x enthalten kann.

An der Gleichung (6) untersuchen wir, ob sie die Eigenschaft

$$\frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y)$$

hat und finden

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int \frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial G(y)}{\partial y} = g(x, y), \quad (7)$$

welche Gleichung zur Ermittlung von $G(y)$ führt

$$G(y) = \int_y g(x, y) dy - \int_y dy \int_x \frac{\partial f}{\partial y} dx - C, \quad (8)$$

Hier muß C eine wirkliche Konstante, d. h. frei von x und y sein, weil sonst die Gleichung (7) nicht bestünde.

Durch Einsetzen von (8) in (6) ergibt sich

$$F(x, y) = \int_x f(x, y) dx + \int_y g(x, y) dy - \int_y dy \int_x \frac{\partial f}{\partial y} dx - C$$

und mit Bezug auf (5) das allgemeine Integral

$$\int_x f(x, y) dx + \int_y g(x, y) dy = \int_y dy \int_x \frac{\partial f}{\partial y} dx = 2C. \quad (9)$$

Als Beispiel behandeln wir die Differentialgleichung

$$\left(x^m + 2xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(y^n + 2x^2y + \frac{1}{y}\right)dy = 0, \quad (10)$$

bei der die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, denn es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 4xy.$$

Nunmehr führen wir die in (9) vorgeschriebenen Integrationen aus

$$\int_x f(x, y) dx = \int \left(x^m + 2xy^2 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + x^2 y^2 + \lg x$$

$$\int_y g(x, y) dy = \int \left(y^n + 2x^2 y^2 + \frac{1}{y} \right) dy = \frac{y^{n+1}}{n+1} + x^2 y^2 + \lg y$$

$$\int_y dy \int_x \frac{\partial f}{\partial y} dx = \int_y dy \int_x 4xy dx = x^2 y^2,$$

wonach sich das allgemeine Integral zusammensetzt

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} + x^2 y^2 + \lg xy = C. \quad (11)$$

II. Ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt, so besteht immer eine Funktion $J(x, y)$ derart, daß

$$f(x, y)J(x, y)dx + g(x, y)J(x, y)dy = 0$$

ein totales Differential wird.

Es muß dann gelten

$$\frac{\partial(f \cdot J)}{\partial y} = \frac{\partial(g \cdot J)}{\partial x}, \quad (12)$$

d. h. wir erhalten zur Bestimmung von J die partielle Differentialgleichung

$$f \cdot \frac{\partial J}{\partial y} - g \frac{\partial J}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) J = 0. \quad (13)$$

Die Integration dieser Gleichung verursacht meistens besondere Schwierigkeiten. Oft führt aber ein Weg zum Ziel, der von besonderen Voraussetzungen über die Gestalt der Funktion $J(x, y)$ ausgeht.

Nimmt man zunächst einmal an, daß J eine Funktion von x allein sei, so wird $\frac{\partial J}{\partial y} = 0$, und $\frac{\partial J}{\partial x}$ kann mit totalen Differentiationszeichen geschrieben werden. Gleichung (13) geht sodann über in

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dx} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad (14)$$

oder

$$\frac{d \lg J}{dx} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right). \quad (15)$$

Unsere Annahme, daß J nur x enthalte, ist demnach richtig, wenn der Ausdruck

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right)$$

nur die Variable x enthält. Dann kann man ohne weiteres (15) integrieren

$$J = e^{\int \frac{1}{g} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx}. \quad (15a)$$

Dieser Fall liegt vor bei der Differentialgleichung des § 20, die wir jetzt in der Form schreiben

$$(Xy + X_0) dx + dy = 0 \quad (16)$$

$$f dx + g dy = 0,$$

d. h. es ist

$$f = Xy + X_0$$

$$g = 1$$

und der integrierende Faktor wird

$$J = e^{\int \frac{1}{g} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx} = e^{\int X dx}.$$

Demnach ist

$$(Xy + X_0) e^{\int X dx} dx + e^{\int X dx} dy = 0$$

ein totales Differential, und wir können nach Vorschrift (9) verfahren:

$$\int (fJ) dx = y \int X e^{\int X dx} dx + \int X_0 e^{\int X dx} dx$$

$$\int (gJ) dy = e^{\int X dx} \cdot y$$

$$\int dy \int \frac{\partial(fJ)}{\partial y} dx = y \int X e^{\int X dx} dx,$$

woraus sich das allgemeine Integral ergibt

$$\int X_0 e^{\int X dx} dx + y e^{\int X dx} = C$$

in Übereinstimmung mit Gl. (14) § 20.

Auf analoge Weise erhält man einen von x freien Faktor J , der nur y enthält, wenn

$$\frac{1}{f} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

von y frei ist. Dann lautet der integrierende Faktor

$$J = e^{\int \frac{1}{f} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy}.$$

Es gibt noch einen dritten Fall, in welchem $J = X, Y$, d. h. gleich dem Produkt zweier Funktionen ist, die nur x bzw. y enthalten. Wir verweisen hierfür auf die ausführlicheren Lehrbücher der Differentialgleichungen¹⁶⁾.

III. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

§ 24. Höhere Differentialquotienten. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Verschiedene Formen.

Ein Blick auf die in § 15 zusammengestellten Differentialformeln zeigt, daß der Differentialquotient der Funktionen $f(x)$ wieder eine Funktion von x ist, die allgemein mit $f'(x)$ bezeichnet wird. Aus

$$y = f(x) \quad (1)$$

folgt also

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'. \quad (2)$$

Diese neue Funktion $f'(x)$ kann man natürlich nochmals differenzieren, wodurch man den zweiten Differentialquotienten von $f(x)$ erhält.

Man drückt diesen Vorgang des nochmaligen Differenzierens an der Formel (2) wie folgt aus

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d\frac{df'(x)}{dx}}{dx} = \frac{dy'}{dx} \quad (3)$$

oder

$$\frac{ddy}{dx \cdot dx} = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{ddf(x)}{dx \cdot dx} = f''(x) = \frac{dy'}{dx} \quad (4)$$

oder mit der Abkürzung $dd = d^2$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x) = y''. \quad (5)$$

Wiederholt man die Differentiation n -mal, so erhält man analog

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = f'''(x) = y''' \quad (6)$$

und

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}. \quad (7)$$

Diese höheren Differentialquotienten sind mit den Variablen x und y die Bausteine, aus denen sich die Differentialgleichungen, die wir nun betrachten wollen, zusammensetzen.

Analog § 10 schreiben wir nunmehr die Differentialgleichung zweiter Ordnung in allgemeiner Form an:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \quad (8)$$

Es ist dies also eine Gleichung, in welcher außer den Variablen x und y auch der erste und zweite Differentialquotient vorkommen. Die Integration von Gleichungen dieser Art ist wiederum mit einem beliebigen Grad von Annäherung möglich, wenn es gelingt, sie nach $\frac{d^2y}{dx^2}$ aufzulösen. Es sei also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \quad (9)$$

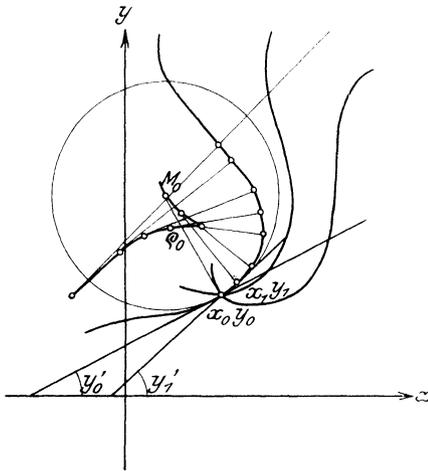


Fig 62. Näherungslösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Hilfe des Krümmungskreises.

Durch diese Gleichung ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ nach Festsetzung bestimmter

Werte für $x, y, \frac{dy}{dx}$ gegeben. Denkt man sich die gesuchte

Funktion $y = \varphi(x)$ als Kurve aufgetragen, so kann man nach Auswahl eines Punktes x_0, y_0 und nach Festlegung der Tangente durch diesen mit y'_0 den Radius des Krümmungskreises in x_0, y_0 berechnen

$$\rho_0 = \frac{V(1 + y_0'^2)^3}{y_0''}. \quad (10)$$

Wird der Kreis mit dem Mittelpunkt M_0 gezeichnet, so kann man auf seinem Umfang dicht neben x_0, y_0 einen neuen Punkt x_1, y_1 aussuchen, dessen Richtungstangens y_1' aus der Figur bestimmt wird. Mit Hilfe der Gl. (9) berechnet man den zweiten Differentialquotienten x_1, y_1

$$y_1'' = f(x_1, y_1, y_1')$$

und damit den Krümmungsradius

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{(1 + y_1'^2)^3}}{y_1''}$$

des Kreises mit dem Mittelpunkt M_1 . Führt man in dieser Weise fort, so erhält man punktweise eine Kurve, für die in allen Punkten die Differentialgleichung (8) erfüllt ist.

Wie man sofort bemerkt, liefert nach Auswahl von $x_0 y_0$ jede Tangente durch diesen Punkt eine Kurve. Es gehen also durch $x_0 y_0$ unendlich viele Kurven, die der Differentialgleichung genügen.

Und ferner liefert jede Auswahl eines Punktes $x_0 y_0$ ein solches Kurvenbüschel.

Jede der so bestimmten Kurven stellt ein partikuläres Integral der gesuchten Differentialgleichung dar. Wählt man zwei beliebige partikuläre Integrale

$$y_1 = \varphi_1(x)$$

und

$$y_2 = \varphi_2(x)$$

aus, aber so, daß sie verschiedenen Kurvenbüscheln angehören, dann ist

$$y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x)$$

das allgemeine Integral.

Durch geeignete Auswahl von C_1 und C_2 kann man jede der oben erhaltenen Kurven darstellen.

Unter den unendlich vielen Differentialgleichungen, die nach Formel (1) möglich sind, interessieren uns nun in der theoretischen Naturbetrachtung zunächst gewisse speziellere Klassen. Zunächst sind vor allem wichtig wegen ihrer Anwendung die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung im weiteren Sinne. Sie sind so benannt, weil die Differentialquotienten in ihnen nur linear vorkommen, während ihre Koeffizienten Funktionen der beiden Variablen sind

$$P_0(x, y) \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x, y) \frac{dy}{dx} + P_2(x, y) y + P_3(x, y) = 0. \quad (11)$$

wo im dritten Gliede y als „nullter“ Differentialquotient zu betrachten ist.

Ein weiterer Schritt führt zu den linearen Differentialgleichungen im engeren Sinne, bei denen in den Funktionen P_0, P_1, P_2, P_3 nur noch die abhängige Variable x vorkommt.

$$P_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x) \cdot y + P_3(x) = 0. \quad (12)$$

Die linearen Differentialgleichungen im engeren Sinne sind in besonders hohem Maße Gegenstand der Forschung gewesen und wir werden ihnen bei einer großen Menge von Aufgaben der Mechanik begegnen.

Allereinfachster Natur und ebenfalls wegen der Anwendungen wichtig sind die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die aus Formel (12) hervorgehen, wenn man die Funktionen P mit Konstanten a entsprechend gleichsetzt:

$$a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y + a_3 = 0. \quad (13)$$

Diese Differentialgleichungen treten besonders in dem wichtigen Kapitel von den kleinen Schwingungen auf.

Wir gehen in den nächsten Paragraphen dazu über, einfachere Beispiele für die linearen Differentialgleichungen zu besprechen.

§ 25. Die Differentialgleichung der Seilkurve.

I. In Fig. 63 ist das Grundsätzliche einer Drahtseilhängebrücke gezeichnet. Zwei Drahtseile I und II sind über die Auflager A und B gespannt und bei A' und B' verankert.

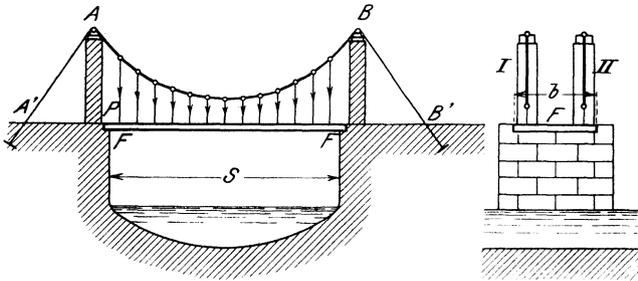


Fig. 63. Die Drahtseilhängebrücke.

An ihnen sind eine Anzahl Hängesäulen 1 2 3 4... in gleichen Abständen befestigt, an deren unterem Ende die Fahrbahn FF aufgehängt wird. Das Gewicht der Fahrbahn und der auf dieser befindlichen Brückennutzbelastung (Fahrzeuge, Menschen usw.) wird durch die Hängesäulen auf die Drahtseile und damit auf die Auflager AB und die Verankerungen $A'B'$ übertragen.

Für eine gegebene Spannweite s und Brückenbreite b wird das Gewicht der Fahrbahn f sowie die Nutzbelastung v als bekannt angenommen. Z. B. kann man für schwere städtische Straßenbrücken mit Pflasterung $f = 1300 \text{ kg/qm}$ für die Fahrbahn und $v = 400 \text{ kg/qm}$ für die Verkehrslast wählen. Beide Arten von Belastung werden über die Spannweite s gleichmäßig verteilt angenommen. Setzt man die Zahl der Hängesäulen einer Brückenseite gleich N , so wird durch jede dieser die Belastung $P = \frac{(f + v) s \cdot b}{2 N}$ auf jedes der beiden Drahtseile übertragen.

Es entsteht jetzt die Aufgabe, zwecks Berechnung der Stärke der Drahtseile, der Auflagerstützen AB sowie der Verankerungen $A'B'$ den Kraftverlauf in dem ganzen System zu ermitteln.

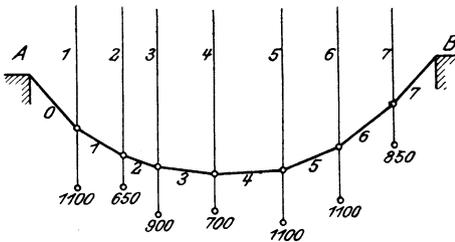


Fig. 64. System von parallelen Kräften.

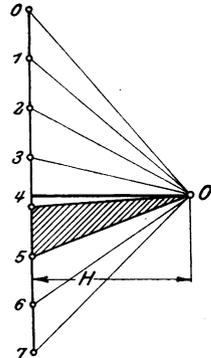


Fig. 65. Kräfteplan.

Zur Vorbereitung der Lösung untersuchen wir eine Anzahl in einer Ebene gegebener paralleler Kräfte (Fig. 64)

$$\begin{array}{ll}
 P_1 = 1100 \text{ kg} & P_5 = 1100 \text{ kg} \\
 P_2 = 650 \text{ ,,} & P_6 = 1100 \text{ ,,} \\
 P_3 = 900 \text{ ,,} & P_7 = 850 \text{ ,,} \\
 P_4 = 700 \text{ ,,} &
 \end{array}$$

und versuchen eine Seilverbindung zwischen ihnen zu finden, die mit den Kräften ein Gleichgewichtssystem bildet.

Man trage die Kräfte der Größe (1 mm = 100 kg) und dem Sinne nach auf einer der gegebenen Krafttrichtung parallelen Geraden auf (Fig. 65), wodurch man auf dieser die Punkte 0...7 erhält.

Von einem beliebig gewählten Pole O ziehe man Gerade nach den Punkten 0—7, wodurch der Kräfteplan 0—7—0 entsteht.

Zu den Geraden $O-0$ bis $O-7$ ziehe man 8 Parallele (Fig. 64), so daß sich stets zwei aufeinanderfolgende dieser auf einer der Kraftlinien $P_1 \dots P_7$ schneiden, wodurch das Seilpolygon $0-1-2-3-4-5-6-7$ entsteht.

Wir betrachten jetzt die Seiten des Seilpolygons als aus realen Seilstücken bestehend, deren erstes (0) und letztes (7) an zwei festen Punkten A und B angeknüpft sei (Fig. 66). In den Knotenpunkten denken wir uns die parallelen Kräfte $P_1 \dots$ bis P_7 angebracht, z. B. als angehängte Gewichte. Bekanntlich ist dann das System, d. h. die Spannungen zweier aneinander stoßenden Seilstücke, mit der dazugehörigen Kraft im Gleichgewicht.

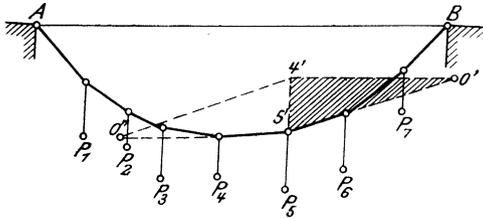


Fig. 66. Seilpolygon.

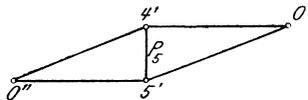


Fig. 67. Kräfteparallelogramm an einem Seileckpunkt.

Die Spannungen der einzelnen Seilstücke können aus dem Kräfteplan entnommen werden; sie sind den Strahlen $O-0$ bis $O-7$ gleich, wenn diese in demselben Maßstab gemessen werden wie die Kräfte $P_1 \dots P_7$. Man erhält:

Spannung $O,0 = 4500$ kg	$O,4 = 3200$ kg
$O,1 = 3800$ „	$O,5 = 3400$ „
$O,2 = 3450$ „	$O,6 = 3900$ „
$O,3 = 3200$ „	$O,7 = 4450$ „

Für den Polygonpunkt 5 ist das Kräfteparallelogramm $0'4'5''0''$ gezeichnet. Es ist die Seilspannung $0''5' = O4$ und $0'5' = O5$. (Fig. 66 und 67.)

Alle Seilspannungen haben die Eigenschaft, daß sie bei Zerlegung in vertikaler und horizontaler Richtung sämtlich gleiche Horizontalkomponenten H , in vorliegendem Falle 3150 kg, ergeben. Man nennt die Größe H den Horizontalzug des

Seilpolygons. Diese Tatsache ergibt sich ohne weiteres aus Fig. 64 durch Zerlegung der Seilspannungen $O-0$ bis $O-7$ in eine Vertikal- und eine Horizontalkomponente H .

Man nennt $AB = s$ die Spannweite des Seilpolygons.

Das Seilpolygon ist eindeutig bestimmt, wenn das Kräftesystem, die Auflager A und B und der Horizontalzug gegeben sind.

Je größer bei gegebenem Kräftesystem der Horizontalzug angenommen wird, desto flacher wird das Seilpolygon und desto größer die Spannungen in den einzelnen Seilstücken. Der Horizontalzug wird bestimmt durch den Abstand des Poles O von der Kraftlinie $O-7$, Fig. 65.

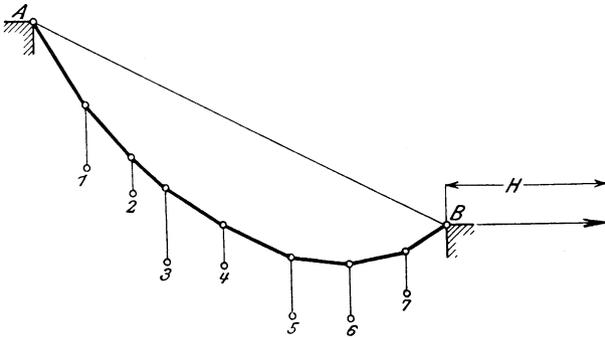


Fig. 68. Seilpolygon durch vorgeschriebene Auflagerpunkte.

Im übrigen ist die Wahl des Poles willkürlich und beeinflusst in erster Linie die Lage der Auflagerpunkte. Da diese aber gegeben sind, muß man die aus der Wahl des Poles sich ergebenden Auflagerpunkte den gegebenen anpassen. Ist z. B. verlangt, daß bei im übrigen ungeänderten Verhältnissen die Auflagerpunkte A und B die in Fig. 68 gegebene gegenseitige Lage haben, dann braucht man nur die vertikalen Abstände der Seilknotenpunkte von der Geraden AB Fig. 66 von der Geraden AB Fig. 68 nach unten abzutragen, um die verlangte Gestalt des Seilecks zu finden.

II. Wir kehren jetzt zur Hängebrücke Fig. 63 zurück. Die ganze Länge sei 40, die Breite 20 m. Wir nehmen $N = 20$ Hängesäulen an, so daß auf eine die Belastung

$$P = \frac{1,7 \cdot 20 \cdot 40}{2 \cdot 20} \text{ t}$$

$$= 1,7 \cdot 20 \text{ t} = 34 \text{ t}$$

entfällt.

Diese 20 Belastungen P werden im Kräfteplan von 0 bis 20 aneinander getragen. Nach Wahl eines Poles O (mit einem Horizontalzug H , dessen Ermittlung weiter unten besprochen wird) zeichnet man, wie oben geschildert, das Seileck 0 1 2 3 ... 20, welches sofort die gesuchte Gestalt des Brückenseiles ergibt, wenn man den Pol O symmetrisch zum Kräfteeck 0—20 gewählt hatte. Fig. 69.

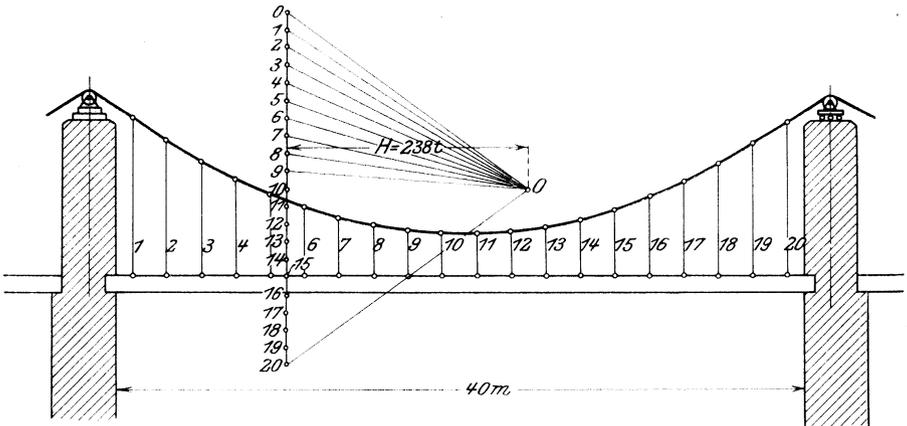


Fig. 69. Konstruktion der Gestalt des Drahtseils.

Ein Blick auf die Figur zeigt, daß im vorliegenden Fall, infolge der großen Zahl zu berücksichtigender Kräfte P , das Seileck als Kurve erscheint. Dies würde noch mehr der Fall sein, wenn wir (was uns durchaus freisteht) eine noch größere Zahl von Hängesäulen angeordnet hätten; dann wäre die Verteilung der Brückenlast auf das Seil noch gleichmäßiger geworden: wir hätten die Seilkurve aus einer noch größeren Anzahl kleinerer Stücke zusammengesetzt.

III. Auf diese Weise gelangt man durch fortgesetzte Unterteilung der Belastung zum Begriff der stetigen Übertragung der Last auf das Seil.

Hierbei kann man die Voraussetzung einer über die ganze Spannweite l gleichmäßigen Lastverteilung fallen lassen und eine beliebige ungleichmäßige Verteilung voraussetzen, die als Funktion $q = f(x)$ des Abstandes von einem Auflager gegeben sei, und zwar graphisch als sogenannte Belastungsfläche $ABED$ (Fig. 70). Auch in diesem Falle kann man einen

Kräfteplan zeichnen, indem man die ganze Last $Q = \int_0^l f(x) dx$ als Vertiale ON aufträgt. Die Spannung in einem Punkte P des Seiles findet man, indem man in P eine Tangente und zu dieser eine Parallele durch den Pol des Kräfteplanes zieht. Diese Polwahl ist gleich der Seilspannung. Auch hier ergibt sich wieder, daß alle Seilspannungen dieselbe Horizontalkomponente haben.

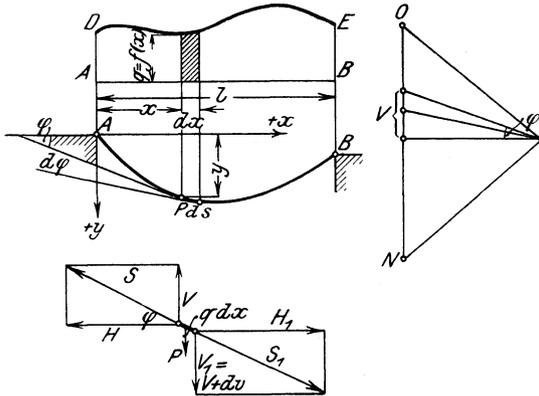


Fig. 70. Seilkurve mit stetiger Belastung.

Zur Gestalt der Seilkurve kann man auf rechnerischem Wege gelangen durch Einführung eines Koordinatensystems xy mit dem Auflagerpunkt A als Anfangspunkt; die Ordinaten y werden positiv nach unten gerechnet, die Abszissen x positiv nach rechts.

Wir betrachten ein unendlich kleines Stück ds der Seilkurve im Punkte, welches wir aus dem Seil herausgeschnitten denken. Damit das Gleichgewicht des Stückchens weiterbesteht, müssen wir uns die von den fortgelassenen Seilstücken auf ds übertragenen Seilspannungen S nach links und S_1 nach rechts hinzudenken, neben der von der Belastungsfläche her rührenden kleinen vertikalen Belastung $q dx$. Zerlegt man die Spannungen S und S_1 in ihre horizontalen und vertikalen Komponenten, so kann man die Bedingungen für das Gleichgewicht des kleinen Seilstückes ds anschreiben. In horizontaler Richtung gilt:

$$H = H_1,$$

welche Gleichung wegen des überall gleichen Horizontalzuges erfüllt ist.

In vertikaler Richtung gilt:

$$V = q dx + V_1. \quad (1)$$

Da hier aber $V_1 = V + dV$ gesetzt werden kann, so folgt, nach beiderseitiger Weglassung von V :

$$dV = -q dx. \quad (2)$$

Da nun, wie wir oben sahen, die Spannungen S tangential zur Seilkurve sind, so gilt

$$\frac{V}{H} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} \quad (3)$$

oder

$$V = H \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

Hier kann man wegen der Konstanten H sofort differenzieren

$$dV = H d\left(\frac{dy}{dx}\right) = H \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (5)$$

Setzt man das Ergebnis in Gl. (2) ein, so folgt:

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = -q dx$$

oder nach Division mit dx :

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = -q. \quad (6)$$

Dies ist die Differentialgleichung der Seilkurve.

Diese Differentialgleichung ist von der zweiten Ordnung wegen des darin vorkommenden Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, der von der zweiten Ordnung ist.

Jede Differentialgleichung hat ein allgemeines Integral, welches sich aus partikulären Integralen mit Hilfe unbestimmter Konstanten zusammensetzt. Jede Differentialgleichung hat unendlich viele partikuläre Integrale.

Im vorliegenden Fall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung sind zwei voneinander unabhängige partikuläre Integrale erforderlich, um das allgemeine Integral aufzubauen. Setzen wir in (6) zunächst allgemein:

$$q = f(x), \quad (7)$$

so folgt durch eine erstmalige Integration der Differentialgleichung

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -f(x) \quad (8)$$

zunächst

$$H \frac{dy}{dx} = C_1 - \int f(x) dy \quad (9)$$

und durch nochmalige Integration

$$Hy = C_2 + \int C_1 dx - \int dx \int f(x) dx \quad (10)$$

oder

$$Hy = C_2 + C_1 x - \int dx \int f(x) dx. \quad (11)$$

Hier sind C_1 und C_2 die beiden unbestimmten Integrationskonstanten; jedes Wertpaar $C_1 C_2$ liefert ein partikuläres Integral.

Sonach gäbe es unendlich viele Seilkurven, die die Aufgabe lösen. Aus dieser Schar von Kurven hat man nun diejenige herauszusuchen, die sich den weiteren Bedingungen der Kurve anpaßt. Derartige Bedingungen können in erster Linie die Punkte festsetzen, durch welche die Seilkurve hindurchgehen soll. Wir wollen solche Bedingungen an einer besonderen Kurve studieren, die dem Fall entspricht, daß die Belastung q gleichmäßig über die Spannweite l verteilt ist. Es ist dann $f(x) = q = \text{Const}$ und damit nimmt das allgemeine Integral Gleichung (12) die Form an:

$$Hy = C_2 + C_1 x - q \frac{x^2}{2}. \quad (12)$$

Da y eine quadratische Funktion von x ist, so wird die Seilkurve eine Parabel. Unsere weiteren Bedingungen sollen nun darin bestehen, 1) daß die Kurve durch den Anfangspunkt $x = y = 0$, d. h. durch den linken Auflagerpunkt gehen soll, und 2) daß der rechte Auflagerpunkt um die Strecke a tiefer als der linke liegen soll, d. h. die Kurve soll durch den Punkt $x = l$, $y = a$ gehen.

Aus der ersten Bedingung findet man:

$$0 = C_2, \quad (13)$$

aus der zweiten:

$$Ha = C_1 l - q \frac{l^2}{2} \quad (14)$$

und hieraus:

$$C_1 = \frac{2Ha + ql^2}{2l}. \quad (15)$$

Jetzt kann man das partikuläre Integral, welches den gegebenen Bedingungen genügt, schreiben wie folgt:

$$Hy = \frac{2Ha + ql^2}{2l} x - \frac{qx^2}{2}. \quad (16)$$

In dieser Gleichung tritt noch der Horizontalzug H auf, über den wir ebenfalls mit verfügen müssen. Wie wir oben sahen, hängt von dem Horizontalzug der Durchhang der Kurve ab. Dies kann man rechnerisch erkennen, wenn man in Gleichung (16) beide Auflager A und B von gleicher Höhe annimmt, d. h. $a = 0$ setzt. Dann ergibt sich:

$$Hy = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}. \quad (17)$$

Der Durchhang der Seilkurve findet sich aus dieser Gleichung für $x = \frac{l}{2}$ zu

$$y = f = \frac{1}{H} \left(\frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} \right) = \frac{ql^2}{8H}. \quad (18)$$

Diese Gleichung dient dazu, bei gegebenem Durchhang f den erforderlichen Horizontalzug H zu berechnen.

IV. Das oben angegebene Verfahren der Konstruktion der Seilkurve kann man zur graphischen Integration der Differentialgleichung

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = f(x). \quad (19)$$

anwenden. In der Figur 71 sei die Funktion $f(x)$ graphisch durch die Kurve abc gegeben; es werden alle diejenigen Kurven verlangt, die der obengenannten Differentialgleichung genügen.

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung lautet:

$$Hy = C_2 + C_1x + \int dx \int f(x) dx. \quad (20)$$

Wir nehmen jetzt einen festen Punkt x_0y_0 an und suchen die Gleichung aller Kurven, die durch diesen Punkt gehen und der Differentialgleichung genügen. Durch Einsetzen von x_0 und y_0 in (20) ergibt sich

$$Hy_0 = C_2 + C_1x_0 + A(x_0), \quad (21)$$

wo $A(x_0)$ der Wert des in (20) rechtsstehenden Integrals ist, den man nach Einsetzen von x_0 erhält. Löst man (21) nach C_2 auf, so ergibt sich:

$$C_2 = Hy_0 - A(x_0) - C_1x_0. \quad (22)$$

Setzt man dies in Gl. (20) ein, so erhält man eine neue Integralgleichung, die nur noch eine Integrationskonstante C_1 enthält, nämlich:

$$Hy = Hy_0 - A(x_0) + C_1(x - x_0) + \int dx \int f(x) dx. \quad (23)$$

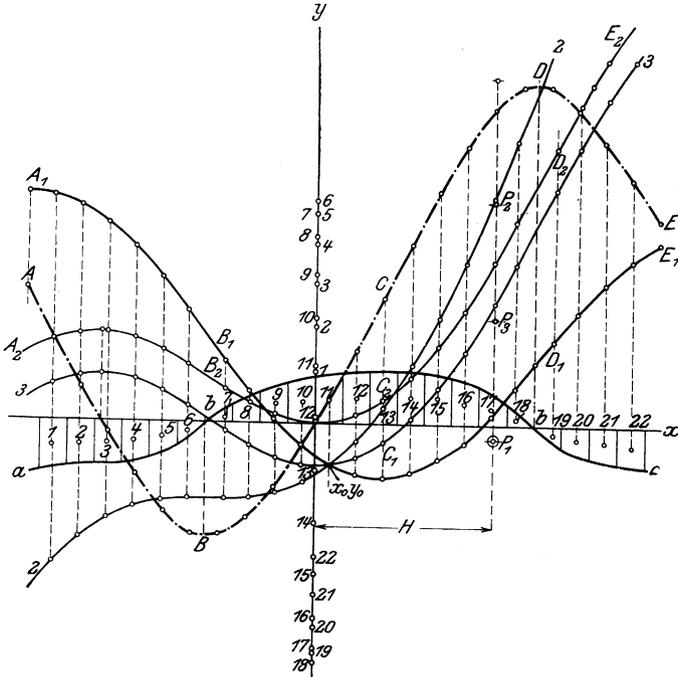


Fig. 71. Graphische Ermittlung der Seilkurven für eine gegebene Lastverteilung.

Diese Gleichung ergibt für jeden Wert von C_1 eine Kurve, die durch $x_0 y_0$ geht und der Differentialgleichung genügt; sie repräsentiert, wie man zu sagen pflegt, ein „Büschel“ von Seilkurven, dessen Mittelpunkt $x_0 y_0$ ist.

Um eine Anzahl von Individuen dieses Büschels zu konstruieren, zerlegen wir die von der Kurve $y = f(x)$ und der x -Achse begrenzte Fläche durch Ordinaten des gleichen Abstandes „Eins“ in eine Anzahl von „Elementarstreifen“, deren Schwerpunkte man ermittelt. Die Streifen sind von 1 bis 22 gezählt. Dann trägt man die mittleren Ordinaten der Streifen auf der y -Achse (oder auf einer zu dieser Parallelen) von 0 beginnend

auf, wobei negative Ordinaten in Richtung der positiven y -Achse aufgetragen werden. Nach Annahme eines Poles P_1 im Abstände H von der y -Achse konstruiert man punktweise die Seilkurve in der oben beschriebenen Weise, indem man beim Punkte $x_0 y_0$ beginnt und die Kurve nach rechts und links fortsetzt. So entstehe die Kurve $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$.

Jede Auswahl eines Poles oder, was dasselbe heißt, jede Festlegung der Tangente der Kurve im Punkte $x_0 y_0$ liefert eine Seilkurve. Die einzelnen Kurven verlaufen immer steiler, je steiler man diese Anfangstangente wählt; schließlich arten die Seilkurven in eine Gerade aus, die durch $x_0 y_0$ parallel zur y -Achse verläuft; dieser Fall entspricht dem Wert:

$$C_1 = \infty.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten für die anderen Individuen des Büschels greifen wir auf das erste Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$H \frac{dy}{dx} = C_1 + \int f(x) dx \quad (24)$$

zurück. Die Kurve

$$\eta = C_1 + \int f(x) dx, \quad (25)$$

die dieses Integral repräsentiert und die Abhängigkeit der Tangentenrichtungen der Seilkurven von den Werten der Abszissen wiedergibt, kann ebenfalls graphisch aus der Kurve abc gefunden werden.

Das Integral $\int f(x) dx$

bedeutet, wie in § 5 dargelegt, den zwischen der Kurve abc und der x -Achse eingeschlossenen Flächeninhalt, der begrenzt ist durch irgendeine Anfangsordinate und die Ordinate der Abszisse x . Wir wählen die Anfangsordinate bei der Abszisse $x = 0$, d. h. wir lassen die Kurve

$$\eta = C_1 + \int f(x) dx$$

durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems gehen. Die Konstante C_1 muß gleich 0 gesetzt werden, wie sich aus folgendem ergibt.

Die graphisch gegebene Kurve abc würde, wenn man sie analytisch darstellen wollte, eine Gestalt folgender Art haben

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + \dots,$$

da sich jede Funktion im allgemeinen in eine Potenzreihe entwickeln läßt¹⁷⁾.

Das Integral dieser Funktion, wenn man von der Konstanten absieht, lautet dann:

$$\int y dx = \int f(x) dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots \quad (26)$$

und mit der Integrationskonstanten

$$= C_1 + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots$$

Da wir aber unsere Kurvenfläche von $x = 0$ an zählen wollen, also für $x = 0$ das Integral $\int y dx$ verschwinden soll, muß auch $C_1 = 0$ sein.

Zur graphischen Ermittlung der Kurve

$$\eta = \int f(x) dx$$

aus der Kurve abc addieren wir die mittleren Höhen der schon oben benutzten Elementarstreifen auf den jeweiligen Endordinaten der Streifen. Es entsteht so die Kurve $ABCDE$.

Bei der Ausführung der beschriebenen graphischen Summation ergibt sich wieder wie früher, daß die Kurve

$$\eta = \int f(x) dx$$

da Kulminationspunkte haben muß, wo die Kurve

$$y = f(x)$$

Nullpunkte hat. Nullpunkte der Kurve abc liegen vor in den Punkten b ; entsprechend hat die Kurve $ABCDE$ ihre Kulminationspunkte in B und D .

Durch Hinzufügung der Integrationskonstanten C_1 erhält man die Gesamtheit der ersten Integralkurven der Differentialgleichung

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x),$$

nämlich

$$\eta = H \frac{dy}{dx} = C_1 + \int f(x) dx.$$

Zu jedem Individuum dieser Kurvenschar, die durch Parallelverschiebung in Richtung der y -Achse aus $ABCDE$ entsteht, gehören einfach unendlich viele Individuen der Schar der zweiten Integrale, aber nur ein Individuum, welches durch $x_0 y_0$ geht. Alle diese Kurven, die die ersten Integrale zu $ABCDE$ sind, entstehen auseinander durch Parallelverschiebung. Um eine dieser Kurven zu bestimmen, z. B. $3-3-3-3$, die die y -Achse mit horizontaler Tangente schneidet, legt man den Pol P_3 fest,

indem man den einer horizontalen Tangente parallelen Polstrahl $10 - P_3$ zieht. Aus $3-3-3-3$ wird die Kurve $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2$ gewonnen durch Parallelverschiebung in Richtung der y -Achse; $A_3 B_3 C_3 D_3 E_3$ ist das durch den Nullpunkt mit horizontaler Tangente gehende Individuum und hat die Gleichung

$$y = \int dx \int f(x) dx.$$

Die Konstruktion der Seilkurve $f(x)$ ist also gleichbedeutend mit der Herstellung der zweiten Integralkurve zu dieser Funktion¹⁸⁾.

§ 26. Differentialgleichung der elastischen Linie.

Von derselben Form wie die Differentialgleichung der Seilkurve ist die technisch sehr wichtige Differentialgleichung der elastischen Linie.

Man versteht hierunter die Gestalt, die ein elastischer (im allgemeinen prismatischer) Stab unter Einfluß äußerer Kräfte annimmt.

Wir wollen nur ebene elastische Linien betrachten und setzen zunächst einen Balken der Länge l voraus, der an einem Ende eingespannt und am andern durch eine Kraft P auf Biegung beansprucht ist. Fig. 72.

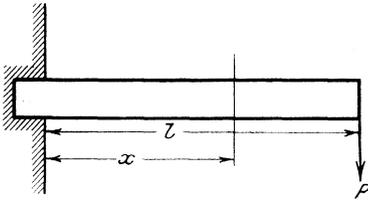


Fig. 72. Einseitig eingespannter Balken.

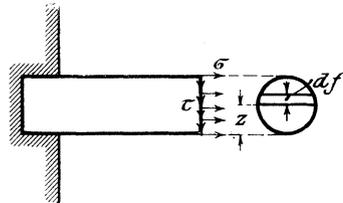


Fig. 73. Normalspannungen und Schubspannungen.

Wir untersuchen die Spannungsverhältnisse an einem Querschnitt in der Entfernung x vom eingespannten Ende.

Es treten, wenn wir uns das vordere Ende entfernt denken, die Normalspannungen σ über den Querschnitt auf, deren Resultierende

$$\int \sigma df = 0 \quad (1)$$

verschwinden und deren Moment

$$\int z \sigma df = P(l - x) \quad (2)$$

sein muß, wenn Gleichgewicht zwischen der beanspruchenden Kraft und den inneren Spannungen herrschen soll. Streng genommen kommt noch die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschiebung quer zur Balkenachse: $\int \tau df = P$ hinzu, doch wollen wir die Schubspannungen τ nicht betrachten (Fig. 73).

Nunmehr müssen Annahmen über die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt gemacht werden. Die einfachste Annahme ist die einer linearen Verteilung (Fig. 74)

$$\sigma = \sigma_u + z a,$$

womit sich auf Grund von Gleichung(1) eine Faserschicht

im Balken $z = z_u = -\frac{\sigma_u}{a}$ er-

gibt, die spannungslos ist. Diese Faserschicht enthält die Balkenachse, welche die Schwerpunkte der Balkenquerschnitte verbindet. Die Spannung wird dann Druckspannung

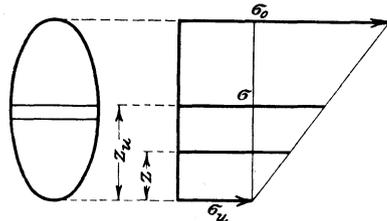


Fig. 74. Lineare Verteilung der Normalspannungen.

$$\sigma = -\sigma_u \frac{z}{z_u} \tag{3a}$$

auf der unteren Hälfte der Balkenquerschnitte, Zugspannung

$$\sigma = +\sigma_o \frac{z}{z_o} \tag{3b}$$

auf der oberen Hälfte der Querschnitte.

Gleichung (2) geht hiermit aber über in

$$\frac{\sigma_o}{z_o} \int z^2 df = P \cdot (l - x)$$

oder, wenn $\int z^2 df$, das Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts, mit J bezeichnet wird:

$$\frac{\sigma_o}{z_o} = \frac{P(l-x)}{J}. \tag{4}$$

Wir betrachten jetzt die Formänderung des Balkens (Fig. 75). An der Stelle x liegt eine Krümmung der Mittellinie vor und wir nehmen an, daß die Balkenquerschnitte auch nach der Krümmung eben und zur Mittellinie senkrecht seien. Dann gilt nach der Figur, wenn

$$\Delta dx = \frac{\sigma dx}{E}$$

die Verlängerung einer im Abstand z von der Balkenachse liegenden Faser der Länge dx ist,

$$\frac{\Delta dx}{z} = \frac{dx}{\rho}$$

oder

$$\frac{\sigma}{z} = \frac{E}{\rho} \quad (5)$$

und nach (4)

$$\frac{E}{\rho} = \frac{P \cdot (l - x)}{J}. \quad (6)$$

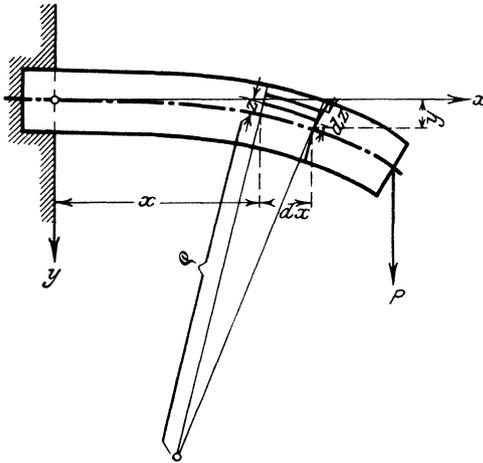


Fig. 75. Formänderung des einseitig eingespannten Balkens.

Ist nun y die durch die Beanspruchung erfolgte Senkung der Balkenachse unter die ursprüngliche horizontale Lage an der Stelle x , so ist der Ausdruck für den Krümmungsradius nach den Lehren der analytischen Geometrie¹⁹⁾

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{d^2 y}{dx^2}. \quad (6a)$$

Weil aber die Biegungen innerhalb des Bereiches der elastischen Formänderungen nur klein ausfallen, kann man die

Neigungen der Balkenachse gegen die x -Achse als klein voraussetzen und also $\frac{dy}{dx}$ vernachlässigen. Gleichung (6) wird dann angenähert:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot P(l - x). \quad (7)$$

Diese Gleichung geht in diejenige der Seilkurve über, wenn $E \cdot J = H$ und $P(l - x) = f(x)$ gesetzt wird.

Handelt es sich um einen Balken auf zwei Stützen, der eine beliebig verteilte Last $f(x)$ trägt (Fig. 76), so kann man ebenfalls die Gl. (7) benutzen, indem man das Biegemoment an der Stelle $x = M_x$ setzt

$$E \cdot J \frac{d^2 y}{dx^2} = - M_x, \quad (8)$$

wo das Minuszeichen deshalb steht, weil das positive Moment M_x eine negative Krümmung hervorbringt.

M_x ermittelt sich hier als das erste Seilpolygon zur Belastungsfläche

$$M_x = - \int dx \int f(x) dx. \quad (9)$$

Die Lösung der Differentialgleichung der elastischen Linie verlangt also die Konstruktion der vierten Integralkurve zur Kurve $f(x)$ oder die Konstruktion des zweiten Seilpolygons entsprechend dem Ansatz:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = (f(x)). \quad (10)$$

Den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Integralkurven zu $f(x)$ liefert folgende durch Figur 77 erläuterte Aufstellung:

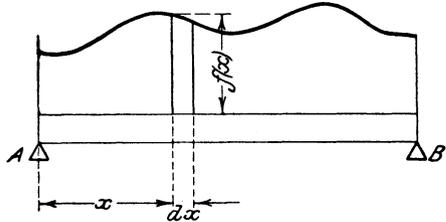


Fig. 76. Stetige Lastverteilung über einem Balken.

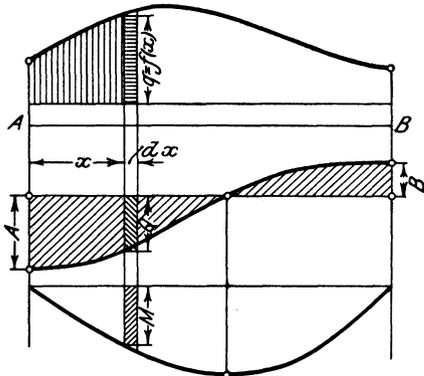


Fig. 77. Belastungsfläche, Querkraftfläche, Momentenfläche.

$q = f(x)$ ist die Belastungsfläche,

$Q = A - \int_0^x q \, dx$, da serste Integral zu q , ist die Querkraftfläche,

$M = \int_0^x Q \, dx$, das zweite Integral zu q , ist die Momentenfläche.

Es gelten also die Beziehungen:

$$\frac{dQ}{dz} = -q; \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Will man in dem Ausdruck für ρ (6 a) $\frac{dy}{dx}$ nicht vernachlässigen, so lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} : \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = f(x). \quad (11)$$

Diese Differentialgleichung gehört zum nicht linearen Typus, sondern hat die allgemeine Form

$$F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}\right) = f(x) \quad (12)$$

und wird im Anschluß an § 28 behandelt werden.

§ 27. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Eine äußerst wichtige Rolle spielt in der Technik die Differentialgleichung:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + cy = 0, \quad (1)$$

wo a, b, c konstante Größen sind. Bekanntlich werden alle freien Schwingungsvorgänge, in erster Linie die eines Massenpunktes, durch diese Gleichung beschrieben. Es ist nämlich $a = m$ die Masse des Punktes, b die Dämpfungskonstante der Bewegung, c die Kraft, die den Punkt an die Mittelachse seiner Bewegung fesselt, y die Entfernung des Punktes von seiner Mittellage und $x = t$ die Zeit.

Zur Integration der Gleichung (1) substituieren wir zunächst

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und erhalten

$$ap \frac{dp}{dx} + bp + cy = 0. \quad (4)$$

In dieser Gleichung substituieren wir

$$p = vy, \quad \frac{dp}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}, \quad (5)$$

wo wir uns v als eine zu ermittelnde Funktion von y denken.

Wir erhalten nach Division mit y

$$av \left(v + y \frac{dv}{dy} \right) + bv + c = 0 \quad (6)$$

oder anders geordnet

$$(av^2 + bv + c) = -avy \frac{dv}{dy}. \quad (7)$$

Hier ist die Trennung der Variablen möglich:

$$\frac{dy}{y} = - \frac{avdv}{av^2 + bv + c} \quad (8)$$

oder nach Division mit a im Nenner und Zähler der rechten Seite:

$$\frac{dy}{y} = - \frac{v dv}{\left(v^2 + \frac{b}{a}v + \frac{c}{a} \right)}. \quad (9)$$

Setzen wir hier:

$$\left(v^2 + \frac{b}{a}v + \frac{c}{a} \right) = (v - \alpha)(v - \beta), \quad (10)$$

wo

$$-(\alpha + \beta) = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

sind, so kann man die rechte Seite von (9) in zwei Partialbrüche zerlegen und schreiben:

$$\frac{dy}{y} = - \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{v - \alpha} - \frac{\beta}{v - \beta} \right) dv, \quad (11)$$

woraus man durch Integration erhält

$$\lg y^{\alpha - \beta} = \lg (v - \beta)^\beta - \lg (v - \alpha)^\alpha + \lg C \quad (12)$$

oder nach Beseitigung der Logarithmen

$$y^{\alpha - \beta} = C \frac{(v - \beta)^\beta}{(v - \alpha)^\alpha}. \quad (13)$$

Macht man in dieser Gleichung nach (5) die Restitution

$$v = \frac{p}{y},$$

so ergibt sich allgemeines Integral von Gleichung (4)

$$1 = C \frac{(p - \beta y)^\beta}{(p - \alpha y)^\alpha}. \quad (14)$$

Diese Gleichung kann ersetzt werden durch die beiden anderen

$$\left. \begin{aligned} p - \alpha y &= A', \\ p - \beta y &= B', \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

wenn man A' und B' so bestimmt, daß

$$C \frac{B'^\beta}{A'^\alpha} = 1 \quad (15a)$$

wird. Setzt man in (15) für p seinen Wert aus Gleichung (2)

$p = \frac{dy}{dx}$ ein, so findet man aus

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \alpha \left(y + \frac{A'}{\alpha} \right) \\ \frac{dy}{dx} &= \beta \left(y + \frac{B'}{\beta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

die Integrale

$$\left. \begin{aligned} \lg \left(y + \frac{A'}{\alpha} \right) &= \alpha x + \lg A, \\ \lg \left(y + \frac{B'}{\beta} \right) &= \beta x + \lg B, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

die unter Benutzung der Exponentialfunktion übergehen in:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -\frac{A'}{\alpha} + A e^{\alpha x}, \\ y_2 &= -\frac{B'}{\beta} + B e^{\beta x}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Da man nun A' und B' gleichzeitig = Null werden lassen kann, ohne die Gleichung (15a) zu verletzen, so stellen

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A e^{\alpha x} \\ y_2 &= B e^{\beta x} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

die beiden gesuchten partikulären Integrale von (1) dar, so daß das allgemeine Integral lautet:

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}. \quad (20)$$

Hier müssen α und β Wurzeln der Gleichung

$$\mu^2 + \frac{b}{a}\mu + \frac{c}{a} = 0 \quad (21)$$

sein.

Die Wurzeln der Gleichung lauten:

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \mu_1 &= -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}, \\ \beta = \mu_2 &= -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

haben also die Form

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\varrho + i\sigma \\ \beta &= -\varrho - i\sigma \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

mit
$$\varrho = \frac{b}{2a}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}},$$

wo i die imaginäre Einheit bedeutet.

Das allgemeine Integral (20) nimmt nun die verschiedensten Formen an, je nach den Werten, die den Konstanten abc bzw. den Quotienten $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ beigelegt werden.

Wir setzen a zunächst stets als positiv voraus, was durch Zeichenwechsel jedenfalls erreicht werden kann. Dann ergibt sich, daß y im Falle eines negativen b mit x unendlich zunimmt. Ist b positiv, so kann y mit zunehmendem x nicht ins Unendliche wachsen, wenn nicht etwa c negativ wird. Negatives c läßt y ebenfalls unendlich groß werden.

I. Zunächst untersuchen wir näher den Fall

$$b = 0.$$

Dann wird das allgemeine Integral (20)

$$y = Ae^{+i\sigma x} + Be^{-i\sigma x}. \quad (24)$$

Negatives c läßt y unendlich zunehmen (Fig. 78), positives c verwandelt die Exponentialfunktion in die zyklometrische Funktion und (24) nimmt die Gestalt an (mit $B_0 = A + B$, $A_0 = (A - B)i$)

$$y = A_0 \sin \sigma x + B_0 \cos \sigma x \quad (25)$$

oder
$$y = A_1 \sin \sigma(x - x_0), \quad (26)$$

wo gilt $A_0 = A_1 \cos \sigma x_0, \quad B_0 = -A_1 \sin \sigma x_0.$

Wir erhalten also eine rein periodische Funktion:

A_1 heißt die Amplitude

x_0 die Phasenverschiebung,

$T = \frac{2\pi}{\sigma}$ die Periode,

$n = \frac{\sigma}{2\pi}$ die Frequenz der Schwingung.

σ die Kreisfrequenz.

Die hiermit gegebene Bewegungsform ist in Fig. 79 dargestellt.

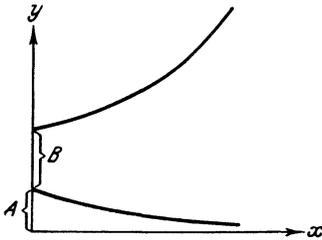


Fig. 78. Uneigentlicher Schwingungsvorgang.

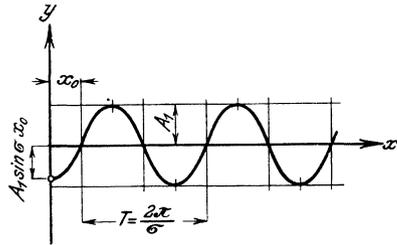


Fig. 79. Reine Sinusschwingungen.

IIa. Ist die Größe $b < 0$, die Schwingung also mit Dämpfung behaftet, so bietet sich zunächst der Unterfall

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} > 0 \quad (27)$$

dar. Es stellt sich dann (20) in die Form:

$$y = A_1 e^{-\varrho x} \sin \sigma(x - x_0) \quad (28)$$

mit

$$-A_1 \sin \sigma x_0 = A + B$$

$$A_1 \cos \sigma x_0 = A - B) i.$$

Setzt man, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, $x_0 = 0$, so kann man die Maxima und Minima von y aufsuchen mittelst des Ansatzes:

$$\frac{dy}{dx} = 0 = e^{-\varrho x} (\sigma \cos \sigma x - \varrho \sin \sigma x) = 0. \quad (29)$$

Diese Gleichung hat unendlich viele positive Wurzeln:

$$\sigma x_k = \frac{\pi}{2} - \varphi + (k - 1) \pi; \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (30)$$

wo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho}{\sigma}$$

ist. Die zugehörigen Maximal- bzw. Minimalwerte von y sind:

$$y_k = A_1 e^{-\varrho x_k} \cos \varphi,$$

woraus sich für die Differenz der Logarithmen zweier aufeinanderfolgender y ergibt:

$$\begin{aligned} \lg(y_{k+1}) - \lg(y_k) &= -\varrho(x_{k+1} - x_k) \\ &= -\frac{\varrho}{\sigma} \pi. \end{aligned} \quad (31)$$

Die logarithmische Differenz zweier aufeinanderfolgender Schwingungsweiten ist also konstant, man nennt die Größe

$$\frac{\varrho}{\sigma} \pi = \frac{b \pi}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad (32)$$

das logarithmische Dekrement der Schwingung.

Fig. 80 gibt ein Bild einer gedämpften Schwingung.

$\frac{2\pi}{\varrho}$ ist wieder die Schwingungsdauer, sie ist größer als bei nicht vorhandener Dämpfung.

IIb. Ist

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} < 0,$$

dann wird das allgemeine Integral

$$y = e^{-\varrho x} (A e^{+\sigma x} + B e^{-\sigma x}) \quad (33)$$

in welcher Formel $\sigma < \varrho$ ist. Jetzt kann weder y noch $\frac{dy}{dx}$ verschwinden, solange A und B gleiche Vorzeichen haben. Es können also weder Nullpunkte noch Extreme vorkommen; y nähert sich mit wachsendem x asymptotisch dem Werte Null (Fig. 81).

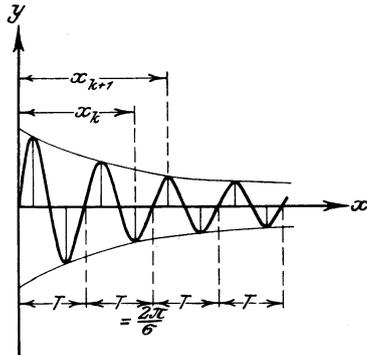


Fig. 80. Gedämpfte Schwingung.

Haben jedoch A und B verschiedene Vorzeichen, so gibt es einen Nullpunkt:

$$x_1 = \frac{1}{2\sigma} \lg \frac{A}{B},$$

der aber nur dann wirklich auftritt, wenn die Bewegung zur Zeit $x = 0$ nach dem Schwingungsmittelpunkt hin gerichtet war (Fig. 82).

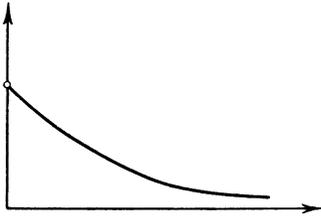


Fig. 81.

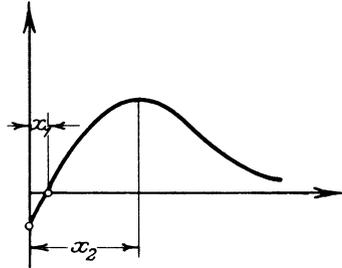


Fig. 82.

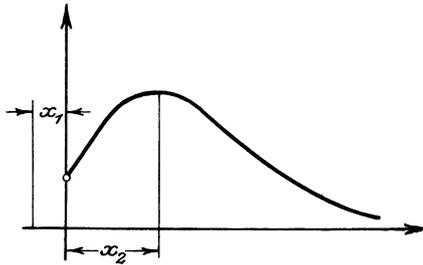


Fig. 83.

Fig. 81—83. Verschiedene Formen der aperiodischen Bewegung.

Das Extrem liegt bei

$$x_2 = \frac{1}{2\sigma} \lg \frac{(\varrho + \sigma)B}{(\varrho - \sigma)A}$$

und ist unter allen Umständen vorhanden. Nach Überschreitung des Extrems führt die Bewegung zur Mittellage zurück.

Diese Bewegungsform ist die aperiodische, von der in Fig. 81, 82, 83 die wichtigsten Formen dargestellt sind.

III. Der Fall $\sigma = 0$ bzw.

$$b^2 = 4ac$$

liefert zwei gleiche Wurzeln α und β und mithin unter Anwendung der Regeln des § 40 das allgemeine Integral:

$$y = A + Bx)e^{-\epsilon x}.$$

Diese Bewegung hat ebenfalls den Charakter IIb, je nachdem die Anfangsbedingungen bzw. die Werte A und B gewählt werden. Wir geben die möglichen Fälle in den nebenstehenden Figuren wieder.

$$A > 0$$

Fig. 84: $B - \epsilon A < 0$

$$B > 0$$

$$A > 0$$

Fig. 85: $B - \epsilon A < 0$

$$B < 0$$

$$A > 0$$

Fig. 86: $B - \epsilon A > 0$

$$B > 0$$

Über die Anwendung der Differentialgleichung

$$ay'' + by' + cy = 0$$

auf technische Problem siehe W. Hort, Technische Schwingungslehre, 2. Aufl., Springer, 1922.

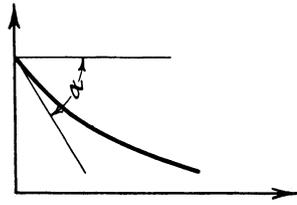


Fig. 84.

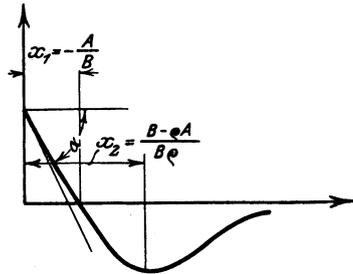


Fig. 85.

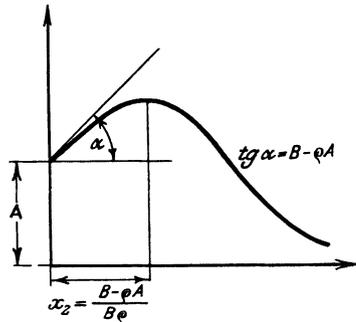


Fig. 86.

Fig. 84—86. Spezielle aperiodische Bewegungsverformen.

§ 28. Nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Kettenlinie.

Unter den nicht linearen Differentialgleichungen II. Ordnung gestatten zunächst diejenigen eine allgemeine Behandlung, in welchen nur der zweite und der erste Differentialquotient vorkommen, welche sich also an der Form erweisen

$$F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{1}$$

Gelingt es, diese Gleichung nach $\frac{d^2 y}{dx^2}$ aufzulösen, so daß also eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (2)$$

entsteht, so wird eine erste Integration möglich, wenn man

$$\frac{dy}{dx} = p$$

substituiert. Es folgt dann statt (2)

$$\frac{dp}{dx} = f(p) \quad (3)$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher man nach Trennung der Variablen schreiben kann

$$dx = \frac{dp}{f(p)} \quad (4)$$

und nach erstmaliger Integration

$$x = C_1 + \int \frac{dp}{f(p)} = C_1 + \varphi(p). \quad (5)$$

Gelingt es, diese Gleichung nach p aufzulösen, wodurch

$$p = \psi(x - C_1) \quad (6)$$

resultiere, so ist die zweite Integration möglich.

Man schreibt statt (6)

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x - C_1) \quad (7)$$

und nach Trennung der Variablen

$$dy = \psi(x - C_1) dx,$$

woraus sich das allgemeine Integral findet:

$$y = C_2 + \int \psi(x - C_1) dx.$$

Ein Beispiel für diese Art von Differentialgleichungen bietet die Kettenlinie.

§ 29. Die Kettenlinie.

Diese Kurve gehört zu den „Seilkurven“.

Sie ist identisch mit der Gestalt eines an zwei Punkten aufgehängten Seiles, welches nur unter seinem Eigengewicht

steht und welches keine Biegesteifigkeit aufweist (annähernd bei einer Kette erfüllt). Fig. 87.

Wir betrachten wie bei der Seilkurve das Gleichgewicht eines Kurvenelementes ds und gelangen zu der Formel

$$V = \gamma ds + V_1 = dV + V_1, \quad (1)$$

in welcher γds das Eigengewicht des Kettenstückchens ds bedeutet.

Da ferner auch hier das Verhältnis zwischen der Vertikal-komponente V der Kettenspannung und dem Horizontalzug H gleich dem Tangens des Neigungswinkels oder

$$V = H \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

sein muß, so folgt als Differentialgleichung der Kettenlinie:

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = \gamma ds. \quad (3)$$

Schreibt man hier

$$H d \frac{dy}{dx} = -\gamma ds, \quad (4)$$

so kann man sofort einmal integrieren

$$H \frac{dy}{dx} = C + \gamma s, \quad (5)$$

d. h. der Richtungstangens der Kurve ist der Bogenlänge proportional.

Zur Gewinnung des allgemeinen Integrals kehren wir zur Gleichung

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = +\gamma ds$$

zurück, in welcher wir für

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (20)$$

setzen. Nach Division mit dx folgt dann

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = +\gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (6)$$

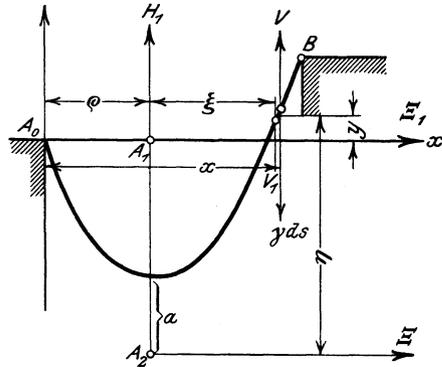


Fig. 87. Die Kettenlinie.

Nach Substitution von

$$\frac{dy}{dx} = p$$

ergibt sich hier

$$\frac{H}{\gamma} \frac{dp}{dx} = +\sqrt{1+p^2} \quad (7)$$

und nach Trennung der Variablen mit $\frac{H}{\gamma} = a$

$$a \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = +dx. \quad (8)$$

Nach erstmaliger Integration folgt:

$$a \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = C_1 + x \quad (9)$$

oder

$$a \lg(p + \sqrt{1+p^2}) = C_1 + x. \quad (10)$$

Diese Gleichung läßt sich nach p auflösen. Es folgen aufeinander die Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} p + \sqrt{1+p^2} &= e^{\frac{C_1+x}{a}} \\ 1+p^2 &= e^{\frac{2C_1+x}{a}} - 2pe^{\frac{C_1+x}{a}} + p^2 \\ p &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{C_1+x}{a}} - e^{-\frac{C_1+x}{a}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Nach Restitution des für p gültigen Wertes kommt dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{C_1+x}{a}} - e^{-\frac{C_1+x}{a}} \right). \quad (12)$$

Wir nehmen jetzt eine Transformation des Koordinatensystems vor, indem wir das Achsenkreuz um die Strecken $+q$ in Richtung der positiven x -Achse parallel mit sich verschieben. Der Anfangspunkt A_0 rückt dadurch nach A_1 . Die Koordinaten der Kurvenpunkte in bezug auf das neue System bezeichnen wir mit ξ_1 und η_1 , und es gelten zwischen den alten und neuen Koordinaten die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= q + \xi_1 \\ y &= \eta_1 \end{aligned}$$

und zwischen den Differentialquotienten gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta_1}{d\xi_1};$$

hiermit geht aber die Formel (12) über in

$$\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{C_1 + \varrho + \xi_1}{a}} - e^{-\frac{C_1 + \varrho + \xi_1}{a}} \right). \quad (13)$$

Wir wollen nun festsetzen, daß die η_1 -Achse die Kurve in einem Punkte mit horizontaler Tangente schneide, d. h. daß $\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = 0$ werde für $\xi_1 = 0$. Dann muß sein

$$C_1 + \varrho + \xi_1 = 0,$$

d. h.

$$C_1 + \varrho = 0,$$

womit Formel (13) übergeht in:

$$\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\xi_1}{a}} - e^{-\frac{\xi_1}{a}} \right). \quad (14)$$

Nunmehr kann man nochmals integrieren und erhält mit einer neuen unbestimmten Konstante C_2

$$\eta_1 = C_2 + \frac{a}{2} \left(e^{\frac{\xi_1}{a}} + e^{-\frac{\xi_1}{a}} \right).$$

Wir transformieren jetzt von neuem das Koordinatensystem, indem wir das Achsenkreuz um das Stück σ in Richtung der negativen η_1 -Achse verschieben. Der Anfangspunkt rückt dadurch nach A . Die Koordinaten der Kurvenpunkte in bezug auf das neue System bezeichnen wir mit ξ und η , und es gelten die Beziehungen:

$$\xi = \xi_1$$

$$\eta = \varrho + \eta_1.$$

Zwischen den Differentialquotienten gilt

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{d\xi_1}{d\eta_1}.$$

Die Formel (14) geht nun über in

$$\eta = \varrho + C_2 + \frac{a}{2} \left(e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}} \right). \quad (15)$$

Bestimmen wir jetzt, daß für

$$\xi = 0$$

sein soll:

$$\eta = a,$$

dann muß gelten:

$$C_1 + C_2 = 0,$$

mithin gilt als endgültige Gleichung der Kettenlinie

$$\eta = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}} \right) \quad (16)$$

und für den Differentialquotienten

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\xi}{a}} - e^{-\frac{\xi}{a}} \right). \quad (17)$$

Für die beiden letzten Funktionen von ξ hat man kürzere Zeichen eingeführt. Es gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}} \right) &= \text{Cof} \frac{\xi}{a} \\ \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\xi}{a}} - e^{-\frac{\xi}{a}} \right) &= \text{Sin} \frac{\xi}{a} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Man überzeugt sich leicht von der Gültigkeit des Satzes

$$\text{Cof}^2 \frac{\xi}{a} - \text{Sin}^2 \frac{\xi}{a} = 1. \quad (19)$$

Um einige weitere Beziehungen abzuleiten, schreiben wir das Argument vorläufig kürzer = x .

Mittels der Identitäten

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$$

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$

findet sich leicht

$$\left. \begin{aligned} \text{Sin} x + \text{Sin} y &= 2 \text{Sin} \frac{x+y}{2} \text{Cof} \frac{x-y}{2} \\ \text{Cof} x + \text{Cof} y &= 2 \text{Cof} \frac{x+y}{2} \text{Cof} \frac{x-y}{2} \\ \text{Sin} x - \text{Sin} y &= 2 \text{Cof} \frac{x+y}{2} \text{Sin} \frac{x-y}{2} \\ \text{Cof} x - \text{Cof} y &= 2 \text{Sin} \frac{x+y}{2} \text{Sin} \frac{x-y}{2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Setzt man $\frac{x+y}{2} = \xi, \quad \frac{x-y}{2} = \eta,$

so wird $x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta,$

und die Formeln lauten (nach Vertauschung von ξ mit x und η mit y):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y &= \frac{1}{2} \operatorname{Cof}(x+y) - \frac{1}{2} \operatorname{Cof}(x-y) \\ \operatorname{Cof} x \operatorname{Cof} y &= \frac{1}{2} \operatorname{Cof}(x+y) + \frac{1}{2} \operatorname{Cof}(x-y) \\ \operatorname{Sin} x \operatorname{Cof} y &= \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(x+y) + \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(x-y) \\ \operatorname{Cof} x \operatorname{Sin} y &= \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(x+y) - \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(x-y) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Durch geeignetes Addieren und Subtrahieren je zweier dieser Formeln entsteht dann

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Sin}(x \pm y) &= \operatorname{Sin} x \operatorname{Cof} y \pm \operatorname{Cof} x \operatorname{Sin} y \\ \operatorname{Cof}(x \pm y) &= \operatorname{Cof} x \operatorname{Cof} y \pm \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Der Aufbau dieser Formeln erinnert an die Kreisfunktionen \sin und \cos ; wir schreiben für das letzte Formelsystem analog an

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \pm \sin x \sin y. \end{aligned}$$

Man nennt die Funktionen Sin und Cof den „hyperbolischen Sinus“ bzw. „Kosinus“. Diese Bezeichnung hat ihren Grund in folgendem geometrischen Zusammenhang:

In der Fig. 88 sei eine gleichseitige Hyperbel der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ gezeichnet. Dann ist die halbe Scheiteldistanz $OA = 1$. Wir berechnen nunmehr den Flächeninhalt F des Hyperbelsektors $OPAP_1$ ($PP_1 \perp OX$) in Abhängigkeit von der Abszisse x oder der Ordinate y des Punktes P . Aus der Figur liest man sofort ab:

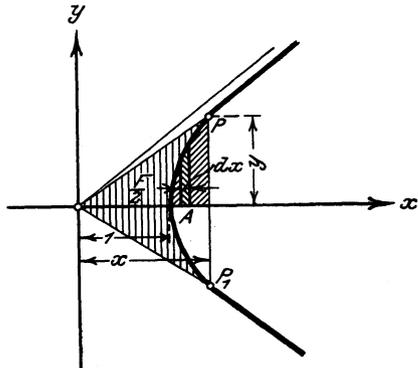


Fig. 88. Definition der Hyperbelfunktionen.

$$\frac{F}{2} = \frac{xy}{2} - \int_1^x y \, dx. \quad (23)$$

Nach der Hyperbelgleichung ist aber

$$y = \sqrt{x^2 - 1},$$

mithin

$$\frac{F}{2} = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \int_1^x \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

Der Wert des Integrals steht in jeder Formelsammlung, z. B. Hütte 22. Aufl. (1915), S. 74. Es ist

$$\int_1^x \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \lg(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

also wird

$$F = \lg(x + \sqrt{x^2 - 1}). \quad (24)$$

Diese Gleichung ist nach x auflösbar.

$$\begin{aligned} e^F &= x + \sqrt{x^2 - 1} \\ e^{2F} - 2xe^F + x^2 &= x^2 - 1 \\ x &= \frac{e^{2F} + 1}{2e^F} = \frac{1}{2}(e^F + e^{-F}). \end{aligned} \quad (25)$$

Führt man die Rechnung analog für y durch, so erhält man

$$y = \frac{1}{2}(e^F - e^{-F}). \quad (25a)$$

Durch diese beiden Formeln wird die Abhängigkeit der Abszisse x und der Ordinate y vom Hyperbelflächeninhalt statuiert.

Eine analoge Betrachtung führen wir am Kreise Fig. 89 aus

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Es ist der halbe Flächeninhalt des Kreissektors

$$\frac{F}{2} = \frac{xy}{2} + \int_x^1 y dx \quad (26)$$

$$x = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

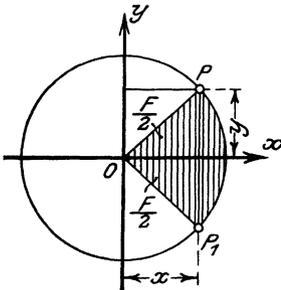


Fig. 89. Definition der Kreisfunktionen.

Der Wert des Integrals findet sich in der Hütte an derselben Stelle

$$\int_x^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin 1 - x\sqrt{1 - x^2} - \arcsin x)$$

Hiermit wird aber

$$F = \arcsin 1 - \arcsin x = \arccos x \quad (27)$$

und nach x aufgelöst $x = \cos F$. (28)

Entsprechend ergibt sich für die Ordinate

$$y = \sin F. \quad (28a)$$

Diese beiden Formeln sind die Analoga zu den oben bei der Hyperbel abgeleiteten, und es bedarf keiner weiteren Begründung für die Abkürzung für (25) und (25a)

$$x = \mathfrak{Cof} F$$

und

$$y = \mathfrak{Sin} F.$$

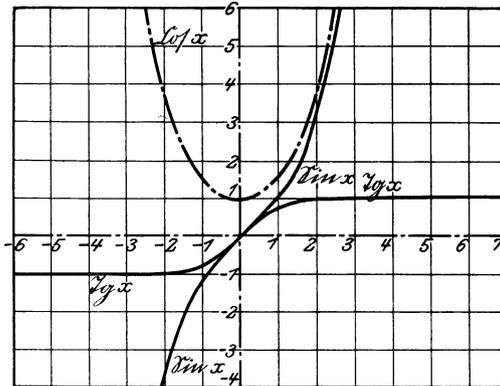


Fig. 90. Die drei Hyperbelfunktionen.

Wir kehren nunmehr zur Schreibweise $\mathfrak{Cof} x$ bzw. $\mathfrak{Sin} x$ zurück und bemerken, daß aus der Beziehung zur Exponentialfunktion e^x sofort eine Reihenwicklung für die beiden Funktionen folgt. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Cof} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \mathfrak{Sin} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned} \right\}^{21)} \quad (29)$$

Aus diesen Entwicklungen ergibt sich ohne weiteres

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Cof}(-x) &= \mathfrak{Cof} x, \\ \mathfrak{Sin}(-x) &= -\mathfrak{Sin} x, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

d. h. \mathfrak{Cof} ist eine gerade Funktion, \mathfrak{Sin} eine ungerade.

Ferner wird

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}in 0 &= 0; & \mathfrak{S}in \infty &= \infty. \\ \mathfrak{C}of 0 &= 1; & \mathfrak{C}of \infty &= \infty. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Den weiteren Verlauf entnimmt man am besten aus der Figur, die nach einer der Tafeln für diese Funktionen gezeichnet ist²²⁾.

Die Figur enthält noch die Funktion hyperbolischer Tangens, die definiert wird durch den Ansatz

$$\mathfrak{T}g x = \frac{\mathfrak{S}in x}{\mathfrak{C}of x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (32)$$

Für die $\mathfrak{T}g$ -Funktion gelten analoge Additionsformeln wie für $\mathfrak{S}in$ und $\mathfrak{C}of$, die wir nicht besonders anschreiben.

Wir kehren nun zur Kettenlinie zurück. Für die Ordinate hatten wir gefunden

$$\eta = a \mathfrak{C}of \frac{\xi}{a}$$

für den Richtungstangens

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \mathfrak{S}in \frac{\xi}{a}.$$

Ferner leiten wir aus der Formel (4)

$$H d \frac{d\eta}{d\xi} = \gamma ds$$

für die Bogenlänge S die Beziehung ab

$$S = a \frac{d\eta}{d\xi} = a \mathfrak{S}in \frac{\xi}{a}.$$

Nummehr können wir die Verhältnisse einer Kette der Länge $2S$ untersuchen, die zwischen zwei Punkten aufgehängt wird, die die Horizontaldistanz $L_1 + L_2 = 2L$ und die Vertikaldistanz $H_1 - H_2 = 2H$ haben.

Nach der Fig. 91 schreiben wir an:

$$S_1 = a \mathfrak{S}in \frac{L_1}{a},$$

$$S_2 = a \mathfrak{S}in \frac{L_2}{a}$$

und

$$2S = S_1 + S_2 = a \left(\mathfrak{S}in \frac{L_1}{a} + \mathfrak{S}in \frac{L_2}{a} \right).$$

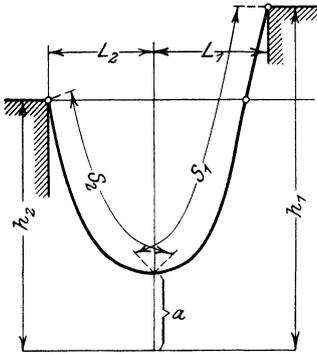


Fig. 91. Berechnung des Durchhangs einer gegebenen Kette.

Hier sind L_1 und L_2 mit ihren absoluten Werten einzusetzen. Nach Formel (20) folgt

$$2S = 2a \operatorname{Sin} \frac{L_1 + L_2}{2a} \operatorname{Cof} \frac{L - L_2}{2a}.$$

$$S = a \operatorname{Sin} \frac{L}{a} \operatorname{Cof} \frac{L_1 - L_2}{2a}. \quad (33)$$

Ferner gilt

$$h_1 = a \operatorname{Cof} \frac{L_1}{a}, \quad h_2 = a \operatorname{Cof} \frac{L_2}{a}$$

und durch Subtraktion

$$2H = h_1 - h_2 = a \left(\operatorname{Cof} \frac{L_1}{a} - \operatorname{Cof} \frac{L_2}{a} \right)$$

$$= 2a \operatorname{Sin} \frac{L_1 + L_2}{2a} \cdot \operatorname{Sin} \frac{L_1 - L_2}{2a}$$

$$H = a \operatorname{Sin} \frac{L}{a} \cdot \operatorname{Sin} \frac{L_1 - L_2}{2a}. \quad (34)$$

Quadriert man jetzt Formel (33) und (34) und subtrahiert (34) von (33), folgt

$$S^2 - H^2 = a^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{L}{a} \left(\operatorname{Cof}^2 \frac{L_1 - L_2}{2a} - \operatorname{Sin}^2 \frac{L_1 - L_2}{2a} \right).$$

Der Klammerausdruck ist jedoch $= 1$, und so ergibt sich

$$a \operatorname{Sin} \frac{L}{a} = \sqrt{S^2 - H^2}. \quad (35)$$

Schreibt man das Ergebnis in der Form

$$\frac{\operatorname{Sin} \frac{L}{a}}{\frac{L}{a}} = \frac{\sqrt{S^2 - H^2}}{L}. \quad (36)$$

so kann man bei gegebenem S , H , L diese Gleichung nach $\frac{L}{a}$ auflösen, was mit Hilfe der Tafeln oder der Kurven sehr leicht ist²³⁾.

Es sei z. B. die Kettenlänge $2S = 100$ m, die Entfernung $2L = 50$ m, die Höhendifferenz $2H = 20$ m. Dann ist

$$\frac{\sqrt{S^2 - H^2}}{L} = \frac{\sqrt{2500 - 100}}{25} = \frac{48,99}{25}$$

$$= 1,96.$$

Die Beziehung

$$\frac{\sin x}{x} = 1,96$$

findet aber statt für $x = \frac{L}{a} = 2,15$, d. h. es ist

$$a = \frac{L}{2,15} = \frac{25}{2,15} = 11,6 \text{ m.}$$

Wiegt die Kette nun $\gamma = 20 \text{ kg/lfd. m}$, so wird der Horizontalzug H

$$H = a \cdot \gamma = 232 \text{ kg.}$$

§ 30. Genaue Form der Differentialgleichung der elastischen Linie.

Die Gleichung (11) des § 26 kann ebenfalls nach der Methode des § 28 gelöst werden mittels der Substitution

$$\frac{dy}{dx} = p. \quad (1)$$

Wir erhalten hiermit

$$\frac{dp}{dx} : [1 + p^2]^{\frac{3}{2}} = f(x) \quad (2)$$

und nach Trennung der Variablen p und x

$$\frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = f(x) dx. \quad (3)$$

Durch Integration folgt hieraus

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \int f(x) dx + C_1. \quad (4)$$

Diese Gleichung kann man nach p auflösen

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\int f(x) dx + C_1}{\sqrt{1 - [\int f(x) dx + C_1]^2}} \quad (5)$$

und nochmalige Integration

$$y = \int \frac{\int f(x) dx + C_1}{\sqrt{1 - [\int f(x) dx + C_1]^2}} dx + C_2. \quad (6)$$

Im Falle des Ansatzes (7) § 26 mit

$$f(x) = \frac{1}{EJ} P(l-x) \quad (7)$$

findet man

$$p = \frac{\frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1}{\sqrt{1 - \left[\frac{P^2}{E^2 J^2} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)^2 + 2 \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) C_1 + C_1^2 \right]}}, \quad (8)$$

aus der sich wegen der Bedingung

$$p = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0$$

findet

$$0 = \frac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^2}} \quad (9)$$

oder

$$C_1 = 0.$$

Mithin wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{P^2}{E^2 J^2} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)^2}} \quad (10)$$

und

$$y = \int \frac{\frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{P^2}{E^2 J^2} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)^2}} dx + C_2 \quad (11)$$

Dieses Integral kann man durch die Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) &= \xi, \\ x &= l \pm \sqrt{l^2 - \frac{2EJ}{P} \xi}, \\ dx &= \mp \frac{\beta d\xi}{2\sqrt{\alpha - \beta\xi}}, \\ \alpha &= l^2, \quad \beta = \frac{2EJ}{P} \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

überführen in

$$y = - \int \frac{\beta \xi d\xi}{2 \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{a - \beta \xi}} + C_2, \quad (12)$$

welches ein elliptisches Integral ist. Die Benutzung des genauen Wertes für die Krümmung der elastischen Linie führt also schon im einfachen Falle des einseitig eingespannten Balkens zu Verwickelungen, deren eingehendere Untersuchung uns hier zu weit führen würde.

§ 31. Eindimensionale Differentialgleichungen.

Beispiel: Formänderung eines dickwandigen Rohres nach Föppl.

Gibt man den Variablen x und y bestimmte Dimensionen, die dann auch den Differentialen dx und dy zukommen, so kann man auch für jedes Glied einer Differentialgleichung eine bestimmte Dimension angeben.

Seien z. B. die Dimensionen von x und $y = 1$, so sind folgende weitere Dimensionen festzustellen:

$$\text{Dim} \left[\frac{dy}{dx} \right] = 0; \quad \text{Dim} \left[m x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = 2,$$

$$\text{Dim} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right] = -1; \quad \text{Dim} \left[\sqrt{m x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2} \right] = 1,$$

wobei angenommen ist, daß m eine Zahl bedeutet. Untersucht man in dieser Weise alle Glieder einer gegebenen Differentialgleichung, und finden sich diese dabei sämtlich von gleicher Dimension, dann heißt die Differentialgleichung „eindimensional“, wobei es vorkommen kann, daß man x und y verschiedene Dimensionen zuteilen muß, um Eindimensionalität zu erreichen.

Zunächst betrachten wir den Fall, in welchem sowohl x wie y von der ersten Dimension sind. Hier gelangt man zu einer Erniedrigung der Ordnung der vorgelegten Differentialgleichung, wenn man sowohl für x wie für y neue Variable ϑ und z einführt mit Hilfe der Substitutionsgleichungen

$$x = e^\vartheta; \quad y = z \cdot e^\vartheta. \quad (1)$$

Hier folgt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dx} = \left(\frac{dz}{d\vartheta} \cdot e^\vartheta + z e^\vartheta \right) \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (2)$$

Da aber

$$\frac{dx}{d\vartheta} = e^{\vartheta} \tag{3}$$

und mithin

$$\frac{d\vartheta}{dx} = e^{-\vartheta} \tag{4}$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{d\vartheta} = z. \tag{5}$$

Analog ergibt sich

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} + \frac{dz}{d\vartheta} \right) e^{-\vartheta}. \tag{6}$$

Mittels der Formeln (1), (5) und (6) kann man die Substitution bei eindimensionalen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchführen.

Wir betrachten die Differentialgleichung der Formänderung eines dickwandigen Rohres unter innerem Überdruck.

In der Figur 92 sei der Querschnitt des Rohres gezeichnet, wobei die Länge des Rohres = 1 gesetzt wird; Formänderungen in Richtung der Rohrachse bleiben von der Betrachtung ausgeschlossen.

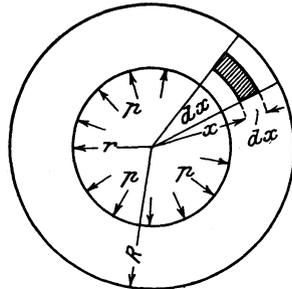


Fig. 92. Dickwandiges Rohr mit innerem Überdruck.

Zur Grundlage der Untersuchung wird diejenige Verlängerung u gemacht, welche ein nach einem Punkte der Rohrwand gezogener Radius x unter Einfluß des Innendruckes p erfährt. Ist diese Verlängerung u als Funktion von x gefunden, dann ist es möglich, die spezifische Radialdehnung ϵ_r und die Tangentialdehnung ϵ_t zu berechnen. Letztere findet sich durch den Quotienten

$$\frac{\text{Verlängerung des Kreisumfangs}}{\text{Ursprünglicher Kreisumfang}} = \epsilon_t = \frac{2\pi u}{2\pi x} = \frac{u}{x}. \tag{7}$$

Die Radialdehnung ergibt sich durch Betrachtung der Längenänderung, die eine radial gerichtete Elementarstrecke $AB = dx$ (siehe Figur 93) erfährt. Der Endpunkt A des Radius $x = MA$

verschob sich, wie oben festgesetzt, um die Strecke u . Dementsprechend verschiebt sich der Endpunkt B des Radius

$$x + dx = MB$$

um die Strecke $u + du$.

Folglich verlängert sich das Element dx um den Betrag du , mithin ist die spezifische Radialdehnung an der betreffenden Stelle

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dx}. \quad (8)$$

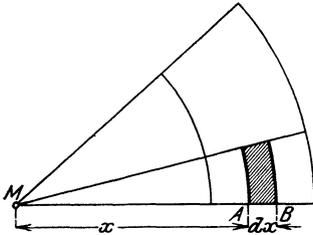


Fig. 93. Berechnung der Radialdehnung des Rohres.

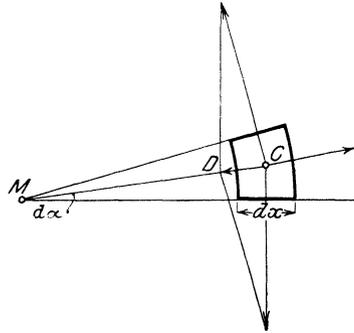


Fig. 94. Gleichgewicht der Spannungen an einem Element der Rohrwand.

Zur Gewinnung eines weiteren Ansatzes betrachten wir nunmehr die gegenseitige Wirkung der Spannungen an einem Element der Rohrwand, welches, wie in der Figur 94 gezeichnet, herausgeschnitten sei.

Die in tangentialer Richtung angreifenden Spannungen σ_t sind auf beiden Seiten des Elementes gleich; die sich aus ihnen ergebenden Gesamtkräfte sind $\sigma_t \cdot dx$ und ihre Resultierende $CD = d\alpha \cdot \sigma_t \cdot dx$.

Die radial nach innen angreifende Spannung sei σ_r ; die am Element angreifende entsprechende Gesamtkraft $= x d\alpha \cdot \sigma_r$. Auf der Außenseite des Elementes greift nun die Spannung $\sigma_r + d\sigma_r$ an; die ihr entsprechende Gesamtkraft ist

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(x + dx) \cdot d\alpha.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck aus, so findet sich

$$(\sigma_r x + x d\sigma_r + \sigma_r \cdot dx + d\sigma_r \cdot dx) d\alpha.$$

Hier wird das letzte Glied $d\sigma_r \cdot dx$ als klein gegen die übrigen vernachlässigt, und das zweite und dritte werden in

$$d(x\sigma_r)$$

zusammengezogen.

Nach diesen Festsetzungen ergibt sich als Resultierende der beiden Radialkräfte

$$d(x\sigma_r) \cdot d\alpha.$$

Zwischen dieser und der Resultierenden der Tangentialkräfte muß jedoch Gleichgewicht bestehen, woraus folgt

$$d\alpha \cdot \sigma_t \cdot dx = d(x\sigma_r) \cdot d\alpha.$$

Nach Hebung von $d\alpha$ und nach Division mit dx folgt

$$\sigma_t = \frac{d(x\sigma_r)}{dx}. \quad (9)$$

Die Verbindung dieser Formel mit den oben entwickelten Dehnungen ε_t und ε_r verlangt die Heranziehung eines Elastizitätsgesetzes. Unter einem Elastizitätsgesetz verstehen wir eben eine Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen. Wir legen hier das Hookesche Gesetz zugrunde, welches in seiner allgemeineren Form für longitudinale und transversale Spannungen (Tangential- und Radialspannungen) lautet:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{1}{m} \sigma_t \right), \quad (10)$$

wo E den Elastizitätsmodul und m das Verhältnis der Längsdehnung zur Querkontraktion bedeutet.

Diese beiden Gleichungen löst man nach σ_t und σ_r auf:

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} (m\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} (m\varepsilon_r + \varepsilon_t) \quad (11)$$

und nun ist man in der Lage, die Dehnungen

$$\varepsilon_t = \frac{u}{x} \quad \text{und} \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dx} \quad (12)$$

einzuführen. Es ergibt sich

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} \right). \quad (13)$$

Diese Werte für σ_t und σ_r setzt man in Gleichung (9) ein, wodurch sich ergibt

$$\frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[\frac{mE}{m^2 - 1} x \left(m \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} \right) \right]. \quad (14)$$

Dividiert man mit $\frac{mE}{m^2 - 1}$ und führt die Differentiation auf der

rechten Seite aus, so resultiert die Differentialgleichung zweiter Ordnung²⁴⁾

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^3} = 0. \quad (15)$$

Diese Differentialgleichung ist „eindimensional“ in dem eingangs angegebenen Sinne.

Führen wir mit $u = y$ die Substitutionen (1), (5) und (6) aus, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} + 2 \frac{dz}{d\vartheta} = 0, \quad (16)$$

welche sich mit

$$\frac{dz}{d\vartheta} = p \quad (17)$$

vom ersten Grade erweist.

Wir haben also nur die Gleichung

$$\frac{dp}{d\vartheta} + 2p = 0 \quad (18)$$

zu integrieren, welche das allgemeine Integral

$$\vartheta = C_1 - \frac{1}{2} \lg p \quad (19)$$

oder

$$p = e^{2(C_1 - \vartheta)} \quad (20)$$

ergibt.

Zur Ermittlung von z greifen wir jetzt auf Gleichung (17) zurück, indem wir den soeben ermittelten Wert von p einführen. Die Integration von

$$dz = e^{2(C_1 - \vartheta)} d\vartheta \quad (21)$$

liefert mit einer zweiten Integrationskonstanten

$$z = C_2 - \frac{1}{2} e^{2(C_1 - \vartheta)} \quad (22)$$

Aus (22) leiten wir nun das gesuchte Integral u ab wie folgt:

$$u = xz = x \left(C_2 - \frac{1}{2} e^{2(C_1 - \vartheta)} \right). \quad (23)$$

Führen wir hier nun die Substitutionsgleichung (1) wieder ein mit

$$e^{\vartheta} = x, \quad (24)$$

so ergibt sich als allgemeines Integral

$$u = x \left(C_2 - \frac{1}{2} \frac{e^{2C_1}}{x^2} \right), \quad (25)$$

und wenn man hier setzt

$$C_2 = A, \quad -\frac{1}{2} e^{2C_1} = B,$$

so wird

$$u = Ax + \frac{B}{x}, \quad (26)$$

wo A und B die erforderlichen beiden Integrationskonstanten sind.

Zur Ermittlung dieser gehen wir auf die Gleichung (13) für σ_r zurück, in welche wir (26) einführen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{mE}{m^2 - 1} \left\{ m \left(A - \frac{B}{x^2} \right) + A + \frac{B}{x^2} \right\} \\ &= \frac{mE}{m^2 - 1} \left\{ A(m+1) - \frac{B}{x^2} (m-1) \right\} \\ &= \frac{mE}{m-1} A - \frac{mE}{m+1} \frac{B}{x^2} \end{aligned}$$

und mit

$$\frac{mE}{m-1} A = A_1, \quad \frac{mE}{m+1} B = B_1$$

$$\sigma_r = A_1 - \frac{B_1}{x^2}. \quad (27)$$

Zur Bestimmung von A_1 und B_1 führt jetzt die Bemerkung, daß für $x = r$, d. h. im Innern des Rohres, die Radialspannung gleich dem Überdruck p sein muß, der mit negativem Vorzeichen zu versehen ist, weil es sich um Druckspannung handelt.

Ferner muß für $x = R$, also außerhalb, die Radialspannung = Null sein. Wir erhalten also die Bedingungsgleichungen

$$\text{für } x = r: \quad -p = A_1 - \frac{B_1}{r^2},$$

$$\text{für } x = R: \quad 0 = A_1 - \frac{B_1}{R^2},$$

aus denen durch Auflösung nach A_1 bzw. B_1 folgt

$$A_1 = \frac{p r^2}{R^2 - r^2},$$

$$B_1 = \frac{p R^2 r^2}{R_1 - r^2},$$

wodurch sich dann die Formänderung u endgültig findet zu

$$u = p \frac{r^2}{mE(R^2 - r^2)} \left\{ (m-1)x + (m+1) \frac{R^2}{x} \right\}. \quad (28)$$

§ 32. Einführung der Störungsfunktion. Kreisförmige Platte.

Die genauere Theorie der kreisförmigen gleichmäßig belasteten Platte führt (vgl. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, III) (1900) auf folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = - \frac{6(m^2 - 1)}{m^2 E h^3} p x, \quad (1)$$

wo bedeuten

φ die Winkel, die die Normalen der Plattenelemente nach der Biegung mit der Mittellinie bilden;

x der Abstand eines Plattenelementes von der Mitte;

$\frac{1}{m}$ die Poissonsche Konstante;

E den Elastizitätsmodul;

h die Plattendicke;

p den Druck, der auf die eine Plattenseite ausgeübt wird.

Setzen wir in (1) die rechte Seite vorläufig = Null, so erhalten wir

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = 0. \quad (2)$$

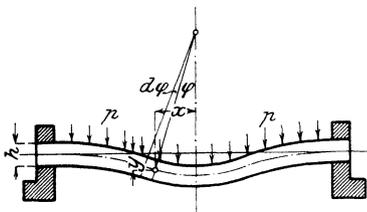


Fig. 95. Formänderung der kreisförmigen Platte.

Diese Differentialgleichung ist aber identisch mit Gleichung (15) des § 31 und hat demnach das allgemeine Integral

$$\varphi = Ax + \frac{B}{x}. \quad (3)$$

Um nun von hier aus zum allgemeinen Integral der Gleichung (1) zu gelangen, setzt man voraus, daß dieses dieselbe Form habe wie (3), nur mit dem Unterschied, daß A und B jetzt Funktionen von x sind, die man bestimmen muß.

Den durchzuführenden Prozeß nehmen wir sogleich an einer ziemlich allgemeinen Differentialgleichung zweiter Ordnung vor, nämlich

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x)y = P_3(x) \quad (4)$$

(vgl. § 24), zu der

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \quad (5)$$

das Analogon zu (2) bildet.

Man nennt die Gleichung (5) die gegenüber (4) reduzierte Gleichung. Die auf der rechten Seite von (4) auftretende Funktion $P_3(x)$ heißt Störungsfunktion.

Es seien nun y_1 und y_2 zwei auf irgendeine Weise gefundene voneinander unabhängige partikuläre Lösungen von (5), mit deren Hilfe wir das allgemeine Integral von (4) in der Form ansetzen:

$$d = Q_1(x)y_1 + Q_2(x)y_2. \quad (6)$$

Die Differentiation dieses Ansatzes liefert

$$\frac{dy}{dx} = Q_1'y_1 + Q_1y_1' + Q_2'y_2 + Q_2y_2'. \quad (7)$$

Da Q_1 und Q_2 unbekannt sind, können wir für sie eine Bedingung willkürlich vorschreiben. Wir wählen als Bedingung den Ansatz

$$Q_1'y_1 + Q_2'y_2 = 0, \quad (8)$$

wodurch sich (7) vereinfacht zu

$$\frac{dy}{dx} = Q_1y_1' + Q_2y_2'. \quad (9)$$

Eine abermalige Differentiation liefert hier

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Q_1'y_1' + Q_1y_1'' + Q_2'y_2' + Q_2y_2''. \quad (10)$$

Nunmehr führen wir die Ausdrücke für y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ [Gleichung (6), (9), (10)] in Gleichung (4) ein und erhalten nach gehöriger Ordnung

$$Q_1(y_1'' + P_1y_1' + P_2y_1) + Q_2(y_2'' + P_1y_2' + P_2y_2) + y_1'Q_1' + y_2'Q_2' = P_3. \quad (11)$$

Da aber, wie vorausgesetzt, y_1 und y_2 der Gleichung (5) genügen, so bleibt von (11) nur übrig

$$y_1' Q_1' + y_2' Q_2' = P_3. \quad (12)$$

Diese Gleichung reicht im Verein mit Gleichung (8) aus zur Bestimmung von Q_1' und Q_2' . Man erhält durch gewöhnliche Auflösung dieser Gleichungen nach Q_1' und Q_2'

$$\left. \begin{aligned} Q_1' &= \frac{P_3 y_2}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} \\ Q_2' &= \frac{P_3 y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Q_1 und Q_2 selber finden sich durch einfache Integration

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \int \frac{y_2 P_3 dx}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} + A = q_1(x) + A, \\ Q_2 &= \int \frac{y_1 P_3 dx}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} + B = q_2(x) + B, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

so daß das allgemeine Integral von (4) lautet:

$$y = q_1(x) y_1 + q_2(x) y_2 + A y_1 + B y_2. \quad (15)$$

Nunmehr wenden wir die durch (14) gegebene Vorschrift der Abkürzung auf die Differentialgleichung (1) an. Es ist mit

$$\frac{6(m^2 - 1)}{m^2 E h^3} p = N$$

$$\left. \begin{aligned} P_3 &= -Nx \\ \varphi_1 &= x \\ \varphi_2 &= \frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= -N \int \frac{\frac{1}{x} dx}{\frac{1}{x} - x \left(-\frac{1}{x^2} \right)} + A \\ &= -\frac{N}{2} \int x dx + A \\ &= -\frac{N x^2}{4} + A \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= -N \int \frac{x x dx}{-x \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} = B \\
 &= + \frac{N}{2} \int x^3 dx + B = + \frac{N}{8} x^4 + B. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Aus (17) und (18) setzt sich dann nach Vorschrift von (15) das allgemeine Integral zusammen

$$\varphi = -\frac{Nx^3}{4} + \frac{Nx^3}{8} + Ax + \frac{B}{x}$$

oder

$$\varphi = -\frac{Nx^3}{8} + Ax + \frac{B}{x}. \quad (19)$$

In der gleichen Weise behandelt man die ebenfalls bei Föppl vorkommende Differentialgleichung der Platte für eine in der Mitte angreifende Last P :

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{P}{x}. \quad (20)$$

Man findet

$$Q_1 = -\frac{P}{2} \int \frac{1}{x} dx + A,$$

$$Q_2 = +\frac{P}{2} \int x dx + B$$

und

$$\begin{aligned}
 \varphi &= -\frac{P}{2} x \lg x + \left(A + \frac{P}{4}\right) x + \frac{B}{x}, \\
 &= -\frac{P}{2} x \lg x + A_1 x + \frac{B}{x}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

IV. Differentialgleichungen höherer Ordnung. Simultane Differentialgleichungen.

§ 33. Differentialgleichungen n -ter Ordnung.

Die allgemeine Form der Differentialgleichung n -ter Ordnung lautet analog § 24:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \quad (1)$$

Es gibt keine Methoden, durch die man eine solche Differentialgleichung in jedem Fall integrieren könnte, nur für bestimmte besondere Formen von (1) sind Integrationsmethoden bekannt.

I. Der einfachste Fall ist der, wenn (1) sich in der Form darstellt

$$\frac{d^n y}{dx^n} - X = 0, \quad (2)$$

in welcher X nur die Variable x enthält. Hier kann man ohne weiteres einmal integrieren

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = A_1 + \int X dx. \quad (3)$$

Eine nochmalige Integration liefert

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = A_2 + A_1 x + \int dx \int X dx.$$

Mit jeder Integration erniedrigt sich hier die Ordnung des Differentialquotienten auf der linken Seite um eine Einheit, bis man schließlich zur Funktion y selber gelangt:

$$y = A_n + A_{n-1} x + A_{2n-2} \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + A_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + A_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \int dx \int dx \dots \int X dx. \quad (4)$$

Dies ist das allgemeine Integral von (2).

II. Sehr einfach ist auch die Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = Y, \quad (5)$$

wenn y nur die Variable y enthält. Diese Gleichung kann aber nur für $n = 1$ und $n = 2$ integriert werden.

Zu

$$\frac{dy}{dx} = Y.$$

lautet das allgemeine Integral:

$$\int \frac{dy}{Y} = x + A. \quad (6)$$

Im Falle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Y \quad (7)$$

setzt man

$$\frac{dy}{dx} = p$$

und hat

$$\frac{dp}{dx} = Y$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} &= Y, \\ dp \cdot p &= Y dy. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Hier sind die Variablen getrennt und man kann integrieren

$$\frac{1}{2} p^2 = \frac{B}{2} + \int Y dy. \quad (9)$$

Nach Ausziehung der Quadratwurzel ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{B + 2 \int Y dy} \quad (10)$$

und das allgemeine Integral:

$$x = A + \int \frac{dy}{\sqrt{B + 2 \int Y dy}}. \quad (11)$$

III. Die nächst einfachen Fälle umfassen die Formen von (1), in denen nur der höchste Differentialquotient und der um 1 oder 2 Einheiten niedrigere vorkommen, d. h. um die Formen:

$$\left. \begin{aligned} F\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) &= 0, \\ F\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) &= 0, \\ F\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Diese Typen lassen sich durch die Substitution

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = z \quad \text{resp.} \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = z \quad (12a)$$

auf die Differentialgleichung zweiter bzw. erster Ordnung zurückführen:

$$\left. \begin{aligned} F\left(z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) &= 0, \\ F\left(z, \frac{d^2z}{dx^2}\right) &= 0, \\ F\left(z, \frac{dz}{dx}\right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Bei den Gleichungen 13a und 13b führt die weitere Substitution

$$\frac{dz}{dx} = p \quad (14)$$

zu einer Erniedrigung der Ordnung um einen Grad. Es folgt aus (14)

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = p \frac{dp}{dz}$$

und somit als Differentialgleichung:

$$F\left(z, p, p \frac{dp}{dz}\right) = 0. \quad (15)$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, die integriert werden kann. Man erhalte als erstes Integral

$$p = f(z) C_1, \quad (16)$$

wo C_1 eine Integrationskonstante ist. Schreibt man jetzt für p wieder $\frac{dz}{dx}$, so entsteht aus (16) die Differentialgleichung:

$$\frac{dz}{dx} = f(z, C_1) \quad (17)$$

zwischen z und x , welche nach Trennung der Variablen mit einer neuen Konstanten C_2 liefert

$$x = C_2 + \int \frac{dz}{f(z, C_1)}. \quad (18)$$

Führt man jetzt das Differential

$$dx = \frac{dz}{f(z, C_1)} \quad (19)$$

in die Gleichung (12 a) ein, so folgt

$$\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} = z : [f(z, C_1)]^{n-2} \quad (20)$$

Diese Differentialgleichung ist durch $n - 2$ Quadraturen lösbar, und man findet

$$y = C_n + C_{n-1}z + \dots + \frac{C_3}{(n-3)!}z^{n-3} + \int dz \dots \int dz \int z dz : [f(z, C_1)]^{n-2} \quad (21)$$

Durch Elimination von z aus den Gleichungen (18) und (21) würde man zum allgemeinen Integral gelangen, welches die Konstanten C_1, C_2, \dots, C_n , d. h. n willkürliche Parameter enthalten würde, wie es sein muß. Statt der oft umständlichen Elimination ist es vorzuziehen, die Parameterdarstellung der Kurve, wie sie durch die Gleichung (18) und (21) gegeben ist, beizubehalten und aus ihr die erforderlichen Schlüsse auf die Eigenschaften der Integralkurven zu ziehen.

§ 34. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung.

Eine besonders wichtige Klasse von Differentialgleichungen n -ter Ordnung, für welche allgemeinere Integrationsmethoden bekannt sind, wird gebildet von den linearen Differentialgleichungen:

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X. \quad (1)$$

Hier sollen die Funktionen X nur die unabhängige Veränderliche x enthalten.

I. Ist y_1 ein partikuläres Integral von (I) und Y eine noch zu bestimmende Funktion von x , so liefert der Ansatz

$$y = y_1 + Y \quad (2)$$

in (1) eingesetzt:

$$\sum_{k=0}^{k=n} X_{n-k} \frac{d^k y_1}{dx^k} + \sum_{k=0}^{k=n} X_{n-k} \frac{d^k Y}{dx^k} = X. \quad (3)$$

Hiervon bleibt aber nur der zweite Teil übrig, weil y_1 Gleichung (1) erfüllt:

$$\sum_{k=0}^{k=n} X_{n-k} \frac{d^k Y}{dx^k} = 0,$$

d. h. die Funktion Y hat der Differentialgleichung:

$$X_0 \frac{d^n Y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dY}{dx} + X_n Y = 0 \quad (4)$$

zu genügen, wenn Gleichung (2) die Differentialgleichung (1) befriedigen soll.

Y ist daher das allgemeine Integral von (4), enthält also n willkürliche Konstante. Mithin enthält auch (2) n willkürliche Konstante und ist daher das allgemeine Integral von (1). Man hat also den Satz:

Das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung (1) setzt sich zusammen aus einem beliebigen partikulären Integral dieser Differentialgleichung und dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung (4). Letztere nennt man die reduzierte lineare Differentialgleichung, während (1) die vollständige lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung genannt wird.

II. Zur Aufsuchung des allgemeinen Integrals von (1) hat man zunächst das allgemeine Integral von (4) zu suchen. Hierbei kann oft mit Vorteil der Satz benutzt werden: Kennt man ein oder mehrere partikuläre Integrale von (4), so läßt sich die Ordnung dieser Differentialgleichung um soviel Einheiten erniedrigen, als Integrale bekannt sind.

Es sei zunächst y_1 ein partikuläres Integral von (4). Wir versuchen weitere Integrale in der Form

$$y = u y_1 \quad (5)$$

zu gewinnen, bei welcher die unbekannte Funktion u nur die Variable x enthalte. Wir differenzieren (5) n mal und erhalten die Differentialquotienten:

$$\left. \begin{aligned} y' &= u y_1' + \frac{d u}{d x} y_1, \\ y'' &= u y_1'' + 2 \frac{d u}{d x} y_1' + y_1 \frac{d^2 u}{d x^2}, \\ &\dots \\ \frac{d^n y}{d x^n} &= u y_1^{(n)} + n \frac{d u}{d x} y_1^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2 u}{d x^2} y_1^{(n-2)} + \dots \\ &\dots + n \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} y_1' + \frac{d^n u}{d x^n} y_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Setzen wir diese Werte sowie (5) in (4) ein und fassen einerseits die Glieder zusammen, welche die Differentialquotienten von u enthalten, und ordnen wir nach diesen Differentialquotienten, während wir andererseits ein Glied mit u selbst bilden, so kommt:

$$\begin{aligned} & \Xi_0 \frac{d^n u}{dx^n} + \Xi_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + \Xi_{n-1} \frac{du}{dx} \\ & + u \left(X_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + X_n y_1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Hier setzen sich die Funktionen Ξ aus den Differentialquotienten von y_1 und den X zusammen, sind also bekannte Funktionen von x . Z. B. ist:

$$\left. \begin{aligned} \Xi_0 &= y_1 X_0, \\ \Xi_1 &= y_1 X_1 + n y_1' X_0, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \Xi_{n-1} &= y_1 X_{n-1} + 2 y_1' X_{n-2} + \dots + n y_1^{(n-1)} X_0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Von (7) bleibt aber nur die erste Zeile übrig, weil die zweite vermöge (4) verschwindet, und wir erhalten mit $\frac{du}{dx} = v$ tatsächlich eine neue Differentialgleichung, deren Ordnung um 1 erniedrigt ist:

$$\Xi_0 \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \Xi_1 \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + \dots + \Xi_{n-2} \frac{dv}{dx} + \Xi_{n-1} v = 0. \quad (8a)$$

Durch Integration findet sich mit $n - 1$ partikulären Integralen $v_1 \dots v_{n-1}$

$$v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_{n-1} v_{n-1} \quad (9)$$

und mit

$$v = \frac{du}{dx}$$

durch nochmalige Integration

$$u = C_1 \int v_1 dx + C_2 \int v_2 dx + \dots + C_{n-1} \int v_{n-1} dx + C_n,$$

und schließlich, wenn man auf (5) zurückgreift:

$$y = C_1 y_1 \int v_1 dx + C_2 y_1 \int v_2 dx + \dots + C_{n-1} y_1 \int v_{n-1} dx + C_n y_1. \quad (10)$$

Dies ist das allgemeine Integral zur Gleichung (4).

III. Als Beispiel zur Einübung des Verfahrens diene die Differentialgleichung:

$$(x^2 - 2x + 2) \frac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = 0. \quad (11)$$

Hier sieht man sofort, daß $y_1 = x$ ein partikuläres Integral ist.

Nach Vorschrift von (5) führen wir jetzt den Ansatz

$$y = u x \quad (12)$$

in die Differentialgleichung (11) ein.

Durch sukzessive Differentiation gewinnen wir:

$$\left. \begin{aligned} y' &= u + x u', \\ y'' &= 2u' + x u'', \\ y''' &= 3u'' + x u'''. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nach Einführung dieser Werte in (11) entsteht:

$$u''' x (x^2 - 2x + 2) + u'' [3(x^2 - 2x + 2) - x^3] = 0, \quad (14)$$

welche Differentialgleichung mit

$$u'' = v \quad (14a)$$

und nach Division mit $x(x^2 - 2x + 2)$ übergeht in:

$$\frac{dv}{dx} + v \left(\frac{3}{x} - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2} \right) = 0. \quad (15)$$

Die Integration liefert

$$= \lg v = \lg C_3 - 3 \lg x + \int \frac{x^2 dx}{x^2 - 2x + 2}. \quad (16)$$

Das Integral rechter Hand berechnet sich nach Ausführung der Substitution

$$x - 1 = \xi$$

$$\text{zu: } \int \frac{(\xi + 1)^2 d\xi}{\xi^2 + 1} = \lg(\xi^2 + 1) + \xi + \operatorname{arctg} \xi + \operatorname{arctg} \frac{1}{\xi}$$

oder nach Rückgang zu x :

$$\lg(x^2 - 2x + 2) + \lg e^{x-1} + \lg e^{\operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg}(x-1)}$$

Das letzte Glied rechts erweist sich als Konstante, die mit $-\lg e$ in $\lg C_3$ einzurechnen ist, so daß nach Beseitigung des Logarithmus wird:

$$v = C_3 \frac{(x^2 - 2x + 2) e^x}{x^3}. \quad (17)$$

Zur Gewinnung von u hat man zu setzen

$$u' = C_2 + \int v dx = C_2 + C_3 \frac{e^x(x-1)}{x^2} \quad (18)$$

und

$$u = C_1 + C_2 x + C_3 \int \frac{e^x(x-1)}{x^2} dx = C_1 + C_2 x + C_3 \frac{e^x}{x}. \quad (19)$$

Demnach wird das allgemeine Integral von (11)

$$y = u y_1 = u x = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 e^x. \quad (20)$$

§ 35. Die Variation der Konstanten.

I. Hat man auf irgendeine Weise das allgemeine Integral der reduzierten Differentialgleichung gefunden, so ist das allgemeine Integral der vollständigen Differentialgleichung nach dem Verfahren der Variation der Konstanten zu ermitteln.

Es liege also das allgemeine Integral der Differentialgleichung (4) § 38 in folgender Form vor

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} C_i y_i. \quad (1)$$

In diesem Ansatz wollen wir die Konstanten C_i jetzt als Funktionen von x ansehen und untersuchen, ob und unter welchen Umständen der so modifizierte Ansatz das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) in § 38 wird.

Zur Ausführung dieses Vorhabens ist Gleichung (1) ($n-1$) mal zu differenzieren

$$y' = \sum_1^n C_i y_i' + \sum_1^n C_i' y_i, \quad (2)$$

wobei wir bei jeder Differentiation den Teil, der die Differentialquotienten der C_i enthält, gleich Null setzen, was erlaubt ist, weil wir über die C_i verfügen dürfen. So entsteht

$$y' = \sum_1^n C_i y_i' \quad (3)$$

und

$$\sum_1^n C_i' y_i = 0 \quad (3a)$$

und so fort:

$$y'' = \sum_1^n C_i y_i'' \quad (4)$$

$$\sum_1^n C_i' y_i' = 0 \quad (4a)$$

.....

$$y^{(n-1)} = \sum_1^n C_i y_i^{(n-1)} \quad (5)$$

$$\sum_1^n C_i' y_i^{(n-2)} = 0. \quad (5a)$$

Entwickeln wir nun noch den n -ten Differentialquotienten

$$y^{(n)} = \sum_1^n C_i y_i^{(n)} + \sum_1^n C_i' y_i^{(n-1)}, \quad (6)$$

ohne den zweiten Teil zu annullieren, so gewinnen wir durch Einführung der Gleichungen (3), (4) und (5) in den Ansatz (1) des § 34 eine neue Gleichung

$$\sum_{i=1}^{i=n} C_i \sum_{k=0}^{k=n} X_k y_i^{(n-k)} + X_0 \sum_1^n C_i' y_i^{(n-1)} = X. \quad (7)$$

Da aber alle y_i der Gleichung

$$\sum_{k=0}^{k=n} X_k y_i^{(n-k)} = 0,$$

d. h. der reduzierten Differentialgleichung genügen, so bleibt von (7) nur übrig:

$$\sum_1^n C_i' y_i^{(n-1)} = X, \quad (8)$$

welche mit den $(n-1)$ -Gleichungen (3a), (4a) und (5a) zur Ermittlung der n Größen C_i' , d. h. der ersten Differentialquotienten der unbekannt Funktionen C_i dienen kann. Die C_i ermitteln sich als Funktionen von x , die wir mit $\vartheta_i(x)$ bezeichnen:

$$C_i' = \vartheta_i(x), \quad i = 1 \dots n; \quad (9)$$

durch deren Integration wird C_i selbst erhalten:

$$C_i = A_i + \int \vartheta_i(x) dx. \quad (10)$$

Nach Einführung in (1) ergibt sich somit das allgemeine Integral der vollständigen Differentialgleichung:

$$y = \sum_1^n A_i y_i + \sum_1^n y_i \int \vartheta_i(x) dx. \quad (11)$$

Hiermit wird auch die Angabe von § 34 bestätigt, nach welcher das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung sich findet, als Summe des allgemeinen Integrals der reduzierten Gleichung und eines partikulären Integrals der vollständigen Gleichung.

$$\sum_1^n y_i \int \vartheta_i(x) dx$$

ist dieses partikuläre Integral.

II. Sei jetzt die vollständige Gleichung

$$(x^2 - 2x + 2) \frac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = f(x), \quad (12)$$

so lautet das Gleichungssystem zur Bestimmung der C'_i :

$$\left. \begin{aligned} C'_1 x + C'_2 x^2 + C'_3 e^x &= 0, \\ C'_1 + 2C'_2 x + C'_3 e^x &= 0, \\ (2C'_2 + C'_3 e^x)(x^2 - 2x + 2) &= f(x), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

aus welchem sich findet

$$\left. \begin{aligned} C'_1 &= \frac{f(x)}{(x^2 - 2x + 2)^2} (x^2 - 2x) \\ C'_2 &= \frac{f(x)}{(x^2 - 2x + 2)^2} (1 - x) \\ C'_3 &= \frac{f(x)}{(x^2 - 2x + 2)^2} \frac{x^2}{e^x} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

und somit das allgemeine Integral:

$$\begin{aligned} y &= A_1 x + A_2 x^2 + A_3 e^x \\ &+ x \int \frac{f(x)(x^2 - 2x) dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} + x^2 \int \frac{f(x)(1 - x) dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} \\ &+ e^x \int \frac{f(x) x^2 e^{-x} dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Summe der drei Integrale

$$y_1 = x \int + x^2 \int + e^x \int \quad (16)$$

ist ein partikuläres Integral von (12).

§ 36. Die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Die Differentialgleichung

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X \quad (1)$$

spielt bei wichtigen Aufgaben der wissenschaftlichen Technik eine Rolle, besonders in dem Falle, wenn die Koeffizienten $X_0 \dots X_n$ als konstant angesehen werden können. Wir schreiben dann statt (1):

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i y^{(n-i)} = X. \quad (2)$$

Für den Fall $n = 2$ ist diese Gleichung bereits in § 27 behandelt worden. Es ergaben sich partikuläre Integrale der Form:

$$y = e^{\mu x}, \quad (3)$$

die wir auch hier zugrunde legen wollen.

I. Wir bilden n Differentialquotienten von (3):

$$y^{(n-i)} = \mu^{n-i} e^{\mu x}, \quad i = 0 \dots n, \quad (4)$$

die wir in die zu (2) gehörige reduzierte Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i y^{(n-i)} = 0 \quad (5)$$

einsetzen mit dem Ergebnis:

$$e^{\mu x} \sum_{i=0}^{i=n} a_i \mu^{n-i} = 0. \quad (6)$$

Nach Division mit $e^{\mu x}$ erweist sich (6) als eine Gleichung n -ten Grades zur Bestimmung der Exponenten μ :

$$a_0 \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \dots + a_{n-1} \mu + a_n = 0. \quad (7)$$

Die Gleichung liefere n verschiedene Wurzeln $\mu_1 \dots \mu_n$ (die auch zum Teil komplex sein können). Mit ihnen baut sich das allgemeine Integral von (5) auf in der Form:

$$y = \sum_1^n C_i e^{\mu_i x}. \quad (8)$$

II. Ist eine von den Wurzeln, etwa μ_1 , komplex,

$$\mu_1 = \alpha + \beta i,$$

so muß es noch eine zweite zu ihr konjugierte Wurzel, etwa μ_2 , geben:

$$\mu_2 = \alpha - \beta i.$$

Das allgemeine Integral lautet dann:

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x} + \sum_3^n C_i e^{\mu_i x}. \quad (9)$$

Hier entwickelt man:

$$e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

und erhält durch Einsetzen in (9):

$$y = [(C_1 + C_2) \cos \beta x + i(C_1 - C_2) \sin \beta x] e^{\alpha x} + \sum_3^n C_i \cdot e^{\mu_i x} \quad (10)$$

oder mit den neuen Integrationskonstanten:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= A, \\ i(C_1 - C_2) &= B, \\ y &= (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x} + \sum_3^n C_i e^{\mu_i x}. \end{aligned} \quad (11)$$

III. Sind ferner mehrere Wurzeln μ_i einander gleich, etwa $\mu_3 = \mu_2 = \mu_1$, so gewinnt man das allgemeine Integral durch einen Grenzübergang. Zunächst sieht man von der Gleichheit ab und setzt:

$$\mu_2 = \mu_1 + g, \quad \mu_3 = \mu_1 + h,$$

wo g und h als kleine Größen zu denken sind.

Die zugehörigen Exponentialgrößen entwickelt man in Reihen wie folgt:

$$e^{\mu_2 x} = e^{(\mu_1 + g)x} = e^{\mu_1 x} \cdot \left(1 + gx + \frac{g^2 x^2}{1 \cdot 2} + \dots \right),$$

$$e^{\mu_3 x} = e^{(\mu_1 + h)x} = e^{\mu_1 x} \left(1 + hx + \frac{h^2 x^2}{1 \cdot 2} + \dots \right),$$

womit das allgemeine Integral (8) wird:

$$\begin{aligned} y &= (C_1 + C_2 + C_3) e^{\mu_1 x} + (C_2 g + C_3 h) x e^{\mu_1 x} \\ &+ \frac{1}{2} (g^2 C_2 + h^2 C_3) x^2 e^{\mu_1 x} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (g^3 C_2 + h^3 C_3) x^3 e^{\mu_1 x} \\ &+ \dots + \sum_{i=4}^n C_i e^{\mu_i x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Hier muß man g und h gegen Null konvergieren lassen, um die Gleichheit der drei Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 zu gewinnen. Damit nun die mit C_2 und C_3 behafteten Glieder nicht verschwinden, so muß man diese Größen C_2 und C_3 so unendlich werden lassen, daß $C_2 g + C_3 h$ sowohl wie $g^2 C_2 + h^2 C_3$ endlich bleiben, während C_1 so mit C_2 und C_3 entgegengesetzt unendlich werden muß, daß auch $C_1 + C_2 + C_3$ endlich bleibt. Diese drei Bedingungen bezüglich C_1, C_2, C_3 sind erfüllbar, weil dies willkürliche Größen sind. Die Glieder mit $g^3 C_3$ usw. verschwinden dann mit konvergierendem g und h als klein von höherer Ordnung, und wir erhalten mit neuen Konstanten:

$$A_1 = C_1 + C_2 + C_3, \quad A_2 = \lim (C_2 g + C_3 h),$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \lim (C_2 g^2 + C_3 h^2)$$

den Ansatz

$$y = (A_1 + A_2 x + A_3 y^2) e^{\mu_1 x} + \sum_{i=4}^{i=n} C_i e^{\mu_i x}. \quad (13)$$

IV. Liegen mehrere gleiche komplexe Wurzeln vor:

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha + \beta i,$$

$$\mu_3 = \mu_4 = \alpha + \beta i,$$

so sind die beiden Verfahren, die zu Gleichung (11) und (13) führen, zu kombinieren. Man erhält in diesem Falle:

$$y = \{(A_1 + B_1 x) \cos \beta x + (A_2 + B_2 x) \sin \beta x\} e^{\alpha x} + \sum_{i=5}^{i=n} C_i e^{\mu_i x} \quad (14)$$

Sind noch mehr gleiche bzw. komplex gleiche Wurzeln vorhanden, so sind die entwickelten Verfahren entsprechend anzuwenden²⁵⁾.

§ 37. Anwendungsbeispiele: Föppls Differentialgleichung der Formänderung einer Eisenbahnschwelle auf nachgiebiger Unterlage; Formänderung der Wandung eines Wasserbehälters²⁶⁾.

Die Biegung einer Eisenbahnschwelle und die Verteilung des Druckes zwischen Schwellenunterfläche und Bettung kann bestimmt werden, wenn man eine Annahme über den Zusammenhang zwischen der Senkung eines Schwellenpunktes und dem Druck an der betreffenden Stelle macht. Die Unterkante der ursprünglich geraden Schwelle AB werde unter dem Einfluß

der (Fig. 96) Raddrucke RR in die Kurve $A_1 B_1$ deformiert und in die Bettung eingedrückt. Die Eindrückung habe an der Stelle x den Wert y .

Man nimmt nun an, daß infolge der Einsenkung bei x ein Druck p zwischen Schwelle und Bettung entsteht, der proportional y ist. Man setzt

$$p = ky$$

und nennt die Konstante k die Bettungsziffer.

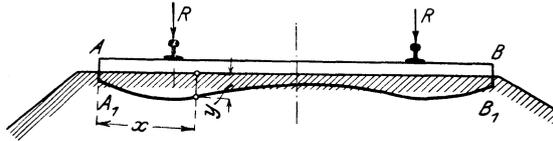


Fig. 96. Eisenbahnschwelle auf nachgiebiger Unterlage.

Nach dieser Festsetzung wollen wir die Schwelle etwas allgemeiner durch eine stetig verteilte Last $q = f(x)$ belastet denken (Fig. 97). Unter deren Einfluß entsteht eine Kurve der Einsenkung y , deren Abhängigkeit von x zu bestimmen ist. Die Einsenkungen y liefern eine zu q entgegengesetzte Belastungsfläche $-ky$, für welche zunächst gilt:

$$\int_0^l f(x) dx = -k \int_0^l y dx. \quad (1)$$

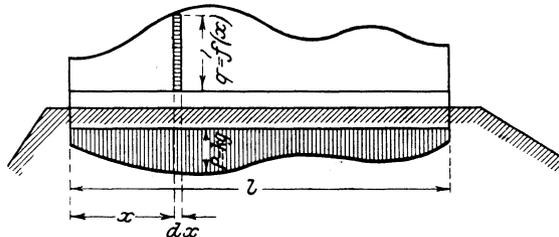


Fig. 97. Eisenbahnschwelle mit kontinuierlich verteilter Belastung auf nachgiebiger Unterlage.

Ferner liefert die elastische Differentialgleichung (8) in § 26 nach zweimaliger Differentiation noch folgenden Ansatz:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{d^2 M_x}{dx^2} = q - ky = f(x) - ky \quad (2)$$

oder

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = f(x). \quad (3)$$

Dies ist eine nicht reduzierte Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zunächst betrachten wir die reduzierte Gleichung

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{k}{EJ} y = 0. \quad (4)$$

Der nach Vorschrift von Gleichung (7) § 40 gebildete Ansatz

$$\mu^4 + \frac{k}{EJ} = 0 \quad (5)$$

liefert vier Wurzeln:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}; & \mu_2 &= \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}} \\ \mu_3 &= \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}; & \mu_4 &= \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}} \end{aligned}$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= (1 + i) \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}; & \mu_2 &= (1 - i) \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}; \\ \mu_3 &= (-1 + i) \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}; & \mu_4 &= (-1 - i) \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Mit

$$\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \alpha$$

ergibt sich jetzt das allgemeine Integral

$$y = (A_1 \cos \alpha x + B_1 \sin \alpha x) e^{\alpha x} + (A_2 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x) e^{-\alpha x}. \quad (7)$$

Zur Behandlung der vollständigen Gleichung (3) greift man auf die Variation der Konstanten zurück.

Zur Bestimmung der vier Konstanten A_1, B_1 und A_2, B_2 dient die Bemerkung, daß aus den Enden der Schwelle sowohl das Moment

$$M = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

wie auch die Querkraft

$$Q = \frac{dM}{dx} = -EJ \frac{d^3 y}{dx^3}$$

verschwinden muß. Wir haben also vier Gleichungen zur Bestimmung von A_1, B_1, A_2, B_2 :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=0} &= 0, & \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=l} &= 0, \\ \left[\frac{d^3 y}{dx^3} \right]_{x=0} &= 0, & \left[\frac{d^3 y}{dx^3} \right]_{x=l} &= 0, \end{aligned}$$

welche hinreichend sind.

II. Dieselbe Differentialgleichung (3), jedoch mit einer einfacheren Störungsfunktion, tritt auf bei der Formänderung der Wandung eines Wasserbehälters, falls der Wandungsquerschnitt ein Rechteck ist²⁷⁾.

Unter der Voraussetzung, daß die Wanddicke D klein im Verhältnis zum mittleren Radius R sei, untersuchen wir die Formänderung der dem Radius R entsprechenden Zylinderfläche, deren einzelne Punkte durch die Koordinaten x und φ bestimmt werden. Die diesen Koordinaten entsprechenden elastischen Verschiebungen seien ξ und σ , während η die radiale Verschiebung der Punkte x, φ aus der spannungsfreien Lage bezeichnet.

Für unsere Zwecke wollen wir von den Verschiebungen ξ absehen, da sie als klein betrachtet werden können, und wir wollen nur die Kräfte, die das Wandelement in horizontaler Richtung beeinflussen, betrachten. Diese Kräfte sind (Fig. 98):

1. die resultierende Querkraft dQ ,
2. die Resultierende der Ringspannungen $\Phi D dx d\varphi$,
3. Der Wasserdruck $\gamma x R dx d\varphi$.

Für die Kräfte gilt die Gleichgewichtsbeziehung:

$$dQ = \gamma x R dx d\varphi - \Phi D dx d\varphi. \tag{8}$$

Hier bedeutet γ das Gewicht der Raumeinheit Wasser, während

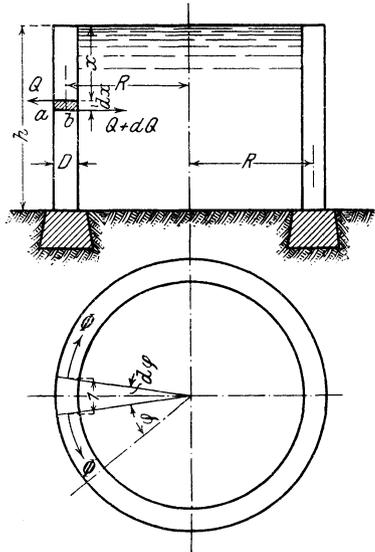


Fig. 98. Zur Formänderung der Wandung eines Wasserbehälters.

$\varphi = \frac{\eta E}{R}$ ist. (Produkt aus dem Elastizitätsmodul in die spezifische Dehnung $\frac{\eta}{R}$.)

Beachtet man nun die bekannte Beziehung zwischen Querkraft Q und Biegemoment M

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (9)$$

und die Beziehung zwischen Biegemoment M und der Krümmung $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ des Meridianschnittes der Behälterwand:

$$M = \frac{ED^3}{12} R d\varphi \frac{d^2\eta}{dx^2}, \quad (10)$$

so ergibt sich neuerlich (nach Division mit $R d\varphi$):

$$\frac{ED^3}{12} \frac{d^4\eta}{dx^4} = \gamma x - \frac{D\eta E}{R^2} \quad (11)$$

oder:

$$\frac{d^4\eta}{dx^4} + \eta \frac{12}{D^2 R^2} = x \frac{12\gamma}{ED^3}. \quad (12)$$

Diese Gleichung formt man noch zweckmäßig durch die Substitutionen

$$x = h x_1$$

$$\eta = D \eta_1$$

in:
$$\frac{d^4\eta_1}{dx_1^4} + \eta_1 \frac{12 h^4}{D^2 R^2} = x_1 \frac{12 \gamma h^5}{ED^3}, \quad (13)$$

woraus noch die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{12 h^4}{D^2 R^2} &= k^4, \\ \frac{12 h^5 \gamma}{ED^3} &= l^4 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

liefern:
$$\frac{d^4\eta_1}{dx_1^4} + k^4 \eta_1 = l^4 x_1, \quad (15)$$

Das allgemeine Integral der zu (15) gehörigen reduzierten Gleichung

$$\frac{d^4\eta_1}{dx_1^4} + k^4 \eta_1 = 0 \quad (15 a)$$

lautet, wenn man in Gl. (7) statt der Exponentialfunktionen die hyperbolischen einführt und $\alpha = \frac{k}{\sqrt{2}}$ setzt:

$$\begin{aligned} \eta_1 = & C_1 \cos \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \mathfrak{Cof} \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 + C_2 \sin \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \mathfrak{Cof} \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \\ & + C_3 \cos \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \mathfrak{Sin} \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 + C_4 \sin \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \mathfrak{Sin} \frac{k}{\sqrt{2}} x_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Um nun das allgemeine Integral von (15) zu finden, haben wir zu (16) ein beliebiges partikuläres Integral dieser Gleichung zu addieren. Der bloße Augenschein lehrt, daß

$$\eta_1 = \frac{l^4}{k^4} x_1$$

ein solches Integral ist, wie sich durch Einsetzen in (15) sofort ergibt. Also ist

$$\begin{aligned} \eta_1 = & \frac{l^4}{k^4} x_1 + C_1 \cos \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \mathfrak{Cof} \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 + C_2 \sin \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \mathfrak{Cof} \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \\ & + C_3 \cos \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \mathfrak{Sin} \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 + C_4 \sin \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \mathfrak{Sin} \frac{k}{\sqrt{2}} x_1 \end{aligned} \quad (17)$$

das gesuchte allgemeine Integral.

Wenn man will, kann man auch auf (15) die Substitution:

$$\eta_1 = \frac{l^4}{k^4} x_1 + u \quad (17a)$$

anwenden, wodurch die homogene Differentialgleichung

$$\frac{d^4 u}{dx_1^4} - k^4 u = 0 \quad (18)$$

entsteht, welche das allgemeine Integral (16) hat. Nach Substitution von (17a) kommt man dann wieder auf (17)²⁸⁾.

§ 38. Integration durch Reihen.

I. Vorbemerkung.

Ist es nicht möglich, auf einem der bisher geschilderten Wege das allgemeine Integral einer Differentialgleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

zu gewinnen, so bleibt noch die Methode der Reihenentwicklung.

Man geht hierzu von dem Satz aus, daß, wenn

$$y = f(x) \quad (2)$$

ein Integral von (1) ist, dieses sich nach den Sätzen von Taylor oder Maclaurin²⁹⁾ in eine Potenzreihe entwickeln lassen muß. Entweder hat man nach Taylor

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + f'(x_0) \frac{x - x_0}{1} + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \end{aligned} \quad (3)$$

oder nach Maclaurin mit $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} y &= f(0) + f'(0) \frac{x}{1} + f''(0) \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \end{aligned} \quad (4)$$

Es handelt sich jetzt darum, die Größen $f^{(k)}(x)$ bzw. $f^{(k)}(0)$ aus der gegebenen Differentialgleichung (1) zu finden.

Löst man die Gleichung (1) nach dem höchsten vorkommenden Differentialquotienten $\frac{d^n y}{dx^n}$ auf:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (5)$$

so kann man mit:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = f^{(k)}(x) \quad (k \geq n) \quad (6)$$

die höheren Koeffizienten in (3) oder (4) mittels sukzessiver Differentiation durch die n niedrigsten Koeffizienten $f^{(k)}(x_0)$ bzw. $f^{(k)}(0)$ ($k < n$) ausdrücken. Die letzteren bleiben unbestimmt und man erhält mit

$$f^{(k)}(x_0) = C_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

im Falle (3) das allgemeine Integral:

$$\begin{aligned} y &= C_0 + C_1 \frac{x - x_0}{1} + C_2 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots + C_{n-1} \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &+ \varphi(x, C_0, C_1, \dots, C_{n-1}) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Ist z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + xy = 0 \quad (8)$$

gegeben, so liefert, wenn man festsetzt, daß für $x = 0$ $y = C_0$ und $\frac{dy}{dx} = C_1$ sein soll, die sukzessive Differentiation folgende Werte:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -xy = 0,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -xy' - y = -1C_0,$$

$$y^{(4)} = -2y' - xy'' = -2C_1,$$

$$y^{(5)} = -3y'' - xy''' = 0;$$

$$y^{(6)} = -4y''' - xy^{(4)} = +1 \cdot 4 \cdot C_0,$$

$$y^{(7)} = -5y^{(4)} - xy^{(5)} = +2 \cdot 5 \cdot C_1,$$

$$y^{(8)} = -6y^{(5)} - xy^{(6)} = 0,$$

$$y^{(9)} = -7y^{(6)} - xy^{(7)} = -1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot C_0,$$

$$y^{(10)} = -8y^{(7)} - xy^{(8)} = -2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot C_1,$$

mit denen der Maclaurinsche Ansatz ergibt:

$$y = C_0 + C_1 x - C_0 \frac{1}{3!} x^3 - C_1 \frac{2}{4!} x^4 + C_0 \frac{1 \cdot 4}{6!} x^6 + C_1 \frac{2 \cdot 5}{7!} x^7 \\ - C_0 \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} x^9 - C_1 \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} x^{10} + \dots$$

oder nach Zusammenfassung der mit C_0 bzw. C_1 multiplizierten Teile

$$y = C_0 \left\{ 1 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} x^6 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} x^9 + \dots \right\} \\ + C_1 x \left\{ 1 - \frac{2}{4!} x^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} x^7 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} x^{10} + \dots \right\} \quad (9)$$

welcher Ausdruck das allgemeine Integral von (9) darstellt, falls die eingeklammerten Reihen konvergent sind.

II. Das unter I beschriebene Verfahren, welches bei linearen Differentialgleichungen immer anwendbar ist, ist insofern ungünstig, als es das Bildungsgesetz der Reihenentwicklung nicht immer leicht erkennen läßt.

Die Bildung der Koeffizienten übersieht man leichter, wenn man von einem allgemeinen Reihenansatz ausgeht, mit dem man die gegebene Differentialgleichung zu befriedigen versucht. Diese Methode gestattet zugleich, auch lineare Differentialgleichungen mit allgemeinen Koeffizienten der Form:

$$P_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x) y = 0 \quad (10)$$

zu behandeln, die wir in Summenform schreiben:

$$\sum_{k=0}^n P_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = 0. \quad (11 a)$$

Von den Koeffizienten $P_k(x)$ setzen wir voraus, daß sie sich in Taylorsche Reihen entwickeln lassen:

$$P_k(x) = \frac{p_{k0}}{(x-a)^{\mu_k}} + \frac{p_{k1}}{(x-a)^{\mu_k-1}} + \dots \quad (12)$$

oder in Summenform:

$$P_k(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{p_{k\lambda}}{(x-a)^{\mu_k-\lambda}}, \quad (12 a)$$

wo der Exponent der Anfangspotenz μ_k eine endliche ganze Zahl sein soll.

Unter Zusammenfassung von (11 a) und (12 a) schreibt sich unsere Differentialgleichung jetzt:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_{k\lambda} (x-a)^{-\mu_k+\lambda} \frac{d^k y}{dx^k} = 0. \quad (11 b)$$

Diesen Ausdruck multiplizieren wir mit einer solchen Potenz $(x-a)^t$, daß die Gliederkoeffizienten $P_k(x)$ die Form annehmen:

$$P_k(x) = (x-a)^k \{p_{k0} + p_{k1}(x-a) + p_{k2}(x-a)^2 + \dots\}.$$

Dies ist immer möglich. Es kann indessen bei einigen Gliedern vorkommen, daß die Entwicklung der $\{ \}$ Klammer mit einer Potenz von $x-a$ beginnt; jedoch soll dies nicht bei allen Gliedern der Differentialgleichung vorkommen.

Statt (11 b) haben wir dann folgende Gestalt der gegebenen Differentialgleichung:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} (x-a)^k p_{k\lambda} (x-a)^{\lambda} \frac{d^k y}{dx^k} = 0. \quad (11 c)$$

Die Gleichungsgestalt heißt die Frobeniussche Normalform³⁰⁾ für die außerwesentlich singuläre Stelle $x = a$.

Wir versuchen nun, dieser Differentialgleichung durch eine Potenzreihe:

$$y = (x - a)^{\varrho} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (x - a)^{\nu} \quad (13)$$

zu genügen, die mit einem noch zu bestimmenden Anfangsexponenten ϱ beginnt und in welcher das Bildungsgesetz des Koeffizienten a_{ν} zu ermitteln ist.

Wir berechnen aus (13) die sukzessiven Differentialquotienten $y' y'' \dots y^{(k)} y^{(n)}$ wie folgt:

$$y' = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + \varrho) a_{\nu} (x - a)^{\nu+\varrho-1},$$

$$y'' = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + \varrho)(\nu + \varrho - 1) a_{\nu} (x - a)^{\nu+\varrho-2},$$

$$y^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + \varrho)(\nu + \varrho - 1) \dots (\nu + \varrho - k + 1) a_{\nu} (x - a)^{\nu+\varrho-k},$$

die wir in (11c) eintragen, unter Benutzung der Abkürzung:

$$(\nu + \varrho)(\nu + \varrho - 1) \dots (\nu + \varrho - k + 1) = \left[\begin{matrix} \nu + \varrho \\ k \end{matrix} \right],$$

wobei wir beachten, daß

$$\left[\begin{matrix} \nu + \varrho \\ 1 \end{matrix} \right] = \nu + \varrho \quad \text{und} \quad \left[\begin{matrix} \nu + \varrho \\ 0 \end{matrix} \right] = 1$$

ist.

Durch die Eintragung schreibt sich jetzt (11c)

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{k\lambda} (x - a)^{\lambda} \left[\begin{matrix} \nu + \varrho \\ k \end{matrix} \right] a_{\nu} (x - a)^{\nu+\varrho} = 0,$$

oder anders geordnet:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{k\lambda} a_{\nu} \left[\begin{matrix} \nu + \varrho \\ k \end{matrix} \right] (x - a)^{\nu+\varrho+\lambda} = 0. \quad (14)$$

Hier kann man $(x - a)^{\varrho}$ vor die Summe setzen und andererseits $\nu + \lambda = s$ und $\lambda = s - \nu$ substituieren. Durch diese letztere Maßnahme wird festgesetzt, daß ν nie größer als s werden kann,

weil sonst Koeffizienten $p_{k\lambda}$ mit negativen Indizes vorkommen würden, was nach Ansatz (12) ausgeschlossen ist. Somit wird die Summe (14):

$$(x-a)^{\varrho} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{v=0}^s \sum_{k=0}^n p_{k, s-v} \left[\begin{matrix} v+\varrho \\ k \end{matrix} \right] a_v (x-a)^s = 0. \quad (15)$$

Diese nach Potenzen von $(x-a)$ fortschreitende Reihe kann aber nur dann für jedes x verschwinden, wenn die Koeffizienten der einzelnen Potenzen sämtlich = Null sind, d. h. wenn

$$\sum_{v=0}^s \sum_{n=0}^n p_{k, s-v} \left[\begin{matrix} v+\varrho \\ k \end{matrix} \right] a_v = 0 \quad (16)$$

gilt.

Diese Doppelsumme ist anzusetzen für alle Werte $s = i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Die einzelnen Glieder sind Produkte des unbestimmten Koeffizienten a_v mit Faktoren:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n p_{k, i-v} \left[\begin{matrix} v+\varrho \\ k \end{matrix} \right] \\ = & p_{0, i-v} + p_{1, i-v} (v+\varrho) + p_{2, i-v} (v+\varrho)(v+\varrho-1) + \dots \\ & + p_{n, i-v} (v+\varrho)(v+\varrho-1) \dots (v+\varrho-n+1). \end{aligned} \quad (17)$$

Setzen wir jetzt:

$$\begin{aligned} p_{0i} + p_{1i}\varrho + p_{2i}(\varrho-1) \dots \\ + p_{n, i}\varrho(\varrho-1) \dots (\varrho-n+1) = f_i(\varrho), \end{aligned}$$

so ergeben sich folgende Spezialausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } i=0: f_0(\varrho) &= p_{00} + p_{10}\varrho + p_{20}\varrho(\varrho-1) + \dots \\ & \quad \dots + p_{n0}\varrho(\varrho-1) \dots (\varrho-n+1) \\ \text{„ } i=1: f_1(\varrho) &= p_{01} + p_{11}\varrho + p_{21}\varrho(\varrho-1) + \dots \\ & \quad \dots + p_{n1}\varrho(\varrho-1) \dots (\varrho-n+1) \\ \text{„ } i=1: f_2(\varrho) &= p_{02} + p_{12}\varrho + p_{22}\varrho(\varrho-1) + \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

Die Summe (17) schreibt sich aber hiernach:

$$\sum_{k=0}^n p_{k, i-v} \left[\begin{matrix} v+\varrho \\ k \end{matrix} \right] = f_{i-v}(\varrho+v) \quad (18)$$

und die Gleichung (16):

$$\sum_{k=0}^{\nu=i} f_{i-\nu}(\varrho + \nu) a_{\nu} = 0, \quad (19)$$

welche anzuschreiben ist für $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Somit entspringen folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} f_0(\varrho) a_0 &= 0, \\ f_1(\varrho) a_0 + f_0(\varrho + 1) a_1 &= 0, \\ f_2(\varrho) a_0 + f_1(\varrho + 1) a_1 + f_0(\varrho + 2) a_2 &= 0, \\ \dots & \\ f_{\nu}(\varrho) a_0 + f_{\nu-i}(\varrho + 1) a_1 + \dots + f_0(\varrho + \nu) a_{\nu} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Dieses Gleichungssystem dient zur rekurrierenden Berechnung der Koeffizienten a_{ν} in der folgenden Weise.

Zunächst liefert die Bedingung:

$$f_0(\varrho) a_0 = 0,$$

da a_0 nicht verschwinden darf, soll anders die Entwicklung (13) mit der Potenz $(x = a)^{\varrho}$ anfangen, die Gleichung

$$f_0(\varrho) = p_{00} + p_{10} \varrho + p_{20} \varrho(\varrho - 1) + \dots + p_{n0} \varrho(\varrho - 1) \dots (\varrho - n + 1) \quad (21)$$

für ϱ , welche vom n -ten Grade ist.

Liefert diese n verschiedene Wurzeln $\varrho_1 \dots \varrho_n$, so entsprechen diesen n verschiedene Potenzreihenentwicklungen (13), deren Koeffizienten a_{ν} sich mit unbestimmt bleibenden a_0 aus (20) berechnen lassen. Die Formel (21), die somit für die Integration der vorgelegten Differentialgleichung von grundlegender Bedeutung ist, heißt nach Fuchs „determinierende Fundamentalgleichung“³¹⁾. Hat sie n verschiedene Wurzeln, dann erhält man nach Berechnung der Koeffizienten a_{ν} aus (20) n partikuläre Integrale in Gestalt von Potenzreihenentwicklungen. Diese n -Integrale sind, wie man beweisen kann, voneinander linear unabhängig und liefern daher mit unbestimmten Faktoren multipliziert und addiert das allgemeine Integral der Differentialgleichung (10). Die Gesamtheit dieser Integrale heißt deshalb ein Fundamentalsystem³²⁾ der Differentialgleichung.

§ 39. Anwendung der Integration durch Reihen auf ein Beispiel.

Hat die Wand des Behälters in § 41 keinen rechteckigen Querschnitt, sondern ist die Wanddicke D eine Funktion des Abstandes x vom oberen Rande des Behälters (Fig. 99), so

bleiben zunächst die Formeln (8), (9), (10) des § 41 dieselben. Bei der Ausführung der Differentiation nach x [in Gl. (11)] hat man indessen zu beachten, daß D von x abhängt, und muß man schreiben:

$$\frac{E}{12} \frac{d^2}{dx^2} \left(D^3 \frac{d^2 \eta}{dx^2} \right) = \gamma x - \frac{D \eta E}{R_2}. \quad (1)$$

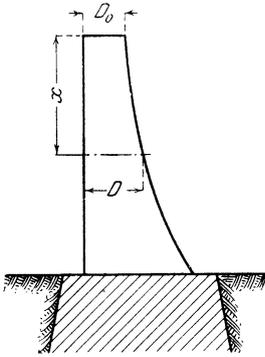


Fig. 99. Wasserbehälter mit parabolischem Wandquerschnitt.

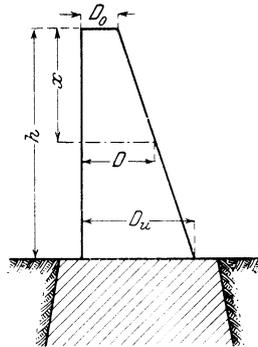


Fig. 100. Wasserbehälter mit trapezförmigem Wandquerschnitt.

Setzen wir hier speziell trapezförmigen Querschnitt voraus (Fig. 100):

$$D = D_0 (1 + \alpha \xi); \quad \xi = \frac{x}{h}, \quad \alpha = \frac{D_u - D_0}{h},$$

so geht (1) über in:

$$\frac{d^2}{h^2 d\xi^2} \left[D_0^3 (1 + \alpha \xi)^3 \frac{d^2 \eta}{h^2 d\xi^2} \right] + \frac{12 \eta D_0 (1 + \alpha \xi)}{R^2} - \frac{12 \gamma h \xi}{E} = 0, \quad (2)$$

oder mit

$$\frac{12 h^4}{D_0^2 R^2} = \varkappa$$

$$\frac{12 \gamma h^3}{E D_0^3} = \lambda$$

in:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[(1 + \alpha \xi)^3 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right] + \varkappa \eta (1 + \alpha \xi) - \lambda \xi = 0. \quad (3)$$

Dies ist eine nicht homogen lineare Differentialgleichung, die wir homogen machen durch den Ansatz

$$\lambda \xi = 0.$$

Durch Ausführung der Differentiationen erhalten wir jetzt:

$$(1 + \alpha \xi^2) \frac{d^4 \eta}{d \xi^4} + 6 \alpha (1 + \alpha \xi) \frac{d^3 \eta}{d \xi^3} + 6 \alpha^2 \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} + \kappa \eta = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung bringen wir durch Multiplikation mit ξ^4 auf die Frobeniussche Normalform (11c) des § 38:

$$\xi^4 (1 + 2 \alpha \xi + \alpha^2 \xi^2) \frac{d^4 \eta}{d \xi^4} + \xi^3 (6 \alpha \xi + 6 \alpha^2 \xi^2) \frac{d^3 \eta}{d \xi^3} + \xi^2 \cdot 6 \alpha^2 \xi^2 \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} + \kappa \xi^4 \eta = 0. \quad (5)$$

Aus dieser Form schreiben wir zunächst die Koeffizienten $p_{k\lambda}$ hin:

$$\left. \begin{array}{cccccc} p_{40} = 1 & p_{41} = 2 \alpha & p_{42} = \alpha^2 & p_{43} = 0 & \dots\dots & \\ p_{30} = 0 & p_{31} = 6 \alpha & p_{32} = 6 \alpha^2 & p_{33} = 0 & \dots\dots & \\ p_{20} = 0 & p_{21} = 0 & p_{22} = 6 \alpha^2 & p_{23} = 0 & \dots\dots & \\ p_{10} = 0 & p_{11} = 0 & p_{12} = 0 & p_{13} = 0 & \dots\dots & \\ p_{00} = 0 & p_{01} = 0 & p_{02} = 0 & p_0 = 0 & p_{04} = \kappa. & \end{array} \right\} \quad (6)$$

Mit diesen Werten finden sich die Größen $f_i(\varrho)$:

$$\left. \begin{array}{l} f_0(\varrho) = \varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2)(\varrho - 3), \\ f_1(\varrho) = 6 \alpha \varrho \cdot (\varrho - 1)(\varrho - 2) + 2 \alpha \varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2)(\varrho - 3) \\ \qquad \qquad \qquad = 2 \alpha \varrho^2(\varrho - 1)(\varrho - 2), \\ f_2(\varrho) = \alpha^2 [6 \varrho(\varrho - 1) + 6 \varrho(\varrho - 1)(\xi - 2) \\ \qquad \qquad \qquad + \varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2)(\varrho - 3)] = \alpha^2 \varrho^2(\varrho - 1)(\varrho - 1), \\ f_3(\varrho) = 0, \\ f_4(\varrho) = \kappa, \\ f_5(\varrho) = 0, \\ f_6(\varrho) = 0 \dots \end{array} \right\} \quad (7)$$

Mit diesen Größen wird das rekurrierende Gleichungssystem (20) § 38 aufgestellt und aus diesem die Koeffizienten a_0, a_1, \dots berechnet.

Man erhält mit unbestimmt bleibenden a_0 :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -a_0 \cdot 2\alpha \frac{\varrho}{\varrho+1}, & a_2 &= +a_0 3\alpha^2 \frac{\varrho}{\varrho+2}, \\
 a_3 &= -a_0 \cdot 4\alpha^3 \frac{\varrho}{\varrho+3}, \\
 a_4 &= +a_0 \left(5\alpha^4 \frac{\varrho}{\varrho+4} - \frac{\varkappa}{(\varrho+1)(\varrho+2)(\varrho+3)(\varrho+4)} \right), \\
 a_5 &= -a_0 \left(6\alpha^5 \frac{\varrho}{\varrho+5} - \frac{4\varkappa\alpha(\varrho+2)}{(\varrho+1)(\varrho+2)(\varrho+3)(\varrho+4)(\varrho+5)} \right), \\
 a_6 &= +a_0 \left(7\alpha^6 \frac{\varrho}{\varrho+6} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4\varkappa\alpha^2(\varrho^2+11\varrho+25)}{(\varrho+1)(\varrho+2)(\varrho+3)(\varrho+4)(\varrho+5)(\varrho+6)} \right) \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

Setzt man hier ϱ der Reihe nach gleich den sich aus der determinierenden Gleichung ergebenden Werten 0, 1, 2, 3, so finden sich nach Ansatz (13) § 38 vier verschiedene Reihen für η , die vier voneinander unabhängige partikuläre Integrale (ein Fundamentalsystem) der Differentialgleichung (5) darstellen. Das allgemeine Integral wird damit:

$$\begin{aligned}
 \eta &= A \left\{ 1 - \frac{\varkappa}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \xi^4 + \dots \right\} \\
 &+ B \xi \left\{ 1 - \alpha \xi + \alpha^2 \xi^2 - \alpha^3 \xi^3 + \left(\alpha^4 - \frac{\varkappa}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right) \xi^4 \right. \\
 &\quad \left. - \left(\alpha^5 - \frac{12\varkappa\alpha}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \right) \xi^5 + \dots \right\} \\
 &+ C \xi^2 \left\{ 1 - \frac{4}{3} \alpha \xi + \frac{6}{4} \alpha^2 \xi^2 - \frac{8}{5} \alpha^3 \xi^3 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{10}{6} \alpha^4 - \frac{\varkappa}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \right) \xi^4 + \dots \right\} \\
 &+ D \xi^3 \left\{ 1 - \frac{6}{4} \alpha \xi + \frac{9}{5} \alpha^2 \xi^2 - \frac{12}{6} \alpha^3 \xi^3 + \dots \right\},
 \end{aligned}$$

wo A, B, C, D die unbestimmten Konstanten sind, die aus den Grenzbedingungen zu berechnen sind.

§ 40. Aufsuchung des Fundamentalsystems, falls die Wurzeln der determinierenden Gleichung nicht sämtlich verschieden sind.

I. Das Verfahren des § 38 ist nicht in vollem Umfange anwendbar, wenn die determinierende Gleichung mehrfache Wurzeln hat, oder wenn die Differenzen einiger Wurzeln ganze Zahlen sind.

Der Fall mehrfacher Wurzeln reduziert offenbar die Zahl der unabhängigen partikulären Integrale, während im Falle ganzzahliger Wurzeldifferenzen die Koeffizienten a_v teilweise unendlich werden, wie sich aus folgendem Ansatz für diese Koeffizienten ergibt:

$$a_v = \frac{a_0 A_v(\varrho)}{f_0(\varrho + 1) \cdot f_0(\varrho + 2) \cdot \dots \cdot f_0(\varrho + v)}. \quad (1)$$

Gibt es ganzzahlige Wurzeldifferenzen, so können offenbar im Nenner von (1) Größen $f_0(\varrho + m)$ auftreten, die den Nenner zum Verschwinden bringen und a_v also unendlich machen.

Die Größe $A_v(\varrho)$ ist gegeben durch folgende Determinante:

$$A_v(\varrho) = (-1)^v \begin{vmatrix} f_1(\varrho + v - 1) f_2(\varrho + v) - 2 \dots f_{v-1}(\varrho + 1) f_v(\varrho) \\ f_0(\varrho + v - 1) f_1(\varrho + v) - 2 \dots f_{v-2}(\varrho + 1) f_{v-1}(\varrho) \\ 0 & f_1(\varrho + v) - 2 \dots f_{v-3}(\varrho + 1) f_{v-2}(\varrho) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_0(\varrho + 1) & f_1(\varrho) \end{vmatrix} \quad (2)$$

Die Richtigkeit dieses Ansatzes kann man leicht an dem niedrigsten Koeffizienten a_v der rekurrierenden Entwicklung (20) § 42 verifizieren. Es ist z. B.:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0 A_1(\varrho)}{f_0(\varrho + 1)} = -a_0 \frac{f_1(\varrho)}{f_0(\varrho + 1)}, \\ a_2 &= a_0 \frac{A_2(\varrho)}{f_0(\varrho + 1) f_0(\varrho + 2)} = a_0 \frac{f_1(\varrho) f_1(\varrho + 1) - f_0(\varrho + 1) f_2(\varrho)}{f_0(\varrho + 1) f_0(\varrho + 2)}. \end{aligned} \right\} (3)$$

usw.

Die im Absatz 1 gedachten Möglichkeiten betreffen die Wurzeln, lassen sich in einer gemeinsamen Ausdrucksweise fassen, wenn man sagt, daß unter den Wurzeln solche vorkommen, deren Differenz entweder ganzzahlig oder Null ist. Alle Wurzeln, die diese Eigenschaft haben, fassen wir in einer Wurzelgruppe³³⁾ zusammen. Es sei ϱ_0 die größte Wurzel der Gruppe. Die weiteren Wurzeln seien $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_\mu$, so daß

$\mu + 1$ Wurzeln zur Gruppe gehören. Diese Wurzeln seien nach ihrer Größe geordnet, so daß gilt:

$$q_a \geq q_{a+1}.$$

Zunächst findet man ohne weiteres ein partikuläres Integral durch den Ansatz (13) § 38, wenn die a_v dem Gleichungssystem (20) § 38 genügen und $q = q_0$ gesetzt wird:

$$y_{(0)} = (x - a)^{q_0} \sum_{r=0}^{\infty} a_r (x - a)^r. \quad (4)$$

Aus diesem partikulären Integral leitet man das zur Wurzel q_α der Gruppe gehörige ab durch den Ansatz:

$$y_{(\alpha)} = \frac{\partial^\alpha}{\partial q^\alpha} \left[(x - a)^q \sum_{r=0}^{\infty} a_r (x - a)^r \right]_{q=q_\alpha}. \quad (5)$$

Wir sehen davon ab, für diesen Ansatz einen Beweis zu geben, und verweisen dieserhalb auf die Literatur.

Die Formel (5) kann man durch Ausführung der α -fachen Differentiation noch etwas ausgestalten:

$$\begin{aligned} y_{(\alpha)} = & (x - a)^{q_\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^\alpha a_r}{\partial q^\alpha} + \alpha \frac{\partial^{\alpha-1} a_r}{\partial q^{\alpha-1}} \lg(x - a) \right. \\ & + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} \frac{\partial^{\alpha-2} a_r}{\partial q^{\alpha-2}} \lg^2(x - a) \\ & + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\partial^{\alpha-3} a_r}{\partial q^{\alpha-3}} \lg^3(x - a) + \dots \\ & \left. + a_r \lg^\alpha(x - a) \right]_{q=q_\alpha} x^r. \end{aligned} \quad (6)$$

Es treten also im Falle mehrfacher oder sich durch ganze Zahlen unterscheidender Wurzeln der determinierenden Gleichung die partikulären Integrale als logarithmenbehaftete auf.

Die Bedingung dafür, daß das zur Wurzel $q = q_\alpha$ gehörende Integral nicht logarithmenbehaftet ist, liegt in dem Erfülltsein der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} A_v(q) &= 0 && \text{für } v = q_{\alpha-1} - q_\alpha; \quad q = q_\alpha \\ \frac{\partial A_v(q)}{\partial q} &= 0 && \text{für } v = q_{\alpha-2} - q_\alpha; \quad q = q_\alpha \\ \frac{\partial^2 A_v(q)}{\partial q^2} &= 0 && \text{für } v = q_{\alpha-3} - q_\alpha; \quad q = q_\alpha \\ &\dots && \dots \\ \frac{\partial^{\alpha-1} A_v(q)}{\partial q^{\alpha-1}} &= 0 && \text{für } v = q_0 - q_\alpha; \quad q = q_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Ist eine einzige dieser Gleichungen nicht erfüllt, dann ist das zu $\varrho = \varrho_\kappa$ gehörige Integral logarithmenbehaftet.

II. Um ein Beispiel zu geben, greifen wir zurück auf Fig. 99 § 39 und setzen jetzt den Querschnitt der Behälterwand als Dreieck voraus (Fig. 101). Dann geht die Differentialgleichung für die Verschiebungen η über in:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[\xi^2 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right] + \kappa \eta \xi - \lambda \xi = 0 \quad (7)$$

mit:

$$\kappa = \frac{12 h^4}{D_u^2 R^2},$$

$$\lambda = \frac{12 h^5 \gamma}{D_u^3 E}.$$

Die Gleichung (7) bringt man durch die Substitution:

$$\eta = u + \frac{\lambda}{\kappa}$$

auf die Form:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[\xi^3 \frac{d^2 u}{\xi s^2} \right] + \kappa u \xi = 0. \quad (8)$$

Durch Ausführung der Differentiation entsteht die Differentialgleichung:

$$\xi^3 \frac{d^4 u}{d\xi^4} + 6 \xi^2 \frac{d^3 u}{d\xi^3} + 6 \xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \kappa \xi u = 0. \quad (9)$$

Bringen wir die Gleichung (9) nach Gleichung (11c) § 38 auf die Frobeniussche Normalform, so entsteht:

$$\xi^4 \frac{d^4 u}{d\xi^4} + \xi^3 \cdot 6 \frac{d^3 u}{d\xi^3} + \xi^2 \cdot 6 \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \kappa \xi^2 u = 0. \quad (10)$$

Hiernach schreiben sich die Koeffizienten $p_{\kappa\lambda}$ der Normalform an wie folgt:

$$\left. \begin{array}{l} p_{40} = 1; \quad p_{41} = 0; \quad p_{42} = 0; \quad p_{43} = 0; \quad p_{44} = 0 \\ p_{30} = 6; \quad p_{31} = 0; \quad p_{32} = 0; \quad p_{33} = 0; \quad p_{34} = 0 \\ p_{20} = 6; \quad p_{21} = 0; \quad p_{22} = 0; \quad p_{23} = 0; \quad p_{24} = 0 \\ p_{10} = 0; \quad p_{11} = 0; \quad p_{12} = 0; \quad p_{13} = 0; \quad p_{14} = 0 \\ p_{00} = 0; \quad p_{01} = 0; \quad p_{02} = \kappa; \quad p_{03} = 0; \quad p_{04} = 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

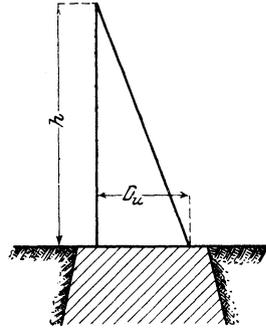


Fig. 101. Wasserbehälter mit dreieckigem Wandquerschnitt.

Nach Vorschrift von (17a) § 38 finden sich hieraus folgende Ausdrücke für die Größen $f_i(\varrho)$, die für die Koeffizienten a_r der Reihenentwicklung bestimmend sind:

$$f_0(\varrho) = 6\varrho(\varrho-1) + 6(\varrho-1)(\varrho-2) + \varrho(\varrho-1)(\varrho-2)(\varrho-3) \left. \vphantom{f_0(\varrho)} \right\} (12) \\ = \varrho^2(\varrho-1)(\varrho+1)$$

$$f_1(\varrho) = 0; \quad f_2(\varrho) = \varkappa; \quad f_3(\varrho) = f_4(\varrho) = \dots = 0.$$

Die determinierende Gleichung

$$f_0(\varrho) = \varrho^2(\varrho-1)(\varrho+1) = 0 \quad (13)$$

liefert jetzt folgendes Wurzelsystem:

$$\left. \begin{array}{l} \varrho_0 = 1 \\ \varrho_1 = 0 \\ \varrho_2 = 0 \\ \varrho_3 = -1 \end{array} \right\} (14)$$

d. h. alle Wurzeln bilden im Sinne unserer Definition eine Wurzelgruppe.

Zunächst liefert $\varrho = \varrho_0 = 1$ eine logarithmenfreie Entwicklung

$$u = \xi \sum_{r=0}^{r=\infty} a_r \xi^r. \quad (15)$$

in welcher sich die Koeffizienten a_r durch die Ansätze (1) und (2) § 38 bestimmen. a_0 ist eine willkürliche Konstante, über die wir verfügen können. Ohne die Verfügungsmöglichkeit vorläufig zu beschränken, setzen wir

$$a_0 = C \cdot f_0(\varrho+1) f_0(\varrho+2) \dots f_0(\varrho+\varepsilon), \quad (16)$$

wo wir $\varepsilon = \varrho_0 - \varrho_\mu = \varrho_0 - \varrho_3 = 2$ im vorliegenden Falle zu nehmen haben. Dann wird

$$a_r = \frac{C A_r(\varrho)}{f_0(\varrho+3) f_0(\varrho+4) \dots f_0(\varrho+r)}. \quad (17)$$

Der Zweck des Ansatzes (16) wird jetzt klar: kein a_r kann für irgendein $\varrho = \varrho_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) unendlich werden, was vorher der Fall war.

Nunmehr richten wir unser Augenmerk auf die Determinanten $A_r(\varrho)$. Wir schreiben ausführlich (mit Beachtung der $f_i(\varrho)$ -Werte) unter (12)

$$A_\nu(\varrho) = (-1)^\nu \begin{vmatrix} 0 & \kappa & 0 & \dots \\ f_0(\varrho + \nu - 1) & 0 & \kappa & \dots \\ 0 & f_0(\varrho + \nu - 2) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & f_0(\varrho + \nu - 3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (18)$$

In der ersten Zeile steht nur das eine Element κ ; es liegt nahe, dieses vor die Determinante zu setzen, und es findet sich nach einem sehr bekannten Satze der Determinantenlehre (z. B. Hütte, 1915, I, S. 49):

$$A_\nu(\varrho) = (-1)^\nu (-1) \kappa \begin{vmatrix} f_0(\varrho + \nu - 1) & \kappa & 0 \dots \\ 0 & 0 & \kappa \dots \\ 0 & f_0(\varrho + \nu - 3) & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (19)$$

Hier kann man offenbar wieder das alleinige Element der ersten Kolonne $f_0(\varrho + \nu - 1)$ heraussetzen, und man erhält:

$$A_\nu(\varrho) = (-1)^\nu (-1) \kappa f_0(\varrho + \nu - 1) \begin{vmatrix} 0 & \kappa & 0 \dots \\ f_0(\varrho + \nu - 3) & 0 & \kappa \dots \\ f_0(\varrho + \nu - 4) & 0 \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (20)$$

Jetzt hat die Determinante wieder die Gestalt (18), und man sieht sofort, daß der bisherige Prozeß fortgeführt werden kann: durch Heraussetzen von $-\kappa \cdot f_0[\varrho + \nu - (2i + 1)]$; $i = 0, 1, 2, \dots$ wird die übrigbleibende Determinante der beiden obersten Zeilen und der beiden linken Kolonnen beraubt. Wie sich aus (2) § 40 ergibt, hat die Determinante $A_\nu(\varrho)$ ν Zeilen und ν Kolonnen. Offenbar kommt es jetzt darauf an, ob ν gerade oder ungerade ist. Setzen wir im ersten Fall $\nu = 2\mu$, so kann man den Prozeß des Heraussetzens von

$$-\kappa f_0[\varrho + \nu - (2i + 1)]$$

zunächst $(\mu - 1)$ -mal ausführen, so daß sich ergibt

$$A_\nu(\varrho) = (-1)^{2\mu} (-1)^{\mu-1} \kappa^{\mu-1} \cdot f_0(\varrho + \nu - 1) \cdot f_0(\varrho + \nu - 3) \cdot \dots \cdot f_0(\varrho + 2\mu - (2\mu - 3)) \begin{vmatrix} 0 & \kappa \\ f_0(\varrho + 1) & 0 \end{vmatrix} \quad (21)$$

Daß wir in $\begin{vmatrix} 0 & \varkappa \\ f_0(\varrho+1) & 0 \end{vmatrix}$ tatsächlich die Restdeterminante vor uns haben, ergibt sich aus der Betrachtung von (2) § 40.

Die Restdeterminante hat aber den Wert

$$-\varkappa f_0(\varrho+1),$$

so daß sich für $\Delta_\nu(\varrho)$ endgültig findet

$$\Delta_\nu(\varrho) = (-1)^\mu \varkappa^\mu f_0(\varrho+1) \dots f_0(\varrho+2\mu-1) \quad (22)$$

Ist dagegen ν ungerade, so wird die Restdeterminante:

$$\begin{vmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ f_0(\varrho+2) & 0 & \varkappa \\ 0 & f_0(\varrho+1) & 0 \end{vmatrix} = -\varkappa \begin{vmatrix} f_0(\varrho+2) & \varkappa \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mithin ist $\Delta_\nu(\varrho)$ für alle ungeraden ν Null. Jetzt können wir Näheres über die Koeffizienten a_ν in (15) aussagen. Man hat

$$a_\nu = \frac{C f_0(\varrho+1) (-1)^\mu \varkappa^\mu}{f_0(\varrho+4) \dots f_0(\varrho+2\mu)} \quad (23)$$

und wegen

$$a_0 = C f_0(\varrho+1) f_0(\varrho+2) \quad [\text{vgl. (16)}]$$

als Reihenentwicklung:

$$u = C f_0(\varrho+1) \xi^\varrho \left\{ (\varrho+1)(\varrho+2)^2(\varrho+3) \dots \varkappa \xi^2 \right. \\ \left. + \frac{\varkappa^2 \xi^4}{(\varrho+3)(\varrho+4)^2(\varrho+6)} \right. \\ \left. + \frac{\varkappa^3 \xi^6}{(\varrho+3)(\varrho+4)^2(\varrho+5)^2(\varrho+6)^2(\varrho+7)} + \dots \right\}. \quad (24)$$

Für den Wert in der Klammer schreiben wir

$$G(\xi, \varrho)$$

und es gilt demnach für $\varrho = \varrho_1 = 1$ die Reihe

$$u = C \cdot f_0(\varrho+1) \xi G(\xi, 1) \quad (25)$$

als partikuläres Integral, welches die Gestalt

$$u(\varrho_0) = \xi \left\{ 1 - \frac{2\varkappa \xi^2}{3!4!} + \frac{2\varkappa^2 \xi^4}{5!6!} - \frac{2\varkappa^3 \xi^6}{7!8!} + \dots \right\}^{34} \quad (26)$$

annimmt, sobald man $(\varrho+1)(\varrho+2)^2(\varrho+3)$ aus der Klammer

heraussetzt und zur willkürlichen Integrationskonstanten $C f_0(\varrho + 1)$ hinzufügt.

Die Frage nach drei anderen partikulären Integralen erfordert zunächst die Diskussion der Bedingungen (6a) der Logarithmenfreiheit. Ist das Integral $u(\varrho_1)$ logarithmenbehaftet? Wir bilden (vgl. 6a):

$$\nu = \varrho_0 - \varrho_1 = 1, \tag{27}$$

und setzen:

$$A_\nu(\varrho) = A_1(\varrho) = (-1) f_1(\varrho)$$

$f_1(\varrho)$ ist aber 0 (vgl. 12); also kommen in dem zu $\varrho_1 = 0$ gehörigen partikulären Integral keine Logarithmen vor.

Gehen wir dazu über, das Integral $u(\varrho_2)$ in der gleichen Weise zu untersuchen.

Wir bilden:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \varrho_1 - \varrho_2 = 0, \\ \nu &= \varrho_0 - \varrho_2 = 1 \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

und setzen

$$\left. \begin{aligned} A_0(\varrho) &= (-1)^0 \cdot 1, \\ \frac{\partial A_1(\varrho)}{\partial \varrho} &= - \frac{\partial f_1(\varrho)}{\partial \varrho}. \end{aligned} \right\}$$

Hier verschwindet $A_0(\varrho)$ nicht für $\varrho = \varrho_2$, also ist $u(\varrho_2)$ sicher ein logarithmenbehaftetes Integral.

Schließlich ergeben sich für $u(\varrho_3)$ die analogen Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \varrho_2 - \varrho_3 = 1, \\ \nu &= \varrho_1 - \varrho_3 = 1, \\ \nu &= \varrho_0 - \varrho_3 = 2 \end{aligned} \right\}$$

und mit diesen die Determinanten

$$\left. \begin{aligned} A_1(\varrho) &= - f_1(\varrho), \\ \frac{\partial A_1(\varrho)}{\partial y} &= - \frac{\partial f_1(\varrho)}{\partial \varrho}, \\ \frac{\partial^2 A_2(\varrho)}{\partial \varrho^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \begin{vmatrix} 0 & \varkappa \\ f_0(\varrho + 2) & 0 \end{vmatrix} = - \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} k(\varrho + 1)\varrho(\varrho + 2) \\ &= - \varkappa(12\varrho^2 + 24\varrho + 10). \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

Hier verschwinden für $\varrho = \varrho_3 = -1$ nur

$$A_1(\varrho) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \varrho} A_1(\varrho),$$

dagegen wird
$$\frac{\partial^2 A_2(\varrho)}{\partial \varrho^2}$$

für $\varrho = -1$ gleich 2κ ; es verschwindet nicht, folglich ist auch $u(\varrho_3)$ logarithmenbehaftet. Zur Entwicklung der drei Integrale $u(\varrho_1)$, $u(\varrho_2)$ und $u(\varrho_3)$ selbst greifen wir zurück auf den Ansatz für u

$$u = C f_0(\varrho + 1) \xi^\varrho G(\xi, \varrho). \quad (30)$$

Von hier aus bilden wir

$$\left. \begin{aligned} u(\varrho_1) &= C \frac{\partial}{\partial \varrho} [f_0(\varrho + 1) \xi^\varrho G(\xi, \varrho)]_{\varrho = \varrho_1 = 0} \\ &= C \left[f_0(\varrho + 1) \xi^\varrho \left\{ \lg \xi + G(\xi, \varrho) \frac{\partial G(\xi, \varrho)}{\partial \varrho} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f_0(\varrho + 1)}{\partial \varrho} \cdot \xi^\varrho G(\xi, \varrho) \right]_{\varrho = 0} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Da $f_0(\varrho + 1)$ für $\varrho = 0$ verschwindet und

$$\frac{\partial f_0(\varrho + 1)}{\partial \varrho} = 2$$

wird, so bleibt übrig (nicht mit Logarithmen behaftet, wie vorausgesetzt):

$$u(\varrho_1) = 2C [G(\xi, \varrho)]^{\varrho=0}, \quad (32)$$

d. h. unter Fortlassung der Konstanten $2C$ die Reihe und Absonderung eines Faktors $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$$u(\varrho_1) = 1 - \frac{k \xi^2}{2! 3!} + \frac{k^2 \xi^4}{4! 5!} - \frac{k^3 \xi^6}{6! 7!} + \dots^{34}). \quad (33)$$

Zur Gewinnung von $u(\varrho_2)$ hat man zu bilden:

$$\begin{aligned} u(\varrho_2) &= C \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} [f_0(\varrho + 1) \xi^\varrho G(\xi, \varrho)]_{\varrho = 0} \\ &= C \left[\xi^\varrho G(\xi, \varrho) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} f_0(\varrho + 1) + 2 \lg \xi \frac{\partial}{\partial \varrho} f_0(\varrho + 1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lg^2 \xi f_0(\varrho + 1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \xi^\varrho \frac{\partial G(\xi, \varrho)}{\partial \varrho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} f_0(\varrho + 1) + \lg \xi f_0(\varrho + 1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \xi^\varrho \frac{\partial^2 G(\xi, \varrho)}{\partial \varrho^2} f_0(\varrho + 1) \right]_{\varrho = 0} \end{aligned}$$

Mit $[f_0(\varrho + 1)]_{\varrho=0} = 0$, $\left[\frac{\partial}{\partial \varrho} f_0(\varrho + 1)\right]_{\varrho=0} + 2$;
 $\left[\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} f_0(\varrho + 1)\right]_{\varrho=0} = 10$

erhält man:

$$u(\varrho_2) = C \left\{ (10 + 4 \lg \xi) [G(\xi, \varrho)]_{\varrho=0} + 4 \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} G(\xi, \varrho) \right]_{\varrho=0} \right\}. \quad (34)$$

Zur Ansetzung von $u(\varrho_3)$ schreiben wir

$$u(\varrho_3) = C \left[\frac{\partial^3}{\partial \varrho^3} \{f_0(\varrho + 1) \xi^{\varrho} G(\xi, \varrho)\} \right]_{\varrho=-1}$$

und finden:

$$u(\varrho_3) = -6C \xi^{-1} \left\{ \left[\frac{\partial G(\xi, \varrho)}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=-1} + \left[G(\xi, \varrho) \right]_{\varrho=-1} \lg \xi \right\}, \quad (35)$$

weil

$$f_0(\varrho + 1), \quad \frac{\partial f_0(\varrho + 1)}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial^3 f_0(\varrho + 1)}{\partial \varrho^3}$$

für $\varrho = -1$ verschwinden und

$$\left[\frac{\partial^2 f_0(\varrho + 1)}{\partial \varrho^2} \right]_{\varrho=-1} = -2$$

wird.

Für das allgemeine Integral findet sich

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) = & A \xi [G(\xi, \varrho)]_{\varrho=1} + B [G(\xi, \varrho)]_{\varrho=0} \\ & + C \left\{ \lg \xi \left[G(\xi, \varrho) \right]_{\varrho=0} + \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} G(\xi, \varrho) \right]_{\varrho=0} \right\} \\ & + D \xi^{-1} \left\{ \lg \xi \left[G(\xi, \varrho) \right]_{\varrho=-1} + \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} G(\xi, \varrho) \right]_{\varrho=-1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Die Gestalt der durch die eckigen Klammern dargestellten Reihen kann, soweit sie oben nicht schon angegeben sind, leicht berechnet werden.

§ 41. Simultane gewöhnliche Differentialgleichungen im allgemeinen. Systeme erster Ordnung.

I. Wir haben bisher nur solche gewöhnliche Differentialgleichungen betrachtet, bei denen eine abhängige und eine unabhängige Variable vorkamen.

Kommen mehr als eine abhängige Variable, z. B. x_1 und x_2 und deren Differentialquotienten, in einer Differentialgleichung vor:

$$F\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dy}, \frac{dx_2}{dy}, \dots\right) = 0. \quad (1)$$

so ist diese Gleichung zur Bestimmung weder von x_1 noch von x_2 hinreichend. Es muß noch eine zweite Gleichung hinzukommen, etwa

$$G\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dy}, \frac{dx_2}{dy}, \dots\right) = 0. \quad (2)$$

Zwei in dieser Weise zusammengehörige Gleichungen nennt man ein System von simultanen Differentialgleichungen.

Die Zahl der Gleichungen eines Systems muß stets gleich der Zahl der abhängigen Variablen sein

II. Zunächst betrachten wir ein simultanes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form:

$$\frac{dx_i}{dy} = f_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y); \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Durch Differentiation dieser Gleichungen nach y ergibt sich:

$$\frac{d^2 x_i}{dy^2} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \frac{\partial f_{1i}}{\partial x_\kappa} \cdot \frac{dx_\kappa}{dy}; \quad i = 1, 2, \dots, n_i. \quad (4)$$

Hier sind die $\frac{\partial f_{1i}}{\partial x_\kappa}$ aus (3) ermittelbare Funktionen von x_1, x_2, \dots, x_n, y , mithin sind die rechten Seiten von (4) ebensolche Funktionen, daß man die Differentialquotienten $\frac{dx_\kappa}{dy}$ aus (3) einsetzen kann.

Wir schreiben

$$\frac{d^2 x_i}{dy^2} = f_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y); \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (5)$$

Fahren wir in derselben Weise fort, so erhalten wir sämtliche Differentialquotienten $\frac{d^x x_i}{dy^x}$ in der Gestalt

$$\frac{d^x x_i}{dy^x} = f_{xi}(x_1, x_2, \dots, x_n, y); \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots, n, \\ x = 1, 2, 3, \dots, n. \end{array} \quad (6)$$

Aus jedem System von n Gleichungen:

$$\frac{d^\kappa x_i}{dy^\kappa} = f_{\kappa i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y); \quad \kappa = 1, 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

kann man nun folgende $n - 1$ -Variablen eliminieren:

$$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n,$$

wodurch eine Gleichung entsteht, die nur noch enthält: x_i, y , und die n ersten Differentialquotienten von x_i nach y :

$$\frac{d^\kappa x_i}{dy^\kappa}; \quad \kappa = 1, \dots, n.$$

Es ist dies also eine Differentialgleichung n -ter Ordnung zwischen x_i und y :

$$F_i\left(y, x_i, \frac{dx_i}{dy}, \frac{d^2 x_i}{dy^2}, \dots, \frac{d^n x_i}{dy^n}\right) = 0. \quad (8)$$

In analoger Weise kann man auch für die übrigen abhängigen Variablen

$$x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n$$

Differentialgleichungen n -ter Ordnung aufstellen, aus denen die Variablen nach den früher angegebenen Methoden bestimmt werden können.

Es handelt sich also um einen Eliminationsprozeß, der die Herstellung einer Differentialgleichung höherer Ordnung mit nur einer abhängigen Variablen zum Ziel hat.

III. Einfaches Beispiel.

Das simultane System laute:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dy} + 8x_1 + 9x_2 &= 0, \\ \frac{dx_2}{dy} - 7x_1 + 3x_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Differiert man die erste Gleichung nach y , so kommt:

$$\frac{d^2 x_1}{dy^2} = -8 \frac{dx_1}{dy} - 9 \frac{dx_2}{dy}. \quad (10)$$

Setzt man hier für $\frac{dx_1}{dy}$ und $\frac{dx_2}{dy}$ ihre Werte aus (9) ein, so

kommt:

$$\frac{d^2 x_1}{dy^2} = 8(8x_1 + 9x_2) - 9(7x_1 - 3x_2)$$

oder

$$\frac{d^2 x_1}{dy^2} = x_1 + 99 x_2. \quad (11)$$

Eliminiert man aus (11) und (9a) die Variable x_2 , so kommt:

$$\frac{d^2 x_1}{dy^2} + 11 \frac{dx_1}{dy} + 87 x_1 = 0. \quad (12)$$

Diese Differentialgleichung wird aber allgemein integriert durch den Ansatz:

$$x_1 = A e^{\lambda_1 y} + B e^{\lambda_2 y}, \quad (13)$$

wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung zweiten Grades sind:

$$\lambda^2 + 11 \lambda + 87 = 0. \quad (14)$$

Für x_2 erhält man auf analogem Wege

$$x_2 = A e^{\mu_1 y} + B e^{\mu_2 y}, \quad (15)$$

wo μ_1 und μ_2 als Wurzeln von

$$7\mu^2 + 67\mu + 529 = 0 \quad (16)$$

zu bestimmen sind.

IV. Ist das gegebene simultane System nicht erster, sondern höherer (etwa m -ter) Ordnung in bezug auf die Differentialquotienten, so kann man es auf ein System erster Ordnung zurückführen. Das System sei gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i^m}{dy^m} &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n', \dots \\ &x_1^{(m-1)}, x_2^{(m-1)}, \dots, x_n^{(m-1)}, y); \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} (1)$$

Setzt man hier:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dy} &= x_i', \quad \frac{dx_i'}{dy} = x_i'', \quad \dots, \quad \frac{dx_i^{(m-2)}}{dy} = x_i^{(m-1)}; \quad i = 1 \dots n, \\ \frac{dx_i^{(m-1)}}{dy} &= f_1(x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_n', \dots, x_1^{(m-1)} \dots x_n^{(m-1)}, y), \end{aligned} \right\} (2)$$

so haben wir für die m mal n abhängigen Variablen:

$$x_i, x_i', \dots, x_i^{(m-1)}; \quad i = 1 \dots n$$

die m mal n Gleichungen (2) des Systems erster Ordnung, welches wie unter II behandelt wird.

§ 42. Ein Beispiel simultaner Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: Dampfmaschine mit Regulator³⁵⁾.

I. Die simultanen Differentialgleichungen spielen in der Dynamik eine wichtige Rolle, wenn, was äußerst häufig der Fall ist, die Bewegung des untersuchten Systems durch mehrere Variablen bestimmt ist. Dann verlangt die Lösung der dynamischen Aufgabe, daß sämtliche Variablen in ihrer Abhängigkeit von der Zeit t bestimmt werden. Es wird sich also um die Aufstellung von soviel Differentialgleichungen handeln, als abhängige Variable vorhanden sind. Und da in jeder Gleichung im allgemeinen mehrere Variablen vorkommen werden, so wird es sich um ein simultanes System handeln.

II. Ein oft behandeltes und technisch wichtiges Beispiel ist das Zusammenwirken einer Dampfmaschine mit ihrem Regulator.

Zuvörderst stellen wir die kinetische Energie L des ganzen aus Dampfmaschine und Regulator bestehenden Systems auf. Den von der Dampfmaschine herrührenden Teil findet man etwa wie in § 55:

$$L_D = \frac{1}{2} E(\vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2. \quad (1)$$

Für den Regulator leiten wir die Energie L_R im folgenden ab. Es handele sich um einen gewöhnlichen Federgewichtsregulator nach Fig. 101.

L_R setzt sich zusammen aus den kinetischen Energien der Schwungkugeln und des Muffengewichts. Die Wirkungen der Gestängemassen denken wir uns durch geeignete Zuschläge zu den Massen der Kugeln bzw. des Muffengewichtes berücksichtigt.

Ferner denken wir uns die von $\frac{d\vartheta}{dt}$ herrührende Rotationsenergie des Muffengewichtes bei dem rotierenden Teil der Dampfmaschine berücksichtigt.

Ein Schwungkugelmittelpunkt hat die Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} x &= l(1 - \cos \tau, \\ y &= (a + l \sin \tau) \cos \vartheta, \\ z &= (a + l \sin \tau) \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

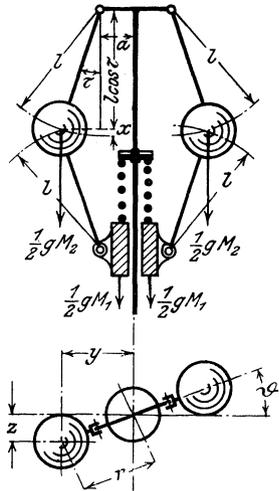


Fig. 102. Regulator.

Der Mittelpunkt der Muffe hat die Koordinate

$$x = 2l(1 - \cos \tau), \quad (3)$$

wobei x gerechnet ist von der bei $\tau = 0$ eintretenden Systemlage. Durch Differentiation nach der Zeit, Quadrieren und Addieren findet man das Geschwindigkeitsquadrat für die Schwungkugeln:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = l^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + (a + l \sin \tau)^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 \quad (4)$$

und für die Muffe:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4l^2 \sin^2 \tau \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2. \quad (5)$$

Nunmehr findet sich:

$$L_R = \frac{1}{2} \left[\left\{ l^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + (a + l \sin \tau)^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 \right\} M_2 + 4l^2 \sin^2 \tau \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 M_1 \right] \quad (6)$$

Die Gesamtenergie des Systems: Dampfmaschine-Regulator ist jetzt

$$L = L_D + L_R. \quad (7)$$

Zur Gewinnung der Bewegungsgleichungen führt man die im § 55 unter (12) angegebenen Differentiationen an L sowohl für die Variable ϑ wie für τ aus und erhält als linke Seiten der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vartheta}{dt}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \quad (8)$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \frac{d\tau}{dt}} - \frac{\partial L}{\partial \tau}. \quad (9)$$

Die rechten Seiten der Gleichungen werden wieder durch die Kräfte gebildet, die die Koordinaten ϑ bzw. τ beeinflussen.

Bezüglich ϑ ist uns bereits

$$F(\vartheta) = r(T - W) \quad (10)$$

als beeinflussende Kraft bekannt.

Für das Weitere ist zunächst über die Abhängigkeit der Kraft $F(\vartheta)$ vom Regulatorausschlag τ Verfügung zu treffen.

Der Regulator wirkt ein auf das Dampfdruckmoment rT , dessen mittleren Wert rT_m er ändert. Mit steigendem Regulator nimmt T_m ab und umgekehrt. Diese Abhängigkeit fixiert man durch die Gleichung:

$$rT_m = r(T_0 - k\tau).$$

Um den Wert rT_m oszilliert das Dampfdruckmoment entsprechend

$$rT = r(T_0 - k\tau) + T(\vartheta).$$

Für das Weitere sehen wir jedoch vom Einfluß der Oszillationen ab und schreiben

$$r(T - W) = r(T_0 - k\tau - W).$$

Für τ ermitteln wir die Kräfte, die auf das Schwungkugelsystem nebst Muffe einwirken.

Zunächst haben wir den Einfluß der Momente der Gewichte M_1 und M_2 mit

$$(M_2 + 2M_1)gl \sin \tau \tag{11}$$

und desjenigen der Feder mit

$$fl(1 - \cos \tau) \sin \tau \tag{12}$$

zu berücksichtigen. Hierzu kommt noch die Wirkung der Ölbremse, deren an der Muffe angreifende Bremskraft wir proportional der Bewegungsgeschwindigkeit

$$2l \sin \tau \frac{d\tau}{dt}$$

der Muffe mit

$$R \sin \tau \frac{d\tau}{dt} \tag{13}$$

ansetzen.

Auf die Schwungkugeln reduziert, ergibt sich das Moment der Bremskraft:

$$2lB \sin^2 \tau \frac{d\tau}{dt}. \tag{14}$$

Alle am Regulatorsystem angreifenden Kräfte sind negativ auf der rechten Seite anzusetzen, weil sie dem Wachsen von τ entgegenwirken.

Aus vorstehendem resultieren die Bewegungsgleichungen:

$$L(\vartheta) \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{1}{2} L'(\vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = r(T_0 - k\tau - W) \tag{15}$$

und

$$\begin{aligned}
 & l^2 (M_2 + 4 M_1 \sin^2 \tau) \frac{d^2 \tau}{dt^2} + 4 l^2 M_1 \sin \tau \cos \tau \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 \\
 & - l M_2 (a + l \sin \tau) \cos \tau \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = - (M_2 + 2 M_1) g l \sin \tau \\
 & - fl(1 - \cos \tau) \sin \tau - 2 l B \sin^2 \tau \frac{d\tau}{dt}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Dies ist ein simultanes Differentialgleichungssystem mit zwei abhängigen Variablen ϑ und τ und einer unabhängigen Variablen t .

Die Natur der Aufgabe gestattet einige weitere Vereinfachungen, deren Berechtigung man durch zahlenmäßige Abschätzung nachweisen kann, worauf wir hier allerdings nicht eingehen. Zunächst vernachlässigen wir in $L(\vartheta)$ alle Glieder, die nicht das Schwungrad der Maschine als Faktor enthalten, womit Gleichung (15) übergeht in

$$\Theta \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = r(T_0 - k\tau - W). \quad (17)$$

Weiter formen wir Gleichung (16) auf kleine Schwingungen um, d. h. wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \eta \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega^0 + \omega \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

und vernachlässigen alle Glieder, welche Produkte von η und ω bzw. ihrer Differentialquotienten enthalten. Wir behandeln also nur kleine Ausschläge τ des Regulators von einer Anfangslage τ_0 aus gerechnet und ebenso nur kleine Schwankungen ω einer Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0 der Maschine.

Ferner lesen wir aus (16) für den Beharrungszustand

$$\tau_0 = \text{const}: \quad \frac{d\tau}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 \tau}{dt^2} = 0$$

die Beziehung ab:

$$\begin{aligned}
 l M_2 (a + l \sin \tau_0) \cos \tau_0 \omega_0^2 &= (M_2 + 2 M_1) g l \sin \tau_0 \\
 &+ fl(1 - \cos \tau_0) \sin \tau_0. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Mit diesen Festsetzungen und nach Einführung der Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} m &= l^2 (M_2 + 4 M_1 \sin^2 \tau_0), \\ b &= 2 B l \sin^2 \tau_0, \\ c &= fl [(1 - \cos \tau_0) \cos \tau_0 + \sin^2 \tau_0] \\ &\quad + (M_2 + 2 M_1) g l \cos \tau_0 - l^2 M_2 \cos i_0 \omega_0^2, \\ \varkappa &= 2 l M_2 (a + l \sin \tau_0) \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

erhalten wir statt der Gleichungen (16) und (17):

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad & m \frac{d^2 \eta}{dt^2} + b \frac{d\eta}{dt} + c \eta = \varkappa \omega, \\ \text{b)} \quad & \frac{\Theta}{r} \frac{d\omega}{dt} = -k \eta + T_0 - k \tau_0 - W, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminieren wir ω , indem wir (21a) differenzieren:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\varkappa} \left(m \frac{d^3 \eta}{dt^3} + b \frac{d^2 \eta}{dt^2} + c \frac{d\eta}{dt} \right),$$

welchen Wert wir in (21b) einführen:

$$m \frac{d^3 \eta}{dt^3} + b \frac{d^2 \eta}{dt^2} + c \frac{d\eta}{dt} + \frac{k r \varkappa}{\Theta} \eta = r \varkappa \frac{(T_0 - k \tau_0 - W)}{\Theta}. \quad (22)$$

Aus dem simultanen System haben wir jetzt eine einzige lineare Gleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhalten, die nach § 36 weiter behandelt wird.

§ 43. Die Zentralbewegung als Beispiel eines Systems nichtlinearer simultaner Differentialgleichungen.

Unter Zentralbewegungen im allgemeinen versteht man alle diejenigen Bewegungsvorgänge, bei denen ein Körper dem Einfluß einer nach einem bestimmten Punkte (der nicht fest zu sein braucht) gerichteten Kraft unterworfen ist, deren Größe eine Funktion der Entfernung des Körpers vom Punkte ist.

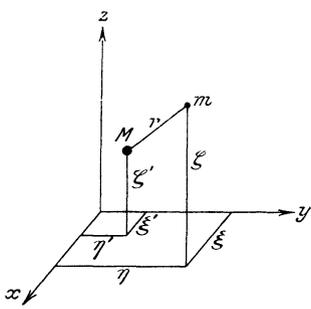
Speziell versteht man unter Zentralbewegungen die Vorgänge, die unter Einfluß des Gravitationsgesetzes erfolgen.

Zwei Himmelskörper der Massen M (Sonne) und m (Planet) (Fig. 103) ziehen sich mit einer Kraft

$$K = k^2 \frac{M m}{r^2} \quad (1)$$

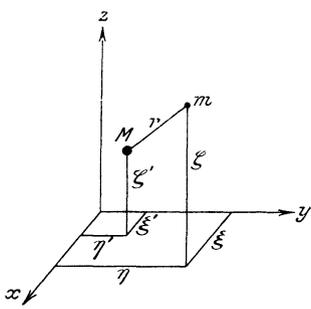
gegenseitig an, deren Richtung mit dem Radiusvektor r zusammenfällt. k ist die Gaußsche Attraktionskonstante³⁶⁾.

Die nach den Koordinatenachsen genommenen Komponenten dieser Kraft bezüglich der Sonne sind:



$$\left. \begin{aligned} k^2 \frac{mM}{r^3} (\xi - \xi'), \\ k^2 \frac{mM}{r^3} (\eta - \eta'), \\ k^2 \frac{mM}{r^3} (\zeta - \zeta'), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

so daß sich für M die drei Bewegungsgleichungen ergeben:



$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 \xi'}{dt^2} &= k^2 \frac{mM}{r^3} (\xi - \xi'), \\ M \frac{d^2 \eta'}{dt^2} &= k^2 \frac{mM}{r^3} (\eta - \eta'), \\ M \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} &= k^2 \frac{mM}{r^3} (\zeta - \zeta'). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Fig. 103. Zur Anziehung zweier Himmelskörper.

Analog ergeben sich für m die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -k^2 \frac{mM}{r^3} (\xi - \xi'), \\ m \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= -k^2 \frac{mM}{r^3} (\eta - \eta'), \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -k^2 \frac{mM}{r^3} (\zeta - \zeta'). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dividiert man die Gleichungen (3) durch M , (4) durch m und zieht (3) von (4) ab, so kommt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(\xi - \xi')}{dt^2} &= -\frac{k^2}{r^3} (m + M) (\xi - \xi'), \\ \frac{d^2(\eta - \eta')}{dt^2} &= -\frac{k^2}{r^3} (m + M) (\eta - \eta'), \\ \frac{d^2(\zeta - \zeta')}{dt^2} &= -\frac{k^2}{r^3} (m + M) (\zeta - \zeta'). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Will man nur die Relativbewegung von m in bezug auf M betrachten, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} \xi - \xi' &= x, \\ \eta - \eta' &= y, \\ \zeta - \zeta' &= z \end{aligned}$$

und erhält:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2}{r^2} (m + M) x &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2}{r^2} (m + M) y &= 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2}{r^2} (m + M) z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7)$$

zu setzen ist.

Das simultane System (6) behandeln wir nun wie folgt.

Aus den beiden ersten Gleichungen eliminiert man je das zweite Glied durch Multiplikation der Gleichungen mit $-y$ bzw. $+x$ und Addition, so daß sich findet:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0. \quad (8)$$

Die linke Seite ist aber gleich mit

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0, \quad (9)$$

woraus sich mit einer Integrationskonstanten k_1 ergibt:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = k_1. \quad (10)$$

Analog ergeben sich für y und z bzw. z und x die Ansätze

$$\left. \begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= k_2 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= k_3. \end{aligned} \right\} \quad (10 a)$$

Multipliziert man die Gleichungen (10) der Reihe nach mit z, x, y und addiert, so findet man:

$$k_1 z + k_2 x + k_3 y = 0, \quad (11)$$

d. h. der Planet m bewegt sich so um die Sonne M , daß er stets in der durch den Sonnenmittelpunkt gehenden Bahnebene E

$$k_1 z + k_2 x + k_3 y = 0$$

bleibt. Die Lage der Ebene ist nur von zwei Konstanten abhängig, wie sich durch Division mit k_1 sofort ergibt:

$$z + \frac{k_2}{k_1}x + \frac{k_3}{k_1}y = 0. \quad (12)$$

Setzt man $z = 0$, so erhält man

$$C_1x + C_2y = 0$$

als Gleichung der Schnittlinie von E mit der xy -Ebene. Hier ist:

$$\frac{y}{x} = -\frac{C_1}{C_2} = \operatorname{tg} \Omega \quad (14)$$

die Tangente des „aufsteigenden Knotens“ Ω der Planetenbahn. S. Fig. 104.

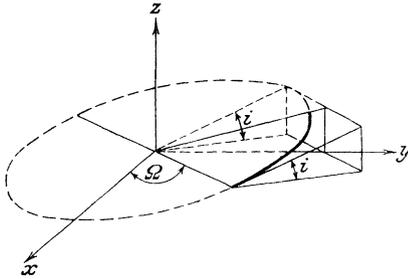


Fig. 104. Lage der Bahnebene eines Planeten.

Des weiteren ist der Kosinus des Neigungswinkels i der Planetenbahn gegen die xy -Ebene nach einem Satze der analytischen Geometrie³⁷⁾

$$\cos i = \frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 1}}$$

und mithin:

$$\operatorname{tg} i = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \quad (15)$$

Durch Angabe von Ω und i wird die Lage der Bahnebene im Raum bestimmt. Diese beiden Größen beziehen sich auf die Ebene des Himmelsäquators (oben die xy -Ebene), in welcher der aufsteigende Knoten Ω von der Richtung des Frühlingspunktes aus (oben die Richtung ox) in positivem Sinne gemessen wird.

Lassen wir nun für die Weiterbetrachtung die Bahnebene mit der xy -Ebene zusammenfallen, wobei die x -Achse mit der Knotenlinie der Planetenbahn identisch sein soll, so bleiben als Gleichungen zur Bestimmung der Bahngestalt und der Planetenbewegung in der Bahn noch übrig:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3}(M+m)x &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3}(M+m)y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wenden wir hier dieselbe Elimination an, die oben zur Gleichung (8) führte, so erhalten wir wieder

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0 \quad (17)$$

oder nach Integration:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 2 A. \quad (18)$$

Diese Gleichung formen wir auf Polarkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos v \\ y &= r \sin v \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

[r = Radiusvektor,
 v = Amplitude des Planeten (Fig. 105)]

um, wodurch wir statt (18) erhalten:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = 2 A. \quad (20)$$

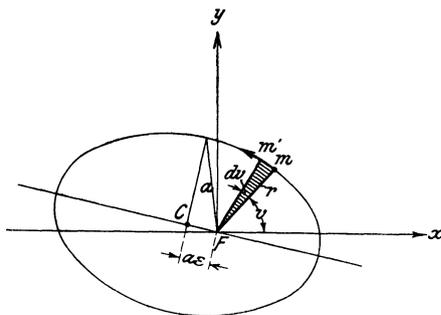


Fig. 105. Zum zweiten Keplerschen Gesetz.

Hier ist nun $r^2 dv$ der doppelte Inhalt des Dreiecks $F m m'$, d. h. gleich der doppelten vom Radiusvektor r in dem Zeitelement dt beschriebenen Fläche. Dies ist der Ausdruck des 2. Keplerschen Gesetzes: Der Radiusvektor eines Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Zwischenräume.

Des weiteren transformieren wir nun auch die Gleichungen (16) auf Polarkoordinaten und erhalten die Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \cos v - \left[\frac{d}{dt} \left(r \frac{dv}{dt} \right) + \frac{dr}{dt} \frac{dv}{dt} \right] \sin v \\ + \frac{k^2}{r^2} (M + m) \cos v = 0, \\ \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \sin v + \left[\frac{d}{dt} \left(r \frac{dv}{dt} \right) + \frac{dr}{dt} \frac{dv}{dt} \right] \cos v \\ + \frac{k^2}{r^2} (M + m) \sin v = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

die nach Multiplikation mit $\cos v$ bzw. $\sin v$ und nach Addition liefern:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = - \frac{k^2 (M + m)}{r^2}. \quad (22)$$

Die Radialbeschleunigung $\frac{d^2 r}{dt^2}$ fornt man nun wie folgt um:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \right) = \frac{d^2 r}{dv^2} \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dv} \right)^2 \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} \cdot \frac{dv}{dr} \\ &= \frac{d^2 r}{dv^2} \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dv} \right)^2 \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{dv}{dt} \right) \cdot \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (23)$$

Aus Gleichung (20) ist jetzt zu entnehmen:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2A}{r^2}; \quad \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{4A^2}{r^4}; \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{dv}{dt} \right) = -\frac{4A}{r^3} \quad (24)$$

und in (23) einzusetzen:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{4A^2}{r^2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{dv^2} - \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{dv} \right)^2 \right]. \quad (25)$$

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist aber

nichts anderes als $-\frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right)$, womit (22) sich in die Form stellt:

$$\frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{k^2 (M+m)}{4A^2}. \quad (26)$$

Wir haben demnach eine Differentialgleichung 2. Ordnung für $\frac{1}{r}$, deren allgemeines Integral lautet:

$$\frac{1}{r} = \frac{k^2 (M+m)}{4A^2} + B \cos v + C \sin v. \quad (27)$$

Dies ist die Brennpunktsgleichung eines Kegelschnittes (erstes Keplersches Gesetz), dessen Brennpunktsordinate (Parameter)

$$p = \frac{4A^2}{k^2 (M+m)} \quad (28)$$

ist.

Setzen wir den Kegelschnitt als Ellipse der Halbachsen a und b voraus, so können wir zunächst über die Integrationskonstante A Verfügung treffen.

Diese Konstante A hat die Bedeutung des Flächeninhaltes der Planetenbahn $\pi a b$ dividiert durch die Umlaufszeit T

$$A = \frac{\pi a b}{T}, \tag{29}$$

wie sich ohne weiteres durch Integration der Gleichung (20) ergibt.

Für gewöhnlich führt man noch die Exzentrizität ε ein durch die Beziehung

$$C F = a \varepsilon \text{ (Fig. 106), } \tag{30}$$

womit sich die halbe kleine Achse ergibt

$$b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \tag{31}$$

und mithin

$$A = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T} \tag{32}$$

wird.

Andererseits hat man aber auch als Eigenschaft der Ellipse

$$p = a(1 - \varepsilon^2)^{3/2}, \tag{33}$$

womit sich die Beziehung findet:

$$a(1 - \varepsilon^2) = \frac{4 \pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)}{T^2 k^2 (M + m)}. \tag{34}$$

Hieraus leitet man die Beziehung ab:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \pi^2}{k^2 (M + m)}, \tag{35}$$

d. h. den Ausdruck des dritten Keplerschen Gesetzes, nach welchem sich die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten wie die dritten Potenzen der großen Achsen verhalten, indem man die Planetmassen m gegenüber der Sonnenmasse M als verschwindend ansieht.

Die Kegelschnittsgleichung (27) vereinfacht man noch, indem man statt des Winkels v , der von der x -Achse bzw. der Knotenlinie ausgerechnet wird, einen anderen Winkel φ einführt, den man vom kürzesten Radiusvektor der Ellipse zu zählen anfängt.

Der Bahnpunkt mit kürzestem Radiusvektor heißt Perihel und der Winkel wird eingeführt durch $v = \pi + \varphi$, wo lt. Fig. 106

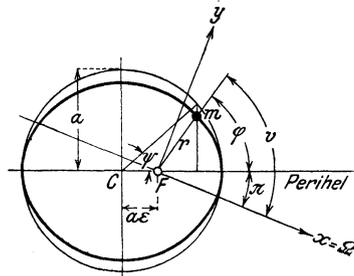


Fig. 106. Zur Definition der wahren Anomalie und des Perihelwinkels eines Planeten.

π der Winkel zwischen dem kürzesten Radiusvektor und der Knotenlinie ist.

Wir schreiben jetzt Gleichung 27 für das Perihel an, in welchem gilt:

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1 - \varepsilon); \quad v = \pi, \\ \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{r} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

aus welchen Bedingungen zwei Gleichungen erwachsen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a(1 - \varepsilon)} &= \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)} + B \cos \pi + C \sin \pi, \\ 0 &= -B \sin \pi + C \cos \pi. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Diese beiden Gleichungen dienen zur Bestimmung der Integrationskonstanten B und C :

$$B = \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} \cos \pi; \quad C = \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} \sin \pi, \quad (39)$$

womit sich jetzt (27) in folgender Gestalt schreibt:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(v - \pi)} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (40)$$

Der Winkel φ heißt die wahre Anomalie des Planeten.

Somit haben wir für die drei Integrationskonstanten A , B , C drei andere Konstanten eingeführt, nämlich die halbe große Achse a , die Exzentrizität ε und den Winkelabstand π des Perihels von der Knotenlinie. Der Zusammenhang der Konstanten A , B , C mit a , ε , π wird gegeben durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{a(1 - \varepsilon^2)}}{2} k \sqrt{M + m}, \\ B &= \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} \cos \pi, \\ C &= \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} \sin \pi. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Zur Bestimmung des Ortes des Planeten in der Bahn ist nun noch erforderlich, daß wir einen Zusammenhang zwischen

dem Ort und der Zeit ermitteln. Wir greifen zurück auf Gleichung (22), inden wir $\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{4A^2}{r^4}$ setzen:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{4A^2}{r^2} - \frac{k^2(M+m)}{r^2} = f(r). \quad (42)$$

Diese Differentialgleichung hat das allgemeine Integral [vgl. § 33 (11)]

$$t = C_2 + \int \frac{dr}{\sqrt{C_1 + 2 \int f(r) dr}}, \quad (43)$$

woraus sich ableitet (mit $f(r) = \frac{4A^2}{r^3} - \frac{k^2(M+m)}{r^2}$)

$$t = C_2 + \int \frac{r dr}{\sqrt{2k^2 r(M+m) + C_1 r^2 - 4A^2}}. \quad (44)$$

Hier liegt es nahe, den Ausdruck unter der Wurzel nach Absonderung von $\frac{k^2(M+m)}{a}$ quadratisch zu machen, d. h. ihn in die Form zu bringen

$$\frac{k^2(M+m)}{a} \{\mu - (\nu - r)^2\},$$

wo μ und ν zu bestimmen sind.

Man hat:

$$k^2 \frac{M+m}{a} (\mu - \nu^2) = -4A^2 = -a(1 - \varepsilon^2) k^2 (M+m),$$

$$2k^2 \frac{M+m}{a} \nu r = 2k^2 (M+m) r,$$

$$k^2 \frac{M+m}{a} r^2 = C_1 r^2,$$

woraus sich findet:

$$\nu = a; \quad \mu = a^2 \varepsilon^2; \quad C_1 = k^2 \frac{M+m}{a}.$$

Damit wird aber (44):

$$t = C_2 + \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{k^2(M+m)}{a} \{a^2 \varepsilon^2 - (a-r)^2\}}}. \quad (45)$$

C_1 ist also keine neue Konstante; sie ist bereits durch die Gestalt des Kegelschnittes bestimmt.

Zur weiteren Vereinfachung führt man nun einen Winkel ψ ein, der die exzentrische Anomalie des Planeten heißt und

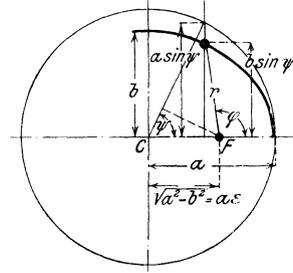


Fig. 107. Zusammenhang zwischen der wahren und exzentrischen Anomalie eines Planeten.

lt. Fig. 107 definiert ist. Aus der Figur liest man die Beziehung ab $r^2 = (a\varepsilon - a\cos\psi)^2 + a^2(1 - \varepsilon^2)\sin^2\psi$

oder nach einiger Umformung:

$$r = a(1 - \varepsilon\cos\psi). \quad (46)$$

Das Integral (45) wird hiermit:

$$t = C_2 + \int \sqrt{\frac{a^3}{k^2(M+m)}} (1 - \varepsilon\cos\psi) d\psi, \quad (47)$$

oder wenn man den Winkel ψ zur Zeit $t = t_0$ den Wert ψ_0 besitzen läßt

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{k^2(M+m)}} \{(\psi - \varepsilon\sin\psi) - (\psi_0 - \varepsilon\sin\psi_0)\}. \quad (48)$$

Zwischen der wahren Anomalie φ und der exzentrischen Anomalie ψ besteht aber bei der Ellipse die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi &= \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi &= \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Die angeführten Formeln reichen hin, um die Elemente einer Planetenbahn zu bestimmen, wenn Ω und i bekannt sind. Dann genügt es, wenn in der Bahnebene zwei Planetenorte $r_1 v_1$ und $r_2 v_2$ nebst den Beobachtungszeiten t_1 und t_2 gegeben sind.

Zu bestimmen sind: halbe große Achse a , Exzentrizität ε , Perihelwinkel π und Zeit des Periheldurchgangs t_0 . Man hat folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(v_1 - \pi)}, \\ r_2 &= \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(v_2 - \pi)}, \\ \psi_1 - \varepsilon \sin \psi_1 &= (t_1 - t_0) \sqrt{\frac{k^2(M + m)}{a^3}}, \\ \psi_2 - \varepsilon \sin \psi_2 &= (t_2 - t_0) \sqrt{\frac{k^2(M + m)}{a^3}}, \\ v_1 - \pi &= 2 \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi_1 \right\}, \\ v_2 - \pi &= 2 \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi_2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Für die Auflösung dieser 6 Gleichungen nach den 6 Unbekannten: $a, \varepsilon, t_0, \pi, \psi_1, \psi_2$ haben Gauß und Andere Methoden angegeben.

$i, \Omega, a, \varepsilon, \pi, t_0$ sind die sechs Bahnelemente, die die Bewegung des Planeten vollständig bestimmen.

§ 44. Die Pendelgleichung. Elliptische Funktionen.

Die Bewegung des mathematischen Pendels, d. h. eines schweren Punktes, der mittels eines starren, masselos gedachten Stabes aufgehängt ist, in einer Vertikalebene, ist wichtig als Grundlage der Betrachtung komplizierterer Schwingungsvorgänge und zur Einführung in die Lehre von den elliptischen Funktionen, die eine weitgehende naturwissenschaftliche Bedeutung haben.

I. Zur Bewegungsgleichung gelangt man leicht wie folgt: Der Massenpunkt m am Stab der Länge l (Fig. 108) steht unter dem Einfluß zweier Kräfte:

1. der eigenen Massenträgheit,

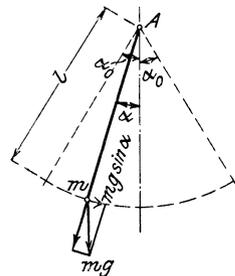


Fig. 108. Das mathematische Pendel.

2. derjenigen Komponente der Schwerkraft mg , welche eine Änderung der durch den Winkel α gegebenen Lage des Pendels herbeiführen kann. Alle anderen Kräfte, wie die zur Bahn normale Komponente der Schwerkraft und die Zentrifugalkraft, kommen für die Bewegung nicht in Frage, da ihre Summe durch die Stabspannung aufgehoben wird. Für die Massenträgheit haben wir den Ansatz: Masse mal Beschleunigung $= m \cdot l \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$; für die Tangentialkomponente der Schwerkraft gilt: $mg \sin\alpha$. Beide Kräfte werden durch die Newtonsche Gleichung: die bewegende Kraft ist gleich der Massenträgheit, miteinander verbunden, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß $mg \sin\alpha$ den Winkel α zu verkleinern sucht und deshalb negativ einzuführen ist. Wir schreiben also:

$$ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - mg \sin\alpha \quad (1)$$

und nach Division mit lm und Umstellung der rechten Seite

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\alpha = 0. \quad (2)$$

Für gewöhnlich integriert man nicht diese Differentialgleichung, sondern eine andere, die aus jener folgt durch die Annahme, daß es sich um eine Schwingung mit nur kleinen Ausschlägen handle, für die man den Sinus mit dem Bogen vertauschen kann, für die also gilt:

$$\alpha = \sin\alpha. \quad (3)$$

Unter dieser Annahme erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{l}{g} \alpha = 0. \quad (4)$$

Diese Differentialgleichung ist ein Spezialfall der in § 27 behandelten Schwingungsgleichung und hat das allgemeine Integral:

$$\alpha = A \sin \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + B \cos \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t, \quad (5)$$

woraus sich für die Anfangs- und Grenzbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \quad \alpha = 0 \\ \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad \alpha = \alpha_0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

d. h. für eine Schwingung mit dem größten Ausschlag oder der Amplitude α_0 findet: $B = 0$, $A = \alpha_0$

$$\alpha = \alpha_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t. \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, daß der Ausschlag immer wieder $= \alpha$ wird, wenn man das Argument $\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \cdot t$ der Sinusfunktion um ganze Vielfache von 2π vermehrt, also für:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + 2\pi, \quad \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + 4\pi, \dots, \quad \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + m 2\pi, \dots \tag{8}$$

Mathematisch drückt man diese Tatsache durch die Aussage aus: die Sinusfunktion hat die Periode 2π . Statt $\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t$ um 2π zu vermehren, kann man auch t um $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ vermehren, wodurch wir den Begriff der Schwingungsdauer und den Satz gewinnen, daß die Winkel α sich nach Verlauf der Zeit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

reproduzieren, unabhängig von der Größe der Amplitude α_0 .

II. Dieser letzte Satz gilt aber nur unter der Voraussetzung kleiner Ausschläge, die wir anfangs machten. Wollen wir auf diese Voraussetzung verzichten und die genaue Bewegung untersuchen für beliebige Amplituden α_0 , so müssen wir auf die Gleichung

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{l}{g} \sin \alpha = 0 \tag{10}$$

zurückgreifen. Um diese Differentialgleichung zu lösen, multiplizieren wir zunächst mit

$$2 \frac{d\alpha}{dt}$$

und finden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{2g}{l} \frac{d\alpha}{dt} \sin \alpha = 0. \tag{11}$$

Hieraus ergibt sich nach Multiplikation mit dt und Integration:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = C + \frac{2g}{l} \cos\alpha. \quad (12)$$

Die Integrationskonstante C bestimmen wir durch die Festsetzung, daß die Amplitude gleich α_0 sei, daß also für $\alpha = \alpha_0$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

sein soll, d. h. es muß sein:

$$C = -\frac{2g}{l} \cos\alpha_0. \quad (13)$$

Hieraus findet sich

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot \sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0} \quad (14)$$

oder nach Trennung der Variablen:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}. \quad (15)$$

Hier können wir sofort integrieren

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}, \quad (16)$$

und wenn wir das Integral von 0 bis α nehmen, so haben wir der weiteren Bedingung

$$t = 0, \quad \alpha = 0$$

genügt:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}. \quad (17)$$

In dieser Formel ersetzt man jetzt

$$\cos\alpha \text{ durch } 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (18)$$

und

$$\cos\alpha_0 \quad " \quad 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}.$$

wodurch sich findet:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha_0}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}. \quad (19)$$

Setzt man hier ein:

$$\left. \begin{aligned} k &= \sin \frac{\alpha_0}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= k \sin \vartheta, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} \end{aligned} \right\} (20)$$

und, aus der letzteren Formel durch Differentiation folgend,

$$d\alpha = 2k \frac{\cos \vartheta}{\cos \frac{\alpha}{2}} d\vartheta = \frac{2k \cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}},$$

so resultiert:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}. \quad (21)$$

Denkt man sich das Integral ausgeführt und

$$\vartheta = \arcsin \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha_0}{2}} \quad (22)$$

eingesetzt, so hat man offenbar die Zeit t als Funktion des Ausschlagwinkels α gefunden und kann umgekehrt durch Auflösung nach α den Ausschlagwinkel als Funktion der Zeit finden.

Nun ist weder das Integral

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \quad (23)$$

durch die bekannten elementaren Funktionen ausdrückbar, noch viel weniger kann man die Gleichung

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \quad (24)$$

nach ϑ auflösen.

Man hat deshalb für das Integral ein besonderes Funktionszeichen eingeführt:

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = F(k, \vartheta) \quad (25)$$

und man nennt diese neue Funktion $F(k, \vartheta)$ elliptisches Integral erster Gattung des Argumentes ϑ und des Moduls k .

Des weiteren hat man die Werte dieses Integrals, die offenbar von der Größe k und dem Winkel ϑ abhängen, berechnet und in Tafeln zusammengetragen. Diese Tafeln haben zwei Eingänge: einen für den Winkel ϑ und einen zweiten für den Modul k . Für gewöhnlich geht man nicht direkt von den Werten des Moduls k aus, sondern man erinnert sich, daß

$$k = \sin \frac{\alpha_0}{2} \quad (26)$$

ist. Man läßt also das Argument des zweiten Eingangs ebenfalls nach Winkelintervallen fortschreiten.

Solche Tafeln des elliptischen Integrals erster Gattung enthält z. B. das Werk: Jahnke & Emde, Funktionentafeln, Teubner, 1908.

Unter Benutzung dieser Tafeln gestaltet sich die genauere Untersuchung eines Pendelvorganges wie folgt.

Es handelt sich darum, für jeden Zeitpunkt t die Lage des Pendelpunktes m anzugeben.

Die größte Ausweichung α_0 sei $= 30^\circ$, die Pendellänge so gewählt, daß

$$\sqrt{\frac{l}{g}} = 1$$

ist.

Zunächst liefern die Gleichungen (24) und (25) einen Zusammenhang zwischen der gesuchten Zeit t und dem Winkel ϑ :

$$t = F(k, \vartheta). \quad (26)$$

Der Modul k ist hier gleich $\sin \frac{\alpha_0}{2} = \sin 15^\circ$, der Winkel ϑ aber hängt mit dem Ausschlagwinkel α durch die Gleichung zusammen:

$$\vartheta = \arcsin \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha_0}{2}}, \quad (27)$$

wo $\sin \frac{\alpha_0}{2} = 0,2588$ ist. Mittels dieser Gleichung findet man zu jedem Werte von α den zugehörigen Wert ϑ und mittels dieses Winkels ϑ findet man aus der Tafel den zugehörigen

Wert des elliptischen Integrals $F(k, \vartheta)$ und damit die Zeit t , die verstreicht, bis das Pendel aus seiner Mittelstellung den Ausschlagwinkel α erreicht hat.

Wir tragen den Rechnungsgang in einer kleinen Tafel zusammen.

Tabelle 2.

1	2	3	4	5	6	7
α_0	$\frac{\alpha}{2}$	$\sin \frac{\alpha}{2}$	$\sin \frac{\alpha}{2} : \sin \frac{\alpha_0}{2}$	$\vartheta = \arcsin (4)$	$F(k, \vartheta)$	t
20°	10°	0,0175	0,0675	4°	0,0698	0,07 sec
4	2	0,0349	0,1345	7°	0,1222	0,12
6	3	0,0523	0,2020	11°	0,1924	0,19
8	4	0,0698	0,7700	15°	0,2620	0,26
10	5	0,0872	0,3370	19°	0,3320	0,33
12	6	0,1045	0,4040	23°	0,4021	0,40
14	7	0,1219	0,4680	27°	0,4724	0,47
16	8	0,1392	0,5400	33°	0,5780	0,58
18	9	0,1564	0,6100	37°	0,6486	0,65
20	10	0,1737	0,6700	42°	0,7370	0,74
22	11	0,1908	0,7370	47,5°	0,8347	0,83
24	12	0,2079	0,8050	53°	0,9326	0,93
26	13	0,2250	0,8700	60,5°	1,0067	0,07
28	14	0,2419	0,9350	69°	1,2193	1,22
30	15	0,2588	1,0000	90°	1,5981	1,60

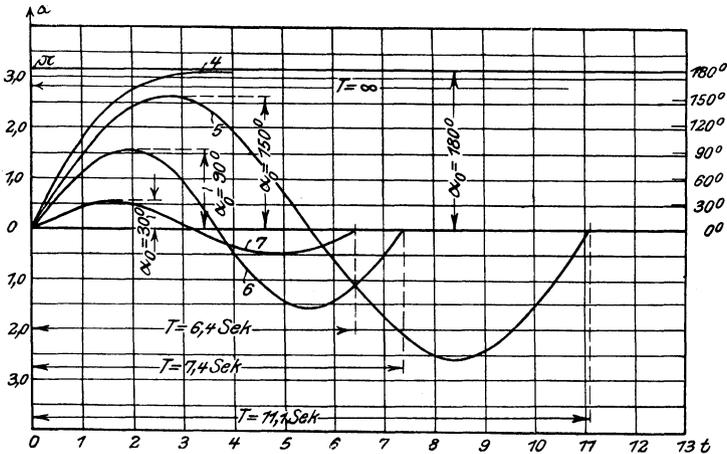


Fig. 109. Bewegung des Pendels $\sqrt{\frac{l}{g}} = 1$ für Amplituden α_0 von 0 bis π bei verschiedenen maximalen Bahngeschwindigkeiten.

$V_4 = 19,6$ m/sec. $V_5 = 18,9$ m/sec. $V_6 = 13,8$ m/sec. $V_7 = 8,1$ m/sec.

Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Werte t der Kolumne 7 als Abszissen auf, die Werte α der Kolumne 1 als Ordinaten, so erhält man den Verlauf der Bewegung während des ersten Viertels der Schwingungsdauer.

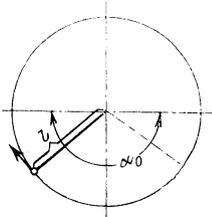


Fig. 110. Bewegung eines Pendels mit der Amplitude π .

Die erhaltene Kurve unterscheidet sich nicht wesentlich von derjenigen, die man erhalten hätte, wenn man das angenäherte Resultat (Gleichung 7) mit

$$\alpha = 30^\circ \sin t$$

graphisch aufgetragen hätte.

Die Verschiedenheit ist nur daran erkennbar, daß der vierte Teil der Schwingungsdauer im genauen Fall gleich 1,60 sec, im angenäherten = 1,57 sec ist, entsprechend ganzen Schwingungsdauern von 6,40 sec bzw. 6,28 sec.

Die Unterschiede werden um so merklicher, je größer die Amplituden α_0 gewählt werden. Die Schwingungsdauern wachsen immer mehr und für $\alpha_0 = 180^\circ$ entnimmt man aus der Tafel bei Jahnke und Emde mit $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$ ($k = 1$) den Wert $F(k, \vartheta) = \infty$, d. h. die Viertelschwingungsdauer ist unendlich. Das Pendel, welches den tiefsten Punkt seiner Bahn mit einer solchen Geschwindigkeit durchläuft, daß der größte Ausschlagwinkel 180° betragen würde, erreicht diesen Ausschlagwinkel nie (vgl. Fig. 110 und Fig. 109, Nr. 4).

III. Den durch das elliptische Integral Gleichung (25)

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} = u = F(k, \vartheta)$$

gegebenen Zusammenhang zwischen u und ϑ kann man sich auch so vorstellen, daß man ϑ als Funktion von u betrachtet. Es wäre also die zu $u = F(k, \vartheta)$ inverse Funktion zu bilden. Wie schon bemerkt, sind die elementaren Funktionen hierfür nicht verwendbar, und wir müssen zu einem weiteren Funktionszeichen „am“ greifen, welches wir Amplitude lesen. Wir haben also:

$$\vartheta = \operatorname{am}(u, k) = \operatorname{am}\left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, k\right). \quad (28)$$

Aus der Definition des elliptischen Integrals $u = F(k, \vartheta)$ folgt

$$0 = F(k, 0).$$

Es wird also:

$$0 = \operatorname{am}(0, k).$$

Das bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ausgedehnte elliptische Integral bezeichnet man mit K :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

Wir haben also:

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

und umgekehrt:

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{am}(K, k).$$

Weiter gilt:

$$2K = F(k, \pi)^{39)},$$

$$\pi = \operatorname{am}(2K, k)$$

und:

$$\frac{3\pi}{2} = \operatorname{am}(3K, k),$$

$$2\pi = \operatorname{am}(4K, k).$$

Greifen wir jetzt auf die Gleichungen (20) zurück, laut welchen gilt

$$\alpha = 2 \operatorname{arcsin}(k \sin \vartheta),$$

so hat man sofort mit (28)

$$\alpha = 2 \operatorname{arcsin}[k \sin \operatorname{am}(u, k)] \quad (29)$$

$$= 2 \operatorname{arcsin}\left[k \sin \operatorname{am}\left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, k\right)\right]. \quad (30)$$

In dieser Formel betrachtet man „sinam“ als neues einheitliches Funktionszeichen und liest sinam u mit Sinusamplitude u .

Mit der Funktion Sinusamplitude haben wir die eigentlichen elliptischen Funktionen eingeführt, wie sie zuerst von Legendre betrachtet wurden.

Für unsere Zwecke merken wir zunächst an, daß man die Funktion „sinam u “ als Reihe darstellen kann, wie folgt:

$$\sin \operatorname{am} u = u - \frac{1 + k^2}{6} u^3 + \frac{1 + 14k^2 + k^4}{120} u^5 - +^{40)} \dots \quad (31)$$

Hiermit geht unsere zweite Formel (30) für den Pendelausschlag α über in:

$$\alpha = 2 \arcsin \left\{ \sin \frac{\alpha_0}{2} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{1+k^2}{6} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right)^3 + \frac{1+14k^3+k^4}{120} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right)^5 - + \dots \right) \right\}.$$

Betrachtet man jetzt nur kleine Ausschläge, so kann man in der Reihenentwicklung die Potenzen von k vernachlässigen, und die Reihe geht über in:

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right)^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right)^5 - + \dots,$$

d. h. in:

$$\sin t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Entwickelt man jetzt in

$$\alpha = 2 \arcsin \left\{ \sin \frac{\alpha_0}{2} \sin t \sqrt{\frac{g}{l}} \right\}$$

die Funktion \arcsin in eine Reihe, so folgt:

$$\alpha = 2 \left\{ \sin \frac{\alpha_0}{2} \sin t \sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{\left(\sin \frac{\alpha_0}{2} \right)^3}{2 \cdot 3} \left(\sin t \sqrt{\frac{g}{l}} \right)^3 + \dots \right\}^{(42)}$$

d. h. mit Vernachlässigung der höheren Glieder und mit der Bemerkung, daß man für kleine Winkel $\frac{\alpha_0}{2}$ den Sinus mit dem Bogen vertauschen kann:

$$\alpha = \alpha_0 \sin t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

somit der Nachweis geführt ist, daß das angenäherte Resultat (7) aus dem genauen Resultat (30) durch die Substitution

$$\sin \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\alpha_0}{2} = \text{kleine Größe}$$

abgeleitet werden kann.

IV. Für endliche Winkel $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ gestaltet sich der Verlauf der Bewegung

$$\alpha = 2 \arcsin \left\{ \sin \frac{\alpha_0}{2} \operatorname{sn} \operatorname{am} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, k \right) \right\}$$

wie folgt:

$$t = 0, \quad \operatorname{am}(0, k) = 0, \quad \operatorname{snam}(0, k) = 0, \quad \alpha = 0$$

$$t = K \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \operatorname{am}(K, k) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{snam}(K, k) = 1, \quad \alpha = \alpha_0$$

$$t = 2K \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \operatorname{am}(2K, k) = \pi, \quad \operatorname{snam}(2K, k) = 0, \quad \alpha = 0$$

$$t = 3K \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \operatorname{am}(3K, k) = \frac{3\pi}{2}, \quad \operatorname{snam}(3K, k) = -1, \quad \alpha = -\alpha_0$$

$$t = 4K \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \operatorname{am}(4K, k) = 2\pi, \quad \operatorname{snam}(4K, k) = 0, \quad \alpha = 0.$$

Mithin ist eine Schwingung nach Verlauf der Zeit

$$t = T = 4K \sqrt{\frac{l}{g}}$$

vollendet.

Es interessiert jetzt noch, diejenige Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\alpha}{dt}$ zu wissen, mit der das Pendel die Mittellage passieren muß, um den Ausschlagwinkel α_0 zu erreichen. Diese Winkelgeschwindigkeit kann man aus (30) ableiten, wenn man sich die Differentiationsformel der Funktion Sinusamplitude wie folgt anmerkt:

$$\frac{d \operatorname{snam} u}{d u} = \operatorname{cosam} u \cdot \Delta \operatorname{am} u^{43}). \quad (32)$$

Hier sind $\operatorname{cosam} u$ und $\Delta \operatorname{am} u$ zwei neue elliptische Funktionen Kosinusamplitude u und Deltaamplitude u , die mit $\operatorname{snam} u$ wie folgt zusammenhängen:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cosam}^2 u &= 1 - \operatorname{snam}^2 u \\ \Delta \operatorname{am}^2 u &= 1 - k^2 \operatorname{snam}^2 u \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Führen wir jetzt an (30) die Differentiation nach der Zeit aus, so wird

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= 2 \frac{k \cdot \operatorname{cosam} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, k \right) \operatorname{Am} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, k \right)}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sinam}^2 \left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, k \right)}} \sqrt{\frac{g}{l}} \\ &= 2k \sqrt{\frac{g}{l}} \operatorname{cosam} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, k \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Für $t = 0$ ist hier zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sinam} t \sqrt{\frac{g}{l}} &= 0, \\ \operatorname{cosam} t \sqrt{\frac{g}{l}} &= 1, \\ \operatorname{Am} t \sqrt{\frac{g}{l}} &= 1, \end{aligned} \right\} \text{vgl. Formel (33)}$$

wodurch wird:

$$\text{für } t = 0: \frac{d\alpha}{dt} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \frac{\alpha_0}{2} = 2k \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (35)$$

Dies Ergebnis kann man auch unmittelbar aus der Arbeitsgleichung der Pendelbewegung ableiten (Fig. 111):

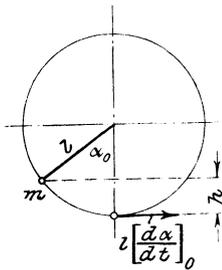


Fig. 111. Bewegung eines Pendels mit Amplituden $< \pi$.

$$mgh = mgl(1 - \cos \alpha_0) = \frac{1}{2} m l^2 \left[\frac{d\alpha}{dt} \right]^2,$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\alpha}{dt} \right]_0 &= 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha_0}{2}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \frac{\alpha_0}{2} \end{aligned}$$

oder nach Einführung von $k = \sin \frac{\alpha_0}{2}$

$$\left[\frac{d\alpha}{dt} \right]_0 = 2k \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (36)$$

Nach Multiplikation mit l erhalten wir die maximale Bahngeschwindigkeit

$$V = 2k \sqrt{gl}.$$

Mit $k = 1$ wird $\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$ zu derjenigen Anfangswinkelgeschwindigkeit $2\sqrt{\frac{g}{l}}$, welche gerade hinreicht, um den Massenpunkt m bis zum höchsten Punkte seiner Bahn zu bringen, den er allerdings asymptotisch erreicht.

Um nun die Bewegung zu untersuchen, die das Pendel vollführt, wenn die Bahngeschwindigkeit des Punktes m im tiefsten Punkte der Bahn

$$V = l \left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$$

größer wird als

$$2l\sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{4gl},$$

knüpfen wir wieder an Gleichung (12) an

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = C + \frac{2g}{l} \cos \alpha. \quad (37)$$

Wir multiplizieren hier mit l^2 und erhalten

$$l^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = Cl^2 + 2gl \cos \alpha.$$

Hier bestimmen wir die Konstante C so, daß für $\alpha = 0$, d. h. im tiefsten Punkte der Bahn die Bahngeschwindigkeit

$$l^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = V^2 \quad (38)$$

wird. Es findet sich

$$C = \frac{V^2 - 2gl}{l^2}.$$

Die Gleichung (38) geht hiermit über in:

$$l^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = V^2 - 2gl + 2gl \cos \alpha. \quad (39)$$

Hier wird für $\alpha = \pi$, d. h. im höchsten Punkte der Bahn, das Bahngeschwindigkeitsquadrat

$$l^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = V^2 - 4gl. \quad (40)$$

Damit $l \frac{d\alpha}{dt}$ reell wird, muß

$$V > \sqrt{4gl} \quad (41)$$

gewählt werden, welche Voraussetzung im folgenden stets gelten soll. Die Bedingung (41) kann man auch in die mechanisch anschaulichere Form kleiden

$$\frac{V^2}{2g} > 2l, \quad (42)$$

d. h. die Geschwindigkeitshöhe $\frac{V^2}{2g}$ soll größer sein als der Durchmesser des vom Pendel beschriebenen Kreises.

Die Differentialgleichung (39) formen wir jetzt um in

$$l \frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{V^2 - 2gl} \sqrt{1 + \frac{2gl}{V^2 - 2gl} \cos \alpha},$$

aus der durch Umstellung und Integration folgt:

$$t = \frac{l}{\sqrt{V^2 - 2gl}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \frac{2gl}{V^2 - 2gl} \cos \alpha}}. \quad (43)$$

Hier ersetzen wir

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

und teilen unter der Wurzel durch $\frac{V^2}{V^2 - 2gl}$, womit folgt:

$$t = \frac{l}{V} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{4gl}{V^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}. \quad (44)$$

Setzen wir hier noch

$$\frac{\alpha}{2} = \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{4gl}{V^2} = k^2, \quad (45)$$

wo k^2 zufolge (41) < 1 ist, so kommt:

$$t = \frac{2l}{V} \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}. \quad (46)$$

Hier ist

$$\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

wieder unser elliptisches Integral erster Gattung. Es folgt durch Auflösung von (46) nach ϑ

$$\vartheta = \operatorname{am} \frac{V}{2l} t$$

und nach (45)

$$\alpha = 2 \operatorname{am} \frac{V}{2l} t. \tag{47}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich der Pendelwinkel α unmittelbar als Amplitudenfunktion. Diese soll hier noch etwas eingehender betrachtet werden.

Zunächst schreiben wir mit (45)

$$\alpha = 2 \operatorname{am} \left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} t, k \right). \tag{48}$$

Die Tafel bei Jahnke und Emde, S. 54—59, liefert wieder für jedes k den Zusammenhang zwischen ϑ und $\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} t$

und damit auch zwischen α und $\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} t$. Zu jedem in Sekunden gegebenen t berechnet man $\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} t$ und sucht zu dem gefundenen Wert in der durch $\alpha = \operatorname{arcsin} k$ gegebenen Kolumne den Winkel φ auf, der bei uns α heißt.

Für unser Beispiel $\sqrt{\frac{g}{l}} = 1$ erhalten wir mit $k = 0,2588$, $\alpha = 15^\circ$ eine Kurve, die mit $t = 0$, $\alpha = 0$ beginnt und mit $t = k \cdot 1,5981 = 0,415$, $\alpha = \pi$ endet.

Hiermit wäre erst die Hälfte eines ganzen Umschwungs erledigt. Die Werte für die zweite Hälfte liefert die Tafel nicht direkt; um sie zu finden, stellen wir folgende Betrachtungen an.

Zunächst dehnen wir im elliptischen Integral

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

die Integration bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ aus, so wird das entstehende Integral

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \tag{49}$$

als vollständiges elliptisches Integral bezeichnet. Zufolge der Definition der Amplitudenfunktion ergibt sich hieraus

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} = \operatorname{am}(K, k) \quad (50)$$

oder

$$\alpha = \pi = 2 \operatorname{am}(K, k).$$

In unserem Fall steht die Größe K zu der Zeit t , die erforderlich ist zur Zurücklegung des Pendelwinkels $\alpha = \pi$, in der Beziehung

$$t = \frac{2l}{V} K = k \cdot K, \quad (51)$$

wie sich aus Gleichung (46) ergibt. Es würde also $k \cdot K$

die halbe Schwingungsdauer sein im Fall $\sqrt{\frac{g}{l}} = 1$. Im allgemeinen Falle wird die halbe Schwingungsdauer

$$k K \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Zur Untersuchung des Bewegungsverlaufes über $\alpha = \pi$, $t = K k$ hinaus greifen wir auf die Funktion „Sinusamplitude u “ zurück

$$x = \operatorname{sinam}(u, k). \quad (52)$$

Von dieser Funktion wissen wir bis jetzt folgende Werte

$$\left. \begin{aligned} u = 0, \quad \operatorname{am}(0, k) = 0, \quad x = \operatorname{sinam}(0, k) = 0, \\ u = K, \quad \operatorname{am}(K, k) = \frac{\pi}{2}, \quad x = \operatorname{sinam}(K, k) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Ferner notieren wir uns folgende Eigenschaft der Funktion:

$$\operatorname{sinam}(u + K, k) = \frac{\operatorname{cosam}(u, k)}{\Delta \operatorname{am}(u, k)} \quad (54)$$

$$\text{sowie} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{cosam}(u, k) = \operatorname{cosam}(-u, k), \\ \Delta \operatorname{am}(u, k) = \Delta \operatorname{am}(-u, k). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Jetzt folgt sofort:

$$\operatorname{sinam}(u + K, k) = \operatorname{sinam}(-u + K, k). \quad (56)$$

Wir bezeichnen den Winkel:

$$\operatorname{am}(u + K, k) \text{ mit } \frac{\pi}{2} + \delta_1 \quad (57)$$

$$\text{und} \quad \operatorname{am}(-u + K, k) \text{ mit } \frac{\pi}{2} - \delta_2 \quad (58)$$

$$\left| \delta_1 - \delta_2 \right| < \frac{\pi}{2}.$$

Da aber aus

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta_1\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta_2\right)$$

folgt:

$$\delta_1 = \delta_2,$$

so ist:

$$\operatorname{am}(u + K, k) + \operatorname{am}(-u + K, k) = \pi \quad (59)$$

oder

$$\operatorname{am}(u + K, k) = \pi - \operatorname{am}(-u + K, k). \quad (60)$$

Mittels dieser Formel kann man in der Tafel bei J. u. E. die Amplitudenfunktion auch für Argumentwerte über K ableiten. Insbesondere ergibt sich:

$$\operatorname{am}(2K, k) = \pi,$$

woraus sich für die Pendelbewegung findet

$$\alpha = 2\pi = 2 \operatorname{am}\left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot T, k\right),$$

wo T die ganze Schwingungsdauer

$$T = 2Kk \sqrt{\frac{l}{g}}$$

bedeutet. Hiermit geht aber unsere Formel (48) über in:

$$\alpha = 2 \operatorname{am}\left(\frac{2K}{T} t, k\right),$$

welche für alle Werte von t gilt.

In der Fig. 112, Kurve 1 ist die Vervollständigung des Kurvenverlaufes von $\alpha = \pi$ bis $\alpha = 2\pi$ hiernach gezeichnet.

Zeichnet man den Bewegungsverlauf für größere Werte von k entsprechend kleineren maximalen Bahngeschwindigkeiten

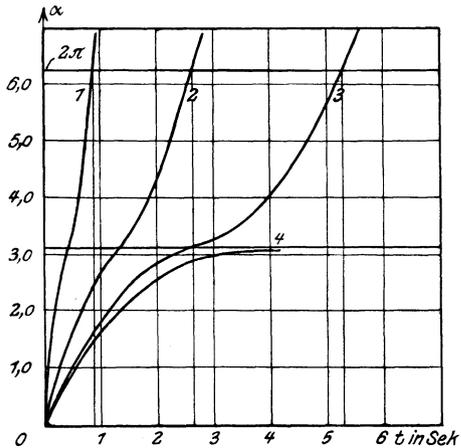


Fig. 112. Bewegung des Pendels.

$\sqrt{\frac{l}{g}} = 1$ bei ganzen Umläufen für verschiedene maximale Bahngeschwindigkeiten.

$$\begin{array}{ll} V_1 = 76 \text{ m/sec.} & V_3 = 20 \text{ m/sec.} \\ V_2 = 28 \text{ m/sec.} & V_4 = 19,6 \text{ m/sec.} \end{array}$$

$$V = \frac{2l}{k},$$

so wird die Schwingungsdauer T größer. Siehe Fig. 112.

Für $k = 1$ tritt eine ausgeartete Bewegung ein.

Das elliptische Integral

$$u = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

geht über in

$$u = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta}$$

und

$$\vartheta = \operatorname{am}(u, k) \quad \text{in} \quad \operatorname{am}(u, 1) = 2 \operatorname{arctg}(e^u) - \frac{\pi}{2}.$$

Für diese letztere Funktion hat man eine besondere Benennung und ein besonderes Zeichen eingeführt. Sie heißt Hyperbelamplitude $u = \mathfrak{Amp}(u)$.

$$\vartheta = \mathfrak{Amp}(u).$$

Im Falle unseres Pendels haben wir

$$\alpha = 2 \mathfrak{Amp} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

Diese Bewegung wird auch erhalten, wenn man in Gleichung (30) k in den Wert 1 übergehen läßt. Es folgt:

$$\alpha = 2 \operatorname{arcsin} \operatorname{sinam} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, 1 \right)$$

und durch Vergleich von Formel (31) dieses § mit (32) § 29

$$\alpha = 2 \operatorname{arcsin} \mathfrak{Tg} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

Hier ist die Funktion \mathfrak{Tg} die hyperbolische Tangentenfunktion. Wir können also die Beziehung anschreiben

$$\mathfrak{Amp}(u) = \operatorname{arcsin} \mathfrak{Tg}(u).$$

Auch für die Funktion $\mathfrak{Amp}(u)$ gibt es Tafeln, vgl. J. u. E., S. 16 ff.

Für den Verlauf der Winkelgeschwindigkeit haben wir im Falle $V < 2\sqrt{gl}$ schon unter Nr. (34)

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{V}{l} \operatorname{cosam} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, k \right) = \frac{V}{l} \operatorname{cosam} \left(\frac{2K}{T} t, k \right)$$

gefunden.

Im Falle $V > 2\sqrt{gl}$ ist zu setzen:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= 2 \frac{d}{dt} \operatorname{am} \left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} t, k \right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} \Delta \operatorname{am} \left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} t, k \right) = \frac{V}{l} \Delta \operatorname{am} \left(\frac{2K}{T} t, k \right), \end{aligned}$$

da für die Amplitudenfunktion die Differentiationsformel

$$\frac{d}{dt} \operatorname{am}(u, k) = \Delta \operatorname{am}(u, k)$$

gilt.

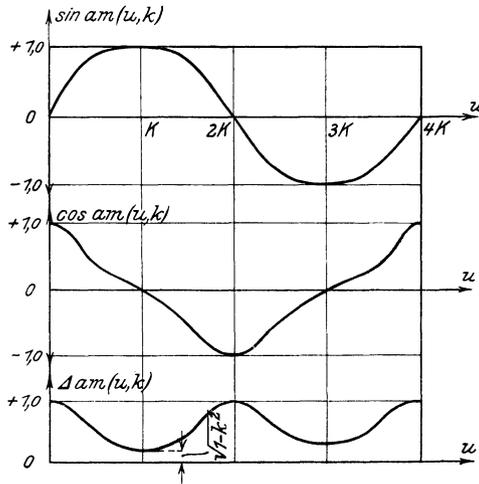


Fig. 113. Die drei elliptischen Funktionen.

Für die beiden Funktionen $\operatorname{cosam}(u, k)$ und $\Delta \operatorname{am}(u, k)$ gelten die in der Tabelle 10 (S. 202) angegebenen Wertsysteme, die sich aus den für $\operatorname{sinam}(u, k)$ gegebenen Werten finden, wenn man die Beziehungen berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosam}(u, k) &= \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am}(u, k)}; \\ \Delta \operatorname{am}(u, k) &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(u, k)}. \end{aligned}$$

Tabelle 3.

u	$\text{cosam}(u, k)$	$\Delta \text{am}(u, k)$	$\text{sinam}(u, k)$
0	1	1	0
K	0	$\sqrt{1-k^2}$	1
$2K$	-1	1	0
$3K$	0	$\sqrt{1-k^2}$	-1
$4K$	1	1	0

Wir können jetzt für jedes k die drei Funktionen $\text{sinam}(u, k)$, $\text{cosam}(u, k)$, $\Delta \text{am}(u, k)$ aufzeichnen: (Fig. 113).

Die Größe K berechnet sich

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right).$$

Mit abnehmendem k nähert sich

$$\begin{array}{l} \text{sinam}(u, k) \text{ der Funktion } \sin u, \\ \text{cosam}(u, k) \text{ „ „ } \cos u, \\ \Delta \text{am}(u, k) \text{ „ „ } 1. \end{array}$$

Mit wachsendem k (bis $k = 1$) nähert sich

$$\begin{array}{l} \text{sinam}(u, k) \text{ der Funktion } \mathfrak{Sg}(u), \\ \text{cosam}(u, k) \} \text{ „ „ } 1: \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J}(u). \\ \Delta \text{am}(u, k) \} \end{array}$$

V. Die Differenzgleichungen.

§ 45. Definition linearer Differenzgleichungen.

In § 5 ist der Begriff der Differenz $\Delta F(x)$ einer Funktion $F(x)$ eingeführt worden und durch den Ansatz

$$\Delta F(x) = (F(x+h) + F(x)) - F(x). \quad (1)$$

Dem Zwecke des § 5 entsprechend war die Differenz Δx mit der Eigenschaft der Variabilität ausgestattet, was notwendig war, weil wir damals vom Begriff der Differenz zum Differential gelangen wollten.

In den nächsten Betrachtungen wollen wir aber mit unveränderlichen Differenzen operieren, weshalb wir das Zeichen Δx mit dem Buchstaben h vertauschen.

Wir schreiben also die Differenz einer Funktion $F(x)$:

$$\Delta F(x) = F(x+h) - F(x). \quad (2)$$

Natürlich ist $\Delta F(x)$ eine Funktion von (x)

$$f(x) = F(x+h) - F(x). \quad (3)$$

Meistens erteilt man h den speziellen Wert 1. Für diesen Fall hat man z. B. bei der Funktion $F(x) = x^4$:

$$F(0) = 0, F(1) = 1, F(2) = 16, F(3) = 81, F(4) = 256, F(5) = 625, \\ \Delta F(0) = 1, \Delta F(1) = 15, \Delta F(2) = 65, \Delta F(3) = 175, \Delta F(4) = 369.$$

Man nennt $\Delta F(x)$ die erste Differenz von $F(x)$. Analog nennt man

$$\Delta F(x+h) - \Delta F(x) = \Delta_2 F(x) \text{ die zweite Differenz.}$$

$$\Delta_2 F(x+h) - \Delta_2 F(x) = \Delta_3 F(x) \text{ die dritte Differenz} \quad (4) \\ \text{usf.}$$

In dem Beispiel ist:

$$\begin{aligned} \Delta_2 F(0) &= 14 & \Delta_3 F(0) &= 36 & \Delta_4 F(0) &= 24 & \Delta_5 F(0) &= 0 \\ \Delta_1 F(1) &= 50 & \Delta_3 F(1) &= 60 & \Delta_4 F(1) &= 24 \\ \Delta_2 F(2) &= 110 & \Delta_3 F(2) &= 84 \\ \Delta_2 F(3) &= 194 \end{aligned}$$

Es ist nun möglich, eine unbekannte Funktion $F(x)$ durch eine Differenzgleichung zu bestimmen. Eine solche Gleichung enthält die unbekannte Funktion, deren Differenzen bis zu einer gewissen Ordnung und außerdem die unabhängige Variable x . Die Ordnung der höchsten vorkommenden Differenz bestimmt die Ordnung der Differenzgleichung. Die allgemeine Form einer solchen würde also sein:

$$\Phi(x, F(x), \Delta F(x), \Delta_2 F(x), \dots, \Delta_n F(x)) = 0. \quad (5)$$

Setzt man hier für $\Delta_k F(x)$ seinen aus (3) und (4) folgenden Wert für $h = 1$ ein:

$$\Delta = F(x+1) - F(x)$$

$$\Delta_2 = F(x+2) - 2F(x+1) + F(x)$$

$$\Delta_3 = F(x+3) - 3F(x+2) + 3F(x+1) - F(x)$$

usw., und setzt man

$$F(x+k) = y_{x+k},$$

so geht (5) über in

$$\Psi(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0, \quad (6)$$

in welcher Gestalt Differenzen gar nicht mehr erkennbar sind; trotzdem nennt man auch (6) eine Differenzgleichung.

Die Gleichungen (6) teilt man nun ganz analog den Differentialgleichungen ein. Besonders wichtig sind die linearen Differenzgleichungen

$$y_x P_0(x) + y_{x+1} P_1(x) + y_{x+2} P_2(x) + \dots + y_{x+n} P_n(x) = Q(x), \quad (7)$$

welche vollständig heißen, falls $Q(x)$ nicht identisch verschwindet. Ist dieses der Fall, so heißen sie homogen. Die Differenzgleichungen haben partikuläre Lösungen und allgemeine Lösungen, über welche analoge Sätze wie bei den Differentialgleichungen existieren. Kennt man die allgemeine Lösung einer homogenen Gleichung, so läßt sich die Lösung der vollständigen Gleichung durch ein der Methode der Variation der Konstanten ähnliches Verfahren entwickeln.

Als Beispiel betrachten wir die homogene Differenzgleichung:

$$y_{x+1} + (a + bx)y_x = 0. \quad (8)$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$y_x = (-1)^{x-p} \prod_{k=1}^{k=x-p} [a + b(x-k)]. \quad (9)$$

Hier ist $p+1 < x$ zu wählen, p ist die willkürliche Integrationskonstante. Aus (9) folgt:

$$y_{x+1} = (-1)^{x-p+1} \prod_{k=1}^{k=x-p} [a + b(x-k+1)]. \quad (10)$$

Multipliziert man (9) mit $(a + bx)$ und addiert zu (10), so resultiert identisch Null, womit (9) als allgemeine Lösung von (8) erwiesen ist⁴⁵).

§ 46. Die linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Technisch wichtig sind die linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten, d. h. solche Differenzgleichungen, bei denen die $P_k(x)$ [siehe Gleichung (7) § 45] Konstante sind. Es ist also:

$$y_x a_0 + y_{x+1} a_1 + \dots + y_{x+n} a_n = 0 \quad (1)$$

die allgemeine Form einer homogenen linearen Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Ohne Beweis schreiben wir als Haupttatsache an: Die allgemeine Lösung von (1) lautet:

$$y_x = C_1 \lambda_1^x + C_2 \lambda_2^x + \dots + C_n \lambda_n^x; \quad (2)$$

wenn $\lambda_1 \dots \lambda_n$ die Wurzeln der Gleichung n -ten Grades sind:

$$\lambda^n a_n + \lambda^{n-1} a_{n-1} + \dots + \lambda a_1 + a_0 = 0. \quad (3)$$

Der Ansatz (2) modifiziert sich etwas, wenn die Wurzeln zum Teil gleich oder komplex sind. Werden z. B. k Wurzeln einander gleich

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k,$$

während die $n - k$ übrigen voneinander und von λ_1 verschieden sind, so ist

$$\begin{aligned} y_x = & C_1' \lambda_1^x + C_2' x \lambda_1^{x-1} + C_3' x(x-1) \lambda_1^{x-2} + \dots \\ & + C_k' x(x-1)(x-2) \dots (x-k+2) \lambda_1^{x-k+1} \\ & + C_{k+1} \lambda_{k+1}^x + \dots + C_n \lambda_n^x \end{aligned} \quad (4)$$

die allgemeine Lösung.

Sind k Paare gleicher komplexer Wurzeln vorhanden:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \dots = \lambda_{2k-1} &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \dots = \lambda_{2k} &= r(\cos \alpha - i \sin \alpha) \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} y_x = & (C_1' + C_2' x + \dots + C_k' x^{k-1}) r^x \cos x \alpha, \\ & + (C_1'' + C_2'' x + \dots + C_k'' x^{k-1}) r^x \sin x \alpha, \\ & + (C_{2k+1} x_{k+1} + \dots + C_n \lambda_n^x \end{aligned} \quad (5)$$

die allgemeine Lösung.

Jedenfalls sind n willkürliche Konstanten C vorhanden, die sich bestimmen lassen, wenn n Werte y_x gegeben sind für bestimmte Werte der Variablen x ; z. B. y_0, y_1, \dots, y_n für $x = 0, x = 1, \dots, x = n$. Dann liefert sowohl (3) wie (4) und (5) ein System von n Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten C .

§ 47. Anwendung der linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

I. Eine einfache Anwendung liefert zunächst die Theorie des kontinuierlichen Balkens. Bekanntlich gilt für die Stützenmomente M eines kontinuierlichen Trägers, der in jedem Feld gleichmäßig belastet ist, die Clapeyronsche Gleichung⁴⁶⁾:

$$\begin{aligned} 6 E J \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{l_k} + \frac{y_{k+1} - y_{k+2}}{l_{k+1}} \right) = & M_k l_k + 2 M_{k+1} (l_k + l_{k+1}) \\ & + M_{k+1} \cdot l_{k+1} + \frac{1}{4} (q_k l_k^3 + q_{k+1} l_{k+1}^3). \end{aligned} \quad (1)$$

Sind die Stützen alle gleich hoch, die Stützenentfernungen alle gleich groß $= l$ und die Belastungen q_k ebenfalls in allen Feldern gleich q , so wird aus (1):

$$M_k + 4 M_{k+1} + M_{k+2} = -\frac{1}{2} q l^2 \quad (2)$$

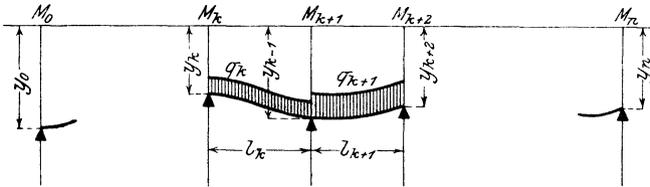


Fig. 114. Kontinuierlicher Balken auf mehreren Stützen.

Die zu dieser Gleichung gehörige homogene Differenzengleichung

$$M_k + 4 M_{k+1} + M_{k+2} = 0 \quad (3)$$

liefert, vermöge der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 4 \lambda + 1 = 0 \quad (4)$$

die allgemeine Lösung

$$M_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k, \quad (5)$$

wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln von (4) sind.

Offenbar ist nun

$$M_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k - \frac{q l^2}{6} \quad (6)$$

die allgemeine Lösung von (2), wie sich durch Verifikation ergibt. Die Konstanten C_1 und C_2 bestimmen sich aus den Bedingungen, daß an den Enden des Balkens die Stützenmomente null sein müssen, d. h. aus

$$\left. \begin{aligned} M_0 = C_1 + C_2 - \frac{q l^2}{6} &= 0, \\ M_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n - \frac{q l^2}{6} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Aus diesen Gleichungen berechnen sich

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{q l^2}{6} \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n} \\ C_2 &= +\frac{q l^2}{6} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

und hiermit:

$$M_k = -\frac{ql^2}{6} \left\{ 1 + \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n} \lambda_1^k - \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n} \lambda_2^k \right\}. \quad (9)$$

Nach dieser Formel können die Stützenmomente des durchlaufenden Trägers auf S. 565, Bd. I. der Hütte (1915) berechnet werden.

II. Ebenfalls auf eine lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten führt die Untersuchung der Schwingungsbewegung einer Kette von Massenpunkten.

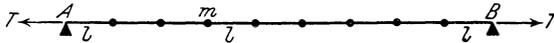


Fig. 115. Kette von Massenpunkten in der Ruhelage.

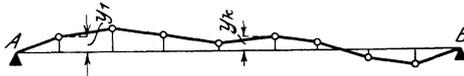


Fig. 116. Bewegungsform der Kette von Massenpunkten.

n Punkte der Masse m seien durch unausdehbare Fäden der Länge l miteinander verbunden; die ganze Kette sei dann mit gleichfalls unausdehbaren Stücken von der Länge l an den Punkten A und B festgemacht und stehe unter der Spannung T . Nun werde die Kette aus ihrer in Fig. 115 gezeichneten Mittellage herausgebracht, indem den einzelnen Massenpunkten die Ordinaten $\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n$ erteilt werden. So entstehe die Gestalt Fig. 116.

Es wird vorausgesetzt, daß die Verschiebungen y_k klein seien gegen die Fadenlänge l .

Zur Zeit $t = 0$ werde die deformierte Kette (ohne Anstoßen der Massenpunkte) sich selbst überlassen, und es soll die nun beginnende Bewegung untersucht werden.

Offenbar ist die Bewegung festgelegt, wenn wir für jeden Massenpunkt seine Entfernung y_k von der Gleichgewichtslage in Abhängigkeit von der Zeit t kennen. Wir stellen die Differentialgleichung für die Bewegung des k -ten Massenpunktes auf (Fig. 117):

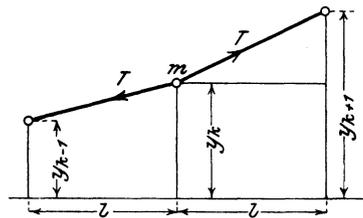


Fig. 117. Zur Bewegungsgleichung eines Kettenpunktes.

$$m \frac{d^2 y_k}{dt^2} = T \frac{y_{k+1} - y_k}{l} - T \frac{y_k - y_{k-1}}{l}. \quad (1)$$

Weil die y klein sind gegen l , kann die Fadenspannung T als konstant angesehen und ihre Vertikalkomponenten den Ordinaten-differenzen zweier benachbarter Punkte proportional gesetzt werden.

Unter Absonderung von $\frac{T}{l} = c^2$ schreibt sich sich (1)

$$m \frac{d^2 y_k}{dt^2} = c^2 (y_{k+1} - 2 y_k + y_{k-1}). \quad (2)$$

Wir versuchen, ob eine periodische Lösung

$$y_k = \sum L_{kp} \sin(2 p \pi t + \omega_p) \quad (3)$$

der Differentialgleichung genügt, wo wir über die Wahl von p später Entscheidung zu treffen haben.

Wir erhalten zunächst:

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = -4 p^2 \pi^2 \sum L_{kp} \sin(2 p \pi t + \omega_p), \quad (4)$$

was in (2) eingesetzt folgendes System von Differenzgleichungen liefert:

$$\begin{aligned} L_{p, k+1} - 2 L_{p, k} + L_{p, k-1} &= -\frac{4 p^2 \pi^2}{c^2} L_{p, k} \\ p &= 0 \dots \infty \\ k &= 1 \dots n, \end{aligned} \quad (5)$$

denen die $L_{p, k}$ zu genügen haben.

Man kann die Differenzgleichungen in der Form

$$\begin{aligned} L_{p, k} + \left(\frac{4 p^2 \pi^2}{c^2} - 2 \right) L_{p, k+1} + L_{p, k+2} &= 0 \\ p &= 0 \dots \infty \\ k &= 0 \dots n-1 \end{aligned} \quad (6)$$

schreiben, deren allgemeine Lösung nach § 46 (2) ist:

$$L_{pk} = C_{p1} \lambda_{p1}^k + C_{p2} \lambda_{p2}^k, \quad (7)$$

wenn λ_{p1} und λ_{p2} die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda_p^2 + \lambda_p \left(\frac{4 p^2 \pi^2}{c^2} - 2 \right) + 1 = 0 \quad (8)$$

sind.

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man:

$$\lambda_{p^2}^1 = 1 - \frac{2 p^2 \pi^2}{c^2} \pm \frac{2 p \pi}{c} \sqrt{\frac{p^2 \pi^2}{c^2} - 1},$$

die man mit

$$p \frac{\pi}{c} = \sin \vartheta$$

schreiben kann

$$\lambda_{p^2}^1 = \cos 2 \vartheta \pm i \sin 2 \vartheta, \quad (9)$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $\frac{p \pi}{c} < |1|$ bleibt. Daß das der Fall ist, wird weiter unten bewiesen.

Zunächst bemerken wir, daß sich mit (7) die allgemeine Lösung schreibt:

$$y_k = \sum_p \{C_{p1} \lambda_{p1}^k + C_{p2} \lambda_{p2}^k\} \sin(2 p \pi t + \omega_p), \quad (10)$$

in welcher Formel auch die beiden festen Punkte A und B enthalten sind, wenn man $k = 0$ und $k = n + 1$ sowie $y_0 \equiv 0$ und $y_{n+1} \equiv 0$ setzt. Diese „Randbedingungen“ liefern die Ansätze:

$$C_{p1} + C_{p2} = 0, \quad (10a)$$

$$C_{p1} \lambda_{p1}^{n+1} + C_{p2} \lambda_{p2}^{n+1} = 0, \quad (10b)$$

$$\lambda_{p1}^{n+1} = \lambda_{p2}^{n+1}. \quad (10c)$$

Die letzte Gleichung wird aber nur erfüllt für $p = 0$ und $p = \pm \frac{c}{\pi}$, wie sich aus Gleichung (8) sofort ergibt.

Zwischen diesen Werten muß p stets enthalten sein, d. h. es muß gelten

$$p \frac{\pi}{c} < |1|,$$

womit die Zulässigkeit von (9) erwiesen ist.

Führt man nun (9) in (10c) ein, so folgt:

$$(\cos 2 \vartheta + i \sin 2 \vartheta)^{n+1} = (\cos 2 \vartheta - i \sin 2 \vartheta)^{n+1}$$

und hieraus

$$\sin 2(n+1) \vartheta = 0,$$

d. h.

$$2(n+1) \vartheta = \nu \pi$$

oder

$$\vartheta = \frac{\nu \pi}{2(n+1)}.$$

Für $\nu = 0$ haben wir hier wieder $\vartheta = 0$ und $p = 0$.

Für $\nu = n + 1$ aber haben wir jetzt $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $p = \frac{c}{\pi}$,

d. h. die Punkte A und B . Wenn wir daher ν die ganzen Zahlen von 1 bis n durchlaufen lassen, so erhalten wir gerade alle Massenpunkte. Nun führen wir (9) in (10) ein und erhalten, unter Berücksichtigung von (10a) mit $C_\nu = i(C_{\nu 1} - C_{\nu 1})$:

$$y_k = \sum_p C_\nu \sin 2k\vartheta \cdot \sin(2p\pi t + \omega_p) \quad (11)$$

oder nach Einsetzung von

$$p = \frac{c}{\pi} \sin \frac{\nu\pi}{2(n+1)} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{\nu\pi}{2(n+1)}$$

$$y_k = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left\{ A_\nu \sin \frac{\nu k \pi}{n+1} \cdot \sin \left[2ct \sin \frac{\nu\pi}{2(n+1)} \right. \right. \\ \left. \left. + B_\nu \sin \frac{\nu k \pi}{n+1} \cdot \cos \left[2ct \sin \frac{\nu\pi}{2(n+1)} \right] \right\}. \quad (12)$$

Zur Bestimmung der $2n$ Koeffizienten A_ν und B_ν finden sich die $2n$ Gleichungen:

$$y_k = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu \sin \frac{\nu k \pi}{n+1} \quad \left. \vphantom{y_k} \right\} k = 1 \dots n \quad (13)$$

und

$$\frac{dy_k}{dt} = 0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_\nu \cdot 2c \sin \frac{\nu\pi}{2(n+1)} \cdot \sin \frac{\nu k \pi}{n+1} \quad \left. \vphantom{\frac{dy_k}{dt}} \right\}$$

d. h. der Ausdruck der Anfangsbedingungen der Bewegung⁴⁷⁾.

§ 48. Anwendung der Differenzgleichungen auf die Stromverteilung in einem Kettenleiter.

1. Zur Behandlung dieses Problems, welches in die Theorie der Wechselstromvorgänge gehört, seien einige erklärende Bemerkungen aus dieser vorangeschickt.

Ein Wechselstrom I wird durch die Gleichung

$$I = J \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

dargestellt, wo t die Zeit, J den Hauptwert, ω die Kreisfrequenz, φ die Phase bedeuten. Nach Entwicklung der rechten Seite (1) findet sich

$$\mathbf{I} = J \cos \varphi \sin \omega t + J \sin \varphi \cos \omega t. \quad (2)$$

Hier stehen rechts zwei Wechselströme \mathbf{I}_1 und \mathbf{I}_2 , die die Hauptwerte $J \cos \varphi$ bzw. $J \sin \varphi$ und die Phasen 0 bzw. $\frac{\pi}{2}$

haben; denn es ist $\cos \omega t = \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$. Wir können also mit

$$J_1 = J \cos \varphi; \quad J_2 = J \sin \varphi$$

schreiben

$$\mathbf{I} = J_1 \sin \omega t + J_2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (3)$$

Offenbar ist bei allen drei Wechselströmen das Argument ωt das gleiche; sie unterscheiden sich nur durch ihre Hauptwerte und durch ihre Phasen. Insbesondere erscheint \mathbf{I} als Summe zweier Ströme der Phasen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Es ist nun üblich, die

Wechselstromgrößen, die gegenüber anderen die Phase $\frac{\pi}{2}$ haben, durch Hinzufügen des Faktors j herauszuheben, für den die Rechnungsregel $j^2 = -1$ gilt. Mit dieser Erklärung kann man (3) wie folgt schreiben:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + j \mathbf{I}_2 \quad (4)$$

und deutet durch Anwendung der fetten Blockschrift die hingeschriebenen Zeichen als Wechselstromgrößen einer und derselben Kreisfrequenz.

In entsprechender Weise schreibt man eine Wechselstromspannung

$$\mathbf{V} = V \sin(\omega t + \varphi)$$

in komplexer Darstellung.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + j \mathbf{V}_2. \quad (5)$$

An den komplex geschriebenen Wechselstromgrößen kann man auch Differentiationen und Integrationen ausführen. Aus (1) folgt:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = J \omega \cos(\omega t + \varphi) = J \omega \sin \left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right) = j \omega \mathbf{I}, \quad (6)$$

da offenbar $J \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ gegenüber $I = J \sin(\omega t + \varphi)$ die Phase $\frac{\pi}{2}$ hat.

Ferner folgt aus (1):

$$\begin{aligned} \int I dt &= -\frac{J}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{J}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -j \frac{I}{\omega} = \frac{I}{j\omega}. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Ein Wechselstrom I entsteht in einem Leiter des Ohmschen Widerstandes W , der Selbstinduktion L und der Kapazität C unter Einwirkung der aufgedrückten Spannung V nach Maßgabe der Differentialgleichung

$$L \frac{dI}{dt} + WI + \frac{1}{C} \int I dt = V. \quad (8)$$

Unter Heranziehung der Differentiations- und Integrationsregel (6) bzw. (7) kann man hier schreiben:

$$Lj\omega I + WI - \frac{jI}{\omega C} = V \quad (9)$$

oder nach Absonderung von I

$$I \left\{ W + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\} = V$$

oder

$$I = \frac{V}{W + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}. \quad (10)$$

Hier ist aber der Nenner rechts wiederum eine komplex geschriebene Größe, die wir mit $R = W + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ den Scheinwiderstand des Wechselstromkreises nennen. Seinen reziproken Wert nennen wir den Scheinleitwert

$$G = \frac{1}{R}. \quad (11)$$

3. Wir betrachten nun ein System von Wechselstromwiderständen nach Fig. 118, also eine Leitung, die von ihrem Anfang $A_1 A_2'$ zum Ende $E_1 E_2$ führt. Mit K. W. Wagner⁴⁸⁾ nennen wir diese Leitung einen Kettenleiter erster Art

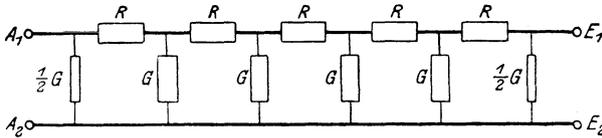


Fig. 118. Kettenleiter erster Art.

und weisen darauf hin, daß z. B. eine Pupinsche Fernsprechleitung sehr angenähert durch einen solchen Kettenleiter dargestellt wird. Dann enthalten die Kettenglieder des Scheinwiderstandes R den Ohmschen Widerstand der Pupinschen Leitungsabschnitte mit den zugehörigen Induktionsspulen, während die parallel geschalteten Glieder des Scheinleitwertes G (für welche natürlich $G \geq \frac{1}{R}$ gilt) der Kapazität der einzelnen Abschnitte entsprechen. Weiterhin kann auch ein Hochspannungshängeisolator durch einen Kettenleiter dargestellt werden, bei dem sowohl die R - wie die G -Glieder reine Kapazitäten enthalten⁴⁹⁾.

Aus dem Kettenleiter schneiden wir nun das n -te Glied nach Fig. 119 heraus, an dessen Anfang und Ende die Spannungen V_{n-1} und V_n herrschen, während I_{n-1} und I_n den ein- und austretenden Strom bedeuten. Die Spannung und der Strom am Anfang der Kette $A_1 A_2$ seien V_0 und I_0 . Dann kann man aus der Figur die Stromverteilungsgleichung

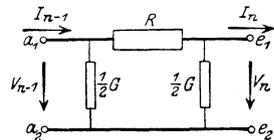


Fig. 119. Kettenleiter-element.

$$I_{n-1} = I_n + \frac{1}{2} G V_n + \frac{1}{2} G V_{n-1} \quad (12a)$$

sowie die Gleichung des Spannungsgefälles

$$V_{n-1} = V_n + R(I_{n-1} - \frac{1}{2} G V_{n-1}) \quad (12b)$$

ablesen.

Gl. (12a) und (12b) sind ein simultanes System von Differenzgleichungen, aus dem wir zunächst etwa die Variable I zu entfernen haben. Wir erhalten durch Auf-

lösung von (12b) nach I_{n-1} , Bildung von I_n hieraus und Einsetzen in (12a):

$$V_{n-1} - V_n(2 + \mathbf{R}\mathbf{G}) + V_{n+1} = 0. \quad (13)$$

Diese Differenzgleichung ist nach § 46 zu behandeln durch Auflösung der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 - (2 + \mathbf{R}\mathbf{G})\lambda + 1 = 0. \quad (14)$$

Zu diesem Zwecke benutzen wir, was sich als vorteilhaft erweisen wird, die Einsetzung

$$\lambda = e^\gamma$$

und schreiben (14):

$$(1 - \lambda)^2 = \mathbf{R}\mathbf{G}\lambda$$

oder

$$(1 - e^\gamma)^2 = \mathbf{R}\mathbf{G}e^\gamma. \quad (15)$$

Hieraus findet sich aber:

$$1 - e^\gamma = \pm e^{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\mathbf{R}\mathbf{G}}$$

oder

$$\frac{e^{+\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}}}{2} = \Im \sin \frac{\gamma}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{R}\mathbf{G}}. \quad (16)$$

Gehen wir auf die Werte λ zurück, so wird

$$\lambda_1 = e^{+2 \operatorname{arc} \Im \sin \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{R}\mathbf{G}}}; \quad \lambda_2 = e^{-2 \operatorname{arc} \Im \sin \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{R}\mathbf{G}}}$$

und

$$\left. \begin{aligned} V_n &= A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n = A_1 e^{n\gamma_1} + A_2 e^{n\gamma_2}, \\ I_n &= B_1 \lambda_1^n + B_2 \lambda_2^n = B_1 e^{n\gamma_1} + B_2 e^{n\gamma_2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Führt man die Partikularlösungen

$$V_n = A_1 e^{n\gamma_1} \quad \text{und} \quad I_n = B_1 e^{n\gamma_1}$$

in (12a) ein, so findet sich

$$B_1 (1 - e^{\gamma_1}) = A_1 \frac{1}{2} \mathbf{G} (e^{\gamma_1} + 1)$$

oder

$$-\frac{B_1}{A_1} = \frac{1}{2} \mathbf{G} \frac{e^{\gamma_1} + 1}{e^{\gamma_1} - 1} = \frac{\frac{1}{2} \mathbf{G}}{\Im \Im \frac{1}{2} \gamma_1}, \quad (18a)$$

während sich entsprechend ergibt:

$$-\frac{B_2}{A_2} = \frac{\frac{1}{2} \mathbf{G}}{\Im \Im \frac{1}{2} \gamma_2}. \quad (18b)$$

Nach (16) gilt aber

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= + 2 \operatorname{arc} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \sqrt{R G} = + \gamma, \\ \gamma_2 &= - 2 \operatorname{arc} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \sqrt{R G} = - \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

und so wird die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} V_n &= A_1 e^{n\gamma} + A_2 e^{-n\gamma}, \\ I_n &= B_1 e^{n\gamma} + B_2 e^{-n\gamma}. \end{aligned}$$

Mit (19) ermitteln sich hier für das Konstantenverhältnis $\frac{B}{A}$ zwei Werte, nämlich:

$$\frac{B_1}{A_1} = - \frac{1}{W}, \quad \frac{B_2}{A_2} = + \frac{1}{W}$$

mit der Abkürzung:

$$W = \frac{2 \Im g \frac{1}{2} \gamma}{G},$$

wodurch die Lösung auf zwei willkürliche Integrationskonstante A_1 und A_2 zurückgeführt wird mit

$$\begin{aligned} V_n &= A_1 e^{n\gamma} + A_2 e^{-n\gamma}, \\ I_n &= - \frac{A_1}{W} e^{n\gamma} + \frac{A_2}{W} e^{-n\gamma}. \end{aligned}$$

Die Konstanten A_1 und A_2 ermitteln sich aber aus der Bedingung am Anfang der Leitung: $n = 0$ mit der Spannung

$$V_0 = A_1 + A_2 \quad \text{und dem Strom} \quad W I_0 = - A_1 + A_2$$

zu

$$A_1 = \frac{1}{2} (V_0 - W I_0); \quad A_2 = \frac{1}{2} (V_0 + W I_0)$$

und somit endgültig Spannung und Strom an beliebiger Stelle des Kettenleiters:

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 \operatorname{Cos} n\gamma - W I_0 \operatorname{Sin} n\gamma, \\ I_n &= I_0 \operatorname{Cos} n\gamma - \frac{V_0}{W} \operatorname{Sin} n\gamma. \end{aligned}$$

Hiermit ist die Integration des Systems (12) vollständig geleistet⁵⁰⁾.

VI. Zeichnerische und rechnerische Näherungsbehandlung der Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 49. Differentialgleichungen erster Ordnung in graphischer Behandlung.

1. Die einfache Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

läßt sich, wenn $f(x)$ als rechnerischer Ausdruck gegeben ist, geschlossen integrieren, falls $f(x)$ eine integrable Funktion, d. h. der Integrand eines bekannten unbestimmten Integrales ist, oder sich in solche Funktionen zerlegen läßt. Es ist dann

$$y = C + \int f(x) dx. \tag{2}$$

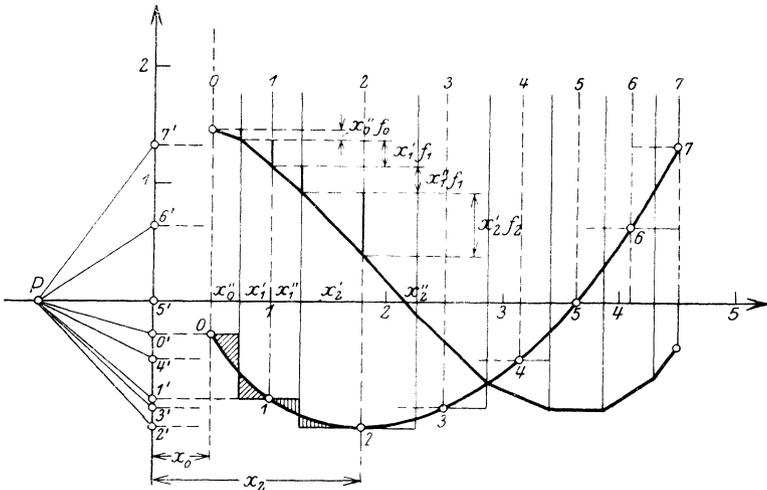


Fig. 120. Graphische Integration nach Stufenteilung 1. Art (Tangentenpolygon).

Ist die obige Voraussetzung nicht erfüllt, oder ist $f(x)$ graphisch oder tabellarisch gegeben, so kann (1) nur graphisch oder rechnerisch integriert werden.

Ein graphisches Verfahren hierzu ist bereits in § 4 und § 10 angegeben worden.

Dies Verfahren⁵¹⁾ kommt hinaus auf die Ersetzung der Funktion $f(x)$ durch eine Stufenkurve mit nachfolgender gra-

phischer Integration der horizontalen Stücke dieser, wie oben § 2 angegeben wurde.

Die Ersetzung einer Kurve $f(x)$ durch eine Stufenkurve kann in zweifacher Weise geschehen. In beiden Fällen werden die Stufen so gelegt, daß sie mit der Kurve kleine rechtwinklige Dreiecke bilden, die paarweise einander inhaltsgleich sind, wie z. B. die in den Figuren 120 und 121 schräg und senkrecht schraffierten Paare. Hierbei gibt es zwei Möglich-

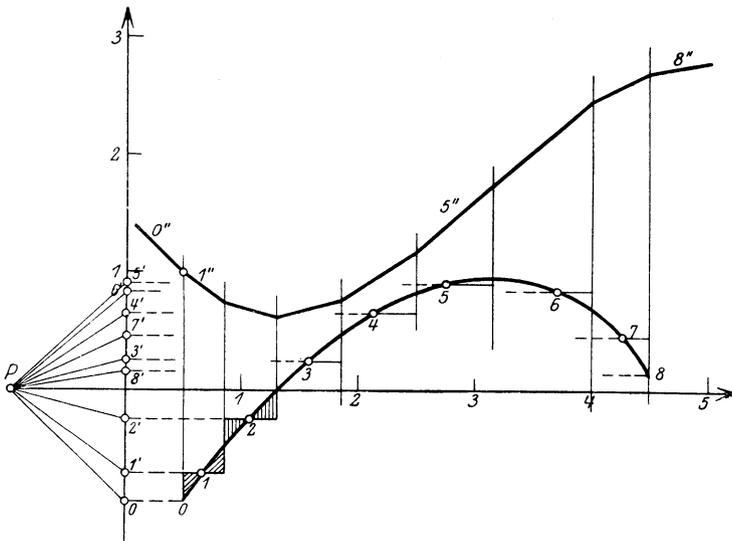


Fig. 121. Graphische Integration von Stufenteilung 2. Art (Sehnenpolygon).

keiten: Entweder ist die erste Kathete des ersten Dreiecks der x -Achse (wie in Fig. 120) oder der y -Achse (wie in Fig. 121) parallel.

Im ersteren Falle legt man zweckmäßig an die Kulminationspunkte von $f(x)$ horizontale Tangenten und schreitet von hier nach rechts und links in der Stufenbildung fort, so daß die Nullpunkte der $f(x)$ -Kurve Stoßpunkte von Dreiecks-paaren werden.

Die horizontalen Stücke der Stufenkurve bezeichnet man von links beginnend mit $0, 1, 2, \dots$ und erteilt dieselben Ziffern den Ordinaten, die durch die Schnittpunkte der entsprechenden horizontalen Stufenstücke mit $f(x)$ gezogen werden.

Weiter projiziert man die Abstände $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$ der horizontalen Stufenstücke von der x -Achse auf die Ordinatenachse, wodurch man auf dieser eine Punktfolge $0', 1', 2', \dots$ erhält. Diese Punkte verbindet man mit einem links von der Ordinatenachse auf der Abszissenachse im Abstand 1 von dieser gelegenen Pole P , wodurch das Polstrahlenbüschel entsteht.

Hat man nun auf der Ordinate 0 einen Anfangspunkt für die gesuchte Integralkurve festgelegt, so zieht man durch diesen eine Parallele zum Polstrahl $P0'$ bis zum Schnitt mit der dem ersten Dreieckspaar gemeinsamen vertikalen Kathetenrichtung. Von diesem zieht man wieder eine Parallele zum Polstrahl $P1'$ usf. bis ein Polygonzug erhalten ist, der alle den Dreieckspaaren gemeinsamen Ordinaten schneidet.

In den Punkten, die der Polygonzug mit den Ordinaten $0, 1, 2, \dots$ gemein hat, stimmen seine Ordinaten mit den entsprechenden Werten des Integrals $C + \int f(x) dx$ genau überein, wovon man sich durch die Addition der Ordinatenabschnitte des Polygonzuges nach der Fig. 120 etwa bis zum Punkte 2 überzeugen kann. Es ist

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = (x_0'' f_0 + x_1' f_1) + (x_1'' f_1 + x_2' f_2), \quad (3)$$

wo die eingeklammerten Paare jedesmal vermöge der Stufenteilung mit den über den Abszissenabschnitten $x_0'' + x_1'$ bzw. $x_1'' + x_2'$ stehenden Flächenstücken der Kurve $f(x)$ inhaltsgleich sind.

Durch die Punkte $0, 1, 2, \dots$ des Polygonzuges darf man also die gesuchte Integralkurve hindurchlegen, und zwar berührend mit jenem, da Polygonzug und Integralkurve hier gleiche Tangentenrichtungen $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$ haben. Der Polygonzug ist also ein Tangentenpolygon der Integralkurve.

Im Falle der Fig. 121, in der ebenfalls in den Kulminationspunkten und in den Nullpunkten Dreieckspaare zusammenstoßen, bezeichnet man die horizontalen Stufen mit 1, 2, 3, \dots und projiziert sie in den Punkten $1', 2', 3', \dots$ auf die y -Achse. Die Parallelen zu den Polstrahlen $P1', P2', \dots$ schneiden sich jetzt auf den Trennungordinaten der Dreieckspaare und bilden ein Sehnenpolygon der Integralkurve. Die Endpunkte 0 und 8 der $f(x)$ -Kurve bestimmen dagegen die Anfangstangente $0''$ und die Endtangente $8''$ der Integralkurve.

Ebenso könnte man auch die Tangenten der Integralkurve in allen übrigen Ecken des Sehnenpolygons bestimmen, indem man die Stoßstellen der Dreieckspaare auf die y -Achse projiziert. Die zugehörigen Polstrahlen geben die Tangentenrichtungen. Durch diese Bewertung wird das Sehnenpolygonverfahren dual zum Tangentenpolygonverfahren. Jedoch wird praktisch die Ausnutzung dieser Bemerkung umständlicher als die unmittelbare Anwendung des Tangentenpolygonverfahrens.

Insofern, als man die gekrümmten Begrenzungslinien der Differentialkurve als geradlinig, die Teilflächenstücke also als Trapeze betrachten kann, kommt die Stufenteilung auf die Halbierung der Trapeze hinaus, womit das Sehnenpolygonverfahren Anschluß an unsere Darstellung in § 10 findet.

In entsprechender Weise läßt sich die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{4}$$

durch Vertauschung der Koordinatenachsen gemäß

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} = \varphi(y), \tag{5}$$

sowohl nach dem Tangenten- wie nach dem Sehnenpolygonverfahren behandeln.

Ein einfaches Beispiel zeigt, wie man mit Hilfe einiger weniger Stufen die Gestalt der Integralkurve durch das Tangentenpolygonverfahren ziemlich genau festlegen kann.

Zur Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 0,2 \tag{6}$$

soll die der Anfangsbedingung: $x = 0, y = 0$ entsprechende Integralkurve ermittelt werden. In Fig. 122 stellt die Kurve 0 1 2 3 4 die Differentialkurve

$$y' = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 0,2 \tag{7}$$

dar. Diese wird durch den dreistufigen Rechteckzug $0x_1 1\bar{x}_1 2x_3 3\bar{x}_3 4x_5 5$ ersetzt, dessen durch die y -Achse und die Ordinaten durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 bestimmte Flächeninhalte den entsprechenden Inhalten von (7) gleich sind. Das Polstrahlenbüschel wird vierstrahlig; der den Punkten 2 und 4 entsprechende (horizontale) Strahl ist doppelt zu zählen. Daher wird die ge-

suchte Integralkurve durch einen Zug von fünf Tangenten mit dem Anfangspunkt $x = 0, y = 0$ angenähert. Die Berührungspunkte 1'' 2'' 3'' 4'' 5'' liegen durch die Konstruktion unmittelbar fest; die leicht zu zeichnenden Übergangsbögen liefern die Kurvengestalt. Die Genauigkeit des Verfahrens beurteilt man z. B. durch den Vergleich der aus der Konstruktion für $x = 2,0$ zu entnehmenden Endordinate $y_5 = 0.405$ mit dem wahren Integralwert

$$y = \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 0,2x = 0,4.$$

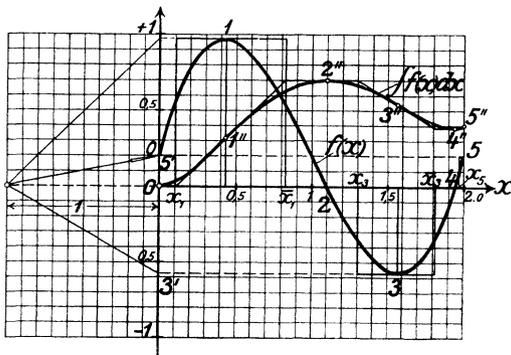


Fig. 122. Beispiel der Integration einer Stufenkurve.

§ 50. Einige technische Anwendungen der Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die allgemeine Gestalt der Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0 \tag{1}$$

spezialisiert sich in den verschiedenartigen Fällen technischer Anwendungen in einfacheren Formen.

Die Spiegelkurve eines fließenden Gewässers (§ 17) hat die Gestalt

$$\frac{dy}{dx} - J \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3} = 0. \tag{2}$$

während die Spiegelkurve des Grundwasserstromes in der Umgebung eines Brunnens (§ 19) sich nach

$$\frac{dy}{dx} - \frac{Q}{2\pi kxy} = 0 \quad (3)$$

regelt.

Für die Entstehung eines Wechselstromes in einem mit Selbstinduktion behafteten Stromkreis fand sich (§ 21)

$$\frac{dy}{dx} + ay + b \sin \omega x = 0. \quad (4)$$

Diese letztere Form ist ein Spezialfall der allgemeinen Gestalt

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) + Q(x) = 0, \quad (5)$$

unter der auch die Differentialgleichung für die Kurzschlußstromkurve eines Gleichstromankers erscheint⁵²⁾

$$\frac{dy}{dx} + y \left[a_1 + a_2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) \right] \left[a_3 + a_4 x + a_5 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \right) \right] = 0. \quad (6)$$

Diese Ansätze lassen sich im allgemeinen in geschlossener Form integrieren, wenngleich gelegentlich trotzdem zu einem Annäherungsverfahren gegriffen wird, wie z. B. bei der Differentialgleichung (2) nach § 17, oder auftretende Singularitäten eine weitgehende funktiontheoretische Untersuchung nötig machen, wie bei dem Ansatz (6) von G. Mie geschehen ist.

Die geschlossene Lösung ist unmöglich im Falle

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} = 0, \quad (7)$$

wenn die Methode des integrierenden Faktors (§ 23) versagt.

Unter der Form (7) erscheint z. B. die Spiegelgleichung eines fließenden Gewässers schon, wenn das Sohlengefälle J (§ 17) eine Funktion des Ortes x ist. Oft wird auch der benetzte Querschnitt F , der Profilradius r und die Profildbreite l von x sowie von der Wassertiefe y abhängig, in welchem Falle sich die Aufstellung der Spiegeldifferentialgleichung unter Voraussetzung eines Widerstandsverlustes im Gefälle $\left(\alpha + \frac{\beta}{r} \right) V^2$ nach der Formel von Bazin wie folgt ergibt.

Die Energiegleichung für den Durchfluß eines Gerinnekstuckes dx wird mit den Bezeichnungen von § 17

$$dz = d\left(\frac{V^2}{2g}\right) + \left(\alpha + \frac{\beta}{r}\right)V^2 dx. \quad (8)$$

Ferner gilt für den Zusammenhang des Spiegelgefalles $\frac{dz}{dx}$ des Sohlgefälles $J = \frac{d\delta}{dx}$ und der Änderung der Wassertiefe $\frac{dy}{dx}$ längs des Gerinnes:

$$dz = J dx - dy. \quad (9)$$

Betrachtet man noch die Querschnittsänderung

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + l dy, \quad (10)$$

so wird aus (8)

$$J + \left(\alpha + \frac{\beta}{r}\right) \frac{Q^2}{rF^2} + \frac{Q^2}{gF^3} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{Q^2 l}{gF^3}\right) \quad (11)$$

oder

$$\varphi(x, y) = \psi(x, y) \frac{dy}{dx}. \quad (12)$$

Demnach ergibt sich endgültig die Gestalt

$$\frac{dy}{dx} - \Phi(x, y) = 0. \quad (13)$$

§ 51. Das Isoklinenverfahren der Differentialgleichungen erster Ordnung.

Für die allgemeine graphische Behandlung der vorstehend erörterten Formen besitzen wir das auch für die allgemeine Gestalt (1), § 50, anwendbare Verfahren der Isoklinen.

Die Differentialgleichung

$$F\left(\frac{dy}{dx}, x, y\right) = 0 \quad (1)$$

bestimmt geometrisch in der x, y -Ebene ein Richtungsfeld, d. h. sie erklärt für jeden Punkt der Ebene eine Richtung, die ein durch ihn gezogenes kleines Linienelement mit der x -Achse einschließen soll (Fig. 123).

Setzen wir z. B. die Richtung

$$\frac{dy}{dx} = C \quad (2)$$

fest, so liefert

$$F(C, x, y) = 0 \quad (3)$$

eine Kurve in der x, y -Ebene, die alle Punkte miteinander verbindet, in denen die Integralkurven von (1) die Richtung (2) haben. Man nennt eine solche Kurve eine Isokline. Variiert man in (3) die Größe C , so entsteht eine Schar von Isoklinen.

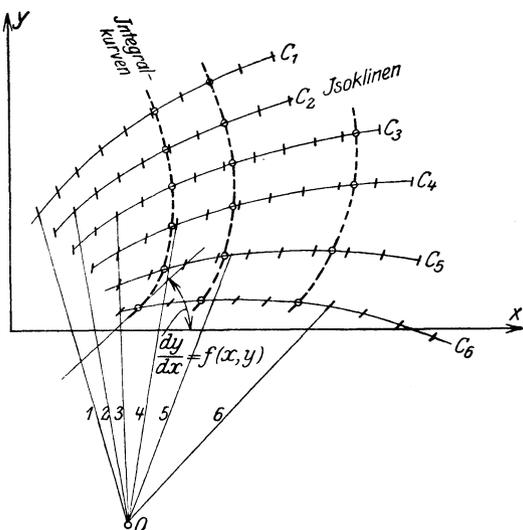


Fig. 123. Richtungsfeld und Integralkurven.

Die gegebene Differentialgleichung (1) schreibt nun vor, in jedem Punkte der x, y -Ebene in der in ihm durch die Funktion $F(C, x, y)$ gemäß (2) und (3) erklärten Richtung vorwärtszuschreiten. Durch diese Bewegung erhält man, von einem Punkte x_1, y_1 ausgehend, eine Integralkurve.

Zeichnet man nun ein Strahlbüschel, dessen einzelne Strahlen 1, 2, 3, ... zu den auf jeder Kurve C_1, C_2, C_3, \dots erklärten Linienelementen parallel sind, so erhält man die Integralkurven als eine Art Seilpolygon, dessen Seilstrahlen zwischen den Isoklinen parallel den Bündelstrahlen unter Beachtung der Zuordnungsziffern 1, 2, 3, ... gezogen sind.

Konstruiert man demnach eine ganze Schar von Isoklinen, so kann man auch eine ganze Schar von Integralkurven leicht finden.

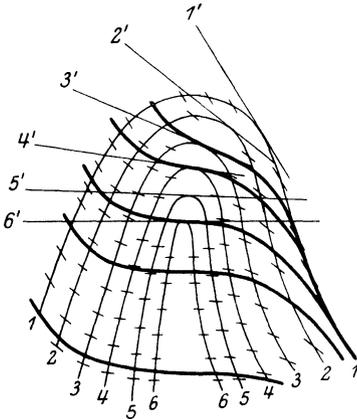


Fig. 124. Wendepunkte der Trajektorien eines Richtungsfeldes.

Bei der Aufzeichnung der Integralkurven, die man auch als die Trajektorien der Isoklinen bezeichnet, sind einige Punkte besonders zu beachten.

Zunächst haben die Trajektorien in allen den Punkten, in denen die Tangente der Isokline mit der Richtung der auf der letzteren erklärten Linien-elemente zusammenfällt, im allgemeinen Wendepunkte, wie sich aus der Zeichnung Fig. 124 ohne weiteres ergibt.

Ferner kann die Schar der Isoklinen

$$F(C, x, y) = 0$$

eine Einhüllende besitzen, deren Gleichung sich durch Elimination von C aus (16) und

$$\frac{\partial F(C, x, y)}{\partial C} = 0 \quad (4)$$

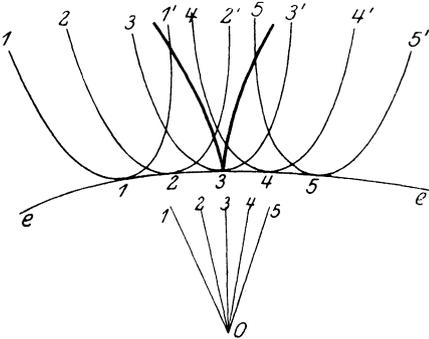


Fig. 125. Rückkehrpunkte der Trajektorien.

findet. Man nennt diesen Prozeß die Bildung der Diskriminante von F in bezug auf den Parameter C . Eine solche Einhüllende ist der geometrische Ort für Spitzen (Rückkehrpunkte) der Trajektorien. Diesen Satz kann man ebenfalls leicht aus der Zeichnung Fig. 125 ablesen. In dieser sind längs der Einhüllenden

ee fünf Isoklinen 1, 2, 3, 4, 5 gezeichnet, mit dem zugehörigen Richtungsbüschel O . Beginnt man im Berührungspunkt der ermittelten Isokline 3 mit der Einhüllenden eine Trajektorie zu zeichnen, so findet man auf dem Zweig $2'2'$ der

Isokline 2 und auf dem Zweig 44 der Isokline 4 je eine mögliche Fortschreitungsrichtung für die Trajektorie, also Anlaß zur Verzeichnung zweier verschiedener Zweige dieser, also einer Spitze, die sich durch Übergang zu den Isoklinenzweigen 11' bzw. 55 vervollständigt⁵³).

Unter Umständen, d. h. wenn zwischen den Koeffizienten der Gleichung $F = 0$ besondere Bedingungen erfüllt sind, kann der Ort der Spitzen zugleich Einhüllende des durch $F = 0$ definierten Integralkurvensystems sein. Dann werden die Tangenten in den Rückkehrpunkten der Trajektorien die Einhüllende der Isoklinen berühren.

Es ist noch anzumerken, daß die Isoklinen der Schar durch einen und denselben Punkt hindurch gehen können; es kann auch mehrere derartige „Brennpunkte“ geben, die allen Isoklinen gemeinsam sind; sie werden im Falle des Ansatzes (12) gefunden als die Schnitte der beiden Kurven

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(x, y) = 0. \tag{5}$$

In der Umgebung eines solchen Brennpunktes verlaufen die Trajektorien im allgemeinen spiralgig; die Trajektorien eines Geradenbüschels, dessen Strahlen als Isoklinen betrachtet werden können, sind logarithmische Spiralen.

§ 52. Zwei Anwendungen des Isoklinenverfahrens.

1. Zur Anwendung des Vorstehenden auf den Fall einer Spiegelgleichung nach Ansatz (11), § 50, betrachten wir ein einfaches Beispiel einer Wasserbewegung nach E. Massau⁵⁴).

Wir setzen ein rechtwinkliges Gerinnebett von solcher Breite voraus, daß angenähert folgendes gilt:

$$F = l \cdot y; \quad r = y.$$

Ferner möge die Gerinnebreite l linear mit der Gerinnelänge x wachsen

$$l = ax$$

und es werde die Bazinsche Widerstandsgröße $\left(\alpha + \frac{\beta}{r}\right)V^2$ durch die Pronysche αV^2 ersetzt.

Unter Einführung der Abkürzung $\frac{Q^2}{ga^2} = p^5$ erhält man dann aus (11), § 50,

$$\frac{dy}{dx}(x^3 y^3 - p^5 x) = J x^3 y^3 - p^5 g a x + p^5 y. \tag{1}$$

Die hiernach erklärte Isoklinenschar

$$C(x^3 y^3 - p^5 x) = J x^3 y^3 - p^5 g \alpha x + p^5 y \quad (2)$$

hat zu Brennpunkten die Schnitte der beiden Kurven

$$x^3 y^3 - p^5 x = 0 \quad \text{und} \quad J x^3 y^3 - p^5 g \alpha x + p^5 y = 0. \quad (3)$$

Der eine Schnittpunkt ist offenbar der Koordinatenanfangspunkt $x = 0, y = 0$; der andere findet sich am besten als Schnitt der durch $C = \infty$ und $C = J$ bestimmten speziellen Isoklinen, nämlich:

$$x^3 y^3 = p^5 x \quad \text{und} \quad y = (g \alpha - J) x. \quad (4)$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen nach x und y liefert

$$\left. \begin{aligned} x &= p(g \alpha - J)^{-\frac{3}{5}} \\ y &= p(g \alpha - J)^{\frac{3}{5}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Zur weiteren Untersuchung der Isoklinenschar (2) schreiben wir deren Gleichung:

$$x^3 y^3 \frac{J - C}{p^5} = x(g \alpha - C) - y. \quad (6)$$

Diese Kurve läßt sich durch die Transformation:

$$x = m \xi, \quad y = n \eta \quad (7)$$

auf die Form

$$\xi^3 \eta^3 = \xi - \eta \quad (8)$$

bringen, wenn man m und n aus

$$\frac{J - C}{p^5} m^3 n^2 = 1 \quad \text{und} \quad (g \alpha - C) \frac{m}{n} = 1 \quad (9)$$

berechnet. Es findet sich

$$\left. \begin{aligned} m &= p(J - C)^{-\frac{1}{5}} (g \alpha - C)^{-\frac{2}{5}} \\ n &= p(J - C)^{-\frac{1}{5}} (g \alpha - C)^{\frac{3}{5}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Zur Konstruktion zunächst der Kurve (8) ersetzen wir das Produkt $2 \xi \eta$ durch die Größe X^2 , die Differenz $\xi - \eta$ durch Y .

Die Kombination der Vorzeichen, die wir X^2 und Y zu erteilen haben, ergibt sich aus der Fig. 126. Zuerst prüfen wir die Kombination

$$2 \xi \eta = + X^2; \quad \xi - \eta = + Y. \quad (11)$$

Demnach wird (8) transformiert in die Parabel 6. Grades, Fig. 127,

$$X^6 = 8 Y. \quad (12)$$

Da ferner gilt:

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &= X^2 + Y^2 \\ \eta &= \xi - Y, \end{aligned} \right\} (13)$$

so findet sich die Kurve (8) aus (12) durch die Schnitte $C_1 C_1'$ der Kreise vom Radius

$$O A_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

um O mit den Geraden

$$\eta = \xi - Y$$

durch B_1' .

Die Vorzeichenkombination:

$$\left. \begin{aligned} 2 \xi \eta &= X^2 \\ \xi - \eta &= -Y \end{aligned} \right\} (14)$$

liefert die in der Fig. 127 gestrichelt gezeichnete Parabel

$$X^6 = -8 Y, \quad (15)$$

die wieder auf die Kurve $C_1' O C_1'$ führt. Etwas Neues ergibt jedoch die Kombination.

$$\left. \begin{aligned} 2 \xi \eta &= -X^2 \\ \xi - \eta &= -Y \end{aligned} \right\} (16)$$

Allerdings erhalten wir wieder die Parabel (12):

$$X^6 = 8 Y, \quad (12)$$

aber die (13) entsprechenden Ansätze lauten jetzt:

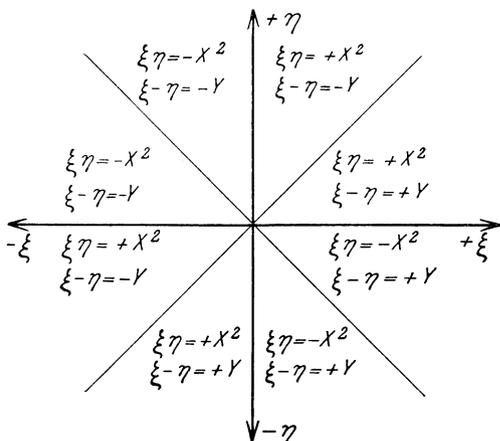


Fig. 126. Vorzeichenkombinationen der Koordinaten der transformierten Spiegelkurve.

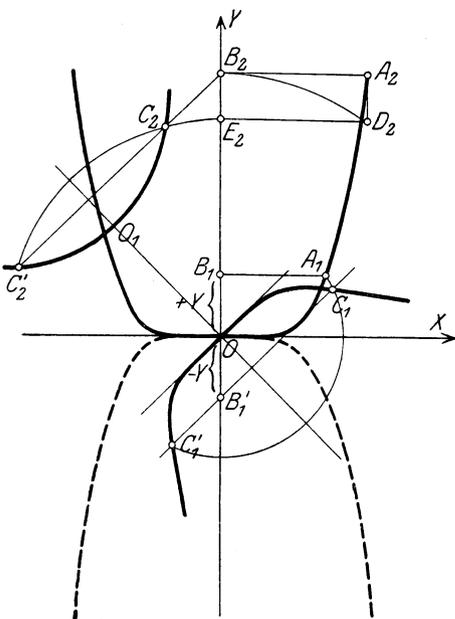


Fig. 127. Die transformierten Spiegelkurven.

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &= Y^2 - X^2 \\ \eta &= \xi + Y. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Demnach ergibt sich zunächst die Verzeichnung des Kreises um O mit dem Radius $OE_2 = \sqrt{Y^2 - X^2}$, der mit den Geraden

$$\eta = \xi + Y$$

durch B_2 zum Schnitt zu bringen ist. Es entsteht so ein hyperbelartiger Kurvenzweig $C_2'O_1C_2$, der auch durch die Kombination

$$2 \xi \eta = -X^2; \quad \xi - \eta = -Y \quad (18)$$

erhalten wird.

Im ganzen besteht also die Kurve

$$\xi^3 \eta^3 = \xi - \eta$$

aus den beiden Zweigen C_1OC_1' und $C_2O_1C_2'$.

Von der so gezeichneten Kurve (8) vollzieht sich der Übergang zu (2) durch die Transformation (7), wobei der auf (8) mit C variable Punkt

$$\xi = \sqrt[5]{\frac{(J-C)(g\alpha-C)^2}{(g\alpha-J)^3}}; \quad \eta = \sqrt[5]{\frac{(J-C)(g\alpha-J)^2}{(g\alpha-C)^3}} \quad (19)$$

im Isoklinensystem in den festen Punkt

$$x = p(g\alpha - J)^{-\frac{2}{5}}; \quad y = p(g\alpha - J)^{\frac{2}{5}} \quad (20)$$

übergeht. Durch letzteren gehen alle Isoklinien (2) hindurch, ebenso wie durch den Anfangspunkt.

Die Transformation (7) bedeutet, daß die Kurve (8) verzerrt werden soll durch Änderung des Abszissen- und Ordinatenmastabes. Die Faktoren dieser MastabAnderungen sind m bzw. n , die nach (10) von C abhängigen. Um diese Abhängigkeit etwas zu prüfen, setzen wir

$$J = 0,05, \quad g\alpha = 0,1$$

und finden für $C = 0$: $\frac{m}{n} = 10$, $\frac{n}{p} = 0,46$; $\frac{m}{p} = 4,6$. Ferner wird

$$\frac{m}{p} = \infty \text{ für } C = J \text{ und } C = g\alpha,$$

$$\frac{n}{p} = \infty \text{ für } C = J.$$

Es ist $\frac{m}{p}$ und $\frac{n}{p}$ positiv für $C < J$ und negativ für $J < C < g\alpha$.

Für $g\alpha < C$ bleibt $\frac{m}{p}$ negativ, $\frac{n}{p}$ wird wieder positiv; für

$C = g\alpha$ wird $\frac{n}{p} = 0$.

$\frac{m}{p}$ hat ein Maximum = - 8,85 für $C = \frac{g\alpha + 2J}{3} = 0,067$,

$\frac{n}{p}$ ein Minimum = + 0,45 für $C = \frac{3J - g\alpha}{2} = 0,025$.

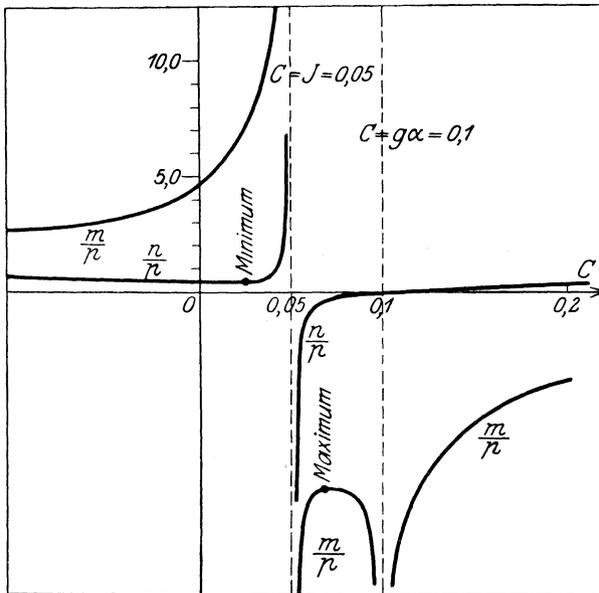


Fig. 128. Die Maßstäbe für den Übergang zu den wirklichen Spiegelkurven.

Für $C = \pm\infty$ nähert sich $\frac{m}{p}$ wie $C^{-\frac{3}{5}}$ der Null; $\frac{n}{p}$ wächst dagegen mit $\pm C$ wie $C^{+\frac{2}{5}}$ ins Unendliche.

Für $C = \pm 0,2$ wird $\frac{m}{p} = - 3,7$, $\frac{n}{p} = + 0,37$. Mit diesen Angaben sind in Fig. 128 die Kurven für $\frac{m}{p}$ und $\frac{n}{p}$ verzeichnet.

d. h. in die hyperbelartige Kurve $C = g\alpha$ der Fig. 129 und die x -Achse.

Wächst J über $g\alpha$ hinaus gegen $+\infty$, so bleibt m negativ, n wird aber positiv, d. h. jetzt fallen die dem Zweig $C_2O_1C_2'$ entsprechenden Isoklinen in den ersten Quadranten der xy und sind daher Individuen unserer Mannigfaltigkeit. Ihre Grenze finden sie in der durch $C = \infty$ erklärten Isokline, d. h. in der Kurve

$$x^3y^3 = p^5x,$$

die wir bereits unter (4) fanden und welche in die hyperbelartige Kurve

$$x^2y^3 = p^5$$

und die y -Achse zerfällt. Sie erfüllen also den in der Figur schraffierten Streifen, ohne durch den Anfangspunkt hindurchzugehen, weil nur der Zweig C_1OC_1' von (8) solche Kurvenzweige der Isoklinen liefern kann, die den Anfangspunkt enthalten.

Für $-\infty < C < 0$ ist wieder der Zweig C_1OC_1' heranzuziehen; er liefert die Isoklinen 8, 9, 10, die sich wieder an die Isokline $C = 0$ anschließen.

In diese Isoklinenschar sind nun die x -möglichen Spiegelgestalten als Trajektorien einzuzichnen, wie in der Figur durch die Kurven S_1 bis S_6 geschehen.

Die Kurven S_1 bis S_3 sind dadurch gekennzeichnet, daß sie im Endlichen auf der Isokline $C = \pm\infty$ vertikale Tangenten aufweisen. Eine derartige Wasserbewegung kann aber nicht stabil sein, weshalb wir sie weiterhin außer acht lassen.

Die Spiegelform S_4' schneidet die Isokline $C = \pm\infty$ erst in unendlich großer Entfernung senkrecht; sie stellt die erste der stabil und gleichförmig möglichen Bewegungsformen S_4' bis S_6 dar. Jede dieser Spiegelformen ist bestimmt durch die willkürliche Festsetzung einer Wassertiefe y_0 an einem Punkte x_0 des Gerinnes, welches im übrigen definiert ist durch die sekundliche Wassermenge Q , das Sohlgefälle J , die Divergenz α der zur Sohle rechtwinkligen Kanalränder und dem Pronyschen Reibungskoeffizienten α .

Die Kurve BCD ist der Ort der Wendepunkte der Spiegelkurven.

Der Brennpunkt P der Isoklinen ist ein Windungspunkt der Trajektorien. Dem können reelle Spiegelgestalten naturgemäß nicht entsprechen, weshalb der Plan der Isoklinen erst

in angemessener Entfernung von P stromabwärts brauchbar wird.

2. Eine weitere Anwendung des Verfahrens der Isoklinen auf die Integration der ballistischen Hauptgleichung haben C. Cranz und R. Rothe gegeben⁵⁵).

Die beiden Differentialgleichungen für die Bewegung eines Geschosses der Masse m unter Einfluß des Gewichtes $P = mg$ und des Luftwiderstandes $W = mc f(v)$ lauten bekanntlich (siehe Fig. 130):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(v \cos \vartheta)}{dt} &= -cf(v) \cos \vartheta, \\ \frac{d(v \sin \vartheta)}{dt} &= -cf(v) \sin \vartheta - g. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

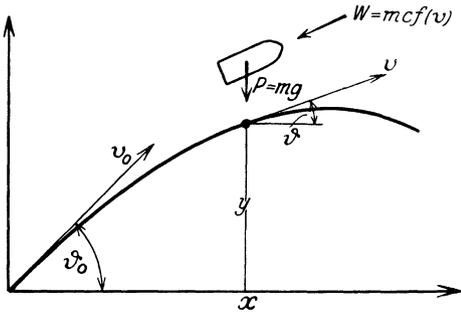


Fig. 130. Zur ballistischen Kurve.

Aus diesen Gleichungen leitet sich durch Elimination von

$$dt = - \frac{d(v \cos \vartheta)}{cf(v) \cos \vartheta}$$

die ballistische Hauptgleichung

$$\frac{d(v \cos \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{c}{g} v f(v) \quad (2)$$

ab. Diese Differentialgleichung erster Ordnung zwischen v und ϑ ist für die Anfangsbedingung

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad v = v_0$$

zu integrieren, wobei der Beiwert c ein fester sei, wodurch sich

$$v = v(\vartheta) \quad (3)$$

finde. Dann wird

$$dt = - \frac{v d\vartheta}{g \cos \vartheta}$$

und die Zeit zum Durchfliegen der Bahn vom Abschuß bis zum Eintritt der Bahnneigung ϑ

$$t = - \frac{1}{g} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{v d\vartheta}{\cos \vartheta}. \quad (4)$$

Mit $dx = v \cos \vartheta dt$ und $dy = v \sin \vartheta dt$ finden sich noch die Bahnkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{1}{g} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} v^2 d\vartheta, \\ y &= -\frac{1}{g} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} v^2 \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Nach Integration der Hauptgleichung (2) sind also alle Bewegungselemente durch Quadraturen zu erhalten.

Zunächst ist auf der linken Seite von (2) die Differentiation auszuführen:

$$\frac{dv}{d\vartheta} = v \operatorname{tg} \vartheta + \frac{c v f(v)}{g \cos \vartheta}. \quad (6)$$

Dann sind, wie von R. Rothe a. a. O. bemerkt wird, für v und ϑ neue Variable u und ζ einzufügen gemäß

$$v = e^u \quad \text{und} \quad \sin \vartheta = \mathfrak{Tg} \zeta; \quad \zeta = \operatorname{lg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Hieraus finden sich die Differentiale

$$\begin{aligned} dv &= e^u du = v du, \\ \cos \vartheta d\vartheta &= \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^2 \zeta} = (1 - \mathfrak{Tg}^2 \zeta) d\zeta \\ &= (1 - \sin^2 \vartheta) d\zeta = \cos^2 \vartheta d\zeta, \\ d\vartheta &= \cos \vartheta d\zeta. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\frac{dv}{d\vartheta} = \frac{v du}{\cos d\zeta} = \frac{v \sin \vartheta}{\cos \vartheta} + \frac{c f(e^u)}{g \cos \vartheta}$$

oder

$$\frac{du}{d\zeta} = \mathfrak{Tg} \zeta + F(u) \quad (7)$$

mit der Abkürzung:

$$F(u) = \frac{c}{g} f(e^u). \quad (8)$$

Es handelt sich also nunmehr um die graphische Integration der Differentialgleichung (7), nachdem die Anfangsbedingung

$$u = u_0, \quad \zeta = \zeta_0$$

gemäß

$$u_0 = \lg v_0, \quad \delta_0 = \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_0}{2} \right)$$

aus $v = v_0$, $\vartheta = \vartheta_0$ berechnet ist.

Der Verlauf der Funktionen $\mathfrak{Tg} \delta$ und $F(u)$, der zur Aufzeichnung der Isoklinen

$$\mathfrak{Tg} \delta + F(u) = C$$

bekannt sein muß, ist aus den Kurven Fig. 131 zu entnehmen.

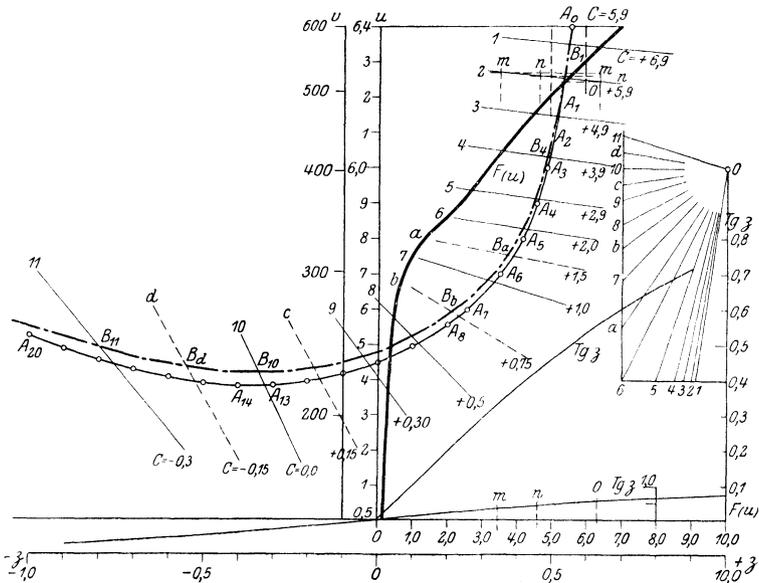


Fig. 131. Zwei Annäherungen an die Lösung der ballistischen Kurve.

Über $\mathfrak{Tg} \delta$ ist zunächst zu sagen, daß es genügt, ϑ zwischen $+ 45^\circ$ und $- 25^\circ$ variieren zu lassen, womit δ zwischen $+ 0,881$ und $- 0,451$ variiert, entsprechend einer Variation von $\mathfrak{Tg} \delta$ zwischen $+ 0,707$ und $- 0,423$.

Die Funktion $F(u) = \frac{c}{g} f(v)$ variere, wenn die Geschwindigkeit v sich zwischen 600 m/sek und 150 m/sek ändert, zwischen 6,93 und 0,134, entsprechend einem Geschuß von 10 kg Gewicht und 50 qcm Querschnitt, wobei in Übereinstimmung mit C. Cranz und R. Rothe (a. a. O.) ein empiri-

ches Luftwiderstandsgesetz auf Grund Kruppischer Schießversuche zugrunde gelegt sei. (Die Größe $F(u)$ gibt das Verhältnis der Geschößverzögerung zur Schwerkraftbeschleunigung; die Verzögerungskräfte überwiegen bei großen Geschwindigkeiten das Geschößgewicht beträchtlich.)

Um nun nicht gezwungen zu sein, die Isoklinen in ihrem ganzen Verlauf zu zeichnen, suchen wir zunächst eine erste rohe Annäherung der Integralkurven mit Hilfe des bereits im § 17 angewendeten Verfahrens.

Wir beginnen im Anfangspunkt A_0 mit $u_0 = 6,4$, $\mathfrak{z}_0 = 0,55$, und finden mit diesen Werten

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta \mathfrak{z}}\right)_{01} = F(u_0) + \mathfrak{T}g \mathfrak{z}_0 = 6,9 + 0,5 = u'_{01} = 7,4.$$

Hiermit bestimmt sich, nach Wahl von $\Delta u_{01} = -0,2$, der Punkt A_1 durch $u_1 = u_0 + \Delta u_{01} = 6,2$ und

$$\Delta \mathfrak{z}_{01} = \frac{\Delta u_{01}}{u'_{01}} = -0,03$$

oder

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_0 + \Delta \mathfrak{z}_{01} = 0,52.$$

Der nächste Integrationsschritt führt zum Punkte A_2 mit

$$\begin{aligned} \Delta u_{12} &= -0,1, \quad u_2 = 6,1, \quad \left(\frac{\Delta u}{\Delta \mathfrak{z}}\right)_{22} = F(u_1) + \mathfrak{T}g \mathfrak{z}_1 = 4,90 + 0,43 \\ &= 5,38 = u'_{12}, \quad \Delta \mathfrak{z}_{12} = \frac{\Delta u_{12}}{u'_{12}} = -0,02, \quad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_1 + \Delta \mathfrak{z}_{12} = 0,50. \end{aligned}$$

In dieser Weise wird fortgefahren, bis die nötige Anzahl Punkte ermittelt ist. Die ganze Rechnung nebst dem Ergebnis ist in der Tabelle auf S. 236 mitgeteilt; die erhaltenen Punkte A sind in der Fig. 131 eingezeichnet.

Beim Punkt A_7 ergibt sich die Notwendigkeit, die Rechnung nach Differenzen von \mathfrak{z} fortschreiten zu lassen, weil beim Fortschreiten nach Differenzen von u die zugehörigen $\Delta \mathfrak{z}$ zu ungenau werden würden (wegen zu kleiner Werte der u').

Auf diese Weise erhält man einen angenäherten Kurvenverlauf und kann nun zur Aufzeichnung der Isoklinen in der Nähe der A -Kurve schreiten.

Die Isoklinen werden erklärt durch den Ansatz

$$C = F(u) + \mathfrak{T}g \mathfrak{z},$$

der z. B. für die Isokline durch den Punkt A_0 mit $u = u_0 = 6,4$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 = 0,55$ liefert $C = C_0 = 7,4$.

Tabelle 3a.

	u	δ	$F(u)$	$\mathfrak{Tg} \delta$	Δu	u'	$\Delta \delta$	$\Delta u'$
0	6,40	0,55	6,90	0,50	-0,2	7,40	-0,03	1,01
1	6,20	0,52	4,90	0,48	-0,1	5,38	-0,02	0,92
2	6,10	0,50	4,00	0,46	-0,1	4,46	-0,02	0,87
3	6,00	0,48	3,15	0,44	-0,1	3,59	-0,03	0,81
4	5,90	0,45	2,36	0,42	-0,1	2,78	-0,04	1,09
5	5,80	0,41	1,30	0,39	-0,1	1,69	-0,06	0,63
6	5,70	0,35	0,72	0,34	-0,1	1,06	-0,09	
7	5,60	0,26						
8	5,555	0,20	0,40	0,20	-0,060	0,60	-0,10	0,13
9	5,495	0,10	0,37	0,10	-0,047	0,47	-0,10	0,13
10	5,448	0,00	0,34	0,00	-0,034	0,34	-0,10	0,12
11	5,414	-0,10	0,32	-0,10	-0,022	0,22	-0,10	0,12
12	5,392	-0,20	0,30	-0,20	-0,010	0,10	-0,10	0,10
13	5,382	-0,30	+0,29	-0,29	0,00	0,00	-0,10	0,09
14	5,382	-0,40	+0,29	-0,38	+0,009	-0,09	-0,10	0,07
15	5,391	-0,50	+0,30	-0,46	+0,016	-0,16	-0,10	0,07
16	5,407	-0,60	+0,31	-0,54	+0,023	-0,23	-0,10	0,04
17	5,430	-0,70	+0,33	-0,60	+0,027	-0,27	-0,10	0,04
18	5,457	-0,80	+0,35	-0,66	+0,031	-0,31	-0,10	0,05
19	5,488	-0,90	+0,36	-0,72	+0,036	-0,36	-0,10	
20	5,524	-1,00						

Da $F(u)$ mit u und $\mathfrak{Tg} \delta$ mit δ gleichändig sind, nimmt C mit abnehmenden u und δ ab.

Es werden nun die C -Werte für 11 Isoklinen festgelegt mit $C_1 = +6,9$ bis $C_{11} = -0,3$, wie sie in Fig. 131 eingeschrieben sind.

Die Konstruktion der Isoklinen geht so vor sich, daß man die Konstanten C_1 bis C_{11} durch u -Achsenparallele im Abstand C wiedergibt und auf einer Anzahl von δ -Achsenparallelen m, n, o diejenigen Punkte bestimmt, deren u -Achsenparallele zwischen der $\mathfrak{Tg} \delta$ -Kurve und der δ -Achse Abschnitte $= C - F(u)$ haben. Diese Punkte gehören der gesuchten Isokline an, wie es in der Fig. 264 bei den Punkten m, n, o gezeigt ist.

Zwischen den Isoklinen

$$C_6 - C_7, \quad C_7 - C_8, \quad C_9 - C_{10}, \quad C_{10} - C_{11}$$

schaltet man noch die gestrichelten Isoklinen

$$C_a = \frac{C_6 + C_7}{2}, \quad C_b = \frac{C_7 + C_8}{2}, \quad C_c = \frac{C_9 + C_{10}}{2}, \quad C_d = \frac{C_{10} + C_{11}}{2}$$

ein, in dem man „linear interpoliert“.

Hat man auf diese Weise sämtliche Isoklinen eingezeichnet, so ist noch das Richtbüschel O zu entwerfen, dessen Strahlen $O_1 - O_{11}$ gegen die Horizontale Winkeltangenten der Beträge C_1 bis C_{11} aufweisen.

Vom Punkte A_0 beginnend zieht man zu den Strahlen des Richtbüschels Parallele, die die zum entsprechenden Tangentenwert gehörige Isokline schneiden und beiderseits dieser bis etwa zur Mitte des Abstandes der beiden benachbarten Isoklinen reichen. Diese Parallelen stellen das Tangentenpolygon einer Näherung der gesuchten ballistischen Kurve vor; die Berührungspunkte werden auf den Parallelen durch die Schnitte B_1 bis B_{11} mit den entsprechenden Isoklinen bestimmt.

Die beiden Näherungen A_0, A_1, \dots, A_{11} und A_0, B_1, \dots, B_{11} weichen voneinander ab; die letztere ist die genauere. Die rechnerische Lösung A verlangte nach Aufzeichnung der Maßstäbe der $F(u)$ - und der $\mathfrak{X}_g \mathfrak{z}(I)$ -Kurve 3 Stunden; die graphische Lösung B , zu der außer den Maßstäben und der $F(u)$ -Kurve die $\mathfrak{X}_g \mathfrak{z}(II)$ -Kurve gebraucht wurden, 4 Stunden; das Zeichnen der Isoklinen ist etwas mühsam; das Tangentenpolygon entsteht aber dann sehr rasch; entsprechend dem größeren Zeitaufwand bietet es die genauere Lösung.

§ 53. Eine Sondergestalt des Isoklinenverfahrens.

Die linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

deren geschlossene Lösung nach § 20 die Auswertung der oft recht unbequemen Integrale des Ansatzes

$$y e^{\int P(x) dx} = C + \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx \quad (2)$$

oder mit

$$e^{\int P(x) dx} = \exp \int P(x) dx \quad (3)$$

$$y \exp \int P(x) dx = C + Q(x) (\exp \int P(x) dx) dx \quad (4)$$

verlangt, gestatten eine besonders einfache Behandlung nach der Methode der Isoklinen.

Wie E. Czuber⁵⁶⁾ bemerkt hat, strahlen alle Linienelemente des Richtungsfeldes (1), die von einer Parallelen zur y -Achse getragen werden, von einem Punkte aus.

Der Beweis hierfür gelingt wie folgt.

Es seien $x|y_1|y_1'$ und $x|y_2|y_2'$ zwei Linienelemente des Richtungsfeldes, mit gleicher Abszisse ihres Trägers; dann gilt:

$$y_1' + Py_1 = Q, \quad (5)$$

$$y_2' + Py_2 = Q, \quad (6)$$

oder nach Subtraktion:

$$y_1' - y_2' + P(y_1 - y_2) = 0. \quad (7)$$

Ist nun $\xi|\eta$ der Punkt, in welchem sich die beiden Linienelemente schneiden, so hat man:

$$\frac{y_1 - \eta}{x - \xi} = y_1', \quad (8)$$

$$\frac{y_2 - \eta}{x - \xi} = y_2', \quad (9)$$

oder nach Subtraktion:

$$\frac{y_1 - y_2}{x - \xi} = y_1' - y_2', \quad (10)$$

aus (7) und (10) folgt aber durch Fortschaffen von $\frac{y_1 - y_2}{y_1' - y_2'}$:

$$\xi = x + \frac{1}{P}. \quad (11)$$

Setzt man (11) in (8) ein, so wird

$$-P(y_1 - \eta) = y_1'$$

und hieraus mit (5):

$$y_1' = -Py_1 + Q = -P(y_1 - \eta)$$

oder

$$\eta = \frac{Q}{P}.$$

Demnach ist die Lage des Punktes $\xi|\eta$ nur von der Abszisse x der Träger der von ihm ausstrahlenden Linienelemente abhängig. Alle Punkte $\xi|\eta$ erfüllen eine Kurve, die sich vermöge

$$\xi = x + \frac{1}{P(x)}, \quad \eta = \frac{Q(x)}{P(x)} \quad (12)$$

leicht zeichnen läßt. An jeden ihrer Punkte schreibt man

zweckmäßig den Abszissenwert der Träger der zugehörigen Linienelemente an und kann dann durch jeden Punkt des Richtungsfeldes die Integralkurve zeichnen, wie in Fig. 132 geschehen.

Hier ist die einfache Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x \quad (13)$$

zugrunde gelegt, woraus sich für die $\xi|\eta$ -Kurve ergibt:

$$\xi = 2y, \quad \eta = x^2,$$

oder nach Ausschaltung von x :

$$\eta = \frac{\xi^2}{4}.$$

Diese Parabel ist in der Figur verzeichnet unter Bezifferung ihrer den Abszissenwerten x entsprechenden Punkte. Von diesen aus ist das Tangentenpolygon der durch $x=0, y=0$ gehenden Integralkurve nach der vorhergehenden Vorschrift durch Ziehen von geraden Linien vermittelt, die sich inmitten der Träger der Linienelemente schneiden. Auf diesen Trägern selbst bestimmt der Polygonzug die Punkte der Integralkurve und berührt diese auch dort. Mit Hilfe der Ansätze (2) und (3) ermittelt sich übrigens noch leicht das allgemeine Integral von (13) zu

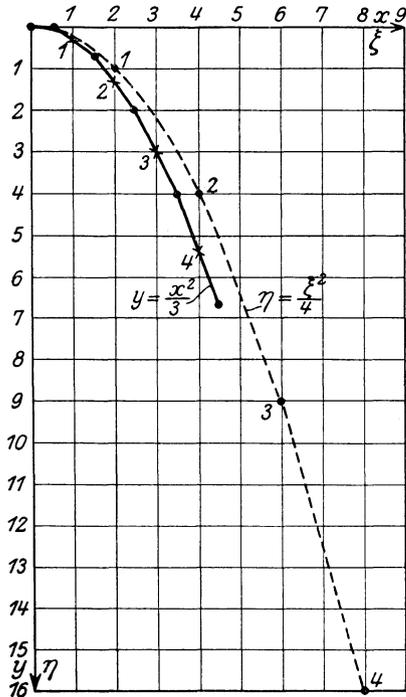


Fig. 132. E. Czubers Behandlung eines Sonderfalles des Isoklinenverfahrens.

bestimmt der Polygonzug die Punkte der Integralkurve und berührt diese auch dort. Mit Hilfe der Ansätze (2) und (3) ermittelt sich übrigens noch leicht das allgemeine Integral von (13) zu

$$xy = C = \frac{x^3}{3},$$

dessen durch $x=0, y=0$ gehende Partikularlösung die Parabel

$$y = \frac{x^2}{3}$$

ist. Diese hat in den Abszissenpunkten 1, 2, 3, 4 die Ordinatenwerte $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 9, \frac{16}{3}$, die sich in den Punkten 1, 2, 3, 4 des Polygonzuges der Fig. 265 wiederfinden.

§ 54. Runges Methode zur angenäherten Integration von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

1. Im § 5 haben wir den Inhalt eines Flächenstückes bzw. den Wert eines bestimmten Integrals als die Summe der Inhalte der Elementarrechtecke angenähert dargestellt.

Wir hatten für den Flächeninhalt (Fig. 133) bzw. für das bestimmte Integral den Ausdruck

$$\int_a^x f(x) dx$$

gefunden, und es war (angenähert)

$$y = \int_a^x f(x) dy = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \delta \cdot f(a + \varrho \delta); \quad n\delta = y - a. \quad (1)$$

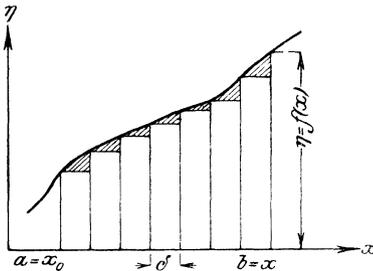


Fig. 133. Summierung einer Funktion.

Wenn man nun bedenkt, daß der Integralbeziehung

$$y = \int_a^x f(x) dx \quad (2)$$

die Differentialbeziehung

$$dy = f(x) dx \quad (3)$$

zugrunde liegt, aus der man die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (4)$$

ableiten kann, so sieht man, daß man in dem Ansatz (1)

$$y = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \delta \cdot f(a + \varrho \delta) \quad (5)$$

eine Vorschrift für die angenäherte Integration der Differentialgleichung (4)

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (6)$$

besitzt.

Wir wollen die Genauigkeit des Verfahrens an dem Beispiel der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \tag{7}$$

prüfen. Da wir das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung

$$y = C - \cos x \tag{8}$$

kennen, wird ein Vergleich möglich sein.

Wir tragen zunächst die Kurve

$$\eta = \frac{dy}{dx} = \sin x \tag{9}$$

graphisch auf (Fig. 134).

Zugleich fertigen wir uns eine kleine, von 10^0 zu 10^0 fortschreitende Tabelle an, wobei wir das Argument x in Bogenlängen des Kreises vom Radius 1 umrechnen.

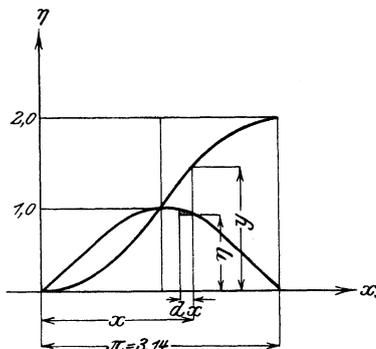


Fig. 134. Darstellung der Funktion $\sin x$ und $\int_0^x \sin x dx$.

Tabelle 4.

1		2		3		4		5		5		7		8	
x				sin x		y		x				sin x		y	
Winkel	Bogen							Winkel	Bogen						
0	0,000	0,000		0		100		100	1,745	0,985		1,259			
10	0,175	0,174		0,030		110		110	1,920	0,940		1,423			
20	0,349	0,342		0,090		120		120	2,094	0,866		1,574			
30	0,524	0,500		0,171		130		130	2,269	0,766		1,708			
40	0,698	0,643		0,295		140		140	2,448	0,643		1,821			
50	0,873	0,766		0,426		150		150	2,618	0,500		1,909			
60	1,047	0,866		0,578		160		160	2,793	0,342		1,969			
70	1,222	0,940		0,740		170		170	2,967	0,174		1,999			
80	1,396	0,985		0,912		180		180	3,142	0,000		1,999			
90	1,571	1,000		1,087											

Wir bestimmen jetzt, daß für $a = x = 0$ $y = 0$ sein soll. Dann wird, da unsere Größe δ , d. h. das Argumentintervall, nach welchem wir fortschreiten, $= 2\pi \frac{10}{360} = 0,175$ ist, für die Integration über die ersten beiden Intervalle:

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=1} \delta \sin \varrho \delta = \delta \sin 0 + \delta \sin \delta$$

$$= 0,174 \times 0,175 = 0,030,$$

und für die Integration über das Intervall $\frac{\pi}{2}$

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=8} \delta \sin \varrho \delta$$

$$= \delta \cdot \sin 0 + \delta \sin \delta + \delta \sin 2\delta + \delta \sin 3\delta + \delta \sin 4\delta + \delta \sin 5\delta$$

$$+ \delta \sin 6\delta + \delta \sin 7\delta + \delta \sin 8\delta. \quad (10)$$

Wir tragen die einzelnen sich für $\varrho = 0$ bis $\varrho = 8$ ergebenden Summen mit $\delta = 0,175$ in der Tabelle ein und gelangen bis zum Wert

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=8} \delta \sin \varrho \delta = 0,912. \quad (12)$$

Wir stellen fest, daß dieses Resultat um $-8,8\%$ falsch ist, denn der genaue Wert des Integrals

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[1 - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (13)$$

ist $= 1$.

Dies Ergebnis ist eine Folge der Tatsache, daß jedes der addierten kleinen Rechtecke etwas kleiner ist als das entsprechende Flächenelement. Aus der nebenstehenden Fig. 135 ist der Sachverhalt klar ersichtlich. Natürlich ist jeder zwischen 0 und 0,912 liegende Wert von y entsprechend fehlerhaft.

Setzen wir die Summation über $x = \frac{\pi}{2}$ hinaus bis $x = \pi$ fort, so findet sich das Resultat

$$y = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=17} \delta \sin \varrho \delta = 1,999. \quad (14)$$

Dieser Wert kommt dem tatsächlichen $y = 2,0$ sehr nahe, was darin begründet ist, daß wir auf dem absteigenden Ast der Sinuskurve größere Rechtecke hinzufügen als die Flächenelementarstreifen sind, so daß die auf dem absteigenden Ast begangenen Fehler nahezu ausgeglichen werden. Die Fig. 135 gibt hiervon ein Bild.

Trotz dieses Mangels hat Euler ein analoges Verfahren für die numerische Integration der allgemeinen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (15)$$

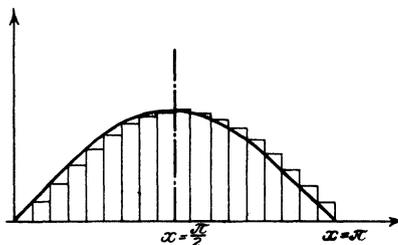


Fig. 135. Fehler der Näherungs-Integration.

angewendet. Er geht von einem Anfangswertepaar $x_0 y_0$, welches den Anfangsbedingungen entsprechend zu wählen ist, aus und

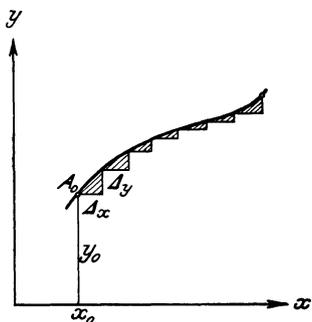


Fig. 136. Eulers näherungsweise Integrationsverfahren.

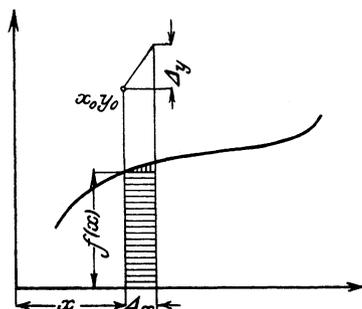


Fig. 137. Abschätzung der Fehler des Eulerschen Verfahrens.

berechnet dann die zu einer kleinen Änderung Δx gehörige Änderung

$$\Delta y = f(x_0, y_0) \Delta x. \quad (16)$$

Dann ist

$$x_1 = x_0 + \Delta x,$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

ein neues Wertepaar. Auf diese Weise erhält man, ins Graphische übertragen, eine Reihe Punkte $A_0 A_1 \dots$, die annähernd auf der durch $x_0 y_0$ gehenden partikulären Integralkurve der Differentialgleichung liegen (Fig. 136).

Die Bedeutung dieses Verfahrens wird sofort klar, wenn wir zunächst $f(x_0, y_0)$ von y unabhängig annehmen. Dann erhalten wir statt (16) die Gleichung

$$\Delta y = f(x_0) \Delta x. \quad (16a)$$

Wir setzen also unter Vernachlässigung des kleinen senkrecht schraffierten Dreiecks (Fig. 137) Δy gleich dem horizontal schraffierten Rechteck, ganz analog wie bei der oben durchgeführten Näherungsintegration

$$y = \int_0^x \sin x \, dx. \quad (17)$$

Aus der hierbei vorgenommenen Abschätzung ergibt sich, daß das Resultat des Verfahrens mit Fehlern behaftet ist, die größenordnungsgleich mit den Werten der Intervalle sind, die man zugrunde legt.

2. Um zu einem genaueren Verfahren zu gelangen, suchen wir zunächst den genauen Wert der Änderung Δy zu ermitteln, der sich ergibt nach Annahme einer Änderung Δx bei der vorgelegten Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (18)$$

Wir denken uns zunächst die Differentialgleichung exakt integriert und die Integralgleichung in der Form geschrieben:

$$y = F(x), \quad (19)$$

was immer möglich ist.

Aus (19) entwickelt man nun die Änderung Δy nach dem Satze von Taylor):

$$\Delta y = F'(x) \Delta x + \frac{F''(x)}{1 \cdot 2} \Delta x^2 + \frac{F'''(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta x^3 + \dots \quad (20)$$

Hier ist aber nach (19) und (18)

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

ferner ist

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{dF'(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f(x, y) \\ &= f_1 + f_2 f, \end{aligned} \quad (21)$$

wenn bedeutet

$$\begin{aligned} f &= f(x, y), \\ f_1 &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \\ f_2 &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \end{aligned}$$

und schließlich wird

$$\begin{aligned} F'''(x) &= \frac{dF''(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(f_1 + f_2 f) \quad (22) \\ &= f_{11} + f_{12} f + f(f_{12} + f_{22} f) + f_2(f_1 + f_2 f) \\ &= f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2 + f_2(f_1 + f_2 f). \end{aligned}$$

Auf die höheren Glieder der Entwicklung verzichten wir. Sonach resultiert für Δy die Entwicklung

$$\begin{aligned} \Delta y &= f \Delta x + (f_1 + f_2 f) \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} \\ &+ \{f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2 + f_2(f_1 + f_2 f)\} \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (23) \end{aligned}$$

Von C. Runge stammt ein Verfahren, welches gestattet, bei gegebenem Δx die Änderung Δy so genau zu berechnen, daß die Abweichungen vom wahren Wert (23) von der Größenordnung $\Delta^4 x$ werden.

Nach diesem Verfahren berechnet man zunächst (nach angenommenen x_0, y_0 und mit gegebenen Δx) folgende vorläufigen Näherungswerte von Δy :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 y &= f \cdot \Delta x, \\ \Delta_2 y &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + f \Delta x) \Delta x, \\ \Delta_3 y &= f\{x_0 + \Delta x, y_0 + f(x_0 + \Delta x, y_0 + f \Delta x) \Delta x\} \Delta x, \end{aligned} \right\} (24)$$

und hieraus als neuen Näherungswert:

$$\Delta y = \frac{\Delta_1 y + \Delta_3 y}{2}. \quad (25)$$

Wir wollen uns jetzt einen Überblick verschaffen, was diese Operation bedeutet. Zu diesem Zwecke nehmen wir f von y unabhängig an und finden

$$\Delta_3 y = f(x_0 + \Delta x) \Delta x \quad (26)$$

und

$$\Delta y = \frac{f(x_0) + f(x_0 + \Delta x)}{2} \Delta x. \quad (27)$$

Zeichnen wir uns hiernach die zu Fig. 137 analoge Fig. 138, so finden wir, daß wir jetzt nur das kleine Kurvensegment A_1A_2 vernachlässigt haben, während nach dem Verfahren (16a) das ganze Dreieck A_1A_2B vernachlässigt worden wäre. Es wird also das Differential Δy als Sehnen trapez ermittelt.

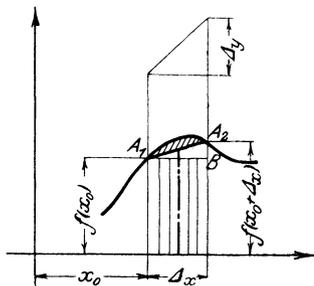


Fig. 138. Sehnen trapez Näherung.

Zur Prüfung der Genauigkeit ziehen wir wieder unsere Tabelle 4 heran, indem wir von je zwei aufeinander folgenden Werten der Kolumne 3 (welche ja die Funktionswerte

$$f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), \dots$$

enthält) das arithmetische Mittel nehmen und in Kolumne 4 eintragen. Kolumne 5 gibt dann die Differenzen

$$\Delta y = \delta \cdot \frac{f(x_0) + f(x_0 + \Delta x)}{2},$$

usw., Kolumne 6 deren Summe, d. h. y , während Kolumne 7 den wirklichen Wert von $y = 1 - \cos x$ auf 5 Dezimalen gibt.

Tabelle 5.

1	2	3	4	5	6	7
x		$f(x)$ = $\sin x$	$\frac{f(x) + f(x + \Delta x)}{2}$ = $f_1(x)$	Δy = $f_1(x) \Delta x$	y = $\sum \Delta y$	$y = 1 - \cos x$
Winkel	Bogen					
0	0	0	0,087	0,015	0	0
10	0,175	0,174	0,258	0,045	0,015	0,01519
20	0,349	0,342	0,421	0,074	0,060	0,06031
30	0,524	0,500	0,572	0,100	0,134	0,13397
40	0,698	0,643	0,705	0,124	0,234	0,23396
50	0,873	0,766	0,816	0,143	0,358	0,35721
60	1,047	0,866	0,903	0,158	0,501	0,50000
70	1,222	0,940	0,963	0,168	0,659	0,65798
80	1,396	0,985	0,993	0,173	0,827	0,82635
90	1,571	1,000			0,000	1,00000

Die Übereinstimmung der Näherungswerte Kolumne 6 und der wirklichen Werte Kolumne 7 ist ausgezeichnet, wenn man die dreistellige Rechnung, die Abrundungen und die Benutzung eines Rechenschiebers von 13 cm Länge betrachtet. Die hierbei gegangenen Ablesungsfehler sind schon so groß als die systematischen Fehler des Verfahrens, denn sie haben (zufällig)

die letzteren beim Wert für $x = \frac{\pi}{2}$ gerade ungefähr ausgeglichen.

Um nun auch den Genauigkeitsgrad der Formel (25) zu untersuchen, welche nach Runge⁵⁷⁾ das Sehnentrapezverfahren auf den allgemeineren Fall überträgt, in welchem f außer von x auch von y abhängt, entwickeln wir die Formeln (24) nach dem Taylorschen Lehrsätze für zwei Variablen und erhalten unter Fortlassung aller höheren Potenzen als Δx^3

$$\begin{aligned} A_1 y &= f \cdot \Delta x \text{ (unverändert),} \\ A_2 y &= [f + (f_1 \Delta x + f_2 A_1 y) \\ &+ \frac{1}{2} \{f_{11} \Delta x^2 + 2 f_{12} \Delta x A_1 y + f_{22} A_1 y^2\}] \Delta x + \dots \\ &= f \Delta x + f_1 \Delta x^2 + f_2 f \Delta x^2 \\ &+ \frac{1}{2} \{f_{11} \Delta x^3 + 2 f_{12} f \cdot \Delta x^3 + f_{22} f^2 \Delta x^3\} \\ &= f \Delta x + (f_1 + f f_2) \Delta x^2 + \frac{1}{2} \{f_{11} + 2 f f_{12} + f^2 f_{22}\} \Delta x^3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A_1 y \\ A_2 y \end{aligned}} \right\} (24a)$$

$$\begin{aligned} A_3 y &= [f + (f_1 \Delta x + f_2 A_2 y) \\ &+ \frac{1}{2} \{f_{11} \Delta x^2 + 2 f_{12} \Delta x A_2 y + f_{22} A_2 y^2\}] \Delta x \\ &= f \Delta x + (f_1 + f f_2) \Delta x^2 \\ &+ \frac{1}{2} \{f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2 + 2 f_2 (f_1 + f f_2)\} \Delta x^3, \end{aligned}$$

und schließlich statt Formel (25)

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{A_1 y + A_3 y}{2} = f \Delta x + (f_1 + f_2 f) \frac{\Delta x^2}{2} \\ &+ \{f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2 + 2 f_2 (f_1 + f_2 f)\} \frac{\Delta x^3}{4}, \end{aligned} \quad (25a)$$

welche mit der genauen Entwicklung (23) in den beiden ersten Gliedern übereinstimmt. Diese Genauigkeit reicht für viele Zwecke aus. Um aber ein genähertes Δy zu finden, welches mit dem wirklichen auch in dem Gliede dritter Ordnung übereinstimmt, verfährt man wie folgt:

Man kann nämlich statt

$$\Delta y = f(y_0) \cdot \Delta y \text{ (Eulersche Näherung)}$$

oder statt

$$\Delta y = \frac{f(x_0) + f(x_0 + \Delta x)}{2} \Delta x \text{ (Sehnentrapeznäherung)}$$

für den elementaren Flächenstreifen auch einführen

$$\Delta y = f(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x) \cdot \Delta x, \quad (28)$$

d. h. das in der Fig. 139 schraffierte Rechteck. Dreht man dessen Seite A_1A_2 um den Punkt P , so geht das Rechteck in ein inhaltsgleiches Trapez über, welches gegebenenfalls ein Tangententrapez wird, wenn nämlich die Gerade durch P die Kurve berührt. Man spricht dann von einem Näherungswert von Δy entsprechend dem Tangententrapez.

Auf zweivariabliges f übertragen gelangt man dann zu dem Ausdruck:

$$\Delta y = f(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x, y_0 + \frac{1}{2} f \Delta x) \Delta x, \quad (29)$$

der, nach Taylor entwickelt, liefert:

$$\Delta y = f \Delta x + (f_1 + f_2 f) \frac{\Delta x^2}{2} + (f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2) \frac{\Delta x^3}{8}. \quad (30)$$

Dieser Näherungswert stimmt mit dem genauen (23) ebenso wie (25a) in den ersten beiden

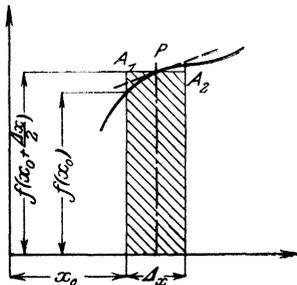


Fig. 139. Tangententrapez-Näherung.

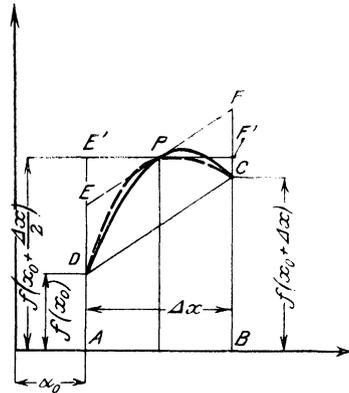


Fig. 140. Simpsonsche Näherung nach C. Runge.

Gliedern überein, im dritten aber nicht. Jedoch kann man durch Kombination von (30) und (25 a) einen neuen Näherungswert Δy herstellen, der auch im dritten Gliede mit (23) übereinstimmt. Dies geschieht durch folgende Betrachtung:

In der Fig. 140 sei der von der gestrichelten Kurve DPC nach oben abgeschlossene Flächenstreifen die anzunähernde Größe Δy . Den durch das Sehnentrapez gegebenen Näherungswert Gleichung (27) $ABCD$ bezeichnen wir mit N_S , den durch das Tangententrapez Gleichung (28) gegebenen $ABF'E'$ bezeichnen wir mit N_T . Nunmehr ersetzen wir das Kurvenstück DPC durch einen durch dieselben Punkte gehenden Parabelbogen derart, daß die Parabeltangente in P der Sehne DC parallel ist und wir setzen das Parabelsegment DPC mit dem

Kurvensegment DPC näherungsweise flächengleich. Da nun das Parallelogramm $DCFE$ mit dem Trapez $DCF'E'$ flächengleich ist und außerdem das Parabelsegment $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms $DCFE$ beträgt, so gilt offenbar

$$\Delta y = N_T + \frac{1}{3}(N_S - N_T) \quad (31)$$

mit einer Genauigkeit, entsprechend der Abweichung des Parabelsegmentes DPC von dem Kurvensegment DPC . Formel (31) ist die bekannte Simpsonsche Regel, welche aus der Sehnentrapez- und der Tangententrapeznäherung einen Ansatz höherer Genauigkeit herleitet.

Führen wir jetzt, indem wir uns nach Runge die Simpsonsche Regel auf das zweivariablige Gebiet übertragen, in (31) ein:

$$N_T = f \cdot \Delta x + (f_1 + f_2 f) \frac{\Delta x^2}{2} + (f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2) \frac{\Delta x^3}{8},$$

$$N_S = f \Delta x + (f_1 + f_2 f) \frac{\Delta x^2}{2}$$

$$+ \{f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2 + 2 f_2 (f_1 + f_2 f)\} \frac{\Delta x^3}{4},$$

so wird

$$\Delta y = f \Delta x + (f_1 + f_2 f) \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2}$$

$$+ \{f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2 + f_2 (f_1 + f_2 f)\} \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad (32)$$

also mit dem genauen Wert (23) auch im Gliede dritter Ordnung noch übereinstimmend.

Es ergibt sich demnach als ein bis auf Größen vierter Ordnung genauer Wert von Δy

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x, y_0 + \frac{1}{2} f \cdot \Delta x) \Delta x \\ &+ \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} (f[x_0 + \Delta x, y_0 + f(x_0 + \Delta x, y_0 + f \Delta x) \Delta x] + f \Delta x) \right. \\ &\quad \left. - f(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x, y_0 + \frac{1}{2} f \Delta x) \Delta x \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

3. Zur Prüfung der Genauigkeit und zur Einübung der praktischen Ausführung des Verfahrens wenden wir dasselbe auf die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} = f(x, y) \quad (34)$$

an. Wir wollen den Verlauf einer Integralkurve durch den Punkt

$$x_0 = 1,0, \quad y_0 = 0,2,$$

von diesem Punkte beginnend, in Richtung der positiven x verfolgen, wobei wir die Schritte $\Delta x = 0,2$ wählen.

Wir berechnen nach (24)

$$\Delta_1 y = f(x_0, x_0) \cdot \Delta x = \frac{2 \cdot 0,2}{1,0} \cdot 0,2 = 0,08,$$

$$\Delta_2 y = f(x_0 + \Delta x, y_0 + f \Delta x) \Delta x = \frac{2 \cdot 0,28}{1,2} \cdot 0,2 = 0,0935,$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 y &= f\{x_0 + \Delta x, y_0 + f(x_0 + \Delta x, y_0 + f \Delta x) \Delta x\} \Delta x \\ &= \frac{2 \cdot 0,2935}{1,2} \cdot 0,2 = 0,098, \end{aligned}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta_1 y + \Delta_3 y}{2} = 0,0890 = N_S.$$

Dies ist der dem Sehnen trapez entsprechende Näherungswert. Dem Tangententrapez entspricht nach (29):

$$\begin{aligned} \Delta y &= f\left(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x, y_0 + \frac{1}{2} f \Delta x\right) \Delta x = \frac{2 \cdot 0,24}{1,1} \cdot 0,2 \\ &= 0,0875 = N_T. \end{aligned}$$

Bilden wir $\frac{1}{3}(N_S - N_T) = 0,0005$, so wird der dem Runge-schen Verfahren entsprechende Näherungswert

$$\Delta y = N_T + \frac{1}{3}(N_S - N_T) = 0,0875 + 0,0005 = 0,088,$$

und das neue Wertpaar wird

$$\underline{x_1 = 1,2, \quad y_1 = 0,288.}$$

Mit diesen Werten rechnen wir in der gleichen Weise von neuem:

$$\Delta_1 y = \frac{2 \cdot 0,288}{1,2} \cdot 0,2 = 0,0965$$

$$\Delta_2 y = \frac{2 \cdot 0,384}{1,4} \cdot 0,2 = 0,110$$

$$\Delta_3 y = 2 \cdot \frac{0,398}{1,4} \cdot 0,2 = 0,1135$$

$$N_S = \frac{1}{2}(\Delta_1 y + \Delta_3 y) = 0,1050$$

$$N_T = 2 \cdot \frac{0,336}{1,3} = 0,1030$$

$$\frac{1}{3}(N_S - N_T) = 0,0007$$

$$\Delta y = 0,1037$$

$$\underline{x_2 = 1,4, \quad y_2 = 0,392}$$

$$A_1 y = \frac{2 \cdot 0,392}{1,4} \cdot 0,2 = 0,112$$

$$A_2 y = \frac{2 \cdot 0,504}{1,6} \cdot 0,2 = 0,126$$

$$A_3 y = \frac{2 \cdot 0,518}{1,6} \cdot 0,2 = 0,129$$

$$N_S = 0,1215$$

$$N_T = 2 \cdot \frac{0,448}{1,5} = 0,1190$$

$$\frac{1}{3}(N_S - N_T) = 0,0008$$

$$\Delta y = 0,1198$$

$$\underline{x_3 = 1,6, \quad y_3 = 0,512}$$

$$A_1 y = \frac{2 \cdot 0,512}{1,6} \cdot 0,2 = 0,128$$

$$A_2 y = \frac{2 \cdot 0,640}{1,8} \cdot 0,2 = 0,142$$

$$A_3 y = \frac{2 \cdot 0,654}{1,8} \cdot 0,2 = 0,145$$

$$N_S = 0,1365$$

$$N_T = \frac{2 \cdot 0,576}{1,7} \cdot 0,2 = 0,1350$$

$$\frac{1}{3}(N_S - N_T) = 0,0005$$

$$\Delta y = 0,1355$$

$$\underline{x_4 = 1,8, \quad y_4 = 0,647}$$

$$A_1 y = \frac{2 \cdot 0,647}{1,8} \cdot 0,2 = 0,145$$

$$A_2 y = \frac{2 \cdot 0,792}{2,0} \cdot 0,2 = 0,158$$

$$A_3 y = \frac{2 \cdot 0,805}{2,0} \cdot 0,2 = 0,161$$

$$N_S = 0,153$$

$$N_T = \frac{2 \cdot 0,719}{1,9} = 0,151$$

$$\frac{1}{3}(N_S + N_T) = 0,0007$$

$$\Delta y = 0,152$$

$$\underline{x_5 = 2,0, \quad y_5 = 0,799}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 y &= \frac{2 \cdot 0,799}{2,0} \cdot 0,2 = 0,159 \\
 A_2 y &= \frac{2 \cdot 0,958}{2,2} \cdot 0,2 = 0,174 \\
 A_3 y &= \frac{2 \cdot 0,973}{2,2} \cdot 0,2 = 0,177 \\
 N_S &= 0,168 \\
 N_T &= \frac{2 \cdot 0,879}{2,1} \cdot 0,2 = 0,167 \\
 \frac{1}{3}(N_S - N_T) &= 0,0003 \quad (\text{vernachlässigt}) \\
 Ay &= 0,167 \\
 \underline{x_6 = 2,2, \quad y_6 = 0,966.}
 \end{aligned}$$

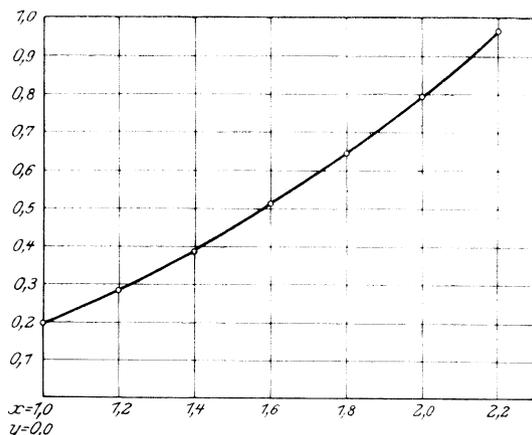


Fig. 141. Ergebnis einer Integration nach Runge's Verfahren.

Wir haben jetzt außer $x_0 y_0$ sechs weitere Punkte der Integralkurve gefunden. Diese lassen sich auch durch direkte Integration finden. Das allgemeine Integral von (34) ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$y = Cx^2. \tag{35}$$

Da für $x = 1,0$ die Ordinate $y = 0,2$ werden soll, so muß für die durch $x_0 = 1,0, y_0 = 0,2$ gehende Integralkurve

$$C = 0,2 \tag{36}$$

sein. Also wird die Gleichung der Integralkurve

$$y = 0,2 x^2. \tag{37}$$

Nach dieser Formel kann man aber für alle Werte $x = 1,2, 1,4, 1,6, 1,8, 2,0, 2,2$ die zugehörigen y -Werte genau berechnen. Tabelle 6 enthält die genauen Werte mit den oben genähert berechneten zusammengestellt.

Tabelle 6. (Hierzu Fig. 141.)

x	y		Differenz $a - b$
	a genau	b genähert	
1,0	0,200	0,200	$\pm 0,000$
1,2	0,288	0,288	$\pm 0,000$
1,4	0,392	0,392	$\pm 0,000$
1,6	0,515	0,512	$+ 0,003$
1,8	0,644	0,647	$- 0,003$
2,0	0,800	0,799	$+ 0,001$
2,2	0,964	0,966	$- 0,002$

Die Genauigkeit ist eine vorzügliche; die Fehler sind positiv und negativ von gleicher Größe. Bei der Näherungsrechnung wurde ein Rechenschieber von 13 cm Länge angewendet.

§ 55. Anwendung der Rungeschen Methode auf die Untersuchung des Bewegungsverlaufes einer Einzylinder-Dampfmaschine.

Es ist bekannt, daß die Drehbewegung der Dampfmaschine auch im Beharrungszustande eine ungleichförmige ist.

Die Winkelgeschwindigkeit der Dampfmaschinenwelle ist periodisch veränderlich, und zwar ist die Periode der Veränderlichkeit die Umdrehungsdauer der Maschine.

Wenn es sich nun darum handelt, den Bewegungsverlauf der Maschine zu untersuchen, so handelt es sich darum, 1. die Veränderlichkeit der Winkelgeschwindigkeit der Welle innerhalb einer Umdrehung der Abhängigkeit vom Kurbelwinkel darzustellen und 2. die Abhängigkeit des Kurbelwinkels von der Zeit zu ermitteln.

Sehen wir vom Vorhandensein eines Regulators ab, so ist die Gestalt der Dampfmaschine durch Angabe des Kurbelwinkels ϑ bestimmt.

In der Fig. 142 ist das Getriebe einer Einzylinder-Maschine gezeichnet. AB ist die Pleuelstange. Im Kreuzkopf A denken wir uns die Gesamtmasse M aller nur hin und her gehenden

Es bleibt jetzt noch übrig, die kinetische Energie der Pleuelstange zu suchen.

Alle Punkte dieser haben verschiedene Geschwindigkeiten v . Wir denken uns die Stange durch zu ihrer Längsachse senkrechte Schnitte in Massenelemente dm zerlegt. Die kinetische Energie eines Elementes ist

$$dL = \frac{1}{2} dm v^2. \quad (4)$$

Das betrachtete Element habe die Entfernung λ vom Kreuzkopf; dann sind seine Koordinaten in bezug auf die linke Totlage k_1 des Kreuzkopfes

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \lambda \cos \beta \\ y_1 &= \lambda \sin \beta. \end{aligned} \quad (5)$$

Hieraus ergibt sich aber

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \\ &\quad - 2\lambda \sin \beta \frac{dx}{dt} \frac{d\beta}{dt}. \end{aligned} \quad (6)$$

Durch Einsetzen von (6) in (4) und Integration findet man

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \int dm - \sin \beta \frac{dx}{dt} \frac{d\beta}{dt} \int \lambda dm \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \int \lambda^2 dm. \end{aligned} \quad (7)$$

In dieser Formel nennen wir

$\int dm = M_1$ die Masse der Pleuelstange,

$\int \lambda dm = \mathfrak{M}_1$ das statische Moment der Pleuelstange bezogen auf den Kreuzkopf,

$\int \lambda^2 dm = \Theta_1$ das Trägheitsmoment der Pleuelstange ebenfalls bezogen auf den Kreuzkopf.

Die kinetische Energie des ganzen Getriebes wird nunmehr

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (M + M_1) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \sin \beta \mathfrak{M}_1 \frac{dx}{dt} \frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{2} \Theta_1 \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \Theta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Führt man noch die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 x &= r(1 - \cos \vartheta) + l(1 - \cos \beta) \\
 \frac{dx}{dt} &= r \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} + l \sin \beta \frac{d\beta}{dt} \quad (9) \\
 l \sin \beta &= r \sin \vartheta \\
 l \cos \beta \frac{d\beta}{dt} &= r \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}
 \end{aligned}$$

ein, so verwandelt sich L in einen Ausdruck folgender Form:

$$L = \frac{1}{2} E(\vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2, \quad (10)$$

wo $E(\vartheta)$ nur den Winkel ϑ als unabhängige Variable und im übrigen als Konstante die Massen und Trägheitsmomente der Systemteile enthält. Wir nennen $E(\vartheta)$ die Getriebefunktion.

Ausführlich geschrieben lautet $E(\vartheta)$

$$\begin{aligned}
 E(\vartheta) &= \Theta + (M + M_1) r^2 \sin^2 \vartheta \left(1 + \frac{r \cos \vartheta}{l \cos \beta} \right)^2 \\
 &\quad - 2 \mathfrak{M}_1 \frac{r^3}{l^2} \sin^2 \vartheta \left(1 + \frac{r \cos \vartheta}{l \cos \beta} \right) \frac{\cos \vartheta}{\cos \beta} \\
 &\quad + \Theta_1 \frac{r^2 \cos^2 \vartheta}{l^2 \cos^2 \beta}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

wo natürlich noch $\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \vartheta$ einzusetzen wäre.

Jetzt wenden wir auf L die oben in Aussicht gestellte Formel der analytischen Mechanik an, indem wir L in Zusammenhang mit den auf das Getriebe der Dampfmaschine wirkenden Kräften bringen. Diese Kräfte finden sich als Resultierende $r(T - W)$ des Tangentialmomentes $r \cdot T$ der Kolbenkraft und des Tangentialmomentes $r \cdot W$ des von der Dampfmaschine zu überwindenden Widerstandes, der als konstant vorausgesetzt wird, während T eine bekannte Funktion von ϑ ist. $r(T - W)$ findet sich leicht, wenn das Indikatordiagramm der Maschine gegeben ist. Es wird dann auch $r(T - W)$ eine bekannte Funktion von ϑ :

$$r(T - W) = F(\vartheta).$$

Der Zusammenhang zwischen L und $r(T - W)$ wird nun gegeben durch die Lagrangesche Differentialgleichung zweiter

Art. Diese ist der Ausdruck für folgenden ganz allgemein gültigen Satz:

Wenn L die kinetische Energie eines Massensystems ist, dessen Gestalt nur von einer Größe ϑ abhängt, und erfolgt die Bewegung des Systems unter Einfluß einer Kraft $r(T - W)$, die ebenfalls eine Funktion von ϑ sein soll, so gilt als Differentialgleichung für die Veränderlichkeit von ϑ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vartheta}{dt}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = F(\vartheta). \quad (12)$$

In unserem Fall war aber

$$L = \frac{1}{2} E(\vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2. \quad (13)$$

Hiermit wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vartheta}{dt}} &= E(\vartheta) \frac{d\vartheta}{dt}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vartheta}{dt}} &= E'(\vartheta) \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + E(\vartheta) \frac{d^2\vartheta}{dt^2}, \\ \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= \frac{1}{2} E'(\vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Formeln (14) in (12) eingesetzt liefern

$$E(\vartheta) \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{1}{2} E'(\vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = F(\vartheta). \quad (15)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung der Dampfmaschine.

Wir untersuchen nunmehr eine Einzylinder-Dampfmaschine mit folgenden Daten⁵⁸⁾:

Kurbelradius $r = 0,3$ m,

Pleuelstange $l = 1,5$ m,

Gewicht aller rotierenden Teile 2780 kg,

Trägheitsmoment aller rotierenden Teile $\Theta = 485$ kgm²,

Gewicht der hin und her gehenden Teile 165 kg,

Masse der hin und her gehenden Teile $M = 17,0$ kg,

Gewicht der Pleuelstange 65 kg,

Masse der Pleuelstange $M_1 = \sim 7$ kg.

Trägheitsmoment der Pleuelstange in bezug auf den Kreuzkopf

$$\Theta_1 = \frac{1}{3} \frac{65}{9,81} \times 2,25 = \sim 5 \text{ kgm}^2.$$

Statisches Moment der Pleuelstange in bezug auf den Kreuzkopf

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2} \frac{65}{9,81} \times 1,5 = \sim 5 \text{ kgm}.$$

Hiermit geht $E(\vartheta)$ über in

$$\begin{aligned} E(\vartheta) &= 485 + 2,15 \sin^2 \vartheta \left(1 + 0,2 \frac{\cos \vartheta}{\cos \beta} \right)^2 \\ &\quad - 0,12 \sin^2 \vartheta \left(1 + 0,2 \frac{\cos \vartheta}{\cos \beta} \right) \frac{\cos \vartheta}{\cos \beta} \\ &\quad + 0,2 \frac{\cos^2 \vartheta}{\cos^2 \beta}. \end{aligned} \quad (16)$$

In diesem Ausdruck können wir die beiden letzten Glieder unbedenklich fortlassen, da ihre Werte gegenüber 485 zu klein sind.

Dagegen behalten wir das zweite Glied bei, ersetzen aber $\left(1 + 0,2 \frac{\cos \vartheta}{\cos \beta} \right)^2$ durch $1 + 0,4 \cos \vartheta$. d. h. wir vernachlässigen $0,04 \left(\frac{\cos \vartheta}{\cos \beta} \right)^2$ gegen 1. Der Fehler beträgt nicht mehr als etwa 0,08 gegenüber 485.

Wir erhalten also für $E(\vartheta)$ endgültig

$$E(\vartheta) = 485 + 2,15 \sin^2 \vartheta (1 + 0,4 \cos \vartheta). \quad (17)$$

Hieraus ergibt sich dann die weitere in Gleichung (15) auftretende Größe

$$\frac{1}{2} E'(\vartheta) = 1,07 \{ \sin 2 \vartheta + 0,4 (\sin 2 \vartheta \cos \vartheta - \sin^3 \vartheta) \}. \quad (18)$$

Die Berechnung dieser beiden Funktionen von ϑ ist für 36 Kurbelstellungen auf 3 Dezimalen in den nachfolgenden Tabellen 7 und 8 wiedergegeben. Die Tabelle setzt sich in leicht erkennbarer Weise über $\vartheta = 180^\circ$ bis $\vartheta = 360^\circ$ fort.

Zur besseren Übersicht gibt Fig. 143 die Funktion $E(\vartheta)$ graphisch wieder:

$\frac{1}{2} E'(\vartheta)$ ist in Fig. 144 graphisch dargestellt.

Tabelle 7.

259

$$E(\vartheta) = 485 \{1 + 0,00445 \sin^2 \vartheta (1 + 0,4 \cos \vartheta)\}.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
ϑ	$\sin \vartheta$	$\sin^2 \vartheta$	$\cos \vartheta$	$0,4 \cos \vartheta$	$(1 + 0,4 \cos \vartheta)$	$\frac{\sin^2 \vartheta \times (1 + 0,4 \cos \vartheta)}{0,4 \cos \vartheta}$	$0,00445 \times [7]$	$E(\vartheta)$
0	0,000	0,000	+1,000	+0,400	+1,400	0,000	0,00000	485
10	0,174	0,030	+0,985	0,394	1,394	+0,042	0,00019	485
20	0,342	0,117	+0,940	0,376	1,376	0,160	0,00071	485
30	0,500	0,259	+0,866	0,346	1,346	0,336	0,00149	486
40	0,643	0,415	+0,766	0,306	1,306	0,540	0,00240	486
50	0,766	0,587	+0,643	0,258	1,258	0,737	0,00328	486
60	0,866	0,750	+0,500	0,200	1,200	0,900	0,00400	487
70	0,940	0,885	+0,342	0,137	1,137	0,005	0,00449	487
80	0,985	0,970	+0,174	+0,070	1,070	1,040	0,00465	487
90	1,000	1,000	0,000	0,000	1,000	1,000	0,00445	487
100	0,985	0,970	-0,174	-0,070	0,930	0,901	0,00401	487
110	0,940	0,885	-0,342	0,137	0,863	0,763	0,00341	487
120	0,866	0,750	-0,500	0,200	0,800	0,600	0,00267	486
130	0,766	0,587	-0,643	0,258	0,742	0,436	0,00193	486
140	0,643	0,415	-0,766	0,306	0,694	0,288	0,00128	486
150	0,500	0,250	-0,866	0,346	0,654	0,164	0,00073	485
160	0,342	0,117	-0,940	0,376	0,624	0,037	0,00032	485
170	0,174	0,030	-0,985	0,394	0,606	0,018	0,00008	485
180	0,000	0,000	-1,000	-0,400	+0,600	0,000	0,00000	485

Tabelle 8.

$$\frac{1}{2} E'(\vartheta) = 1,07 \{ \sin 2 \vartheta + 0,4 (\sin 2 \vartheta \cos \vartheta - \sin^3 \vartheta) \}.$$

1	2	3	4	5	6	7	8
ϑ	$\sin 2 \vartheta$	$\frac{\sin 2 \vartheta}{\cos \vartheta}$	$\sin^3 \vartheta$	$[3 - 4]$	$0,4 \times [3 - 4]$	$[2 + 6]$	$1,07 [7]$
0	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	+0,342	+0,336	+0,005	+0,331	+0,132	+0,474	+0,506
20	0,643	0,605	0,040	+0,565	+0,226	+0,869	+0,927
30	0,866	0,749	0,125	+0,624	+0,250	+1,116	+1,190
40	0,985	0,753	0,267	+0,486	+0,194	+1,179	+1,259
50	0,985	0,633	0,449	+0,184	+0,074	+1,059	+1,130
60	0,866	0,433	0,649	+0,216	+0,086	+0,780	+0,832
70	0,643	0,220	0,831	-0,611	-0,244	+0,399	+0,426
80	0,342	0,059	0,954	-0,895	-0,358	+0,016	+0,017
90	0,000	0,000	1,000	-1,000	-0,400	-0,400	-0,428
100	-0,342	+0,059	0,954	-0,895	-0,358	-0,700	-0,749
110	-0,643	0,220	0,831	-0,611	-0,244	-0,887	-0,946
120	-0,866	0,433	0,649	-0,216	-0,086	-0,952	-1,019
130	-0,985	0,633	0,449	+0,184	+0,074	-0,911	-0,977
140	-0,985	0,753	0,267	+0,486	+0,194	-0,791	-0,843
150	-0,866	0,749	0,125	+0,624	+0,250	-0,616	-0,657
160	-0,643	0,605	0,040	+0,565	+0,226	-0,417	-0,445
170	-0,342	0,330	0,005	+0,331	+0,132	-0,210	-0,224
180	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

17*

Die zur Berechnung des Tangentialkraftmoments $F(\vartheta)$ + $r(T - W)$ erforderlichen Daten gibt Tabelle 9, von der gleichfalls eine graphische Darstellung beigelegt wird (Fig. 145).

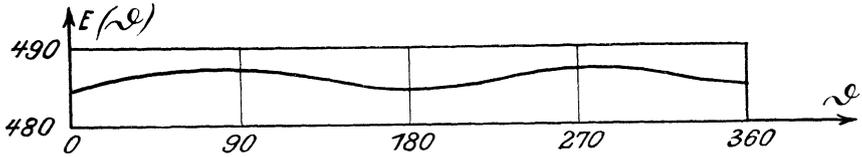


Fig. 143. Die Getriebefunktion $E(\vartheta)$.

Tabelle 9.

Dampf-Tangentialkraft T , Effektive Tangentialkraft $T - W$, Tangentialkraftmoment $F(\vartheta) = r(T - W)$, $W = 1056$ kg, $r = 0,3$ m.

Nr.	ϑ	T	$r(T - W)$	Nr.	ϑ	T	$r(T - W)$
0	0	0	- 316	18	180	0	- 325
1	10	610	- 142	19	190	400	- 205
2	20	1180	+ 29	20	200	800	- 85
3	30	1810	+ 218	21	210	1210	+ 38
4	40	2300	+ 365	22	220	1620	+ 161
Max	48	2600	+ 455	23	230	2040	+ 287
5	50	2530	+ 434	Max	235	2220	+ 341
6	60	2170	+ 326	24	240	2040	+ 287
7	70	1830	+ 224	25	250	1780	+ 209
8	80	1520	+ 131	26	260	1570	+ 146
9	90	1270	+ 56	27	270	1390	+ 92
10	100	1070	- 4	28	280	1220	+ 41
11	110	860	- 67	29	290	1060	- 7
12	120	710	- 112	30	300	900	- 55
13	130	570	- 166	31	310	750	- 100
14	140	440	- 193	32	320	600	- 145
15	150	320	- 229	33	330	460	- 187
16	160	200	- 265	34	340	290	- 248
17	170	100	- 295	35	350	150	- 280
18	180	0	- 325	36	360	0	- 325

Zur Anwendung des Rungeschen Verfahrens auf die Gleichung (15)

$$E(\vartheta) \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{1}{2} E' \left(\frac{d \vartheta}{dt} \right)^2 = F(\vartheta) \quad (19)$$

setzen wir

$$\frac{d \vartheta}{dt} = \omega, \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \frac{d \omega}{dt},$$

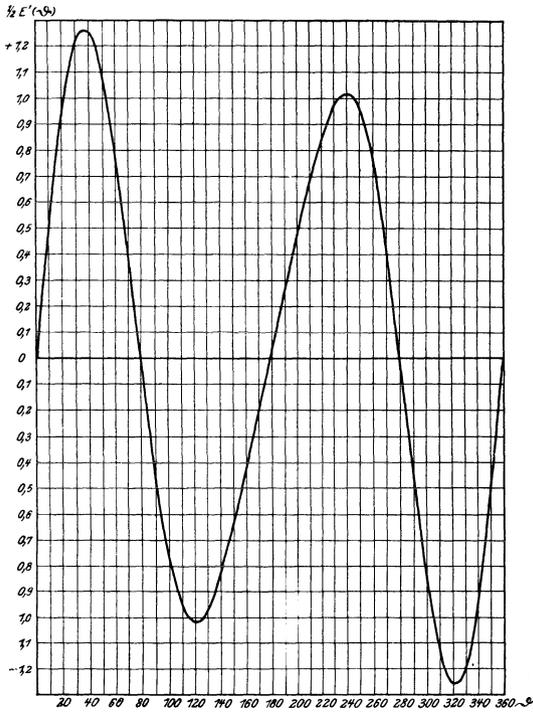


Fig. 144. Der halbe Differentialquotient $\frac{1}{2} E'(\varphi)$ der Getriebefunktion.

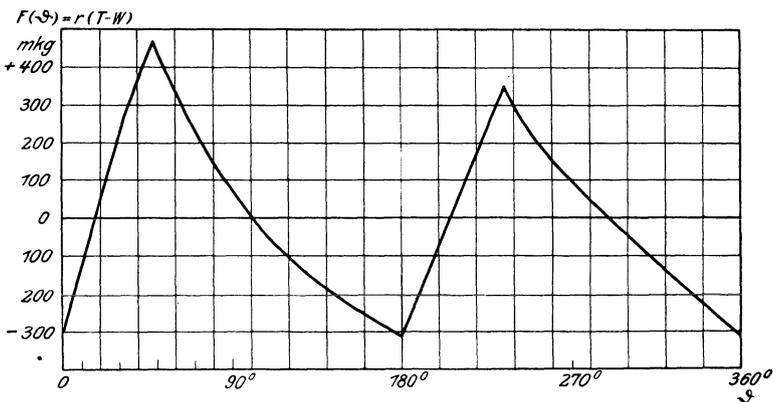


Fig. 145. Tangentialdruckdiagramm der Einzylinderdampfmaschine.

wodurch an Stelle der einen Gleichung (19) die beiden Gleichungen (20) treten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2F(\vartheta) - E'(\vartheta)\omega^2}{2E(\vartheta)}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Hier dividieren wir die erste Gleichung durch die zweite und bilden den reziproken Wert der zweiten, wodurch sich findet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\vartheta} &= \frac{2F(\vartheta) - E'(\vartheta)\omega^2}{2\omega E(\vartheta)}, \\ \frac{dt}{d\vartheta} &= \frac{1}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Wir haben also ein System von zwei simultanen⁵⁹⁾ Differentialgleichungen erster Ordnung, auf die Runge sein Verfahren besonders zugeschnitten hat. Bei Runge lauten die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= g(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Aus diesen Gleichungen werden die Näherungen $\Delta_T y$ und $\Delta_T z$ nach dem Tangententrapez gebildet wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_T y &= f\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, y + \frac{1}{2}f\Delta x, z + \frac{1}{2}g\Delta x\right)\Delta x, \\ \Delta_T z &= g\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, y + \frac{1}{2}f\Delta x, z + \frac{1}{2}g\Delta x\right)\Delta x. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Unsere zur (21) analogen Gleichungen werden einfacher, da $f(\vartheta, \omega, t)$ die Variable t nicht enthält und da in $g(\vartheta, \omega, t)$ sogar ϑ und t fehlen. Wir erhalten also:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_T \omega &= f\left(\vartheta + \frac{1}{2}\Delta\vartheta, \omega + \frac{1}{2}f\Delta\vartheta\right)\Delta\vartheta, \\ \Delta_T t &= \frac{1}{\omega + \frac{1}{2}f\Delta\vartheta}\Delta\vartheta. \end{aligned} \right\} N_T \quad (23)$$

Des weiteren bilden wir die Näherungen $\Delta_S \omega$ und $\Delta_S t$ nach dem Sehnen Trapez durch folgende Wertreihen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 \omega &= f \Delta \vartheta, & \Delta_2 \omega &= f(\vartheta + \Delta \vartheta, \omega + \Delta_1 \omega), \\ \Delta_3 \omega &= f(\vartheta + \Delta \vartheta, \omega + \Delta_2 \omega), \\ \Delta_S \omega &= \frac{\Delta_1 \omega + \Delta_3 \omega}{2}, \\ \Delta_1 t &= \frac{\Delta \vartheta}{\omega}, & \Delta_2 t &= \frac{\Delta \vartheta}{\omega + \Delta_1 \omega}, & \Delta_3 t &= \frac{\Delta \vartheta}{\omega + \Delta_2 \omega} \\ \Delta_S t &= \frac{\Delta_1 t + \Delta_3 t}{2} \end{aligned} \right\} N_S \quad (24)$$

bis auf die dritten Potenzen von $\Delta \vartheta$.

Und schließlich findet man die genauen Näherungen $\Delta_N \omega$ und $\Delta_N t$ durch Kombination der in (23) und (24) ermittelten Werte nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_N \omega &= \Delta_T \omega + \frac{1}{3}(\Delta_S \omega - \Delta_T \omega), \\ \Delta_N t &= \Delta_T t + \frac{1}{3}(\Delta_S t - \Delta_T t). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die praktische Durchführung des Verfahrens macht erst die Aufstellung von Tabellen für

$$F(\vartheta + \frac{1}{2} \Delta \vartheta), \quad E(\vartheta + \frac{1}{2} \Delta \vartheta) \quad \text{und} \quad E'(\vartheta + \frac{1}{2} \Delta \vartheta)$$

erforderlich, die leicht durch Abgreifen aus den Schaubildern für

$$F(\vartheta), \quad E(\vartheta) \quad \text{und} \quad E'(\vartheta)$$

gewonnen werden können.

Zur Rechnung legt man sich eine Tabelle an, die für die ersten 4 Schritte auf S. 264 mitgeteilt ist.

Der einzelne Schritt der Integration ist $10^0 = \Delta \vartheta = \frac{2\pi}{360} = 0,175$ gewählt werden.

Zur Einleitung der Rechnung nimmt man ω nahe der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_m der Maschine, die durch die Konstruktion festgelegt ist.

Hier sei $\omega_m = 6,430$.

Für jeden Rechnungsschritt gelten die Formeln:

Tabelle 10.

ϑ	$\vartheta + \frac{1}{2} \Delta \vartheta$	$2F(\vartheta)$	$2F(\vartheta + \frac{1}{2} \Delta \vartheta)$	$2E(\vartheta)$	$2E(\vartheta + \frac{1}{2} \Delta \vartheta)$	$E' \vartheta$	$E'(\vartheta + \frac{1}{2} \Delta \vartheta)$	ω	ω	Δt
0		- 633		970		0,000			6,4300	
10	5	- 267	- 455	970	970	+ 1,012	- 0,520	- 0,0132	132	0,0271
20	15	+ 75	- 97	971	970	+ 1,854	+ 1,460	- 0,0044	44	0,0272
30	25	+ 453	+ 257	971	971	+ 2,380	+ 2,160	+ 0,0048	48	0,0272
40	35	+ 730	+ 583	972	971	+ 2,518	+ 2,500	+ 0,0135	135	0,0271
									6,4305	

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 \omega &= \frac{2F(\vartheta) - E'(\vartheta) \omega^2}{\omega \cdot 2E(\vartheta)} \Delta \vartheta \\
 A_1 t &= \frac{\Delta \vartheta}{\omega}
 \end{aligned} \right\} \text{Eulersche Näherung.}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta_T \omega &= \frac{2F(\vartheta + \frac{1}{2} \Delta \vartheta) - E'(\vartheta + \frac{1}{2} \Delta \vartheta) (\omega + \frac{1}{2} A_1 \omega)^2}{(\omega + \frac{1}{2} A_1 \omega) \cdot 2E(\vartheta + \frac{1}{2} \Delta \vartheta)} \cdot \Delta \vartheta \\
 \Delta_T t &= \frac{\Delta \vartheta}{\omega + \frac{1}{2} A_1 \omega}
 \end{aligned} \right\} \text{Tangenten-Trapez-Näherung.}$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_2 \omega &= \frac{2F(\vartheta + \Delta \vartheta) - E'(\vartheta + \Delta \vartheta) (\omega + A_1 \omega)^2}{(\omega + A_1 \omega) \cdot 2E(\vartheta + \Delta \vartheta)} \cdot \Delta \vartheta, \\
 A_3 \omega &= \frac{2F(\vartheta + \Delta \vartheta) - E'(\vartheta + \Delta \vartheta) (\omega + A_2 \omega)^2}{(\omega + A_2 \omega) \cdot 2E(\vartheta + \Delta \vartheta)} \cdot \Delta \vartheta, \\
 A_S \omega &= \frac{1}{2} (A_1 \omega + A_3 \omega), \\
 A_2 t &= \frac{\Delta \vartheta}{\omega + A_1 \omega}, \quad A_3 t = \frac{\Delta \vartheta}{\omega + A_2 \omega}, \\
 A_S t &= \frac{1}{2} (A_1 t + A_3 t).
 \end{aligned} \right\} \text{Sehnen-Trapez-Näherung}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta_N \omega &= \Delta_T \omega + \frac{1}{3} (\Delta_S \omega - \Delta_T \omega) \\
 \Delta_N t &= \Delta_T t + \frac{1}{3} (\Delta_S t - \Delta_T t)
 \end{aligned} \right\} \text{Simpsonsche Näherung nach Runge.}$$

Der erste Schritt liefert:

$$\Delta_1 \omega = \frac{-633}{970 \cdot 6,43} \cdot 0,175 = -0,0176,$$

$$\Delta_T \omega = \frac{-455 - 22}{970 \cdot 6,43} \cdot 0,175 = -0,0133,$$

$$\Delta_2 \omega \sim \Delta_3 \omega = \frac{-267 - 42}{970 \cdot 6,43} \cdot 0,175 = -0,0086,$$

$$\Delta_S \omega = -0,0131; \quad \Delta_N \omega = -0,0132.$$

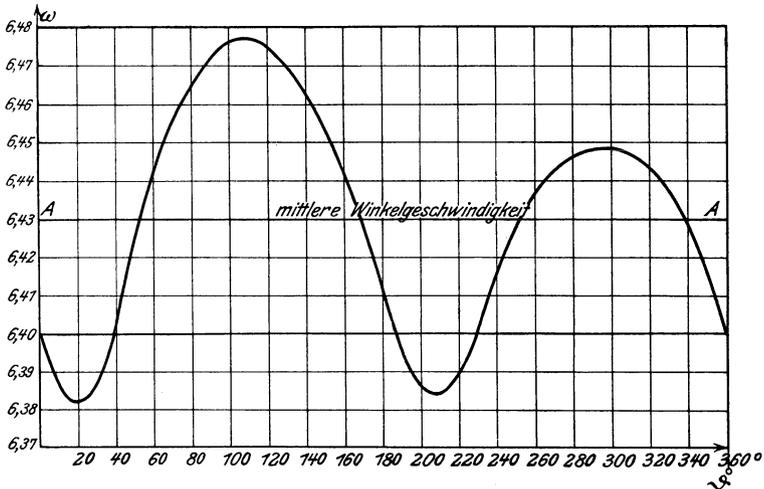


Fig. 146. Winkelgeschwindigkeit der Einzylinderdampfmaschine.

Die für die einzelnen Schritte berechneten $\Delta_N \omega$ und ω sind in der Tabelle 10 eingetragen.

Das Ergebnis der gesamten Integration ist in Fig. 146 graphisch verzeichnet.

Es erübrigt jetzt nur noch, die mittlere Höhe dieser Kurve zu ermitteln und die so gewonnene Linie AA mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit $\omega_m = 6,430$ zusammenfallen zu lassen.

Streng genommen müßte man jetzt die ganze Rechnung mit dem genaueren Wert $\omega_0 = 6,40$ für die Totpunktgeschwindigkeit der Kurbel wiederholen. Bei der Geringfügigkeit der Differenz $\omega_m - \omega_0 = 0,03$ beträgt der Fehler, den wir mit der Beibehaltung der gefundenen Kurven begehen, nur

etwa $\frac{1}{2}$ v. H. Jedenfalls können wir (bis auf diesen Fehler) die größte Winkelgeschwindigkeit der Maschine mit

$$\omega_{\max} = 6,477$$

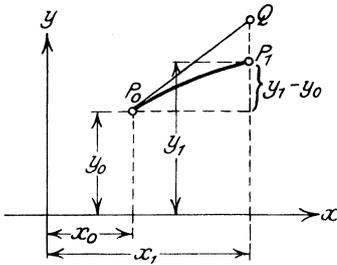
und die kleinste mit

$$\omega_{\min} = 6,382$$

bestimmen.

**§ 56. Numerische Integration von Differentialgleichungen
1. Ordnung nach G. Duffing⁶⁰).**

G. Duffing hat ein Verfahren entwickelt, welches darauf beruht, die Näherungskurven nicht aus Stücken von geraden Linien zusammensetzen, sondern aus Parabeln zweiter und höherer Ordnung, die sich den wahren Kurven besser anschmiegen und an den Zwischenpunkten mit gleicher Neigung ineinander übergehen. Das Verfahren ist hauptsächlich zur rechnerischen Lösung geeignet.



Ist die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x = x_0 \quad y = y_0 \tag{2}$$

vorgelegt, so ergibt sich durch Integration, daß die gesuchte Lösung der Beziehung

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \tag{3}$$

genügen muß.

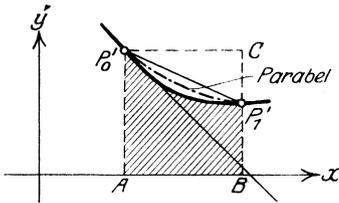


Fig. 147. Zum Duffingschen Verfahren.

Diese Gleichung gestattet in bekannter Weise eine graphische Interpretation (Fig. 147). Hier sei $P'_0 P'_1$ ein Stück der gesuchten Kurve, $P'_0 P'_1$ ihrer ersten Ableitung. Dann ist $y_1 - y_0$ gleich der Fläche $AB P'_1 P'_0$.

Hätte man eine Näherung für das Kurvenstück $P'_0 P'_1$, so ergäbe sich auch eine Näherung für y_1 . Das einfachste ist, y' als konstant, d. h. $P'_0 P'_1$ als zur x -Achse parallel anzunehmen ($P'_0 C$). Durch den Inhalt des Rechtecks $ABCP'_0$ kommt man auf einen Näherungspunkt Q der y -Kurve auf der durch P'_0 gehenden Tangente (Eulersche Näherung S. 243). Eine bessere Näherung ergäbe sich nach der Sehnenrapeznäherung durch

Ersatz der schraffierten Fläche durch das Trapez $ABP_1'P_0'$, wenn nur die Strecke BP_1' bekannt wäre. Duffing benutzt eine noch bessere Näherung, indem er die Kurve $P_0'P_1'$ durch eine Parabel zweiter Ordnung ersetzt, deren Achse parallel der y' -Achse liegt und welche durch P_0' und P_1' geht sowie in P_0' die Tangente mit der zu integrierenden Kurve gemein hat. Da die Neigung der Kurve in P_0' durch

$$\left. \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f_0 \right|_{x=x_0} = f_0' \quad (4)$$

gegeben ist, so lautet die Gleichung der Parabel

$$y' = f_0 + f_0'(x - x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2 [f_1 - f_0 - f_0'(x_1 - x_0)], \quad (5)$$

wo $f_1 = f(x_1, y_1)$ zu setzen ist. Integriert man (5) zwischen den Grenzen x_0 und x_1 , so folgt

$$y_1 - y_0 = \frac{x_1 - x_0}{6} [4f_0 + (x_1 - x_0)f_0' + 2f_1]. \quad (6)$$

In (6) ist y_1 die einzige Unbekannte (links explizit und rechts in f_1) und kann somit daraus bestimmt werden. Die Fortsetzung des Verfahrens liefert eine Näherungslösung der Differentialgleichung (1).

Ist $f(x, y)$ nicht linear in y , so ist auch (6) nicht linear in y_1 . In diesem Falle hat man y_1 nach einem der zur Auflösung höherer Gleichungen dienenden Verfahren zu bestimmen. In diesem Falle wird man mit einem der in § 54 beschriebenen Verfahren schneller zum Ziele kommen. Wir beschränken daher unsere Betrachtungen auf den Fall, daß $f(x, y)$ linear in y ist:

$$f(x, y) = p(x)y + q(x). \quad (7)$$

Setzt man (7) in (6) ein und ordnet, so erhält man

$$y_1 \left[1 - \frac{x_1 - x_0}{3} p_1 \right] = y_0 + \frac{x - x_0}{6} \left\{ 4p_0 y_0 + 4q_0 + 2q_1 + (x_1 - x_0) \right. \\ \left. [(p_0' + p_0^2)y_0 + q_0' + p_0 q_0] \right\} \quad (8)$$

Hierin wurde zur Abkürzung an Stelle von $p(x_0)$ p_0 usw. geschrieben.

Wir wollen nachweisen, daß die Duffingsche Methode äquivalent ist mit einem Näherungsverfahren dritter Ordnung.

Unter der Voraussetzung, daß die bekannten und gesuchten Größen analytisch sind, d. h. sich nach steigenden Potenzen von x in konvergente Reihen entwickeln lassen, gilt, wenn zur Abkürzung

$$x_1 - x_0 = a \quad (9)$$

gesetzt wird,

$$p_1 = p_0 + 3 p_0' a + \frac{q}{2} p_0'' a^2 + \frac{q}{2} p_0''' a^3 + \frac{27}{8} p_0^{IV} a^4 + \dots \quad (10)$$

und

$$q_1 = q_0 + 3 q_0' a + \frac{q}{2} q_0'' a^2 + \frac{q}{2} q_0''' a^3 + \frac{27}{8} q_0^{IV} a^4 + \dots \quad (11)$$

Die Bestimmungsgleichung (6) geht über in

$$y_1(1 - a p_1) = y_0 + (2 p_0 y_0 + 2 q_0 + q_1) a + (p_0' y_0 + p_0^2 y_0 + q_0' + p_0 q_0) \frac{3}{2} a^2 \dots \quad (12)$$

Führt man (11) in (12) ein, so wird

$$y_1(1 - a p_1) = y_0 + (2 p_0 y_0 + 3 q_0) a + (p_0' y_0 + p_0^2 y_0 + 3 q_0' + p_0 q_0) \frac{3}{2} a^2 + \frac{q}{2} q_0'' a^3 + \frac{q}{2} q_0''' a^4 + \dots \quad (13)$$

Ferner ist

$$\frac{1}{1 - a p_1} = 1 + p_1 a + p_1^2 a^2 + p_1^3 a^3 + p_1^4 a^4 + \dots \quad (14)$$

Aus (10) folgt aber durch Potenzieren:

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 &= p_0^2 + 6 p_0 p_0' a + 9 (p_0'^2 + p_0 p_0'') a^2 + \dots \\ p_1^3 &= p_0^3 + 9 p_0^2 p_0' a + \dots \quad p_1^4 = p_0^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Daher ergibt sich aus (10), (14) und (15)

$$\frac{1}{1 - a p_1} = 1 + p_0 a + (3 p_0' + p_0^2) a^2 + \left(\frac{q}{2} p_0'' + 6 p_0 p_0' + p_0^3 \right) a^3 + \left(\frac{q}{2} p_0''' + 9 p_0 p_0'' + 9 p_0'^2 + 9 p_0^2 p_0' + p_0^4 \right) a^4 + \dots \quad (16)$$

Die Entwicklung für y_1 erhält man, wenn man die Reihen (13) und (16) miteinander multipliziert:

$$\left. \begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + 3(p_0 y_0 + q_0)a + \frac{q}{2}(p_0' y_0 + p_0^2 y_0 + p_0 q_0 + q_0') a^2 \\
 &+ \frac{q}{2}(p_0'' y_0 + 3p_0 p_0' y_0 + p_0^3 y_0 + 2p_0' q_0 + p_0^2 q_0 + p_0 q_0' + q_0'') a^3 \\
 &+ \frac{q}{2}(p_0''' y_0 + 2p_0 p_0'' y_0 + 3p_0'^2 y_0 + 6p_0^2 p_0' y_0 + p_0^4 y_0 \\
 &\quad + 3p_0'' q_0 + 10p_0 p_0' q_0 + p_0^3 q_0 + 3p_0' q_0' + p_0^2 q_0' \\
 &\quad + p_0 q_0'' + q_0''') a^4 + \dots
 \end{aligned} \right\} (17)$$

Diesen Ausdruck für y_1 haben wir mit der Reihenentwicklung für den wahren Wert y_1 zu vergleichen. Hierzu bilden wir mit Hilfe von

$$y' = py + q \tag{18}$$

die weiteren Ableitungen nach x .

Es wird

$$\left. \begin{aligned}
 y'' &= py' + p'y + q = p'y + p^2 y + pq + q' \\
 y''' &= p^3 y + 3pp'y + p''y + p^2 q + 2p'q + pq' + q'' \\
 y^{IV} &= p'''y + 2pp''y + 3p'^2 y + 6p^2 p'y + p^4 y + 3p''q \\
 &\quad + 10pp'q + p^3 q + 3p'q' + p^2 q' + pq'' + q'''
 \end{aligned} \right\} (19)$$

Mithin ist

$$y_1 = y_0 + 3y_0' a + \frac{q}{2} y_0'' a^2 + \frac{q}{2} y_0''' a^3 + \frac{27}{8} y_0^{IV} a^4 + \dots, \tag{20}$$

worin man sich für y_0' , y_0'' usw. die Ausdrücke (18) und (19) eingesetzt denken muß. Vergleicht man dann (20) mit (17), so ergibt sich, daß beide Reihen in den vier ersten Gliedern übereinstimmen, während der Koeffizient des fünften Gliedes in (17) nur $\frac{2}{3}$ so groß ist wie in (20). Das beschriebene Verfahren ist daher ein Näherungsverfahren dritter Ordnung.

Wir wollen es an einem einfachen Beispiel erläutern. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{21}$$

soll mit den Anfangsbedingungen

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \tag{22}$$

rechnerisch integriert werden. Das geschlossene Integral von (21) und (22) ergibt:

$$y = e^x \quad \text{oder} \quad x = \ln y. \tag{23}$$

Durch Vergleich mit (7) folgt:

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad f(x, y) = y, \quad (24)$$

folglich ergibt sich aus (8)

$$y_1 \left[1 - \frac{x_1 - x_0}{3} \right] = \left[1 + \frac{2}{3}(x_1 - x_0) + \frac{1}{6}(x_1 - x_0)^2 \right] y_0. \quad (25)$$

Wählt man die Abszissendifferenz gleich $\frac{1}{10}$, so wird

$$y_1 = \frac{641}{580} y_0 = 1,105173 y_0. \quad (26)$$

Da (26) von x unabhängig ist, so wird für einen weiteren Teilschritt um $\frac{1}{10}$

$$y_2 = 1,105173 y_1 = 1,105173^2 y_0.$$

Allgemein wird daher für

$$x = x_0 + \frac{n}{10}, \quad y = 1,105173^n y_0. \quad (27)$$

Für $n = 1$ wird $y_1 = 1,105173$, während der genaue Wert $e^{\frac{1}{10}} = 1,10515\dots$ ist; nach 10 Schritten hat man $y_{10} = 2,71835$, während der wahre Wert $e = 2,71828\dots$ ist.

§ 57. Das Verfahren der schrittweisen Verbesserung bei Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Alle bisher beschriebenen Verfahren geben die gesuchten Integralkurven nur angenähert wieder; in den meisten Fällen ist es sehr schwierig, wenn nicht unmöglich, die Größe des begangenen Fehlers festzustellen. Wenn größere Genauigkeit verlangt wird, wird man daher gut tun, auf die Näherungskurve ein Verfahren anzuwenden, welches es gestattet, schrittweise die Gestalt der Näherungslösung so weit zu verbessern, bis sie innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Zeichnung mit der gesuchten Integralkurve übereinstimmt.

Die Methode der schrittweisen Verbesserung wurde von H. A. Schwarz⁶¹⁾ gefunden, von E. Picard⁶²⁾ auf gewöhnliche Differentialgleichungen übertragen und von C. Runge⁶³⁾ zur Verbesserung von Integralkurven auf zeichnerischem Wege benutzt. Wir wollen sie zunächst auf die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$p' = \varphi(u, p) \quad (1)$$

anwenden.

Zunächst wird ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem x, y dergestalt eingeführt, daß die x -Achse etwa in der mittleren Richtung der Näherungskurve verläuft (Fig. 148). Die Differentialgleichung (1) möge hierdurch in

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2}$$

verwandelt werden; mit $y_0(x)$ werde die gegebene Näherungskurve bezeichnet.

Um eine bessere Annäherung zu finden, konstruiert man die Kurve, welche als Ordinaten zu den Abszissen x die Werte $f(x, y_0(x))$ hat. Sind die Isoklinen der gegebenen Differentialgleichung leicht zu zeichnen, so kann man den Wert $f(x, y_0(x))$ aus der Zeichnung ermitteln. Zu diesem Zweck zieht man durch den Pol O des Strahlenbüschels a, b, c, d, e eine Parallele OP zur x -Achse und legt in der Entfernung 1 von O eine dazu rechtwinklige Gerade QR . Die Abschnitte, welche OP und die Strahlen auf QR abschneiden, geben nach Größe und Richtung die Werte $f(x, y)$ für alle Punkte, welche auf den Strahlen zugeordneten Isoklinen liegen. Ist es zu umständlich, die Isoklinen zu zeichnen, und ist die Differentialgleichung (1) analytisch gegeben, so hat man mit Hilfe der gewöhnlichen Transformationsformeln⁶⁴ die neuen Koordinaten x, y in (1) einzuführen. Man erhält dann eine Differentialgleichung von der Form (2) und kann zu jedem Wertepaar (x, y) den zugehörigen Wert $f(x, y)$ ermitteln.

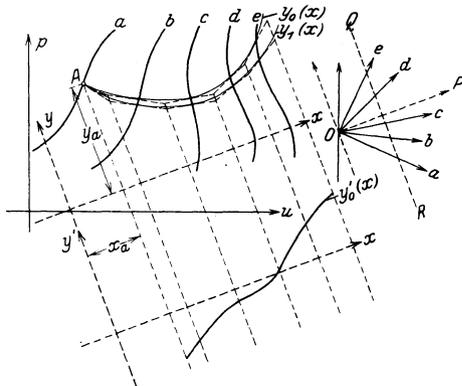


Fig. 148. Das Verfahren der schrittweisen Verbesserung.

Hat man so für genügend viele Werte x die Größe von $f(x, y_0(x))$ aufgetragen, so legt man durch die sich ergebenden Punkte eine möglichst glatte Kurve hindurch. Diese wird nach einem der beschriebenen Verfahren (S. 216 f.) graphisch integriert, wobei man die Integralkurve durch den gegebenen Anfangspunkt A der Näherungskurve legt, dessen Koordinaten

$$x = x_a, \quad y = y_a \quad (3)$$

sein mögen.

Es entsteht so die Kurve

$$y_1(x) = y_a + \int_{x_a}^x f(x, y_0(x)) dx. \quad (4)$$

Wenn diese neue Näherung $y_1(x)$ sich nicht von $y_0(x)$ unterscheidet, so würde dies bedeuten, daß

$$y_1(x) = y_a + \int_{x_a}^x f(x, y_1(x)) dx, \quad (5)$$

oder daß

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = f(x, y_1(x)) \quad (6)$$

wäre; d. h. $y_1(x)$ genügt der gegebenen Differentialgleichung. Da $y_1(x)$ auch die Anfangsbedingungen (3) erfüllt, so wäre es bereits die gesuchte Lösung und daher das Verfahren beendet. Wenn sich aber $y_1(x)$ von $y_0(x)$ unterscheidet, so stellt es, wie E. Picard gezeigt hat, unter ziemlich allgemeinen Bedingungen eine bessere Näherungslösung als $y_0(x)$ dar.

Um eine Lösung zu erhalten, die noch weniger von der gesuchten Lösung abweicht, hat man als Ordinaten zu den Abszissen x die Werte $f(x, y_1(x))$ aufzutragen und diese Kurve so zu integrieren, daß sie durch den gegebenen Anfangspunkt A geht; ihre Gleichung lautet

$$y_2(x) = y_a + \int_{x_a}^x f(x, y_1(x)) dx. \quad (7)$$

In dieser Weise kann man fortfahren, bis sich zwei aufeinanderfolgende Kurven $y_{n-1}(x)$ und $y_n(x)$ nicht mehr unterscheiden. $y_n(x)$ ist dann die gesuchte Integralkurve.

Im Anschluß an Picard wollen wir nun zeigen, daß, wenn das Intervall (x_a, x) nicht zu groß ist, die aufeinanderfolgenden Näherungskurven gegen die wahre Lösung der Differentialgleichung konvergieren. Für die n te Näherungslösung ist

$$y_n(x) = y_a + \int_{x_a}^x f(x, y_{n-1}) dx. \quad (8)$$

Die gesuchte Lösung $y(x)$ genügt der Gleichung

$$y(x) = y_a + \int_{x_a}^x f(x, y) dx. \quad (9)$$

Hieraus folgt

$$y_n(x) - y(x) = \int_{x_a}^x [f(x, y_{n-1}) - f(x, y)] dx$$

oder

$$y_n(x) - y(x) = \int_{x_a}^x \frac{f(x, y_{n-1}) - f(x, y)}{y_{n-1} - y} (y_{n-1} - y) dx. \quad (10)$$

Für die im Integrationsintervall $\{x_0, x\}$ in Betracht kommenden Werte $y_n(x)$, $y(x)$ möge es nun eine obere Schraube M derart geben, daß

$$\left| \frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y} \right| < M \quad (11)$$

gilt.

Bezeichnen wir nun mit c_n den Absolutwert des maximalen Fehlers von $y_n(x)$, mit c_{n-1} den von $y_{n-1}(x)$, so ist gemäß (10)

$$c_n \leq M c_{n-1} |x - x_a| \quad (12)$$

Dehnen wir nun das Integrationsintervall nur so weit aus, daß

$$M |x - x_a| \leq k < 1 \quad (13)$$

bleibt, was immer möglich ist, so wird der maximale Fehler von $y_n(x)$ kleiner als der von $y_{n-1}(x)$ sein. Da dies aber für alle n gilt, so hat man:

$$c_1 \leq k c_0, \quad c_2 \leq k c_1, \dots, \quad c_n \leq k c_{n-1} \quad (14)$$

und es ist daher

$$c_n = k^n c_0. \quad (15)$$

c_0 ist ein fester Wert, die Konstante k kleiner als 1; demnach muß c_n mit wachsendem n kleiner und kleiner werden, d. h. die Näherungskurven bilden eine gegen die wahre Lösung konvergente Folge.

Die Konvergenzbedingung (13) wird im allgemeinen die Länge des Intervalles, über welches integriert werden darf, beschränken. Selbstverständlich gibt (13) nicht die exakte Konvergenzgrenze des Verfahrens, sondern sagt nur aus, daß innerhalb des definierten Intervalles das Verfahren konvergieren muß. Praktisch lohnt es sich nicht, den Wert M und das der Gleichung (13) genügende Intervall zu bestimmen, da die Konstruktion der Näherungskurven von selbst ergibt, wie weit das Verfahren konvergiert. Läßt sich mit genügender Sicher-

heit feststellen, daß aufeinanderfolgende Näherungskurven bis zu einem Punkte P_1 übereinstimmen, so wird man P_1 als neuen Anfangspunkt wählen, eine angemessene neue x -Richtung annehmen und P_1 zum Ausgangspunkt neuer Näherungskurven machen. So kann man in jedem Falle nach und nach für ein beliebig großes Integrationsgebiet die gesuchte Integralkurve bestimmen. Im allgemeinen ist es zweckmäßig, das Intervall, über welches man integriert, nicht zu lang zu wählen, in dem betrachteten Bereich die gesuchte Integralkurve zu bestimmen, sie freihändig ein gewisses Stück zu verlängern, das verlängerte Stück nach dem beschriebenen Verfahren zu verbessern usf.

Legt man die x -Achse, wie oben erwähnt, ungefähr in der mittleren Richtung der Näherungskurven, so wird, wie C. Runge gezeigt hat⁶⁵), die Schranke M möglichst klein und daher das Intervall, über welches integriert werden kann, möglichst groß; gleichzeitig führt das Verfahren möglichst schnell zum Ziel.

VII. Näherungsbehandlung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

§ 58. Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe der Krümmungskreise.

Ist die vorliegende Differentialgleichung in der Gestalt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1)$$

gegeben oder in sie entwickelbar, so kann man die den Anfangsbedingungen

$$x = x_1; \quad y = y_1; \quad \frac{dy}{dx} = y_1' \quad (2)$$

genügende Lösung durch eine Reihe von Kreisbögen angenähert bestimmen, wie zuerst Lord Kelvin bemerkt hat⁶⁶). Bezeichnet man den Winkel, welche die Integralkurve mit der Richtung der positiven x -Achse bildet, mit τ , so daß also $\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg} \tau$ ist, und den Krümmungsradius mit ρ , so wird die Krümmung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{f(x, y, y')}{(1 + \operatorname{tg}^2 \tau)^{3/2}} = \cos^3 \tau \cdot f(x, y, y'). \quad (3)$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung gibt also den

Krümmungsradius als Funktion des Ortes und der zugehörigen Richtung. Den Krümmungsmittelpunkt findet man, indem man vom Punkte (x_1, y_1) aus auf der zu τ senkrechten Richtung ϱ abträgt. Die Quadratwurzel in (3) ist absolut zu nehmen, daher hat ϱ stets dasselbe Vorzeichen wie y'' . Ist demnach y'' positiv, so liegt der Krümmungsmittelpunkt auf derjenigen Seite der Tangente, auf der sich das „Positiv-Unendliche“ der y -Achse befindet; entsprechendes gilt für negatives y'' . Ist die Tangente der y -Achse parallel, so kann man eine Variablen-Vertauschung vornehmen und dann die Entscheidung über das Vorzeichen von ϱ treffen.

Man kann so den zu dem gegebenen Anfangspunkte $P_1(x_1, y_1)$ und der durch $\text{tg } \tau_1 = y_1'$ bestimmten Anfangsrichtung gehörenden Krümmungsmittelpunkt M_1 bestimmen. Siehe Fig. 265. Man schlägt nun mit $P_1 M_1$ als Radius um M_1 als Mittelpunkt einen kleinen Kreisbogen $P_1 P_2$ und zieht $P_2 M_1$. Ändert sich der Krümmungsradius zwischen P_1 und P_2 nicht wesentlich, so kann man P_2 angenähert als Punkt der gesuchten Integralkurve betrachten. Für diesen bestimmt man gemäß (3) durch

$$\varrho_2 = \frac{1}{\cos^3 \tau_2 f(x_2, y_2, y_2')} \quad (3a)$$

den Wert ϱ_2 des Krümmungsradius, indem man y_2' als Richtungstangens des Kreisbogenstücks $P_1 P_2$ in P_2 zeichnerisch oder rechnerisch ermittelt. Durch ϱ_2 wird auf $P_2 M_1$ der neue Krümmungsmittelpunkt M_2 festgelegt. Nunmehr wird um M_2 mit dem Radius ϱ_2 ein neuer kleiner Kreisbogen $P_2 P_3$ geschlagen usw.

Während sich der Krümmungsradius der gesuchten Kurve stetig ändert, ändert er sich für unsere Näherungslösung sprungweise in $P_2, P_3 \dots$. Je kleiner man die Kreisbögen wählt, um so geringer wird die Abweichung der Näherungskurve von der wahren Integralkurve sein, falls die Kreisbögen genau gezeichnet werden. Es ist aber zu beachten, daß man bei den Übergängen von einem Kreisbogen zu dem darauf folgenden unvermeidlich kleine Zeichenfehler begeht. Man darf daher die Kreisbögen auch nicht zu klein wählen, weil sonst durch die Zeichenungenauigkeit andere Fehler entstehen.

Das Verfahren soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden. Es werde verlangt, diejenige Lösung der Differential-

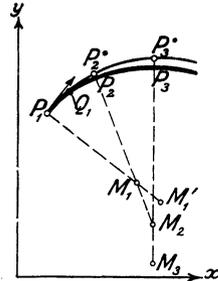


Fig. 149. Näherung durch Krümmungskreise.

gleichung $y'' + 0,5 y' + \sin y = 0$ zu finden, für welche an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ und $y' = 1$ ist. Es ergeben sich die in nachstehender Tabelle wiedergegebenen Werte.

Tabelle 11.

n	x_n	y_n	$\sin y_n$	y_n'	y_n''	ϱ_n
1	0	0	0	1	-0,500	-5,66
2	0,5	+0,43	+0,41	+0,79	-0,805	-2,57
3	1,0	+0,78	+0,69	+0,476	-0,929	-1,453
4	1,5	+0,89	+0,78	+0,10	-0,83	-1,23
5	2,0	+0,83	+0,737	-0,328	-0,573	-1,96
6	2,5	+0,56	+0,53	-0,71	-0,175	-10,55
7	3,0	+0,15	+0,15	-0,80	+0,25	+8,4
8	3,5	-0,22	-0,22	-0,69	+0,565	+3,18
9	4,0	-0,51	-0,48	-0,44	+0,70	+2,02
10	4,5	-0,67	-0,62	-0,166	+0,70	+1,45
11	5,0	-0,67	-0,62	+0,166	+0,54	+1,88
12	5,5	-0,49	-0,47	+0,486	+0,225	+6,05
13	6,0	-0,19	-0,19	+0,60	-0,11	-14,4
14	6,5	+0,10	+0,10	-	-	-

In der Fig. 150 ist die graphische Auftragung der Werte enthalten. Für kleine y ($y \sim \sin y$) muß die gegebene Differentialgleichung angenähert eine Lösung der Periode $2\pi: \sqrt{1 - (0,25)^2} = 6,24$ haben. Mittelst der Krümmungskreisermethode hat sich nach Fig. 150 der Betrag 6,31 für die erste Schwingung ergeben.

Man kann den Grad der Annäherung verbessern, wenn man die Mittelpunkte und Radien der Kreisbögen von den durch (3) gegebenen Werten abweichen läßt⁶⁷). Liegen die Punkte P_1 und P_2 so dicht beieinander, daß sich der Krümmungsradius zwischen P_1 und dem Schnittpunkte P_2^* der Integralkurve mit der Geraden $P_2 M_1$ dauernd wachsend ändert (Fig. 149) und sind die nach (3) errechneten Werte von ϱ für die Punkte P_2 und P_2^* nicht wesentlich voneinander verschieden, so ist offenbar der Kreisbogen $P_1 P_2$ gegenüber dem wahren Kurvenstück $P_1 P_2^*$ mit dem zu kleinen Radius ϱ_1 geschlagen, da ja ϱ zwischen P_1 und P_2^* dauernd wächst. Würde man $\varrho_2 = P_2 M_1$ als Radius wählen, so wäre die Kurve zu schwach gekrümmt. Man wird daher eine bessere Annäherung erhalten, wenn man den Kreisbogen von P_1 aus mit dem arithmetischen Mittelwert von ϱ_1 und ϱ_2 beschreibt*.

Mit der Methode der Krümmungskreise kann man in den meisten Fällen eine ausreichende Genauigkeit erzielen. Das Verfahren führt meistens auch schnell zum Ziel, besonders dann,

wenn y'' nicht von y' abhängt, also eine einfache Funktion des Ortes ist. Ist dies nicht der Fall, so wird man zweckmäßig in einer kleinen Tabelle oder Zeichnung zu jedem Werte $y' = \operatorname{tg} \tau$ den zugehörenden Wert $\frac{1}{\cos^3 \tau}$ bestimmen und ist dann in der Lage, den Wert des Krümmungsradius gemäß (3) mit Hilfe einer Ablesung am Rechenschieber zu ermitteln.

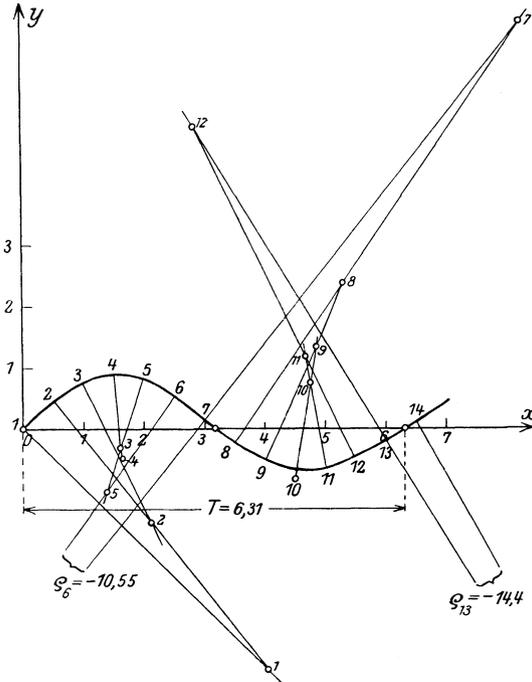


Fig. 150. Anwendung des Krümmungskreisverfahrens:
Schwingungsgleichung.

Zur leichteren Ausführung der Zeichnung bedient man sich eines schmalen Lineals aus Zelluloid, das zuerst von C. V. Boys⁶⁸⁾ angegeben und von R. Rothe⁶⁹⁾ verbessert worden ist. (Siehe Fig. 151.) Es enthält ein feines Loch P an einem Ende für den Schreibstift und eine geteilte Mittellinie, auf der die Werte ρ eingestellt werden. Hierzu wird ein kleiner Dreifuß mit zwei Nadelspitzen auf das Zeichenblatt gestellt, während die dritte auf den Teilpunkt M der Mittellinie gesetzt wird, wobei MP

gleich dem jeweiligen Werte von ρ ist. Bewegt man nunmehr den Schreibstift, so beschreibt er einen Kreisbogen um M als Mittelpunkt. Wenn der Radius verändert werden soll, drückt

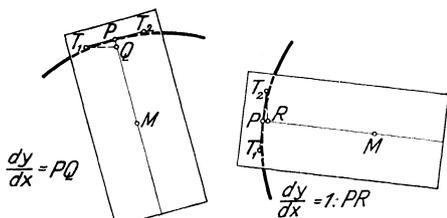


Fig. 151. Lineal nach C. V. Boys und R. Rothe.

man das Lineal fest gegen das Papier und versetzt den Dreifuß entsprechend dem neuen Werte des Krümmungsradius. Mit Hilfe dieser Vorrichtung kann man den Bleistift genau in derselben Richtung weiter leiten, während es bei Benutzung eines ge-

wöhnlichen Zirkels kaum möglich ist, kleine Unebenheiten der Kurve an den Stellen zu vermeiden, wo die Kreisbögen zusammenstoßen.

Um den jeweiligen Wert von y' abzulesen, ist senkrecht zu der geteilten Mittellinie PM eine Gerade in das Lineal eingezeichnet, welche zwei Marken $T_1 T_2$ im Abstände Eins von P trägt. Die durch T_1 hindurchgehende Parallele zur Abszissenachse schneidet nämlich PM in einem Punkte Q derart, daß y' gleich PQ wird. Ist y' zu groß, um in dieser Art abgelesen zu werden, so beobachtet man die durch den anderen Punkt T_2 hindurchgehende Parallele zur y -Achse; sie schneidet PM in einem Punkte R derart, daß y' gleich $1:PR$ wird, wonach y' mit Hilfe des Rechenschiebers ermittelt werden kann. Wenn an einer Stelle der Krümmungsradius der Kurve so groß wird, daß der Mittelpunkt nicht mehr auf das Zeichenpapier fällt, so kann man die Kurve praktisch durch ihre Tangente ersetzen; man hat dann einfach das Lineal in der Richtung PT_2 zu verschieben, wozu es zweckmäßig ist, die eine Kante parallel zu $T_1 P T_2$ zu machen. Die Neigungsänderung erhält man am besten aus der Gleichung $\Delta y' = y'' \cdot \Delta x = f(x, y, y') \cdot \Delta x$, wobei sich x, y, y' auf die Ablesungen im Punkte P_1 , Δx auf den genügend kleinen Abszissenunterschied $P_1 P_2$ beziehen. Die neue Tangentenrichtung hat man etwa in der Mitte zwischen P_1 und P_2 an die alte anzuschließen. In der Nähe eines Wendepunktes ($y'' = 0$) kann man auch y' aus $f(x, y, y') = 0$ bestimmen⁷⁰⁾.

Man wird die Methode der Krümmungskreise besonders dann bevorzugen, wenn der Ausdruck für ρ von einfacherer Gestalt ist als der für y'' . Aus diesem ist es in den meisten

Fällen zweckmäßiger, für große Werte von ρ das nachstehende Verfahren zu verwenden, welches von L. Gumbel herrührt⁷¹⁾.

Es sei der Krümmungsradius ρ sehr groß und man versuche entsprechend dem Verfahren Fig. 152 die gesuchte Integralkurve angenähert aus Kreisbögen zu konstruieren, wobei die Punkte $P_1, P_2, P_3 \dots$ derart auf der Näherungskurve angenommen werden sollen, daß ihre Tangenten ein der Kurve unbeschriebenes gleichseitiges Polygon der Seitenlänge Δs bilden. Die Konstruktion geschieht folgendermaßen: senkrecht zu der gegebenen Anfangsrichtung trägt man in dem gegebenen Anfangspunkte P_1 den Wert des zugehörigen Krümmungsradius bis zum Punkte M_1 ab und beschreibt um M_1 als Mittelpunkt mit $P_1 M_1$ als Radius einen Kreisbogen. Von P_1 aus trägt man auf der gegebenen Anfangsrichtung die Strecke $\frac{\Delta s}{2}$ bis zum Punkte 1 ab

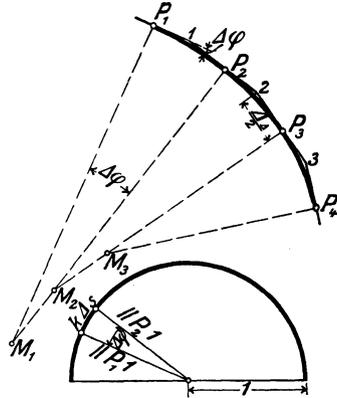


Fig. 152. Krümmungskreisverfahren nach L. Gumbel.

und beschreibt um 1 als Mittelpunkt mit $\frac{\Delta s}{2}$ als Radius einen

Kreis, welcher den um M_1 beschriebenen Kreisbogen in P_2 tragen möge. Dann ist nach einem bekannten Satze der Geometrie $P_2 1$ eine Tangente an den Kreisbogen $P_1 P_2$. Nunmehr verbindet man P_2 mit M_1 und trägt auf dieser Verbindungsgeraden oder ihrer Verlängerung von P_2 aus den diesem Punkte entsprechenden Wert des Krümmungsradius bis M_2 ab. Nunmehr beschreibt man um M_2 als Mittelpunkt mit $P_2 M_2$ als Radius einen Kreisbogen. Auf der Verlängerung von $1 P_2$ trägt man die Strecke $P_2 2$ gleich $\frac{\Delta s}{2}$ ab und beschreibt um den

Punkt 2 als Mittelpunkt mit $\frac{\Delta s}{2}$ als Radius einen Kreis, welcher den Kreisbogen mit dem Mittelpunkt M_2 in P_3 trifft usw.

Bezeichnet man die Winkeländerung der Normalen zweier aufeinander folgender Kurvenpunkte mit $\Delta \varphi$, so ändern sich auch die Richtungen der Tangenten um denselben Winkel $\Delta \varphi$. Ist nun für einen beliebigen Kurvenpunkt z. B. P_1 die Richtung

der Kurve und die Strecke Δs gegeben, so läßt sich, nachdem man den Wert $k = \frac{1}{\rho}$ der Krümmung berechnet hat, der nächste Kurvenpunkt P_2 folgendermaßen bestimmen: man trägt von P_1 aus auf der gegebenen Kurvenrichtung die Strecke $\frac{\Delta s}{2}$ bis zum Punkte 1 ab. Ferner beschreibt man in einem beliebigen Maßstabe einen Kreis vom Radius Eins und zieht vom Mittelpunkt aus den zu P_1 1 parallelen Strahl. Senkrecht zu diesem trägt man von dem Schnittpunkt mit der Peripherie in demselben Maßstab die Strecke $k \cdot \frac{\Delta s}{2}$ ab, beschreibt um den freien Endpunkt einen Kreis mit $k \cdot \frac{\Delta s}{2}$ als Radius, welcher die Peripherie in demjenigen Punkte trifft, dessen Verbindungslinie mit dem Mittelpunkt des Kreises den zu P_2 1 parallelen Strahl liefert. In dieser Richtung hat man von dem Punkte 1 aus die Strecke $\frac{\Delta s}{2}$ aufzutragen, um den Punkt P_2 zu erhalten usw.

Ist der Wert ρ sehr groß, also $k \cdot \Delta s$ genügend klein, so genügt es, die Strecke $k \cdot \Delta s$ als Sehne in den Einheitskreis, den sogenannten Kräftekreis, einzutragen, um aus einer Tangentenrichtung die darauf folgende zu erhalten. Man bestimmt zunächst den Punkt 1 wie oben und trägt in der neuen Tangentenrichtung die Strecke $\frac{\Delta s}{2}$ bis zum Punkte P_2 ab, auf welchen das Verfahren von neuem anzuwenden ist. —

Man kann das Verfahren entsprechend den Betrachtungen S. 276 verbessern, indem man zunächst den Punkt M_1 wie oben bestimmt, den Kreisbogen um M_1 aber nur bis zu einem Punkte 1' beschreibt, der in der Mitte zwischen P_1 und P_2 liegt, für den Punkt 1' den Wert des Krümmungsradius bestimmt und mit diesem Werte ρ den Kreisbogen $P_1 P_2$ beschreibt. Da nun der Punkt 1' vom Punkte 1 nur wenig abweicht, weil der Krümmungsradius der Kurve groß sein soll, so ergibt sich folgende Verbesserung unserer Konstruktion: man trägt vom Punkte P_1 aus in der gegebenen Anfangsrichtung die Strecke $\frac{\Delta s}{2}$ bis zum Punkte 1 ab. Vom Mittelpunkt des Kräftekreises aus zieht man den zu P_1 1 parallelen Strahl. Nunmehr ermittelt man für den Punkt 1 den Wert k und trägt die Strecke $k \cdot \Delta s$ auf dem

Umfang des Kräftekreises ab. Den freien Endpunkt verbindet man mit dem Mittelpunkt des Kreises und legt parallel zu dieser Verbindungslinie eine Gerade durch den Punkt 1, auf welcher man die Strecke Δs bis zum Punkte 2 abträgt. Für den Punkt 2 bestimmt man wiederum den Wert der Krümmung und trägt den zugehörigen Wert $k \cdot \Delta s$ auf der Peripherie des Kräftekreises ab, um die Richtung des zu 23 parallelen Strahles durch die Verbindungsgerade mit dem Mittelpunkt des Kräftekreises zu erhalten usw. Man erhält so ein der gesuchten Kurve umschriebenes gleichseitiges Polygon, mit dessen Hilfe die Näherungskurve leicht zu zeichnen ist.

Eine Aufgabe, auf welche das beschriebene Verfahren mit Vorteil angewandt worden, ist die Bestimmung der elastischen Linie dünner Stäbe bei größerer Durchbiegung, weil in diesem Falle die Krümmung k klein und eine einfache Funktion des Ortes ist. Ist M das Biegemoment, E der Elastizitätsmodul und J das Trägheitsmoment, so ist bekanntlich die Krümmung $k = \frac{M}{E \cdot J}$.

Man beschreibt hier den Kräftekreis zweckmäßig mit dem Radius $E \cdot J$ und trägt auf der Peripherie die Werte $E \cdot J \cdot k \Delta s = M \cdot \Delta s$ im gleichen Maßstabe ab. Ein Beispiel hierfür gibt Fig. 153. Hier wurde die elastische Linie eines schlanken, senkrecht eingespannten Stabes ermittelt, der durch eine vertikale Einzelkraft belastet ist. Da das Biegemoment nur von x abhängt, so kann man die Werte $M \Delta s$ als Ordinaten auftragen und ist so in der Lage, die auf der Peripherie des Kräftekreises abzutragenden Strecken mit dem Zirkel abzuzei-

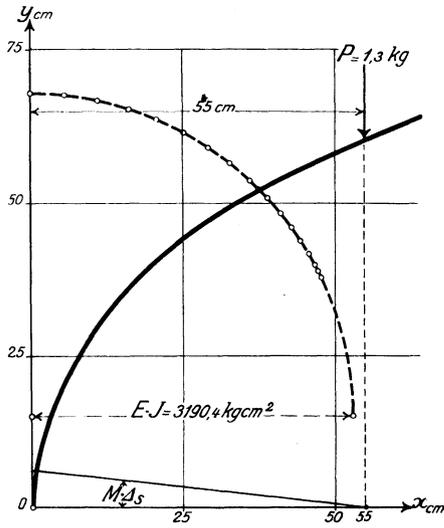


Fig. 153. Anwendung des Krümmungskreisverfahrens: Elastische Linie.

§ 59. Das Krümmungskreis-Verfahren von Meissner.

Die im vorigen Paragraphen entwickelte Methode, die Integralkurve der Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y, y')$$

näherungsweise aus Kreisbogen zusammensetzen, verlangt bei jedem Schritt die Bestimmung des Krümmungsradius

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{f(x, y, y')}.$$

Dieser Ausdruck ist im allgemeinen ziemlich verwickelt und daher die Berechnung von ρ sehr umständlich. Aus diesem Grunde

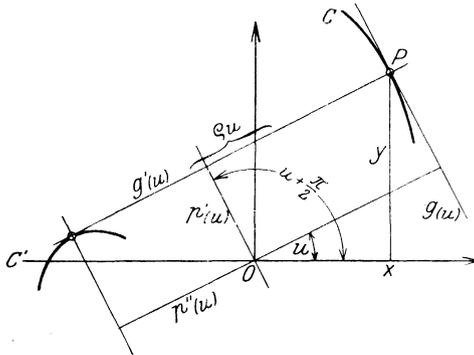


Fig. 154. Zur Definition der Stützkurve nach E. Meissner.

soll im folgenden ein von E. Meissner⁷²⁾ herrührendes Verfahren auseinandergesetzt werden, bei welchem die Methode der Krümmungskreise derart abgeändert ist, daß man bei jedem Schritt nur den Wert von $y'' = f(x, y, y')$ zu berechnen braucht. Das Verfahren ist in dem Sinne allgemein, als es auf Gleichungen beliebig hoher Ordnung anwendbar ist.

Während in dem üblichen Schaubild eine Funktion als Kurve dargestellt wird und zu jedem Werte der unabhängigen Veränderlichen ein bestimmter Punkt gehört, soll diese Abhängigkeit in dem nachstehend beschriebenen Liniendiagramm durch ein Geradenbüschel veranschaulicht werden.

Die unabhängige Veränderliche heiße u und werde als Winkel gedeutet, während die von u abhängige $p(u)$ als Strecke dargestellt werden soll (Fig. 154).

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Abszissen x und den Ordinaten y wird einem jeden Wertepaar $u, p(u)$ diejenige Gerade $g(u)$ zugeordnet, deren Lot mit der positiven Richtung der x -Achse einen Winkel einschließt, dessen Größe gleich u ist, und welche den Abstand $p(u)$ vom Nullpunkt hat. Für eine gegebene Funktion $p(u)$ erhält man eine einfach unendliche Schar solcher Geraden. Sie umhüllen eine Kurve C , welche Meissner das Liniendiagramm der gegebenen Funktion $p(u)$ nennt; wir bezeichnen sie als Stützkurve von $p(u)$. Nun lautet die Gleichung der Geraden $g(u)$, welche in der sogenannten Hesseschen Normalform gegeben ist

$$g(u) \equiv x \cos u + y \sin u - p(u) = 0 \tag{1}$$

Ist P derjenige Punkt, in welchem die Gerade g die Kurve C berührt, so berechnet man die Koordinaten x, y von P , indem man u aus (1) und

$$\frac{dg(u)}{du} \equiv -x \sin u + y \cos u - p'(u) = 0 \tag{2}$$

eliminiert.

(2) ist aber die Gleichung einer Geraden $g'(u)$, welche auf $g(u)$ senkrecht und den Abstand $p'(u)$ vom Nullpunkt hat. Da sie durch P hindurchgehen muß, so ist $g'(u)$ die Normale der Kurve C im Punkte P und es muß $PQ = OQ' = p'(u)$ sein. Die Normalen der Kurve C sind aber die Tangenten an die Evolute C' der Kurve C . Für die Kurve C' spielt $p'(u)$ dieselbe Rolle wie $p(u)$ für die Kurve C . Daher kann wie oben geschlossen werden, daß der Punkt P' , in welchem die Gerade $g'(u)$ die Kurve C' berührt, den Abstand

$$P'Q' = OQ'' = p''(u)$$

von der Geraden OQ' hat.

Aus der Figur ergibt sich nun unmittelbar der Krümmungsradius der Stützkurve C :

$$\rho = PP' = p(u) + p''(u) \tag{3}$$

Er wird in denkbar einfachster Weise durch die Funktion $p(u)$ und ihre zweite Ableitung definiert, darauf beruht im wesentlichen die Brauchbarkeit der nachstehend geschilderten Integrationsmethode.

Statt die Funktion $p(u)$ zu suchen, welche der gegebenen Differentialgleichung

$$p'' = f(u, p, p') \tag{I}$$

genügt, stellt man sich die gleichwertige Aufgabe, ihre Stützkurve C zu ermitteln (Fig. 155).

Es mögen die Anfangsbedingungen

$$u = u_0, \quad p = p_0, \quad p' = p'_0$$

gegeben sein.

Man beginnt die Konstruktion, indem man die Punkte Q_0, P_0, P'_0 so aufträgt, daß der Winkel, den OQ_0 mit der positiven Richtung der x -Achse bildet, gleich $u_0, OQ_0 = p_0$ und $Q_0P_0 = OQ'_0 = p'_0$ wird. Der zum Punkte P_0 gehörige Krümmungsradius ϱ_0 wird nun gemäß (3) berechnet und seine Länge von P_0 aus auf der Geraden $P_0Q'_0$ bis zum Punkte P'_0 abgetragen. P'_0 ist dann der Krümmungsmittelpunkt der Kurve C

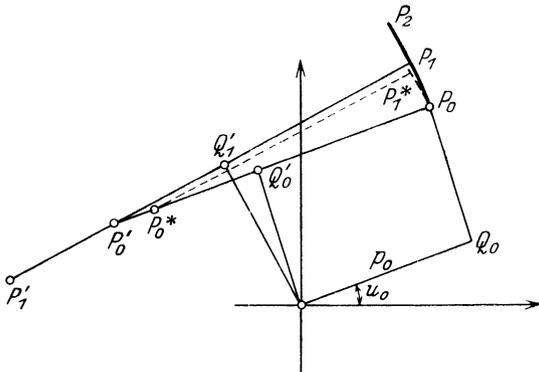


Fig. 155. Verfahren von E. Meissner.

im Punkte P_0 . Um P'_0 als Mittelpunkt schlägt man mit ϱ_0 als Radius den kleinen Kreisbogen P_0P_1 . Macht man den zugehörigen Zentriwinkel $P_0P'_0P_1 = \Delta u$ genügend klein — wobei man Δu zweckmäßig gleich einem Vielfachen von 1° wählt, um den Absolutwert bequem aus Tabellen entnehmen zu können —, so kann man P_1 näherungsweise als Punkt der Kurve C auffassen. Für $u = u_0 + \Delta u$ erhält man dann durch das Lot OQ'_1 von O auf P'_0P_1 die zugehörigen Werte $p = Q'_1P_1$ und $p' = OQ'_1$. Hiernach kann man für P_1 nach Formel (3) den Wert ϱ_1 des Krümmungsradius berechnen und trägt dessen Länge von P_1 aus auf der Geraden $P_1P'_0$ bis zum Punkte P'_1 ab, der den Mittelpunkt des nächsten Kreisbogens P_1P_2 der Kurve bildet usw.

Wenn sich der Krümmungsradius ϱ stark ändert, so kann man, wie auf Seite 276, das Verfahren folgendermaßen verbessern: man bestimmt zunächst, wie oben, die Krümmungs-

radien ϱ_0 und ϱ_1 der Punkte P_0P_1 . Nunmehr trägt man aber auf der Geraden P_0Q_0' von P_0 aus die Strecke $\frac{\varrho_0 + \varrho_1}{2}$ bis zum Punkte $P_0'^*$ ab, und beschreibt um $P_0'^*$ als Mittelpunkt den durch P_0 hindurchgehenden Kreisbogen vom Zentriwinkel Δu . Man erhält so einen Punkt P_1^* , der im allgemeinen eine bessere Näherung als P_1 ist. Sollte P_1^* erheblich von P_1 abweichen, so wird man gemäß (3) den zugehörigen Krümmungsradius ϱ_1^* bestimmen und den Kreis durch P_0 mit dem Radius $\frac{\varrho_0 + \varrho_1^*}{2}$ schlagen. Man erhält so den Punkt P_1^{**} , mit dem die Konstruktion zu wiederholen ist. Wenn aber Δu einigermaßen klein gewählt wird, so wird sich schon P_1^{**} nur sehr wenig von P_1^* unterscheiden.

Das Verfahren versagt, wenn die Krümmungsradien so groß werden, daß die Mittelpunkte P' nicht mehr auf das Zeichenblatt fallen. Es verläuft dann die Kurve so flach, daß man sie durch ein umschriebenes, gleichseitiges Tangentenpolygon ersetzen kann. Ist ϱ_0 , der Krümmungsradius für den Bogen P_0P_1 , sehr groß und Δu der zugehörige Zentriwinkel, so trägt man (siehe Fig. 156) in der gegebenen Tangentenrichtung

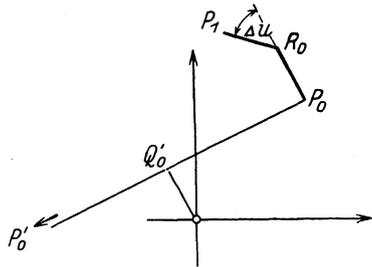


Fig. 156. Fall sehr großer Krümmungsradien.

die Strecke $\varrho \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ vom Punkte P_0 bis zum Punkte R_0 ab und von R_0 dieselbe Strecke unter dem Winkel Δu bis zum Punkte P_1 . P_1 ist dann der gesuchte Endpunkt des Bogens P_0P_1 .

Wie bei dem Verfahren der Krümmungskreise darf man die Winkeldifferenz Δu nicht zu groß und nicht zu klein wählen; nicht zu groß, weil sonst die Zeichnung zu ungenau werden würde, nicht zu klein, weil sich sonst die Fehler mit der wachsenden Zahl der Teilpunkte zu sehr häufen würden. Nach Angaben von Meissner empfiehlt es sich, Δu zwischen 5° und 15° zu wählen. Man wird Δu im Laufe der Zeichnung verkleinern, wenn die Ungenauigkeit zu groß wird, vergrößern, wenn die Genauigkeit es erlaubt. Als Maß hierfür wird man die Größe der Korrektur betrachten, um welche die Punkte P^* von den Punkten P abweichen.

Wenn die mit $\Delta u = 5^0$ erzielte Genauigkeit nicht ausreicht, so transformiert man zweckmäßig die gegebene Differentialgleichung I, indem man

$$t = c u$$

als neue unabhängige Veränderliche einführt:

$$p'' = \frac{1}{c^2} f\left(\frac{t}{c} \cdot p, c p'\right). \quad (\text{II})$$

Hierin ist c eine genügend große, zweckmäßig ganze Zahl. Einer Winkeldifferenz Δu entspricht die c mal so große Winkeländerung $\Delta t = c \Delta u$.

Das Stützkurvendiagramm hat ein von der gewöhnlichen Darstellung so abweichendes Aussehen, daß es sich empfiehlt, nachträglich die Umwandlung in rechtwinklige Koordinaten vorzunehmen.

Wir wollen nunmehr das Verfahren an einem Beispiel praktisch erläutern; es soll die Differentialgleichung

$$p'' + \frac{1}{4} p' + 1 \frac{1}{64} p - 15 = 0 \quad (4)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u = 0, \quad p = 0, \quad p' = 0 \quad (5)$$

graphisch integriert werden.

Man kann das Ergebnis durch Rechnung kontrollieren. Setzt man

$$p = 15 \cdot \frac{64}{65} + q, \quad (6)$$

so genügt q der Differentialgleichung

$$q'' + \frac{1}{4} q' + 1 \frac{1}{64} q = 0 \quad (7)$$

Der Ansatz $q = C e^{r u}$, $q' = C r e^{r u}$, $q'' = C r^2 e^{r u}$ liefert für r die quadratische Gleichung

$$r^2 + \frac{1}{4} r + \frac{65}{64} = 0 \quad (8)$$

deren Wurzeln $r_{1,2} = -\frac{1}{8} \pm i \sqrt{\frac{65}{64} - \frac{1}{64}} = -\frac{1}{8} \pm i$ sind. Folglich sind $q_{1,2} = C e^{(-\frac{1}{8} \pm i) u}$ partikuläre Integrale der Differentialgleichung (7). Da nun $e^{i u} = \cos u + i \sin u$ ist (Eulersche Formel), so sind auch $q_1 = C e^{-\frac{1}{8} u} \cos u$ und $q_2 = C e^{-\frac{1}{8} u} \sin u$ partikuläre Integrale von (7) und daher kann das allgemeine Integral in der Form

$$q = C e^{-\frac{1}{8} u} \cos(u + \beta),$$

geschrieben werden. Mithin wird gemäß (6)

$$p = 14 \frac{10}{13} + C e^{-\frac{1}{8}u} \cos(u + \beta) \quad (9)$$

das allgemeine Integral von (4), wobei sich die Integrations-

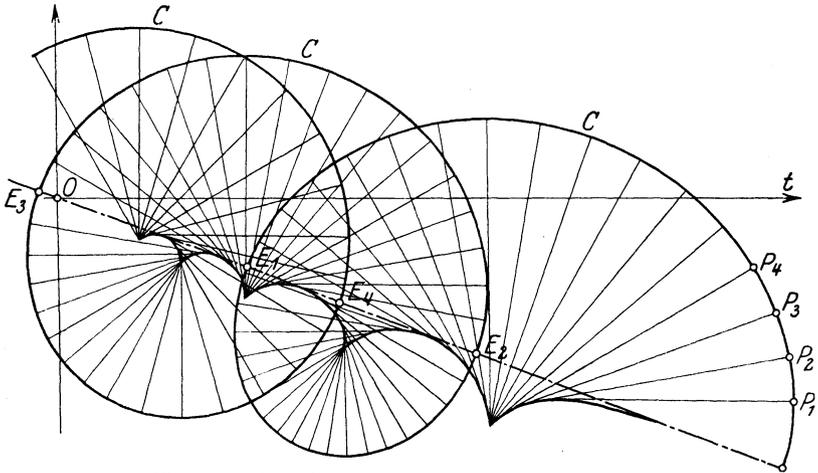


Fig. 157. Stützkurvenschaubild nach E. Meissner.

konstanten C und β aus den Anfangsbedingungen (5) bestimmen lassen. Aus (9) folgt durch Differentiation

$$p' = -C e^{-\frac{1}{8}u} (\sin(u + \beta) + \frac{1}{8} \cos(u + \beta)), \quad (10)$$

mithin ist für $u = 0$

$$60 = 14 \frac{10}{13} + C \cos \beta$$

und

$$0 = \sin \beta + \frac{1}{8} \cos \beta$$

oder $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{8}$.

Hiernach ergibt sich

$$\beta = -7^\circ 7' 30''$$

und $C = 45,583$. (11)

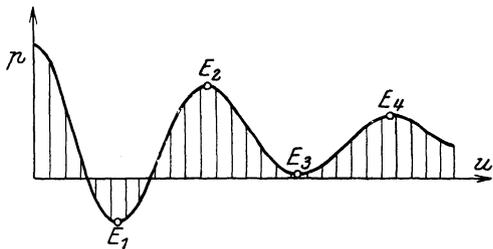


Fig. 158. Zeitwegschaubild zu Fig. 157.

Nun geht aber e^{-x} für $x = +\infty$ gegen Null. Folglich nähert sich nach (9) p für große positive Werte von u immer mehr dem Werte $14 \frac{10}{13}$. Das Stützkurvenschaubild von p besteht daher (siehe Fig. 157) aus Schleifen, die sich immer mehr dem Kreise vom Radius $14 \frac{10}{13}$ nähern, welcher 0 zum Mittelpunkt hat. Mit Hilfe der sich ergebenden Werte $p(u)$ wurde dann

das gewöhnliche Punktdiagramm gezeichnet, indem zu den Abszissen u die zugehörigen Werte p als Ordinaten aufgetragen wurden (Fig. 158).

Für diejenigen Werte $u_1, u_2, u_3 \dots$ von u , für welche $p(u)$ den größten oder kleinsten Wert annimmt, muß $p'(u)$ verschwinden. Aus (10) folgt, daß für dieselben

$$\operatorname{tg}(\beta + u_n) = -\frac{1}{8}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sein muß. Da nun $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{8}$ ist, so ist

$$u_1 = \pi + \beta, \quad u_2 = 2\pi + \beta, \quad u_3 = 3\pi + \beta \dots,$$

d. h. die Evolute der Stützkurve C hat eine gemeinsame Tangente, welche unter dem Winkel $\pi + \beta$ gegen die positive Abszissenrichtung durch den Ursprung geht (Fig. 157; vgl. auch Fig. 154). Auf dieser Tangente liegen auch die den Abszissen u_1, u_2, u_3, \dots entsprechenden Punkte E_1, E_2, E_3, \dots der Stützkurve C , deren Entfernung vom Nullpunkt die größten bzw. kleinsten Werte $p(u_1), p(u_2) \dots$ sind.

Daß die Bogen der Evolute eine gemeinsame Tangente haben, beruht im wesentlichen darauf, daß die Lösung (9) der Differentialgleichung (4) die Nullstellendifferenz 2π hat.

§ 60. Das Verfahren der Seilkurve.

1. Wir betrachten zunächst noch einmal die im § 25 entwickelte Methode, die elastische Linie eines belasteten, vollkommen biegsamen Seiles zu bestimmen (Fig. 159).

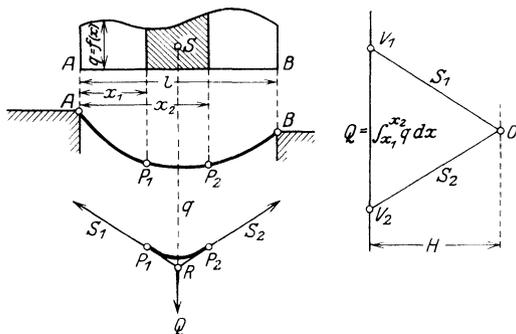


Fig. 159. Seilkurve mit stetiger Belastung.

Die über die Spannweite l verteilte Last $q = f(x)$ sei als Funktion der Entfernung x vom linken Auflager gegeben. Aus dem Seil wird nun ein Stück P_1P_2 herausgeschnitten. Damit

Gleichgewicht besteht, müssen wir in P_1 und P_2 Spannkraften S_1 und S_2 anbringen, welche in Richtung der Tangenten an die Seilkurve wirken. Diese beiden Kräfte müssen der von der

Belastung herrührenden Kraft $Q = \int_{x_1}^{x_3} q(x) dx$ das Gleichgewicht

halten. Da nun drei Kräfte nur im Gleichgewicht sind, wenn die Angriffsgeraden der Kräfte durch einen Punkt gehen, so müssen sich die Tangenten in P_1 und P_2 auf der Angriffsgeraden q von Q schneiden, welche durch den Schwerpunkt S des schraffierten Teiles der Belastungsfläche hindurchgeht. Man

erhält den zugehörigen Kräfteplan, indem man $Q = \int_{x_1}^{x_3} q(x) dx$

als Vertikale $V_1 V_2$ aufträgt und durch die Endpunkte Parallele zu S_1 und S_2 legt, welche sich in O schneiden mögen. Es ist dann $OV_1 = S_1$ und $OV_2 = S_2$.

Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen ist es nun leicht, mit Hilfe von P_1 und der Spannkraft S_1 P_2 und S_2 zu ermitteln. Zu diesem Zweck braucht man nur $Q = V_1 V_2$ auf einer Vertikalen aufzutragen, durch V_1 eine Parallele zur Tangentenrichtung in P_1 zu legen und auf ihr die Größe von S_1 bis zum Punkte O abzutragen. Nunmehr bestimmt man den Schwerpunkt S der Belastungsfläche $f(x)$. Verläuft $f(x)$ zwischen x_1 und x

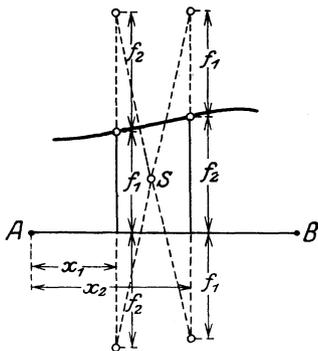


Fig. 160. Bestimmung des Schwerpunktes eines Belastungselementes.

ziemlich geradlinig, so genügt es, hierzu die in Fig. 160 wieder gegebene Konstruktion zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Trapezes anzuwenden. Nunmehr zeichnet man die durch S hindurchgehende Parallele q zur Ordinatenachse, welche die Tangente in P_1 in R treffen möge. Durch R legt man eine Parallele zu OV_2 , welche die Vertikale $x = x_2$ im Punkte P_2 schneidet. P_2 ist dann ein Punkt der gesuchten Seilkurve. Bezeichnet man die Entfernung des Punktes O von der Vertikalen $V_1 V_2$ mit H , so lautet die Gleichung der Seilkurve:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$$

(S. 92). Teilt man nun die von der Kurve $q = f(x)$ und der

x -Achse begrenzte Fläche durch Ordinaten in eine Anzahl von Streifen und bestimmt in jedem von ihnen den Schwerpunkt, trägt ferner auf einer Vertikalen V die Inhalte der Streifen als Strecke n auf und nimmt einen beliebigen Pol O im Abstände H von der Vertikalen V an, so liefert die beschriebene Konstruktion ein der gesuchten Seilkurve umschriebenes Tangentenpolygon. Hat man daher die Integralkurve der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

zu bestimmen, so kann man $f(x)$ als Belastungsfläche q auffassen. Wählt man für den Kräfteplan einen geeigneten Maßstab und macht den Polabstand gleich der Einheit, so liefert das Verfahren ein der gesuchten Integralkurve umschriebenes Tangentenpolygon (siehe hierzu Fig. 71). Hiernach kann man die Integralkurve mit großer Annäherung zeichnen. Es ist darauf hinzuweisen, daß, wie beim Sehnentrapez-Verfahren (S. 217), auf den Ordinaten, welche die Streifen der Belastungsfläche trennen, wahre Kurvenpunkte liegen. —

2. Das Verfahren des Seilpolygons kann mit Vorteil dazu benutzt werden, eine Näherungslösung der Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y, y')$$

zu bestimmen⁷³).

Die Belastungsfläche $q = f(x, y, y')$ hängt hier ersichtlich von der Gestalt der Integralkurve selbst ab und wird wie folgt angenähert bestimmt:

Gegeben seien die Anfangswerte

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad y' = y_1'.$$

Man trägt nun zu den Abszissen x in drei Koordinatensystemen, welche man zweckmäßig wie in Fig. 161 anordnet, die zugehörigen Werte y , y' und y'' auf. Man erhält zunächst die Punkte P_1 und P_1' , indem man in den ersten beiden Koordinatensystemen die Strecken $OQ_1 = OQ_1' = x_1$ aufträgt und die Ordinaten Q_1P_1 und $Q_1'P_1'$ gleich den gegebenen Werten y_1 und y_1' macht. Nunmehr berechnet man

$$y_1'' = f(x_1, y_1, y_1')$$

und trägt in dem dritten Koordinatensystem zur Abszisse $OQ_1'' = x_1$ als Ordinate $Q_1''P_1''$ gleich y_1'' auf. P_1 , P_1' und P_1'' sind dann Punkte der Kurven y , y' und y'' .

Unter der Annahme, daß sich für das Intervall $\Delta x = x_2 - x_1$ y' und y'' nur wenig ändern, erhält man angenähert die zu $x = x_2$ gehörenden Punkte $\underline{P_2}$ und $\underline{P_2}'$, indem man durch P_1 und P_1' Gerade der Steigung y_1' und y_1'' legt und diese mit der Vertikalen $x = x_2$ zum Schnitt bringt. Man bestimmt die zugehörigen Ordinaten $Q_2 \underline{P_2} = y_2$ und $Q_2' \underline{P_2}' = y_2'$ und berechnet den Wert

$$\underline{y_2''} = f(x, \underline{y_1}, \underline{y_1}').$$

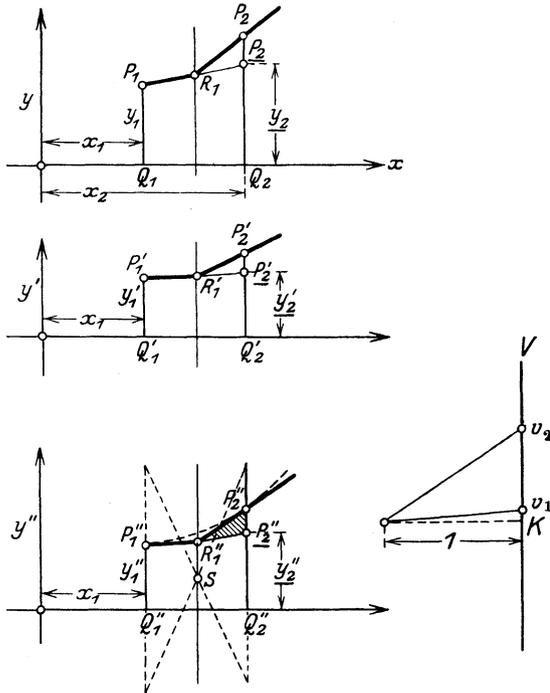


Fig. 161. Das Verfahren der Seilkurve nach L. Gümbel.

Hierdurch ergibt der Punkt $\underline{P_2}''$ der Belastungsfläche $y'' = q$. Die Gerade $\underline{P_1}'' \underline{P_2}''$ wird nun angenähert als wahre Belastungsfläche aufgefaßt und hiernach die Lage der Punkte $\underline{P_2} \underline{P_2}'$ verbessert. Man bestimmt gemäß der Konstruktion des Seilrecks zunächst den Schwerpunkt S und hierdurch die Schwerlinie q . Nunmehr zeichnet man in einem geeigneten Maßstab einen Kräfteplan, indem man im Abstände $OK = 1$ von einem

Punkte O eine Vertikale V zeichnet. Die Parallele durch O zu $\underline{P_1 P_2}$ möge V im Punkte v_1 schneiden. Von v_1 trägt man auf V eine Strecke bis zum Punkte v_2 ab, welche dem Inhalt der Belastungsfläche, d. h. dem Inhalt des Trapezes $Q_1'' Q_2'' \underline{P_2'' P_1''}$ gleich ist.

Die Schwerlinie g möge die Geraden $\underline{P_1 P_2}$ und $\underline{P_1' P_2'}$ in R_1 und R_1' schneiden. Man erhält dann den verbesserten Punkt P_2 , indem man durch R_1 eine Parallele zu ov_2 legt und diese mit der Vertikalen $x = x_2$ zum Schnitt bringt. Die Richtung im Punkte P_2 wird durch den Strahl ov_2 gegeben. Folglich ergibt sich der verbesserte Punkt P_2' , indem man $Q_2' P_2'$ gleich der Maßzahl des Abstandes der Punkte K und v_2 macht.

Um die Konstruktion für das neue Intervall $\Delta x = x_3 - x_2$ fortzusetzen, bestimmt man die den Punkten P_2 und P_2' entsprechenden Werte y_2 und y_2' und berechnet hiernach das verbesserte

$$y_2'' = f(x_2, y_2, y_2').$$

welches den Punkt P_2'' der Belastungsfläche y'' liefert. Die Geraden $R_1 P_2$, $R_1' P_2'$, $R_1'' P_2''$ bestimmen, zum Schnitt gebracht mit der Vertikalen $x = x_3$, die Punkte $P_3 P_3' P_3''$, mit denen das Verfahren fortzusetzen ist.

Bei der Übertragung des Inhaltes der Belastungsfläche in den Kräfteplan ist es von Wichtigkeit, darauf zu achten, daß man den Inhalt der tatsächlichen Form der Belastungsfläche entsprechend einsetzt. Nimmt man an, daß y'' zwischen P_1'' und P_2'' angenähert parallelförmig verläuft, so kann dies dadurch geschehen, daß man beim zweiten Schritt den Inhalt

$$\frac{(x_2 - x_1)}{3} (P_2'' P_2'')$$

abzieht usw., wobei man allerdings einen kleinen Fehler dadurch begeht, daß man das jeweils letzte Element als geradlinig annehmen muß. Die Genauigkeit des Gumbelschen Verfahrens wird in § 66 an einem Beispiel gezeigt.

§ 61. Methode von Runge zur zeichnerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wie bereits an einem Beispiel gezeigt, kann man die Methoden von C. Runge benutzen, um auch Differentialgleichungen der Form

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

angenähert zu integrieren (siehe § 55).

Zu diesem Zweck ersetzt man $\frac{dy}{dx}$ durch z und erhält so ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z \\ \frac{dz}{dx} &= f(x, y, z) \end{aligned} \right\} \cdot \quad (2)$$

Man kann nun x, y, z als Koordinaten eines Punktes im Raume auffassen; die gesuchte Integralkurve wird sich dann als Raumkurve ergeben. Wir betrachten ihre Projektionen in der $x-y$ - und der $x-z$ -Ebene. Hierzu trägt man in zwei übereinander liegenden rechtwinkligen Koordinatensystemen als Ordinaten zu den Abszissen x die Werte y und z auf; ferner in einem dritten Koordinatensysteme die Werte $\frac{dz}{dx} = f(x, y, z)$ (siehe Fig. 162).

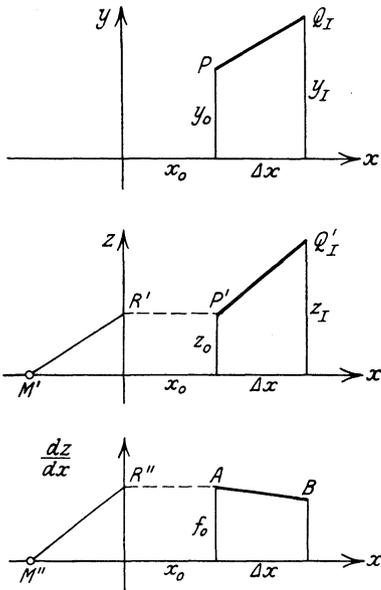


Fig. 162. Eulersche Näherung.

Als Anfangsbedingung sei verlangt, daß für

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{und} \quad y' = z_0 \quad (3)$$

wird. Dann ist der zugehörige Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 durch die beiden Punkte P und P' in der $x-y$ - und $x-z$ -Ebene dargestellt. Im dritten Koordinatensystem trägt man als Ordinate zur Abszisse x_0 den Wert

$$\frac{dz}{dx} = f(x_0, y_0, z_0) = f_0$$

auf (Punkt A).

Wie leicht erkannt wird, ordnen dann die Differentialgleichungen (2) den durch P und P' hindurchgehenden Projektionen der gesuchten Integralkurve eine bestimmte Richtung zu. Die Richtung im Punkte P wird erhalten, indem man auf der negativen Abszissenachse des $x-z$ -Koordinatensystems die Strecke Eins bis zum Punkte M' abträgt, durch P' eine Par-

allele zur x -Achse legt, welche die z -Achse im Punkte R' trifft und nun durch P einen Strahl parallel $M'R'$ legt. Ebenso ergibt sich die Richtung im Punkte P' , wenn man im dritten Koordinatensystem auf der negativen x -Achse die Einheit bis zum Punkte M'' abträgt, durch A eine Parallele zur x -Achse legt, welche die Ordinatenachse in R'' schneidet und durch P' eine Parallele zu $M''R''$ zieht.

Wie bei Differentialgleichungen erster Ordnung kann man nun den Punkt, für welchen $x = x_0 + \Delta x$ ist, in verschiedener Weise angenähert bestimmen.

1. Dem Verfahren von Euler entsprechend wird man die durch P und P' gelegten Geraden in Q_I und Q'_I mit der Vertikalen zum Schnitt bringen, welche den Abstand $x_0 + \Delta x$ von der Ordinatenachse hat (Fig. 162). Haben Q_I und Q'_I die Ordinaten y_I und z_I , so wird man in dem dritten Koordinatensystem den zugehörigen Punkt B eintragen, dessen Abszisse $x + \Delta x$ und dessen Ordinate $f(x + \Delta x, y_I, z_I)$ ist. Nunmehr wird man in den durch die Punkte Q'_I und B bestimmten Richtungen Parallele durch Q_I und Q'_I legen und diese mit einer neuen Vertikalen zum Schnitt bringen usw.

Das beschriebene Verfahren ist das denkbar einfachste, ist aber sehr ungenau, da es ein Näherungsverfahren erster Ordnung ist, d. h. der Fehler für kleine Werte Δx proportional Δx^2 wird. Ersichtlich ist nämlich

$$y_I = y_0 + z_0 \Delta x, \quad (4)$$

während sich nach der Taylorschen Formel der wahre Wert

$$y(x_0 + \Delta x) = y_0 + z_0 \frac{\Delta x}{1!} + f_0 \frac{\Delta x^2}{2!} + (f_1 + f_2 z_0 + f_3 f_0) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (5)$$

ergibt. In (5) ist von den auf Seite 205 erklärten Abkürzungen Gebrauch gemacht.

$$\text{Ebenso ist} \quad z_I = z_0 + f_0 \Delta x,$$

während sich der richtige Wert aus

$$z(x_0 + \Delta x) = z_0 + f_0 \frac{\Delta x}{1!} + (f_1 + f_2 z_0 + f_3 f_0) \frac{\Delta x^2}{2} + (f_{11} + 2 f_{12} z_0 + f_{22} z_0^2 + 2 f_{13} f_0 + 2 f_{23} f_0 z_0 + f_{33} f_0^2 + f_2 f_0 + f_1 f_3 + f_2 f_3 z_0 + f_3^2 f_0) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

ergibt.

y_I und z_I stimmen mit den wirklichen Werten nur in den beiden ersten Gliedern der Entwicklungen nach steigenden Potenzen von Δx überein.

2. Entsprechend dem Tangententrapez-Verfahren hat man die Punkte Q_1 und Q_1' wie Q_I und Q_I' in 1. zu bestimmen. Auf den Geraden PQ_1 und $P'Q_1'$ ermittelt man die Punkte S und S'

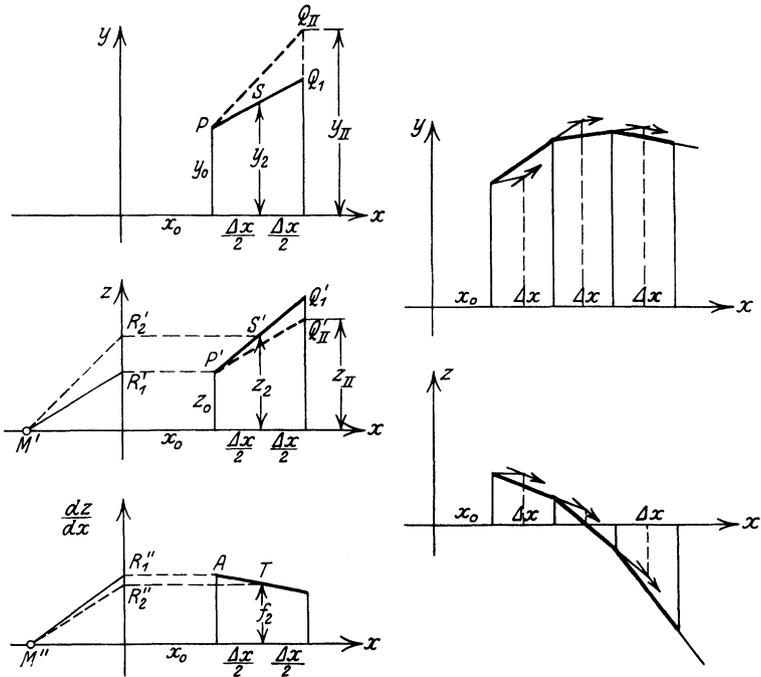


Fig. 163. Tangententrapez-Näherung.

S' , welche die Abszissen $x_0 + \frac{\Delta x}{2}$ haben, also auf der Mittellinie des betrachteten Intervalles $(x_0, x_0 + \Delta x)$ liegen (Fig. 163); die Ordinaten von S und S' seien y_2 und z_2 . Nunmehr berechnet man gemäß (2) den zugehörigen Wert

$$\frac{dz}{dx} = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_2, z_2\right) = f_2$$

und trägt ihn als Ordinate zur Abszisse $x_0 + \frac{\Delta x}{2}$ in das dritte

Koordinatensystem ein (Punkt T). Hierauf legt man durch S' und T Parallele zur x -Achse, welche die Ordinatenachsen in R_2' und R_2'' schneiden mögen. Durch P und P' werden schließlich Gerade parallel $M'R_2'$ und $M''R_2''$ gezogen, welche die Endordinaten des Intervalles in Q_{II} und Q_{II}' treffen mögen. Dies sind die verbesserten Näherungspunkte; ihre Ordinaten mögen mit y_{II} und z_{II} bezeichnet werden. Offenbar brauchen die Geraden PQ_1 und $P'Q_1'$ nur bis zur Mitte des Intervalles gezogen werden. Bei wiederholter Anwendung des Verfahrens ergibt sich dann das in Fig. 277 rechts wiedergegebene Schema.

Wir wollen nun den Fehler des Verfahrens berechnen.

Gemäß Konstruktion ist

$$y_2 = y_0 + z_0 \frac{\Delta x}{2}, \quad z_2 = z_0 + f_0 \frac{\Delta x}{2}, \quad f_2 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_2, z_2\right),$$

mithin wird

$$y_{II} = y_0 + z_2 \Delta x = y_0 + z_0 \Delta x + f_0 \frac{\Delta x^2}{2}. \quad (8)$$

Vergleicht man (8) mit (5), so ergibt sich Übereinstimmung in den drei ersten Gliedern; der Fehler ist proportional Δx^3 .

Ferner ist

$$z_{II} = z_0 + f_2 \cdot \Delta x = z_0 + f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + z_0 \frac{\Delta x}{2}, z_0 + f_0 \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x.$$

Gemäß der Taylorschen Entwicklung ist aber

$$f(x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c) = f(x_0, y_0, z_0) + [f_1 a + f_2 b + f_3 c] + \frac{1}{2}[f_{11} a^2 + 2f_{12} ab + f_{22} b^2 + 2f_{13} ac + 2f_{23} bc + f_{33} c^2] + \dots \quad (9)$$

Mithin wird

$$z_{II} = z_0 + f_0 \cdot \Delta x + (f_1 + f_2 z_0 + f_3 f_0) \frac{\Delta x^2}{2} + (f_{11} + 2f_{12} z_0 + f_{22} z_0^2 + 2f_{13} f_0 + 2f_{23} z_0 f_0 + f_{33} f_0^2) \frac{\Delta x^3}{8} + \dots$$

Durch Vergleichen mit (7) ergibt sich, daß auch der bei Bestimmung von z_{II} begangene Fehler proportional Δx^3 ist. Das beschriebene Verfahren ist daher ein Näherungsverfahren zweiter Ordnung.

Zur Abkürzung setzen wir

$$f_1 + f_2 z_0 + f_3 f_0 = F_1, \quad (10)$$

$$f_{11} + 2f_{12} z_0 + f_{22} z_0^2 + 2f_{13} f_0 + 2f_{23} z_0 f_0 + f_{33} f_0^2 = F_2 \quad (11)$$

und erhalten

$$z_{II} = z_0 + f_0 \Delta x + F_1 \frac{\Delta x^2}{2} + F_2 \frac{\Delta x^3}{8} + \dots \quad (12)$$

3. Wir betrachten jetzt ein Verfahren, welches bei Differentialgleichungen erster Ordnung mit den Werten (25) von Seite 245 der Formel $\Delta y = \frac{\Delta_1 y + \Delta_2 y}{2}$ entsprechen würde.

Da sich für $y' = f(x)$ auch die Sehnen trapez-Näherung (27) von Seite 245 ergibt, soll das Verfahren als vereinfachtes Sehnen trapez-Verfahren bezeichnet werden.

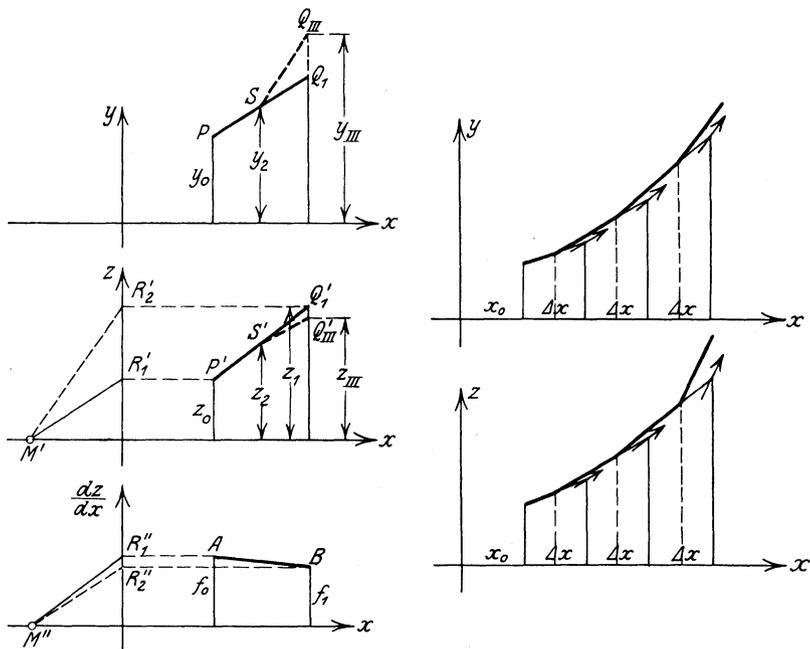


Fig. 164. Vereinfachte Sehnen trapez-Näherung.

Man bestimmt die Punkte P, P', Q_1, Q_1', A und B wie unter 1. Ferner ermittelt man (Fig. 164) auf den Geraden PQ_1 und $P'Q_1'$ die Punkte S und S' wie unter 2. Nunmehr werden die Punkte Q_1' und B durch Parallele zu den x -Achsen auf die Ordinatenachsen übertragen; es ergeben sich so die Punkte R_2' und R_2'' . In den durch $M'R_2'$ und $M''R_2''$ bestimmten Richtungen legt man schließlich durch S und S'

gerade Linien, welche die Endordinaten des betrachteten Intervalles in den gesuchten Näherungspunkten Q_{III} und Q''_{III} mit den Ordinaten y_{III} und z_{III} schneiden mögen.

Bezeichnet man die Ordinaten von S und S' mit y_2 und z_2 , so ist

$$y_2 = y_0 + z_0 \frac{\Delta x}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = z_0 + f_0 \frac{\Delta x}{2}.$$

Haben Q'_1 und B die Ordinaten z_1 und f_1 , so ist nach (6)

$$z_1 = z_0 + f_0 \Delta x;$$

ferner ist

$$f_1 = f(x_0 + \Delta x, \quad y_0 + z_0 \Delta x, \quad z_0 + f_0 \Delta x),$$

also gemäß (9), (10) und (11):

$$f_1 = f_0 + F_1 \Delta x + F_2 \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \quad (13)$$

Mithin wird

$$\begin{aligned} y_{III} &= y_2 + z_1 \frac{\Delta x}{2} = y_0 + z_0 \frac{\Delta x}{2} + z_0 \frac{\Delta x}{2} + f_0 \frac{\Delta x^2}{2} \\ &= y_0 + z_0 \Delta x + f_0 \frac{\Delta x^2}{2} \dots \end{aligned} \quad (14)$$

und

$$z_{III} = z_2 + f_1 \frac{\Delta x}{2} z_0 + f_0 \Delta x + F_1 \frac{\Delta x^2}{2} + F_2 \frac{\Delta x^3}{4} + \dots \quad (15)$$

Vergleicht man (13) mit (8), so folgt, daß Q_{II} und Q_{III} dieselbe Lage haben.

Da die wahren Werte für $y(x_0 + \Delta x)$ und $z(x_0 + \Delta x)$ nach (5), (7), (10) und (11)

$$y(x_0 + \Delta x) = y_0 + z_0 \Delta x + f_0 \frac{\Delta x^2}{2} + F_1 \frac{\Delta x^3}{6} + \dots \quad (5a)$$

und

$$\begin{aligned} z(x_0 + \Delta x) &= z_0 + f_0 \Delta x + F_1 \frac{\Delta x^2}{2} \\ &\quad + (F_2 + F_1 f_3 + f_2 f_0) \frac{\Delta x^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (7a)$$

sind, handelt es sich hier um ein Näherungsverfahren zweiter Ordnung.

Will man das auf Seite 205 beschriebene Verfahren auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausdehnen, so hat man

entsprechend der dort gegebenen Formel (25) folgendermaßen vorzugehen:

4. Man zieht parallel zu den wie unter 3. bestimmten Richtungen $M'R_2'$ und $M''R_2''$ durch P_1 und P_2 Gerade, welche die Endordinaten des Intervalles in Q_2 und Q_2' treffen mögen, und bestimmt die Ordinaten y_2 und z_2 dieser Punkte (Fig. 165). Nunmehr errechnet man den Wert $f_3 = f(x_0 + \Delta x, y_2, z_2)$ und trägt den entsprechenden

Punkt B_1 in das dritte Koordinatensystem ein. Auf den Verbindungsgeraden PQ_2' und AB_1 bestimmt man die Punkte S' und T mit den Abszissen $x_0 + \frac{\Delta x}{2}$ und den

Ordinaten z_3 und f_3 . Durch diese beiden Punkte werden Horizontale gelegt, welche die Ordinatenachsen in R_3' und R_3'' schneiden mögen. Schließlich werden durch P und P' in den Richtungen $M'R_3'$ und $M''R_3''$ Gerade gelegt, welche auf den Endordinaten die gesuchten Punkte Q_{IV} und Q'_{IV} mit den Ordinaten y_{IV} und z_{IV} abschneiden.

Die Punkte Q_1' und B haben nach Konstruktion die Ordinaten

$$z_0 + f_0 \Delta x$$

und $f(x_0 + \Delta x, y_0 + z_0 \Delta x, z_0 + f_0 \Delta x)$.

Da diese Ordinaten die Richtungen der Geraden PQ_2 und $P'Q_2'$ bestimmen, so wird

$$y_2 = y_0 + z_0 \Delta x + f_0 \Delta x^2$$

und $z_2 = z_0 + \Delta x f(x_0 + \Delta x, y_0 + z_0 \Delta x, z_0 + f_0 \Delta x)$
 $= z_0 + f_0 \Delta x + F_1 \Delta x^2 + \dots$

gemäß (13).

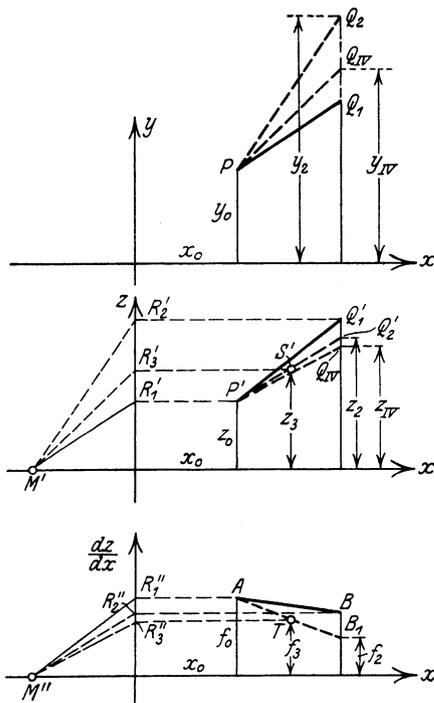


Fig. 165. Sehnen Trapez-Näherung.

Die Ordinate von B_1 ist

$$f_2 = f(x_0 + \Delta x, y_2, z_2) \\ = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + z_0 \Delta x + f_0 \Delta x^2, z_0 + f_0 \Delta x + F_1 \Delta x^2 + F_2 \frac{\Delta x^3}{2} + \dots\right);$$

also wird nach (9), (10) und (11)

$$f_2 = f_0 + F_1 \Delta x + (f_2 f_0 + f_3 F_1 + \frac{1}{2} F_2) \Delta x^2 + \dots$$

Folglich wird

$$z_3 = \frac{z_0 + z_2}{2} = z_0 + f_0 \frac{\Delta x}{2} + F_1 \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

und

$$f_3 = \frac{f_0 + f_2}{2} = f_0 + F_1 \frac{\Delta x}{2} + (f_2 f_0 + f_3 F_1 + \frac{1}{2} F_2) \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

Mithin ist

$$y_{IV} = y_0 + z_3 \Delta x = y_0 + z_0 \Delta x + f_0 \frac{\Delta x^2}{2} + F_1 \frac{\Delta x^3}{2} + \dots \quad (16)$$

und

$$z_{IV} = z_0 + f_3 \Delta x \\ = z_0 + f_0 \Delta x + F_1 \frac{\Delta x^2}{2} + (f_2 f_0 + f_3 F_1 + \frac{1}{2} F_2) \frac{\Delta x^3}{2} + \dots \quad (17)$$

Vergleicht man (16) und (17) mit (5a) und (7a), so erkennt man, daß es sich hier, wie bei der unter 3. beschriebenen Methode, um ein Näherungsverfahren zweiter Ordnung handelt. Zur unmittelbaren Konstruktion wird man daher das unter 3. beschriebene Verfahren als einfacher bevorzugen.

5. Gemäß Formel (31) von Seite 249 erhalten wir nunmehr die gesuchten Näherungswerte y_V und z_V durch

$$y_V = y_{II} + \frac{1}{3}(y_{IV} - y_{II}) \quad (18)$$

und

$$z_V = z_{II} + \frac{1}{3}(z_{IV} - z_{II}). \quad (19)$$

Führt man die in den Fig. 163 und 165 wiedergegebenen Konstruktionen in denselben Koordinatensystemen y, z und $\frac{dz}{dx}$ aus, so hat man die Strecken $Q_{II} Q_{IV}$ und $Q_{II} Q_{IV'}$ in drei Teile zu teilen; die bei Q_{II} und Q_{II}' gelegenen Teilpunkte liefern dann die gesuchten Punkte Q_V und Q_V' .

Aus den Formeln (8), (12), (16), (17), (18), (19) folgt

$$y_v = y_0 + z_0 \Delta x + f_0 \frac{\Delta x^2}{2} + F_1 \frac{\Delta x^3}{6} + \dots \quad (20)$$

$$z_v = z_0 + f_0 \Delta x + F_1 \frac{\Delta x^2}{2} + (F_2 + f_3 F_1 + f_2 f_0) \frac{\Delta x^3}{6} + \dots \quad (21)$$

Durch Vergleichen mit (5a) und (7a) ergibt sich, daß es sich hier um ein Näherungsverfahren dritter Ordnung handelt; der Fehler ist proportional Δx^4 .

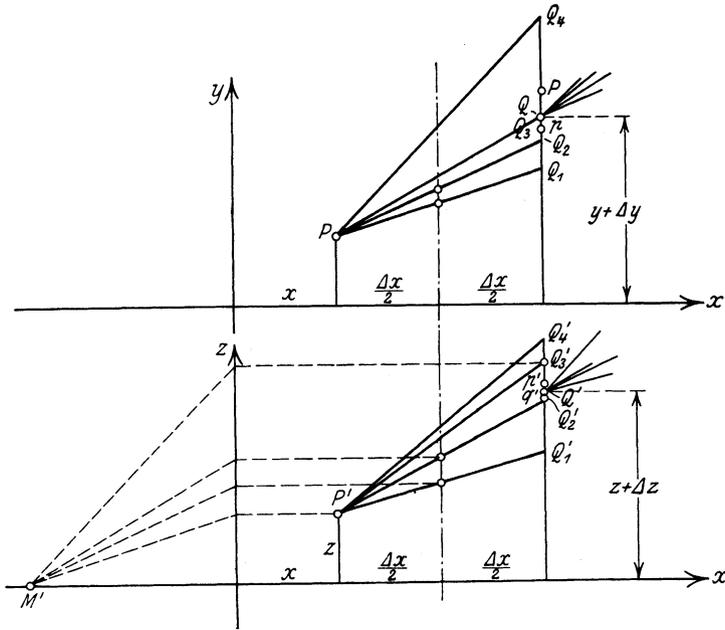


Fig. 166. Kuttasche Näherung.

6. Von Kutta⁷⁴⁾ stammt ein Verfahren, welches es gestattet, die für kleine Änderungen Δx von x gesuchten Änderungen Δy und Δz von y und z so genau zu bestimmen, daß der Fehler stets den Faktor Δx^5 enthält.

Setzt man

$$\begin{aligned} \Delta_1 y &= z \cdot \Delta x, & \Delta_1 z &= f(x, y, z) \Delta x, \\ \Delta_2 y &= \left(z + \frac{\Delta_1 z}{2} \right) \Delta x, & \Delta_2 z &= f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta_1 y}{2}, z + \frac{\Delta_1 z}{2} \right) \Delta x, \end{aligned}$$

$$A_3 y = \left(z + \frac{A_2 z}{2} \right) \Delta x, \quad A_3 z = f \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{A_2 y}{2}, z + \frac{A_2 z}{2} \right) \Delta x.$$

$$A_4 y = \left(z + A_3 z \right) \Delta x, \quad A_4 z = f \left(x + \Delta x, y + A_3 y, z + A_3 z \right) \Delta x;$$

$$p = \frac{A_2 y + A_3 y}{2}, \quad q = \frac{A_1 y + A_4 y}{2};$$

$$p' = \frac{A_2 z + A_3 z}{2}, \quad q' = \frac{A_1 z + A_4 z}{2},$$

so wird

$$\Delta y = p + \frac{1}{3}(q - p); \quad \Delta z = p' + \frac{1}{3}(q' - p').$$

Die graphische Ausführung der Methode zeigt Fig. 166.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Annäherung der Näherungskurven an die gesuchte Integralkurve bei hinreichend kleinem Wert von Δx desto besser wird, je höher der Grad der Näherung ist; je besser aber die Näherung wird, um so umständlicher werden Konstruktionen und Zwischenrechnungen. Im allgemeinen werden die unter 2. und 3. beschriebenen Verfahren hinreichend genau und nicht zu umständlich sein.

§ 62. Das Verfahren von G. Duffing für Differentialgleichungen zweiter Ordnung⁷⁵⁾.

Geht man von der Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y_0' \quad (2)$$

aus, so ersetzt man wieder die Kurve $f(x, y, y')$ durch eine Parabel zweiter Ordnung mit y -paralleler Achse, welche mit der gegebenen Kurve den Anfangs- und Endpunkt, ferner die Anfangsrichtung gemeinsam hat.

Setzt man:

$$\text{und} \left. \begin{aligned} f(x_0, y_0, y_0') &= f_0, & f(x_1, y_1, y_1') &= f_1 \\ \frac{df(x_0, y_0, y_0')}{dx} &= \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial y} \cdot y_0' + \frac{\partial f_0}{\partial y'} \cdot f_0 = f_0' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

so wird, entsprechend (5), Seite 267

$$y'' = f_0 + f_0' (x - x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2 [f_1 - f_0 - f_0' (x_1 - x_0)]. \quad (4)$$

Integriert man nun unter Beachtung der Anfangsbedingungen (2), so wird

$$y' = y_0' + f_0(x - x_0) + \frac{f_0'}{2}(x - x_0)^2 + \frac{(x - x_0)^3}{3(x_1 - x_0)^2} [f_1 - f_0 - f_0'(x_1 - x_0)] \quad (5)$$

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{f_0}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f_0'}{6}(x - x_0)^3 + \frac{(x - x_0)^4}{12(x_1 - x_0)^2} [f_1 - f_0 - f_0'(x_1 - x_0)]. \quad (6)$$

Folglich wird für $x = x_1$

$$y_1' = y_0' + \frac{x_1 - x_0}{6} [4f_0 + f_0'(x_1 - x_0) + 2f_1] \quad (7)$$

$$y_1 = y_0 + y_0'(x_1 - x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{12} [5f_0 + f_0'(x_1 - x_0) + f_1]. \quad (8)$$

In den Gleichungen (7) und (8) ist alles bekannt mit Ausnahme von y_1 und y_1' ; die beiden Gleichungen dienen also zur Bestimmung dieser beiden Größen.

Allerdings können, falls $f(x, y, y')$ nicht linear in y und y' ist, y_1 und y_1' im allgemeinen nicht explizit dargestellt werden. Das Verfahren dürfte dann, weil die Gleichungen (7) und (8) nur durch allmähliche Näherung gelöst werden können, ziemlich umständlich sein und man wird mit dem Verfahren von C. Runge (§ 61) schneller zum Ziel kommen. Untersuchen wir nun den Spezialfall, daß die gegebene Gleichung (1) linear ist.

Mit

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0, \quad (9)$$

wird

$$f(x, y, y') = -py' - qy - r \quad (10)$$

und gemäß (3)

$$\left. \begin{aligned} f_0' &= -p_0'y_0' - q_0'y_0 - r_0' - q_0y_0' - p_0f_0 \\ &= (p_0^2 - p_0' - q_0)y_0' + (p_0q_0 - q_0')y_0 + p_0r_0 - r_0'. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Es hängen also f und f_0' linear von y und y' ab. Führt man

$$f_1 = -p_1y_1' - q_1y_1 - r_1 \quad (12)$$

in (7) und (8) ein, so ergeben sich zur Bestimmung von y_1 und y_1' die linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 - x_0}{3} q_1 y_1 + \left(1 + \frac{x_1 - x_0}{3} p_1\right) y_1' = y_0' \\ & + \frac{x_1 - x_0}{6} [4 f_0 + (x_1 - x_0) f_0' - 2 r_1] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{12} q_1\right) y_1 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{12} p_1 y_1' = y_0 + (x_1 - x_0) y_0' \\ & + \frac{(x_1 - x_0)^2}{12} [5 f_0 + (x_1 - x_0) f_0' - r_1]. \end{aligned} \quad (14)$$

Von hier aus kann man mit dem im § 56 angewendeten Verfahren beweisen, daß die Duffingsche Methode bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung einer Näherung vierter Ordnung äquivalent ist.

Ein einfaches Beispiel möge die beträchtliche Genauigkeit der Methode Duffing erläutern.

Die Besselsche Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0 \quad (15)$$

soll mit der Anfangsbedingung

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = -1 \quad (16)$$

integriert werden.

Es ist zu setzen

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{x}; & q &= 1 - \frac{1}{x^2}; & r &= 0; \\ f &= -\frac{1}{x} y' - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y; & f' &= \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \left(y' - \frac{1}{x} y\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Wählen wir das Intervall $x_1 - x_0 = \frac{1}{8}$, so wird

$$x_1 = \frac{5}{8}, \quad y_1 = 0,88192, \quad y_1' = -0,90141.$$

In derselben Weise ergibt sich, wenn wir stets um das gleiche Intervall fortschreiten,

$$x_4 = \frac{13}{8}, \quad y_4 = 0,5731 (0,5732), \quad y_4' = -0,7706.$$

Nunmehr wurde als Schrittlänge $\frac{1}{4}$ gewählt. Es ergaben sich die Werte

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{14}{8}, & y_5 &= 0,3864 (0,3864), & y_5' &= -0,7284, \\ x_6 &= 2, & y_6 &= 0,2089 (0,2086), & y_6' &= -0,6868. \end{aligned}$$

Nunmehr wurde das Intervall auf $\frac{1}{2}$ vergrößert. Als Endwerte der Integration ergaben sich:

$$x = 7, \quad y = 0,3633 \ (0,3634), \quad y' = 0,0213.$$

Die eingeklammerten Werte sind die mit Hilfe der Tafeln von Jahnke und Emde ermittelten genauen Werte.

Die Übereinstimmung ist außerordentlich genau. Die größte Abweichung ergab sich für $x = 3,5$, wo der nach Duffing errechnete Wert $y = -0,4734$ sich von dem wahren Werte $y = -0,4743$ um $0,0009$ unterscheidet; der maximale Fehler beträgt also weniger als $0,2\%_0!$ —

§ 63. Abgeändertes Verfahren nach G. Duffing^{75a}).

Das Verfahren des vorigen Paragraphen beruhte darauf, aus einem Wertetripel (x_0, y_0, y_0') ein neues (x_1, y_1, y_1') zu berechnen. Man kann aber auch aus zwei gegebenen Wertetripeln (x_0, y_0, y_0') und (x_1, y_1, y_1') ein drittes (x_2, y_2, y_2') bestimmen.

Zweckmäßig macht man hierzu die beiden Intervallschritte gleich:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h. \quad (1)$$

Ist die vorgelegte Differentialgleichung in der Form

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2)$$

gegeben, so ersetzt man $f(x, y, y')$ durch eine gewöhnliche Parabel mit y -paralleler Achse, welche durch die Punkte (x_0, f_0) , (x_1, f_1) , (x_2, f_2) hindurchgeht (Fig. 167). Hier ist

$$f(x_0, y_0, y_0') = f_0, \quad f(x_1, y_1, y_1') = f_1, \quad f(x_2, y_2, y_2') = f_2 \quad (3)$$

gesetzt worden.

Zu diesem Zwecke hat man nach einem bekannten Verfahren den Ansatz

$$f(x, y, y') = f_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (4)$$

zu machen und die Konstanten c_1 und c_2 so zu bestimmen, daß die Kurve durch die drei vorgeschriebenen Punkte hindurchgeht. Es ergibt sich unter Benutzung von (19)

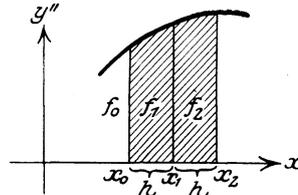


Fig. 167. Zum Verfahren von G. Duffing.

$$y'' = f_0 + \frac{4f_1 - 3f_0 - f_2}{2h} (x - x_0) + \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2h^2} (x - x_0)^2. \quad (5)$$

Durch Integration zwischen den Grenzen x_0 und x_2 folgt hieraus:

$$y_2 = y_0 + 2h y_0' + \frac{2}{3} h^2 (f_0 + 2f_1), \quad (6)$$

$$y_2' = y_0' + \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2). \quad (7)$$

In diesen beiden Gleichungen ist alles bekannt mit Ausnahme von y_2 und y_2' ; sie können also zur Bestimmung dieser Größen dienen.

Da auf der rechten Seite von (6) nur bekannte Ausdrücke stehen, so kann man y_2 in jedem Falle ohne weiteres berechnen. Anders liegt der Fall bei Bestimmung von y_2' , weil auf der rechten Seite von (7) in f_2 außer y_2 auch y_2' enthalten ist. y_2 kann aus (6) in (7) eingesetzt werden, aber die Bestimmungsgleichung für y_2' läßt sich nur dann bequem lösen, wenn $f(x, y, y')$ linear in y' ist. Ist dies nicht der Fall, so hat man den gesuchten Wert durch allmähliche Annäherung nach einer der bekannten Methoden zur Auflösung höherer Gleichungen zu bestimmen.

Besonders einfach wird aber das Verfahren, wenn $f(x, y, y')$ linear bezüglich y' ist, also die Gestalt

$$f(x, y, y') = -p y' - \varphi(x, y) \quad (8)$$

hat; die gegebene Differentialgleichung lautet dann

$$y'' + p(x)y' + \varphi(x, y) = 0. \quad (9)$$

Man erhält dann y_2' gemäß (7) und (8) aus der Beziehung

$$y_2' \left(1 + p_2 \frac{h}{3}\right) = y_0' + \frac{h}{3} f_0 + 4f_1 - \varphi(x_2, y_2). \quad (10)$$

Es läßt sich leicht nachweisen, daß es sich bei diesem Verfahren, selbst wenn $f(x, y, y')$ nicht linear in y' ist, um ein Näherungsverfahren vierter Ordnung handelt, — vorausgesetzt, daß (x_0, y_0, y_0') und (x_1, y_1, y_1') den wirklichen Werten entsprechen.

Die gesuchte Kurve sei durch den Ansatz

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{f_0}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f_0'}{3!}(x - x_0)^3 \\ + \frac{f_0''}{4!}(x - x_0)^4 + \frac{f_0'''}{5!}(x - x_0)^5 + \dots \quad (11)$$

gegeben. Hieraus folgt durch zweimalige Differentiation

$$y''(x) = f = f_0 + \frac{f_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{f_0''}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \frac{f_0'''}{3!}(x - x_0)^3 + \dots, \quad (12)$$

mithin für $x = x_1$

$$f_1 = f_0 + \frac{f_0'}{1!}h + \frac{f_0''}{2!}h^2 + \frac{f_0'''}{3!}h^3 + \dots \quad (13)$$

Setzt man die Reihe für f_1 in (6) ein, so wird unser Nährungswert

$$y_2 = y_0 + 2y_0'h + 2f_0h^2 + \frac{4}{3}f_0'h^3 + \frac{2}{3}f_0''h^4 \\ + \frac{2}{9}f_0'''h^5 + \dots \quad (14)$$

Der wahre Wert y_2 ergibt sich, wenn man in (11) für x $x_2 = x_0 + 2h$ setzt:

$$y_2 = y_0 + 2y_0'h + 2f_0h^2 + \frac{4}{3}f_0'h^3 + \frac{2}{3}f_0''h^4 \\ + \frac{8}{15}f_0'''h^5 + \dots \quad (15)$$

Die beiden Reihen (14) und (15) stimmen in den fünf ersten Gliedern überein, während erst die Koeffizienten von h^5 verschieden sind. Der Beweis ist also erbracht.

Die nichtlineare Differentialgleichung

$$y'' + 0,5y' + \sin y = 0 \quad (16)$$

(Bewegung eines ebenen Kreispendels bei Dämpfung) diene zur Erläuterung; y ist der Ausschlagwinkel, x die Zeit. Die Anfangsbedingungen seien

$$y_0 = 0, \quad y_0' = 4 \quad \text{für} \quad x_0 = 0. \quad (17)$$

Mit dem Teilintervall $h = 1/2$ bestimmen sich zunächst die Werte y_1, y_1' für das Argument $x_1 = \frac{1}{2}$. Dies geschieht mit Hilfe der Gleichungen (7) und (8) des § 62.

Da die Werte y_1, y_1' die Basis für den ganzen weiteren Prozeß abgeben, werde das erste Intervall noch einmal unterteilt.

Da $f = -0,5 y' - \sin y$ ist, so wird

$$f' = -0,5 f - y' \cos y,$$

mithin für $x = 0$

$$f_0 = -2 \quad \text{und} \quad f_0' = -3.$$

Hiermit folgt für das Zwischenintervall:

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = 0,944 + \frac{f}{192}, \quad y' = 3,635 + \frac{f}{12}.$$

Mit dem schätzungsweise angenommenen Wert $f = -2,1$ folgt

$$y = 0,933, \quad y' = 3,460$$

und hieraus das verbesserte

$$f = -2,534;$$

es folgen die weiteren Werte

$$y = 0,931, \quad y' = 3,424, \quad f = -2,514,$$

$$y = 0,931, \quad y' = 3,426, \quad f = -2,514, \quad f' = -0,797.$$

In derselben Weise wird die Rechnung für das folgende Halbintervall mit $h = \frac{1}{4}$ durchgeführt und ergibt

$$y_1 = 1,708, \quad y_1' = 2,791, \quad f_1 = -2,387.$$

In Verbindung mit den Werten

$$x_0 = 0, \quad y_0' = 4, \quad f_0 = -2$$

hat man die Grundlage zur Ausführung der Integration mit Hilfe der Gleichungen (6) und (7) gewonnen.

Die Rechnung liefert, wobei wir nur das Ergebnis für einige Intervallpunkte angeben:

$y_2 = 2,873 (2,843)$	$y_2' = 1,880$	$f_2 = -1,207$
$y_3 = 3,691$	$y_3' = 1,540$	$f_3 = -0,248$
$y_4 = 4,469 (4,437)$	$y_4' = 1,546$	$f_4 = -0,198$
$y_6 = 6,063 (6,023)$	$y_6' = 1,514$	$f_6 = -0,538$
$y_{10} = 7,269 (7,255)$	$y_{10}' = -0,306$	$f_{10} = -0,681$
$y_{16} = 5,841 (5,840)$	$y_{16}' = 0,005$	$f_{16} = +0,426$
$y_{18} = 6,015 (5,988)$	$y_{18}' = 0,292$	$f_{18} = +0,119$

Die eingeklammerten Werte sind der Zeichnung entnommen, welche sich nach dem Verfahren von Gumbel ergibt (Fig. 172). Die Abweichungen sind nicht groß; der größte Unterschied beträgt weniger als $\frac{2}{3}\%$ für $x_6 = 3$.

§ 64. Verfahren der schrittweisen Verbesserung bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

und die Bedingung, daß für $x = x_a, y = y_a, y' = y'_a$ (2)

sein soll. Ferner sei eine angenäherte Lösung $y_0(x)$ und deren erste Ableitung $y'_0(x)$ gegeben. Die Kurven $y_0(x)$ und $y'_0(x)$ können ganz beliebig gewählt werden; das Verfahren der schrittweisen Verbesserung führt aber desto schneller zum Ziel, je besser die Anfangskurven mit den gesuchten Kurven übereinstimmen.

Man arbeitet zweckmäßig in drei Koordinatensystemen y, y' und y'' , die man, wie in Fig. 168, übereinander anordnet.

Man berechnet die Werte $y_1''(x) = f(x, y_0(x), y'_0(x))$ (3)

und trägt sie als Ordinaten zu den Abszissen x in das dritte Koordinatensystem ein. Die so erhaltene Kurve wird nun (nach einem der in § 49 beschriebenen Verfahren) zweimal graphisch integriert, wobei für den Anfangspunkt von $y_1'(x)$ $y_1'(x_a) = y'_a$ und für den Anfangspunkt von $y_1(x)$ $y_1(x_a) = y_a$

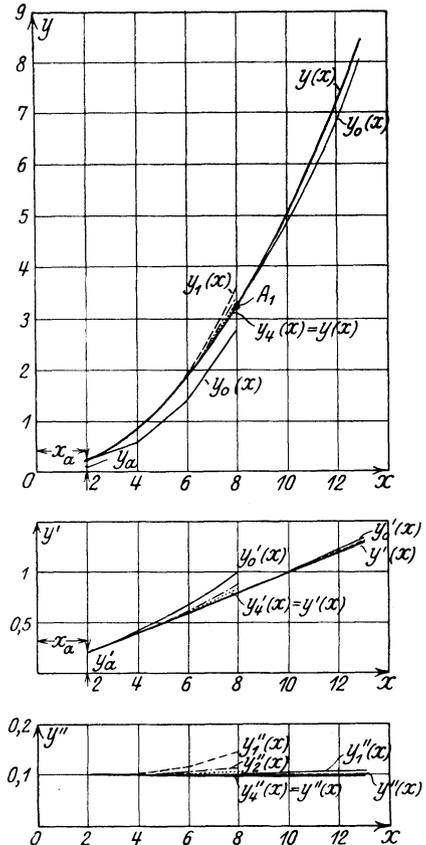


Fig. 168. Das Verfahren der schrittweisen Verbesserung bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

gewählt wird. Unterscheidet sich $y_1(x)$ nicht von $y_0(x)$, so folgt aus

$$y_1''(x) = f(x, y_1(x), y_1'(x)), \quad (4)$$

daß $y_1(x)$ innerhalb der durch die Strichstärke begrenzten Genauigkeit der Zeichnung mit der gesuchten Integralkurve übereinstimmt. Ist dies nicht der Fall, so ist $y_1(x)$, wie später gezeigt wird, im allgemeinen eine bessere Näherung als $y_0(x)$. Hiernach kann man, indem man $y_1(x)$ analog $y_0(x)$ behandelt, fortfahren und erhält nach und nach eine Reihe von Näherungskurven:

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \quad (5)$$

für welche immer gilt:

$$y_n''(x) = f(x, y_{n-1}(x), y_{n-1}'(x)). \quad (6)$$

Die zweimalige Integration ist dabei so auszuführen, daß die Anfangsbedingungen (2) erfüllt werden:

$$y_n'(x) = y_a' + \int_{x_a}^x f(x, y_{n-1}(x), y_{n-1}'(x)) dx, \quad (7)$$

$$y_n(x) = y_a + y_a'(x - x_a) + \int_{x_a}^x dx \int_{x_a}^x f(x, y_{n-1}(x), y_{n-1}'(x)) dx. \quad (8)$$

Unter sehr geringen Voraussetzungen soll nunmehr gezeigt werden, daß sich die Kurven $y_n(x)$ mit wachsendem n immer mehr der gesuchten Lösung $y(x)$ nähern.

Hierzu hat man einfach das in § 57 gegebene Beweisverfahren auf den vorliegenden Fall anzuwenden. Wir müssen die folgenden Voraussetzungen machen:

a) $f(x, y, y')$ sei eine eindeutige, endliche Funktion der drei Argumente x, y, y' , wenn x, y, y' in den Intervallen $(x_a - a, x_a + a)$, $(y_a - b, y_a + b)$, $(y_a' - c, y_a' + c)$ bleiben. M sei der absolut größte Wert von f , wenn die Veränderlichen in den angegebenen Grenzen bleiben.

b) Die Funktion $f(x, y, y')$ soll der Lipschitzschen Bedingung genügen, wonach es zwei positive Zahlen A und B derart geben soll, daß

$$|f(x, y, y') - f(x, \bar{y}, \bar{y}')| < A |y - \bar{y}| + B |y' - \bar{y}'| \quad (9)$$

für alle Werte $x, y, \bar{y}; y', \bar{y}'$ ist, die den Bedingungen a) genügen.

c) Die Näherungskurven $y_0(x)$ und $y_0'(x)$ sollen die Bedingungen a) erfüllen.

Im folgenden sei vorausgesetzt, daß die Integration nur so weit durchgeführt wird, daß x in dem angegebenen Intervall bleibt.

Dann ist

$$|y_1''(x)| = |f(x, y_0(x), y_0'(x))| \leq M. \quad (10)$$

Folglich wird

$$|y_1(x) - y_a'| \leq M|x - x_a| \leq Ma \quad (11)$$

und

$$|y_1(x) - y_a| \leq M \frac{(x - x_a)^2}{2} \leq M \frac{a^2}{2}. \quad (12)$$

Setzen wir also voraus, daß

$$Ma < b \quad \text{und} \quad \frac{M}{2} a^2 < c \quad (13)$$

ist, so genügen $y_1(x)$ und $y_1'(x)$ der Bedingung a). Dasselbe gilt von allen Werten $y_n(x)$ und $y_n'(x)$, wie sich nach und nach beweisen läßt. Die Bedingung, daß alle Näherungskurven in den angegebenen Grenzen bleiben, ist also durch (13) gegeben.

Setzen wir nun

$$y_n - y_{n-1} = u_n, \quad y_n' - y_{n-1}' = u_n', \quad y_n'' - y_{n-1}'' = u_n'', \quad (14)$$

so ist

$$u_n'' = f(x, y_{n-1}, y_{n-1}') - f(x, y_{n-2}, y_{n-2}'); \quad (15)$$

u_n und u_n' nehmen für $x = x_a$ den Wert Null an. Mithin wird nach (9):

$$|u_n''| \leq A|u_{n-1}| + B|u_{n-1}'| = C_n \quad (16)$$

und

$$|u_n'| = \left| \int_{x_a}^x u_n'' dx \right| \leq C_n |x - x_a| \leq C_n a, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} |u_n| &\leq \int_{x_a}^x |u_n'| dx \leq C_n \int_{x_a}^x |x - x_a| dx \\ &= C_n \cdot \frac{(x - x_a)^2}{2} \leq C_n \frac{a^2}{2} \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Da nun $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_0(x)$ und $y_0'(x)$ der Bedingung a) genügen, so ist

$$\text{und } \left. \begin{aligned} |u_1(x)| &= |y_1(x) - y_0(x)| \leq 2b \\ |u_1'(x)| &= |y_1'(x) - y_0'(x)| \leq 2c \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Folglich ergibt sich aus (16), (17) und (18) für $n = 2$:

$$C_2 = 2bA + 2cB; |u_2''| \leq C_2; |u_2'| \leq C_2 a; |u_2| \leq C_2 \frac{a^2}{2}. \quad (20)$$

Mithin wird für $n = 3$:

$$C_3 = C_2 \left(A \frac{a^2}{2} + Ba \right); |u_3''| \leq C_3; |u_3'| \leq C_3 a; |u_3| \leq C_3 \frac{a^2}{2}. \quad (21)$$

Es folgt für $n = 4$ aus (18):

$$\begin{aligned} C_4 &= C_3 \left(A \frac{a^2}{2} + Ba \right) = C_2 \left(A \frac{a^2}{2} + Ba \right)^2 \\ &= (2bA + 2cB) \left(A \frac{a^2}{2} + Ba \right)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Ganz allgemein wird

$$C_n = (2bA + 2cB) \left(A \frac{a^2}{2} + Ba \right)^{n-2}, \quad (23)$$

mithin

$$|u_n| \leq (2bA + 2cB) \left(A \frac{a^2}{2} + Ba \right)^{n-2} \cdot \frac{a^2}{2}, \quad (24)$$

$$|u_n'| \leq (2bA + 2cB) \left(A \frac{a^2}{2} + Ba \right)^{n-2} \cdot a. \quad (25)$$

Legt man also der Größe a die Bedingung auf, daß

$$c = A \frac{a^2}{2} + Ba < 1 \quad (26)$$

sein soll, so gehen u_n und u_n' mit wachsendem n identisch gegen Null.

Nun ist aber der Wert, dem sich y_n mit wachsendem n nähert, durch die unendliche Reihe

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots \quad (27)$$

gegeben.

Es ist aber die Reihe, deren allgemeines Glied dem Absolutwert nach kleiner als

$$(2bA + 2cB) \left(A \frac{a^2}{2} + Ba \right)^{n-2} \quad (28)$$

ist, konvergent, falls (18) erfüllt ist, und zwar gleichmäßig konvergent.

Daher konvergiert $y_n(x)$ gleichmäßig gegen den Grenzwert $y(x)$. Ebenso streben auch $y_n'(x)$ und $y_n''(x)$ gleichmäßig gegen ihre Grenzwerte $y'(x)$ und $y''(x)$. Nun ist aber nach (8)

$$y_n(x) = y_a + y_a'(x - x_a) + \int_{x_a}^x dx \int_{x_a}^x f[x, y_{n-1}(x), y_{n-1}'(x)] dx.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (27) ist es erlaubt, zur Grenze überzugehen und man erhält

$$y(x) = y_a + y_a'(x - x_a) + \int_{x_a}^x dx \int_{x_a}^x f[x, y(x), y'(x)] dx$$

oder, wenn man zweimal differenziert,

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)).$$

$y(x)$ ist also die gesuchte Funktion. Mithin konvergiert das Verfahren der schrittweisen Verbesserung, wenn die Bedingungen (9), (13) und (26) erfüllt sind.

Mit diesem Beweise ist gleichzeitig gezeigt, daß unter den gemachten Voraussetzungen mindestens ein den Anfangsbedingungen genügendes Integral existiert.

§ 65. Anwendung der schrittweisen Verbesserung bei einer Randwertaufgabe.

Wir wenden nunmehr unser Verfahren an, um diejenige Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

zu finden, welche durch zwei vorgeschriebene Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ hindurchgeht.

Indem $x_2 > x_1$ vorausgesetzt wird und die Werte y gesucht werden, welche zu den Abszissen x gehören, die zwischen x_1 und x_2 liegen, kann man P_1 als Anfangspunkt, P_2 als Endpunkt der Integralkurve bezeichnen.

Das hier vorliegende „Randwertproblem“ ist viel schwieriger als die bisher behandelten „Anfangsprobleme“, für welche nach unseren Betrachtungen, wenigstens in genügender Nähe des Anfangspunktes, stets eine Lösung vorhanden ist. Es ist hier möglich, daß das Problem eine, mehrere oder unendlich viele Lösungen zuläßt, es kann aber auch keine einzige Lösung der

Differentialgleichung (1) durch die vorgeschriebenen Punkte (2) hindurchgehen. Wir zeigen dies an dem nachstehenden einfachen Beispiele. Gegeben sei die Differentialgleichung (2)

$$y'' + y = 0, \quad (2)$$

und P_1 sei der Ursprung des Koordinatensystems $x_1 = 0, y_1 = 0$; P_2 sei beweglich. Wir stellen uns die Aufgabe, die Anzahl der Lösungen durch die Punkte P_1, P_2 festzustellen.

Bekanntlich hat die Differentialgleichung (2) das allgemeine Integral

$$y = A \sin x + B \cos x. \quad (3)$$

Diejenigen Lösungen, welche durch P_1 hindurchgehen, sind durch

$$y = A \sin x \quad (4)$$

gegeben, da ja für $x=0$ $y=0$ sein muß. Soll nun für $x=x_2$ sein $y=y_2$, also unsere Lösung auch durch den Punkt P_2 hindurchgehen, so müßte

$$y_2 = A \sin x_2$$

werden, oder die Konstante A der Gleichung (4) wäre durch

$$A = \frac{y_2}{\sin x_2} \quad (5)$$

bestimmt. Dies ist auf eindeutige Art so lange möglich, als $\sin x_2$ nicht verschwindet. Ist also für die Abszisse x_2 von P_2 $\sin x_2 \neq 0$, so gibt es eine und nur eine Lösung der Differentialgleichung (2), welche durch die vorgeschriebenen Punkte hindurchgeht. Ist aber $\sin x_2 = 0$, d. h. x_2 gleich einem ganzzahligen Vielfachen von π : $x_2 = k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$, da $x_2 > x_1 = 0$), so ergibt sich aus (4), daß bei beliebigem A für $x = x_2$ $y = 0$ ist. Ist also $x_2 = k\pi$ und $y_2 = 0$, so gibt es unendlich viele Lösungen des gestellten Problems; ist aber $y_2 \neq 0$, so gibt es keine einzige Lösung.

Eine leichte Überlegung zeigt, daß alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sich ähnlich verhalten.

Wir wollen nun zeigen, wie man das Verfahren der schrittweisen Verbesserung benutzen kann, um die gesuchte Lösung von (1) zu finden.

Wie im Falle der Anfangsbedingungen (§ 64) geht man von zwei Anfangskurven $y_0(x), y_0'(x)$ aus, welche keiner besonderen Voraussetzung unterworfen zu sein brauchen. Je besser

sie aber mit den gesuchten Kurven übereinstimmen, um so schneller wird das Verfahren zum Ziel führen. In vielen Fällen ist es möglich, die Differentialgleichung (1) durch eine formal lösbare zu ersetzen, welche mit ihr augenähert übereinstimmt; die sich ergebende Lösung wird man dann nebst ihrer ersten Ableitung als Anfangskurven benutzen.

Man arbeitet wieder in drei Koordinatensystemen y, y' und y'' (Fig. 169) und bildet eine Reihe von Kurven

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

mit Hilfe der Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} y_1'' &= f(x, y_0(x), y_0'(x)) \\ y_2'' &= f(x, y_1, y_1') \\ \vdots \\ y_n'' &= f(x, y_{n-1}, y_{n-1}') \end{aligned} \right\} (6)$$

Hierbei hat man aber alle Kurven $y_n(x)$ so zu bestimmen, daß sie durch die gegebenen Punkte P_1 und P_2 hindurchgehen. Daß dies stets auf eindeutige Art und Weise möglich ist, soll im folgenden gezeigt werden.

Das Problem besteht darin, die gegebene Kurve

$$y'' = \varphi(x) \quad (7)$$

zweimal so zu integrieren, daß sie durch die gegebenen Punkte P_1, P_2 hindurchgeht.

Integrieren wir (7), indem wir für $x = x_1$ $y' = C_1$ beliebig wählen, so wird

$$y' = \int_{x_1}^x \varphi(x) dx + C_1. \quad (8)$$

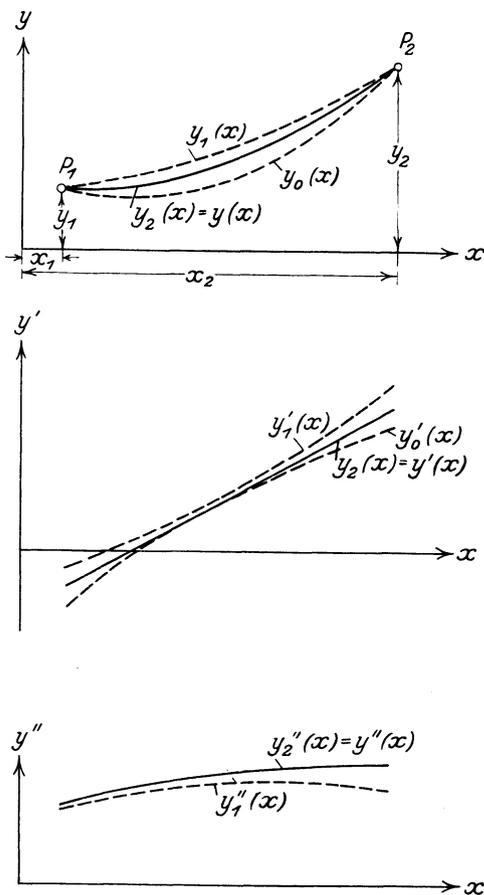


Fig. 169. Graphische Lösung eines Randwertproblems.

Integrieren wir nochmals, indem wir annehmen, daß für $x = x_1$ $y = C_2$ werden soll, so wird

$$y(x) = \int_{x_1}^x dx \int_{x_1}^x \varphi(x) dx + C_1(x - x_1) + C_2 \quad (9)$$

das allgemeine Integral von (7). Hier haben wir nun die Integrationskonstanten C_1 und C_2 so zu bestimmen, daß für $x = x_1$ $y = y_1$ und für $x = x_2$ $y = y_2$ wird. Aus der ersten Bedingung folgt

$$C_2 = y_1; \quad (10)$$

aus der zweiten ergibt sich daher

$$y_2 = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{x_1}^x \varphi(x) dx + C_1(x_2 - x_1) + y_1$$

oder

$$C_1 = \frac{y_2 - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{x_1}^x \varphi(x) dx - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (11)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 lassen sich gemäß (10) und (11) eindeutig bestimmen, und daher existiert stets eine einzige Lösung von (7), welche durch die gegebenen Punkte P_1 und P_2 hindurchgeht. Wir wollen nun zeigen, wie man sie praktisch finden kann (Fig. 170). Zu diesem Zweck integrieren wir zunächst $y'' = \varphi(x)$ einmal, indem wir für $x = x_1$ einen beliebigen Wert $y_1'^*$ annehmen. Die zweite Integration führt man zweckmäßig so aus, daß man die Integralkurve durch den Punkt P_1 hindurchlegt. Es entsteht so die Kurve y_2^* . Der $x = x_2$ entsprechende Punkt möge mit P_2^* bezeichnet werden; y_2^* sei seine Ordinate. Man verbindet nun P_2^* und ebenso P_2 mit P_1 durch eine gerade Linie. Auf einer Parallelen zur Ordinatenachse, welche den Abstand x von ihr hat ($x_1 \leq x \leq x_2$), mögen die Punkte P^* , S^* und S der Kurve y^* und der Verbindungsgeraden $P_1P_2^*$ und P_1P_2 liegen. Man trägt dann die Entfernung S^*P^* unter Berücksichtigung der Richtung von S aus bis zum Punkte P ab. Führt man diese Konstruktion für alle Werte x durch, so entsteht eine Kurve der Punkte P , welche ersichtlich durch P_1 und P_2 hindurchgeht und mit $y(x)$ bezeichnet werde. Es soll gezeigt werden, daß $y(x)$ die gesuchte Lösung von (7) ist.

Zunächst ist gemäß Konstruktion $y^*(x)$ eine Lösung von (7), folglich — nach (9) — auch jede Kurve, welche sich von

ihr um den Betrag $C(x - x_1)$ unterscheidet. Nun hat aber die Gerade $P_1 P_2^*$ die Richtungskonstante $\frac{y_2^* - y_1}{x_2 - x_1}$, während die von $P_1 P_2$ gleich $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ist. Folglich ist die Strecke SS^*

gleich $-\frac{y_2^* - y_2}{x_2 - x_1} \cdot x$. Um

denselben Betrag unterscheiden sich aber auch die Ordinaten der Punkte P und P^* . Mithin ist

$$y(x) = y^*(x) - \frac{y_2^* - y_2}{x_2 - x_1} x,$$

$$C = -\frac{y_2^* - y_2}{x_2 - x_1},$$

also $y(x)$ nach den obigen Betrachtungen eine Lösung von (7). Da $y(x)$ auch durch die gegebenen Punkte geht, ist es die gesuchte Lösung.

Die erste Ableitung

$$y'(x) = y'^*(x) - \frac{y_2^* - y_2}{x_2 - x_1}$$

braucht nicht gezeichnet zu werden; es genügt, wenn man an der Kurve $y'^*(x)$ vermerkt, daß die Ordinaten der gesuchten Kurve um den Betrag $\frac{y_2^* - y_2}{x_2 - x_1}$ kleiner sind.

Das gestellte Problem ist ersichtlich identisch mit dem Aufsuchen der Seilkurve durch zwei gegebene

Punkte P_1 und P_2 , wenn die Belastung $q = \frac{f(x)}{H}$ ist (§ 25).

Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen ist man imstande, die Näherungskurven $y_n(x)$ durch die gegebenen Punkte

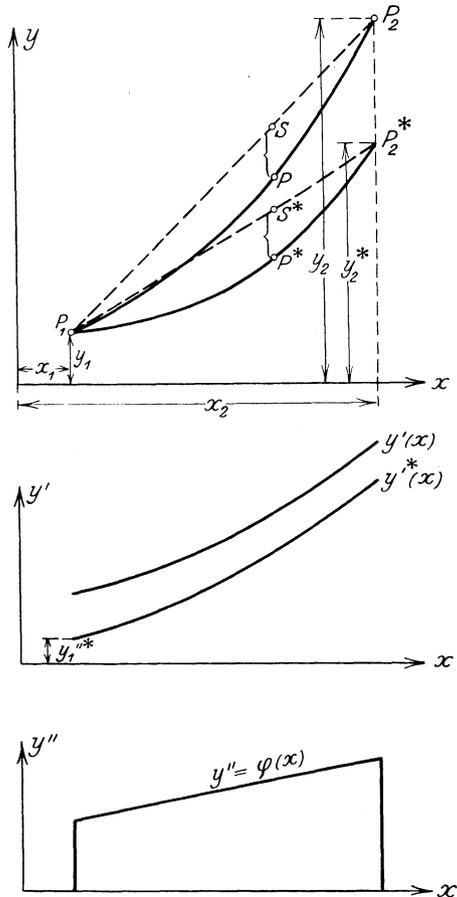


Fig. 170. Lösung des Randwertproblems für $y'' = \varphi(x)$.

zu legen; es soll nun nach E. Picard⁷⁶⁾ gezeigt werden, unter welchen Bedingungen das Verfahren konvergieren muß, d. h. wann bei beliebigen Anfangskurven $y_0(x)$, $y_0'(x)$, $y_n(x)$ mit wachsendem n sich immer mehr der gesuchten Kurve $y(x)$ nähert. Man muß die folgenden Bedingungen beachten:

a) $f(x, y, y')$ sei eine stetige, eindeutige Funktion der Argumente x, y, y' , wenn x im Intervall (x_1, x_2) liegt und y und y' innerhalb der Intervalle $+L$ und $-L$, bzw. $+L'$ und $-L'$ liegen. Unter diesen Bedingungen sei M der größte Absolutwert der Funktion $f(x, y, y')$. L, L' und M sind positive Konstante.

b) $f(x, y, y')$ soll wiederum der Lipschitzschen Bedingung genügen, wonach es zwei positive Zahlen α und β gibt, derart, daß

$$|f(x, y, y') - f(x, \bar{y}, \bar{y}')| < \alpha |y - \bar{y}| + \beta |y' - \bar{y}'|$$

für alle Werte $x; y, \bar{y}; y', \bar{y}'$ ist, welche der Bedingung a) genügen.

c) $y_0(x)$ und $y_0'(x)$ sollen den Bedingungen a) genügen.

Picard beweist zunächst den Hilfssatz, daß, falls $y'' = \varphi(x)$ und der Absolutwert von $\varphi(x)$ kleiner als K ist (K eine positive Konstante), sich für den Absolutwert der Lösung $y(x)$, welche durch die Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ hindurchgeht, eine obere Schranke angeben läßt; es ist

$$|y| < \frac{K}{8} (x_2 - x_1)^2 + |y_{1,2}|. \quad (12)$$

Ferner gilt für die erste Ableitung nach x

$$|y'| < \frac{K}{2} |x_2 - x_1| + \left| \frac{y_{1,2}}{x_2 - x_1} \right|. \quad (13)$$

Hierbei ist unter $y_{1,2}$ der absolut größere Wert der Ausdrücke y_1, y_2 zu verstehen. Da $y_1'' = f(x, y_0(x), y_0'(x))$ ist, so ist gemäß a) und c) $|y_1''| < M$. Folglich liegen nach den obigen Betrachtungen y_1 und y_1' in den angegebenen Grenzen, wenn die Bedingungen

$$\frac{M}{8} (x_2 - x_1)^2 + |y_{1,2}| < L, \quad (I)$$

$$\frac{M}{2} |x_2 - x_1| + \left| \frac{y_{1,2}}{x_2 - x_1} \right| < L' \quad (II)$$

erfüllt sind. Hieraus folgt, daß $|y_2''| < M$ ist usw. Alle Kurven $y_n(x)$ und $y_n'(x)$ genügen den Bedingungen a). Die Ungleichungen (I), (II) können stets erfüllt werden, wenn x_2 in genügender Nähe von P_1 liegt. Es soll nun gezeigt werden, daß $y_n(x)$ mit wachsendem n gegen eine Grenze geht.

Gemäß b) ist

$$\left| \frac{d^2(y_2(x) - y_1(x))}{dx^2} \right| = |f[x, y_1(x), y_1'(x)] - f[x, y_0(x), y_0'(x)]|$$

$$< \alpha |y_1(x) - y_0(x)| + \beta |y_1'(x) - y_0'(x)|.$$

Bezeichnet man den größten Wert der rechten Seite mit N , so wird, weil $y_2(x) - y_1(x)$ für $x = x_1$ und $x = x_2$ verschwindet, nach (12) und (13)

$$|y_2(x) - y_1(x)| < \frac{N}{8} (x_2 - x_1)^2, \quad |y_2'(x) - y_1'(x)| < \frac{N}{2} |x_2 - x_1|.$$

Die Beziehung

$$\left| \frac{d^3(y_3(x) - y_2(x))}{dx^2} \right| < \alpha |y_2(x) - y_1(x)| + \beta |y_2'(x) - y_1'(x)|$$

$$< \alpha \frac{N}{8} (x_2 - x_1)^2 + \beta \frac{N}{2} |x_2 - x_1|$$

zeigt, daß

$$|y_3(x) - y_2(x)| < N \left[\frac{\alpha}{8} (x_2 - x_1)^2 + \frac{\beta |x_2 - x_1|}{2} \right] \frac{(x_2 - x_1)^2}{8},$$

$$|y_3'(x) - y_2'(x)| < N \left[\frac{\alpha}{8} (x_2 - x_1)^2 + \frac{\beta |x_2 - x_1|}{2} \right] \frac{|x_2 - x_1|}{2}$$

wird.

Nach und nach ergibt sich

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < N \left[\frac{\alpha}{8} (x_2 - x_1)^2 + \frac{\beta |x_2 - x_1|}{2} \right]^{n-2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{8},$$

$$|y_n'(x) - y_{n-1}'(x)| < N \left[\frac{\alpha}{8} (x_2 - x_1)^2 + \frac{\beta |x_2 - x_1|}{2} \right]^{n-2} \frac{|x_2 - x_1|}{2}$$

ist.

Wenn also

$$\frac{\alpha}{8} (x_2 - x_1)^2 + \frac{\beta |x_2 - x_1|}{2} < 1 \tag{III}$$

ist, so ist die Reihe

$$Y(x) = y_1(x) + [y_2(x) - y_1(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \dots$$

konvergent, und folglich hat $y_n(x)$ eine Grenze, wenn n gegen ∞ geht. Die Funktion $Y(x)$ besitzt eine erste Ableitung nach x :

$$Y'(x) = y_1'(x) + [y_2'(x) - y_1'(x)] + \dots + [y_n'(x) - y_{n-1}'(x)] + \dots$$

Man kann leicht zeigen, daß $Y(x)$ der Differentialgleichung (1) genügt. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \int_{x_1}^x f(z, y_{n-1}(z), y_{n-1}'(z)) (x-z) dz + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \\ &\quad + y_1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(z, y_{n-1}, y_{n-1}'(z)) (x_2 - z) dz. \end{aligned}$$

Da $y_n(x)$ und $y_n'(x)$ gleichmäßig gegen ihre Grenzen $y(x)$ und $y'(x)$ gehen, so ist

$$\begin{aligned} Y(x) &= \int_{x_1}^x f(z, Y(z), Y'(z)) (x-z) dz + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1 \\ &\quad - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(z, Y(z), Y'(z)) (x_2 - z) dz, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich, wenn man zweimal nach x differenziert: $Y''(x) = f(x, Y(x), Y'(x))$. Da $Y(x)$ auch den Randbedingungen (2) genügt, so ist es die gesuchte Integralkurve und folglich konvergiert das Verfahren der schrittweisen Verbesserung, wenn die Bedingungen a), b), c), (I), (II) und (III) erfüllt sind.

Wir wollen die Methode an einem Beispiel praktisch erläutern; es ist wohl das erste Mal, daß das Verfahren der schrittweisen Verbesserung zur graphischen Lösung eines Randproblems benutzt wird.

Ein Pendel von den Abmessungen $\frac{l}{g} = 10$ (l Länge des Pendels, g Beschleunigung der Schwerkraft) erhalte durch eine periodische, gleichgerichtete Kraft P Antrieb (Fig. 171, Tafel I). Der Bewegung wirke Dämpfung entgegen: $\frac{k}{mg} = 2$ (k Dämpfungskonstante, m Masse des Pendels). Dem Pendel soll eine solche

Additional material from *Die Differentialgleichungen des Ingenieurs*,
ISBN 978-3-662-40944-2 (978-3-662-40944-2_OSFO1),
is available at <http://extras.springer.com>



Anfangsgeschwindigkeit erteilt werden, daß nach drei Sekunden der Ausschlag gleich Eins wird.

Die Pendelgleichung lautet:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{g}{l} \sin y + \frac{k}{ml} \frac{dy}{dx} = \frac{P}{ml},$$

mithin ergibt sich durch Einsetzen der gegebenen Werte

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{10} \sin y + \frac{1}{5} \frac{dy}{dx} = \frac{P}{10 mg}. \quad (14)$$

Hierin bedeutet x die Zeit und y den Ausschlagwinkel, im Bogenmaß gemessen. $\frac{P}{10 mg}$ ist graphisch gegeben.

Zur Konstruktion der Näherungskurven wurde $\sin y$ durch y ersetzt und so die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{10} y + \frac{1}{5} \frac{dy}{dx} = \frac{P}{10 mg} \quad (15)$$

erhalten. Durch den Punkt P_1 wurde eine Lösung $y_I(x)$ hindurchgelegt; für $x = 3$ ergab sich der Wert $y_I(3) = 8,39$. Durch denselben Punkt P_1 wurde eine zweite Integralkurve hindurchgelegt, welche der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{10} y + \frac{1}{5} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (16)$$

genügt und diese nachträglich mit einem solchen Faktor multipliziert, daß sich für $x = 3$ der Wert $-7,39$ ergab. Es entstand so die Kurve $y_{II}(x)$. Es sind dann

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_I(x) + y_{II}(x), \\ y_0'(x) &= y_I'(x) + y_{II}'(x) \end{aligned}$$

nach bekannten Sätzen Lösungen von (15); da $y_0(x)$ außerdem durch die gegebenen Punkte P_1 und P_2 hindurchgeht, kann es als Anfangskurve benutzt werden.

Bei Anwendung des Verfahrens ergab sich, daß bereits $y_3(x)$ mit $y_2(x)$ übereinstimmt, also die gesuchte Lösung darstellt. Die Abweichungen von der Näherungslösung $y_0(x)$ sind für die größte Abweichung des Pendels aus der Ruhelage am größten; ihr maximaler Wert beträgt 0,136 oder angenähert 8^o; der relativ größte Fehler ist angenähert 5^o/₀.

§ 66. Prüfung der Verfahren nach Gümbel und Duffing durch schrittweise Verbesserung.

Die nach G. Duffing am Schluß des § 63 untersuchte Differentialgleichung einer gedämpften Pendelschwingung

$$y'' + 0,5 y' + \sin y = 0 \quad (1)$$

soll unter denselben Anfangsbedingungen

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 4 \quad (2)$$

nach dem Verfahren der Seilkurve, § 60, integriert werden.

Fig. 172 ist nach einer Arbeit von Gümbel⁷⁷⁾ entworfen worden.

Durch Einzeichnung der Kurve $\sin y$ ist erreicht, daß zu jedem Ordinatenwerte y der zugehörige Wert $\sin y$ aus der Zeichnung abgegriffen werden kann.

Die Konstruktion der Näherungskurven geschieht wie folgt.

Man legt zwei Kräftepläne an, beide zweckmäßig mit O_1 , dem Ursprung des Koordinatensystems, als Pol, und den Polabständen $O_1 b$ bzw. $O_1 a$ (Haupt- bzw. Hilfskräfteplan).

Die Strahlen des Hauptkräfteplans sollen die Tangentenrichtungen der y -Kurve liefern; demnach ergibt sich der erste Polstrahl $O_1 o$ mit Hilfe der Bedingung $y'_0 = 4$. Dieser Polstrahl bildet zugleich die Anfangstangente für die Kurve y .

Von der zu zeichnenden Kurve y' kennt man gemäß (2) den Anfangspunkt $(0,4)$. Ihre Anfangsrichtung ist durch

$$y''_0 = -0,5 y'_0 - \sin y_0 = -2$$

gegeben. Zur Ermittlung weiterer Tangenten dient der Hilfskräfteplan, in welchem die jeweils zu den y' gehörenden Werte $-(0,5 y' + \sin y)$ vom Punkte a aus auf der Vertikalen bis zu dem Punkte c abgetragen werden. Die Verbindungen der Punkte c mit O_1 liefern die Tangentialrichtungen. Man erhält so zunächst in erster Annäherung die ersten Elemente O_1 der Kurven y und y' und, da zu jedem y das zugehörige $\sin y$ der Zeichnung entnommen werden kann, auch das erste Element von

$$y'' = -(0,5 y' + \sin y).$$

In der Figur ist die Ordinate der y'' -Kurve mit negativem Vorzeichen eingetragen. Nun bestimmt man den Inhalt des zu diesem ersten Element gehörigen Flächenstreifens

$$y' = - \int (0,5 y' + \sin y) dx$$

und überträgt ihn maßstabgerecht als Strecke $O_1 1$ in den Hauptkräfteplan.

Die Verbindung $O_1 1$ liefert die Richtung der y -Kurve im Punkte 1. Die x -Parallele durch den Punkt 1 des Hauptkräfte-

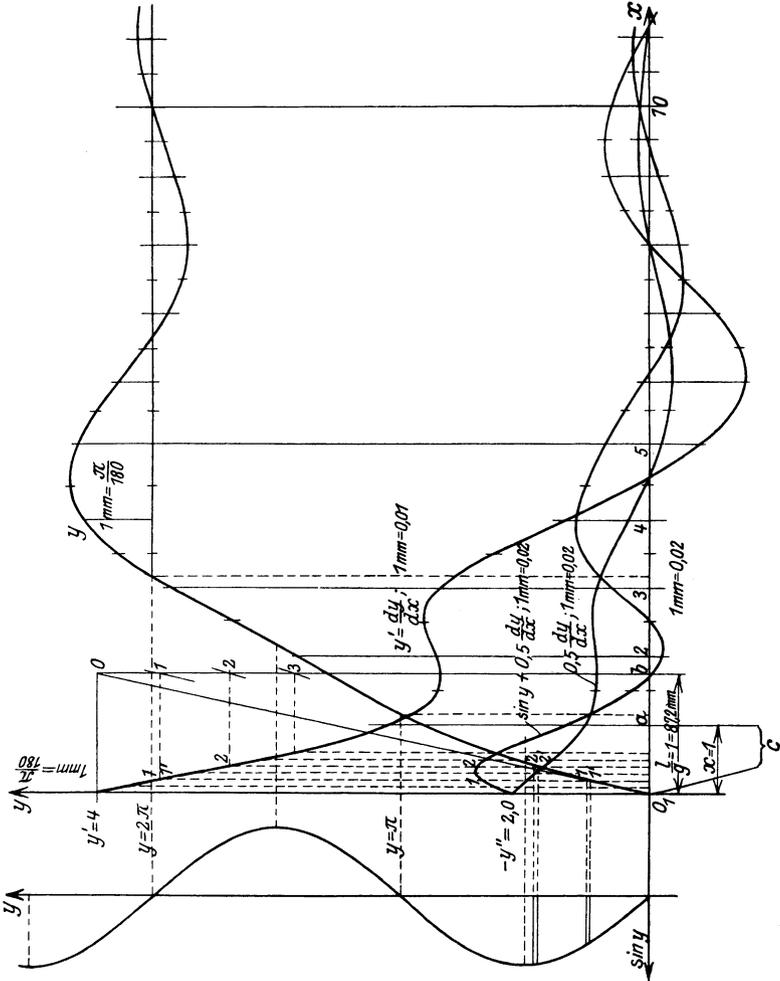


Fig. 172. Anwendung des Gümbelschen Verfahrens.

plans bestimmt auf der Endordinate des ersten Elements den Punkt $1'$ von y' . Die zugehörige Tangente findet man, indem man den Wert $-(0,5 y' + \sin y)$ von a aus in den Hilfskräfte-

plan bis zum Punkte c einträgt und durch $1'$ eine Parallele zu dem zugehörigen Polstrahl O_1c legt.

So finden sich die zweiten Elemente der y - und y' -Kurve sowie der Kurve $y'' = -(0,5y' + \sin y)$ usf.

Die Abbildung gibt einen Überblick über den y -Kursverlauf bis $x = 10$. Das Pendel geht mit rasch abnehmender Geschwindigkeit durch die beiden ersten Quadranten hindurch, dann mit ziemlich gleichbleibender Geschwindigkeit durch den dritten und vierten Quadranten; nachdem so ein ganzer Umschwung vollzogen ist, verbleiben die weiteren Ausschläge im 1. und 4. Quadranten. Das Pendel nähert sich in gedämpften Schwingungen der Ruhelage.

Einige Zahlenwerte sind auf Seite 308 angegeben. Dieselben weichen sehr wenig von den nach Duffing ermittelten Werten ab. Es wäre nun immerhin möglich, daß die Näherungswerte beider Methoden sich in derselben Weise von der wahren Lösung entfernen und daß daher trotz der Übereinstimmung beträchtliche Fehler vorhanden sind. Um zu untersuchen, ob dies der Fall ist, wurde das vorliegende Problem (1) (2) nach der Methode der schrittweisen Verbesserung behandelt (§ 64), welche es gestattet, die wahren Werte y mit möglicher Genauigkeit zu ermitteln (Fig. 173, Tafel II).

Tabelle 12.

1	2	3	4	5	6 = -[4 + 5]	7	8
x	y_0'	y_0	$0,5 y_0'$	$\sin y_0$	y_0''	$\int y_0'' dx$	y_1'
0,00	4	0	2	0	-2	-0,1048	4
0,05	4	0,20	2	0,199	-2,1990	-0,1147	3,8952
0,10	4	0,40	2	0,389	-2,3890	-0,1237	3,7805
0,15	4	0,60	2	0,565	-2,5660		3,6568
x	y_1'	y_1	$0,5 y_1'$	$\sin y_1$	y_1''	$\int y_1'' dx$	y_2'
0,00	4	0	2	0	-2	-0,1036	4
0,05	3,8952	0,1971	1,9476	0,1961	-2,1437	-0,1102	3,8964
0,10	3,7805	0,3889	1,8903	0,3790	-2,2693	-0,1161	3,7862
0,15	3,6568	0,5747	1,8284	0,5450	-2,3734		3,6701
x	y_2'	y_2	$0,5 y_2'$	$\sin y_2$	y_2''	$\int y_2'' dx$	y_3'
0,00	4	0	2	0	-2	-0,1035	4
0,05	3,8964	0,1972	1,9482	0,1961	-2,1443	-0,1103	3,8965
0,10	3,7862	0,3892	1,8931	0,3790	-2,2721	0,1162	3,7862
0,15	3,6701	0,5755	1,8350	0,5450	-2,3800		4,6700

Additional material from *Die Differentialgleichungen des Ingenieurs*,
ISBN 978-3-662-40944-2 (978-3-662-40944-2_OSFO2),
is available at <http://extras.springer.com>



Es wäre das einfachste gewesen, eine der beiden Näherungslösungen als Anfangskurve zu benutzen. Um aber zu zeigen, wie rasch das Verfahren konvergiert, selbst wenn man keine Anhaltspunkte über den Verlauf der Lösung hat, wurde hiervon abgesehen. Vielmehr wurde, entsprechend der Anfangsbedingung (2), als Näherungslösung $y_0(x) = 4x$ gewählt und diese Kurve zwischen $x = 0$ und $x = 0,5$ verbessert. Die Tabelle 12 zeigt den Rechnungsgang für die drei ersten drei Schritte dieses Intervalles. Dabei sind die Integrationen, die bei den Übergängen zwischen den Kolonnen 2 und 3 bzw. 6 und 7 notwendig werden, mittels Flächeninhaltsberechnungen der über den Abszissenintervallen $\Delta x = 0,05$ stehenden Trapeze ausgeführt. Dreimalige Durchführung des Näherungsprozesses liefert das Ergebnis, daß die zweite und dritte Näherung sich erst in der vierten Stelle unterscheiden ($y_2' \approx y_3'$; also auch $y_2 \approx y_3$). Graphisch (Fig. 173, Tafel II) geht die Genauigkeit weiter: $y_3 = y_4$; $y_3' = y_4'$; $y_4'' = y_5''$. Die sich hiernach für $x = 0,5$ ergebenden Werte wurden als Ausgangspunkte für die Fortsetzung des Verfahrens benutzt. Hierzu wurde die Kurve y'' dem wahrscheinlichen Verlauf entsprechend bis $x = 1$ verlängert ($y_0''(x)$) und dem geschilderten Verfahren unterworfen. Entsprechend wurden dann die Kurven in Abszissenintervallen der Größe 0,5 bis $x = 2,5$ fortgesetzt, wie in Fig. 173 dargestellt.

In der nachstehenden Tabelle 13 ist das Ergebnis für einige Werte x mitgeteilt; ferner ist angegeben, um wieviel sich die nach Duffing und Gümbel gefundenen Näherungen von ihnen unterscheiden.

Tabelle 13.

	Verfahren der schrittweisen Verbesserung	Abweichung der Näherung nach Duffing	Abweichung der Näherung nach Gümbel
$x = 0,5$	$y = 1,708$	0	—
$x = 1$	$y = 2,853$	+ 0,020	- 0,010
$x = 1,5$	$y = 3,684$	+ 0,007	—
$x = 2$	$y = 4,444$	+ 0,025	- 0,007
$x = 2,5$	$y = 5,238$	+ 0,018	—

Die Methode von Duffing gibt also etwas zu große, die von Gümbel zu kleine Werte y . Aber die Gümbelschen Werte liegen in dem betrachteten Intervall der wahren Lösung bedeutend näher als die von Duffing.

VIII. Mechanische Integration von Differentialgleichungen.^{77a)}

§ 67. Integration linearer Differentialgleichungen nach Pascal.

Die linearen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Störungsfunktion lassen sich mechanisch integrieren.

I. Betrachten wir zunächst etwa die Gleichung (2) § 21

$$\frac{L}{W} \frac{dJ}{dt} + J = \frac{E}{W}, \quad (1)$$

so hat man mit $\frac{L}{W} = a$ und $\frac{E}{W} = f(t)$ die Form der Gleichung mit Störungsfunktion

$$a \frac{dJ}{dt} + J = f(t). \quad (2)$$

Diese Gleichung wird nach folgendem Prinzip mechanisch integriert:

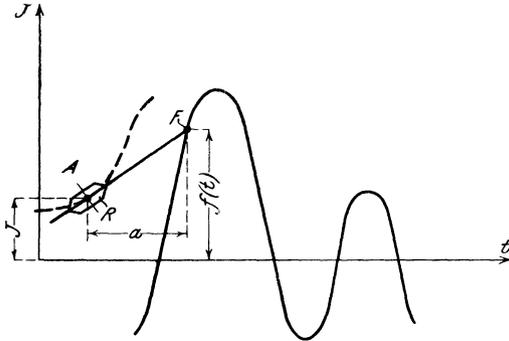


Fig. 174. Mechanische Integration einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine scharfkantige Rolle R (Fig. 174) ist so mit einem Fahrstift F verbunden, daß 1. die Rollenebene stets durch F geht und 2. der in Richtung der Abszissenachse gemessene Abstand von F und dem Berührungspunkt A der Rolle $= a$ ist, während F die im Koordinatensystem J, t gezeichnete Kurve $f(t)$ durchläuft. Wie sich aus der Figur ergibt, durchläuft A dann eine Kurve, für deren Ordinaten J die Beziehung gilt:

$$\frac{f(t) - J}{a} = \frac{dJ}{dt}, \quad f(t) = J + a \frac{dJ}{dt}.$$

Dies ist aber unsere gegebene Differentialgleichung.

Um im übrigen den Verlauf von J zu dem von $f(t)$ in die richtige zeitliche Beziehung zu setzen, muß die J -Kurve parallel mit sich um die Strecke a in der Richtung der positiven t verschoben werden⁷⁸⁾.

Die Ausführung des Verfahrens besorgt ein integrativenähnliches Instrument (Fig. 175):

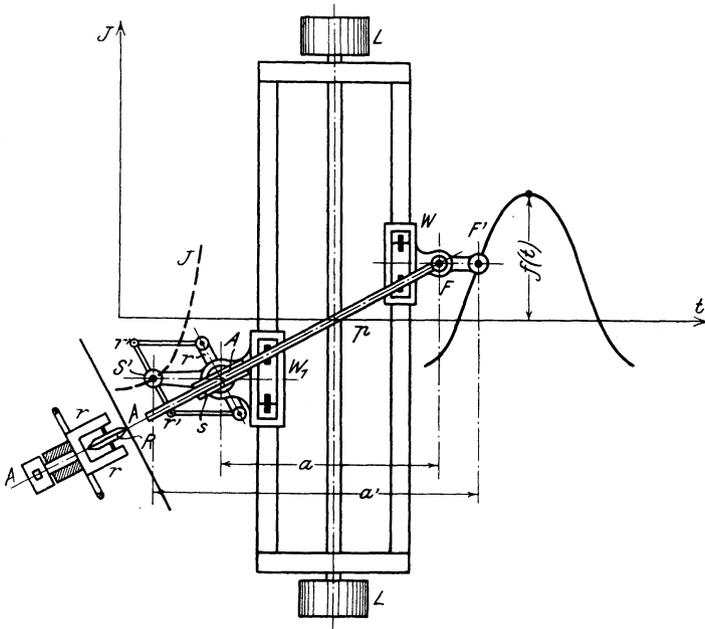


Fig. 175. Mechanischer Integrator für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Auf den Wangen eines parallel zur t -Achse verschieblichen Laufrahmens LL bewegen sich zwei Wagen W und W_1 , die den Punkt F bzw. die Rolle R tragen. Die gewünschte Führung von R wird bewirkt durch das Lineal p , welches, in der Führung s gleitend, den um die vertikale Achse AA drehbaren Rollenrahmen rr in der verlangten Richtung erhält. Die Kurve $f(t)$ wird von dem Fahrstift F' durchlaufen, die Kurve J durch die Schreibfeder S' beschrieben, die ihre zur Rollenebene parallele Führung durch das Parallelogramm $rrr'r'$ erhält.

II. Um zur Integration der nicht homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu gelangen, üben wir das beschriebene Verfahren nochmals auf die Kurve J (Fig. 174) aus, aber mit einer anderen Instrumentkonstanten a . Diese sei jetzt b . Es resultiert eine neue Kurve, deren Ordinaten z seien und welche die Differentialgleichung hat

$$z + b \frac{dz}{dt} = J. \quad (3)$$

Differentiiert man diese Formel:

$$\frac{dz}{dt} + b \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dJ}{dt} \quad (4)$$

und setzt (3) und (4) in (2) ein, so kommt:

$$ab \frac{dz}{dt} + ab \frac{d^2z}{dt^2} + z + b \frac{dz}{dt} = f(t) \quad (5)$$

oder anders geordnet:

$$ab \frac{d^2z}{dt^2} + (a+b) \frac{dz}{dt} + z = f(t). \quad (6)$$

Man sieht, die Kurve z genügt einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Störungsfunktion.

Ist andererseits eine solche Differentialgleichung etwa in der Form

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + \beta \frac{dz}{dt} + cz = f(t) \quad (7)$$

gegeben, so hat man zunächst die quadratische Gleichung:

$$\mu^2 + \frac{\beta}{m} \mu + \frac{c}{m} = 0 \quad (8)$$

zu lösen, deren Wurzeln μ_1 und μ_2 seien. Dann führt man das oben beschriebene Verfahren zunächst mit der Instrumentkonstante $a = -\frac{1}{\mu_1}$ an der Kurve $f(t)$ aus, welchen Prozeß

man mit der Instrumentkonstante $b = -\frac{1}{\mu_2}$ an der so erhaltenen Zwischenkurve wiederholt.

Zu bemerken ist hierbei, daß das Verfahren nur bei reellen μ_1 und μ_2 ausführbar ist, also im wesentlichen nur bei aperiodisch gedämpften Schwingungsvorgängen.

§ 68. Der Apparat von Lord Kelvin.

Zur mechanischen Integration der homogenen Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + P \frac{du}{dx} + Qu = 0 \quad (9)$$

hat Lord Kelvin das Prinzip eines Apparates angegeben⁷⁹⁾.

Zunächst multipliziert man (9) mit:

$$\int^{P dx} e^{\int P dx}$$

und kann dann statt (9) schreiben:

$$\frac{d}{dx} \left\{ e^{\int P dx} \frac{du}{dx} \right\} - Q e^{\int P dx} u = 0. \quad (10)$$

Führt man hier eine neue unabhängige Variable z ein durch die Substitution:

$$dz = Q e^{\int P dx} dx, \quad (11)$$

so geht (10) über in:

$$\frac{d}{dz} \left\{ Q e^{\int P dx} \frac{du}{dz} \right\} - u = 0. \quad (12)$$

Hier ist $Q e^{\int P dx}$ eine Funktion von x und vermöge (11) auch von z . Als solche bezeichnen wir sie mit $\frac{1}{U}$:

$$\frac{1}{U} = Q e^{\int P dx}, \quad (13)$$

wonach wir einfach erhalten:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{U} \frac{du}{dz} \right) = u. \quad (14)$$

An diese Gleichung knüpft Lord Kelvin an und konstruiert einen Integrator nach folgendem Prinzip (Fig. 176). Auf zwei gleichen Scheiben S_1 und S_2 , die sich um vertikale Achsen drehen können, rollen längs einem Durchmesser $= a_1 a_1$ bzw. $a_2 a_2$ je eine Kugel K_1 bzw. K_2 . Die Durchmesser $a_1 a_1$ und $a_2 a_2$ sind parallel.

Zu den Durchmessern parallel ist über jeder Scheibe, diese nicht berührend, ein Zylinder C_1 bzw. C_2 angeordnet, der mit der zugehörigen Kugel K_1 bzw. K_2 in Kontakt steht.

Die Kugeln sind in Käfige eingeschlossen, durch deren Bewegung sie längs der Durchmesser verschoben werden können. Die Kugeln stützen sich gegen die Käfige durch kleine Rollen ab, die möglichst reibungslos laufen.

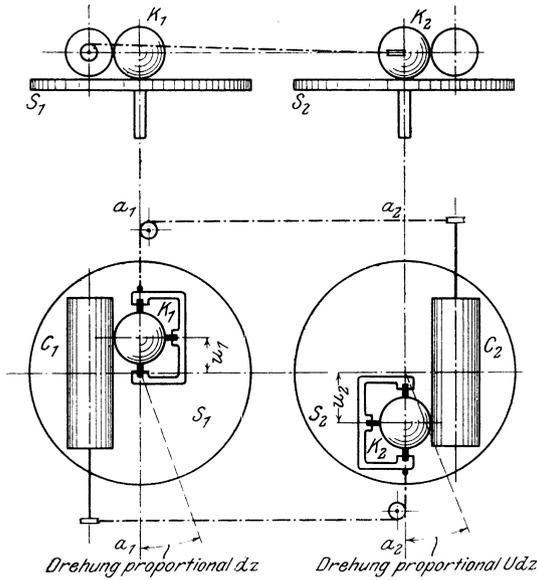


Fig. 176. Lord Kelvins Integrator für lineare Differentialgleichungen.

Es ist ersichtlich, daß etwaige Drehungen der Scheiben sich vermöge der Kugeln auf die Zylinder übertragen, nach Maßgabe des Abstandes der Kugeln von den Scheibenmittelpunkten. Die Übertragung wird vermittelt durch die Reibung zwischen den Kugeln und Scheiben bzw. Zylindern.

Jetzt verbindet man den Käfig der Kugel K_1 mit der Achse des Zylinders C_2 durch eine Schnurübertragung so, daß die Verschiebung der Kugel K_1 der Verschiebung eines Punktes des Zylinderumfangs gleich sein muß. Dieselbe Verbindung führt man aus zwischen der Kugel K_2 und dem Zylinder C_1 .

Dreht man jetzt die Scheibe S_1 proportional dz , die Scheibe S_2 proportional Udz , so wird die Verschiebung u der

Kugel K_1 aus ihrer Mittellage in Abhängigkeit von z der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{U} \frac{du}{dz} \right\} = u \quad (15)$$

genügen.

Beweis: Es seien in einem beliebigen Augenblicke u_1 bzw. u_2 die Abweichungen der beiden Kugeln von ihrer Mittellage. Dreht man jetzt die Scheibe S_1 proportional dz , so durchläuft jeder Punkt des Zylinders C_1 den Bogen $u_1 dz$. Analog durchläuft C_2 , wenn die Achse von S_2 um $U dz$ gedreht wird, den Bogen $u_2 U dz$. Durch die Schnurverbindungen werden aber dauernd die Beziehungen aufrechterhalten:

$$u_1 dz = du_2 \quad \text{und} \quad u_2 U dz = du_1. \quad (16)$$

Eliminiert man hier u_2 , so kommt:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{U} \frac{du_1}{dz} \right) = u_1, \quad (17)$$

d. h. die mechanisch zu integrierende Differentialgleichung.

Es bleibt nur noch übrig, die Bewegung u_1 der Kugel K_1 in Abhängigkeit von z automatisch aufzuzeichnen, worüber wir uns hier nicht verbreiten wollen.

Bemerkenswert ist, daß man die mechanische Lösung der Differentialgleichung (15) den Anfangsbedingungen anpassen kann. Seien u_1 und u_2 die für $z = z_0$ eingestellten Kugelabstände, so hat man für $z = z_0$:

$$u = u_1 \quad \text{und} \quad \frac{du}{dz} = u_2 U,$$

d. h. durch die Auswahl von u_1 und u_2 kann man die Lösung den für $z = z_0$ gegebenen Werten u_0 und $\left. \frac{du}{dz} \right|_0$ anpassen.

Alle vorstehend geschilderten Operationen von der Transformation der Gleichung (9) an bis zur Operation mit dem Kelvinschen Integrator lassen sich zumindest graphisch durchführen. Es ergibt sich also die Möglichkeit, der Differentialgleichung (9) auf mechanischem Wege beizukommen, während ihre analytische Integration auf elementarem Wege gar nicht möglich ist. Nur durch die Hilfsmittel der Funktionentheorie kann man sich im allgemeinen Falle einen Überblick über die Eigenschaften ihres Integrals verschaffen.

Zweiter Teil.

Partielle Differentialgleichungen.

I. Einleitung.

§ 69. Die Funktionen mehrerer Variablen.

In den bisherigen Untersuchungen handelte es sich lediglich um die funktionale Abhängigkeit einer oder mehrerer abhängiger Variablen von einer unabhängigen Variablen.

Nun sind aber auch funktionale Beziehungen möglich, bei denen eine Variable z von zwei unabhängig voneinander veränderlichen Größen x und y abhängt. Das Symbol für eine solche Abhängigkeit ist die Gleichung:

$$z = f(x, y). \quad (1)$$

Die Änderung Δz einer derartig bestimmten Größe z hängt nun, ebenso wie die Größe selbst, von x und y , von den beiden Änderungen Δx und Δy der unabhängigen Variablen gleichzeitig ab.

Ändert man also, von einem Anfangswertpaar x_0, y_0 ausgehend, die unabhängigen Variablen um Δx und Δy ab, so erhält man in

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

die totale Änderung Δz von z :

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (2)$$

Würde man dagegen nur die eine Variable x ändern, während y konstant $= y_0$ bleibt, so würde man in

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

die partielle Änderung von z nach x erhalten

$$\Delta z_{(x)} = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \quad (3)$$

Analog heißt

$$\Delta z_{(y)} = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (4)$$

die partielle Änderung von z nach y .

Ein Beispiel für eine derartige Abhängigkeit bietet die Zustandsgleichung der vollkommenen Gase:

$$10000 p V = G R T.$$

Diese Gleichung gilt für eine der Gewichtseinheit gleiche Menge G eines Gases in kg, wenn p in kg/qcm, V in cbm, T in absoluten Celsiusgraden gemessen wird; die Gaskonstante R hat für Luft den Wert 29,26.

Diese Gleichung ist z. B. erfüllt bei der Gewichtsmenge $G = 1,188$ kg für:

$$\begin{aligned} p &= 1 \text{ kg/qcm,} \\ V &= 1 \text{ cbm,} \\ T &= 288 \text{ entspr. } 15^\circ \text{ C.} \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Änderung des Druckes p verfolgen, wenn wir das Volumen V und die Temperatur T ändern.

Zunächst schreiben wir:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1,188 \cdot 29,26 \cdot T}{10000 V} \\ &= 0,00348 \frac{T}{V}. \end{aligned}$$

Nun ändern wir V um $\Delta V = 0,1$ cbm, d. h. wir gestatten dem Gas, den Raum 1,1 cbm einzunehmen, sorgen aber dafür, daß die Temperatur T konstant = 288 bleibt. Dann wird

$$\begin{aligned} \Delta p_{(V)} &= 0,00348 \frac{288}{1,1} - 0,00348 \frac{288}{1,0} \\ &= 0,91 - 1,0 \\ &= - 0,09 \text{ kg/cm.} \end{aligned}$$

Ändern wir aber nun die Temperatur T , indem wir das Gas um 50° erwärmen, wobei wir das Volumen 1 cbm beibehalten, dann wird

$$\begin{aligned} \Delta p_{(T)} &= 0,00348 \frac{338}{1,0} - 0,00348 \frac{288}{1,0} \\ &= 1,18 - 1,0 \\ &= + 0,18 \text{ kg/cm.} \end{aligned}$$

Werden beide Änderungen gleichzeitig vorgenommen, so wird die totale Änderung von p

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0,00348 \frac{338}{1,1} - 0,00348 \frac{288}{1,0} \\ &= 1,07 - 1,0 \\ &= + 0,07 \text{ kg/cm.} \end{aligned}$$

Sämtliche Druckänderungen sind verschieden, es soll nun ein Zusammenhang zwischen ihnen gefunden werden.

II. Wir greifen zurück auf die Definition der totalen Änderung

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Diese schreiben wir in der Form

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x \\ &\quad + \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \Delta y \end{aligned}$$

und untersuchen, was aus dieser Formel wird, wenn wir Δx und Δy gegen Null abnehmen lassen.

Offenbar ist zunächst

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x}$$

ein Differenzquotient, der so gebildet ist, als ob wir bei der Funktion $f(x, y)$ bei konstantem $y = y_0 + \Delta y$ von $x = x_0$ zu $x = x_0 + \Delta x$ übergehen.

Nun haben wir in § 9 den Mittelwertsatz abgeleitet:

$$F(a + h) - F(a) = h F'(a + \vartheta h).$$

Wenden wir diesen Satz mit: $F = f$, $a = x_0$, $h = \Delta x$ auf unseren Differenzenquotienten an, so findet man

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} = f'_x(x_0 + \vartheta \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

Analog wird

$$\frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x_0, y_0 + \vartheta \Delta y).$$

Bei nun folgender Ausführung aber des Grenzüberganges, der von Δz auf dz führt, wird:

$$\lim \Delta x = dx, \quad \lim \Delta y = dy,$$

so daß entspringt:

$$\begin{aligned} \lim \Delta z = dz &= \lim f'_x(x_0 + \vartheta \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x \\ &+ \lim f'_y(x_0, y_0 + \vartheta \Delta y) \Delta y \end{aligned}$$

oder:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Hier heißen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ die ersten partiellen Differentialquotienten der Funktion $(f(x, y))$ nach x bzw. y .

Beispiel: Es sei:

$$z = f(x, y) = ax \sin y = by \sin x.$$

Dann ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = a \sin y + by \cos x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = ax \cos y + b \sin x.$$

III. Zur geometrischen Veranschaulichung der Bedeutung der ersten partiellen Differentialquotienten diene folgendes.

Eine Gleichung $z = f(x, y)$ stellt, wenn man zusammengehörige Werte xyz als Koordinaten eines Punktes in einem Koordinatensystem XYZ deutet, eine Fläche dar. In der Fig. 177 sei P ein zu den Koordinatenwerten $x_0 y_0 z_0$ gehöriger Punkt. Legen wir durch diesen zwei nur x - bzw. y -Achse senkrechte Ebenen E_x bzw. E_y , so wird die Fläche

$$z = f(x, y),$$

von diesen in Kurven:

$$z = f(x_0, y), \text{ bzw. } z = f(x, y_0)$$

geschnitten, in welchen Gleichungen x_0 bzw. y_0 Konstanten sind.

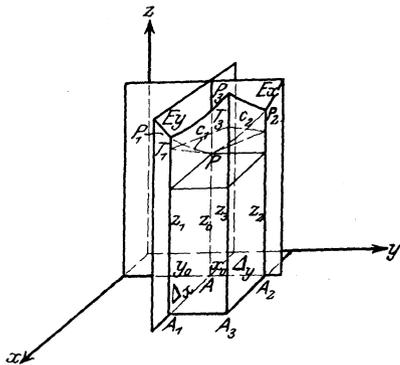


Fig. 177. Geometrische Veranschaulichung der partiellen Differentialquotienten.

Erteilt man jetzt den Koordinaten x_0 und y_0 Zuwächse Δx bzw. Δy , so gelangt man auf den Kurven zu weiteren Flächenpunkten P_1 bzw. P_2 . Die Ordinaten dieser Punkte z_1 und z_2 werden von den Tangenten der Kurven c_1 und c_2 in den Punkten T_1 bzw. T_2 geschnitten, so daß gilt:

$$A_1 T_1 = z_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0 y_0} \Delta x,$$

$$A_2 T_2 = z_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0 y_0} \Delta y,$$

wo die angeschriebenen Zeiger $x_0 y_0$ bedeuten sollen, daß die partiellen Differentialquotienten im Punkte P zu bilden sind.

Die Ebene der drei Punkte $T_1 P T_2$ (die Tangentialebene der Fläche im Punkte P) schneidet nun die Ordinate z_3 , so daß gilt:

$$A_3 T_3 = z_3 = z_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0 y_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0 y_0} \Delta y.$$

Diese Beziehung ist der geometrische Ausdruck für den oben gefundenen Satz:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

IV. Wie oben ausgeführt, sind die ersten partiellen Differentialquotienten von $f(x, y)$ wieder Funktionen von x und y . Man kann sie also weiter differenzieren und gelangt so zu den zweiten partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Es ist nun ein wichtiger Satz, den wir ohne Beweis anführen, daß stets

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

ist. Die Reihenfolge der Differentiationen ist also gleichgültig. Bei dem obigen Beispiel hat man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -b y \sin x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a \cos y + b \cos x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -b x \sin y.$$

In analoger Weise gelangt man weiter zum Begriff der dritten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Beispiel:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -b y \cos x; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -b \sin x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -b x \cos y; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -b \sin y.$$

§ 70. Die partiellen Differentialgleichungen im allgemeinen.

I. Die unabhängigen Variablen x, y , die abhängige Variable z und die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

usw. sind nebst Konstanten die Bausteine, aus denen sich die partielle Differentialgleichung aufbaut, in Gestalt einer Gleichung zwischen diesen Größen:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots, a, b, c, \dots\right) = 0.$$

Das wesentliche Kennzeichen der partiellen Differentialgleichung ist nun, daß stets mehr als eine unabhängige Variable vorhanden ist, gegenüber den gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei denen nur eine unabhängige Variable vorhanden war. Bei den partiellen Differentialgleichungen kann die Zahl der unabhängigen Variablen beliebig sein.

II. Sind mehr als eine abhängige Variable, z. B. z_1 und z_2 , vorhanden, so muß für jede eine Gleichung der obigen Form vorhanden sein, etwa

$$F_1\left(x, y, z_1, z_2, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \frac{\partial z_2}{\partial y}, \dots\right) = 0,$$

$$F_2(x, y, z_1, z_2, \dots) = 0.$$

Man gelangt so zu dem Begriff der simultanen partiellen Differentialgleichungen.

III. Die partiellen Differentialgleichungen teilt man ein nach den Ordnungen der in ihnen vorkommenden höchsten

partiellen Differentialquotienten, z. B. die partielle Differentialgleichung

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$$

ist von der ersten Ordnung, dagegen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + z = 0$$

von der zweiten Ordnung.

Ferner teilt man sie ein nach dem Grade, den die von Wurzeln und Brüchen befreite Gleichung hinsichtlich der Produkte der abhängigen Variablen und der Differentialquotienten annimmt.

Die beiden oben angeschriebenen Gleichungen sind vom ersten Grade oder linear, dagegen ist

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0$$

quadratisch oder vom zweiten Grade (außerdem von der zweiten Ordnung).

VI. Für das folgende führen wir noch die Abkürzungen ein:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Die Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

verlangt die Aufsuchung einer Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

derart, daß etwa nach Auflösung dieser Gleichung nach

$$z = \varphi(x, y)$$

durch Einsetzen von φ , $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ usw. in F dies zu einer Identität wird.

Wir wollen z. B. die Gleichung

$$\varphi \left(\frac{\sin x}{\sin z}, \frac{\sin y}{\sin z} \right) = 0 = \varphi(u, v), \quad (1)$$

wo φ eine beliebige Funktion von

$$u = \frac{\sin x}{\sin z} \quad \text{und} \quad v = \frac{\sin y}{\sin z}$$

sein soll, als ein Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{tg} x + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z \tag{2}$$

identifizieren.

Zunächst bilden wir das totale Differential als Summe der partiellen Differentiale

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy.$$

Da $\varphi = 0$ ist, muß auch $d\varphi = 0$ sein; wir haben also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0. \tag{3}$$

Jetzt bilden wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \sin x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin y \right) \frac{\cos z}{\sin^2 z}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\cos x}{\sin z}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\cos y}{\sin z}, \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Nun ist zu berücksichtigen, daß vermöge

$$\varphi = 0$$

die Variable z von x und y abhängt; es ist also:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \tag{5}$$

Setzen wir jetzt (4) und (5) in (3) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\cos x}{\sin z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \sin x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin y \right) \frac{\cos z}{\sin^2 z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] dx \\ & + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\cos y}{\sin z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \sin x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin y \right) \frac{\cos z}{\sin^2 z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] dy = 0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung sind aber die beiden Differentiale dx und dy beliebig wählbar, da x und y die unabhängigen Variablen sind. Damit trotzdem die Gleichung erfüllt wird, muß jeder der Ausdrücke in den eckigen Klammern für sich verschwinden. Es muß also sein:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi \cos x}{\partial u \sin z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \sin x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin y \right) \frac{\cos z}{\sin^2 z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi \cos y}{\partial u \sin z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \sin x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin y \right) \frac{\cos z}{\sin^2 z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Diese Gleichungen dienen zur Berechnung von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, nämlich:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cos x \operatorname{tg} z}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \sin x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v} \cos y \operatorname{tg} z}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \sin x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin y}$$

Setzt man diese Werte in die Differentialgleichung (2) ein, so geht deren linke Seite über in $\operatorname{tg} z$, und die Gleichung ist also identisch erfüllt. Gleichung (1) ist demnach in der Tat ein Integral von (2).

§ 71. Die Arten der Integrale partieller Differentialgleichungen im allgemeinen.

I. Bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen hatten wir als Formen, in denen Integrale auftreten können, erkannt:

- das partikuläre Integral,
- das allgemeine Integral,
- das singuläre Integral.

Es war ein wichtiger Satz der, daß sich das allgemeine Integral einer Differentialgleichung n -ter Ordnung aus n voneinander unabhängigen partikulären Integralen mit n unbestimmten Konstanten zusammensetzt. Das singuläre Integral war geometrisch als einhüllende Kurve oder Fläche sämtlicher In-

dividuen der durch das allgemeine Integral definierten Mannigfaltigkeit erkannt.

II. Zunächst wollen wir nun untersuchen, welche Bedeutung ein mit unbestimmten Koeffizienten behaftetes Integral im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung hat. Das Integral lautet:

$$F(u, x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, \dots) = 0. \quad (1)$$

Es sei u die abhängige, x, y, z die unabhängigen Variablen, $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$ die unbestimmten Konstanten, über deren Zahl wir zunächst keine Voraussetzung machen.

Jetzt differenzieren wir F nach x, y, z und erhalten die Gleichung:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \right) dz, \quad (2)$$

welche wegen der Willkürlichkeit von dx, dy, dz in die drei Gleichungen zerfällt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die 4 Gleichungen (1) und (3) sind hinreichend, um drei von den willkürlichen Konstanten C , etwa C_1, C_2, C_3 , zu eliminieren. Wir nehmen nun an, daß nur diese drei vorkommen, und erhalten als Resultat der Elimination eine Gleichung:

$$\varphi\left(u, x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \quad (4)$$

d. h. eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Die Gleichung (1) genügt ihr und ist deshalb eine Lösung, wenn nur die drei Konstanten C_1, C_2, C_3 vorkommen. Wir nennen (1) das vollständige Integral von (4) und definieren: Ein vollständiges Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung ist eine solche die Differential-

gleichung befriedigende Beziehung zwischen den Variablen, die ebensoviel willkürliche Konstante enthält, als unabhängige Variable vorhanden sind.

III. Beispiel: Es ist zu verifizieren, daß das vollständige Integral von

$$a \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = z \quad (5)$$

lautet:

$$z = C_1 e^{\frac{y}{a} + C_2(x-y)}. \quad (6)$$

Durch Differentiation von (6) findet man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = C_1 C_2 e^{\frac{y}{a} + C_2(x-y)} = C_2 z$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = C_1 \left(\frac{1}{a} - C_2 \right) e^{\frac{y}{a} + C_2(x-y)} = \left(\frac{1}{a} - C_2 \right) z,$$

woraus sich (5) ergibt.

IV. Wir wollen jetzt in der Integralbeziehung (1)

$$F(u, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = 0$$

die willkürlichen Größen C_1, C_2, C_3 nicht mehr von x, y, z unabhängig annehmen. Der unter II durchgeführte Eliminationsprozeß liefert dann dasselbe Resultat, nämlich die Differentialgleichung (4), wenn die drei Gleichungen (3) formal dieselben bleiben, trotzdem C_1, C_2, C_3 Funktionen von x, y, z sind. Die Bedingung hierfür lieten wir ab.

Offenbar schreibt sich das Differential dF , wenn C_1, C_2, C_3 die Variablen x, y, z enthalten, wie folgt:

$$dF = \left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial x} \right) dx + \\ & \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) dy + \\ & \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$i = 1, 2, 3.$

Ohne die hieraus sich ergebenden Gleichungen (3) besonders hinzuzuschreiben, übersehen wir sofort, daß diese Formeln ungedändert bleiben, sobald die Gleichungen erfüllt sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial C_1} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial C_2} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial C_3} \frac{\partial C_3}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial C_1} \frac{\partial C_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial C_2} \frac{\partial C_2}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial C_3} \frac{\partial C_3}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial C_1} \frac{\partial C_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial C_2} \frac{\partial C_2}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial C_3} \frac{\partial C_3}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dieses Gleichungssystem ist offensichtlich erfüllt durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial C_1} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial C_2} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial C_3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

vorausgesetzt, daß die Koeffizientendeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_3}{\partial x} \\ \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_3}{\partial y} \\ \frac{\partial C_1}{\partial z} & \frac{\partial C_2}{\partial z} & \frac{\partial C_3}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (10)$$

von Null verschieden ist.

Die Gleichungen (9) bieten jetzt Gelegenheit, C_1, C_2, C_3 durch gewöhnliche Auflösung zu bestimmen, wodurch wir diese Größen in u, x, y, z ausgedrückt erhalten, so daß nach Einsetzen in (1) das vollständige Integral übergeht in einen Ausdruck, der keine willkürlichen Konstanten mehr enthält. Dieser neue Ausdruck, der der Differentialgleichung (4) ebenfalls genügt, heißt das singuläre Integral.

Wir definieren: das singuläre Integral ist eine solche Beziehung zwischen den Veränderlichen, die keine willkürlichen Konstanten enthält und den gegebenen Differentialgleichungen genügt. Das Integral

kann aber nicht durch spezielle Auswahl der willkürlichen Konstanten des vollständigen Integrals erhalten werden.

V. Beispiel: Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0. \quad (11)$$

Man verifiziert leicht:

$$F = ax + by + ab - z = 0 \quad (12)$$

als das vollständige Integral mit:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b.$$

Bilden wir jetzt analog (9)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} = x + b = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = y + a = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

woraus sich $a = -y$, $b = -x$ ermitteln, so findet sich nach Einsetzen in (12):

$$xy + z = 0 \quad (14)$$

als das singuläre Integral, welches keine willkürlichen Konstanten enthält. Die Gleichungen (13) sind zulässig, weil die Determinante Δ (vgl. 10), die sich hier auf:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

zusammenzieht, von Null verschieden ist.

VI. Das Gleichungssystem (8) wird noch auf eine andere Weise erfüllt, abgesehen von dem Ansatz (9). Löst man nämlich die in

$$\frac{\partial F}{\partial C_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial C_2}, \quad \frac{\partial F}{\partial C_3}$$

linearen Gleichungen (8) nach diesen Größen auf, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned}
 A \cdot \frac{\partial F}{\partial C_1} &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_3}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_3}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial C_2}{\partial z} & \frac{\partial C_3}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \\
 A \cdot \frac{\partial F}{\partial C_2} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial C_3}{\partial x} \\ \frac{\partial C_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial C_3}{\partial y} \\ \frac{\partial C_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial C_3}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \\
 A \cdot \frac{\partial F}{\partial C_3} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial C_1}{\partial z} & \frac{\partial C_2}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

die erfüllt werden durch

$$A = 0. \quad (16)$$

Nach einem bekannten Satz ist dies aber die Bedingung dafür, daß C_1, C_2, C_3 als Funktionen von x, y, z nicht unabhängig voneinander sind, daß eine Funktion

$$\varphi(C_1, C_2, C_3)$$

existiert, die nach Einsetzen der Funktionsausdrücke für C_1, C_2, C_3 identisch verschwindet:

$$\varphi(C_1, C_2, C_3) = 0^{80}. \quad (17)$$

Setzen wir etwa

$$C_3 = \chi(C_1, C_2) \quad (18)$$

willkürlich an, so wird (17) erfüllt. Differentiieren wir jetzt (1) und (18) nach den willkürlichen Konstanten, so kommt:

$$\left. \begin{aligned} \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial C_1} dC_1 + \frac{\partial F}{\partial C_2} dC_2 + \frac{\partial F}{\partial C_3} dC_3 = 0 \\ dC_3 = \frac{\partial \chi}{\partial C_1} dC_2 + \frac{\partial \chi}{\partial C_2} dC_2, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

aus deren Verein sich ergibt:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial C_1} + \frac{\partial F}{\partial C_3} \frac{\partial \chi}{\partial C_1} \right) dC_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial C_2} + \frac{\partial F}{\partial C_3} \frac{\partial \chi}{\partial C_2} \right) dC_2 = 0, \quad (20)$$

woraus wiederum, wegen der unabhängigen Wählbarkeit von dC_1 und dC_2 folgt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial C_1} + \frac{\partial F}{\partial C_3} \frac{\partial \chi}{\partial C_1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial C_2} + \frac{\partial F}{\partial C_3} \frac{\partial \chi}{\partial C_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Wir haben jetzt drei Gleichungen: (18) und (21), die zur Berechnung von C_1, C_2, C_3 als Funktionen von x, y, z hinreichen. Durch Einführung der gefundenen Größen in (1) wird in das Integral eine willkürliche Funktion χ zweier voneinander unabhängiger Funktionen hineingebracht. Man nennt die solcher-gestalt entstehende Lösung das allgemeine Integral. Es enthält keine willkürlichen Konstanten, sondern eine oder mehrere willkürliche Funktionen der unabhängigen Variablen.

VII. Beispiel. Man verifiziert leicht, daß z

$$F = C_1 \log x + (1 - C_1) \log y + C_2 - \log z = 0 \quad (22)$$

das vollständige Integral von

$$z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \quad (23)$$

ist.

Nach Vorschrift von (18) setzen wir willkürlich an

$$C_2 = \chi(C_1) \quad (24)$$

(das vollständige Integral enthält hier nur 2 willkürliche Konstante, da wir nur 2 unabhängige Variable x und y haben) und nach Vorschrift von (21) bilden wir:

$$\frac{\partial F}{\partial C_1} + \frac{\partial F}{\partial C_2} \frac{\partial \chi}{\partial C_1} = \log x - \log y + \chi'(C_1) = 0. \quad (25)$$

woraus sich findet

$$C_1 = \vartheta \left(\frac{y}{x} \right). \quad (26)$$

Ebenso wird C_2 eine willkürliche Funktion von $\frac{y}{x}$ und nach Einsetzen in (22) und nach Beseitigung der Logarithmen ergibt sich:

$$y \psi \left(\frac{y}{x} \right) - z = 0 \quad (27)$$

als das allgemeine Integral von (23). Denn es ist:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{y^2}{x} \psi' \left(\frac{y}{x} \right), \\ y \frac{\partial z}{\partial y} &= +\frac{y^2}{x} \psi' \left(\frac{y}{x} \right) + y \psi \left(\frac{y}{x} \right), \end{aligned}$$

also nach Addition:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = y \psi \left(\frac{y}{x} \right) = z$$

w. z. b. w.

VIII. Es gibt eine weit entwickelte Theorie, die gestattet, für eine gegebene partielle Differentialgleichung das vollständige, das allgemeine und das singuläre Integral aufzufinden. Am vollkommensten sind die Integrationsverfahren ausgebildet für die allgemeinen Differentialgleichungen erster Ordnung und die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung^{80a}).

Bei den partiellen Differentialgleichungen, die bei physikalischen Aufgaben auftreten, liegt nun der Schwerpunkt nicht in der Bestimmung dieser Integrale, sondern in der Berücksichtigung der Grenzbedingungen, den die Integralfunktionen zu genügen haben.

Hierbei tritt die Aufsuchung der oben angeführten Integrale sehr in den Hintergrund, weshalb wir auf die allgemeinen Integrationstheorien partieller Differentialgleichungen nicht weiter eingehen. Wir werden vielmehr im folgenden die verschiedenen Gruppen partieller „physikalischer“ Differentialgleichungen, mit den einfachsten beginnend, behandeln und dabei an geeigneten Stellen allgemeinere Betrachtungen über die Methoden einflchten⁸¹).

II. Einfache partielle Differentialgleichungen aus verschiedenen Gebieten.

§ 72. Differentialgleichung der schwingenden Saite.

I. Eine Saite von der Länge l (Fig. 178) sei mit ihren Endpunkten in zwei Punkten $A B$ der x -Achse befestigt. In der Ruhelage fällt sie dann mit der x -Achse zusammen; ihre Anfangsspannung sei P , und wir betrachten nur solche Auslenkungen y der Saite aus der Ruhelage, daß die Spannung stets $= P$ bleibt. Außerdem seien die Auslenkungen eben und erfolgen nur in der xy -Ebene.

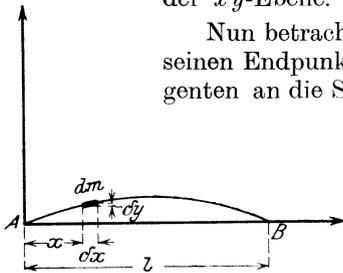


Fig. 178. Schwingende Saite.

Nun betrachten wir ein Saitenelement dm . In seinen Endpunkten x und $x + \partial x$ ziehen wir Tangenten an die Saite, deren Neigungswinkel α bzw.

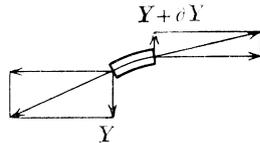


Fig. 179. Kräfte an einem Saitenelement.

α' seien, welche Winkel wegen der Kleinheit der Auslenkungen y ebenfalls klein sind. Dann ist die y -Komponente der Spannung P (vgl. Fig. 179) im Punkte x

$$Y = - P \sin \alpha,$$

im Punkte $x + \partial x$

$$Y + \partial Y = + P \sin \alpha'.$$

Nun ist aber:

$$\sin \alpha = \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\sin \alpha' = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Mit diesen Formeln ergibt sich als resultierende, auf das Saitenelement dm wirkende Transversalkraft

$$+ P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

die nach dem Grundgesetz der Mechanik mit der am Massen-

element angreifenden Trägheitskraft $dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ gleich zu setzen ist, wenn die Bewegungsgleichung gesucht wird:

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (1)$$

Bezeichnet jetzt p das Gewicht der ganzen Saite, dann ist die Masse

$$dm = \frac{p}{g} \frac{dx}{l},$$

wo g die Beschleunigung der Schwere bedeutet.

Die Gleichung (1) geht hiermit über in:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Pgl}{p} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2)$$

und mit

$$\frac{Pgl}{p} = a^2$$

in

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Dies ist die Gleichung der ebenen Transversalschwingungen einer gespannten Saite, die durch die Namen d'Alembert, Euler, Daniell Bernoulli berühmt geworden ist⁸²).

Die Aufgabe, die sich uns bietet, ist nun folgende:

Es ist eine Funktion y von x und t

$$y = F(x, t)$$

zu suchen, die

1. die obige Gleichung (3) befriedigt,
2. die Eigenschaft hat, daß für $x = 0$ und $x = l$ $y = 0$ wird,

$$\begin{aligned} 0 &= F(0, t), \\ 0 &= F(l, t), \end{aligned}$$

3. zur Zeit $t = 0$ eine gegebene Gestalt $f(x)$ annimmt

$$f(x) = F(x, 0),$$

4. deren Differentialquotient zur Zeit $t = 0$ eine gegebene Gestalt annimmt:

$$g(x) = \frac{\partial F(x, 0)}{\partial t}.$$

Die Bedingung 2. heißt die Grenzbedingung und bedeutet das Festliegen der Saitenendpunkte.

3. und 4. heißen die Anfangsbedingungen, und 3. bedeutet, daß im Anfang, d. h. zur Zeit $t=0$ die Saite eine ge-

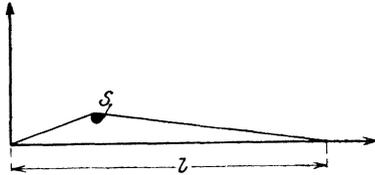


Fig. 180. Spezielle Anfangsgestalt einer Saite.

gebene Gestalt haben soll, z. B. durch einen Stift S zur Saite gezogen sei (Fig. 180).

Der Stift wird zur Zeit $t=0$ fortgenommen, worauf die Schwingung beginnt. 4. bedeutet, daß zur Zeit $t=0$ alle Punkte der Saite eine gegebene Geschwindigkeit haben sollen. Z. B. können alle Punkte

zur Zeit $t=0$ in Ruhe sein, wie in dem eben angeführten Beispiel der seitlichen Anfangsauslenkung mittels des Stiftes.

Zunächst suchen wir eine Funktion nach Vorschrift von 1. und wir setzen eine solche als partikuläres Integral zunächst in der Form an

$$y = X \cdot T, \quad (4)$$

wo X bzw. T Funktionen von x bzw. t allein bedeuten.

Durch Differentiation ergibt sich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T \frac{d^2 X}{dx^2},$$

und nach dem Einsetzen in (3)

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{a^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (5)$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn wir beide Seiten einer und derselben Konstanten, z. B. $-k^2$ gleich setzen, wodurch folgende beiden Ansätze resultieren:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} &= -k^2 T, \\ \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\frac{k^2}{a^2} X. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Partikuläre Integrale dieser beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen sind

$$\begin{aligned} T &= \cos kt, & \sin kt, \\ X &= \cos \frac{k}{a} x, & \sin \frac{k}{a} x, \end{aligned} \tag{7}$$

wovon man sich durch Einsetzen in 6. ohne weiteres überzeugt. Von diesen Funktionen scheidet $\cos \frac{k}{a} x$ aus, weil dieser Ausdruck für $x = 0$ nicht Null wird, wie unter 2. vorgeschrieben. Damit aber $\sin \frac{k}{a} x$ für $x = l$ verschwindet, muß $kl = an\pi$ sein, wo n eine ganze Zahl ist. Die Gleichung $kl = an\pi$ heißt die Periodengleichung; sie ergibt sich stets aus den Grenzbedingungen.

Wir haben jetzt zwei partikuläre Lösungen für (3), nämlich:

$$\text{und} \left. \begin{aligned} &\sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{an\pi}{l} t \\ &\sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{an\pi}{l} t. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Beide Lösungen fassen wir mit zwei unbestimmten Konstanten A_n und B_n zusammen in

$$y = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \tag{9}$$

oder, wenn wir setzen

$$\begin{aligned} A_n &= C_n \cos \frac{an\pi}{l} \tau_n, \\ B_n &= C_n \sin \frac{an\pi}{l} \tau_n, \\ y &= C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \cos \frac{an\pi}{l} (t - \tau_n). \end{aligned} \tag{10}$$

Wir erhalten also einen Schwingungsvorgang, d. h. einen in bezug auf die Zeit periodischen Vorgang. Die Schwingungsdauer ist:

$$T_n = \frac{2l}{an}, \tag{11}$$

die Schwingungszahl:

$$Z_n = \frac{an}{2l}. \tag{12}$$

Die Saite ist fähig, jede durch eine ganze Zahl n gekennzeichnete Bewegung auszuführen.

Ist $n = 1$, so schwingt die Saite im Grundton bei $n = 2$ in der Oktave des Grundtons, bei $n = 3$ mit der Quinte der Oktave. Welche Schwingung die Saite wirklich ausführt, hängt von den Anfangsbedingungen ab.

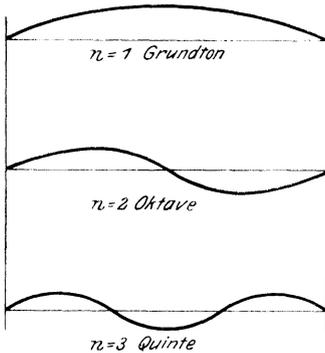


Fig. 181. Verschiedene Schwingungsformen.

Z. B. wird sie nur im Grundton schwingen, wenn sie zur Zeit $t = 0$ die erste in Fig. 181 gezeichnete Gestalt hatte und ihre Punkte sämtlich in Ruhe waren.

II. Ist aber die Anfangsgestalt eine andere, so werden außer dem Grundton auch die Overtöne auftreten, d. h. die Gesamtschwingung wird sich durch Übereinanderlagerung der Einzelschwingungen ausdrücken:

$$y = \sum_n \left(A_n \cos n \frac{\pi at}{l} + B_n \sin n \frac{\pi at}{l} \right) \sin n \frac{\pi x}{l}. \tag{13}$$

Hier entspringt nun die Aufgabe, die unbestimmten Koeffizienten $A_n B_n$ aus den Anfangsbedingungen (3) und (4) zu bestimmen.

Aus (3) ergibt sich für $t = 0$

$$y_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi x}{l} = f(x), \tag{14}$$

während aus (4) resultiert:

$$\frac{\partial y}{\partial t}_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot \frac{n \pi a}{l} \cdot \sin \frac{n \pi x}{l} = g(x). \tag{15}$$

Hier sind $g(x)$ und $f(x)$ im Intervall von 0 bis l willkürlich vorgegebene Funktionen und (14) und (15) verlangen, diese Funktionen in Reihen von Winkelfunktionen zu entwickeln, die nach Vielfachen von $\frac{\pi x}{l}$ fortschreiten.

Bekanntlich hat Fourier diese Aufgabe gelöst. Er multiplizierte die Gleichung (14) mit $\sin m \frac{\pi x}{l} dx$ und integrierte zwischen 0 und l . Dann findet sich:

$$\int_0^l f(x) \sin \frac{m \pi x}{l} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^l A_n \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{m \pi x}{l} dx. \quad (16)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung wird aber

$$\int_0^l \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{m \pi x}{l} dx = 0 \text{ }^{82a)} \quad (17)$$

bei allen Gliedern, bei denen $n \neq m$ ist. Wird aber $n = m$, so findet sich:

$$\int_0^l \sin \frac{n \pi x}{l} \cdot \sin \frac{n \pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \text{ }^{82b)}. \quad (18)$$

Der Beweis für die beiden Behauptungen (17) und (18) findet sich wie folgt:

Zunächst ist

$$\begin{aligned} & \int_0^l \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{m \pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(n - m) \pi x}{l} dx - \frac{1}{2} \int_0^l \cos (n + m) \frac{\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Das zweite Integral rechts stellt aber die Fläche dar, die von der Kurve

$$y = \cos (n + m) \frac{\pi x}{l}$$

und den Ordinaten $x = 0$ und $x = l$ eingeschlossen wird. Ist $n + m$ gerade, so hat die Kurve den in Fig. 182 gezeichneten Verlauf.

Man erkennt ohne weiteres, daß die Fläche der Kurve = Null ist.

Ist aber $n + m$ ungerade, so hat die Kurve das Aussehen Fig. 183.

Der Flächeninhalt verschwindet gleichfalls.

Das Integral

$$\int_0^l \cos(n - m) \frac{\pi}{l} x dx,$$

welches für $n \geq m$ nach dem Vorhergehenden gleichfalls verschwindet, reduziert sich für $n = m$ auf

$$\int_0^l dx,$$

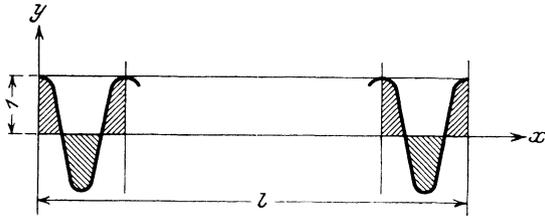


Fig. 182. $\int_0^l \cos(n + m) \frac{\pi x}{l} dx$. $n + m$ gerade.

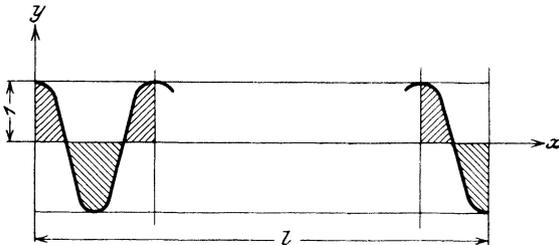


Fig. 183. $\int_0^l \cos(n + m) \frac{\pi x}{l} dx$. $n + m$ ungerade.

d. h. auf den Wert l . Es bleibt also in der Tat nur $\frac{l}{2}$ als Integralwert für (18) übrig.

Hiermit findet sich also aus (16):

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \tag{20}$$

und analog aus (15):

$$B_n = \frac{2}{a \pi n} \int_0^l g(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx.$$

Hiermit ist die Reihe (13) und damit die Bewegung der Saite festgelegt.

§ 73. Rechnerische Ermittlung der Fourierschen Koeffizienten.

Wir wollen jetzt, etwas verallgemeinernd, die Funktion $f(x)$ der Periode 2π in eine sowohl nach Kosinus- wie nach Sinusfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx). \quad (1)$$

Wiederum schlagen wir das Verfahren der Multiplikation mit $\cos mx$ resp. $\sin mx$ ein und erhalten nach Integration zwischen 0 und 2π :

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

welche Formeln auch noch für $n = 0$ gelten, falls man

$$a_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (3)$$

setzt.

Damit ist die Reihenentwicklung (1) festgelegt.

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung der Koeffizienten A_n und B_n . Man nennt diese Aufgabe: Harmonische Analyse der Funktion $f(x)$. (Fig. 184.)

Zunächst geben wir ein rechnerisches Verfahren an.

Das Intervall 0 bis $2\pi = 0$ bis 360° wird in $2m = 24$ gleiche Teile geteilt.

Die den Abszissen

$$x = \frac{2\pi}{2m} \dots \frac{2\pi}{2m} \nu$$

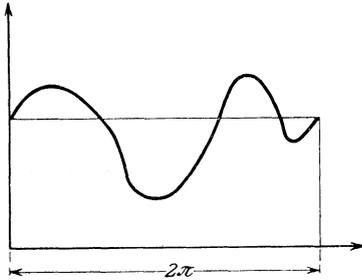


Fig. 184. Funktion der Periode 2π .

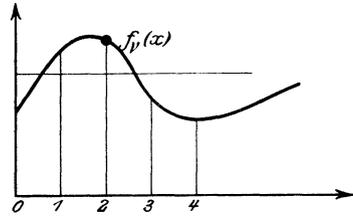


Fig. 185. Zur rechnerischen harmonischen Analyse.

$$\cos n \frac{2\pi}{24} \cdot \nu$$

Tabelle 14.

$\frac{n}{\nu}$	1	2	3	4	5
0	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000
1	+ 0,966	+ 0,866	+ 0,707	+ 0,500	+ 0,259
2	+ 0,866	+ 0,500	0,000	- 0,500	- 0,866
3	+ 0,707	0,000	- 0,707	- 1,000	- 0,707
4	+ 0,500	- 0,500	- 1,000	- 0,500	+ 0,500
5	+ 0,259	- 0,866	- 0,707	+ 0,500	+ 0,966
6	0,000	- 1,000	0,000	+ 1,000	0,000
7	- 0,259	- 0,866	+ 0,707	+ 0,500	- 0,966
8	- 0,500	- 0,500	+ 1,000	- 0,500	- 0,500
9	- 0,707	0,000	+ 0,707	- 1,000	+ 0,707
10	- 0,866	+ 0,500	0,000	- 0,500	+ 0,866
11	- 0,966	+ 0,866	- 0,707	+ 0,500	- 0,259
12	- 1,000	+ 1,000	- 1,000	+ 1,000	- 1,000
13	- 0,966	+ 0,866	- 0,707	+ 0,500	- 0,259
14	- 0,866	+ 0,500	0,000	- 0,500	+ 0,866
15	- 0,707	0,000	+ 0,707	- 1,000	+ 0,707
16	- 0,500	- 0,500	+ 1,000	- 0,500	- 0,500
17	- 0,259	- 0,866	+ 0,707	+ 0,500	- 0,966
18	0,000	- 1,000	0,000	+ 1,000	0,000
19	+ 0,259	- 0,866	- 0,707	+ 0,500	+ 0,966
20	+ 0,500	- 0,500	- 1,000	- 0,500	+ 0,500
21	+ 0,707	0,000	- 0,707	- 1,000	- 0,707
22	+ 0,866	+ 0,500	0,000	- 0,500	- 0,866
23	+ 0,966	+ 0,866	+ 0,707	+ 0,500	+ 0,259
24	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000

entsprechenden Funktionswerte von $f(x)$ werden mit $f_\nu(x)$ bezeichnet: $\nu = 1, 2, \dots, 2m$. Ferner bilden wir alle Kurven:

$$\cos nx \text{ und } \sin nx$$

und berechnen ebenfalls deren Werte für die Abszissen

$$\frac{2\pi}{2m}, \frac{2\pi}{2m} 2, \dots, \frac{2\pi}{2m} \nu, \dots, 2\pi$$

d. h.

$$\left. \begin{aligned} \cos_\nu nx &= \cos n \frac{2\pi}{2m} \nu \\ \sin_\nu nx &= \sin n \frac{2\pi}{2m} \nu \end{aligned} \right\} \nu = 1, 2, \dots, 2m.$$

Diese Werte sind einer trigonometrischen Tafel zu entnehmen. Für $2m = 24$ haben wir die Tabellen 14 und 15.

$$\sin n \frac{2\pi}{24} \nu$$

Tabelle 15.

$\frac{n}{\nu}$	1	2	3	4	5
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	+ 0,259	+ 0,500	+ 0,707	+ 0,866	+ 0,966
2	+ 0,500	+ 0,866	+ 1,000	+ 0,866	+ 0,500
3	+ 0,707	+ 1,000	+ 0,707	0,000	- 0,707
4	+ 0,866	+ 0,866	0,000	- 0,866	- 0,866
5	+ 0,966	+ 0,500	- 0,707	- 0,866	+ 0,259
6	+ 1,000	0,000	- 1,000	0,000	+ 1,000
7	+ 0,966	- 0,500	- 0,707	+ 0,866	+ 0,259
8	+ 0,866	- 0,866	0,000	+ 0,866	- 0,866
9	+ 0,707	- 1,000	+ 0,707	0,000	- 0,707
10	+ 0,500	- 0,866	+ 1,000	- 0,866	+ 0,500
11	+ 0,259	- 0,500	+ 0,707	- 0,866	+ 0,966
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13	- 0,259	+ 0,500	- 0,707	+ 0,866	- 0,966
14	- 0,500	+ 0,866	- 1,000	+ 0,866	- 0,500
15	- 0,707	+ 1,000	- 0,707	0,000	+ 0,707
16	- 0,866	+ 0,866	0,000	- 0,866	+ 0,866
17	- 0,966	+ 0,500	+ 0,707	- 0,866	- 0,259
18	- 1,000	0,000	+ 1,000	0,000	- 1,000
19	- 0,966	- 0,500	+ 0,707	+ 0,866	- 0,259
20	- 0,866	- 0,866	0,000	+ 0,866	+ 0,866
21	- 0,707	- 1,000	- 0,707	0,000	+ 0,707
22	- 0,500	- 0,866	- 1,000	- 0,866	- 0,500
23	- 0,259	- 0,500	- 0,707	- 0,866	- 0,966
24	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Mit diesen cos- resp. sin-Werten sind die $f_\nu(x)$ -Werte zu multiplizieren und man erhält:

$$A_n = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{24} f_\nu(x) \cos_\nu(n x)$$

$$B_n = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{24} f_\nu(x) \sin_\nu(n x)^{82c}.$$

§ 74. Mechanisches Verfahren zur Bestimmung der Fourierschen Koeffizienten.

Ist eine Funktion $f(x)$ über einer Basis $2c$, Fig. 186, gegeben: so lauten die Fourierschen Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{c} \int_0^{2c} f(x) \cos n \frac{\pi}{c} x dx, \\ B_n &= \frac{1}{c} \int_0^{2c} f(x) \sin n \frac{\pi}{c} x dx, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

die für $c = \pi$ wieder in die Formeln (2) § 73 übergehen.

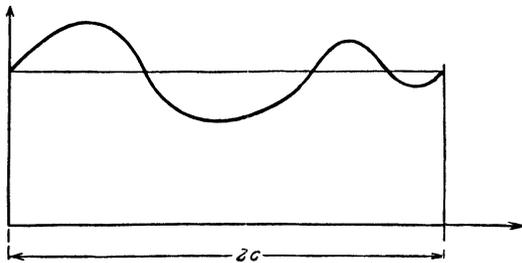


Fig. 186. Funktion der Periode $2c$.

Diese Integrale kann man mittels des Henrici-Coradischen Analysators bestimmen.

Zunächst werden beide Integrale durch partielle Integration umgeformt⁸³):

$$A_n = \frac{1}{c} \left[f(x) \frac{c}{n\pi} \sin \frac{\pi n}{c} x \right]_0^{2c} - \frac{1}{c} \int_0^{2c} \frac{c}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{c} x df(x)$$

oder, da der Wert der eckigen Klammern verschwindet:

$$\left. \begin{aligned}
 A_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_0^{2c} \sin \frac{n\pi}{c} x df(x) \\
 \text{und analog:} \\
 B_n &= +\frac{1}{n\pi} \int_0^{2c} \cos \frac{n\pi}{c} x df(x).
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Für die Ausführung dieser Integration ist der genannte Analysator eingerichtet.

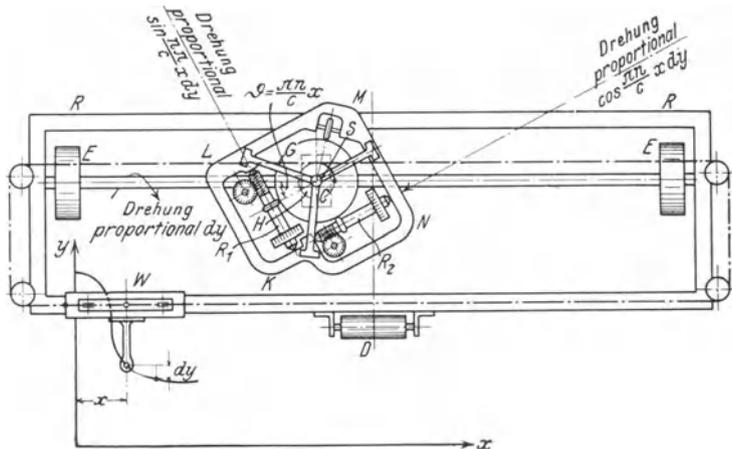


Fig. 187. Konstruktion des Henrici-Coradischen Analysators.

Ein Rahmen RR (Fig. 187) wird von drei Rollen E, E und D getragen und so auf die Ebene xy gesetzt, daß die Achse EE parallel zur x -Achse steht. Der Rahmen kann dann nur parallel der y -Achse verschoben werden.

Auf dem Rahmen sitzt, parallel zur x -Achse verschieblich der Wagen W , der den Fahrstift F trägt. Wird der Fahrstift an einer zu analysierenden Kurve entlang geführt, so verschiebt sich der Wagen W proportional dx , der Rahmen R proportional dy . Die Bewegung des Wagens, die durch Anschläge auf einen Bereich $2c$ beschränkt ist, wird mittels eines Silberdrahtes durch Rollenübertragung zur Scheibe H geleitet. Die

Übertragung ist so eingerichtet, daß sich H n mal mit seiner senkrechten Spindel S dreht, wenn der Wagen einmal die Basis $2c$ durchläuft.

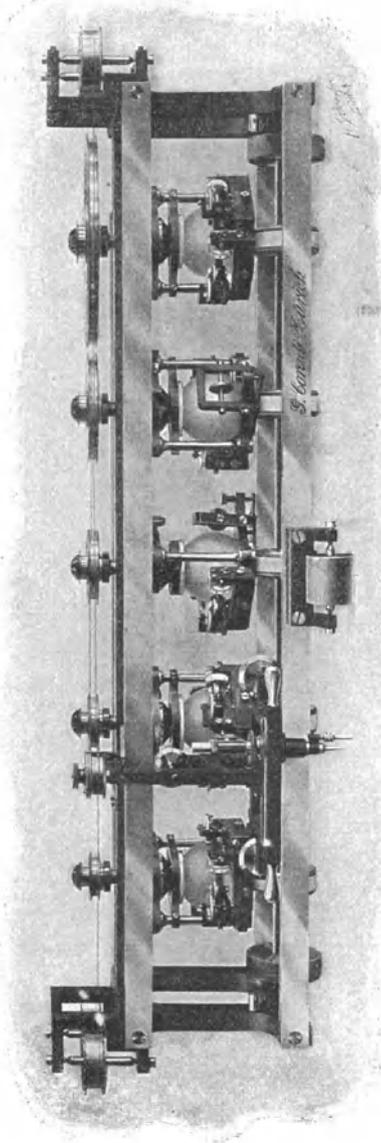


Fig. 188. Ansicht des Henri-Coradischen Analysators.

Fest mit der Spindel S verbunden ist der Integrierapparat $KLMN$, der durch einen etwa quadratischen Rahmen gebildet wird, in welchem zwei Meßbrädchen $R_1 R_2$ zueinanderachsen-senkrecht gelagert sind. Der Integrierapparat dreht sich also um den Winkel $\vartheta = n \frac{\pi}{c} x$ um die Achse S .

Die Bewegung des Rahmens überträgt sich proportional $dy = df(x)$ auf eine zylindrische Scheibe C , die auf der Achse EE befestigt ist, und wird von hier durch eine Glaskugel G weitergeleitet, die sich auf C stützt und innerhalb des Integrierapparates so gelagert ist, daß sie die beiden Meßbrädchen R_1 und R_2 in zwei Punkten ihres größten Horizontalkreises berührt.

Die Kugel G dreht sich vermöge der Reibung mit C stets um ihren zur x -Achse parallelen Durchmesser, und zwar proportional dy . Diese Bewegung überträgt sich auf die beiden Meßbrädchen R_1

und R_2 , und zwar nach Maßgabe der Drehung ϑ des Integrierapparates. Wie aus der Figur unmittelbar ersichtlich, dreht sich

R_1 proportional $\sin \frac{n\pi x}{c} \cdot dy$ und R_2 proportional $\cos \frac{n\pi x}{c} \cdot dy$.

Durchläuft der Fahrstift die ganze Kurve, so sind die Meßrädchen-Ablesungen a_1 und a_2 proportional mit:

$$\int_0^{2c} \sin \frac{n\pi x}{c} \cdot dy$$

bzw.

$$\int_0^{2c} \cos \frac{n\pi x}{c} \cdot dy,$$

d. h.

$$\alpha_1 = p_1 \int_0^{2c} \sin \frac{n\pi x}{c} dy,$$

$$\alpha_2 = p_2 \int_0^{2c} \cos \frac{n\pi x}{c} dy,$$

wo p_1 und p_2 von den Abmessungen des Instrumentes abhängige Konstanten sind.

Wir haben also:

$$A_n = - \frac{1}{n\pi} \frac{\alpha_1}{p_1}, \quad B_n = + \frac{1}{n\pi} \frac{\alpha_2}{p_2}.$$

Da nun am Instrument p_1 und p_2 so gewählt sind, daß

$$p_1\pi = -1, \quad p_2\pi = -1,$$

so hat man unmittelbar:

$$A_n = \frac{\alpha_1}{n}, \quad B_n = \frac{\alpha_2}{n}.$$

Trägt das Instrument für $n = 1, 2, 3$ mehrere Integrierapparate, so kann man mit einer einzigen Umfahrung der Figur sämtliche Koeffizienten $A B$ bestimmen bis auf $\frac{A_0}{2}$, welches als Höhe des der Kurvenfläche inhaltgleichen Rechteckes durch ein Planimeter bestimmt wird. Einen Apparat dieser Art zeigt Fig. 188⁸⁴).

**§ 75. Die Differentialgleichung der Stabschwingungen.
Biegungsschwingungen.**

Ein Stab kann drei Arten von Schwingungen ausführen: Längsschwingungen, Drehungsschwingungen, Biegungsschwingungen.

I. Bei der Längsschwingung bewegen sich alle Stabteile parallel zur Stabachse. Zusammendrückungen und Dehnungen des Stabmaterials folgen räumlich und zeitlich aufeinander, Fig. 189.

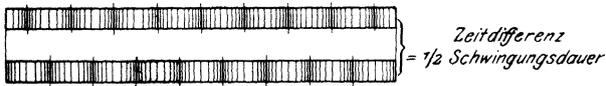


Fig. 189. Längsschwingungen.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung gehen wir aus von einem horizontal eingespannten Stab und betrachten ein Element ab der kleinen axialen Abmessung dx Fig. 190.

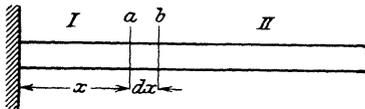


Fig. 190. Zur Differentialgleichung der Längsschwingungen.

Die beiden Begrenzungsebenen a und b bewegen sich periodisch und es sei u die Größe der Verschiebung. u wird im allgemeinen eine Funktion der Stabkoordinate x und der Zeit t sein:

$$u = f(x, t). \quad (1)$$

Wäre x in f nicht enthalten, so würde sich der Stab als starres Ganzes bewegen. Gleichung (1) setzt aber (elastische) Verschiebungen der einzelnen Stabquerschnitte q gegeneinander voraus. Verschiebt sich a um u , b um $u + \partial u$, so ist ∂u die Änderung des Abstandes von a und b , d. h. von ∂x . Mithin ist die von a auf den Stabteil I übertragene Spannung:

$$E \frac{\partial u}{\partial x},$$

wo E der Elastizitätsmodul ist.

Von Querschnitt b wird hingegen auf den Stabteil II die Spannung übertragen:

$$E \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

Beide Spannungen sind, am Element ab angreifend, einander entgegengesetzt und ihre Resultierende muß dem kinetischen Widerstand (Trägheitswiderstand) des Elements gleich sein. Letzterer lautet, bei einer Stabmasse M und Länge L :

$$\frac{M}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx,$$

womit sich als Bewegungsgleichung ergibt:

$$q E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{M}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Setzt man hier noch:

$$\frac{M}{L \cdot q} = \rho = \text{Dichte des Stabmaterials},$$

so wird einfacher:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

die Bewegungsgleichung, die besonders deshalb bemerkenswert ist, weil der Bewegungsvorgang von den Stababmessungen unabhängig ist.

Mit $\frac{\rho}{E} = a^2$ ergibt sich wieder die Form der Schwingungsgleichung der Seite, zu deren Behandlung auf 54 verwiesen sei.

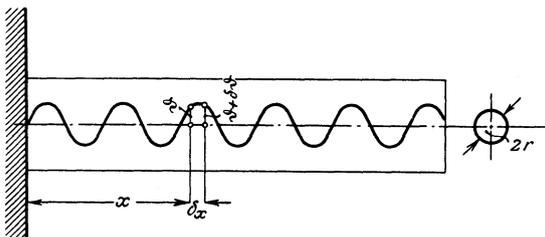


Fig. 191. Torsionsschwingungen.

II. Bei den Drehungsschwingungen, z. B. eines zylindrischen Stabes, wird die Bewegung am besten durch die Aufzeichnung einer Mantellinie auf der Abwicklung des Stabes charakterisiert.

Ist der Querschnitt x um den Winkel ϑ aus seiner Mittel­lage verdreht (Fig. 191), der Querschnitt $x + \partial x$ um $\vartheta + \partial \vartheta$, so ist $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ die mittlere Verdrehung des Elements ∂x . Die Tor-

sionsspannungsmomente sind, wenn Θ das Querschnittsträgheitsmoment des Stabes und G den Schubmodul bedeuten,

$$- G \Theta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad \text{und} \quad + G \Theta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right),$$

deren Resultierende sich mit dem Moment der kinetischen Trägheit $\varrho \Theta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} dx$ des Elementes x zur Gleichung

$$G \Theta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \varrho \Theta dx \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}$$

zusammensetzt, die sich nach Forthebung von Θdx auf

$$G \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \varrho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \tag{4}$$

reduziert. Mit $\frac{\varrho}{G} = a^2$ ergibt sich wieder die Saitengleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \tag{5}$$

III. Biegungsschwingungen eines geraden Stabes.

Der Stab sei an einem Ende im Nullpunkt des Koordinatensystems so eingespannt, daß seine Achse mit der x -Achse in der Ruhelage zusammenfällt, Fig. 192.

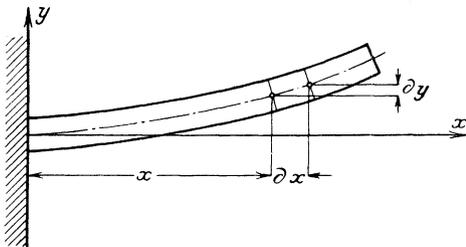


Fig. 192. Zur Differentialgleichung der Biegungsschwingungen.

An den Enden eines Längenelementes wirken quer zur Längsachse die Schubkräfte $-S$ und $+S + \frac{\partial S}{\partial x} dx$, deren Resultierende sich mit einer etwa vorhandenen Massenkraft $Y dx$ zu

$$\frac{\partial S}{\partial x} dx + Y dx$$

zusammensetzt; Y sei der Betrag der Massenkraft für die Längeneinheit des Stabes. Diese Querkraft ist dem Trägheitswiderstand des Elementes gleichzusetzen:

$$\varrho g \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = \left(\frac{\partial S}{\partial x} + Y \right) dx, \tag{7}$$

wo ρ die Masse der Volumeneinheit, q den Stabquerschnitt bedeutet.

Diese Gleichung, die sich durch Division mit dx auf

$$\rho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial S}{\partial x} + Y \quad (8)$$

vereinfacht, beherrscht die reine Translationsbewegung der Stabelemente quer in Richtung der y -Achse.

Außer der Translationsbewegung führt aber jedes Element dx noch eine Drehbewegung in der xy -Ebene aus unter Wirkung der Schub- und Normalspannungsmomente sowie etwaiger äußerer Massenkraftmomente.

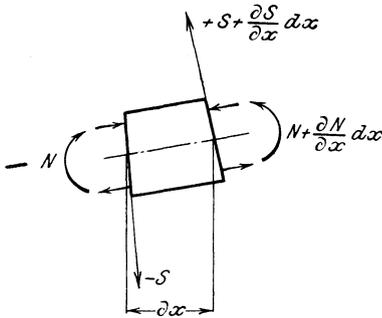


Fig. 193. Kräfte und Momente am Stabelement.

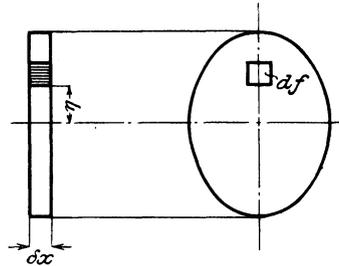


Fig. 194. Zum Trägheitsmoment eines Stabquerschnittes.

Das Moment der Schubspannung ist $+S dx$. Die an den beiden Enden angreifenden Momente der Normalspannungen, vgl. Fig. 193, sind

$$-N \quad \text{und} \quad +N + \frac{\partial N}{\partial x} dx;$$

ein etwaiges äußeres Moment, dessen Betrag für die Längseinheit M sei, liefert den Anteil

$$+M dx.$$

Die Resultierende sämtlicher Momente ist:

$$\left(S + \frac{\partial N}{\partial x} + M \right) dx.$$

Diese Resultierende ist dem rotatorischen Trägheitswiderstand des Elementes gleich zu setzen, der sich als Produkt der

Winkelbeschleunigung und des Trägheitsmomentes des Elementes dx ergibt. Der Winkel der Elementachse mit der x -Achse ist $\frac{\partial y}{\partial x}$, mithin die Winkelbeschleunigung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right).$$

Das Trägheitsmoment ist lt. Figur 194:

$$\begin{aligned} \Theta &= \int \eta^2 dm \\ dm &= dx df \cdot \rho \\ \Theta &= dx \rho \int \eta^2 df \\ &= \rho dx \cdot J, \end{aligned}$$

wo J das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bedeutet.

Demnach ergibt sich als Drehungsgleichung (nach Wegheben von dx)

$$\rho J \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \left(S + \frac{\partial N}{\partial x} + M \right). \quad (9)$$

Nach den Lehren der Elastizitätstheorie ist aber für kleine Biegunsbeträge (und nur um solche handelt es sich hier) das Moment der Normalspannungen N stets gleich dem Produkt aus Elastizitätsmodul, Querschnittsträgheitsmoment, Krümmung, also

$$N = E \cdot J \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (10)$$

wodurch (9) übergeht in

$$\rho J \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = S + E \cdot J \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + M. \quad (11)$$

Nach nochmaliger Differentiation nach x kann man schreiben:

$$\rho J \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{\partial S}{\partial x} + E J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (12)$$

Setzt man hier aus (7)

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \rho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y$$

ein, so kommt:

$$\rho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \rho J \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + Y - \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (13)$$

Sind weder Massenkräfte noch Massenmomente vorhanden, und vernachlässigt man die rotatorische Trägheit gegenüber der translatorischen, so resultiert mit

$$\rho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (14)$$

die Gleichung für die freien Schwingungen des Stabes.

Nach Ansetzung eines partikulären Integrales in der Form

$$y = XT, \quad (15)$$

wo X und T Funktion von x und t allein sind, ergibt sich durch Differentiation

$$\rho q \frac{X d^2 T}{dt^2} + EJ T \frac{d^4 X}{dx^4} = 0 \quad (16)$$

und nach Division mit XT

$$\rho q \frac{d^2 T}{dt^2} \frac{1}{T} = - \frac{EJ}{X} \frac{d^4 X}{dx^4}. \quad (17)$$

Setzt man beide Seiten dieser Gleichung einer und derselben negativen Konstanten $-\rho q k^2$ gleich, so erscheinen folgende gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 T &= 0, \\ \frac{d^4 X}{dx^4} - \frac{\rho q k^2}{EJ} X &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Gleichung 18a hat die beiden partikulären Integrale

$$\cos kt \quad \text{und} \quad \sin kt,$$

aus denen sich das allgemeine Integral

$$T = a \cos kt + b \sin kt \quad (19)$$

findet. Gleichung 18b dagegen hat 4 partikuläre Lösungen, die sich mit

$$\frac{\rho q k^2}{EJ} = \frac{m^4}{l^4} \quad (19a)$$

finden:

$$e^{-\frac{mx}{l}}, e^{+\frac{mx}{l}}, e^{-\frac{imx}{l}}, e^{+\frac{imx}{l}}.$$

Mit 4 unbestimmten Konstanten $A_1 A_2 A_3 A_0$ ergibt sich das allgemeine Integral:

$$X = A_1 e^{-\frac{mx}{l}} + A_2 e^{+\frac{mx}{l}} + A_3 e^{-\frac{imx}{l}} + A_4 e^{+\frac{imx}{l}},$$

welches unter Benutzung zyklometrischer und hyperbolischer Kosinus- und Sinusfunktionen übergeht in:

$$X = A \cos \frac{mx}{l} + B \sin \frac{mx}{l} + C \mathfrak{C}o\mathfrak{h} \frac{mx}{l} + D \mathfrak{S}i\mathfrak{n} \frac{mx}{l}. \quad (20)$$

Das Produkt in (19) und (20) ist also eine Lösung von (14)

$$y = (a \cos kt + b \sin kt) \left(A \cos \frac{mx}{l} + B \sin \frac{mx}{l} + C \mathfrak{C}o\mathfrak{h} \frac{mx}{l} + D \mathfrak{S}i\mathfrak{n} \frac{mx}{l} \right). \quad (21)$$

Die Art der Einspannung des Stabes ist maßgebend für die Größe m .

IV. Im Falle des einseitig eingespannten Stabes muß für

$$x = 0 \quad y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

sein, d. h.

$$A + C = 0$$

$$B + D = 0,$$

womit zu schreiben ist:

$$y = (a \cos kt + b \sin kt) \left[A \left(\cos \frac{mx}{l} - \mathfrak{C}o\mathfrak{h} \frac{mx}{l} \right) + B \left(\sin \frac{mx}{l} - \mathfrak{S}i\mathfrak{n} \frac{mx}{l} \right) \right]. \quad (22)$$

Am freien Ende $x = l$ müssen ferner die Bedingungen erfüllt sein:

Es ist kein Normalspannungsmoment vorhanden:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Es ist keine Schubkraft vorhanden:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0.$$

Beide Bedingungen ergaben auf Hand von (21):

$$A(+\cos m + \mathfrak{Cof} m) + B(\sin m + \mathfrak{Sin} m) = 0$$

und

$$A(-\sin m + \mathfrak{Sin} m) + B(\cos m + \mathfrak{Cof} m) = 0.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, sobald gilt:

$$\frac{\sin m + \mathfrak{Sin} m}{\cos m + \mathfrak{Cof} m} = \frac{\cos m + \mathfrak{Cof} m}{-\sin m + \mathfrak{Sin} m}$$

oder nach Multiplikation

$$-\sin^2 m + \mathfrak{Sin}^2 m = \cos^2 m + 2 \cos m \mathfrak{Cof} m + \mathfrak{Cof}^2 m$$

oder

$$2 \cos m \mathfrak{Cof} m + 1 + 1 = 0$$

$$\cos m \mathfrak{Cof} m + 1 = 0. \tag{23}$$

Diese Gleichung heißt die Periodengleichung. Alle Werte m , die die Gleichung befriedigen, liefern vermöge

$$\frac{Qqk^2}{EJ} = \frac{m^4}{l^4}$$

eine Reihe von Werten k_i , $i = 1, 2, 3 \dots$, von denen jeder ein partikuläres Integral:

$$y_{k_i} = (a_{k_i} \cos kt + b_{k_i} \sin kt) \left[\sin m_i + \mathfrak{Sin} m_i \right. \\ \left. \left(\cos \frac{m_i x}{l} - \mathfrak{Cof} \frac{m_i x}{l} \right) - (\cos m_i + \mathfrak{Cof} m_i) \right. \\ \left. \left(\sin \frac{m_i x}{l} - \mathfrak{Sin} \frac{m_i x}{l} \right) \right]$$

ergibt, welches die Gleichung (6) befriedigt und den Bedingungen an den Enden des Stabes genügt. Natürlich ist auch die unendliche Reihe

$$y = \sum_i y_{k_i} = \sum_i (a_{k_i} \cos kt + b_{k_i} \sin kt) u_i \left(\frac{x}{l} \right)^{84a)}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (14), die man wieder den Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$

$$y = f(x),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = g(x)$$

mit Hilfe Fourierscher Entwicklungen anpassen kann.

V. Ist der Stab an beiden Enden eingespannt, so gilt sowohl für $x = 0$ wie $x = l$

$$y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

woraus sich dieselbe Periodengleichung

$$\cos m \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} m + 1 = 0$$

und die Gleichung für y findet:

$$y = (a \cos kt + b \sin kt) \left[(\sin m - \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} m) \left(\cos \frac{mx}{l} - \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} \frac{mx}{l} \right) - (\cos m - \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} m) \left(\sin \frac{mx}{l} - \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \frac{mx}{l} \right) \right].$$

VI. Für den Fall, daß beide Stabenden frei sind, gilt sowohl für $x = 0$ wie für $x = l$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0,$$

woraus sich die Periodengleichung $\cos m \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} m = 1$ ergibt.

Der Ausdruck für y , der leicht zu finden ist, ist weiter unten angegeben.

Die Auflösung der Periodengleichung nach m erfolgt am besten durch graphische Auftragung der Produkte $\cos m \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} m$ in Abhängigkeit von m . Indessen hat bereits Lord Rayleigh⁸⁵⁾ die Werte von m für die tiefsten Töne berechnet:

für den einseitig	{	$m_1 = 1,875$	für den beider-	{	$m_1 = 9,730$
eingeklemmten		$m_2 = 4,695$			$m_2 = 7,853$
Stab		$m_3 = 7,855$			$m_3 = 10,996$
		$m_4 = 10,996$			$m_4 = 14,137$
	

mittelst deren sich die Schwingungszahlen

$$n_i = \frac{1}{T_i} = \frac{k_i}{2\pi} = \frac{m_i^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho q}}$$

berechnen lassen.

VII. Mit dieser Formel kann man die Eigenschwingungen von hohen Türmen (z. B. Leuchttürmen) berechnen, die sich etwa wie Stäbe eines eingespannten und eines freien Endes verhalten.

Die Turmhöhe sei 50 m, der äußere Durchmesser 7,5, der innere 4,0. Dann ist der Querschnitt $q = 31,4$ [m²], das

äquatoriale Trägheitsmoment 142 [m⁴]. Nimmt man weiter den Elastizitätsmodul des Mauerwerks = 360 000 [kg cm⁻²] = 344 000 000 [g sec⁻² cm⁻¹] und die Dichte $\rho = 2,3$ [g · cm⁻³], so ergibt sich $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, die Schallgeschwindigkeit im Mauerwerk, = 3870 [m sec⁻¹].

Mit diesen Werten ergibt sich längste mögliche Schwingungsdauer des Turmes

$$T_1 = \frac{2\pi l^2}{m_1^2} \sqrt{\frac{\rho}{E} \cdot \frac{q}{J}}$$

$$= \frac{2\pi \cdot 50^2}{1 \cdot 875^2} \frac{1}{30,70} \sqrt{\frac{31,4}{142}}$$

$$= 0,55 \text{ [sec].}$$

Messungen der Schwingungsdauer des französischen Leuchtturmes Planier (54 m Höhe) ergaben eine Schwingungsdauer von 0,55 sec, was eine gute Übereinstimmung mit der theoretischen Voraussage bedeutet⁸⁶⁾.

VIII. Die Gestalt des schwingenden Stabes hat besonderes Interesse mit Rücksicht auf die Anwendung im folgenden Paragraphen, vor allem für den Fall, daß beide Enden frei sind.

Es handelt sich um die Aufzeichnung der Funktion:

$$y = (\cos m - \mathcal{C}of m) \left(\cos \frac{mx}{l} + \mathcal{C}of \frac{mx}{l} \right) + (\sin m + \mathcal{S}in m) \left(\sin \frac{mx}{l} + \mathcal{S}in \frac{mx}{l} \right)$$

für die verschiedenen Werte $m_i \dots$ Wir entnehmen die Gestalten für m_1, m_2, m_3 aus Rayleigh. Aus diesen drei Werten entspringen Stabschwingungsformen mit 2, 3 und 4 Knotenpunkte, deren Lage nebst den Verhältnissen der maximalen Stabausschläge in den Figuren 195—197 für die Stablänge $l = 1$ angegeben sind.

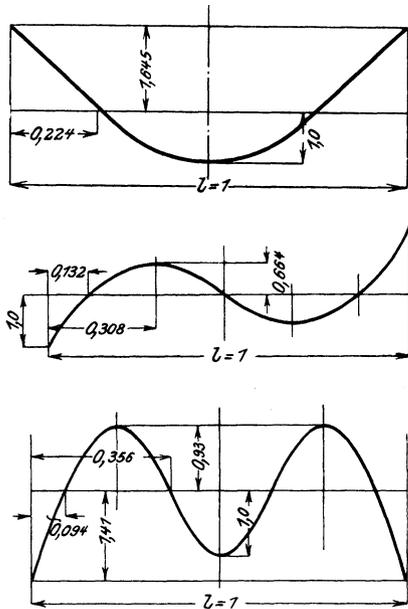


Fig. 195—197. Einfache Schwingungsformen eines Stabes.

§ 76. Schiffsschwingungen.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß ein Schiff elastische Schwingungen ausführen kann, die mit denen eines elastischen Stabes große Ähnlichkeit haben.

Betrachten wir ein Schiff als elastischen Stab, so muß man vor allem von der Prismenform absehen und die Konstanz von J und $\rho q(x)$ längs der Schiffsachse aufgeben. Es muß vielmehr das Schiff als ein Stab betrachtet werden, der zwar eine gerade, die Schwerpunkte der Querschnitte verbindende Achse hat, bei dem aber sowohl das Trägheitsmoment J wie die Masse pro

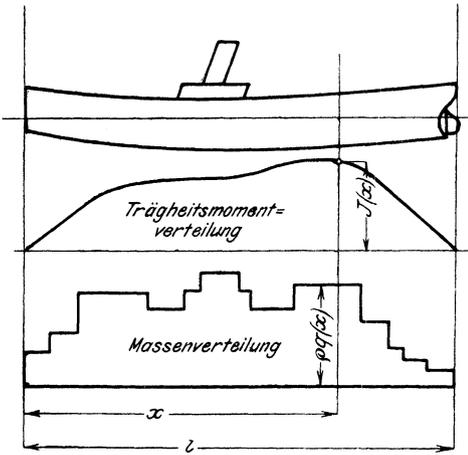


Fig. 198. Schiffskörper als schwingungsfähiges System.

Längeneinheit $\rho q(x)$ längs der Achse variieren. Schematisch stellen sich die Verhältnisse in der Figur 198 dar, bei der die in der Massenverteilung auffallenden Unregelmäßigkeiten vom vorderen Laderaum, Kesseln, Maschinen herrühren.

Wie nun auch die Verteilung der Trägheitsmomente und der Massen sein möge, stets läßt sich die Differentialgleichung für den nicht prismatischen Stab in der gleichen Weise ableiten,

wie in § 75 geschehen.

Knüpfen wir an Gl. (2) an und vernachlässigen wir wie vorhin die rotatorische Trägheit

$$\rho J \frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

und setzen wir äußere Momente M nicht voraus, so schreibt sich diese Gleichung nach Differentiation nach x :

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Hier setzen wir aus (8) ein

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \rho q(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(bei nicht vorhandenen äußeren Kräften Y) und aus (10)

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(J(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right),$$

womit die Differentialgleichung

$$\varrho q(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(J(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2)$$

entspringt.

Versuchen wir hier wieder wie üblich eine partikuläre Lösung der Form

$$y = XT,$$

so findet sich nach Division mit XT

$$\varrho q(x) \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -E \frac{1}{X} \frac{d^2}{dx^2} \left(J(x) \frac{d^2 X}{dx^2} \right). \quad (3)$$

Diese Differentialgleichung zerfällt in zwei Gleichungen, die nur t resp. x enthalten, wenn wir beide Seiten der Größe

$$-k^2 \varrho q(x)$$

gleichsetzen. Dann entsteht für t :

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 T = 0 \quad (4a)$$

und für x :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(J(x) \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = \frac{k^2 \varrho q(x)}{E} X, \quad (4b)$$

die nach Division mit dem mittleren Trägheitsmoment J_0 und nach Einführung der mittleren Dichte ϱ_0 und des mittleren Querschnittes q_0 übergeht in:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{J(x)}{J_0} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{k^2 \varrho_0 q_0}{E J_0} \left[\frac{\varrho q(x)}{\varrho_0 q_0} \right] X. \quad (4c)$$

Die Gleichung (4c) müßte nun ebenso behandelt werden wie Gl. (18b) § 75; es wäre das allgemeine Integral und die Bestimmung der Periodenkoeffizienten k erforderlich. Da das allgemeine Integral in geschlossener Form nicht angebar ist, muß man die Lösung der Aufgabe auf anderem Wege versuchen. Hierzu schreiben wir zunächst:

$$\frac{J(x)}{J_0} \frac{d^2 X}{dx^2} = p \quad (5)$$

und

$$\frac{d^2 p}{d x^2} = \frac{k^2 \varrho_0 q_0}{E J_0} \left[\frac{\varrho q(x)}{\varrho_0 q_0} \right] X \quad (6)$$

Hier würde p als Funktion von x sich sofort als Seilkurve zu

$$\frac{k^2 \varrho_0 q_0}{E J_0} \left[\frac{\varrho q(x)}{\varrho_0 q_0} \right] X$$

finden lassen, wenn X als Funktion von x und die Größe k bekannt wären, und dann könnte man nach

$$\frac{d^2 X}{d x^2} = \frac{p}{J(x) : J_0}$$

X als Seilpolygon zu

$\frac{p}{J(x) : J_0}$ bestimmen. Der

Prozeß der beiden Seilkurven muß also von X wieder auf X führen. Das bietet einen Fingerzeig für das Lösungsverfahren nach Fig. 199. Man hat zunächst für X eine der Schwingungsformen des prismatischen Stabes, z. B. die mit zwei Knotenpunkten des Rayleighschen Wertes m_1 , anzunehmen (Kurve I), wobei jedoch die Mittellage des Stabes AA so zu legen ist, daß in bezug auf diese Linie

$$\int_0^l \frac{\varrho q(x)}{\varrho_0 q_0} X dx = 0$$

wird.

Zu dieser Kurve II als Belastungsfläche konstruiere man mit dem Polabstand I die Seilkurve p (III).

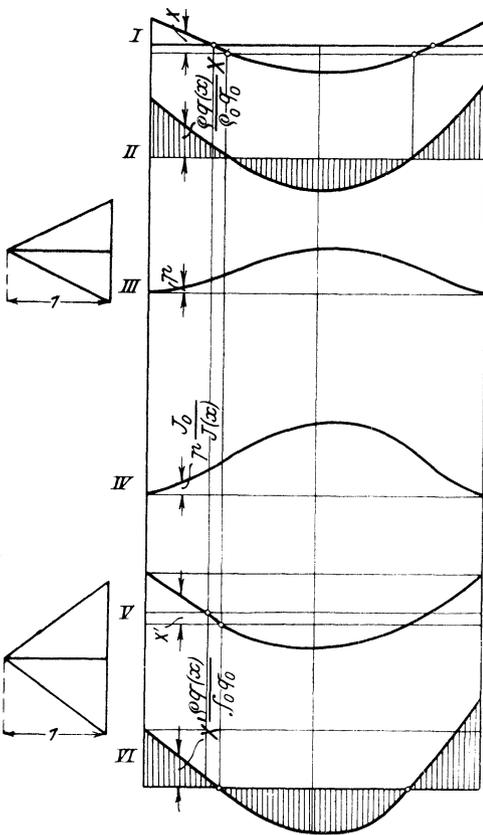


Fig. 199. Näherungsweise Bestimmung der Schwingungsgestalt eines Stabes.

Zu $\frac{p}{J(x):J_0}$ Kurve (IV) als Belastungsfläche konstruiert man mit demselben Polabstand, die Seilkurve X' (V), für die man wieder die Null-Linie so zu legen hat, daß

$$\int_0^l \frac{\rho q(x)}{\rho_0 q_0} X' dx = 0$$

wird (Kurve VI).

Kurve II und VI werden nun nicht identisch werden können, man kann aber verlangen, daß beide Kurven einander ähnlich werden, und man hat das Verfahren so lange fortzusetzen, bis durch die zweimalige Seilkurvenoperation die Kurve X in die ordinatenproportionale Kurve X' verwandelt ist, was nach einigen Schritten erreicht sein wird. Ist dann m das Verhältnis der Ordinaten $\frac{X'}{X}$, so hat man für die Bestimmung von k die Gleichung:

$$\frac{k^2 \rho_0 q_0}{E J_0} = \frac{1}{m}.$$

welche besagt, daß X' und X identisch werden, wenn man einen der beiden Polabstände

$$= \frac{k^2 \rho_0 q_0}{E J_0}$$

macht. Hiermit wird aber

$$k = \sqrt{\frac{E J_0}{m \rho_0 q_0}}.$$

So ergibt sich schließlich die Schwingungszahl

$$n = \frac{k}{2\pi}.$$

Dies Verfahren liefert bei der Untersuchung von Stäben mit wohldefinierter Elastizität genügende Resultate; es zeitigt aber bei der Anwendung auf Schiffe nicht immer richtige Ergebnisse, weil ein Schiff keinen Elastizitätsmodul hat, der als reine Materialgröße bestimmbar ist. Bei einem Schiff ist vielmehr die Größe E eine nicht zu ermittelnde Funktion der technischen Ausführung des Systems⁸⁷⁾.

§ 77. Analytische Ermittlung der Eigentöne nicht gleichförmiger, insbesondere verjüngter Stäbe.

1. Das im vorhergehenden Paragraphen behandelte graphische Verfahren der Tonhöhen-Berechnung nicht gleichförmiger Stäbe ist im allgemeinen nur zur Ermittlung des Grundtones geeignet. Der Versuch, die Obertöne graphisch zu ermitteln, stößt auf Schwierigkeiten, weil es beinahe unmöglich ist, die Ausgangs-Schwingungsform des Stabes so zu wählen, daß das nachfolgende Verfahren der sukzessiven Annäherung zu einer Lösung führt. Trifft man die erste Annahme nicht so, daß sie in genügender Nähe der endgültigen Lösung liegt, so ist das Verfahren der schrittweisen Annäherung nicht konvergent.

Man kann nun ein analytisches Verfahren gründen auf die Berechnung der Eigenschwingungszahlen aus der kinetischen und der potentiellen Energie. Sei

$$y = N(x) \sin \lambda t \quad (1)$$

die Schwingungsform des Stabes, wo $N(x)$ seine Biegelinie und λ seine Frequenz bedeutet, so wird der Schwingungsvorgang ein fortwährender Wechsel zwischen der potentiellen und der kinetischen Energie des Stabes. Nach den Regeln der Elastizitätstheorie berechnet sich die potentielle Energie nach

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l E J y''_{\max}{}^2 dx, \quad (2)$$

während

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho q y_{\max}^2 \lambda^2 dx \quad (3)$$

die kinetische Energie darstellt. Die beiden Energiebeträge nach (2) und (3) sind einander gleichzusetzen, so daß wir für das Frequenzquadrat den Ausdruck erhalten

$$\lambda^2 = \frac{E \int_0^l J N''^2(x) dx}{\rho \int_0^l q N^2(x) dx}, \quad (4)$$

sofern die Schwingungsgestalt des Stabes gemäß (1) richtig ermittelt vorliegt. Nun kennt man die Schwingungsgestalten für zylindrische Stäbe schon seit Rayleigh⁸⁸⁾, der bereits für den Grundton und einige Obertöne der Stabschwingungen für

die wichtigsten Einspannungsfälle die Schwingungsgestalten (1) berechnet hat. Man nennt die damit gegebenen Funktionen die Normalfunktionen⁸⁹⁾ des zylindrischen Stabes, von denen es für jeden Einspannungsfall eine unendliche Reihe gibt.

Handelt es sich nun um die Berechnung der Eigentöne von verjüngten und zwar von schwach verjüngten Stäben, so liegt es nahe, vorauszusetzen, daß in erster Annäherung der verjüngte Stab die gleichen Normalfunktionen habe^{88 a)} wie der zylindrische Stab, d. h. wir setzen im Ansatz (4), der für den nicht zylindrischen Stab gilt, die Normalfunktionen des zylindrischen Stabes ein. Ferner drücken wir das Trägheitsmoment J und den Querschnitt q des verjüngten Stabes aus durch die entsprechenden Größen J_0 und q_0 des zylindrischen Stabes, vgl. Fig. 200, gemäß

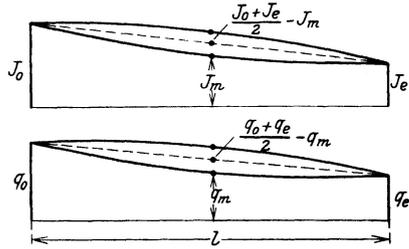


Fig. 200.

$$J = J_0 - \Delta J(x); \quad q = q_0 - \Delta q(x). \quad (5)$$

Setzen wir dieses in (4) ein, so findet sich

$$\lambda^2 = \frac{E \int_0^l [J_0 - \Delta J(x)] N''^2 dx}{\varrho \int_0^l [q_0 - \Delta q(x)] N^2 dx}. \quad (6)$$

Dividieren wir nun gemäß

$$\lambda_0^2 = \frac{E \int_0^l J_0 N''^2 dx}{\varrho \int_0^l q N^2 dx} \quad (7)$$

durch die Frequenz des unverjüngten Stabes, so findet sich folgender Ansatz für die Eigentöne des verjüngten Stabes

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 \frac{1 - \int_0^l \Delta J(x) u''^2 dx : J_0 \int_0^l u''^2 dx}{1 - \int_0^l \Delta q(x) u^2 dx : q_0 \int_0^l u^2 dx}. \quad (8)$$

Hier haben wir demnach die gesuchten Frequenzen ausgedrückt durch die Frequenzen des zylindrischen Stabes, die zu multiplizieren sind mit Korrekturfaktoren, die im wesentlichen nur die Integrale

$$\frac{\int_0^l \Delta J(x) N''^2 dx}{J_0 \int N''^2 dx} \quad \text{und} \quad \frac{\int_0^l \Delta q(x) N^2 dx}{q_0 \int_0^l N^2 dx} \quad (9)$$

enthalten. Handelt es sich nun um Stäbe mit linearer Verjüngung gemäß

$$J = J_0 - J_0 \eta \frac{x}{l}, \quad q = q_0 - q_0 \zeta \frac{x}{l} \quad (10)$$

mit dem Trägheitsmoment J_l bzw. dem Querschnitt q_l am freien Ende (vgl. Fig. 200), so nehmen die Integrale (8) die Form an

$$\sigma = \eta \int_0^l x N''^2(x) dx : l \int_0^l N''^2(x) dx; \quad \tau = \zeta \int_0^l x N^2(x) dx : l \int_0^l N^2(x) dx. \quad (11)$$

wo η und ζ definiert sind nach

$$\eta = \frac{J_0 - J_l}{J_0}; \quad \zeta = \frac{q_0 - q_l}{q_0} \quad (14a)$$

Deren Auswertung^{89a)} führt zu einfachen Ausdrücken für die Größen σ und τ gemäß

$$\sigma = \eta \sigma_j$$

$$\tau = \zeta \tau_j$$

mit
$$\sigma_j = \frac{1}{2} - \frac{2}{m_j^2 k_j^2}; \quad \tau_j = \frac{1}{2} + \frac{2}{m_j^2 k_j^2}. \quad (12)$$

Hier sind die m_j die Wurzeln der Periodengleichung (23) in § 75, während die k_j gegeben sind durch

$$k_j = \frac{\sin m_j + \sin m_j}{\cos m_j + \cos m_j}; \quad \lim_{j \rightarrow \infty} k_j = 1.$$

Tabelle (16) gibt die zahlenmäßige Ausrechnung der σ_j und τ_j für die 6 untersten Töne.

Damit werden die Eigentöne selbst gefunden nach

$$n_j^2 = n_{0j}^2 \frac{1 - \eta \sigma_j}{1 - \zeta \tau_j}. \quad (14)$$

Tabelle 16.

j	σ_j	τ_j
1	0,193	0,807
2	0,406	0,594
3	0,468	0,532
4	0,483	0,517
5	0,490	0,510
6	0,493	0,507
\downarrow ∞	0,500	0,500

(13)

Die Werte Tabelle 13 gelten im Falle des einseitig eingespannten, mit freiem Ende schwingenden Stabes.

Ist das nicht eingespannte Stabende gehalten, so schreiben sich die Koeffizienten $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$ gemäß

$$\bar{\sigma}_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{n_j^2} \frac{\mathfrak{Cof} n_j - \cos n_j}{\mathfrak{Cof} n_j + \cos n_j}; \quad \bar{\tau}_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{n_j^2} \frac{\mathfrak{Cof} n_j - \cos n_j}{\mathfrak{Cof} n_j + \cos n_j} \quad (15)$$

und berechnen sich nach (Tabelle 17)

Tabelle 17.

j	$\bar{\sigma}_j$	$\bar{\tau}_j$
1	0,431	0,569
2	0,480	0,520
3	0,490	0,510
4	0,494	0,506
5	0,496	0,504
6	0,497	0,503
\downarrow ∞	0,500	0,500

(15 a)

Die n_j aber sind die Wurzeln der Periodengleichung $\text{tg } n = \mathfrak{Tg} n$. Liegt eine kleine Abweichung von der linearen Verjüngung vor gemäß Fig. 200, so kann man diese ausdrücken nach den Ansätzen:

$$\left. \begin{aligned} J &= J_0 \left(1 - \eta \frac{x}{l} \pm \eta' \sin \pi \frac{x}{l} \right) \\ q &= q_0 \left(1 - \zeta \frac{x}{l} \pm \zeta' \sin \pi \frac{x}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

mit:

$$\eta' = \frac{1}{J_0} \left(\frac{J_0 + J_l}{2} - J_m \right)$$

$$\zeta' = \frac{1}{q_0} \left(\frac{q_0 + q_l}{2} - q_m \right)$$

Dann sind außer den Integralen (11) noch die Integrale

und

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \int_0^l \sin \pi \frac{x}{l} N''^2(x) dx : \int_0^l N''^2(x) dx \\ \tau' &= \int_0^l \sin \pi \frac{x}{l} N^2(x) dx : \int_0^l N^2(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

zu berechnen, die in der Tabelle 18 wiedergegeben sind. Mit den Koeffizienten η, η' und ζ, ζ' schreiben sich nun die Ansätze für die Eigentöne

$$n_j^2 = n_{0j}^2 \frac{1 - \eta \sigma_j \pm \eta' \sigma_j'}{1 - \zeta \tau_j \pm \zeta' \tau_j'} \quad (17b)$$

Tabelle 18.

j	σ_j'	τ_j'	$\bar{\sigma}_j'$	$\bar{\tau}_j'$
1	0,493	0,493	0,626	0,857
2	0,703	0,703	0,612	0,724
3	0,661	0,661	0,623	0,680
4	0,649	0,649	0,628	0,663
5	0,644	0,645	0,631	0,654
6	0,642	0,642	0,633	0,649
∞	$\frac{2}{\pi} = 0,63662$	0,63662	0,63662	0,63662
Einseitig eingespannt			Eingespannt --- Gehalten	

(17 a)

Wenn η, η' und ζ, ζ' nicht mehr als 0,5 betragen, ist die Genauigkeit der Formeln (14) und (17b) mit 1 bis 2 v. H. zu veranschlagen.

2. Man kann auch von der Differentialgleichung

$$\varrho q(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(J(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (18)$$

des verjüngten Stabes selbst ausgehen, um zu einer Abschätzung wenigstens der Obertöne zu kommen⁹⁰). Macht man hier die Substitution

$$y = X \cdot T \quad (19)$$

(X nur von x , T nur von t abhängig)

und

$$X = e^{\frac{m x}{l}} P(x), \quad (20)$$

$$\frac{m^4}{l^3} = \frac{\varrho q_0 k^2}{E J} \quad (20a)$$

(Erklärung von k siehe § 75, Ansatz (19a)),

wo nunmehr $P(x)$ eine zu bestimmende Funktion ist, so findet sich nach Ausführung der erforderlichen Differentiationen für P die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \left(\frac{J(x)}{J_0} + \frac{2lJ'(x)}{mJ_0} - \frac{q(x)}{q_0} \right) P(x) + \frac{4lJ(x)}{mJ_0} P'(x) \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Phi_i(x)}{m^{2+i}} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

welche natürlich wiederum von der vierten Ordnung ist. Da wir aber nur die hohen Töne in Betracht ziehen wollen, so können wir die Glieder, die durch die höheren Potenzen von m dividiert und durch das Summenzeichen Σ zusammengefaßt sind, vernachlässigen, wodurch für P eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$P'(x) = \left\{ \frac{m}{4l} \left(\frac{J_0}{J(x)} \cdot \frac{q(x)}{q_0} - 1 \right) - \frac{J'(x)}{2J(x)} \right\} P(x) \quad (22)$$

folgt. Deren Integration ist sehr einfach und führt gemäß

$$P(x) = \exp \int \frac{m}{4l} \left\{ \left(\frac{J_0}{J(x)} \cdot \frac{q(x)}{q_0} - 1 \right) - \frac{J'(x)}{2J(x)} \right\} dx \quad (23)$$

und

$$X = \exp \frac{m}{l} \varphi(x) = \exp \frac{m}{4l} \int \left\{ \frac{J_0}{J(x)} \cdot \frac{q(x)}{q_0} + 3 \right\} dx \quad (24)$$

auf die Schwingungsgestalt des Stabes. Hier ist X ein partikuläres Integral, aus welchem nach Vertauschung von m mit $-m$ bzw. $\pm im$ die drei anderen partikulären Integrale folgen. Demnach schreibt sich das allgemeine Integral von (18) für die höheren Töne:

$$y = \left\{ A \cos \frac{m}{l} \varphi(x) + B \sin \frac{m}{l} \varphi(x) + C \mathfrak{Cof} \frac{m}{l} \varphi(x) + D \mathfrak{Sin} \frac{m}{l} \varphi(x) \right\} \frac{\sin kt}{\cos kt}. \quad (25)$$

Wegen der Einspannungsbedingungen

$$X = 0 \quad \text{und} \quad X' = 0 \quad \text{für} \quad x = 0$$

und wegen $\varphi(0) = 0$ vereinfacht sich (25) zu

$$y = X \frac{\sin kt}{\cos kt} = \left[A \left\{ \cos \frac{m}{l} \varphi(x) - \mathfrak{Cof} \frac{m}{l} \varphi(x) \right\} + B \left\{ \sin \frac{m}{l} \varphi(x) - \mathfrak{Sin} \frac{m}{l} \varphi(x) \right\} \right] \frac{\sin kt}{\cos kt}. \quad (25a)$$

Demnach ermittelt sich die Periodengleichung aus den Bedingungen am freien Ende

$$X'' = 0 \quad \text{und} \quad X''' = 0 \quad \text{für} \quad x = l.$$

Die Entwicklung für X'' enthält Glieder mit m^2 und m , die für X''' Glieder mit m^3 , m^2 und m . Wir behalten nur je die Glieder höchster Potenz in m bei und finden:

$$0 = X'' = -\frac{m^2}{l^2} \varphi'^2(x) \left\{ A \left(\cos \frac{m}{l} \varphi(x) + \mathfrak{Cof} \frac{m}{l} \varphi(x) \right) + B \sin \frac{m}{l} \left(\varphi(x) + \mathfrak{Sin} \frac{m}{l} \varphi(x) \right) \right\},$$

$$0 = X''' = \frac{m^3}{l^3} \varphi'^3(x) \left\{ A \left(\sin \frac{m}{l} \varphi(x) - \mathfrak{Sin} \frac{m}{l} \varphi(x) \right) - B \left(\cos \frac{m}{l} \varphi(x) + \mathfrak{Cof} \frac{m}{l} \varphi(x) \right) \right\}.$$

Hiernach ist man in der Lage, die Periodengleichung aufzustellen. Mit den Abkürzungen:

$$\frac{m}{l} \varphi(l) = r, \quad \varphi(l) = \frac{1}{4} \int_0^l \left(\frac{J_0}{J(x)} \frac{q(x)}{q_0} + 3 \right) dx \quad (26)$$

erhält man nach einigen Zwischenrechnungen die Periodengleichung

$$\cos \nu \operatorname{Co}f \nu + 1 = 0, \tag{27}$$

deren Wurzeln $\nu_j \dots j = 1, 2, \dots$ sein mögen. Damit findet sich, daß die gesuchten Größen m_j gemäß:

$$m_j = \frac{l}{\varphi(l)} \nu_j \tag{28}$$

zunehmen. Ist nun der Stab zylindrisch, so findet sich wegen $\varphi(l) = l$ das bereits bekannte Ergebnis

$$m_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \nu_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} (2j - 1). \tag{29}$$

Ist aber der Stab konisch verjüngt gemäß (10), so ist das Integral in (26) auszuwerten gemäß

$$\begin{aligned} 1 : \varphi(l) &= \frac{4}{3l + \int_0^l \left(1 - \eta \frac{x}{l}\right) dx : \left(1 - \zeta \frac{x}{l}\right)} \\ &= \frac{4}{3l + \frac{\zeta}{\eta} \left[1 - \frac{\eta - \zeta}{\eta \zeta} \operatorname{Lgn}(1 - \eta)\right] l}, \end{aligned} \tag{30}$$

wobei man findet, daß der Einfluß der konischen Stabform sich erst in zweiter Annäherung bemerkbar macht. Man hat zu setzen:

$$\operatorname{Lgn}(1 - \eta) \sim -\eta - \frac{\eta^2}{2} \tag{31}$$

und findet dann nach einiger Zwischenrechnung, daß die Wurzeln der Periodengleichung für die Obertöne zunehmen wie

$$m_j \rightarrow \frac{\pi}{2} (2j - 1) \left(1 - \frac{\eta - \zeta}{8}\right). \tag{32}$$

Das gleiche Ergebnis findet sich, wenn man im Ansatz (14) die σ und τ für die hohen Töne ansetzt. Wie aus der Tabelle (13) ersichtlich, haben σ und τ als obere Grenze den Wert $1/2$, woraus sich gemäß der kurzen Durchrechnung

$$m_j \rightarrow \frac{\pi}{2} (2j - 1) \sqrt[4]{\frac{1 - \frac{\eta}{2}}{1 - \frac{\zeta}{2}}} \rightarrow \frac{\pi}{2} (2j - 1) \left(1 - \frac{\eta - \zeta}{8}\right) \tag{33}$$

das Ergebnis (32) bestätigt findet.

§ 78. Differentialgleichung der Membranschwingungen.

Eine Membran sei in der xy -Ebene längs einer Randkurve C , mit einer überall konstanten Zugspannung P ausgedehnt (Fig. 201). Ausweichungen der Membran aus der xy -Ebene werden mit z bezeichnet. Dann ist die translatorische Trägheit eines Membranelementes df bei einer überall konstanten Massendichte ϱ :

$$\varrho df \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Diese Trägheit muß der Summe der am Element angreifenden Zugkräfte gleich sein.

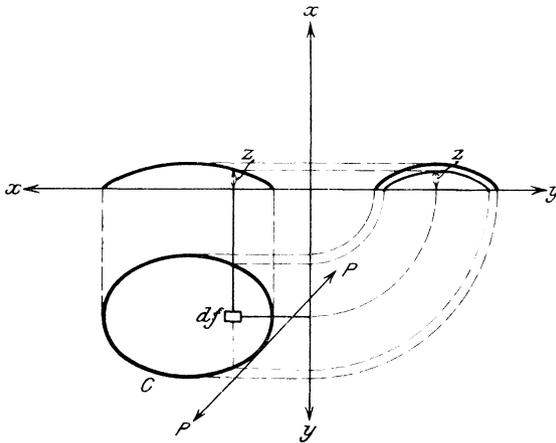


Fig. 201. Zur Differentialgleichung der Membranschwingungen.

Da die Zugspannung P auf die Längeneinheit entfällt, so greifen an den 4 Seiten des Flächenelementes $df = dx dy$ die Kräfte $\pm P dy$ bzw. $\pm P dx$ an (Fig. 202). Die Resultierende der beiden Kräfte $\pm P dy$ ist aber:

$$= + P \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dy dy \quad (2)$$

und von

$$\begin{aligned} & \pm P dx \\ = & + P \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy \quad (3) \end{aligned}$$

aus denselben Gründen, die in § 54 auseinandergesetzt sind.

Es ergibt sich hieraus die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

mit

$$a^2 = \frac{P}{\rho}.$$

Die Methode des partikulären Integralansatzes

$$z = ZT \quad (5)$$

liefert

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right). \quad (6)$$

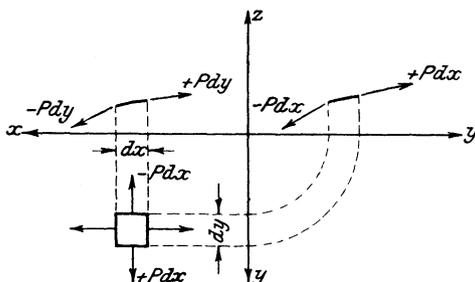


Fig. 202. Kräfte am Membranelement.

Diese Differentialgleichung spaltet sich durch Gleichsetzung beider Seiten mit $-(k_1^2 + k_2^2) a^2$ in zwei einfachere Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + (k_1^2 + k_2^2) a^2 T = 0 \quad (7)$$

und

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + (k_1^2 + k_2^2) Z = 0, \quad (8)$$

wo k_1 und k_2 zunächst unbestimmt sind.

Die Differentialgleichung (8) kann weiter gespalten werden durch den Ansatz

$$Z = XY$$

in

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_1^2 X = 0 \quad (9)$$

und

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_2^2 Y = 0. \quad (10)$$

Für (9) haben wir die partikulären Lösungen $\sin k_1 x$ und $\cos k_1 x$ für (10) bzw.

$$\sin k_2 y \quad \text{und} \quad \cos k_2 y.$$

Für die weitere Behandlung sind spezielle Berandungen der Membran zugrunde zu legen.

a) Ist die Basisfigur erstlich ein Rechteck der Seiten p und q , welches, wie Fig. 203 gezeichnet, in der xy -Ebene liegt, dann kann für Z nur das Produkt

$$Z = \sin k_1 x \cdot \sin k_2 y$$

in Betracht kommen, weil z und damit Z sowohl längs der x -Achse wie der y -Achse verschwinden müssen.

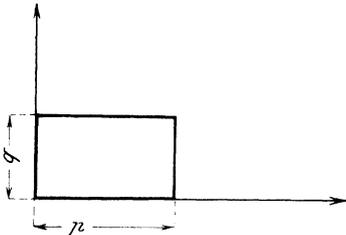


Fig. 203. Rechteckige Membran.

Damit aber auch z und also Z für $x = p$ und $y = q$, also längs der beiden nicht in die Achsen fallenden Rechteckseiten verschwinden, so muß

$$k_1 = \frac{m\pi}{p},$$

$$k_2 = \frac{n\pi}{q}$$

gesetzt werden, wo m und n ganze Zahlen sind.

Wir haben also für Z die Lösung

$$Z = \sin \frac{m\pi x}{p} \cdot \sin \frac{n\pi y}{q}, \quad (11)$$

wo m und n an die Bedingung

$$k^2 = \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} = k_1^2 + k_2^2 \quad (12)$$

gebunden sind.

Da das allgemeine Integral von (7) lautet

$$T = A \cos akt + B \sin akt, \quad (13)$$

so wird

$$z = (A \cos akt) + B \sin akt) \sin \frac{m \pi x}{p} \sin \frac{n \pi y}{q} \quad (14)$$

eine Lösung von (4).

Hier ist wieder $\frac{2 \pi}{ak}$ eine Schwingungsdauer, die für jedes Paar ganzer Zahlen m, n einen bestimmten Wert T_{mn} hat. Die Auswahl $m = 1, n = 1$ ergibt den Grundton der Membran. Die allgemeine Bewegung dieser kennzeichnet sich demnach als Übereinanderlagerung der Grund- und Oberschwingungen, welche Tatsache durch den Reihenansatz ausgesprochen wird.

$$z = \sum_{m,n}^{1,\infty} \left(A_{mn} \cos \frac{2 \pi t}{T_{mn}} + B_{mn} \sin \frac{2 \pi t}{T_{mn}} \right) \sin \frac{m \pi x}{p} \sin \frac{n \pi y}{q}. \quad (15)$$

Die Anfangsbedingungen sind dann wieder in der Form gegeben

$$\left. \begin{aligned} z &= f(x, y) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= g(x, y) \end{aligned} \right\} \text{für } t = 0,$$

mittels welcher Bedingungen sich die Koeffizienten A_{mn} und B_{mn} als Fouriersche Doppelintegrale darstellen

$$A_{mn} = \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q f(x, y) \sin m \frac{\pi x}{p} \sin n \frac{\pi y}{q} dx dy,$$

$$B_{mn} = \frac{2 T_{mn}}{\pi pq} \int_0^p \int_0^q g(x, y) \sin m \frac{\pi x}{p} \sin n \frac{\pi y}{q} dx dy.$$

Somit gestaltet sich die Untersuchung ganz analog der Bewegung der gespannten Saite. Den Knotenpunkten dieser entsprechen die Knotenlinien der Membran; wenn aber bei jeder Saite Knotenpunkte vorkommen, so gibt es bei den rechteckigen Membranen nur dann Knotenlinien, wenn sich die reziproken Seitenquadrate wie zwei ganze Zahlen verhalten.

$$\frac{1}{p^2} : \frac{1}{q^2} = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta}.$$

b) Die einfachste rechteckige Membran, die diese Bedingung erfüllt, ist das Quadrat.

Die einzelne Schwingung ist hier

$$z = \left(A_{mn} \cos \frac{2\pi t}{T_{mn}} = B_{mn} \sin \frac{2\pi t}{T_{mn}} \right) \sin \frac{m\pi x}{p} \cdot \sin \frac{n\pi y}{q},$$

welcher Ausdruck mit dem Ansatz

$$A_{mn} = M_{mn} \sin \delta_{mn}; \quad B_{mn} = M_{mn} \cos \delta_{mn}$$

übergeht in:

$$z = M_{mn} \left(\sin \frac{2\pi t}{T_{mn}} + \delta_{mn} \right) \sin \frac{m\pi x}{p} \cdot \sin \frac{n\pi y}{q}.$$

Man sieht, daß alle Geraden

$$x = \frac{p}{m} \quad \text{und} \quad y = \frac{q}{n}$$

dauernd in Ruhe sind, sobald die Membran nur die eine m, n -Schwingung ausführt.

Sollen aber bei gleichzeitiger Anwesenheit mehrerer einfacher Schwingungen Knotenlinien vorkommen, so ist dies nur möglich, wenn alle diese so beschaffen sind, daß man den Faktor

$$\sin \left(\frac{2\pi t}{T_{mn}} + \delta_{mn} \right)$$

absondern kann; d. h. es muß

$$T_{m,n} = \frac{2pq}{a\sqrt{q^2 m^2 + p^2 n^2}}$$

für alle Unterschwingungen denselben Wert haben, und alle Schwingungen müssen dieselbe Phase δ_{mn} haben. Die erstere Bedingung ist beim Quadrat erfüllt, wenn wir die m und n so wählen, daß die Quadratsumme $m^2 + n^2$ eine ganze Zahl wird. Die Phasengleichheit ist Sache der Anfangsbedingungen und muß durch diese als erfüllt angesehen werden.

Zunächst liefert $m = 1, \quad n = 1$

eine Schwingung mit Knotenlinien; die Knotenlinien sind aber der Rand des Quadrates, was selbstverständlich ist.

Ferner liefert $m^2 + n^2 = 5$:

$$\begin{aligned} m = 1, & \quad n = 2, \\ m = 2, & \quad n = 1, \end{aligned}$$

zwei Schwingungen, die beim Quadrate $p = q = \pi$ die Membranform liefern $M_{1,2} \sin x \sin 2y + M_{2,1} \sin 2x \sin y,$

deren Knotenlinien die Gleichung haben

$$M_{1,2} \sin x \sin 2y + M_{2,1} \sin 2x \sin y = 0.$$

Entwickelt man $\sin 2y$ und $\sin 2x$, so kann man $\sin x \sin y$ absondern, und es bleibt als Knotenliniengleichung übrig

$$M_{1,2} \cos y + M_{2,1} \cos x = 0.$$

$M_{1,2}$ und $M_{2,1}$ werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt; ihr Verhältnis $-\lambda$ bestimmt den Charakter der Knotenlinie

$$\cos y = \lambda \cos x$$

bzw.

$$y = \arccos(\lambda \cos x).$$

Es genügt, λ von 1 bis 0 variieren zu lassen, um alle möglichen Knotenlinien zu erhalten (Fig. 204). Für $\lambda = 0$ entsteht die Parallele zur x -Achse

$$y = \frac{\pi}{2},$$

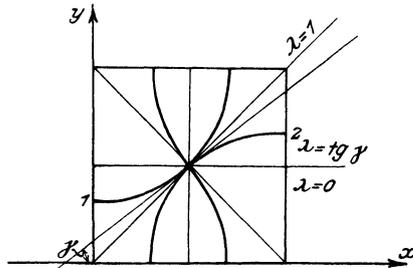


Fig. 204. Quadratische Membran; Knotenlinien.

für $\lambda = 1$ die Diagonale des Quadrats

$$y = x,$$

für dazwischenliegende Werte entstehen Kurven vom Charakter 1, 2 in der Fig. 204.

Verwickeltere Knotenlinien ergibt

$$m^2 + n^2 = 10,$$

worüber Riemann: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. II, S. 259 nachzulesen ist.

§ 79. Runde Membran. Besselsche Funktionen,

Ist die Basisfigur ein Kreis vom Radius P , so hat man die Differentialgleichung (8) § 78 auf Polarkoordinaten zu transformieren, d. h. statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y die Polarkoordinaten r, φ einzuführen (Fig. 205).

Zwischen x, y und r, φ bestehen bekanntlich folgende Gleichungen

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Durch Differentiation erhält man

$$\left. \begin{aligned} \partial x &= \partial r \cos \varphi - r \sin \varphi \partial \varphi, \\ 0 &= \partial r \sin \varphi + r \cos \varphi \partial \varphi, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{partielle Änderung von } x \\ \text{bei konstantem } y, \end{array}$$

woraus sich berechnet:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}. \quad (1)$$

Diese Formeln dienen zur Ermittlung der ersten partiellen Ableitung $\frac{\partial Z}{\partial x}$ von Z nach y in Abhängigkeit von den Differential-

quotienten

$$\frac{\partial Z}{\partial r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial Z}{\partial \varphi}.$$

Es ist zunächst

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}.$$

Eine zweite Differentiation nach x liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial Z}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial Z}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned}$$

oder nach Ausführung der Operationen

$$\frac{\partial}{\partial r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

und unter Berücksichtigung von (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \cos^2 \varphi &\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} - 2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} \\ &+ \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + 2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial Z}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (2)$$

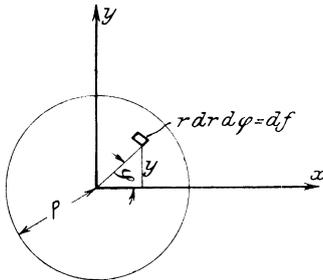


Fig. 205. Runde Membran.

Auf analoge Weise findet man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos \varphi}{r} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + 2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} \\ &+ \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} - 2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial Z}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Die Addition der beiden Gleichungen (3) und (4) zu $k^2 Z$ liefert

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + k^2 Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + k^2 Z.$$

Die Polarkoordinaten-Form der Differentialgleichung (8) lautet demnach

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + k^2 Z = 0. \quad (5)$$

Hier wird wieder ein partikuläres Integral der Form

$$Z = R \cdot \Phi,$$

wo R nur r , Φ nur φ enthält, angesetzt. Dann geht (5) über in die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + k^2 = - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}, \quad (6)$$

die sich durch Gleichsetzung der beiden Seiten mit $\frac{m^2}{r^2}$ in die beiden Gleichungen spaltet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi &= 0, \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wenden wir uns zunächst der zweiten Gleichung zu, so wollen wir gleich vorausschicken, daß sie sich nicht durch einfache Funktionen von x (ganze oder gebrochene, oder elemen-

tare transzendente) lösen läßt. Deshalb versuchen wir sofort, durch die Methode der Potenzreihenentwicklung ein partikuläres Integral R_1 zu finden und setzen an:

$$R_1 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i (kr)^{\lambda_i}. \tag{8}$$

Daher wird

$$\frac{dR_1}{d(kr)} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \lambda_i (kr)^{\lambda_i - 1} \tag{9}$$

und

$$\frac{d^2 R_1}{d(kr)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \lambda_i (\lambda_i - 1) (kr)^{\lambda_i - 2}. \tag{10}$$

Durch Einführung von (8), (9) und (10) in die aus (7) durch Multiplikation mit $k^2 r^2$ abgeleitete Gleichung:

$$k^2 r^2 \frac{d^2 R}{d(kr)^2} + kr \frac{dR}{d(kr)} + (k^2 r^2 - m^2) R = 0 \tag{11}$$

erhalten wir:

$$\sum_1^{\infty} A_i \{ [\lambda_i (\lambda_i - 1) + \lambda_i - m^2] (kr)^{\lambda_i} + (kr)^{\lambda_i + 2} \} = 0. \tag{12}$$

Damit diese Gleichung befriedigt werden kann, müssen die Exponenten λ_i so gewählt werden, daß die Differenz zwei aufeinanderfolgender $+ 2$ wird. Ist also λ_1 der niedrigste Exponent, so wird

$$\lambda_i = \lambda_1 + 2(i - 1).$$

Damit wird aber die Reihe (12)

$$0 = A_1 (\lambda_1 - m^2) (kr)^{\lambda_1} + A_2 \{ (\lambda_1 + 2)^2 - m^2 \} (kr)^{\lambda_1 + 2} + A_1 (kr)^{\lambda_1 + 2} + \dots \left. \begin{array}{l} \dots + A_i \{ [\lambda_1 + 2(i - 1)]^2 - m^2 \} (kr)^{\lambda_1 + 2(i - 1)} + \dots \\ + A_{i+1} (kr)^{\lambda_1 + 2(i - 1)}. \end{array} \right\} \tag{13}$$

Jetzt ist die Vergleichung der Glieder mit gleich hohen Potenzen möglich und wir erhalten als Bedingung für das Verschwinden der Entwicklung:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1^2 = m^2, \\ A_1 + A_2 \{ (\lambda_1 + 2)^2 - m^2 \} = 0, \\ A_{i-1} + A_i \{ [\lambda_1 + 2(i - 1)]^2 - m^2 \} = 0. \end{array} \right\} \tag{14}$$

wo $\lambda_1 = +m$ oder $-m$ gefunden wird und wobei A_1 unbestimmt bleibt. A_1 ist die unbestimmte Integrationskonstante, aus der sich die höheren Koeffizienten rekurrierend berechnen:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -\frac{A_1}{2 \cdot 2 \cdot 1 (\lambda_1 + 1)}, \\ A_3 &= -\frac{A_2}{2 \cdot 2 \cdot 2 (\lambda_1 + 2)}, \\ A_{i+1} &= -\frac{A_i}{2 \cdot 2 \cdot i (\lambda_2 + i)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Jeder der Werte $\lambda_1 = \pm m$ liefert eine Reihenentwicklung, von denen diejenige für $\lambda_1 = +m$ lautet

$$A_1(kr)^m \left[1 - \frac{(kr)^2}{2^2(m+1)} + \frac{(kr)^4}{(2 \cdot 2)^2 \cdot 2! (m+1)(m+2)} - \frac{(kr)^6}{(2 \cdot 2)^3 3! (m+1)(m+2)(m+3)} + \dots \right]. \quad (16)$$

Gibt man der unbestimmten Konstanten den speziellen Wert:

$$A_1 = \frac{1}{2^m \cdot m!},$$

so nennt man die entstehende Funktion eine Besselsche Funktion erster Art, die in mathematischen Schriften mit $J_m(kr)$ bezeichnet wird. Setzen wir für den Augenblick

$$kr = x,$$

so hat man demnach die Definitionsgleichung:

$$J_m(x) = \frac{x^m}{2^m \cdot m!} \left[1 - \frac{x^2}{2^2(m+1)} + \frac{x^4}{(2 \cdot 2)^2 \cdot 2! (m+1)(m+2)} - \dots \right] \quad (17)$$

für die Besselsche Funktion m -ter Ordnung.

Die Zahl m wird hier positiv, ganz oder nicht ganz vorausgesetzt.

Die Reihe konvergiert für endliche Werte von x ; der Wert der Reihe ist $= 0$ für $x = 0$, mit Annahme der Funktion $J_0(x)$, welche für $x = 0$ den Wert 1 annimmt.

Besonders wichtig ist der Fall, daß m eine ganze Zahl ist; doch soll hierüber erst später Weiteres auseinandergesetzt werden.

Vorerst ist der zweite Fall zu behandeln, daß nämlich

$$\lambda_1 = -m,$$

d. h. gleich einer negativen Zahl wird, die wir zunächst als nicht ganz voraussetzen. In diesem Fall ändert sich in der Entwicklung (16) nur das Vorzeichen der Zahl m und wir erhalten als zweites die gegebene Differentialgleichung befriedigendes partikuläres Integral:

$$B_1(kr) - m \left[1 - \frac{(kr)^2}{2 \cdot 2 (-m+1)} + \frac{(kr)^4}{(2 \cdot 2)^2 \cdot 2! (-m+1)(-m+2)} - \dots \right] \quad (18)$$

Dementsprechend für (17)

$$J_{-m}(x) = \frac{x^{-m}}{2^{-m}(-m)} \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot 2 (-m+1)} + \frac{x^4}{(2 \cdot 2)^2 \cdot 2! (-m+1)(-m+2)} - \dots \right] \quad (19)$$

und man hat als allgemeines Integral für (7b)

$$\begin{aligned} R &= R_1(kr) + R_2(kr) \\ &= A_1 J_m(kr) + B_1 J_{-m}(kr) \end{aligned} \quad (20)$$

bzw. für die aus (11) durch die Substitution $x = kr$ hervorgehende Besselsche Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{d^2 J}{dx^2} + x \frac{dJ}{dx} + (x^2 - m^2) J = 0 \quad (21)$$

das allgemeine Integral

$$J = A_1 J_m(x) + B_1 J_{-m}(x). \quad (22)$$

Das Integral $J_{-m}(x)$ konvergiert gleichfalls, wird aber für $x = 0$ unendlich. $J_m(x)$ und $J_{-m}(x)$ sind aber nur dann voneinander unabhängig und J ist nur dann das allgemeine Integral, wenn m nicht ganz ist.

Ist dagegen m eine ganze positive Zahl, so schreiben wir zunächst (17) bzw. (19) in den Formen

$$J_{+m}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(m+i)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2i}, \quad (23)$$

$$J_{-m}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(-m+i)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2i}. \quad (24)$$

In der Formel (24) werden aber alle Ausdrücke $\frac{1}{(-m+i)!} = 0$, solange $i \leq m-1$ ist, d. h. in (24) verschwinden die ersten m -Glieder und wir erhalten

$$J_{-m}^{(x)} = \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m - \frac{(-1)^m}{(m+1)!1!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2} + \frac{(-1)^m}{(m+2)!2!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+4} \quad (25)$$

oder in Summenform

$$J_{-m}(x) = (-1)^m \sum \frac{(-1)^i}{i!(m+i)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2i}, \quad (26)$$

d. h. nach Vergleichung mit (23):

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_{+m}(x),$$

d. h. im Falle m eine ganze Zahl ist, sind $J_{+m}(x)$ und $J_{-m}(x)$ nicht mehr voneinander unabhängig und (22) ist demnach nicht mehr das allgemeine Integral von (21).

Wir unterlassen es hier, das zweite partikuläre Integral im Falle eines ganzen m zu ermitteln, da dieses Integral, weil es für $x=0$ unendlich wird, bei der kreisförmigen Membran außer Ansatz bleiben muß, weil in diesem Falle nur eine Funktion, die für $x=0$ verschwindet, gebraucht werden kann. Daß übrigens bei der runden Membran m ganz sein muß, ergibt sich aus der ersten Differentialgleichung (7), deren allgemeines Integral ist:

$$\Phi = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi. \quad (27)$$

Diese Funktion muß die Periode 2π haben, was nur möglich ist, wenn m als ganze Zahl angenommen wird.

Wir erhalten also als Lösung der Differentialgleichung (5) das Produkt $R\Phi$, d. h. den Ausdruck

$$Z = (A_2 \cos m\varphi + B_2 \sin m\varphi) J_m(kr) \quad (28)$$

und als partikuläres Integral für

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad (29)$$

welches die aus (4) § 78 folgende Form der Differentialgleichung der runden Membran ist

$$z = T R \Phi = (A_1 \cos akt + B_1 \sin akt) (A_2 \cos m\varphi + B_2 \sin m\varphi) J_m(kr). \quad (30)$$

Dieser Ausdruck soll am Rande der Membran für $r = P$ verschwinden, d. h. es muß sein

$$J_m(kP) = 0. \quad (31)$$

Um die Wurzeln dieser Gleichung übersehen zu können, muß der Gesamtverlauf der Funktion $J_m(x)$ näher betrachtet werden.

Hierzu ziehen wir die Reihenentwicklung heran und finden für die niedrigsten Werte von m :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8},$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \right\}.$$

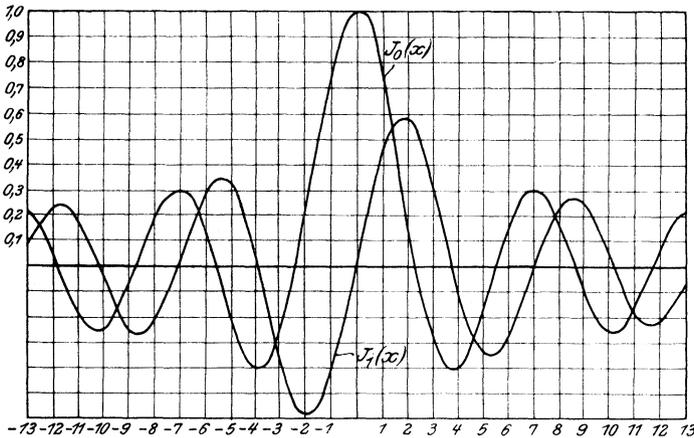


Fig. 206. Gestalt der Besselschen Funktionen $J_0(x)$ und $J_1(x)$.

Hieraus ergibt sich:

$$J_0(0) = 1,$$

$$J_1(0) = 0.$$

Ferner ist

$$J_m(0) = 0,$$

wie sich aus der allgemeinen Reihenentwicklung ergibt.

Mit Hilfe der Reihenentwicklungen sind Tafeln für die Funktionen $J_m(x)$ berechnet worden, von denen im nachstehenden ein Auszug gegeben ist.

Tabelle 19. Besselsche Funktionen.

	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_{10}(x)$
0	+1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+0,00	+0,00
1	+0,77	+0,44	+0,11	+0,02	0,00	+0,00	+0,00
2	+0,22	+0,58	+0,35	+0,13	+0,03	+0,00	+0,00
3	-0,26	+0,34	+0,49	+0,31	+0,13	+0,04	+0,00
4	-0,40	-0,07	+0,36	+0,43	+0,28	+0,13	+0,00
5	-0,18	-0,33	+0,05	+0,36	+0,39	+0,26	+0,00
6	+0,15	-0,28	-0,24	+0,11	+0,36	+0,36	+0,01
7	+0,30	0,00	-0,30	-0,17	+0,16	+0,35	+0,02
8	+0,17	+0,23	-0,11	-0,29	-0,10	+0,19	+0,06
		0,27					
9	-0,09	+0,25	+0,14	-0,18	-0,27	-0,06	+0,12
10	-0,25	+0,04	+0,25	+0,06	-0,22	-0,23	+0,21
11	-0,17	-0,18	+0,14	+0,23	-0,02	-0,24	-2,08
12	+0,05	-0,22	-0,08	+0,20	+0,18	-0,07	+0,30
13	+0,21	-0,07	-0,22	+0,00	+0,22	+0,13	+0,23
14	+0,17	+0,14	+0,15	-0,18	+0,08	+0,22	+0,09
15	-0,01	+0,20	+0,04	-0,19	-0,12	+0,13	-0,09

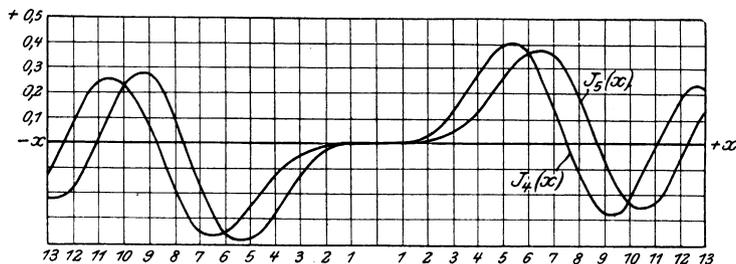


Fig. 207. Gestalt der Besselschen Funktionen $J_4(x)$ und $J_5(x)$.

In Fig. 206 und 207 sind die Gestalten der Besselschen Funktionen der Ordnungen 0 und 1 resp. 3 und 4 dargestellt.

Die Funktionen $J_m(x)$ haben sämtlich unendlich viele Nullstellen, d. h. die Gleichung

$$J_m(x) = 0$$

gibt unendlich viele Lösungen. Bezeichnet man diese Lösungen mit

$$k_{mi}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty,$$

so hat man nach Gleichung (31) für k unendlich viele Werte:

$$k = \frac{k_{mi}}{P}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty,$$

und wenn man die beiden Klammern in (30) ausmultipliziert, so ist

$$z = A_{mi} \cos \frac{k_{mi}}{P} at \cos m\varphi + B_{mi} \cos \frac{k_{mi}}{P} at \sin m\varphi \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} J_m \left(\frac{k_{mi}}{P} r \right) \quad (32)$$

$$+ C_{mi} \sin \frac{k_{mi}}{P} at \cos m\varphi + D_{mi} \sin \frac{k_{mi}}{P} at \sin m\varphi$$

für jede Wertkombination, bei der m und i ganze positive Zahlen sind und wo m auch $= 0$ sein kann, ein Integral von (29). Die allgemeine Bewegung der Membran wird dann als Übereinanderlagerung der Bewegungen (32) in Form der Summe erhalten:

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} J_m \left(\frac{k_{mi} r}{P} \right) \left\{ \begin{array}{l} A_{mi} \cos \frac{k_{mi}}{P} at \cos m\varphi + \\ B_{mi} \cos \frac{k_{mi}}{P} at \sin m\varphi + \\ C_{mi} \sin \frac{k_{mi}}{P} at \cos m\varphi + \\ D_{mi} \sin \frac{k_{mi}}{P} at \sin m\varphi \end{array} \right\}. \quad (33)$$

Die unbestimmten Konstanten sind wieder aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen. Es sei für $t = 0$ und

$$z = f(\varphi, r) \quad (34)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = g(\varphi, r). \quad (35)$$

Führen wir die Bedingung (34) in (33) ein, so wird für $t = 0$

$$f(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} J_m \left(\frac{k_{mi} r}{P} \right) (A_{mi} \cos m\varphi + B_{mi} \sin m\varphi). \quad (36)$$

Multipliziert man diese Gleichung zunächst mit $\cos m\varphi d\varphi$ und integriert von 0 bis 2π , so bleibt nur noch übrig:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \cos m\varphi d\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} A_{mi} J_m \left(\frac{k_{mi}}{P} r \right) \quad (37)$$

und nach Multiplikation mit $\sin m\varphi d\varphi$ und Integration in derselben Weise:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \sin m\varphi d\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} B_{mi} J_m \left(\frac{k_{mi}}{P} r \right). \quad (38)$$

Zur weiteren Berechnung multiplizieren wir Gleichung (37) bzw. (38) mit

$$J_m \left(\frac{k_{mi}}{P} r \right) dr$$

und integrieren von 0 bis P . Benutzen wir hierbei die beiden Sätze:

$$\int_0^P J_m \left(\frac{k_{mi}}{P} r \right) \cdot J_m \left(\frac{k_{mj}}{P} r \right) r dr = 0, \quad (39)$$

wenn i von j verschieden ist, und

$$\int_0^P \left[J_m \left(\frac{k_{mi}}{P} r \right) \right]^2 r dr = \frac{1}{2} \left[J_{m+1} (k_{mi}) \right]^2, \quad (40)$$

die in den Lehrbüchern der Besselschen Funktionen bewiesen werden, so erhalten wir das Resultat⁹¹⁾:

$$A_{mi} = \frac{2}{\pi [J_{m+1} (k_{mi})]^2} \int_0^P \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_m \left(\frac{k_{mi}}{P} r \right) \cos m\varphi r dr d\varphi, \quad (41)$$

$$B_{mi} = \frac{2}{\pi [J_{m+1} (k_{mi})]^2} \int_0^P \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_m \left(\frac{k_{mi}}{P} r \right) \sin m\varphi r dr d\varphi. \quad (42)$$

Für die Konstanten C_{mi} und D_{mi} folgt in analoger Weise:

$$C_{mi} = \frac{P}{ak_{mi}\pi} \frac{2}{[J_{m+1}(k_{mi})]^2} \int_0^P \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) J_m\left(\frac{k_{mi}r}{P}\right) \cos m\varphi r dr d\varphi, \quad (43)$$

$$D_{mi} = \frac{P}{ak_{mi}\pi} \frac{2}{[J_{m+1}(k_{mi})]^2} \int_0^P \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) J_m\left(\frac{k_{mi}r}{P}\right) \sin m\varphi r dr d\varphi. \quad (44)$$

wodurch die Gestalt der Membran für jede beliebige Zeit t bestimmt ist. Auf die Untersuchung der Knotenlinien gehen wir hier nicht näher ein, sondern verweisen auf B. Riemann, Partielle Differentialgleichungen, Bd. II. Braunschweig, 1900.

**§ 80. Schwingungen einer rotierenden Membran.
Hypergeometrische Funktion.**

Nach den Lehren der Elastizitätstheorie⁹²⁾ berechnen sich die radiale und die tangential Spannung σ_r und σ_τ einer rotierenden Scheibe von der Dicke $2h$ und dem Durchmesser $2R$ nach den Ansätzen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\omega^2 \varrho}{8} (3 + \sigma) (R^2 - r^2) + \frac{\omega^2 \varrho}{6} \sigma \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} (h^2 - 3z^2) \\ \sigma_\tau &= \frac{\omega^2 \varrho}{8} \{ (3 + \sigma) R^2 - (1 + 3\sigma) r^2 \} + \frac{\omega^2 \varrho}{6} \sigma \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} (h^2 - 3z^2) \end{aligned} \right\} (1)$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation, ϱ die Dichte der Scheibe, σ die Poissonsche Konstante und z den Abstand des Ortes, wo die betrachteten Spannungen herrschen, von der Mittelebene bedeutet.

Wie ersichtlich, hängen die Spannungen vom Elastizitätsmodul nicht ab. Sie gelten also auch für Scheiben, die keine eigene Elastizität besitzen, d. h. Membranen. Da überdies bei diesen die Dicke $2h$ stets klein gegenüber dem Radius R zu sein pflegt, so können wir in den Ansätzen für die Spannungen die zweiten Glieder fortlassen und erhalten demnach einfacher

$$\sigma_r = \omega^2 \varrho p (R^2 - r^2); \quad \sigma_\tau = \omega^2 \varrho (pR^2 - qr^2). \quad (1a)$$

Diese Spannungen greifen nach der Fig. 208 an dem Element

$r dr d\varphi$ der Membrane an. Falls nun eine Schwingung der Scheibe zu betrachten ist mit der Auslenkung w eines Punktes der Mittelebene aus seiner Ruhelage, so läßt sich der Beschleunigungsdruck des Scheibenelementes ins Gleichgewicht setzen mit den senkrecht zur Scheibenmittelebene gerichteten Resultierenden der gesamten am Membranelement angreifenden Spannkraften gemäß Ansatz

$$\rho r dr d\varphi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_r r d\varphi \frac{\partial w}{\partial r} \right) dr + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sigma_\tau dr \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) d\varphi, \quad (2)$$

der sich nach Fortheben der rein multiplikativen Differentiale vereinfacht zu

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\sigma_\tau}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \quad (3)$$

Versucht man dieser Differentialgleichung durch einen Lösungsansatz

$$w = u(r) \sin n\varphi \sin \lambda t \quad (4)$$

zu genügen, wo n eine ganze Zahl ist und λ die zu bestimmende Eigenfrequenz bedeutet, so geht die Differentialgleichung (3) nach Forthebung des Produktes $\sin n\varphi \sin \lambda t$ als allen Gliedern über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(R^2 - r^2) \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{R^2}{r} - 3r \right) \frac{du}{dr} + \left(\frac{8}{3 + \sigma} \frac{\lambda^2}{\omega^2} + \frac{1 + 3\sigma}{3 + \sigma} n^2 - n^2 \frac{R^2}{r^2} \right) u = 0, \quad (5)$$

in der wir noch die konstante Größe im letzten Gliede abkürzen gemäß

$$\frac{8}{3 + \sigma} \frac{\lambda^2}{\omega^2} + \frac{1 + 3\sigma}{3 + \sigma} n^2 = \frac{1}{p} \frac{\lambda^2}{\omega^2} + \frac{q}{p} n^2 = m(m + 2) = N^2 \quad (5a)$$

mit den Abkürzungen

$$p = \frac{3 + \sigma}{8}; \quad q = \frac{1 + 3\sigma}{8}.$$

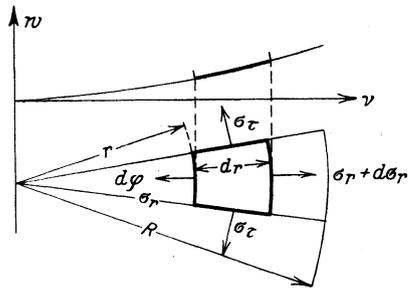


Fig. 208. Gleichgewicht am Membranelement.

Hierdurch entsteht die Differentialgleichung

$$(R^2 - r^2)u'' + \left(\frac{R^2}{r} - 3r\right)u' + \left(N^2 - n^2 \frac{R^2}{r^2}\right)u = 0. \quad (6)$$

Gemäß einer Bemerkung von H. Lamb und R. V. Southwell⁹³) liegt hier die Transformation

$$u = \eta(r) \left(\frac{R}{r}\right)^n \quad (7)$$

nahe, welche gemäß den aus ihr folgenden Differentiationsformeln

$$\left. \begin{aligned} u' &= \eta n \frac{r^{n-1}}{R^n} + \eta' \left(\frac{r}{R}\right)^n \\ u'' &= \eta n(n-1) \frac{r^{n-2}}{R^n} + 2\eta' n \frac{r^{n-1}}{R^n} + \eta'' \left(\frac{r}{R}\right)^n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

zu der einfacheren Differentialgleichung

$$\eta'' r^2 (R^2 - r^2) + \eta' r \{R^2(1 + 2n) - r^2(3 + 2n)\} + \eta r^2 (N^2 - 2n - n^2) = 0 \quad (9)$$

führt. Hier erweist sich weiter die Substitution

$$x = \frac{r^2}{R^2} \quad (10)$$

zweckmäßig, welche unter Berücksichtigung der Differentiationsformeln

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} \cdot \frac{2r}{R^2}; \quad \eta'' = \frac{d^2\eta}{dx^2} \cdot \frac{4r^2}{R^2} + \frac{d\eta}{dx} \frac{2}{R^2} \quad (11)$$

die Differentialgleichung (9) schließlich überführt in die Gestalt

$$x(1-x) \frac{d^2\eta}{dx^2} + \{1+n-(2+n)x\} \frac{d\eta}{dx} + \frac{1}{4}(N^2 - 2n - n^2)\eta = 0. \quad (12)$$

Diese erweist sich nunmehr als hypergeometrische Differentialgleichung

$$x(1-x)\eta'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}\eta' - \alpha\beta\eta = 0. \quad (13)$$

Diese wird mit (12) identisch, wenn man die Größen α , β , γ gemäß

$$\left. \begin{aligned} \alpha\beta &= -\frac{1}{4}(N^2 - 2n - n^2); & \alpha + \beta &= n + 1; & \gamma &= n + 1 \\ \text{resp.} & & & & & \\ \alpha &= \frac{1}{2}(m + n) + 1; & \beta &= \frac{1}{2}(m - n); & \gamma &= n + 1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ersetzt, wo noch an Stelle von N^2 der Ausdruck $m(m+2)$ getreten ist.

Aus der Theorie der Differentialgleichung (13), über die eine sehr ausführliche Literatur existiert^{93a)}, entnehmen wir den Satz, daß zwei unabhängige partikuläre Integrale gegeben sind durch

$$\eta_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x); \quad \eta_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma_1 + 1, z - \gamma_1 z), \quad (15)$$

welche zusammen das Fundamentalsystem der Differentialgleichung für $x < 1$ darstellen, solange γ keine ganze Zahl ist. Die Funktion F in (15) wird dargestellt durch die hypergeometrische Reihe⁹⁴⁾

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots \quad (16)$$

welche für $x < 1$ unbedingt unter der Bedingung: γ keine negative ganze Zahl und nicht = 0 konvergiert. Die Konvergenz hört auf für $x = 1$, d. h. hier hört (15) auf, ein Fundamentalsystem zu sein. Um aber auch hier das Fundamentalsystem zu finden, machen wir in (13) die Substitution $\xi = 1 - x$ und erhalten als Differentialgleichung den Ansatz

$$\xi(\xi-1) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1) - (\alpha + \beta + 1)\xi\} \frac{d\eta}{d\xi} + \alpha\beta\eta = 0. \quad (17)$$

Setzen wir hier

$$\alpha_1 = \alpha; \quad \beta_1 = \beta; \quad \gamma_1 = -\gamma + (\alpha + \beta + 1), \quad (18)$$

so findet sich

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \{\gamma_1 - (1 + \alpha + \beta)\} \frac{d\eta}{d\xi} - \alpha\beta\eta = 0, \quad (19)$$

also wieder die ursprüngliche hypergeometrische Differentialgleichung der Gestalt (13). Diese hat aber bei $\xi = 0$ das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \eta_1 &= F(\alpha, \beta, \gamma_1, \xi); \\ \eta_2 &= \xi^{1-\gamma_1} F(\alpha - \gamma_1 + 1, \beta_1 - \gamma_1 + 1, z - \gamma_1, \xi), \end{aligned} \quad (20)$$

woraus folgt, daß

$$\begin{aligned} \eta_1 &= F(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma, 1 - x); \\ \eta_2 &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, 1 - \alpha - \beta + \gamma, 1 - x) \end{aligned} \quad (21)$$

das Fundamentalsystem von (13) bei $x = 1$ wird, falls nicht $\gamma - \alpha - \beta$ eine ganze Zahl ist. Zur Lösung unserer Aufgabe

benötigen wir nun die Reihe (16), die allerdings im allgemeinen für $x = 1$ divergiert, da sich leicht zeigen läßt, daß der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder $u_n \cdot u_{n-1}$ für $n \rightarrow \infty$ sich der Grenze 1 nähert. Die Anwendung dieses Konvergenzkriteriums führt in unserem Falle jedoch zu einem zu weitgehenden Schluß. Mit $x = 1$ ist nämlich die Divergenz von (16) nur dann verknüpft, wenn $\alpha + \beta \geq \gamma$ ist, während für $\alpha + \beta < \gamma$ die Reihe (16) auch für $x = 1$ konvergiert⁹⁵).

Hier ist nun $\alpha + \beta = \gamma = n + 1$ in der Tat divergenzbedingend erfüllt. So kann man die Divergenz nur vermeiden, wenn man α oder β ganzzahlig negativ oder $= 0$ macht, d. h. man hat zu wählen

$$\alpha = -l \tag{22a}$$

oder

$$\beta = -l, \tag{22b}$$

wo l eine ganze Zahl bedeutet.

Aus (22a) folgt

$$\frac{1}{2}(n + m) + 1 = -l \quad \text{oder} \quad m = -(2l + n + 2), \tag{23a}$$

aus (22b) folgt

$$\frac{1}{2}(n - m) = -l \quad \text{oder} \quad m = n + 2l \tag{23b}$$

Sowohl (23a) als auch (23b) führen aber schließlich mit (5a) auf die Periodengleichung

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2} + n^2 q = (2l + n + 2)(2l + n)p. \tag{24}$$

Die Einsetzung einer ganzen negativen Zahl für α oder β nach (22a) oder (22b) hat zur Folge, daß die Reihe (16) nach $l + 1$ Gliedern abbricht. Die Lösung von (6) nimmt dann die Gestalt an:

$$\begin{aligned} w = u(r) \sin n\varphi \sin \lambda t = \\ \left(\frac{r}{R}\right)^n \left\{ 1 - \frac{l(l+n+1)r}{1 \cdot (n+1)R} + \frac{(l-1)l(l+n+1)(l+n+2)}{1 \cdot 2(n+1)(n+2)} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right. \\ \left. - \frac{(l-2)(l-1)l(l+n+1)(l+n+2)(l+n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3(n+1)(n+2)(n+3)} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \right. \\ \left. \pm \frac{1 \cdot 2 \dots l(l+n+1) \dots (l+n+l)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots l(n+1)(n+2)(n+l)} \left(\frac{r}{R}\right)^l \right\} \sin n\varphi \sin \lambda t. \end{aligned}$$

Die in der geschweiften Klammer stehende ganze rationale Funktion vom Grade l von $\xi = \frac{r}{R}$ hat im Intervall $0 < \xi < 1$ gerade l Wurzeln, denen l Knotenkreise entsprechen. Diese werden durch die n Durchmesser $\sin n\varphi = 0$ zu den Klangfiguren der Schwingungen w ergänzt.

§ 81. Wärmeleitung.

Aus der Erfahrung wissen wir, daß sich die Temperatur T einer Platte der Dicke δ , deren beide Seiten auf den konstanten Temperaturen T_a und T_b gehalten werden, nach genügend langer Zeit längs der Plattendicke linear abnehmend einstellt. Es gilt dann (siehe Fig. 209):

$$\frac{T_a - T_b}{\delta} = \frac{T_a - T}{x},$$

$$T = T_a - \frac{x}{\delta}(T_a - T_b). \quad (1)$$

Ferner wissen wir, daß in diesem Falle von dem Medium, welches die höhere Temperatur T_a aufrecht erhält, Wärme durch die Platte an das Medium der niedrigeren Temperatur T_b übergeht. Die Menge der Wärme Q ist proportional der Zeit t , der Temperaturdifferenz $T_a - T_b$, der Oberfläche ω , an der der Eintritt bzw. Austritt erfolgt, und umgekehrt proportional der Plattendicke δ :

$$Q = k \frac{T_a - T_b}{\delta} \omega t. \quad (2)$$

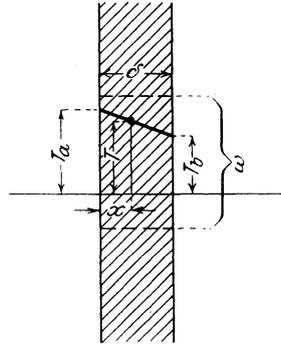


Fig. 209. Stationäre Wärme-
strömung durch eine Platte.

Der Proportionalitätsfaktor k heißt die Wärmeleitfähigkeit des Plattenmaterials, den wir im folgenden stets als konstant voraussetzen. Man nennt den geschilderten Vorgang: stationäre Wärmeleitung.

Die Formel (2) wenden wir nun an auf ein kleines Raumelement im Innern eines Körpers. Das Raumelement sei ein kleiner Zylinder der Grundfläche $d\omega$, der zwischen den Schichten 1, 2 des Abstandes ∂n liegt (Fig. 210). An den Grundflächen mögen die Temperaturen $T + \partial T$ und T herrschen.

Dann wird für ein Zeitelement dt der Wärmedurchgang durch die Schicht 1—2 in Richtung der Zylinderachse:

$$dQ = -k \frac{\partial T}{\partial n} d\omega dt, \tag{3}$$

wo das Minuszeichen andeutet, daß der Wärmedurchgang in Richtung der abnehmenden T erfolgt.

Wir sehen jetzt davon ab, die Temperatur T in einem Raumpunkte als konstant zu betrachten; sie sei eine Funktion der Zeit.

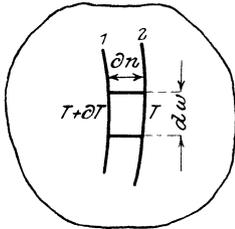


Fig. 210. Zur Differentialgleichung der Wärmeleitung in einem Körper.

Ändert sich nun T an einem Punkte um $+\partial T$, so muß erfahrungsgemäß das Raumelement an der betreffenden Stelle, welches $d\tau$ heißen möge und dessen Maße $\rho d\tau$ sei ($\rho =$ Massendichtigkeit), eine Wärmeinhaltsvermehrung dQ erfahren haben, die sich für die Zeiteinheit wie folgt berechnet:

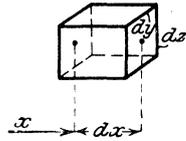


Fig. 211. Raumelement $dx dy dz$.

$$dQ = c \rho d\tau \partial T^{un}. \tag{4}$$

Dieser Ansatz gilt unabhängig davon, auf welche Weise der Wärmezuwachs in $d\tau$ entsteht.

Wir setzen nun voraus, daß der Wärmezuwachs dadurch entsteht, daß mehr Wärme in ein Raumelement einströmt als ausströmt, wie dies bei der nichtstationären Wärmeleitung der Fall ist.

Ist das Raumelement ein Würfel (Fig. 211)

$$d\tau = dx dy dz,$$

so sind die 3 Wärmeströmungen in Richtung der x, y, z -Achse zu unterscheiden:

$$\left. \begin{aligned} dQ_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x} dy dz \partial t, \\ dQ_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} dx dz \partial t, \\ dQ_z &= -k \frac{\partial T}{\partial z} dx dy \partial t. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Die Differentiale dieser 3 Größen, genommen nach den Achsen, stellen die durch Leitung im Raumelement sich an-

häufenden oder aus ihm verschwindenden Wärmebeträge dar, falls der Vorgang nicht stationär ist. Diese Beträge sind:

$$\left. \begin{aligned} \partial dQ_x &= k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dy dz \partial t, \\ \partial dQ_y &= k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dz \partial t, \\ \partial dQ_z &= k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dx dy \partial t, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

deren Summe mit der Vermehrung des Wärmehalts nach (4) gleichzusetzen ist:

$$c_Q d\tau \partial T = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dy dz \partial t, \quad (7)$$

aus welcher Formel, nach Hebung mit $d\tau = dx dy dz$ und nach Division mit ∂t , hervorgeht:

$$c_Q \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

oder mit der Abkürzung $\frac{k}{c_Q} = a^2$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (9)$$

Dies ist die allgemeine Differentialgleichung für die nichtstationäre Wärmeleitung. Mit $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ erhalten wir für die stationäre Leitung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (10)$$

welche Gleichung uns später sehr eingehend beschäftigen wird; vorderhand befassen wir uns mit Gleichung (9).

§ 82. Wärmeleitung in einem Stab mit Anfangstemperaturverteilung.

Für einen Stab der Länge l längs der x -Achse, dessen Oberfläche wärmeundurchlässig sei, kann, wenn die Stabquerschnittsdimension klein im Verhältnis zur Länge ist, die Temperatur als unabhängig von y und z angesehen werden, so daß gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Die Integration dieser Gleichung verlangt, die Temperatur als Funktion von t und x so zu bestimmen, daß $T'(t, x)$ der Gleichung (1) genügt, und daß die Nebenbedingungen erfüllt werden:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } t = 0, \quad T(0, x) &= f(x) & (2a) \\ \text{„ } x = 0, \quad T(t, 0) &= 0 & (2b) \\ \text{„ } x = l, \quad T(t, l) &= T. & (2c) \end{aligned} \right\}$$

Es soll also zur Zeit $t = 0$ im Stab eine bestimmte Temperaturverteilung $f(x)$ vorhanden sein, und es sollen auf die Stabenden die Temperaturen 0 und T einwirken. Man nennt die Bedingung 2a „Anfangsbedingung“, 2b und 2c „Oberflächenbedingungen“.

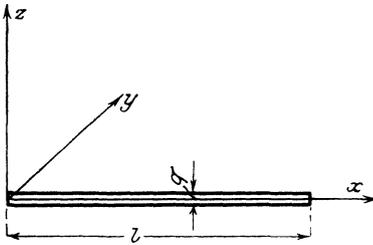


Fig. 212. Zur Wärmeleitung in einem Stabe.

Diese Aufgabe zerlegen wir in zwei einfachere, indem wir T als Summe von zwei Funktionen $T_1 + T_2$ betrachten, die sämtlich der Differentialgleichung (1) genügen, aber verschiedene Nebenbedingungen erfüllen, welche lauten:

- I. für T_1 : $T_1(0, x) = f(x), \quad T_1(t, 0) = 0, \quad T_1(t, l) = 0, \quad (4)$
- II. „ T_2 : $T_2(0, x) = 0, \quad T_2(t, 0) = 0, \quad T_2(t, l) = T. \quad (5)$

I. Der Differentialgleichung (1) genügt als partikuläre Lösung

$$T_1 = e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x. \quad (6)$$

Diese Lösung befriedigt die zweite Bedingung (4):

$$T_1(t, 0) = 0$$

ohne weiteres, die dritte Bedingung (4):

$$T_1(t, l) = 0$$

jedoch mit $\lambda = \frac{n\pi}{l}$, wo n eine ganze Zahl ist. T_1 erhält also die Gestalt:

$$T_1 = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (7)$$

Ebenso wie (7) genügt auch die Summe

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{n \pi}{l} x \quad (8)$$

der Differentialgleichung (1), wo die A_n unbestimmte Konstante sind.

Nunmehr ist die Lösung (8) der Bedingung

$$T_1(0, x) = f(x) \quad (9)$$

anzupassen. Aus (8) und (9) ergibt sich

$$T_1(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi x}{l} = f(x). \quad (10)$$

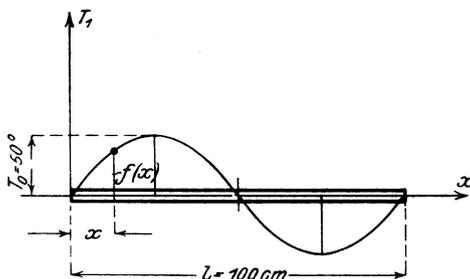


Fig. 213. Sinusförmige Temperaturverteilung längs eines Stabes.

Es handelt sich also wieder um die schon in § 72 gelöste Aufgabe der Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in eine Fouriersche Reihe. Wir entnehmen diesem Paragraph Formel (20) (indem wir x mit α vertauschen):

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\alpha) \sin \frac{n \pi \alpha}{l} d\alpha$$

und finden:

$$T_1 = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{n \pi x}{l} \int_0^l f(\alpha) \sin \frac{n \pi \alpha}{l} d\alpha. \quad (11)$$

Um hiernach ein Beispiel zu berechnen, sei ein Kupferstab von $l = 100$ cm Länge gegeben. Zur Zeit $t = 0$ sei die Temperaturverteilung

$$f(x) = T_0 \sin \frac{2 \pi x}{l} \text{ mit } T_0 = 50^\circ \text{ C}$$

gegeben (Fig. 213). Die Temperatur ist also längs der Stabachse sinusförmig verteilt. Für Kupfer haben wir nun folgende Konstanten:

$$\begin{aligned} K &= 0,9 \text{ [cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}\text{]}, \\ c &= 0,094 \text{ [cal g}^{-1}\text{]}, \\ \rho &= 8,9 \text{ [g cm}^{-3}\text{]}. \end{aligned}$$

Hiernach ergibt sich

$$a^2 = \frac{K}{c \cdot \rho} \simeq 1,1 \text{ [cm}^2 \text{ sec}^{-1}\text{]}.$$

Für das Integral in Formel (11) finden wir

$$T_0 \int_0^l \sin \frac{2\pi\alpha}{l} \cdot \sin \frac{2\pi\alpha}{l} d\alpha = T_0 \frac{l}{2},$$

da n nur $= 2$ genommen zu werden braucht, weil für alle $n \leq 2$ der Integralwert verschwindet.

Die Temperatur selbst wird damit:

$$T_1 = T_0 e^{-\frac{4\pi^2}{10000} a^2 t} \sin \frac{2\pi x}{l} = 50^0 \cdot e^{-0,004 t} \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Hiernach sinkt die Maximaltemperatur der Stabachse nach ca. 500 Sekunden auf 0,135 ihres Anfangswertes 50^0 herab, weil

$$e^{-0,004 \cdot 500} = e^{-2} = 0,135$$

ist.

Die sinusförmige Verteilung längs des Stabes wird durch die Abkühlung nicht gestört.

§ 83. Berücksichtigung der Oberflächenbedingung.

Gab § 69 ein Beispiel für das Verschwinden der Anfangsbedingung mit der Zeit, so wollen wir nunmehr das Eindringen einer Oberflächenbedingung in das Innere eines Stabes untersuchen. Wir wollen die Änderung der Temperatur eines Stabes (Fig. 214) untersuchen, der zur Zeit $t = 0$ überall die Temperatur T hatte. Plötzlich wird an seinem Ende $x = l$ die Temperatur T , d. h. die Oberflächenbedingung $T(t, l) = T$ hergestellt. Wie verteilt sich nun die Temperatur längs des Stabes? Offenbar dringt die Temperatur T allmählich in den Stab ein gemäß

den Kurven 1, 2, 3, bis sich nach unendlich langer Zeit die Verteilung

$$T_2 = T \cdot \frac{x}{l} \tag{1}$$

einstellt.

Diese Verteilung genügt in der Tat der Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2}$$

und außerdem den Bedingungen:

$$x = 0, \quad T(t, 0) = 0, \tag{2a}$$

$$x = l, \quad T(t, l) = T. \tag{2b}$$

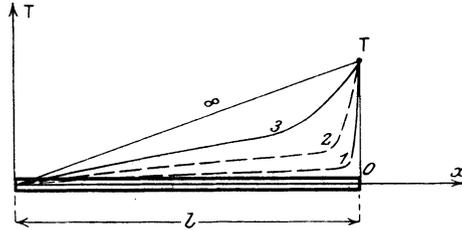


Fig. 214. Eindringen der Temperatur vom Ende des Stabes her.

Sie genügt aber nicht der Bedingung

$$t = 0, \quad T(0, x) = 0. \tag{2c}$$

Dieser Bedingung muß aber nach der Aufgabestellung auch genügt werden. Wir erreichen dies, indem wir zu (1) eine Funktion von t und x : $T_1(t, x)$ hinzufügen, die die Differentialgleichung (2) befriedigt und

$$\text{für } t = 0 \text{ den Wert } T_1(0, x) = -T \frac{x}{l},$$

$$\text{für } x = l \text{ den Wert } T_1(t, l) = 0$$

annimmt. Dann werden wir sicher haben:

$$\text{für } t = 0, \quad T(0, x) = T_2(0, x) + T_1(0, x) = 0,$$

d. h. die fehlende Bedingung ist erfüllt.

Die gesuchte Funktion $T_1(t, x)$ hat demnach denselben Bedingungen zu genügen wie die Funktion T_1 in § 82, wenn wir die zu erfüllende Anfangstemperaturverteilung längs des Stabes

$$f(x) = -T \frac{x}{l}$$

setzen. Wir schreiben ohne weiteres nach Formel (11) des § 82 an

$$T_1(t, x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{n \pi x}{l} \int_0^l -\frac{T \alpha}{l} \sin \frac{n \pi \alpha}{l} d\alpha \quad (3)$$

oder nach Vorziehung der Konstanten aus dem Integral:

$$T_1(t, x) = -\frac{2 T}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{n \pi x}{l} \int_0^l \alpha \sin \frac{n \pi \alpha}{l} d\alpha. \quad (4)$$

Die Ausführung des Integrals geschieht mittels der teilweisen Integration⁹⁷⁾ und liefert zunächst mit

$$a = u, \quad \sin \frac{n \pi \alpha}{l} d\alpha = dv$$

$$\int u dv = uv - \int v du = -\frac{a l}{n \pi} \cos \frac{n \pi \alpha}{l} + \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n \pi \alpha}{l}$$

und nach Einführung der Grenzen 0 und l endgültig:

$$\int_0^l u dv = -\frac{l^2}{n \pi} \cos n \pi = (-1)^{n+1} \frac{l^2}{n \pi}, \quad (4a)$$

womit die Formel (4) übergeht in:

$$T_1(t, x) = \frac{2 T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} l^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad (5)$$

woraus sich zusammen mit

$$T_x = T \frac{x}{l}$$

ergibt:

$$T(t, x) = T_2(t, x) + T_1(t, x)$$

$$= T \left(\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{n \pi x}{l} \right). \quad (6)$$

Für $t \cong \infty$ verschwindet die Summe in der Klammer, so daß $T(\infty, x) = T \frac{x}{l}$ übrig bleibt. Für endliche Werte von t , z. B. $t = 1000$ sec, wird, wenn nur das erste Glied ($n = 1$)

der Summe beibehalten wird, mit den Konstanten des Beispiels in § 82

$$T(t, x) = T \left(\frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} e^{-1} \sin \frac{\pi x}{l} \right), \quad (7)$$

d. h. eine Temperaturverteilung, die tatsächlich ihrem Charakter nach der in Fig. 214 durch den Linienzug 3 angedeuteten Gestalt entspricht. Die höheren Glieder ändern nichts an dem Charakter der Verteilung.

Für $t = 0$ geht aber die unendliche Summe über in $\frac{\pi x}{2l}$ und damit wird die Temperatur

$$T(0, x) = 0$$

entsprechend Bedingung (2c). Daß aber

$$-\frac{\pi x}{2l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n \pi x}{l}$$

ist, beweist man, indem man $-\frac{\pi x}{l}$ nach § 72 und 73 in eine Fouriersche Reihe entwickelt. Es wird

$$f(x) = -\frac{\pi x}{2l} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi x}{l},$$

wenn

$$A_n = -\frac{2}{l} \int_0^l \frac{\pi \alpha}{2l} \sin \frac{n \pi x}{l} d\alpha = -\frac{\pi}{l^2} \int_0^l \alpha \sin \frac{n \pi \alpha}{l} d\alpha$$

ist. Der Integralwert ist aber nach (4a) dieses Paragraphen

$$= \frac{(-1)^{n+1} l^2}{n \pi},$$

mithin wird:

$$A_n = \frac{(-1)^{n+2}}{n}$$

und demnach:

$$-\frac{\pi x}{2l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)_n}{n} \sin \frac{n \pi x}{l},$$

w. z. b. w.

§ 84. Wärmeleitung in einem Stabe bei veränderlicher Stabendtemperatur.

Wir unterziehen nunmehr den Verlauf der Funktion:

$$\vartheta(x, t) = \left(\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{n \pi x}{l} \right) \quad (1)$$

in Formel (6) des § 83 einer genaueren Betrachtung. Wir haben:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } x = 0 \text{ wird } \vartheta(0, t) = 0, \\ \text{„ } x = l \text{ „ } \vartheta(l, t) = 1 \text{ wenn } t > 0, \\ \text{„ } x = l \text{ „ } \vartheta(l, t) = 0 \text{ wenn } t < 0. \end{array} \right\} \quad (1a)$$

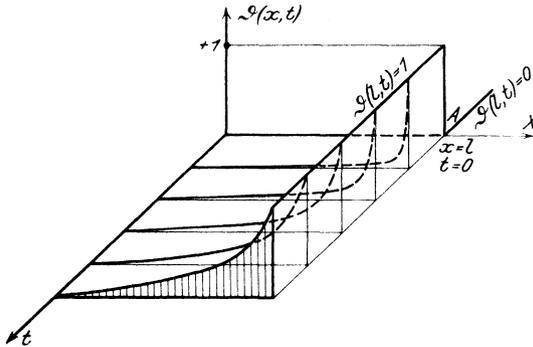


Fig. 215. Temperaturverteilung in einem Stabe bei konstanter Endtemperatur.

Bei $t = 0$ macht also die Funktion $\vartheta(l, t)$ einen Sprung vom Wert 0 auf den Wert 1.

Fig. 215 gibt ein ungefähres Bild des Funktionsverlaufes.

Wir benutzen nun $\vartheta(x, t)$, um zunächst Wärmeleitungsvorgänge darzustellen, bei denen die Temperatur T_1 im Stabpunkte $x = l$ nur während eines kurzen Zeitintervalles Δt konstant ist. Es werde also zur Zeit $= t_1$ am Stabende die Temperatur T_1 hergestellt, die zur Zeit t_2 wieder Null werde (Fig. 216). Es ist dann

$$t_2 - t_1 = \Delta t$$

und wir haben als Temperatur an einer beliebigen Stelle x des Stabes

$$T_1(x, t) = T_1 [\vartheta(x, t - t_1) - \vartheta(x, t - t_2)]. \quad (2)$$

Nach (1 a) gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } t = t_1 \text{ wird } \vartheta(l, t - t_1) = 0 \text{ und } \vartheta(l, t - t_2) = 0, \\ \text{mithin} \quad \quad \quad T_1(l, t) = 0; \\ \text{für } t_2 > t > t_1 \text{ wird } \vartheta(l, t - t_1) = 1 \text{ und } \vartheta(l, t - t_2) = 0, \\ \text{mithin} \quad \quad \quad T_1(l, t) = T_1; \\ \text{für } t > t_2 \text{ wird } \vartheta(l, t - t_1) = 1 \text{ und } \vartheta(l, t - t_2) = 1, \\ \text{mithin} \quad \quad \quad T_1(l, t) = 0. \end{array} \right\} (2a)$$

Also ist tatsächlich $T_1(l, t) = T_1$ von $t = t_1$ bis $t = t_2$, d. h. während des Zeitintervalles Δt .

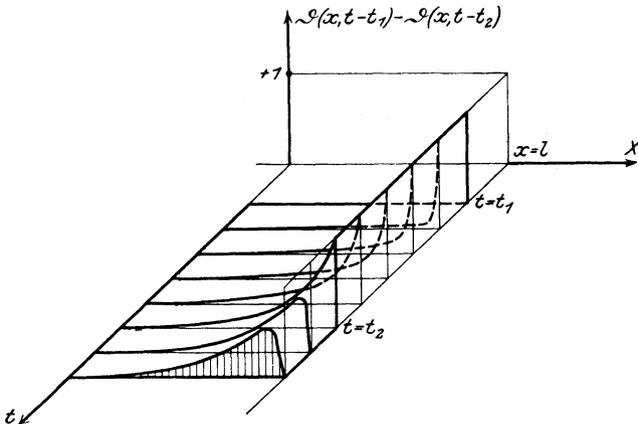


Fig. 216. Temperaturverteilung bei diskontinuierlich veränderlicher Endtemperatur.

Lassen wir jetzt auf die Periode $t_2 - t_1 = \Delta t$ eine gleichlange Periode $\Delta t = t_3 - t_2$ folgen, während welcher die konstante Temperatur T_2 am Stabende herrsche, dann stellt sich im Stabe eine Temperaturverteilung

$$T_2(x, t) = T_2 [\vartheta(x, t - t_2) - \vartheta(x, t - t_3)] \quad (3)$$

ein, die sich über $T_1(x, t)$ überlagert.

In analoger Weise kann man n Zeitintervalle aufeinander folgen lassen, und man hat als Temperatur (Übereinanderlagerung aller n Zustände $T_\nu(x, t)$, $\nu = 1, 2, 3, \dots, n$) die Summe

$$T(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} T_\nu [\vartheta(x, t - t_\nu) - \vartheta(x, t - t_{\nu+1})]. \quad (4)$$

Hier schreiben wir nun mit $t_\nu = t_{\nu+1} - \Delta t$ und nach Multiplikation der einzelnen Glieder der Summe mit $\frac{\Delta t}{\Delta t}$:

$$T(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} T_\nu \frac{\vartheta(x, t - t_{\nu+1} + \Delta t) - \vartheta(x, t - t_{\nu+1})}{\Delta t} \Delta t. \quad (5)$$

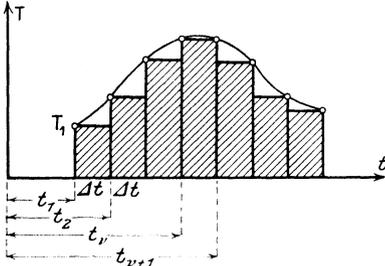


Fig. 217. Kontinuierlich veränderliche Temperatur.

Der Bruch ist aber nach § 69 nichts anderes als der partielle Differentialquotient

$$\frac{\partial \vartheta(x, t - t_{\nu+1})}{\partial t},$$

wenn wir zur Grenze für abnehmende Δt übergehen.

Gleichzeitig betrachtet man die Werte T_ν , nunmehr als stetig ineinander übergehend (Fig. 217), indem man ihnen eine zeitliche stetige Veränderlichkeit durch den Ansatz

$$T_\nu = \varphi(t_\nu) \quad (6)$$

zuteilt.

Wir erhalten dann die Formel

$$T(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varphi(t_\nu) \frac{\partial \vartheta(x, t - t_{\nu+1})}{\partial t} \Delta t. \quad (7)$$

Wegen des verschwindenden Δt kann man nunmehr statt des Zeigers $\nu + 1$ den Zeiger ν setzen und die Summe als Integral der Integrationsvariablen t_ν ($\Delta t = dt_\nu$) auffassen, welches von 0 bis t zu nehmen ist. Es wird also

$$T(x, t) = \int_0^t \varphi(t_\nu) \frac{\partial \vartheta(x, t - t_\nu)}{\partial t} dt_\nu. \quad (8)$$

Dies ist also die Temperaturverteilung im Stab, wenn sich die Endtemperatur nach der Zeitfunktion $\varphi(t_\nu)$ ändert. Die Funktion $\vartheta(x, t)$ ist dabei durch Formel (1) definiert⁹⁸⁾.

§ 85. Anwendung auf die Wärmebewegung in den Wandungen des Dampfmaschinenzylinders.

Ein Stab der Länge l ohne Wärmeabgabe in radialer Richtung ist nur denkbar als Teil einer Wand der Dicke l , wenn die Temperaturen auf beiden Seiten der Wand in größeren

Bereichen konstant sind. Ein solcher Fall liegt vor z. B. beim Deckel eines Dampfmaschinenzylinders, der genau genug als Platte der Dicke l betrachtet werden kann (Fig. 218).

$T = \varphi(t_v)$ sei die durch die variierende Dampf Temperatur gegebene, mit der Maschinenumlaufzeit gleichperiodische Temperatur der Innenwand; die Außentemperatur (Luft des Maschinenhauses) sei dauernd $= 0$. Der Einfachheit halber nehmen wir

$$\varphi(t_v) = \cos \frac{2\pi}{\Theta} t_v$$

an, wo Θ die Maschinenperiode bedeutet. Kompliziertere Ausdrücke für $\varphi(t_v)$ bieten nichts prinzipiell Neues.

Für die Temperaturverteilung in der Wand haben wir jetzt nach Formel (8) und (1) des vorigen Paragraphen:

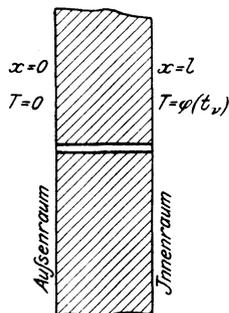


Fig. 218. Grenzbedingung zur Temperaturverteilung in der Wandung eines Dampfmaschinenzylinders.

$$T(x, t) = - \frac{2\pi a^2}{l^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n n \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^t e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} (t-t_v)} \cos \frac{2\pi}{\Theta} t_v dt_v. \quad (1)$$

Gebraucht man hier vorläufig die Abkürzungen:

$$\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} = \alpha; \quad \frac{2\pi}{\Theta} = \beta, \quad (1a)$$

so wird:

$$T(x, t) = - \frac{2\pi a^2}{l^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha t_v} \cos \beta t_v dt_v. \quad (2)$$

Das hier vorkommende Integral ermittelt sich leicht⁹⁹⁾:

$$\int_0^t e^{\alpha t_v} \cos \beta t_v dt_v = \frac{\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (3)$$

Setzen wir dies in Formel (2) ein und beschränken wir uns auf die Untersuchung des nach sehr langer Zeit eintretenden rein periodischen Zustandes, so wird:

$$T(x, t) = - 2 \pi \frac{a^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin \frac{n \pi x}{l} \frac{\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (4)$$

Setzt man hier den Wert für α aus (1a) wieder ein, so hat man mit einigen leicht zu übersehenden Umformungen ($\xi = \frac{\beta^2 l^4}{\pi^4 a^4}$):

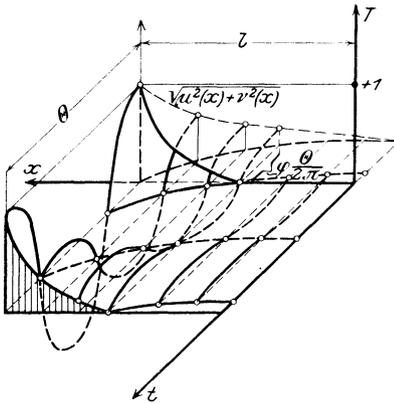
$$T(x, t) = \cos \beta t \cdot \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \left(1 + \frac{\xi}{n^4}\right)} \sin \frac{n \pi x}{l} + \sin \beta t \cdot \frac{2}{\pi^3} \frac{l^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \left(1 + \frac{\xi}{n^4}\right)} \sin \frac{n \pi x}{l}.$$

Setzen wir hier kurz für die Faktoren von $\cos \beta t$ bzw. $\sin \beta t$, welche Funktionen von x sind, $\mu(x)$ bzw. $v(x)$, so kann man kürzer schreiben:

$$T(x, t) = \mu(x) \cos \beta t + v(x) \sin \beta t$$

oder auch

$$T(x, t) = \sqrt{\mu^2(x) + v^2(x)} \cdot \cos(\beta t - \varphi),$$



wo zu setzen ist

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{v(x)}{\mu(x)}.$$

Es wird für

$$x = l:$$

$$\mu(x) = 1, \quad v(x) = 0,$$

$$T(x, t) = \cos \beta t, \quad \varphi = 0,$$

$$x = 0:$$

$$\mu(x) = 0, \quad v(x) = 0,$$

$$T(x, t) = 0.$$

Fig. 219. Temperaturverteilung in der Wandung eines Dampfmaschinenzylinders. Die Wandtemperatur nimmt also von innen nach außen nach dem Gesetze $\sqrt{\mu^2(x) + v^2(x)}$ von $x = l$ bis $x = 0$ ab, während die Phasenabweichung φ der Temperaturschwankung hinter der Schwankung $\cos \beta t$ von innen nach außen zunimmt.

Fig. 219 gibt ein ungefähres Bild der Temperaturverteilung¹⁰⁰).

§ 86. Stationäre ebene Bewegung einer inkompressibelen Flüssigkeit.

I. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Wir betrachten eine auf einer Ebene sich bewegende Flüssigkeitsschicht der Dicke 1 (Fig. 220).

Zunächst untersuchen wir den Gleichgewichtszustand eines am Orte $A = (x, y)$ befindlichen Flüssigkeitselementes $\Delta x \Delta y$ der Dichte ρ , welches unter Einfluß des Flüssigkeitsdruckes p und der am Element angreifenden äußeren massenproportionalen Kraft $p \rho \Delta x \Delta y$ steht. Letztere zerlegen wir in ihre Komponenten $X \rho \Delta x \Delta y$ und $Y \rho \Delta x \Delta y$.

Folgende Kräfte kommen in Ansatz, die wegen des Gleichgewichts für sich verschwinden müssen:

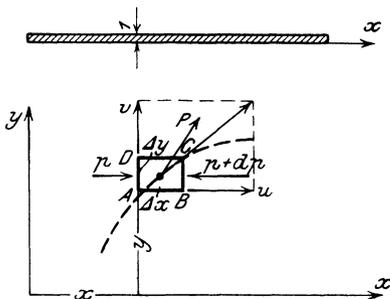


Fig. 220. Gleichgewicht eines Flüssigkeitselementes.

Parallel der x -Achse:

$$p \Delta y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y + X \rho \Delta x \Delta y = 0.$$

Parallel der y -Achse:

$$p \Delta x - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x + Y \rho \Delta x \Delta y = 0$$

oder kürzer:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ist die Flüssigkeit nicht im Gleichgewicht, sondern in Bewegung, so äußert sich dies durch Beschleunigungen der einzelnen Flüssigkeitselemente, denen Massenkräfte entsprechen. Sind

$u = \frac{dx}{dt}$ und $v = \frac{dy}{dt}$ die am Orte (x, y) vorhandenen Geschwindig-

keiten, so sind $\frac{du}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ die Beschleunigungen, aus denen sich

die Massenkräfte:

$$\varrho \Delta x \Delta x \frac{du}{dt} \quad \text{und} \quad \varrho \Delta x \Delta y \frac{dv}{dt}$$

ergeben. Diese müssen wieder mit den Kräften (1) zwei Gleichungen ergeben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Da u und v im allgemeinen Funktionen von x , y , t sein werden, so hat man:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial t} dt \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial t} dt \end{aligned}$$

und nach Division mit dt , unter Einsetzung von

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u, & \frac{dy}{dt} &= v: \\ \frac{du}{dt} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{dv}{dt} &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned}$$

Hiermit schreibt sich dann das Gleichungssystem (2):

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Neben u und v ist hier auch p zu bestimmen; es muß noch eine Gleichung hinzukommen. Diese fehlende Gleichung hat anzusagen, daß die Dichtenänderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t} dt$ im Elemente $\Delta x \Delta y$ entsprechen muß der durch das Zu- bzw. Abströmen hervorgerufenen Änderung der in $\Delta x \Delta y$ befindlichen Flüssigkeitsmenge. Der Dichtenänderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t} dt$ entspricht die „Füllungsänderung“

$\frac{\partial \varrho}{\partial t} dt \Delta x \Delta y$ des Elementes $\Delta x \Delta y$.

Zuströmung und Abströmung in Richtung der x - bzw. y -Achse regeln sich nach den Beträgen:

$$\Delta y \rho u dt - \Delta y \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \right) dt$$

bzw.

$$\Delta x \rho v dt - \Delta x \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta y \right) dt,$$

so daß sich die Mengenänderung

$$- \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y dt$$

ergibt. Diese muß gleich der „Füllungsänderung“ sein:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y dt = - \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y dt,$$

woraus sich die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

findet.

Die Frage der Verschiebung des Flüssigkeitselementes $\Delta x \Delta y$ ist mit Vorstehendem erledigt. Wir forschen nunmehr etwaigen Drehungen nach.

Die Eckpunkte BCD des Elementes verschieben sich nach Fig. 221 relativ zu A in die Lage $B' C' D'$ während des Zeitelementes dt , vermöge der Verschiedenheit der Geschwindigkeiten, die in gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks $ABCD$ stattfinden. Aus der Figur lesen wir diese Verschiebungen ab:

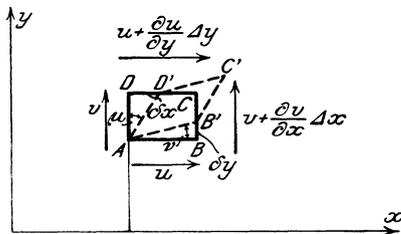


Fig. 221. Drehung eines Flüssigkeitselementes.

$$\left. \begin{aligned} B B' &= \delta y = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x dt, \\ D D' &= \delta x = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y dt. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Entsprechend drehen sich die Seiten AB bzw. AD um A durch die Winkel:

$$v = \frac{\delta y}{Ax} \quad \text{bzw.} \quad \mu = \frac{\delta x}{Ay}. \quad (6)$$

Durch den Ansatz (5) findet man:

$$v = \frac{\partial v}{\partial x} dt, \quad \mu = \frac{\partial u}{\partial y} dt. \quad (7)$$

Die mittlere positive Drehung des Elementes wird dann

$$dx = \frac{v - \mu}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt$$

oder hieraus die Winkelgeschwindigkeit der Drehung:

$$\omega = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (8)$$

II. Ansatz für die ebene stationäre Bewegung einer inkompressiblen wirbelfreien Flüssigkeit.

a) Stationär heißt eine Bewegung, wenn an einem gegebenen Orte der Bewegungszustand von der Zeit unabhängig ist. Die Gleichungen (3) schreiben wir also (weil $\frac{\partial u}{\partial t}$ und $\frac{\partial v}{\partial t}$ verschwinden):

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

b) Inkompressibel heißt eine Flüssigkeit, wenn die Dichte ρ konstant ist. Dann reduziert sich Gleichung (4) auf

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

c) Wirbelfrei heißt die Bewegung, wenn keine Drehungen stattfinden, d. h. wenn nach Gleichung (8) gilt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Die beiden simultanen partiellen Differentialgleichungen (9) und (10) werden nun gelöst durch den Ansatz:

$$u = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}, \quad (11)$$

wo $\Phi(x, y)$ der aus (9) resultierenden Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

zu genügen hat. Daß hiermit auch (10) erfüllt ist, ergibt sich sofort aus:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

weil

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

eine Grundtatsache der Differentialrechnung ist.

Die Funktion $\Phi(x, y)$ wird das Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeitsbewegung genannt.

Die Gleichung

$$\Phi(x, y) = C \quad (13)$$

stellt für jeden Wert von C eine Kurve dar, längs deren das Potential konstant ist. Zieht man an die Kurve im Punkte A eine Tangente (Fig. 222), so wird deren Richtungstangens:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}. \quad (14)$$

Andererseits ist aber die Richtung der durch (11) gegebenen Strömungs-Geschwindigkeit

$$\operatorname{tg} \tau_1 = \frac{v}{u} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}. \quad (15)$$

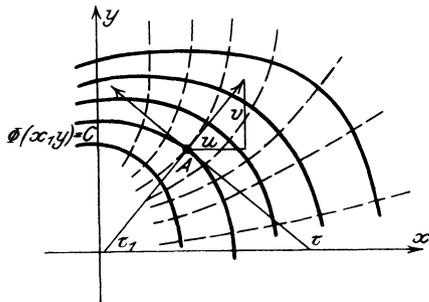


Fig. 222. Stromlinien und Potentiallinien.

Aus (14) und (15) resultiert aber

$$\operatorname{tg} \tau \cdot \operatorname{tg} \tau_1 + 1 = 0. \quad (16)$$

Mithin steht die Stromgeschwindigkeit auf der Kurve

$$\Phi(x, y) = C$$

senkrecht. Demnach wird das System der orthogonalen Trajektorien¹⁰¹⁾ zu der Schar der Niveaulinien

$$\Phi(x, y) = C \quad (17)$$

die Stromlinien liefern. Stellt man die Schar der Stromlinien durch

$$\Psi(x, y) = C \quad (18)$$

dar, so liefert (16) eine Differentialgleichung für Ψ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad (19)$$

d. h. die bekannte Bedingung des orthogonalen Schnittes zwischen Φ und Ψ .

Statt der einen Gleichung (19) kann man auch die beiden anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

aus denen sich durch Differentiation nach x bzw. y und Addition ergibt:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (21)$$

Demnach haben Φ und Ψ derselben partiellen Differentialgleichung zu genügen.

III. Aufsuchung von Lösungen der Gleichungen (12) und (21)

Wir definieren eine Funktion

$$Z = f(z)$$

der komplexen Variablen

$$z = x + iy.$$

$Z = f(z)$ läßt sich nun unter Trennung des reellen und des imaginären Bestandteils in der Form schreiben:

$$Z = f(z) = F(x, y) + iG(x, y).$$

Differentiieren wir partiell nach x :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{df(z)}{dz} \cdot i = \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial G}{\partial x}, \quad (22)$$

und nach y :

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{df(z)}{dz} \cdot i = \frac{\partial F}{\partial y} + i \frac{\partial G}{\partial y}$$

oder nach Division mit i :

$$\frac{df(z)}{dz} = -i \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y}. \tag{23}$$

Der Vergleich von (22) und (23) liefert jetzt

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial G}{\partial x} = -i \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y},$$

welche Gleichung nur dann erfüllt ist, wenn die beiden Relationen gelten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial G}{\partial y}, \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

Der Vergleich von (25) mit (12) bis (21) lehrt, daß Φ und Ψ dann diese letzteren Gleichungen erfüllen, wenn sie reeller bzw. imaginärer Bestandteil einer beliebigen Funktion einer komplexen Variablen

$$Z = f(x + iy) = \Phi + i\Psi \tag{26}$$

sind.

Jede beliebige Auswahl von f liefert also ein System von Niveaukurven

$$\Phi(x, y) = C$$

nebst den dazu gehörigen Strömungslinien

$$\Psi(x, y) = C.$$

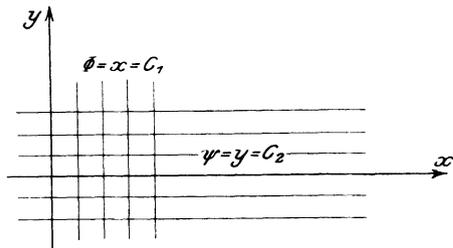


Fig. 223. Ebene Parallelströmung.

Man kann aber auch die Kurven Φ als Stromlinien und die Kurven Ψ als Äquipotentiallinien auffassen.

Jede Auswahl von $f(z)$ liefert also zwei theoretisch mögliche Strömungsvorgänge.

IV. Beispiele.

a) Die Auswahl

$$f(z) = x + iy \quad (27)$$

liefert das Niveaukurvensystem

$$\Phi = x = C_1$$

und das Stromliniensystem

$$\Psi = y = C_2,$$

also nach Fig. 223 eine zur x -Achse parallele Strömung.

b) Mit

$$f(z) = V \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \quad (28)$$

erhält man die Niveaukurven

$$\Phi = Vx \left(\frac{R^2}{x^2 + y^2} + 1 \right) = C_1$$

und die Stromlinien

$$\Psi = Vy \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = C_2.$$

(29)

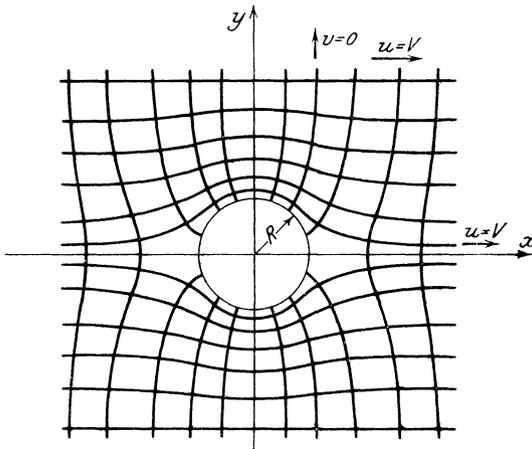


Fig. 224. Ebene Strömung um einen Zylinder.

Für $C_2 = 0$ erhalten wir als Stromlinie den Kreis

$$x^2 + y^2 = R^2$$

und die x -Achse

$$y = 0.$$

Die Stromgeschwindigkeiten werden

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = V \left\{ 1 + R^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\}, \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V - R^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Im Unendlichen ergeben sich die Geschwindigkeiten

$$u = V, \quad v = 0,$$

d. h. eine zur x -Achse parallele Strömung der Geschwindigkeit V .

Der Vorgang, der dem Ansatz (28) entspricht, wird realisiert, wenn man in einen breiten gleichförmigen Strom einen Zylinder vom Radius R senkrecht zur Stromrichtung hineinbringt. Fig. 224 gibt den genauen Verlauf der Niveau- und Stromlinien¹⁰²).

III. Die Differentialgleichung des Potentials.

§ 87. Die allgemeine Massenanziehung, das Coulombsche Gesetz und die Laplace-Poissonsche Differentialgleichung.

I. Das Grundgesetz der Gravitation oder der allgemeinen Massenanziehung lautet: Zwischen zwei Punkten der Massen M und m wirkt, wenn sie sich voneinander in der Entfernung r befinden, die Kraft

$$K = -h \frac{Mm}{r^2}, \quad (1)$$

wo h die Gravitationskonstante heißt und das $-$ -Zeichen andeutet, daß K die Entfernung r zu verkleinern sucht (Fig. 225).

Denkt man sich nun M im Anfangspunkt eines Koordinatensystems xyz befindlich, so kann man mit

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

setzen:

$$K = -h \frac{Mm}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

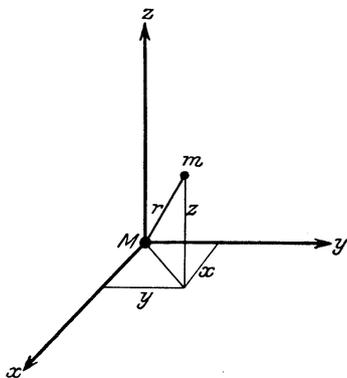


Fig. 225. Zur Anziehung zweier Massenpunkte.

Mit diesem Ansatz wird K eine Funktion des Ortes des Massenpunktes m ; die Formel verliert ihre Gültigkeit, wenn m mit M zusammenfällt, weil dann $K = -\infty$ wird, was keinen physikalischen Sinn hat.

Wir bilden nun die Komponenten der Kraft K nach den Koordinatenachsen mit

$$\left. \begin{aligned} K_x &= - \frac{h M m}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = - \frac{h M m \cdot x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ K_y &= - \frac{h M m \cdot y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ K_z &= - \frac{h M m \cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Schon Lagrange wußte, daß es eine Funktion $F(x, y, z)$ gibt, die die Eigenschaft hat, daß gilt:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \frac{\partial F}{\partial x}, \\ K_y &= \frac{\partial F}{\partial y}, \\ K_z &= \frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Diese Funktion lautet

$$F = \frac{h M m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{h M m}{r} \quad (5)$$

und wird die Kraftfunktion genannt. Von der oben mit (4) angegebenen Eigenschaft dieser Funktion überzeugt man sich leicht durch Ausführung der entsprechenden partiellen Differentiationen an (5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= - \frac{h M m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{h M m}{r^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x \\ &= - \frac{h M m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = K_x \end{aligned}$$

usw.

Den negativen Wert von F bezeichnen wir jetzt mit $V = -F$, und wir nennen V das Potential des Punktes M auf den Punkt m .

Es war nun Laplace, der fand, daß diese Funktion

$$V = - \frac{h M m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

der partiellen Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{6}$$

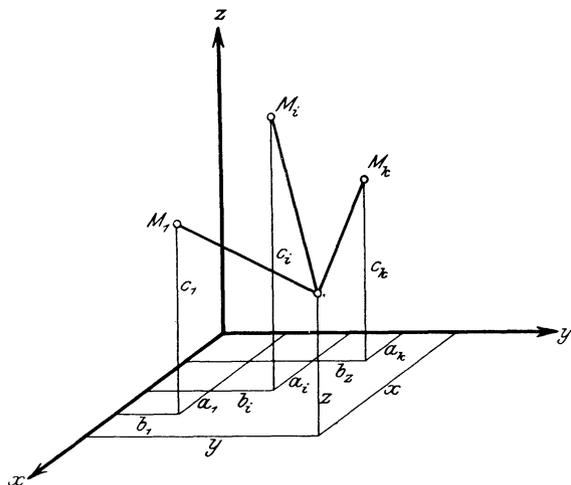


Fig. 226. Zum Potential mehrerer Massenpunkte.

Man überzeugt sich hiervon ebenfalls leicht durch Auswertung der partiellen Differentialquotienten.

II. Ganz analoge Betrachtungen sind anzustellen, wenn es sich um zwei punktuelle Elektrizitätsmengen M und μ handelt. Beträgt deren Entfernung r , so ist die zwischen beiden wirkende Kraft

$$K = \varepsilon \frac{M \mu}{r^2}, \tag{7}$$

wo ε eine Konstante bedeutet, die $= 1$ wird, sofern wir alle vorkommenden Größen in CGS-Einheiten messen. Das durch diese Gleichung ausgesprochene physikalische Gesetz wurde von Coulomb entdeckt.

Die Kraft K wirkt abstoßend (auf r vergrößernd), wenn M und μ gleiches Vorzeichen haben, anziehend, wenn die Vorzeichen verschieden sind.

Handelt es sich um mehrere elektrische Punkte in endlicher Zahl (Fig. 226), $M_1 \dots M_k$, der Koordinaten $a_1 b_1 c_1 \dots a_k b_k c_k$, deren Wirkung auf einen Punkt μ der Koordinaten $x y z$ zu bestimmen ist, so kann man natürlich die Kraft K als Resultante der Kräfte

$$K_i = \frac{M_i \mu}{r_i^2} = \frac{M_i \mu}{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots k \quad (8)$$

bestimmen. Es sind dann die Komponenten von K .

Zum Potential mehrerer geladener Punkte M_i ($i = 1 \dots k$) auf einen Punkt μ

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \mu \sum_{i=1}^{i=k} \frac{M_i}{r_i^3} (x - a_i), \\ K_y &= \mu \sum_{i=1}^{i=k} \frac{M_i}{r_i^3} (y - b_i), \\ K_z &= \mu \sum_{i=1}^{i=k} \frac{M_i}{r_i^3} (z - c_i). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Andererseits kann man aber auch eine Kraftfunktion

$$F = - \mu \sum_{i=1}^{i=k} \frac{M_i}{r_i} \quad (10)$$

aufstellen, für welche der Ansatz gilt:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \frac{\partial F}{\partial x} = - \mu \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial}{\partial x} \frac{M_i}{r_i}, \\ K_y &= \frac{\partial F}{\partial y} = - \mu \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial}{\partial y} \frac{M_i}{r_i}, \\ K_z &= \frac{\partial F}{\partial z} = - \mu \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{M_i}{r_i}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Statt F führen wir wieder das Potential $V = -F$ ein und erhalten den Kraftkomponenten

$$\left. \begin{aligned} K_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ K_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ K_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wieder können wir uns überzeugen, daß die Laplacesche Differentialgleichung gilt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (13)$$

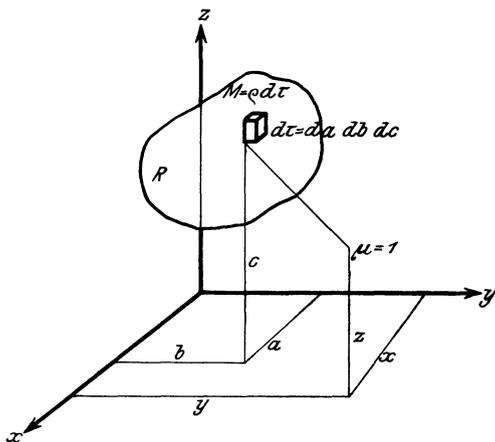


Fig. 227. Zum Potential einer kontinuierlichen Massenverteilung.

III. Handelt es sich jetzt um eine kontinuierlich über ein gewisses Raumgebiet R verbreitete Elektrizitätsmenge, so kann der Satz vom Potential einer endlichen Zahl elektrischer Punkte M_i auch hier angewendet werden, indem man den einzelnen Punkt M_i als Raumelement $dr = da \cdot db \cdot dc$ betrachtet, in welchem die Elektrizität eine gewisse Dichte ρ besitzt, so daß gilt

$$M_i = \rho da db dc.$$

Hierbei kann sich ρ von Ort zu Ort ändern, also eine Funktion von a, b, c sein. Eine derartige Elektrizitätsver-

teilung ist denkbar in einem Raum R Fig. 227, der von einem vollkommenen Dielektrikum erfüllt ist, so daß die dem einzelnen Raumelement $d\tau$ auf irgendeine Weise mitgeteilte Elektrizitätsmenge $\rho d\tau$ dauernd an dem betreffenden Orte erhalten bleibt.

Das Potential des einzelnen Raumelementes $d\tau$ auf den Punkt μ wird nun:

$$\frac{\mu \rho da db dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}. \quad (14)$$

Das Potential des ganzen Raumgebietes R auf μ ergibt sich durch Summation der Einzel-Potentiale über alle Raumelemente, d. h. durch Integration über R :

$$V = \mu \iiint_R \frac{\rho da db dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}. \quad (15)$$

Nehmen wir jetzt die Ladung des Punktes $\mu =$ der Einheit an, so wird:

$$V = \iiint_R \frac{\rho da db dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}. \quad (16)$$

Dies ist der Ausdruck, den man gewöhnlich unter dem Begriff des Potentials eines elektrisch geladenen Raumes versteht.

Die Formel gibt für alle Punkte xyz außerhalb des Raumes R das Potential V_a .

IV. Wichtig ist zunächst die Bestimmung von V_a für Kugeln mit homogener Elektrizitätsverteilung. Handelt es sich um eine dünne Hohlkugel aus isolierendem Material des Radius R um den Anfangspunkt, der überall gleichmäßig die elektrische Dichte ρ mitgeteilt ist, so wird das Potential dV der Kugelzone AB auf den Punkt der Ladung 1

$$dV = \frac{2 R \sin \varphi \cdot \pi \cdot R d\varphi \cdot \rho}{r},$$

$$dV = \frac{2 R^2 \pi \rho \sin \varphi d\varphi}{r}.$$

Das Potential der ganzen Kugelfläche ergibt sich hieraus,

$$V = 2 R^2 \pi \rho \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{r},$$

welcher Ausdruck sich sehr vereinfacht, wenn man in dem Dreieck $O A 1$ ansetzt (Fig. 227 a)

$$r^2 = R^2 + x^2 - 2 R x \cos \varphi$$

und differenziert

$$r dr = R x \sin \varphi d\varphi,$$

dann wird

$$V = \frac{2 R \pi \varrho}{x} \int_{x-R}^{x+R} dr,$$

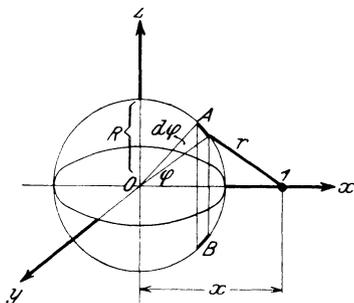


Fig. 227 a. Zum Potential einer dünnen Kugelschale.

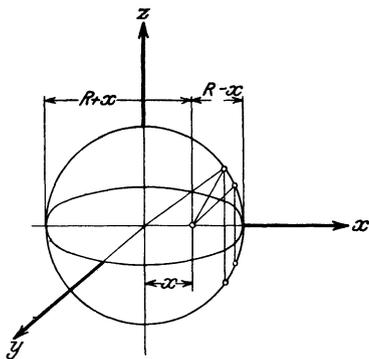


Fig. 228. Potential einer dünnen Kugelschale auf einen inneren Punkt.

wo die Integrationsgrenzen sich wie angeschrieben ergeben, weil für

$$\begin{aligned} \varphi = 0 & \quad r = x - R, \\ \varphi = \pi & \quad r = x + R \end{aligned}$$

wird.

Die Auswertung des Integrals ergibt:

$$V_a = \frac{2 R \pi \varrho}{x} (x + R - x + R) = \frac{4 R^2 \pi \varrho}{x}. \quad (17)$$

Dies gilt für einen äußeren Punkt $x > R$.

Für einen inneren Punkt (Fig. 228) $x < R$ wird aber bei

$$\begin{aligned} \varphi = 0 & \quad r = R - x, \\ \varphi = \pi & \quad r = R + x \end{aligned}$$

und demnach das Potential

$$V_i = \frac{2 \pi R \varrho}{x} (R + x - R + x) = 4 \pi R \varrho.$$

Im Innern der Hohlkugel ist also das Potential unabhängig vom Orte des Aufpunktes. In graphischer Darstellung ergibt sich die Abhängigkeit des Potentials von der Aufpunkt-

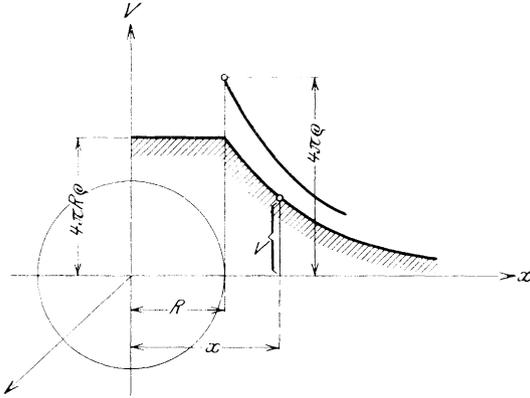


Fig. 229. Potentialverteilung bei einer dünnen Hohlkugel.

Entfernung x nach Fig. 229. In dieser ist auch der Verlauf der Kraft

$$K_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi R^2 \rho}{x^2}$$

eingetragen. Im Innern ist $K_x = 0$, in der Kugelfläche $= 4\pi\rho$, um mit wachsendem x stetig abzunehmen.

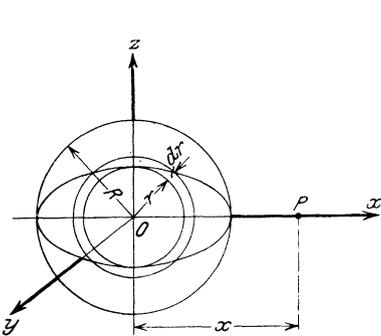


Fig. 230. Zum Potential einer Vollkugel auf einen äußeren Punkt.

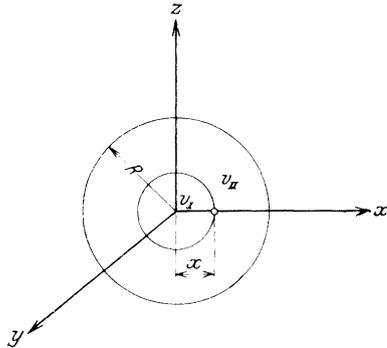


Fig. 231. Zum Potential einer Vollkugel auf einen inneren Punkt.

V. Aus dem Potential der Hohlkugel leitet sich das Potential der Vollkugel wie folgt ab. Wir zerlegen die Vollkugel

in konzentrische Hohlkugeln des Radius r und der Dicke dr (Fig. 230). Jede dieser Hohlkugeln hat in bezug auf P das Potential

$$dV_a = \frac{4 r^2 \pi \rho dr}{x}$$

und nach Integration von 0 bis R

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{4 \pi \rho}{x} \int_0^R r^2 dr \\ &= \frac{4 \pi}{3} \cdot \frac{R^3 \rho}{x}. \end{aligned} \quad (18)$$

Hieraus leitet man die Kraftwirkung ab:

$$K_{xa} = - \frac{\partial V}{\partial x} = + \frac{4 \pi R^3 \rho}{3 x^2}.$$

VI. Liegt der Punkt P im Innern der Vollkugel (Fig. 231), so zerlegen wir das Potential in zwei Teile:

V_I herrührend von der Vollkugel des Radius x .

V_{II} herrührend von der Hohlkugel des Innenradius x und Außenradius R .

$$\begin{aligned} V_I &= \frac{4}{3} \pi x^2 \rho, \\ V_{II} &= 4 \pi \rho \int_x^R r dr = 2 \pi \rho (R - x^2). \end{aligned} \quad (19)$$

Also ist das Gesamtpotential der Vollkugel für einen innen liegenden Punkt

$$V_i = \frac{4}{3} \pi x^2 \rho + 2 \pi \rho (R^2 - x^2) = 2 \pi \rho R^2 - \frac{2}{3} \pi \rho x^2. \quad (20)$$

Die auf den Punkt ausgeübte Kraftwirkung ist

$$\begin{aligned} K_{xi} &= - \frac{\partial V_i}{\partial x} = - \frac{8 \pi}{3} x \rho + 4 \pi \rho x \\ &= + \frac{4}{3} \pi \rho x. \end{aligned}$$

Die graphische Auftragung für V_a und V_i sowie K_{xa} und K_{xi} ergibt das nebenstehende Bild Fig. 232. Für den Anfangspunkt 0 ($x = 0$) als Aufpunkt hat das Potential sein Maximum, die Kraftwirkung ist gleich Null. Für $x = R$ ist $V_i = V_a$, $= \frac{4}{3} \pi \rho R^2$. Die Kraftwirkung nimmt von $x = 0$ bis $x = R$

linear zu und hat ihr Maximum $\frac{4}{3}\pi\rho R$ in der Kugeloberfläche; von da nehmen Potential und Kraft asymptotisch ab; die Kraft ist immer abstoßend.

VII. Liegt der Punkt xyz innerhalb des Raumes R , dann wird das Potential

$$V_i = \iiint_R \frac{\rho \, da \, db \, dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \quad (21)$$

scheinbar unendlich, da man die Integrationsvariablen a, b, c über die Stelle xyz hinweg schieben muß.

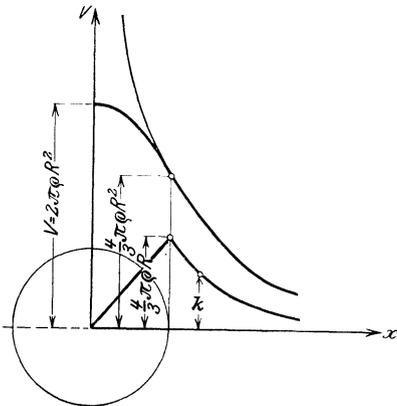


Fig. 232. Potentialverteilung bei einer Vollkugel.

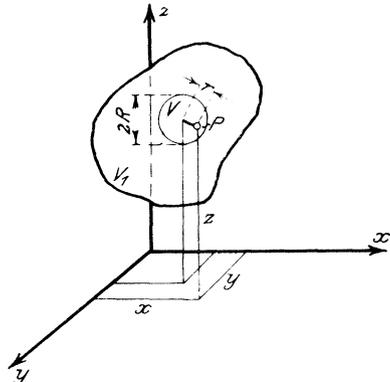


Fig. 233. Zur Differentialgleichung des Potentials in einem Punkte einer kontinuierlichen Massenverteilung.

Diese Schwierigkeit wird hebbar, wenn wir eine kleine Kugel zeichnen (Fig. 233), die den Punkt P einschließt. Dann kann man V_i in zwei Teile zerlegen,

$$V_i = V_1 + V, \quad (22)$$

von denen V_1 sich auf den von der äußeren Raumbegrenzung und der Kugelfläche umschlossenen Raum, V auf die Kugel bezieht. Für V_1 ist aber P ein äußerer Punkt, also ist

$$V_1 = \iiint_{R_1} \frac{\rho \, da \, db \, dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

jedenfalls endlich, und von V haben wir dies eben bewiesen; also ist auch

$$V_i = V_1 + V$$

endlich.

VIII. Aus der letzten Gleichung ergibt sich sofort eine wichtige Folgerung, wenn wir sie auf die Beziehung des Potentials

$$V_i = V_1 + V \quad (23)$$

zur Laplaceschen Differentialgleichung untersuchen. Wir bilden:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Hier ergeben die ersten drei Glieder auf der rechten Seite Null, da V_1 Potential „äußerer“ Massen ist. Dagegen ergibt

$$V = 2 \pi \rho R - \frac{2}{3} \pi \rho r^2$$

als Potential einer Vollkugel auf einen innen gelegenen Punkt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{4}{3} \pi \rho, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\frac{4}{3} \pi \rho, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\frac{4}{3} \pi \rho, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

wie sich durch Ausführung der Differentiationen an V ergibt. Demnach ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4 \pi \rho \quad (26)$$

und mithin

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = -4 \pi \rho. \quad (27)$$

Wir haben also den Satz: Für das Potential auf einem innerhalb des masse- oder elektrizitätsbelegten Gebietes gilt nicht die Laplacesche Differentialgleichung (6), sondern die Poissonsche Differentialgleichung (27). Bezeichnet man die Größe

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

als den zweiten Differentialparameter der Funktion V , so kann man die Laplacesche und die Poissonsche Gleichung

zusammenfassen. Erstere gilt an Orten der Massebelegung Null, letztere an Orten der Massebelegung ϱ . Man kann dann sagen: Der zweite Differentialparameter des Potentials einer beliebigen räumlichen Masse- oder Elektrizitätsverteilung ist gleich dem -4π -fachen der Verteilungsdichte¹⁰³).

§ 88. Allgemeine Eigenschaften des Potentials

für unendlich ferne Aufpunkte und beim Durchgang des Aufpunktes durch Flächenbelegungen.

I. Der Ausdruck für das Potential auf einen äußeren Punkt

$$V_a = \iiint \frac{\varrho da db dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

formt sich mit den Substitutionen (vgl. Fig. 234).

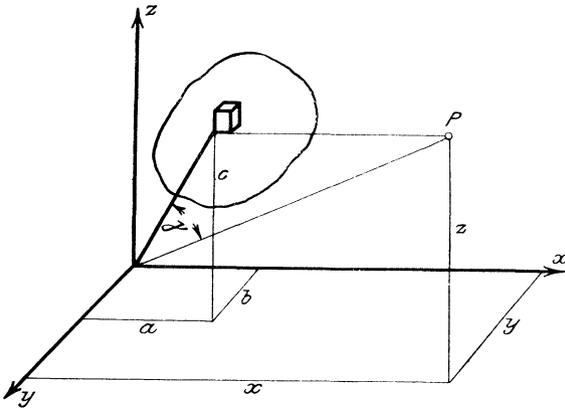


Fig. 234. Zur Untersuchung des Verhaltens des Potentials im Unendlichen.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \frac{xa + yb + zc}{rR} = \cos \gamma,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2$$

um in:

$$V_a = \iiint \varrho da db dc (R^2 - 2rR \cos \gamma + r^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \iiint \varrho da db dc \frac{1}{R} \left[1 - 2 \frac{r}{R} \cos \gamma + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man nun

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2 \frac{r}{R} \cos \gamma = \delta,$$

so wird

$$V_a = \iiint \frac{\rho \, da \, db \, dc}{R} (1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}.$$

Da aber δ mit wachsendem R , d. h. wenn der Aufpunkt immer mehr ins Unendliche rückt, immer kleiner wird, so kann man die Reihenentwicklung

$$(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} \delta + \binom{-\frac{1}{2}}{2} \delta^2 + \dots$$

anwenden und angenähert schreiben

$$(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \delta,$$

worauf angenähert wird:

$$V_a = \iiint \frac{\rho \, da \, db \, dc}{R} \left\{ 1 + \frac{r}{R} \cos \gamma - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\}.$$

Hier kann man die Integration ausführen:

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{1}{R} \iiint \rho \, da \, db \, dc \\ &+ \frac{1}{R^3} \iiint \rho (xa + yb + zc) \, da \, db \, dc + \dots \\ &= \frac{1}{R} \iiint \rho \, da \, db \, dc + \frac{1}{R^3} \left\{ x \iiint a \rho \, da \, db \, dc \right. \\ &\quad \left. + y \iiint b \rho \, da \, db \, dc + z \iiint c \rho \, da \, db \, dc \right\} + \dots \end{aligned}$$

Setzt man hier:

$$\iiint \rho \, da \, db \, dc = M,$$

d. h. gleich der Gesamtmenge der im Integrationsraume enthaltenen Menge (Masse der Elektrizität), so wird:

$$V_a = \frac{M}{R} + \frac{M}{R^3} \left\{ x \xi + y \eta + z \zeta \right\} + \dots,$$

wo

$$\xi = \frac{\iiint a \, da \, db \, dc}{M}, \quad \eta = \frac{\iiint b \, da \, db \, dc}{M}, \quad \zeta = \frac{\iiint c \, da \, db \, dc}{M}$$

die Schwerpunktskoordinaten der raumerfüllenden Menge sind.

Bezeichnet man jetzt die Kosinus der Richtung, auf welcher P ins Unendliche rückt, mit

$$\cos \lambda = \frac{x}{R},$$

$$\cos \mu = \frac{y}{R},$$

$$\cos \nu = \frac{z}{R},$$

so wird

$$V_a \cdot x = M \cos \lambda + \frac{Mx}{R^3} (x\xi + y\eta + z\zeta) + \dots,$$

$$V_a \cdot y = M \cos \mu + \frac{My}{R^3} (x\xi + y\eta + z\zeta) + \dots,$$

$$V_a \cdot z = M \cos \nu + \frac{Mz}{R^3} (x\xi + y\eta + z\zeta) + \dots,$$

Da nun mit $\lim R = \infty$ die zweiten und höheren Glieder auf den rechten Seiten verschwinden, so ist bewiesen, daß $V \cdot x$, $V \cdot y$, $V \cdot z$ für $\lim R = \infty$ endlich bleiben.

Mittels der Formel

$$\frac{\partial V_a}{\partial x} = \frac{\partial V_a}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{M}{R^2} \cdot \frac{x}{R} = -\frac{M}{R^3} \cos \lambda$$

findet man, daß

$$x^2 \frac{\partial V_a}{\partial x} = -M \cos^3 \lambda$$

ist, und daß demzufolge auch

$$\lim_{R=\infty} x^2 \frac{\partial V_a}{\partial x}$$

endlich bleibt.

Natürlich gilt das auch für

$$\lim_{R=\infty} y^2 \frac{\partial V_a}{\partial y} \quad \text{und} \quad \lim_{R=\infty} z^2 \frac{\partial V_a}{\partial z}.$$

II. Wir haben bereits im vorigen Paragraphen den Fall gehabt, daß beim Durchgang des Aufpunktes durch die belegte Fläche einer Hohlkugel der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial x}$ einen endlichen Sprung erlitt.

Im Innern der Hohlkugel war $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$; hart an der äußeren Fläche war $\frac{\partial V}{\partial x} = -4\pi\sigma$. Bezeichnet man die erstere Größe mit einem -- Zeichen, die letztere mit einem +- Zeichen, so gilt:

$$\frac{\partial V}{\partial x_+} - \frac{\partial V}{\partial x_-} = -4\pi\sigma.$$

Diesen Satz wollen wir für eine beliebige Flächenbelegung beweisen.

Zunächst sei das Potential einer Kreisscheibe der Belegung σ vom Radius R , die in der yz -Ebene liegt, auf den Punkt P , auf der x -Achse liegend, zu bestimmen.

Jeder Ring vom Radius r und der Breite dr liefert das Potential (Fig. 235):

$$\frac{2\pi\sigma r dr}{\varrho}.$$

Nach Integration über die Kreisscheibe wird dann

$$V = \int_0^R \frac{2\pi\sigma r dr}{\varrho}$$

und mit $\varrho = \sqrt{r^2 + x^2}$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \frac{2\pi\sigma r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} \\ &= 2\pi\sigma (\sqrt{R^2 + x^2} - x). \end{aligned}$$

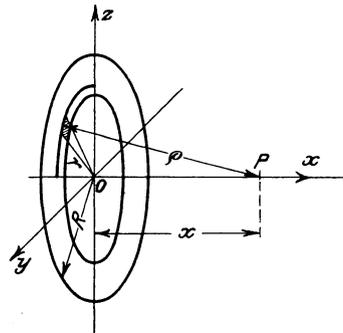


Fig. 235. Potential einer Kreisscheibe.

Durch Differentiation nach x erhält man hieraus für positive x :

$$\frac{\partial V_+}{\partial x} = 2\pi\sigma \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1 \right)$$

und für $x = 0$

$$\left. \frac{\partial V_+}{\partial x} \right|_{x=0} = +2\pi\sigma.$$

Dies wäre also die erste Ableitung des Potentials genommen nach positivem x in unmittelbarer Nähe der belegten Fläche. Nimmt man den Differentialquotienten nach negativem x (also auf der anderen Seite der Fläche), so wird

$$\left. \frac{\partial V_-}{\partial x} \right|_{x=0} = -2\pi\sigma.$$

Durch Subtraktion wird

$$\frac{\partial V_+}{\partial x} - \frac{\partial V_-}{\partial x} = -4\pi\sigma.$$

III. Hat man eine beliebig belegte auch gekrümmte Fläche F der Flächendichtigkeit σ , so fragen wir nach der Änderung, die der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial n}$ des Potentials

$$V = \iint_F \frac{\sigma df}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

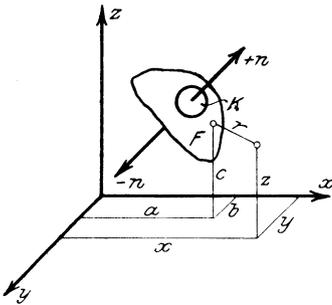


Fig. 236. Potential einer Kreisscheibe.

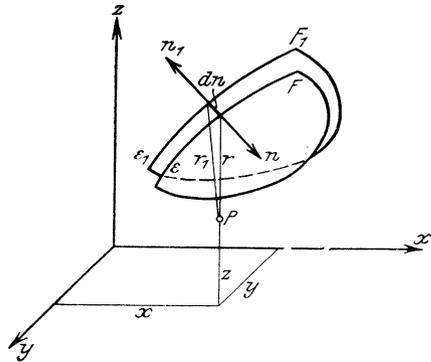


Fig. 237. Verhalten des Potentials beim Durchgang durch eine Doppelfläche.

beim Durchgang durch die Fläche erleidet, wobei wir mit n die Normale auf der Fläche im Durchgangspunkte bezeichnen. Dieser Differentialquotient ist die in Richtung der Normalen fallende Kraftkomponente. Wir beschreiben nun um den Durchgangspunkt einen kleinen Kreis K (Fig. 236) und setzen das Potential V der Fläche zusammen aus dem Potential V_K des Kreises und dem Potential V_f des restlichen Flächenstückes:

$$V = V_K + V_f.$$

Hiernach ist

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = \frac{\partial V_{K+}}{\partial n} - \frac{\partial V_{K-}}{\partial n} + \frac{\partial V_{f+}}{\partial n} - \frac{\partial V_{f-}}{\partial n}.$$

Da aber $\frac{\partial V_f}{\partial n}$ als Potential entfernter Massen stetig ist, so bleibt nur übrig:

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi\sigma.$$

IV. Des weiteren bestimmen wir noch das Potential einer Doppelfläche. Zwei Flächen F und F_1 (Fig. 237) seien in der kleinen Normalentfernung dn einander parallel und tragen in einander gegenüberliegenden Punkten die Belegungen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon_1$. Das Potential eines Punktes $P(x, y, z)$ wird dann

$$V = \int_{F_1} \frac{\varepsilon_1 dF_1}{r_1} - \int_F \frac{\varepsilon dF}{r}.$$

Hier ist

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}.$$

Wenn aber r und der kleine Abstand dn gegeben sind, dann ist r_1 bestimmbar nach dem Satze von Taylor¹⁰⁴):

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dn.$$

Mithin wird, wenn wir noch voraussetzen, daß auf einander gegenüberliegenden Flächenelementen dF und dF_1 diesen umgekehrt proportionale Belegungen liegen, daß also

$$\varepsilon dF = \varepsilon_1 dF_1$$

ist,

$$V = \iint_F \varepsilon \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dn dF.$$

Hier kann man εdn die Dichtigkeit der Doppelbelegung nennen und mit η bezeichnen; es ist dann:

$$V = \iint_F \eta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} dF$$

das Potential der Doppelfläche auf den Punkt xyz .

V. Wir berechnen nunmehr das Potential einer kreisförmigen Doppelfläche Fig. 238.

Das Potential der Fläche *I* bzw. *II* auf *P* ist

$$V_I = -2\pi\varepsilon \left[\sqrt{R^2 + \left(x - \frac{dn}{2}\right)^2} - x + \frac{dn}{2} \right],$$

$$V_{II} = 2\pi\varepsilon \left[\sqrt{R^2 + \left(x + \frac{dn}{2}\right)^2} - x - \frac{dn}{2} \right].$$

Also wird das Gesamtpotential

$$\begin{aligned} V &= V_I + V_{II} \\ &= 2\pi\varepsilon dn \left[\frac{\sqrt{R^2 + \left(x + \frac{dn}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(x - \frac{dn}{2}\right)^2}}{dn} - 1 \right] \\ &= 2\pi\varepsilon dn \left[\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

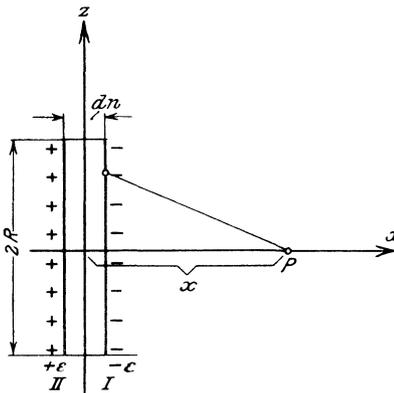


Fig. 238. Potential einer kreisförmigen Doppelfläche.

Setzt man hier wie oben $\varepsilon dn = \eta$, so wird

$$V_+ = 2\pi\eta \left[\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1 \right].$$

Dies Potential gilt für einen auf dem positiven Ast der *x*-Achse liegenden Punkt, weshalb das +-Zeichen angeschrieben ist. Liegt *P* auf dem negativen Ast, so wird analog

$$V_- = 2\pi\eta \left[\frac{-x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1 \right].$$

Nähert man sich nun von beiden Seiten der Doppelfläche,

so wird, während man *x* kleiner und kleiner werden läßt, $V_+ - V_- = 4\pi\eta$, d. h. das Potential *V* erleidet beim Durchgang des Aufpunktes durch eine Doppelfläche einen endlichen Sprung $= 4\pi\eta$, wo η die Belegungsichte an der Durchgangsstelle ist.

§ 89. Zusammenfassung und Übersicht über die Aufgaben der Potentialtheorie.

Wir haben nunmehr folgende Arten von Newtonschen Potentialen kennen gelernt:

1. Raumpotentiale V_R ,
2. Flächenpotentiale V_F ,
3. Doppelflächenpotentiale V_D .

I. Setzt sich aus diesen ein Potential zusammen $V = V_R + V_F + V_D$, so genügt dies der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta V = 0$ in allen Raumpunkten, die weder dem masseerfüllten Raum R noch den Flächen F und D angehören. Fällt der Aufpunkt in den Raum R , so lautet die Differentialgleichung

$$\Delta V = -4\pi\rho,$$

wo ρ die Massendichte am Orte des Aufpunktes bedeutet.

II. Die Differentialgleichung für Aufpunkte, die auf den Flächen D oder F selbst liegen, ist von der Krümmung der Flächen abhängig und soll hier nicht angegeben werden.

Dagegen ist V an der Fläche F in der Weise unstetig, daß

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi\sigma$$

wird, während an der Doppelfläche D für die Unstetigkeit gilt:

$$V_{D+} - V_{D-} = 4\pi\eta.$$

σ und η sind wie früher die Belegungen der Flächen F und D . Abgesehen von den Flächen F und D ist V und seine ersten Ableitungen

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

überall stetig.

III. Rückt der Aufpunkt x, y, z ins Unendliche, so wird

$$V = 0,$$

aber

$$Vx, Vy, Vz \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial x}x^2, \quad \frac{\partial V}{\partial y}y^2, \quad \frac{\partial V}{\partial z}z^2$$

bleiben endlich.

IV. Die Potentialtheorie beschäftigt sich nun einerseits mit der Berechnung der Potentiale gegebener Massenarrangements,

d. h. mit der Berechnung bestimmter Raum- oder Flächen-Integrale (Kugel, Hohlkugel, Kreisscheibe, Doppelfläche), die wir in einfachen Fällen in den vorigen Paragraphen durchgeführt haben. Zu der Bestimmung dieser Integrale für allgemeinere Massenordnungen zieht man mit Vorteil die Differentialgleichung $\Delta V = 0$ heran, der ja jene genügen müssen, um Reihenentwicklungen für die Integrale zu gewinnen. Hiermit beschäftigen sich die §§ 72 und 73.

Die hier gegebenen Entwicklungen gelten als Vorbereitung für die andere Aufgabe der Potentialtheorie, nämlich die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad = -4\pi\varrho$$

bzw. der Anwendung dieser Integration zur Lösung von technischen Aufgaben.

V. Eine wichtige Rolle spielt zunächst die Integration der Differentialgleichung

$$\Delta V = -4\pi\varrho$$

in der Elektrostatik. Wie schon dies Wort sagt, handelt es sich hier um die Bestimmung des Gleichgewichtes elektrischer Ladungen. Bekanntlich unterscheidet man zwischen Isolatoren und Leitern. Auf den ersteren bleibt eine anfänglich vorhandene Elektrizitätsverteilung unverändert, bei den letzteren ist die Elektrizität beweglich und sie verteilt sich stets so, daß sie gewissen Gleichgewichtsbedingungen Genüge leistet.

Wir wissen schon, daß auf einer leitenden Kugel von Radius R die mitgeteilte Elektrizitätsmenge M sich gleichmäßig über die Kugeloberfläche verbreitet, so daß überall die Dichte

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$$

herrscht (wenn außer der Kugel andere Leiter oder geladene Isolatoren nicht vorhanden sind).

Ist jedoch außer der Kugel C , der die Elektrizitätsmenge M mitgeteilt wird, noch ein Isolator J mit fester gegebener Elektrizitätsverteilung vorhanden, so verteilt sich M nicht mehr gleichmäßig auf der Kugel C .

Die Elektrizitätsverteilung ist unbekannt und soll bestimmt werden. Ihr Potential

$$V_C = \int \frac{\sigma d\omega}{c}$$

genügt der Differentialgleichung

$$\Delta V = 0.$$

Da diese Differentialgleichung zur eindeutigen Bestimmung von V nicht genügt, ist eine weitere Tatsache heranzuziehen. Hierzu benutzen wir den Satz, daß im Innern eines leitenden Körpers und auf seiner Oberfläche das Potential aller vorliegenden Elektrizitätsmengen überall einen und denselben Wert haben muß. Das Potential V aller Elektrizitätsmengen besteht hier aber aus V_C und aus dem Potential des Isolators V_J :

$$V = V_C + V_J = a = \frac{M}{R}.$$

Da V_J als bekannt anzusehen ist, gilt für die Kugel:

$$V_C = a - V_J = \frac{M}{R} - V_J.$$

Auf Grund dieser Gleichung werden die Werte von V_C auf der Kugeloberfläche vorgeschrieben, und es zeigt sich, daß V_C damit eindeutig bestimmt ist.

Man nennt eine derartige Aufgabestellung, lt. welcher eine Funktion V innerhalb eines Gebietes einer gegebenen partiellen Differentialgleichung genügen muß, während an der Begrenzung die Werte der Funktion vorgeschrieben sind, eine Randwertaufgabe.

VI. Wir wollen gleich hier anmerken, daß die Randbedingung: V ist auf der Begrenzung gegeben, auch anders lauten kann.

Bei den Aufgaben der stationären Bewegung eines Körpers in einer inkompressiblen Flüssigkeit handelt es sich ebenfalls um die Integration der Differentialgleichung

$$\Delta V = 0,$$

die Randbedingung lautet hier aber:

$$\frac{\partial V}{\partial n},$$

d. h. der Differentialquotient nach der Normale der Oberfläche des eingetauchten Körpers (hierdurch eine Strömungsgeschwindigkeit) ist gegeben.

Bei den Aufgaben der stationären Wärmeleitung hat man an der Grenze des betrachteten Körpers die Randbedingung: $V + h \frac{\partial V}{\partial n}$ ist vorgeschrieben.

Man bezeichnet die Randwertaufgabe in den drei angeführten Fällen als erste, zweite und dritte Randwertaufgabe¹⁰⁵⁾.

VII. Zur Lösung der Randwertaufgaben gibt es im allgemeinen zwei Wege.

Auf dem einen Wege hat man zunächst die Differentialgleichung

$$\Delta V = 0 \quad \text{bzw.} \quad -4\pi\varrho$$

auf ein solches orthogonales Koordinatensystem zu transformieren, daß die Fläche, längs deren V vorgeschrieben ist, die Gleichung

$$u = \text{konst.}$$

erhält.

Dann sucht man die transformierte Differentialgleichung

$$\Delta V(u, v, w) = 0 \quad \text{resp.} \quad -4\pi\varrho$$

durch einen Ansatz

$$V = \sum_n A_n \cdot U_n \cdot V_n \cdot W_n$$

zu befriedigen, wo A_n unbestimmte Konstante, U_n, V_n, W_n Funktionen nur von u resp. v oder w sind.

Durch geeignete spezielle Wahl von einer oder zwei der Funktionen gelingt es sehr häufig, für die übrigbleibenden eine einfachere Differentialgleichung zu finden.

Im allgemeinen existiert für jeden Index n eine solche Differentialgleichung, so daß schließlich sich das Potential V aus einer unendlichen Reihe von Funktionen aufbaut, die man oft Funktionen der betreffenden Fläche $u = \text{konst.}$ nennt.

Der Anschluß von V an die Randwerte $V(v, w)$ auf der Fläche $u = \text{konst.}$ wird im allgemeinen erreicht durch gliedweise Integration und Vergleichung der Reihen

$$\int_u V(v, w) \cdot V_m W_m dv dw = \int_u \sum A_n \bar{U}_n V_n W_n V_m W_m dv dw,$$

wo die Integrale sich über die Fläche $u = \text{konst.}$ zu erstrecken haben, und \bar{U} den Wert der Funktion U auf dieser Fläche bedeutet.

Bei den praktisch vorkommenden Fällen ergeben sich für die Auswertung der rechten Seite die Sätze:

$$\int_u V_n W_n V_m W_m dv dw = 0, \quad \text{wenn } n \geq m$$

und

$$\int_u V_n^2 W_n^2 dv dw = f(n).$$

In diesen Fällen finden sich dann die Konstanten

$$A_n = \frac{1}{U_n f(n)} \int_u V(v, w) V_n W_n dv dw,$$

womit die Randwertaufgabe formell gelöst ist¹⁰⁶⁾.

Außer dieser Reihenmethode hat man noch die Methode der Greenschen Funktion¹⁰⁷⁾.

Zur Aufstellung dieser Funktion sind einige Bemerkungen über die Darstellung von Raumintegralen durch Oberflächenintegrale erforderlich.

§ 90. Der Integralsatz von Gauß.

I. Unter einem Raumintegral versteht man allgemein ein dreifaches Integral

$$J = \iiint F(x, y, z) dx dy dz, \tag{1}$$

bei dem die Integration sich über alle Raumelemente $d\tau = dx, dy, dz$ eines Bereiches τ (Fig. 239) zu erstrecken hat.

Wir betrachten nun $F(x, y, z)$ als ersten partiellen Differentialquotienten einer Funktion $X(x, y, z)$

$$F(x, y, z) = \frac{\partial X}{\partial x} \tag{2}$$

und versuchen das Raumintegral (1) in ein Oberflächenintegral umzuformen. Zur Durchführung dieser Operation stellen wir eine genauere Betrachtung über das Wesen der räumlichen Integration an.

Zunächst führen wir die Integration für die x -Koordinate aus, d. h. wir ermitteln den Wert des Integrals bei konstant

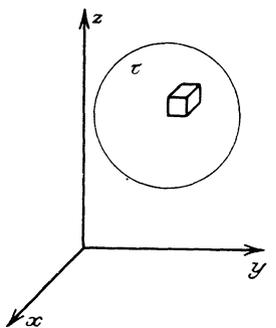


Fig. 239. Zur räumlichen Integration.

gedachtem y und z für allein veränderliches x . Das Integral schreibt sich dann:

$$J = \iint dy dz \int \frac{\partial X}{\partial x} dx.$$

Die Grenzen des Integrals

$$\int \frac{\partial X}{\partial x} dx$$

sind die Werte x_1 und x_2 , die nach Auswahl von y und z auf der Umgrenzungsfläche bestimmt sind Fig. 240. Es wird also:

$$J = \iint dy dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial X}{\partial x} dx = \iint dy dz (X_2 - X_1), \quad (3)$$

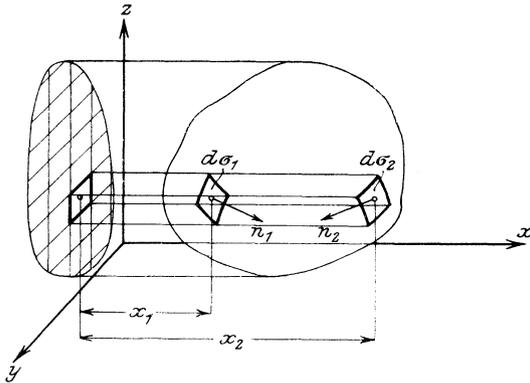


Fig. 240. Zum Integralsatz von Gauß.

wo X_1 und X_2 die in den zu x_1 und x_2 gehörenden Oberflächenpunkten stattfindenden Funktionswerte sind.

Beachtet man nun, daß $dy dz$ die Projektion der beiden zu x_1 resp. x_2 gehörenden Flächenelemente $d\sigma_1$ resp. $d\sigma_2$ ist, so kann man nach Einführung der nach innen gerichteten Oberflächennormalen n_1 und n_2 schreiben:

$$dy dz = d\sigma_1 \cdot \cos(n_1 x) = -d\sigma_2 \cos(n_2 x).$$

Hiermit wird aber

$$(X_2 - X_1) dy dz = -X_1 \cos(n_1 x) d\sigma_1 - X_2 \cos(n_2 x) d\sigma_2$$

und das Integral wird

$$J = - \iint (X_1 \cos(n_1 x) d\sigma_1 + X_2 \cos(n_2 x) d\sigma_2).$$

Führt man jetzt noch die Integrationen nach y und z aus, so heißt dies nichts anderes als die eben erläuterte Operation für alle mit der Umrandung des Rahmens verträglichen Parallelepipede nach Fig. 240 durchzuführen. Hierbei werden aber alle Endflächen $d\sigma$ dieser Parallelepipede in dem Integral vorkommen, d. h. man kann schreiben:

$$J_x = \iiint_{\tau} \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz = - \int_{\sigma} X \cos(n x) d\sigma. \quad (4a)$$

Hiermit ist aber tatsächlich das Raumintegral in ein Oberflächenintegral übergeführt.

Diese Formel (4) schreiben wir noch für zwei andere Funktionen, $Y(x, y, z)$ und $Z(x, y, z)$ und die Koordinatenrichtungen y und z an:

$$J_y = \iiint_{\tau} \frac{\partial X}{\partial y} dx dy dz = - \int_{\sigma} Y \cos(n y) d\sigma, \quad (4b)$$

$$J_z = \iiint_{\tau} \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = - \int_{\sigma} Z \cos(n z) d\sigma, \quad (4c)$$

nach deren Addition der Integralsatz von Gauß folgt:

$$\begin{aligned} J &= \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= - \int_{\sigma} [X \cos(n x) + Y \cos(n y) + Z \cos(n z) d\sigma]. \end{aligned} \quad (5)$$

Dieser Satz gewinnt eine sehr einfache Gestalt, wenn wir, was immer möglich ist, $X Y Z$ als Komponenten eines Vektor \mathfrak{A} auffassen, dessen Divergenz dann

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

ist:

$$\text{Div } \mathfrak{A} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \quad (6)$$

Auch für $X \cos(n x) + Y \cos(n y) + Z \cos(n z)$ kann ein einfacher Ausdruck eingeführt werden, nämlich die Komponente A_n

von \mathfrak{A} in Richtung der Normalen n . Dann lautet der Integralsatz von Gauß:

$$\int_{\tau} \text{Div } \mathfrak{A} d\tau = - \int_{\sigma} A_n d\sigma. \quad (7)$$

Das Minuszeichen wird übrigens zum Pluszeichen, wenn die Normale n nach außen gerichtet ist.

II. Sind jetzt innerhalb eines räumlichen Bereiches τ zwei Funktionen $U(x, y, z)$ und $V(x, y, z)$ gegeben, so kann man die aus diesen gebildeten Funktionen

$$\left. \begin{aligned} X &= U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial x} \\ Y &= U \frac{\partial V}{\partial y} - V \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z &= U \frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

als Vektorkomponenten ansehen und die Divergenz

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

berechnen. Es findet sich hierfür der Ausdruck:

$$U \Delta V - V \Delta U.$$

Ferner ergibt sich als n -Komponente des durch XYZ bestimmten Vektors der Ausdruck:

$$N = U \frac{\partial U}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}, \quad (9)$$

so daß der Integralsatz nunmehr lautet:

$$\int_{\tau} (U \Delta V - V \Delta U) d\tau = - \int_{\sigma} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (10)$$

§ 91. Einführung der Greenschen Funktion.

Von dieser Formel geht die Greensche Betrachtung aus, die den Zweck hat, eine Funktion V zu bestimmen, die im Innern eines räumlichen Bereiches τ der Gleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi \varrho(x, y, z)$$

genügt und an der Oberfläche σ und τ gegebene Werte V_σ annimmt, d. h. die erste Randwertaufgabe zu lösen.

Der Gedankengang ist folgender: Innerhalb von τ wird ein fester Punkt $P_1(x, y, z)$ (Fig. 241) und in der Entfernung r davon ein variabler Punkt $P_2(a, b, c)$ angenommen. Wir schreiben nun die Formel (10) § 90, indem wir die Funktion U spezialisieren wie folgt:

$$U = \frac{1}{r}$$

und die Integration über τ uns in der Weise ausgeführt denken, daß wir P_2 alle innerhalb τ möglichen Lagen annehmen lassen, wobei wir aber eine kleine Kugel \varkappa mit dem Radius δ um P_1 ausschließen,

weil, wenn P_2 mit P_1 zusammenfiel, $\frac{1}{r} = \infty$ werden würde, was

nicht zulässig ist. Da nun $\Delta \frac{1}{r} = 0$ ist, so schreibt sich Formel(10):

$$\int_{\tau - \varkappa} \frac{1}{r} \Delta V d\tau = - \int_{\sigma - \delta^2 \omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (1)$$

wo die Zeichen $-\varkappa$ und $-\delta^2 \omega$ andeuten, daß die kleine Kugel (sowohl ihr Raum \varkappa wie ihre Oberfläche $\delta^2 \omega$) vom Integrationsprozeß ausgeschlossen ist und wo sowohl $V, \Delta V, V_\sigma$, wie $d\tau, d\sigma$ in den Variablen a, b, c auszudrücken sind.

Diese ausgeschlossenen Bestandteile notieren wir besonders, indem wir für das Oberflächenelement der kleinen Kugel $\delta^2 d\omega$, für ihr Raumelement $\delta^2 d\delta d\omega$ setzen:

$$\begin{aligned} \int_{\varkappa} \Delta V d\delta d\delta d\omega &= - \int_{\delta^2 \omega} \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial V}{\partial \delta} - V \frac{\partial \frac{1}{\delta}}{\partial \delta} \right) \delta^2 d\omega \\ &= - \int_{\omega} \left(\delta \frac{\partial V}{\partial \delta} + V \right) d\omega, \end{aligned} \quad (2)$$

wo ω und $d\omega$ sich auf eine Kugel vom Radius 1 beziehen.

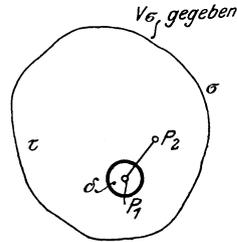


Fig. 241. Zur Methode von Green.

Addieren wir jetzt (1) und (2)

$$\begin{aligned} & \int_{\tau=\varepsilon}^{\tau} \frac{1}{r} AV d\tau + \int_{\sigma} AV \delta d\delta d\omega \\ &= - \int_{\omega} \left(\delta \frac{\partial V}{\partial \delta} + V \right) d\omega - \int_{\sigma-\delta^2\omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\delta}{\delta n} \right) d\sigma \end{aligned}$$

und lassen δ unendlich klein werden, so wird, während das abgeschlossene Kugelgebiet verschwindet:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\sigma} AV \delta d\delta d\omega &= 0 \\ \int_{\omega} \delta \frac{\partial V}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{wegen } \lim \delta = 0$$

$$\int_{\omega} V d\omega = 4\pi V_1 \quad \text{wegen } \int_{\omega} d\omega = 4\pi.$$

In der letzten Formel bedeutet V_1 den Wert von V im Punkte P_1 .

In anderer Anordnung schreiben wir jetzt:

$$4\pi V_1 = - \int_{\tau} \frac{1}{r} AV d\tau - \int_{\sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma. \quad (3)$$

Diese Formel löst schon die erste Randwertaufgabe, setzt aber voraus, daß am Rande die Werte $\frac{\partial V}{\partial n}$ gegeben sind, was nicht der Fall ist.

Subtrahieren wir jetzt Formel (10) § 70 von (3), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 4\pi V_1 &= \int_{\tau} \left(U - \frac{1}{r} \right) AV d\tau - \int_{\tau} V AU d\tau \\ &+ \int_{\sigma} \left[\left(U - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(U - \frac{1}{r} \right) \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (4)$$

Hier ist der Wert von V im Punkte P_1 demnach gegeben, wenn man kennt: 1. ΔV im ganzen Gebiete τ ; 2. V selbst im ganzen Gebiete τ und an seiner Begrenzungsfläche σ ; 3. $\frac{\partial V}{\partial n}$ an der Begrenzung δ und 4. eine willkürliche, jedoch nebst ihren ersten Ableitungen überall stetige Funktion U . Über letztere dürfen wir Festsetzungen machen. Dies tun wir so, daß wir zur Berechnung von V_1 die Werte von V innerhalb τ nicht zu kennen brauchen (wir wollen sie ja eben bestimmen) und daß auch die Kenntnis von $\frac{\partial V}{\partial n}$ nicht nötig ist. Die beiden mittleren Integrale sollen also fortfallen, was wir erreichen, indem wir von U die Eigenschaften verlangen: a) $\Delta U = 0$ im Gebiete τ ; b) $U - \frac{1}{r} = 0$ an der Grenze δ .

Führen wir hier für $U - \frac{1}{r}$ die Abkürzung G ein, so wird die Eigenschaft a) für U erreicht, wenn im ganzen Bereiche $\Delta G = 0$ gilt, da ja $\Delta \frac{1}{r} = 0$ ist. Die Eigenschaft b) für U wird dagegen erreicht, wenn an der Grenze σ überall $G = 0$ ist. Mithin erhalten wir:

$$4 \pi V_1 = \int_{\tau} G \Delta V d\tau - \int_{\sigma} V \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \quad (5)$$

Hier ist G die „Greensche Funktion“, nach deren Bestimmung für einen gegebenen Bereich τ und einen gegebenen Punkt P_1 die erste Randwertaufgabe gelöst ist. Die Funktion G enthält dabei die Variablen x, y, z ebenso wie die Variablen a, b, c ; letztere sind nach dem Voraufgehenden die Koordinaten des beweglichen Punktes P_2 , dessen Hinwegschiebung über alle Punkte von τ und σ die Integration der Formel (5) liefert. V_1 bleibt dann als Funktion von x, y, z übrig, wie es sein muß. Als Beispiel werden wir später G für die Kugel bestimmen.

§ 92. Das Potential einfachster Massenarrangierungen und die Legendreschen Kugelfunktionen.

I. Für die weiteren Betrachtungen ist es zunächst erforderlich, statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z Polarkoordinaten r, ϑ, φ einzuführen.

Ein Punkt P der Koordinaten x, y, z (Fig. 242) hat vom Anfangspunkt die Entfernung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (1)$$

Der Radiusvektor r schließt mit der positiven x -Achse den Winkel ϑ ein; es gilt:

$$x = r \cos \vartheta. \quad (2)$$

Ist ferner ϱ die Projektion von r auf die YZ -Ebene, so gilt:

$$\varrho = r \sin \vartheta. \quad (3)$$

Bezeichnet man den Winkel von ϱ mit der positiven Y -Achse mit φ , so hat man

$$\left. \begin{aligned} y &= \varrho \cos \varphi = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z &= \varrho \sin \varphi = r \sin \vartheta \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Durch die Gleichungen (2) und (4) wird der Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten vermittelt.

Will man umgekehrt von diesen zu jenen übergehen, so hat man neben dem aus (1) folgenden Ansatz

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$

noch

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x} \quad (5)$$

und

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{z}{y}. \quad (6)$$

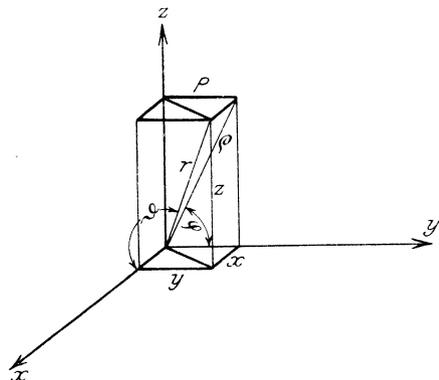


Fig. 242. Einführung der Polarkoordinaten.

Die Koordinaten r, ϑ, φ sind nicht unbeschränkt veränderlich. Um alle Punkte des Raumes zu erhalten genügt es, $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ zu nehmen.

II. Denkt man sich mit dem Radius r eine Kugel um den Anfangspunkt 0 beschrieben und bezeichnet man den Schnittpunkt der positiven x -Achse mit dieser Kugel als „Nordpol“ (Fig. 243), so kann man, in Anlehnung an die Verhältnisse auf der Erde, den Winkeln ϑ und φ folgende Bezeichnungen beilegen:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \text{Poldistanz} & [0 \leq \vartheta \leq \pi], \\ \varphi &= \text{Länge} & [0 \leq \varphi \leq 2\pi], \end{aligned}$$

wobei die positive Y -Achse als Anfangsachse für die Zählung der Länge gilt.

Des weiteren schneidet die Kugel die YZ -Ebene im „Äquator“, während der gerade Kreiskegel, dessen Achse die X -Achse ist und der den Öffnungswinkel 2ϑ hat, die Kugel in einem „Parallelkreis“ schneidet. Schließlich schneidet die durch die X -Achse und den Punkt P bestimmte Ebene die Kugel in einem „Meridian“.

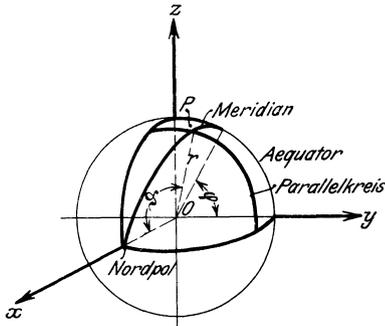


Fig. 243. Geographische Bezugnahme.

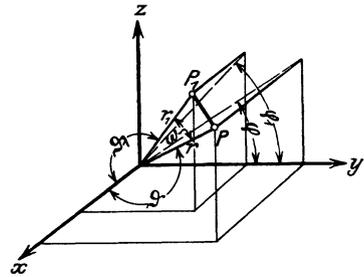


Fig. 244. Polarkoordinaten zweier Punkte.

III. Kugel, Kreiskegel und Meridianebene schneiden sich in P rechtwinklig. In Polarkoordinaten sind die Gleichungen dieser drei Flächen:

$$r = C_1, \quad \vartheta = C_2, \quad \varphi = C_3.$$

Nimmt man 3 weitere nahe benachbarte Flächen:

$$r + dr = C_1', \quad \vartheta + d\vartheta = C_2', \quad \varphi + d\varphi = C_3'$$

hinzu, so begrenzen die 6 Flächen ein Raumelement $d\tau$, welches sich in Polarkoordinaten findet

$$d\tau = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi, \tag{7}$$

während das Flächenelement auf der Kugel $r = C_1$ sich schreibt

$$d\sigma = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \tag{8}$$

Liegen im Polarkoordinatensystem zwei Punkte P und P_1 (Fig. 244)

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

und

$$x_1 = r_1 \cos \vartheta_1, \quad y_1 = r_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, \quad z_1 = r_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1$$

vor, so kann man nach dem von den Radienvektoren gebildeten Winkel ω fragen.

Zunächst findet man das Quadrat der Verbindungslinie der Punkte

$$\begin{aligned} P P_1^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ &= r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos \omega. \end{aligned}$$

Nach Entwicklung der Quadrate links folgt mit

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= r_1^2 \end{aligned}$$

der Ansatz:

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = r r_1 \cos \omega,$$

mithin wird:

$$\cos \omega = \frac{x x_1}{r r_1} + \frac{y y_1}{r r_1} + \frac{z z_1}{r r_1},$$

d. h. nach (2) und (4) wird: $\cos \omega =$

$$\begin{aligned} &= \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - \sin \vartheta \sin \varphi \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 \\ &= \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 (\cos \varphi \cos \varphi_1 - \sin \varphi \sin \varphi_1) \end{aligned}$$

und schließlich:

$$\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos (\varphi - \varphi_1). \quad (9)$$

IV. Auf die so definierten Polarkoordinaten wollen wir jetzt die Differentialgleichung des Potentials

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (10)$$

umformen.

Zunächst benutzen wir die Beziehungen

$$y = \varrho \cos \varphi, \quad z = \varrho \sin \varphi, \quad (11)$$

$$\varrho^2 = y^2 + z^2, \quad \frac{z}{y} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (11a)$$

und denken uns V auf die Variablen ϱ und φ umgeformt.

Wollten wir jetzt $V(\varrho, \varphi)$ nach y und z differenzieren, so würden wir anzuschreiben haben:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (12)$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (13)$$

Um in diesen Formeln zunächst $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ zu bestimmen, differenzieren wir die Gleichung (11 a) resp.

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctg \frac{z}{y}$$

partiell nach y :

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{y}{\rho} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{y^2}{y^2 + z^2} \cdot \frac{z}{y^2} = - \frac{\rho \sin \varphi}{\rho^2} = - \frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

Sind jetzt

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

zu bestimmen, so differenziert man (11 a) partiell nach z :

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{z}{\rho} = \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{y^2}{y^2 + z^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

Jetzt werden die Formeln (12) und (13):

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\rho}, \quad (12a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{\rho}. \quad (13a)$$

Wird jetzt die zweite Differentiation ausgeführt, so entsteht:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (12b)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (13b)$$

Führt man die so angedeuteten Rechnungen aus, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho}. \quad (14)$$

Somit ist ΔV zunächst von x, y, z auf x, ϱ, ϑ transformiert.

Soll jetzt wieder auf r, ϑ, φ transformiert werden, so sind statt x und ϱ einzuführen r und ϑ nach den Beziehungen:

$$x = r \cos \vartheta; \quad \varrho = r \sin \vartheta$$

resp. umgekehrt:

$$r = \sqrt{x^2 + \varrho^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{\varrho}{x}.$$

Hiermit erhält man sofort:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \quad (15)$$

und ferner wird:

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{\partial V}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{\partial V \cos \vartheta}{\partial \vartheta r}. \quad (16)$$

Nach einigen Zwischenrechnungen haben wir dann endgültig:

$$\Delta V = r \frac{\partial^2 (Vr)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (17)$$

oder nach Einführung der Abkürzung

$$\cos \vartheta = \mu$$

$$r \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (18)$$

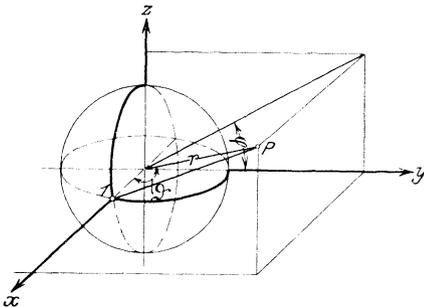


Fig. 245. Zum Potential eines Punktes auf der Einheitskugel.

V. Wir werden zunächst die Differentialgleichung (18) auf ein sehr einfaches Potential anwenden. Es handele sich um das Potential T des Nordpols N der Kugel mit dem Radius 1 auf einen Punkt P (Fig. 245). Beide Punkte haben die Belegung 1. Ist das Entfernungsquadrat

$$\overline{NP}^2 = R,$$

so hat man das Potential

zu formulieren:

$$T = \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Die Polarkoordinaten von P sind r, ϑ, φ , die von N : $r_1 = 1, \vartheta_1 = 0, \varphi_1 = 0$. Dann wird

$$+ \sqrt{R} = + \sqrt{1 + r^2 - 2 r \cos \omega}.$$

$\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1) = \cos \vartheta$,
also

$$R = + \sqrt{1 - 2 r \cos \vartheta + r^2}$$

und

$$T = \frac{1}{+ \sqrt{1 - 2 r \cos \vartheta + r^2}} = f(r) = R^{-\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Das Potential T des Punktes 1, 0, 0 auf den Punkt r, ϑ, φ ist also nur von r und der Poldistanz ϑ abhängig.

Ist zunächst $r < 1$, so kann man (19) in eine nach Potenzen von r fortschreitende Maclaurinsche Reihe entwickeln:

$$T = f(r) = f(0) + f'(0)r + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} r^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 + \dots \quad (20)$$

Wir führen hier an $f(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 r \cos \vartheta + r^2}}$ die vorgeschriebenen Differentiationen der Reihe nach aus. Zunächst ist

$$f(0) = 1.$$

Ferner wird:

$$f'(r) = R^{-\frac{3}{2}}(\cos \vartheta - r) \quad \text{und}$$

$$f'(0) = \cos \vartheta,$$

$$f''(r) = -R^{-\frac{3}{2}} + 3 R^{-\frac{5}{2}}(\cos \vartheta - r)^2 \quad \text{und}$$

$$f''(0) = 3 \cos^2 \vartheta - 1,$$

$$f'''(r) = -9 R^{-\frac{5}{2}}(\cos \vartheta - r) + 15 R^{-\frac{7}{2}}(\cos \vartheta - r)^3 \quad \text{und}$$

$$f'''(0) = 15 \cos^3 \vartheta - 9 \cos \vartheta.$$

Somit entspringt der Anfang der Entwicklung:

$$T = 1 + r \cos \vartheta + r^2 \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2} + r^3 \frac{5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta}{2} + \dots \quad (21)$$

Denkt man sich die Entwicklung weiter geführt, so bezeichnet man den Koeffizienten der n -ten Potenz von r , da er nur von $\cos \vartheta$ abhängt, mit $P_n(\cos \vartheta)$ und man hat

$$T = P_0(\cos \vartheta) + r P_1(\cos \vartheta) + r^2 P_2(\cos \vartheta) + \dots \\ = \sum_0^{\infty} r^n P_n(\cos \vartheta) \quad (22)$$

oder, wenn man $\cos \vartheta = \mu$ setzt:

$$T = \sum_0^{\infty} r^n P_n(\mu). \tag{23}$$

Das allgemeine Bildungsgesetz für $P_n(\mu)$ lautet:

$$P_n(\mu) = \frac{(2n)!}{2^n n! n!} \left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n-1)(2n-3)(2n-5)} \mu^{n-6} + \dots \right]. \tag{24}$$

Man nennt die so definierten Funktionen $P_n(\mu)$ einfache (Legendresche) Kugelfunktionen n -ter Ordnung, welche ganz und rational sind. Die Funktionen der 4 niedrigsten Ordnungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} P_0(\mu) &= 1, \\ P_1(\mu) &= \cos \vartheta = \mu, \\ P_2(\mu) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \vartheta - 1) = \frac{1}{2}(3 \mu^2 - 1), \\ P_3(\mu) &= \frac{1}{2}(5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta) = \frac{1}{2}(5 \mu^3 - 3 \mu), \\ P_4(\mu) &= \frac{1}{8}(35 \cos^4 \vartheta - 30 \cos^2 \vartheta + 3) = \frac{1}{8}(35 \mu^4 - 30 \mu^2 + 3), \\ &\dots \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

VI. Ist im Potential (19) aber $r > 1$, so bilde man:

$$r T = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{1}{r}\right) \cos \vartheta + \left(\frac{1}{r}\right)^2}} \tag{26}$$

und entwickle dies nach Potenzen von $\left(\frac{1}{r}\right)$. Es entspricht dann:

$$r T = \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n P_n(\cos \vartheta)$$

oder

$$\begin{aligned} T &= \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \vartheta), \quad r > 1 \\ &= \frac{1}{r} P_0(\cos \vartheta) + \frac{1}{r^2} P_1(\cos \vartheta) + \frac{1}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \dots, \end{aligned} \tag{27}$$

womit dieser Fall auf dieselben Kugelfunktionen zurückgeführt worden ist.

VII. Nunmehr erinnern wir uns wieder daran, daß T ein Potential ist und als solches die Differentialgleichung (18) erfüllen muß. Diese vereinfacht sich, da T von φ unabhängig ist, zu:

$$r \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right\} = 0. \quad (28)$$

Versucht man hier den Ausdruck (23) für T einzusetzen, so entspringt:

$$\sum_0^\infty r^n \left[(n+1)n P_n(\mu) + \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \right] = 0. \quad (29)$$

Diese Gleichung kann aber nur dann erfüllt sein, wenn die Koeffizienten von r^n Null sind, d. h. wenn gilt:

$$(n+1)n P_n(\mu) + \frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \right\} = 0. \quad (30)$$

Dies ist aber eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in μ , wie wir durch Übergang vom Zeichen ∂ zu d bereits angedeutet haben, und $P_n(\mu)$ ist ein partikuläres Integral von ihr. Man kann (30) nach Ausführung der Operation $\frac{d}{d\mu}$ noch schreiben:

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} + n(n+1) P_n(\mu) = 0. \quad (31)$$

Wie wir aus der Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung wissen, baut sich das allgemeine Integral aus zwei voneinander unabhängigen partikulären Integralen y_1 und y_2 mittels zweier willkürlicher Konstanten auf:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (32)$$

Wir wollen nun Differentialgleichung (30) direkt integrieren, um die beiden voneinander unabhängigen partikulären Integrale zu finden.

Es werde ein Integral y_1 als Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten und Exponenten angeschrieben wie folgt:

$$y_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mu^{m_k}. \quad (33)$$

Dann wird

$$\frac{dy_1}{d\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_k \mu^{m_k-1}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \left[(\mu^2 - 1) \frac{dy_1}{d\mu} \right] &= \frac{d}{d\mu} \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k m_k \mu^{m_k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_k \mu^{m_k-1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_k (m_k + 1) \mu^{m_k} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_k (m_k - 1) \mu^{m_k-2}. \quad (34) \end{aligned}$$

Führen wir nun (33) und (34) in die Differentialgleichung (30) ein, so muß gelten:

$$\begin{aligned} n(n+1) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mu^{m_k} &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_k (m_k + 1) \mu^{m_k} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_k (m_k - 1) \mu^{m_k-2} \end{aligned}$$

oder

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \{ [n(n+1) - m_k(m_k + 1)] \mu^{m_k} + m_k(m_k - 1) \mu^{m_k-2} \} = 0. \quad (35)$$

Diese Reihe ist identisch mit folgender:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \{ A_k m_k (m_k - 1) \mu^{m_k-2} \\ &\quad + A_{k+1} [n(n+1) m_{k+1} (m_{k+1} + 1)] \mu^{m_k+1} \}, \quad (36) \end{aligned}$$

wenn $A_0 = 0$ gesetzt wird, wie man sich leicht überzeugt. Diese Reihe muß nun identisch Null ergeben, was zunächst nur möglich ist, wenn $m_k - 2 = m_{k+1}$ ist, d. h. wenn die Exponenten zweier aufeinanderfolgender Glieder die Differenz 2 in absteigendem Sinne haben:

$$\left. \begin{aligned} m_1 - 2 &= m_2, \\ m_2 - 2 &= m_3 = m_1 - 4, \\ m_3 - 2 &= m_4 = m_1 - 6, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ m_k - 2 &= m_{k+1} = m_1 - 2k, \\ m_k &= m_1 - 2k + 2. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$y_1 = A_1 \left(\mu^n + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(n-2k+1)(n-2k)(n-2k+3)\dots(n+1)n}{2k\dots k!(2n-2k+1)\dots 2n-1} \mu^{n-2k} \right). \quad (41)$$

Diese Reihe hört, wenn n eine positive ganze gerade Zahl ist, bei $k = \frac{n}{2}$ oder, wenn n ungerade ist bei $k = \frac{n-1}{2}$ von selbst auf. Die Formel (41) liefert ein erstes partikuläres Integral der Differentialgleichung (36), und wir erkennen, daß, abgesehen von dessen Faktor A , der unbestimmt bleibt, nach Multiplikation mit $\frac{(2n)!}{2^n n! n!} y_1$ übergeht in unsere Legendresche Kugelfunktion $P_n(\mu)$, die wir „erster Art“ nennen wollen.

Wählen wir nun für die Gleichung (38a) die Lösung

$$m_1 = -(n+1),$$

so erhalten wir statt (39) für die Koeffizienten A die Rekursionsformel

$$A_{k+1} = A_k \frac{(n+2k-1)(n+2k)}{2k(2n+2k+1)} \quad (42)$$

und mit

$$m_k = -(n+1) - 2k + 2$$

die unendliche Reihenentwicklung:

$$y_2 = A_1 \left(\mu^{-(n+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+2k-1)(n+2k)}{2^k k! (2n+3)(2n+5)\dots(2n+2k+1)} \mu^{-(n+1)-2k} \right). \quad (42a)$$

Dies ist das zweite von uns gesuchte partikuläre Integral. Wir multiplizieren noch mit

$$\frac{2^n n! n!}{(2n+1)!}$$

und nennen:

$$Q_n(\mu) = \frac{2^n n! n!}{(2n+1)!} y_2 = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \cdot y_2 \quad (43)$$

die Legendresche Kugelfunktion zweiter Art.

Für die niedrigsten Grade n erhält man aus (43) und (42a) die Entwicklungen:

$$\begin{aligned}
 Q_0 \mu &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{3} \frac{1}{\mu^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{\mu^5} + \frac{1}{\mu^7} + \dots \\
 &= \frac{1}{2} \lg \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \quad (-1 \geq \mu \geq +1), \\
 Q_1(\mu) &= \frac{1}{3} \mu^2 + \frac{1}{5} \mu^4 + \frac{1}{7} \mu^6 + \dots \\
 &= \frac{\mu}{2} \lg \frac{\mu + 1}{\mu - 1} - 1 \quad (-1 \geq \mu \geq +1).
 \end{aligned}$$

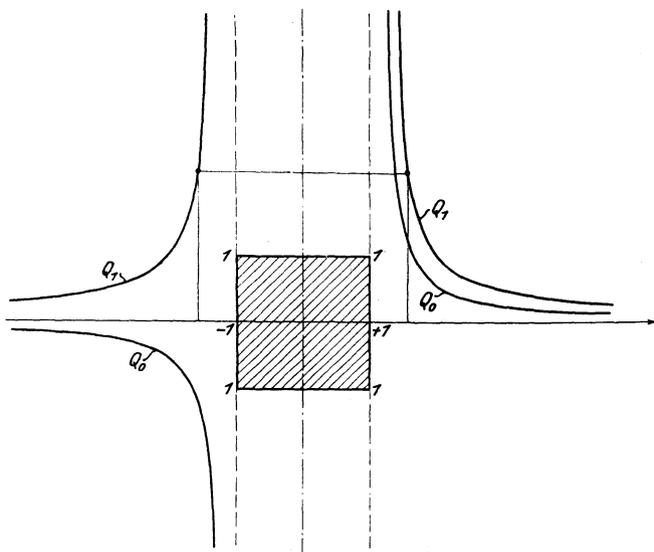


Fig. 246. Niedrigste Legendresche Kugelfunktionen zweiter Art.

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}
 Q_n(\mu) &= \frac{1}{2} P_n(\mu) \log \frac{\mu + 1}{\mu - 1} - \left\{ \frac{2n - 1}{1 \cdot n} P_{n-1} \mu \right. \\
 &+ \left. \frac{2n - 5}{3(n - 1)} P_{n-3}(\mu) + \frac{2n - 9}{6(n - 2)} P_{n-5} \mu + \dots \right\} (-1 \geq \mu \geq +1).
 \end{aligned}$$

Mittels dieser Formel können die Funktionen Q_n aus den P_n und der logarithmischen Funktion berechnet werden. Für $\mu = \pm 1$ werden sämtliche Q logarithmisch unendlich. Graphisch werden Q_0 und Q_1 etwa nach Fig. 246 dargestellt.

Die beiden Funktionen $P_n(\mu)$ und $Q_n(\mu)$ zeigen nun folgendes verschiedenartige Verhalten:

$$P_n(\mu) = (-1)^n P_n(\mu); \quad Q_n(-\mu) = (-1)^{n+1} Q_n(\mu). \quad (44)$$

$$P_n(\mu) \text{ ist endlich f\u00fcr alle } \mu \text{ und wird unendlich f\u00fcr } \mu = \infty. \quad (45)$$

$Q_n(\mu)$ ist unendlich f\u00fcr alle $\mu > 1$ und $\mu < -1$ und verschwindet f\u00fcr $\mu = \infty$. F\u00fcr $\mu = \pm 1$ wird $Q_n(\mu)$ ebenfalls ∞ .

Setzt man $\mu = \cos \vartheta$, so wird die Variable μ auf das Intervall $-1 \leq \mu \leq +1$ eingeschr\u00e4nkt und man kann sagen:

$$\left. \begin{aligned} P_n(\mu) = P_n(\cos \vartheta) \text{ ist als Funktion von } \vartheta \text{ endlich,} \\ Q_n(\mu) = Q_n(\cos \vartheta) \text{ ist als Funktion von } \vartheta \text{ unendlich.} \end{aligned} \right\} (46)$$

Wir besch\u00e4ftigen uns fortan nur noch mit der Funktion $P_n(\mu)$.

VIII. Zun\u00e4chst ergibt sich, da f\u00fcr $\cos \vartheta = 1$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}},$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r + r^2}} = \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

wird, da\u00df $P_n(\cos \vartheta)$ f\u00fcr $\cos \vartheta = 1$ den Wert annimmt

$$P_n(1) = 1.$$

Ferner ergibt sich aus

$$P_n(-1) = (-1)^n P_n(1) = (-1)^n,$$

da\u00df $P_n(-1) = +1$ ist, wenn n gerade,

$$= -1 \quad \dots \quad n \text{ ungerade.}$$

Weiter ist $P_n(0) = 0$, wenn n ungerade, aber

$$P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n},$$

wenn n gerade ist.

F\u00fcr die Werte $P_n(\mu)$ f\u00fcr beliebiges μ resp. von $P_n(\cos \vartheta)$ f\u00fcr beliebige ϑ gibt es Tafeln¹⁰⁸, deren Eingang entweder nach Bruchteilen von $1(\mu)$ oder nach Winkelgraden fortschreitet. Eine auf zwei Dezimalen abgek\u00fcrzte Tafel von $P_n(\mu)$ ($n = 1$ bis 7) ist vorstehend als Tabelle 20 abgedruckt, w\u00e4hrend Tabelle 21 die Funktion $P_n(\cos \vartheta)$ von 5^0 zu 5^0 auf Dezimalen gibt.

Mit Hilfe dieser Tafeln sind die graphischen Darstellungen einiger Legendrescher $K. F.$ Fig. 247—250 gewonnen.

Tabelle 20.

μ	$P_1(\mu)$	$P_2(\mu)$	$P_3(\mu)$	$P_4(\mu)$	$P_5(\mu)$	$P_6(\mu)$	$P_7(\mu)$
0	0	-0,50	0,00	+0,38	0,00	-0,31	0,00
0,05	0,05	-0,49	-0,07	+0,37	+0,09	-0,30	-0,11
0,10	0,10	-0,48	-0,15	+0,34	+0,18	-0,25	-0,20
0,15	0,15	-0,47	-0,22	+0,29	+0,25	-0,17	-0,26
0,20	0,20	-0,44	-0,28	+0,23	+0,31	-0,08	-0,29
0,25	0,25	-0,41	-0,34	+0,16	+0,34	+0,02	-0,28
0,30	0,30	-0,36	-0,38	+0,07	+0,34	+0,13	-0,22
0,35	0,35	-0,32	-0,42	-0,02	+0,32	+0,22	-0,13
0,40	0,40	-0,26	-0,44	-0,11	+0,27	+0,29	-0,01
0,45	0,45	-0,20	-0,45	-0,21	+0,19	+0,33	+0,11
0,50	0,50	-0,12	-0,44	-0,29	+0,09	+0,32	+0,22
0,55	0,55	-0,05	-0,41	-0,36	-0,03	+0,27	+0,30
0,60	0,60	+0,05	-0,36	-0,41	-0,15	+0,17	+0,32
0,65	0,65	+0,13	-0,29	-0,43	-0,27	+0,03	+0,27
0,70	0,70	+0,23	-0,19	-0,41	-0,36	-0,12	+0,15
0,75	0,75	+0,34	-0,07	-0,35	-0,42	-0,28	-0,03
0,80	0,80	+0,46	+0,08	-0,23	-0,40	-0,39	-0,24
0,85	0,85	+0,58	+0,26	-0,05	-0,29	-0,40	-0,39
0,90	0,90	+0,71	+0,47	+0,20	-0,08	-0,74	-0,38
0,95	0,95	+0,85	+0,72	+0,55	+0,37	+0,19	+0,01
1,00	1,00	+1,00	+1,00	+1,00	+1,00	+1,00	+1,00

Tabelle 21.

ϑ	$P_1(\cos \vartheta)$	$P_2(\cos \vartheta)$	$P_3(\cos \vartheta)$	$P_4(\cos \vartheta)$	$P_5(\cos \vartheta)$	$P_6(\cos \vartheta)$	$P_7(\cos \vartheta)$
0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
5	0,996	0,989	0,977	0,962	0,944	0,922	0,896
10	0,985	0,955	0,911	0,853	0,784	0,705	0,616
15	0,966	0,900	0,804	0,685	0,547	0,398	0,245
20	0,940	0,825	0,615	0,476	0,272	0,072	-0,107
25	0,906	0,732	0,502	0,247	0,001	-0,205	-0,346
30	0,866	0,625	0,325	0,023	-0,223	-0,374	-0,410
35	0,819	0,507	0,145	-0,171	-0,369	-0,412	-0,310
40	0,766	0,380	-0,025	-0,319	-0,420	-0,313	-0,100
45	0,707	0,250	-0,177	-0,406	-0,376	-0,149	+0,127
50	0,643	0,120	-0,300	-0,428	-0,255	+0,056	+0,285
55	0,574	-0,007	-0,389	-0,385	-0,087	+0,230	+0,319
60	0,500	-0,125	-0,438	-0,289	+0,090	+0,323	+0,223
65	0,423	-0,232	-0,445	-0,155	+0,238	+0,314	+0,042
70	0,342	-0,325	-0,413	-0,004	+0,328	+0,209	-0,49
75	0,259	-0,400	-0,345	+0,143	+0,343	+0,043	-0,273
80	0,174	-0,453	-0,247	+0,266	+0,281	-0,132	-0,284
85	0,087	-0,489	-0,129	+0,347	+0,158	-0,264	-0,178
90	0,000	-0,500	-0,000	+0,375	+0,000	-0,313	+0,000

Die Funktionen der niedersten Ordnung erweisen sich als identisch mit bekannten elementaren Funktionen:

$$P_0(\mu) = 1,$$

$$P_1(\mu) = \text{gerade Linie},$$

$$P_2(\mu) = \text{Parabel},$$

$$P_1(\cos \vartheta) = \text{Kosinusfunktion der Periode } 2\pi,$$

$$P_2(\cos \vartheta) = \text{Kosinusfunktion der Periode } \pi.$$

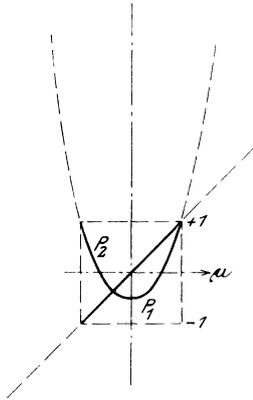


Fig. 247. Legendresche Kugelfunktionen erster Art der Ordnung 1 und 2.

Die Funktionen $P_n(\mu)$ höherer Ordnung sind, wie schon oben bemerkt, ganz und rational von n -tem Grade und ihre n Nullpunkte liegen sämtlich im Intervall $-1 < \mu < +1$.

Betrachtet man zwei aufeinanderfolgende Funktionen $P^{n-1}(\mu)$ und $P_n(\mu)$, z. B. P_4 und P_5 , so schließen zwei benachbarte Nullpunkte der einen einen Nullpunkt der andern ein.

Diesen Satz wollen wir nicht beweisen.

Ebenso wollen wir ohne Beweis die folgenden Sätze anschreiben, die oft gebraucht werden:

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(\mu^2 - 1)^n}{d\mu^n},$$

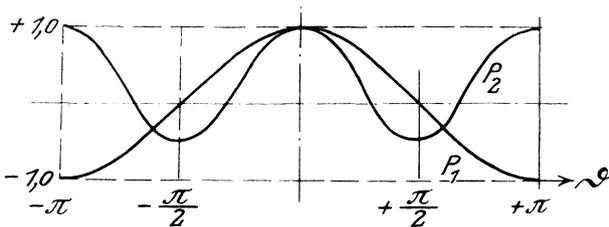


Fig. 248. Die Funktionen $P_1(\cos \vartheta)$ und $P_2(\cos \vartheta)$.

d. h. die Funktion $P_n(\mu)$ findet sich durch n -malige Differentiation der Funktion $\frac{(\mu^2 - 1)^n}{2^n n!}$.

Ferner gelten für 3 Kugelfunktionen aufeinanderfolgender Ordnungen die Rekursionsformeln:

$$(n + 1) P_{n+1}(\mu) - (2n + 1)\mu P_n(\mu) + n P_{n-1}(\mu) = 0$$

und

$$\frac{dP_{(n+1)}(\mu)}{d\mu} - (2n + 1) P_n(\mu) - \frac{dP_{n-1}(\mu)}{d\mu} = 0.$$

IX. Nach diesen Legendreschen Kugelfunktionen läßt sich eine im Intervall $-1 \leq \mu \leq +1$ gegebene willkürliche eindeutige Funktion $f(\mu)$ in eine Reihe entwickeln wie folgt:

$$\begin{aligned} f(\mu) &= C_0 P_0(\mu) \\ &+ C_1 P_1(\mu) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\mu), \end{aligned}$$

wo die Koeffizienten C_k sich bestimmen aus

$$C_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\mu) P_k(\mu) d\mu.$$

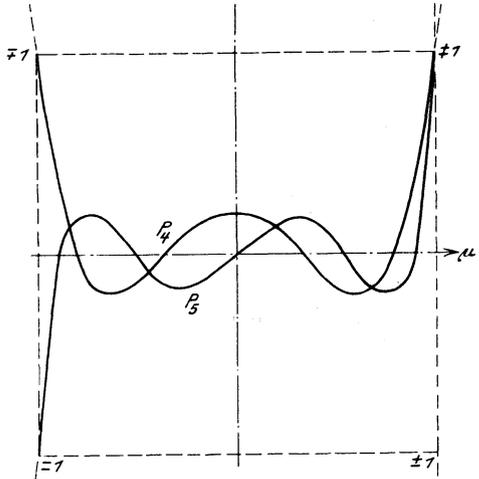


Fig. 249. Legendresche Kugelfunktionen erster Art der Ordnung 4 und 5.

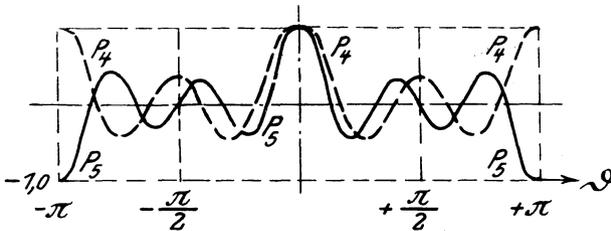


Fig. 250. Die Funktionen $P_4(\cos \vartheta)$ und $P_5(\cos \vartheta)$.

Hiernach lassen sich z. B. die niedrigsten Potenzen von μ durch Reihen der Legendreschen Funktionen wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \mu &= P_1(\mu), \\ \mu^2 &= \frac{2}{3} P_2(\mu) + \frac{1}{3} P_0(\mu), \\ \mu^3 &= \frac{2}{5} P_3(\mu) + \frac{3}{5} P_1(\mu), \\ \mu^4 &= \frac{8}{35} P_4(\mu) + \frac{4}{7} P_2(\mu) + \frac{1}{5} P_0(\mu) \\ &\text{usw. usw.} \end{aligned}$$

§ 93. Die allgemeinen Kugelfunktionen.

I. Handelt es sich jetzt um das Potential T_1 eines beliebigen Punktes P_1 Fig. 251 der Polarkoordinaten $1, \vartheta_1, \varphi_1$, auf der Einheitskugel, auf einen Punkt $P(r, \vartheta, \varphi)$, so wird, wenn beide Punkte mit der Masse 1 belegt sind,

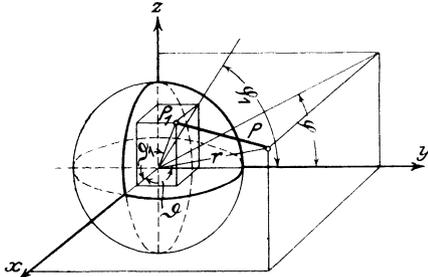


Fig. 251. Zur Einführung der allgemeinen Kugelfunktionen.

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \omega + r^2}}, \quad (1)$$

wenn ω der Winkel P_1OP ist. Dies Potential entwickelt man, falls $r > 1$, analog (22) § 92 in eine Reihe:

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos \omega). \quad (2)$$

Nach Formel (9) § 92 war aber

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos \varphi \cos \varphi_1 \\ &\quad - \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \sin \varphi \sin \varphi_1, \end{aligned} \quad (3)$$

womit die Funktion $P_n(\cos \omega)$ eine Funktion von

$$\xi = \cos \vartheta, \quad \eta = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \zeta = \sin \vartheta \sin \varphi \quad (4)$$

wird, die in ξ, η, ζ ganz und rational vom n -ten Grade ist, wobei man ϑ_1, φ_1 als konstant betrachtet.

Die Funktionen $P_n(\xi, \eta, \zeta)$ niedrigster Ordnung lauten:

$$\begin{aligned} P_1 &= a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \zeta, \\ P_2 &= a_{11} \xi^2 + 2 a_{12} \xi \eta + 2 a_{13} \xi \zeta + a_{22} \eta^2 + 2 a_{23} \eta \zeta \\ &\quad + a_{33} \zeta^2 + a_{44}. \end{aligned}$$

Hier sind die Koeffizienten a von $\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1$ abhängig.

Will man die Abhängigkeit dieser Funktionen von ϑ und φ ausdrücken, so bezeichnet man sie mit $X_n(\vartheta, \varphi)$ und man hat für die Entwicklung des Potentials:

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} r^n X_n(\vartheta, \varphi). \quad (5)$$

Läßt man in den Gleichungen (4) ϑ in $\pi - \vartheta$, φ in $\varphi + \pi$ übergehen, so gehen ξ, η, ζ über in $-\xi, -\eta, -\zeta$ und gleichzeitig geht $X_n(\vartheta, \varphi)$ über in:

$$X_n(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^n X_n(\vartheta, \varphi),$$

die geraden Funktionen X behalten also ihr Vorzeichen, die ungeraden wechseln das Vorzeichen.

Als Potential muß ferner $T_1(r, \vartheta, \varphi)$ der Laplaceschen Differentialgleichung genügen:

$$r \frac{\partial^2 (r T_1)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial T_1}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (6)$$

Führt man an dem Ausdrucke (5) für T_1 die angegebenen Operationen aus, so entspringt:

$$\sum r^n \left\{ n(n+1) X_n + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial X_n}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} \right\} = 0. \quad (7)$$

Diese Summe kann aber nur verschwinden, wenn jeder Koeffizient von r^n verschwindet, d. h. die Funktion $X_n(\vartheta, \varphi)$ muß der partiellen Differentialgleichung

$$n(n+1) X_n + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial X_n}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (8)$$

genügen.

Jede diese Differentialgleichung befriedigende Funktion, die in $\xi = \cos \vartheta, \eta = \sin \vartheta \cos \varphi, \zeta = \sin \vartheta \sin \varphi$ ganz und rational ist, heißt eine Kugelfunktion.

Wir schreiben die Kugelfunktionen X_n niedrigster Ordnungen an:

$$X_0 = P_0(\cos \omega) = 1,$$

$$\begin{aligned} X_1 &= P_1(\cos \omega) = \cos \omega = \cos \vartheta_1 \cos \varphi + \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 \sin \vartheta \cos \varphi \\ &\quad - \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 \sin \vartheta \sin \varphi \\ &= \cos \vartheta_1 \xi + \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 \eta - \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 \zeta \\ &= a \xi + b \eta + c \zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= P_2(\cos \omega) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \omega - 1) \\ &= \frac{1}{2} [3(a^2 \xi^2 + 2ab \xi \eta + b^2 \eta^2 + 2ac \xi \zeta + 2bc \eta \zeta + c^2 \zeta^2) - 1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3 &= P_3(\cos \omega) = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega) = \frac{1}{2} [5(a^3 \xi^3 \\ &+ 3a^2 b \xi \eta^2 + 3ab^2 \xi \eta^2 + b^3 \eta^3 + 3a^2 c \xi^2 \zeta + 6abc \xi \eta \zeta + 3b^2 c \eta^2 \zeta \\ &+ 3ac^2 \xi \zeta^2 + 3bc^2 \eta \zeta^2 + c^3 \zeta^3) - 3a \xi - 3b \eta - 3c \zeta] \end{aligned}$$

usw. usw.

II. Die Funktionen X_n sind in $\xi\eta\zeta$ nicht homogen; die Grade der einzelnen Glieder stufen sich nach ganzen Vielfachen von 2 ab. Man kann Homogenität herbeiführen, indem man jedes Glied vom Grade $n - 2k$ mit dem Faktor $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^k$ multipliziert. Da $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ist, wird der Wert der Funktion $X_n(\xi, \eta, \zeta)$ durch diese Multiplikation nicht geändert.

Fragen wir nun nach der Differentialgleichung, der die Funktion $X_n(\xi, \eta, \zeta)$, die in dieser Weise homogen gemacht ist, genügt, so stellen wir zunächst fest, daß

$$x = r\xi, \quad y = r\eta, \quad z = r\zeta$$

die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes r, ϑ, φ sind. Demnach ist

$$V_n = r^n X_n$$

eine ganze rationale homogene Funktion der Raumkoordinaten x, y, z des Punktes P .

Wir schließen nun so: Da die Funktion $V_n(xyz)$ durch die Substitution:

$$x = r\xi, \quad y = r\eta, \quad z = r\zeta$$

übergeht in $r^n X_n(\xi, \eta, \zeta)$ und dieses durch

$$\xi = \cos\vartheta, \quad \eta = \sin\vartheta \cos\varphi, \quad \zeta = \sin\vartheta \sin\varphi \quad \text{in} \quad r^n X_n(\vartheta, \varphi),$$

so ist

$$V_n(r, \vartheta, \varphi) = r^n X_n(\vartheta, \varphi);$$

und da andererseits der Ausdruck:

$$r^n \left(x(n+1) X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial X_n}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} \right) \quad (9)$$

identisch ist der Operation:

$$r \frac{\partial^2 (r V_n)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial V_n}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 V_n}{\partial\varphi^2}. \quad (10)$$

und da dies das Resultat der Operation

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \quad (11)$$

ist, wenn man hier

$$x + r \cos\vartheta, \quad y = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad z = r \sin\vartheta \sin\varphi$$

substituiert, so muß (11) verschwinden, wenn (9) verschwindet.

Das letztere aber haben wir unter (8) bewiesen. Mithin genügt $V_n(x, y, z)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

und $X_n(\xi, \eta, \zeta)$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (13)$$

Die Bezeichnung Kugelfunktion rührt nun daher, daß wegen $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ die Werte ξ, η, ζ als Koordinaten der Punkte eine Kugelfläche von Radius 1 aufgefaßt werden können. Noch deutlicher wird der innere Grund der Benennung Kugelfunktion, wenn man bemerkt, daß die Winkel ϑ, φ zur Bestimmung eines Punktes auf dieser Kugelfläche hinreichen. Demnach wird $X_n(\vartheta, \varphi)$ eine Funktion der Punkte der Kugelfläche, analog, wie etwa $f(x, y)$ eine Funktion der Punkte der Koordinatenebene ist.

III. Für die Funktionen $X_n(\vartheta, \varphi)$ existieren eine Reihe von Sätzen, die bei den Anwendungen gebraucht werden.

Zunächst ist $X_n(\vartheta, \varphi)$ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (8). Dieser Differentialgleichung genügen aber noch andere partikuläre Integrale $X_n^{(k)}$, die ebenfalls Kugelfunktionen sind. Man überzeugt sich nun leicht, daß jede Summe von Kugelfunktionen $X_n^{(k)}$ wieder eine Kugelfunktion ist:

$$X_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{K=1}^J C_K X_n^{(k)}(\vartheta, \varphi). \quad (14)$$

Ferner findet man, daß die allgemeinste Kugelfunktion $X_n(\vartheta, \varphi)$ sich aus $2n + 1$ partikulären voneinander unabhängigen Kugelfunktionen $X_n^{(k)}(\vartheta, \varphi)$ zusammensetzt. Jede Funktion

$$X_n^{(k)}(\vartheta, \varphi) = \operatorname{sink} \varphi \cdot P_n^{(k)}(\cos \vartheta) \quad (15)$$

oder
$$X_n^{(k)}(\vartheta, \varphi) = \operatorname{cosk} \varphi \cdot P_n^{(k)}(\cos \vartheta) \quad (16)$$

ist solch ein partikuläres Integral.

Durch Einsetzen von (15) oder (16) in (8) findet man, daß die neue Funktion $P_n^{(k)}(\cos \vartheta)$ der Differentialgleichung genügen muß:

$$\begin{aligned} & (1 - \mu^2) \frac{d^2 P_n^{(k)}(\mu)}{d\mu^2} - 2n \frac{dP_n^{(k)}(\mu)}{d\mu} \\ & + \left(n(n+1) - \frac{k^2}{1 - \mu^2} \right) P_n^{(k)}(\mu) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Setzt man in dieser Differentialgleichung

$$P_n^{(k)} \mu = \frac{(n-k)!}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} (\sqrt{\mu^2-1})^k \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k}. \quad (18)$$

wo

$$\frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k} = D_n^{(k)}(\mu)$$

der k -te Differentialquotient der Legendreschen Kugelfunktion n -ter Ordnung ist, so haben wir für $D_n^{(k)}(\mu)$ die Differentialgleichung

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 D_n^{(k)}(\mu)}{d\mu^2} - 2\mu(k+1) \frac{d D_n^{(k)}(\mu)}{d\mu} + [n(n+1) - k(k+1)] D_n^{(k)} \mu = 0 \quad (19)$$

Für $k=0$ geht diese Differentialgleichung in die bekannte Differentialgleichung der Legendreschen Kugelfunktionen über:

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d P_n(\mu)}{d\mu} + n(n+1) P_n(\mu) = 0. \quad (20)$$

Hiermit sind die allgemeinen Kugelfunktionen $X_n(\vartheta, \varphi)$ auf eine Summe von Produkten der Kreisfunktionen in abgeleitete der Legendreschen Kugelfunktionen zurückgeführt:

$$X_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{k=0}^n (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) P_n^{(k)} \cos \vartheta. \quad (21)$$

Die Koeffizienten A_k und B_k bleiben unbestimmt und sind im gegebenen Fall aus den Bedingungen des speziellen Problems zu berechnen.

IV. Liegen jetzt zwei Kugelfunktionen verschiedener Ordnungen vor,

$$X_n(\vartheta, \varphi) \quad \text{und} \quad X_m(\vartheta, \varphi),$$

so fragen wir nach dem Wert des über die ganze Kugelfläche integrierten Produktes der beiden Funktionen

$$II = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi X_n(\vartheta, \varphi) X_m(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (22)$$

Ohne Beweis schreiben wir an:

$$II \equiv 0, \quad \text{wenn} \quad m \neq n,$$

d. h. das über die ganze Kugelfläche integrierte Produkt zweier Kugelfunktionen verschiedener Ordnungen ist identisch = Null.

Im Falle $m = n$ setzen wir für die eine Kugelfunktion speziell:

$$X_m(\vartheta, \varphi) = P_n(\cos \omega) \quad (23)$$

im Sinne des Ansatzes (1) dieses Paragraphen, für den galt

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos \varphi \cos \varphi_1 \\ &- \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos \varphi \cos \varphi_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Integrieren wir jetzt:

$$II = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} X_n(\vartheta, \varphi) P_n(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (25)$$

so resultiert:

$$II = \frac{4\pi}{2n+1} X_n(\vartheta_1, \varphi_1), \quad (26)$$

d. h. durch die Integration reproduziert sich der Wert der Funktion $X_n(\vartheta, \varphi)$ für denjenigen Kugelflächenpunkt ϑ_1, φ_1 , auf den sich $P_n(\cos \omega)$ bezog.

V. Nach Kugelfunktionen $X_n(\vartheta, \varphi)$ läßt sich eine auf der Kugelfläche willkürlich gewählte Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ entwickeln:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\vartheta, \varphi). \quad (27)$$

Multiplizieren wir die Reihe mit $P_n(\cos \omega)$, mit ϑ_1, φ_1 als festem Bezugspunkt, so ergibt sich nach beiderseitiger Integration über die ganze Kugelfläche

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \omega) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} X_n(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \omega) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{4\pi}{2n+1} X_n(\vartheta_1, \varphi_1), \end{aligned} \quad (28)$$

woraus folgt:

$$X_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \omega) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

womit die Bestimmung der Funktionen $X_n(\vartheta, \varphi)$ der Entwicklung (27) geleistet ist, da wir die Zeiger 1 jetzt fortlassen können.

§ 94. Anwendung der Kugelfunktionen auf Elektrostatik.

Das allgemeine Problem der Elektrostatik besteht in folgender Aufgabe: Gegeben sind Isolatoren J und Leiter (Konduktoren) C (Fig. 252). Auf den Isolatoren liege eine bestimmte unveränderliche Elektrizitätsverteilung $\rho = f(r, \vartheta, \varphi)$ vor; den Leitern seien bestimmte Elektrizitätsmengen M mitgeteilt. Es soll bestimmt werden, in welcher Weise sich die Elektrizität auf den einzelnen Leitern in Folge der Influenzwirkung verteilt.

Zunächst gelten folgende allgemeine Bemerkungen:

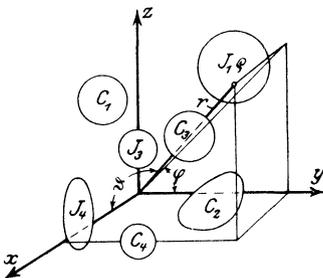


Fig. 252. Zum Potential von Isolatoren und Leitern.

I. Das Potential V auf einen beliebigen Raumpunkt, der weder auf einem J noch auf einem C liegt, setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus dem Potential V_J , welches herrührt von den auf den Isolatoren lagernden Elektrisierungen, und V_C , dem Potential der auf den Konduktoren influenzierten Elektrisierungen:

$$V = V_J + V_C. \quad (1)$$

II. Im Innern der Konduktoren gilt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

d. h. Potential ist hier überall konstant.

III. Im Innern eines Isolators gilt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

IV. Influssierte Elektrizität findet sich nur an der Oberfläche der Konduktoren vor.

V. An der Oberfläche der Konduktoren ist der erste Differentialquotient des Potentials nach der Normalen unstetig; es gilt

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi\sigma,$$

wo σ die influenzierte Elektrisierungsdichte an der betrachteten Konduktorstelle bedeutet.

Einfaches Beispiel.

Gegeben ein Isolator J der Belegung $\varrho = f(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$ und ein kugelförmiger Konduktor C vom Radius R (Fig. 253). Das Potential auf einen inneren Punkt P von C ($r < R$) wird nach dem oben Gesagten

$$V = V_J + V_C.$$

Zunächst wird V_J ermittelt.

$$V_J = \int_J \frac{\varrho d\tau}{\sqrt{r^2 - 2rr_2 \cos \omega + r_2^2}}. \quad (2)$$

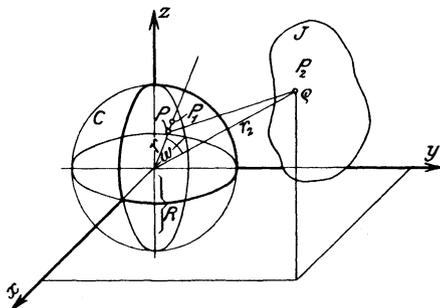


Fig. 253. Influenzwirkung eines geladenen Leiters auf eine Kugel.

Da $r_2 > r$ ist, entwickeln wir

$$V_J = \int_J \frac{\varrho d\tau}{r_2 \sqrt{1 - 2 \frac{r}{r_2} \cos \omega + \left(\frac{r}{r_2}\right)^2}}$$

nach Potenzen von $\frac{r}{r_2}$:

$$\begin{aligned} V_J &= \int_J \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho d\tau}{r_2^{n+1}} r^n P_n(\cos \omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_{\tau} \frac{\varrho d\tau}{r_2^{n+1}} P_n(\cos \omega) \end{aligned} \quad (3)$$

Das Integral

$$\int \frac{f(r_2, \vartheta_2, \varphi_2) r_2^2 \sin \vartheta_2 dr_2 d\vartheta_2 d\varphi_2}{r_2^{n+1}} P_n(\cos \omega)$$

ist über den ganzen Isolator zu erstrecken, indem den Integrationsvariablen $r_2, \vartheta_2, \varphi_2$, alle mit der Begrenzung des Isolators verträglichen Werte erteilt werden. Hiermit wird aber das Integral eine Kugelfunktion n -ter Ordnung in ϑ und φ , da ja auch $P_n(\cos \omega)$ vermöge

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos \vartheta \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2 \\ &\quad - \sin \vartheta \sin \varphi \cos \vartheta_2 \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

eine Kugelfunktion n -ter Ordnung in ϑ und φ ist. Wir schreiben also das Potential (3)

$$V_J = \sum_{n=0}^{\infty} r^n X_n(\vartheta, \varphi), \quad (4)$$

worin die $X_n(\vartheta, \varphi)$ gegebene bzw. durch eine Integration gewinnbare Funktion darstellen.

Die auf der Kugel durch Influenz hergestellte vorläufig unbekannte Elektrisierung nennen wir in Funktion der Punkte P_1 der Kugelfläche ϑ_1, φ_1

$$\sigma = f(\vartheta_1, \varphi_1).$$

Das Potential dieser Elektrisierung auf den Punkt P wird:

$$V_c = \int_C \frac{f(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot R^2 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1}{\sqrt{R^2 - 2rR \cos \omega + r^2}} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 &= \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos \varphi \cos \varphi_1 \\ &\quad - \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \sin \varphi \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

Wiederum entwickeln wir, da $r < R$, nach Potenzen von $\frac{r}{R}$ und erhalten:

$$V_c = \int_C f(\vartheta_1, \varphi_1) R^2 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{P_n(\cos \omega_1)}{R} \quad (6)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\vartheta_1, \varphi_1) P_n(\cos \omega_1) R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi_1 \quad (7)$$

Das Integral ist über die ganze Kugelfläche zu erstrecken.

Jetzt denken wir uns $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ in eine Reihe von Kugelfunktionen entwickelt

$$f(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_0^{\infty} Y_m(\vartheta_1, \varphi_1). \quad (8)$$

welche Reihe wir in (7) eintragen. Nach den beiden Integralsätzen über die Kugelfunktionen wird das Integral

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_0^{\infty} Y_n(\vartheta_1, \varphi_1) P_n(\cos \omega_1) R^2 \sin \vartheta d\vartheta_1 d\varphi_1 = \frac{4\pi R^2}{2n+1} Y_n(\vartheta, \varphi) \quad (9)$$

und mithin:

$$V_C = 4\pi \sum_0^{\infty} \frac{r^n R^2}{R^{n+1}} \frac{Y_n(\vartheta, \varphi)}{2n+1}. \quad (10)$$

Demnach wird das Gesamtpotential

$$V = V_J + V_C = \sum_0^{n=\infty} r^n \left[X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi Y_n(\vartheta, \varphi)}{R^{n-1}(2n+1)} \right]. \quad (11)$$

Das Potential V muß aber für alle Punkte im Inneren des Leiters C konstant, also von r unabhängig sein (vgl. oben II), so daß die einzelnen Faktoren der Potenzen r^n der Summe verschwinden müssen, wodurch zur Bestimmung von $Y_n(\vartheta, \varphi)$ gewonnen sind:

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = - \frac{R^{n-1}(2n+1)}{4\pi} X_n(\vartheta, \varphi) \quad \text{für alle } n \leq 1. \quad (12)$$

Es erübrigt jetzt noch die Bestimmung der Konstante $4\pi Y_0(\vartheta, \varphi)$ der Reihe (11). Greifen wir zurück auf die Kombination der Gleichungen (8) und (9)

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta_1, \varphi) P_n(\cos \omega_1) R^2 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1 = \frac{4\pi R^2}{2n+1} Y_n(\vartheta_1, \varphi_1), \quad (13)$$

so wird speziell für $n = 0$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta_1, \varphi_1) R^2 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1 = 4\pi R^2 Y_0(\vartheta_1, \varphi_1). \quad (14)$$

Der Ausdruck links ist nun nichts anderes als die der Kugel C mitgeteilte Elektrizitätsmenge M , so daß gilt

$$Y_0(\vartheta_1, \varphi_1) = \frac{M}{4\pi R^2}.$$

Hiermit ist aber die Elektrizitätsverteilung auf der Kugel­fläche ermittelt wie folgt:

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{M}{4\pi R^2} - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} R^{n-1} (2n+1) X_n(\vartheta, \varphi).$$

§ 95. Bestimmung der Greenschen Funktion für die Kugel und Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Kugelinnenraum.

I. Die Greensche Funktion G zweier Punkte $P_1(x, y, z)$ und $P_2(a, b, c)$ soll nach § 91 folgende Bedingungen erfüllen:

1. Innerhalb der Kugel vom Radius R soll die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 G}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial c^2} = 0 \tag{1}$$

erfüllt sein.

2. An der Oberfläche der Kugel, d. h. für $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = R$, soll

$$G(x, y, z; a, b, c) = 0 \tag{2}$$

sein.

3. Die Funktion

$$G = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

soll nebst ihren ersten Derivierten überall innerhalb der Kugel und auf deren Oberfläche stetig sein.

Bei den beiden Punkten P_1 und P_2 führen wir jetzt Polarkoordinaten ein. Es werden

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \vartheta, \\ y &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ a &= \varrho \cos \vartheta', \\ b &= \varrho \sin \vartheta' \cos \varphi', \\ c &= \varrho \sin \vartheta' \sin \varphi'. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

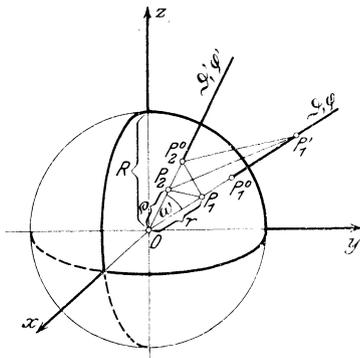
Fig. 254. Zur Greenschen Funktion für eine Kugel.

Auf dem Fahrstrahl von P_1 bestimmen wir jetzt einen Punkt P_1' Fig. 254 durch die Beziehung

$$r r' = R^2. \tag{4}$$

Hiermit erhält P_1' die Koordinaten

$$x' = \frac{R^2}{r} \cos \vartheta; \quad y' = \frac{R^2}{r} \sin \vartheta \cos \varphi; \quad z' = \frac{R^2}{r} \sin \vartheta \sin \varphi. \tag{5}$$



Wir wollen nun beweisen, daß die Funktion

$$G = \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{1}{\sqrt{(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}} \quad (6)$$

die Greensche Funktion für das Innere der Kugel ist.

Ad 1. Jede der beiden reziproken Wurzeln erfüllt für sich die Differentialgleichung (1) nach § 87.

Ad 2. Durch Einführung der Polarkoordinaten für x, y, z ; x', y', z' ; a, b, c erhält man

$$G = \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{r^2} - 2 \frac{R^2}{r} \varrho \cos \omega + \varrho^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2 r \varrho \cos \omega + \varrho^2}}, \quad (7)$$

wo

$$\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') \quad (8)$$

ist. Läßt man hier $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = R$ werden, so wird tatsächlich

$$G = 0. \quad (9)$$

Ad 3. Diese Bedingung ergibt sich ohne weiteres, weil niemals der Punkt a, b, c mit x', y', z' zusammenfallen kann, weil letzterer außerhalb der Kugel liegt.

II. Um nun die Randwertaufgabe für die Kugel zu lösen, d. h. eine Funktion $V(r, \vartheta, \varphi)$ zu finden, die im Innern der Kugel die Differentialgleichung

$$\Delta V = \tau(\varrho, \vartheta, \varphi) \quad (10)$$

befriedigt und auf der Kugel ($r = R$) die Werte einer auf der Kugelfläche gegebenen Funktion

$$V_{r=R} = \sigma(\vartheta, \varphi) \quad (11)$$

annimmt, haben wir auf Formel (16) § 91 zurückzugreifen, nach welcher

$$V(r, \vartheta, \varphi) = \int_{\tau} G \tau(\varrho, \vartheta', \varphi') d\tau - \int_{\sigma} \sigma(\vartheta', \varphi') \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \quad (12)$$

war. Hier beziehen sich die Integrationen auf $\varrho, \vartheta', \varphi'$, in denen natürlich auch $d\tau$ und $d\sigma$ auszudrücken sind.

Zur Vereinfachung der Rechnung (da wir nur das Prinzipielle des Verfahrens zeigen wollen) nehmen wir nun τ (ϱ , ϑ' , φ') überall gleich Null an, d. h. V soll der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta V = 0 \quad (13)$$

genügen. Damit bleibt von (12) nur übrig, wenn man das nach innen gerichtete Normalendifferential ∂n durch $-\partial \varrho$ ersetzt:

$$V(r, \vartheta, \varphi) = \int_{\sigma} \sigma(\vartheta', \varphi') \frac{\partial G}{\partial \varrho} \cdot R^2 \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'. \quad (14)$$

Führt man die Operation $\frac{\partial}{\partial \varrho}$ an dem Ausdruck (7) für G aus, so erhält man

$$\left[\frac{\partial G}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=R} = \frac{R^2 \cdot r^2}{R [\sqrt{R^2 - 2Rr \cos \omega} + r^2]^3} \quad (15)$$

und für die Funktion V selbst

$$V(r, \vartheta, \varphi) = R \int_{\sigma} \sigma(\vartheta', \varphi') \frac{(R^2 - r^2) \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'}{[\sqrt{R^2 - 2Rr \cos \omega} + r^2]^3}. \quad (16)$$

Hiermit ist die Berechnung von V formal durchgeführt, und wir brauchen nur darauf hinzuweisen, daß $V(r, \vartheta, \varphi)$ nach Formel (16) nichts zu tun hat mit dem Potential V_e einer kugelförmigen Flächenbelegung, Formel (5) in § 94. Für V_e gilt an der Fläche:

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} + \frac{\partial V_e}{\partial n} = 4\pi\sigma,$$

während für $V(r, \vartheta, \varphi)$ an der Fläche

$$V(R, \vartheta, \varphi) = \sigma(\vartheta, \varphi)$$

gilt.

Im übrigen gelingt die Bestimmung der Greenschen Funktion nur in besonderen Fällen.

§ 96. Die Zylinderfunktionen.

Handelt es sich um das Potential kreiszylinderförmig angeordneter Massen, so formt man zweckmäßig die Laplace-Poissonsche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

auf Zylinderkoordinaten x, r, φ um durch deren Beziehungen zu den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z (Fig. 255):

$$x = x, \quad y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi. \quad (2)$$

Der Umrechnungsprozeß gestaltet sich ganz ähnlich wie in § 79, und wir schreiben als Resultat an:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3)$$

Suchen wir ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung in der Form

$$V = X R \Phi \quad (4)$$

zu bestimmen, wo X, R, Φ je die Variablen x, r, φ allein enthalten, so liefert die Substitution dieses Ansatzes in (3):

$$\frac{X''}{X} + \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = 0. \quad (5)$$

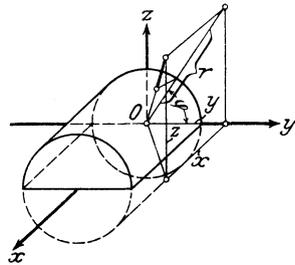


Fig. 255. Zur Einführung der Zylinderkoordinaten.

Diese Gleichung kann man nach Einführung einer Konstanten k^2 (siehe § 79) in folgende beide Gleichungen zerlegen:

$$X'' + k^2 X = 0 \quad (6)$$

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} - k^2 r^2 = 0. \quad (7)$$

Gleichung (7) zerfällt aber mit einer Konstanten m^2 in die beiden Ansätze

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(-k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0 \quad (8)$$

und

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0. \quad (9)$$

Die Differentialgleichungen (6) und (9) liefern sehr bekannte Lösungen:

für (6):

$$X = \cos kx \quad \text{oder} \quad = \sin kx, \quad (10)$$

für (9):

$$\Phi = \cos m\varphi \quad \text{oder} \quad = \sin m\varphi. \quad (11)$$

Gleichung (8) nimmt mit

$$-k^2 = (ik)^2,$$

wo i die imaginäre Einheit bedeutet, die Gestalt an:

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left[(ik)^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (12)$$

Dies ist aber die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen, die wir bereits § 79 kennen gelernt haben, nur mit dem Unterschied, daß dort statt $(ik)^2$ die Größe k^2 in der eckigen Klammer stand. Zum Aufbau der Lösung von (3) dienen die beiden partikulären Integrale von (12). Ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichungen haben wir schon im § 79 als Besselsche Funktion erster Art kennen gelernt, wenn auch zunächst nur für reelles Argument. Als zweites partikuläres Integral kommt hier die Besselsche Funktion zweiter Art hinzu. Wir schreiben, indem wir sogleich das imaginäre Argument benutzen, als Lösungen von (12) an:

$$R = J_m(kr) \quad \text{und} \quad K_m(ikr). \quad (13)$$

Wollten wir hier Funktionen reellen Argumentes haben:

$$R = J_m(kr) \quad \text{und} \quad K_m(kr). \quad (14)$$

so würde Gl. (6) lauten müssen:

$$X'' - k^2 X. \quad (15)$$

Hierzu würden aber die partikulären Lösungen

$$X = e^{-kx} \quad \text{und} \quad X = e^{+kx}$$

gehören.

Entschließen wir uns nunmehr für die weitere Benutzung der Funktionen imaginären Argumentes, so haben wir erstlich die Reihenentwicklung für $J_n(ikr)$ aus derjenigen für $J_n(kr)$ abzuleiten. Wir erhalten aus Formel (16) § 67 durch Einsetzen von ik statt k :

$$J_n(ikr) = \frac{(ikr)^n}{2^n n!} \left[1 + \frac{k^2 r^2}{2^2 (n+1)} + \frac{k^4 r^4}{2! 2^4 (n+1)(n+2)} + \frac{k^6 r^6}{3! 2^6 (n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right]. \quad (15)$$

Hier ergibt sich zunächst, daß $J_n(ikr)$ für $r = \infty$ unendlich wird, und zweitens, daß $J_0(ikr)$ und die Funktionen gerader Ordnung reell, diejenigen ungerader Ordnung imaginär sind.

Zur Ermittlung von $K_n(ikr)$ bzw. $K_n(kr)$ ziehen wir nach Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, I. Teil, S. 245, zunächst für die Funktion nullter Ordnung reellen Argumentes die Definition heran:

$$K_0(kr) = J_0(kr) \lg \frac{2}{\gamma kr} - 2 \left\{ J_2(kr) - \frac{1}{2} J_4(kr) + \frac{1}{3} J_6(kr) - \dots \right\}, \quad (16)$$

wo die J -Funktionen aus Formel (16) § 60 zu entnehmen sind.

Für imaginäres Argument gilt ebenfalls nach Heine (a. a. O.)

$$K_0(ikr) = J_0(ikr) \lg \frac{2i}{\gamma ikr} - 2 \left\{ J_2(ikr) - \frac{1}{2} J_4(ikr) + \frac{1}{3} J_6(ikr) - \dots \right\} \quad (17)$$

mit den J -Funktionen nach Formel (15) dieses Paragraphen.

Aus Heine, I. Teil, S. 237 entnehmen wir noch die Definition

$$K_n(ikr) = (-2ikr)^n \frac{d^n K_0(ikr)}{[d(ikr)^2]^n}. \quad (18)$$

Es ist nun wichtig, das Verhalten von $K_n(ikr)$ für sehr kleine und sehr große Werte von r zu kennen.

Für kleine r erkennt man unmittelbar, daß sämtliche $K_n(ikr)$, weil sie $\lg \frac{2}{\gamma kr}$ enthalten, unendlich werden.

Für sehr große r gilt nach Heine die Formel:

$$\lim_{r=\infty} K_n(ikr) = \lim_{r=\infty} (-i)^n e^{-kr} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}, \quad (19)$$

d. h. im Unendlichen verschwinden sämtliche $K_n(ikr)$.

Nunmehr sind wir genügend gerüstet, um die Lösung für V aufzubauen.

Fassen wir zunächst die beiden partikulären Integrale (10) für X mit einer unbestimmten Konstanten a in eins zusammen:

$$X = \cos k(x - a), \quad (20)$$

so lautet die allgemeine Form von V :

$$V = \sum \cos k(x - a) \{ J_m(ikr) (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) + K_m(ikr) C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi \}. \quad (21)$$

Dieser Ausdruck würde die Differentialgleichung (3) befriedigen.

Außerdem muß V aber noch die Randbedingung erfüllen, die darin besteht, daß V auf der Zylinderfläche, d. h. für $r = R$, in eine gegebene Funktion $F(x, \varphi)$ übergehen soll.

Wir entwickeln $F(x, \varphi)$ in eine Fouriersche Reihe:

$$F(x, \varphi) = \Sigma [g_m(x) \cos m \varphi + h_m(x) \sin m \varphi], \quad (22)$$

welche Entwicklung wir mit dem Ansatz (21) vergleichen, nachdem wir in diesem $r = R$ gesetzt haben. Dabei machen wir einen Unterschied zwischen dem Außen- und Innenraum des Zylinders. Hierzu sehen wir uns veranlaßt durch das Verhalten der Funktionen J_m und K_m beim Nullpunkt und im Unendlichen. Da V nirgends unendlich werden darf (weil dies physikalisch keinen Sinn hat), so können wir die Funktionen K_m in der Nähe des Nullpunktes und die Funktionen J_m im Unendlichen nicht gebrauchen. Wir entschließen uns, den Verwendbarkeitsbereich der J_m auf den ganzen Innenraum des Zylinders, den Bereich der K_m auf den ganzen Außenraum ausdehnen. Die Entwicklung von V zerfällt also in zwei Ansätze:

$$V_i = \Sigma \cos k(x - a) J_m(ikr) (A_m \cos m \varphi + B_m \sin m \varphi), \quad (23a)$$

$$V_a = \Sigma \cos k(x - a) K_m(ikr) (C_m \cos m \varphi + D_m \sin m \varphi), \quad (23b)$$

in denen wir die Konstanten A, B, C, D so zu bestimmen haben, daß für $r = R$ sowohl V_i wie $V_a = F(x, \varphi)$ werden. Dadurch ist die Randwertaufgabe gelöst, die beiden Ansätze (23) gehen auf der Zylinderfläche ineinander über, wobei sie auch die richtigen Werte annehmen. Die Vergleichung von (22) mit (23a) liefert in einer Ebene parallel zur YZ -Ebene ($x = a$) mit:

$$A_m = \frac{g_m(a)}{J_m(ikR)}; \quad B_m = \frac{h_m(a)}{J_m(ikR)}, \quad (24)$$

womit entspringt:

$$V_i = \Sigma \cos k(x - a) \left[\frac{J_m(ikr)}{J_m(ikR)} g_m(a) \cos m \varphi + \frac{J_m(ikr)}{J_m(ikR)} h_m(a) \sin m \varphi \right]. \quad (25a)$$

Analog ergibt sich:

$$V_a = \Sigma \cos k(x - a) \left[\frac{K_m(ikr)}{K_m(ikR)} g_m(a) \cos m \varphi + \frac{K_m(ikr)}{K_m(ikR)} h_m(a) \sin m \varphi \right]. \quad (25b)$$

Um die Tatsache zu beweisen, daß für $r = R$ sowohl V_i wie V_a in $F(x, \varphi)$ übergehen, benutzen wir den Fourierschen

Satz über die Darstellung einer beliebigen Funktion als bestimmtes Doppelintegral. Der Satz lautet ¹⁰⁹⁾:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos k(a-x) da.$$

Wenden wir dies auf (25 a) an, so wird:

$$V_i = \frac{1}{2\pi} \sum \cos m\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(ikr)}{J_m(ikR)} dk \int_{-\infty}^{+\infty} g_m(a) \cos k(a-x) da$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum \sin m\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(ikr)}{J_m(ikR)} dk \int_{-\infty}^{+\infty} h_m(a) \cos k(a-x) da.$$

Setzt man hier $r = R$, so hat man ohne weiteres

$$V_{i,r=R} = \frac{1}{2} \sum \left[\cos m\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} g_m(a) \cos k(a-x) da \right.$$

$$\left. + \sin m\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} h_m(a) \cos k(a-x) da \right],$$

d. h. nach (22):

$$V_{i,r=R} = \sum [\cos m\varphi g_m(x) + \sin m\varphi h_m(x)] = F(x, \varphi).$$

Für V_a läßt sich der Beweis analog führen.

IV. Die Differentialgleichungen der Bewegungen elastischer Körper.

§ 97. Aufstellung der Grundgleichungen.

Die Untersuchung des Gleichgewichts oder der Bewegung eines elastischen Körpers knüpft an an die Kräfte, die an einem aus dem elastisch deformierten Körper herausgeschnittenen kleinen Parallelepiped $dx dy dz$ auftreten.

Ist dieser mit seinen Kanten nach den Achsen X, Y, Z eines rechtwinkligen Koordinatensystems orientiert, und liegt einer seiner Eckpunkte im Anfangspunkt des Systems, so treten an

jeder in einer Koordinatenebene liegenden Begrenzungsfläche drei Spannungskräfte auf: eine Normalkraft σ und zwei Schubkräfte τ , die wie in der Fig. 256 bezeichnet werden. An den Flächen, die nicht in den Koordinatenebenen liegen, greifen dieselben Kräfte an, jedoch um Beträge geändert, die den Fortschreitungen dx, dy, dz entsprechen. Es sind dies die Normalspannungen:

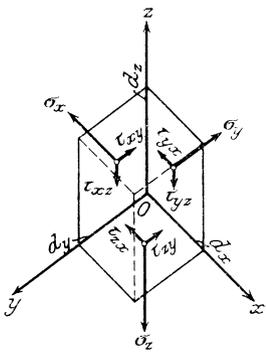


Fig. 256. Spannungen an einem Körperelement.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \\ \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy, \\ \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und die Schubspannungspaare:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx, & \quad \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx, \\ \tau_{yy} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} dy, & \quad \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy, \\ \tau_{zz} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} dz, & \quad \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wir haben 18 Kräfte, die, da Gleichgewicht herrschen soll, den Gleichgewichtsbedingungen der an einem starren Körper angreifenden Kräfte unterworfen sind, d. h. die Komponenten nach den drei Achsen und die Drehmomente nach den drei Achsen müssen verschwinden.

Fügen wir noch die Komponenten $[X, Y, Z] dx dy dz$ einer Massenkraft P (Gewicht oder Beschleunigung) des Elements $dx dy dz$ hinzu, so haben wir:

Komponenten in der X -Richtung

$$\begin{aligned} X dx dy dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dy dz \\ + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right) dx dy \\ + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right) dx dz = 0 \end{aligned}$$

oder

$$X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0. \quad (3a)$$

Analog folgt für die Y - und Z -Richtung:

$$Y + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xg}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad (3b)$$

$$Z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3c)$$

Zu dem Drehmoment um die X -Achse tragen bei die Kräfte

$$\tau_{yz} dx dz \quad \text{und} \quad \tau_{zy} dx dy$$

mit den Hebelarmen dy bzw. dz .

Die entsprechenden Momente

$$\tau_{yz} dx dz \quad \text{und} \quad \tau_{zy} dx dy dz$$

sollen einander aufheben, d. h. es muß sein

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (4a)$$

Analog gelten für die Y - und Z -Achse

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (4b, 4c)$$

Durch die Beziehungen 4a, b, c werden die den Spannungszustand bestimmenden Größen auf sechs zurückgeführt:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \underline{\tau_x}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \underline{\tau_y}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \underline{\tau_z},$$

für die wir die Gleichungen 3a, b, c nochmals anschreiben:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + X = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + Y = 0, \quad (5b)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + Z = 0. \quad (5c)$$

Zwischen den sechs Spannungskomponenten

$$\tau_x, \quad \tau_y, \quad \tau_z, \quad \sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \sigma_z$$

bestehen also die drei Gleichungen 5a, b, c. Zur vollständigen eindeutigen Bestimmung der Komponenten ist erforderlich, daß wir sie auf drei Größen zurückführen. Nach Einsetzen in die drei Differentialgleichungen 5a, b, c treten in diesen dann nur noch drei abhängige Variable auf, deren Bestimmung dann eindeutig möglich ist.

II. Die drei Größen, auf die wir die Spannungskomponenten zurückführen, sind die elastischen Verschiebungen ξ , η , ζ eines Körperpunktes xyz .

Es soll also der Punkt xyz durch die elastische Deformation übergehen in

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta.$$

Daneben betrachten wir noch einen Punkt

$$x + dx, \quad y, \quad z,$$

der durch die elastische Verschiebung übergeht in

$$x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx, \quad y + \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx, \quad z + \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx.$$

Wir haben hier also die kleinen Änderungen der Verschiebungen ξ , η , ζ berücksichtigt, die der Verschiedenheit der Punkte x , y , z und $x + dx$, y , z entsprechen.

Wir erkennen: durch die Deformation ist die Strecke dx übergegangen in $dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$; d. h. die spezifische Dehnung in der x -Richtung findet sich zu

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\text{Dehnung}}{\text{ursprüngliche Länge}}. \quad (6a)$$

Analog ergeben sich:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (6b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (6c)$$

Hier fügen wir noch den Ausdruck für die spezifische kubische Dehnung

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

ein.

Neben den spezifischen Dehnungen ε , die von den Normalspannungen σ herrühren, haben wir noch die Änderungen γ der Kantenwinkel des Parallelepipeds $dx dy dz$ zu ermitteln, die von den Schubspannungen τ herrühren.

Um z. B. die Änderung des rechten Winkels BCA (siehe Fig. 258) zwischen dx und dz zu finden, bemerken wir, daß

sich die Punkte *A* bzw. *B* in der Richtung *dz* bzw. *dx* verschieben um:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} dx \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} dz.$$

Die gesamte Winkeländerung (Schiebung) ist demnach

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (7a)$$

Analog findet man

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad (7b)$$

$$\gamma_{yx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}. \quad (7c)$$

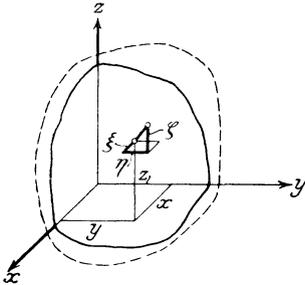


Fig. 257. Definition der elastischen Verschiebungen ξ , η , ζ .

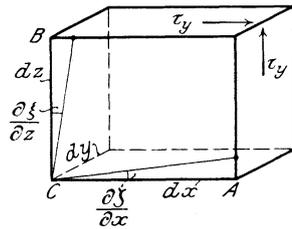


Fig. 258. Zusammenhang zwischen Schiebung und Schubspannung.

III. Die bisherigen Betrachtungen sind rein geometrischer Natur und von irgendwelchen Festsetzungen über die physikalische Beschaffenheit des Körpers unabhängig. Setzen wir nun voraus, daß der Körper dem Hookeschen Elastizitätsgesetz gehorcht, so haben wir zunächst, wenn der Schubelastizitätsmodul des Körperstoffes G ist, als Zusammenhang zwischen den Schubspannungen τ und den Winkeländerungen γ die Proportionalität dieser Größen auszusprechen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_z}{G} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_x}{G} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_y}{G} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8a, b, c) \quad]^{110)}$$

Für die Normalspannungen σ und die spezifischen Dehnungen ε liefert das Hookesche Gesetz die Zusammenhänge:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{mE}{m+1} \left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{mE}{m+1} \left(\varepsilon_y + \frac{e}{m-2} \right), \\ \sigma_z &= \frac{mE}{m+1} \left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9a, b, c) \quad (110)$$

wo E den Elastizitätsmodul und $\frac{1}{m}$ die Poissonsche Konstante

$$\frac{\text{Querdehnung}}{\text{Längsdehnung}}$$

bedeutet. Beachtet man noch die Beziehung zwischen Schubmodul und Elastizitätsmodul:

$$G = \frac{mE}{2(m+1)} \quad (110), \quad (10)$$

so resultieren mit (6 a, b, c)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right), \\ \sigma_y &= 2G \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2} \right), \\ \sigma_z &= 2G \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11a, b, c)$$

Führen wir jetzt, wie angekündigt, die Gleichungen (7) und (11) in die Gleichungen (5) ein, so entspringt nach einigen Umformungen und nach Einführung des Laplaceschen Operators

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

der Ansatz:

$$A\xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0, \quad (12a, b, c)$$

$$A\eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0,$$

$$A\zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0, \quad e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Dies sind die partiellen Differentialgleichungen der Elastizitätslehre. Sie sind linear mit konstanten Koeffizienten und von der zweiten Ordnung.

§ 98. Ermittlung des räumlichen Spannungszustandes und der Oberflächenbedingungen elastischer Probleme.

In § 97 war das Raumelement $d\tau = dx dy dz$ aus einem Körper herausgegrenzt, dessen elastisches Verhalten zu untersuchen war. Über diesen Körper haben wir bisher nur die eine Voraussetzung gemacht, daß der Stoff, aus dem er bestand, dem Hookeschen Gesetze gehorcht, und wir haben, im Zusammenhang hiermit, die drei elastischen Konstanten E, G, m eingeführt, die untereinander durch die Gleichung

$$G = \frac{m E}{2(m + 1)} \quad (1)$$

verknüpft waren.

Über die Gestalt des Körpers haben wir bisher nichts vorausgesetzt. Auch haben wir bisher die Kräfte außer Betracht gelassen, die an seiner äußeren Begrenzung auftreten, und die offenbar ebenso als Ursachen der elastischen Deformation auftreten wie die Größen X, Y, Z der Gleichung (12) § 97.

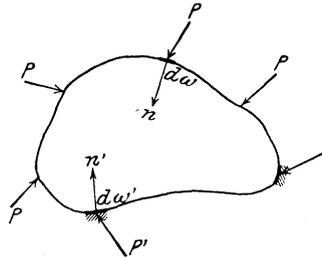


Fig. 259. Oberflächenkräfte an einem Körper.

Wir wollen nunmehr Ansätze finden, die einen Zusammenhang zwischen den äußeren Kräften und den sechs inneren Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ liefern. Zunächst seien die äußeren Kräfte für jedes Flächenelement $d\omega$ durch das Zeichen P in kg/qcm gegeben (Fig. 259). Unter diese äußeren Kräfte rechnen wir auch die sogenannten Auflagerreaktionen P' , die durch die P hervorgerufen werden. Alle Kräfte P und P' müssen miteinander im Gleichgewicht sein, d. h. es muß gelten:

$$\left. \begin{aligned} \int (X d\omega + X' d\omega') &= 0, \\ \int (Y d\omega + Y' d\omega') &= 0, \\ \int (Z d\omega + Z' d\omega') &= 0 \\ \text{und} \quad \int \{(y_0 Z - z_0 Y) d\omega + (y_0' Z' - z_0' Y') d\omega'\} &= 0, \\ \int \{(z_0 X - x_0 Z) d\omega + (z_0' X' - x_0' Z') d\omega'\} &= 0, \\ \int \{(x_0 Y - y_0 X) d\omega + (x_0' Y' - y_0' X') d\omega'\} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wo XYZ bzw. $X'Y'Z'$ die Komponenten von P bzw. P' bedeuten, während $x_0y_0z_0$ und $x'_0y'_0z'_0$ die Koordinaten der zugehörigen auf der Oberfläche gelegenen Angriffspunkte sind. Die Integrationen beziehen sich auf die ganze Oberfläche.

Genügen diese Gleichungen, um alle $X'Y'Z'$ zu ermitteln, so nennt man das Problem äußerlich statisch bestimmt.

Jedenfalls setzen wir nunmehr voraus, daß wir die P und P' bzw. deren Komponenten für die ganze Oberfläche kennen; wir benutzen im folgenden dann nur noch die Buchstaben P und X, Y, Z , indem wir keinen Unterschied zwischen P und P' mehr machen.

Nunmehr kehren wir zu unserem räumlichen Spannungszustand zurück, indem wir von dem Raumelement $= d\tau dx dy dz$ nur das in Fig. 260 gezeichnete Tetraeder $OABC$ betrachten. Die an den Seitendreiecken OBC, OCA, OAB wirkenden Spannungen sind uns bekannt, so daß wir die am Tetraeder in den Achsenrichtungen wirkenden Kräfte ermitteln können:

$$\left. \begin{aligned} X\text{-Richtung: } & \frac{1}{2}(dy dz \sigma_x + dz dx \tau_z + dx dy \tau_y) = k_x, \\ Y\text{-Richtung: } & \frac{1}{2}(dz dx \sigma_y + dx dy \tau_x + dy dz \tau_z) = k_y, \\ Z\text{-Richtung: } & \frac{1}{2}(dx dy \sigma_z + dy dz \tau_y + dz dx \tau_x) = k_z. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Diesen drei Kräften hält an der Tetraederseite ABC eine Kraft K das Gleichgewicht, die wir uns von einer gleichgerichteten über ABC gleichmäßig verteilten Spannung p hervorgerufen denken. Wir haben nach dieser Vorstellung:

$$K = p \cdot AABC.$$

Die Komponenten dieser Kraft nach den Koordinatenachsen müssen, da Gleichgewicht herrschen soll, die Werte haben:

$$\left. \begin{aligned} K \cdot \cos(kx) &= k_x, \\ K \cdot \cos(ky) &= k_y, \\ K \cdot \cos(kz) &= k_z. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

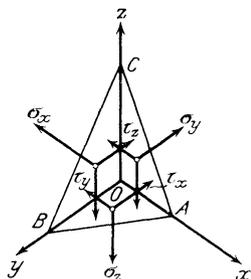


Fig. 260. Spannungen am Elementartetraeder.

Ferner gilt aber, wenn n die nach außen gerichtete Normale des Dreiecks ABC bedeutet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} dy dz &= \cos(nx) AABC \\ \frac{1}{2} dz dx &= \cos(ny) AABC \\ \frac{1}{2} dx dy &= \cos(nz) AABC. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Setzt man jetzt (5) in (6) und (6) und (7) in (4) ein, so entspringt, wenn man noch die Richtung von K mit der Richtung von p gleichsetzt:

$$\left. \begin{aligned} p \cos(p x) &= \sigma_x \cdot \cos(n x) + \tau_z \cdot \cos(n y) + \tau_y \cdot \cos(n z), \\ p \cos(p y) &= \sigma_y \cdot \cos(n y) + \tau_x \cdot \cos(n z) + \tau_z \cdot \cos(n x), \\ p \cos(p z) &= \sigma_z \cdot \cos(n z) + \tau_y \cdot \cos(n x) + \tau_x \cdot \cos(n y), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dieses Gleichungssystem dient als Ausgangspunkt für die im Innern des Körpers zu definierenden Hauptspannungen, des Spannungsellipsoides usw., worauf wir hier nicht weiter eingehen.

Geht man aber mit dem Tetraeder an die Oberfläche des Körpers, so daß das ΔABC in diese hineinfällt, so müssen, damit auch hier Gleichgewicht herrscht, die Komponenten $p \cos(p x)$, $p \cos(p y)$, $p \cos(p z)$ mit den an der betreffenden Stelle vorgegebenen Komponenten der äußeren Kraft XYZ übereinstimmen:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sigma_x \cos(n x) + \tau_z \cos(n y) + \tau_y \cos(n z) \\ Y &= \sigma_y \cos(n y) + \tau_x \cos(n z) + \tau_z \cos(n x) \\ Z &= \sigma_z \cos(n z) + \tau_y \cos(n x) + \tau_x \cos(n y) \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

wo die Kosinus durch die Richtung der örtlichen Oberflächennormale gegen die Koordinatenachsen gegeben sind.

Es sind also bei der Betrachtung elastischer Probleme stets die Gleichungen (12 a, b, c) § 97 mit den Gleichungen (9) § 98 im Verein zu behandeln.

Die Oberflächenbedingungen kommen sowohl bei elastischen Bewegungsaufgaben wie auch bei Gleichgewichtsaufgaben vor. Den Bewegungsaufgaben allein sind die Anfangsbedingungen eigentümlich, die im allgemeinen die Verschiebungen ξ , η , ζ und die Verschiebungsgeschwindigkeiten

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

zur Zeit $t = 0$ als Ortsfunktionen (nur x , y , z enthaltend) gegeben voraussetzen.

§ 99. Erzwungene gedämpfte Schwingungen von Stäben^{110a)}.

Zur Aufstellung der Differentialgleichung für die erzwungenen gedämpften Stabschwingungen gelangt man nach Ansatz

$$\rho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2 \rho q b \frac{\partial y}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p \cos \omega t + q \sin \omega t \quad (1)$$

durch Hinzufügung des Dämpfungsgliedes

$$2 \varrho q b \frac{\partial y}{\partial t} \tag{2}$$

und der beanspruchenden Stabbelastung

$$p \cos \omega t + q \sin \omega t, \tag{3}$$

welche wir als einfache periodische Funktion der Zeit annehmen, zur Differentialgleichung (14) des § 75.

In der Differentialgleichung (1) haben alle Glieder die Dimensionen Kraft:Länge; dementsprechend stellen auf der rechten Seite von (1) die Größen p und q die Stabbelastung auf die Längeneinheit dar.

Um zu einem Lösungsansatz zu kommen, ist es zunächst notwendig, die Stabbelastungen p und q nach den Vorschriften von § 77, Anm. 89 nach den Normalfunktionen des Stabes zu entwickeln. Wir erhalten dadurch den Ansatz

$$p = \sum p_j N_j \left(\frac{m_j x}{l} \right); \quad q = \sum q_j N_j \left(\frac{m_j x}{l} \right), \tag{4}$$

wo die Größen p_j und q_j als Integrale

$$p_j = \frac{p}{l} \int_0^l N_j \left(\frac{m_j x}{l} \right) dx; \quad q_j = \frac{q}{l} \int_0^l N_j \left(\frac{m_j x}{l} \right) dx \tag{5}$$

berechnet werden. Hiermit kann man als Lösungsansatz für die Stabauslenkung y die Eigenfunktionsentwicklung

$$y = \cos \omega t \sum a_j N_j + \sin \omega t \sum b_j N_j \tag{6}$$

ansetzen, die nach Vornahme der nötigen Differentiationen gemäß

$$\left. \begin{aligned} \varrho q \ddot{y} &= -\varrho q \omega^2 \cos \omega t \sum a_j N_j - \varrho q \omega^2 \sin \omega t \sum b_j N_j \\ 2 \varrho q b \dot{y} &= -2 \varrho q b \omega \sin \omega t \sum a_j N_j + 2 \varrho q b \omega \cos \omega t \sum b_j N_j \\ EJ y'''' &= \frac{EJ}{l^4} \cos \omega t \sum a_j m_j^4 N_j + \frac{EJ}{l^4} \sin \omega t \sum b_j m_j^4 N_j \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

die einzelnen Posten der linken Seite der Differentialgleichung (1) zu berechnen gestattet. In diesen Ansätzen bezeichnen a_j und b_j unbekannte Entwicklungsbeiwerte, für deren Berechnung die Abgleichung von (1) nach Einsetzung von (6) und (7) die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} -\varrho q \omega^2 \sum a_j N_j + 2 \varrho q b \omega \sum b_j N_j + \frac{EJ}{l^4} \sum a_j m_j^4 N_j &= \sum p_j N_j \\ -\varrho q \omega^2 \sum b_j N_j - 2 \varrho q b \omega \sum a_j N_j + \frac{EJ}{l^4} \sum b_j m_j^4 N_j &= \sum q_j N_j \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

liefert. Hier können nach Forthebung der Normalfunktionen N_j die unbekanntenen Beiwerte a_j und b_j berechnet werden. Sie finden sich gemäß

$$\left. \begin{aligned} a_j &= \frac{p_j \left(m_j^4 \frac{EJ}{l^4} - \rho q \omega^2 \right) - q_j 2 \rho q b \omega}{\left(m_j^4 \frac{EJ}{l^4} - \rho q \omega^2 \right)^2 + (2 \rho q b \omega)^2} \\ b &= \frac{p_j 2 \rho q b \omega + q_j \left(m_j^4 \frac{EJ}{l^4} - \rho q \omega^2 \right)}{\left(m_j^4 \frac{EJ}{l^4} - \rho q \omega^2 \right)^2 + (2 \rho q b \omega)^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und liefern nach einigen Umformungen und Zusammenziehungen für jeden Eigenton der Ordnung j eine Stabauslenkungsamplitude

$$A_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2} = \frac{\sqrt{p_j^2 + q_j^2}}{\sqrt{\left(m_j^4 \frac{EJ}{l^4} - \rho q \omega^2 \right)^2 + (2 \rho q \omega)^2}}. \quad (10)$$

Die Gesamtstabauslenkung aber setzt sich hiernach zusammen als eine Reihe

$$y = \sum A_j \cos(\omega t + \beta_j), \quad (11)$$

welche angibt, wie die einzelnen Töne des Stabes an der Gesamtschwingung beteiligt sind. Aus der Gestalt der einzelnen Glieder dieser Entwicklung sieht man ohne weiteres, daß derjenige Ton den größten Beitrag zur Stabauslenkung liefert (die Erörterung der Phasenverschiebung β_j unterlassen wir), bei welchem die Nennerwurzel in (10) möglichst klein wird. Offensichtlich haben wir hier das Ergebnis der allgemeinen Resonanztheorie^{110b)} vor uns, nach welchem das Zusammentreffen einer Erregungsfrequenz mit einer Eigenfrequenz zu Größtwerten der Schwingungsamplitude Anlaß gibt. Nach einem bekannten Satze der Schwingungslehre wird die Amplitude des Schwingungsanteils

$$A_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \quad (12)$$

ein Maximum annehmen, wenn die Resonanzbedingung

$$\rho q \omega^2 = m_j^4 \frac{EJ}{l^4} - 2 b^2 \rho q \quad (13)$$

erfüllt ist. Dann nimmt dies Maximum den Betrag

$$A_{j \max} = \frac{\sqrt{p_j^2 + q_j^2}}{2 \rho q b \lambda_j} \quad (14)$$

an, wo nach

$$\lambda_j^2 = \frac{m_j^4 EJ}{l^4 \varrho q} - b^2 \quad (1.5)$$

λ_j die gedämpfte freie Frequenz des Stabes bedeutet.

In § 129 werden die gedämpften erzwungenen Stabschwingungen nochmals nach der Integralgleichungstheorie behandelt.

§ 100. Schwingungen einer kreisförmigen Platte nach Kirchhoff.

Die in § 125, III aufgestellte Differentialgleichung der freien Schwingungen einer Platte der Dicke $2h$, des Elastizitätsmoduls E und der Poissonschen Konstante σ

$$\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

wird, im Falle die äußere Begrenzung ein Kreis vom Radius R ist, durch den Übergang zu Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (2)$$

umgeformt in

$$\Delta \Delta w + k^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

wo Δ den Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ und k^4 die Abkürzung $k^4 = \frac{3 \varrho \nu^2}{Eh^2}$ bedeutet.

Versuchen wir nun den Partikularansatz

$$w = P(r) f(\varphi) T \quad \text{mit} \quad f(\varphi) = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi, \quad (4)$$

wo n als eine ganze Zahl zu wählen ist, da $f(\varphi)$ die Periode 2π besitzen muß, so geht (4) über in die beiden Differentialgleichungen

$$\left(\Delta_0 - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\Delta_0 - \frac{n^2}{r^2} \right) P - \lambda^2 k^4 P = 0 \quad \text{und} \quad T'' + \lambda^2 T = 0, \quad (5)$$

wo Δ_0 den Operator $\Delta_0 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ bedeutet.

Hiernach wird T proportional mit $A' \cos \lambda t + B' \sin \lambda t$, während P der Differentialgleichung

$$(\Delta + \lambda k^2)(\Delta - \lambda k^2) P = 0 \quad (6)$$

zu genügen hat, wo $\Delta = \Delta_0 - \frac{n^2}{r^2}$ zu setzen ist.

Da nun die beiden Operationen $\Delta + \lambda K^2$ und $\Delta - \lambda K^2$ nacheinander ausgeübt werden können, wovon man sich durch eine kurze Rechnung überzeugt, so wird (5) erfüllt durch jede Funktion, die einer der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} + \left(k^2 \lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) P = 0 \quad (7)$$

oder

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2 \lambda \right) P = 0 \quad (8)$$

genügt. Die erste ist uns bereits bekannt nach § 79 als die Differentialgleichung der Besselschen Funktion n -ter Ordnung

$$P_1 = J_n(k\sqrt{\lambda}r), \quad (9)$$

während (8) die gleiche Funktion, jedoch mit imaginärem Argument $ik\sqrt{\lambda}r$ bestimmt nach

$$P_2 = J_n(ik\sqrt{\lambda}r). \quad (10)$$

Allgemein gilt also mit vorläufig unbekanntenen Konstanten a_n und b_n

$$P_n = a_n J_n(k\sqrt{\lambda}r) + b_n J_n(ik\sqrt{\lambda}r). \quad (11)$$

Zu jeder ganzen Zahl n gehört eine solche Funktion und demnach ein Anteil der Durchbiegung w der Platte nach

$$w_n = \sum [a_n J_n(k\sqrt{\lambda}r) + b_n J_n(ik\sqrt{\lambda}r)] [A_n' \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi] [A_n' \cos \lambda t + B_n' \sin \lambda t]. \quad (12)$$

Setzt man hier

$$\frac{B_n}{A_n} = \operatorname{tg} \alpha_n, \quad \frac{B_n'}{A_n'} = \operatorname{tg} \beta_n, \quad \frac{l_n}{a_n} = \sigma_n \quad (13)$$

und

$$A_n A_n' a_n = C_n, \quad (14)$$

so erhält man den einzelnen Anteil der Durchbiegung nach

$$W_n = C_n [J_n(k\sqrt{\lambda}r) + \zeta_n J_n(ik\sqrt{\lambda}r)] \cos(n\varphi - \alpha_n) \cos(\lambda t - \beta_n) \quad (15)$$

und die Gesamtdurchbiegung durch die Reihe

$$W = \sum w_n. \quad (16)$$

Zur Ermittlung der Größen λ und σ_n sind jetzt die Grenzbedingungen, 1. und 2., die im § 125, III. entwickelt werden,

heranzuziehen. Zunächst formt man sie auf Polarkoordinaten um und spezialisiert sie für den Rand der Platte

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{2-\nu}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{3-\nu}{r^3} w \right) \right]_{r=R} = 0 \\ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]_{r=R} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Führt man für w den Ansatz

$$W_n = C_n P_n \cos(n\varphi - \alpha_n) (\cos \lambda t - \beta_n) \quad (18)$$

ein, so findet sich als Periodengleichung der Verein der Ansätze

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d}{dr} \left(P_n'' + \frac{1}{r} P_n' \right) - n^2 \left(\frac{2-\nu}{R^2} P_n' - \frac{3-\nu}{R^2} P_n \right) \right]_{r=R} = 0 \\ \left[P_n'' + \nu \left(\frac{1}{R} P_n' - \frac{n^2}{R^2} P_n \right) \right]_{r=R} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Diese liefern, nachdem (11) eingesetzt ist,

$$\left. \begin{aligned} \frac{n^2(\nu-1) \{ k \sqrt{\lambda} R J_n'(k \sqrt{\lambda} R) - J_n(k \sqrt{\lambda} R) \}}{n^2(\nu-1) \{ i k \sqrt{\lambda} R J_n'(i k \sqrt{\lambda} R) - J_n(i k \sqrt{\lambda} R) \}} \\ - \frac{k^3 \lambda^2 \sqrt{\lambda} R^3 J_n'(k \sqrt{\lambda} R) + i k^3 \lambda^2 \sqrt{\lambda} R^3 J_n'(i k \sqrt{\lambda} R)}{k^3 \lambda^2 \sqrt{\lambda} R^3 J_n'(k \sqrt{\lambda} R) - J_n(k \sqrt{\lambda} R)} \\ = \frac{(\nu-1) \{ k \sqrt{\lambda} R J_n'(k \sqrt{\lambda} R) - n^2 J_n(k \sqrt{\lambda} R) \} - k^2 \lambda R^2 J_n(k \sqrt{\lambda} R)}{(\nu-1) \{ i k \sqrt{\lambda} R J_n'(i k \sqrt{\lambda} R) - n^2 J_n(i k \sqrt{\lambda} R) \} + k^2 \lambda R^2 J_n(i k \sqrt{\lambda} R)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Bestimmung von λ . Für jeden Wert von n ergibt sich eine unendliche Reihe von $\lambda_{n,j}$ -Werten. Für $n=0$ nimmt (20) die einfache Gestalt an:

$$2(1-\nu) + i k \sqrt{\lambda} R \frac{J_0(i k \sqrt{\lambda} R)}{J_0'(i k \sqrt{\lambda} R)} + k \sqrt{\lambda} R \frac{J_0(k \sqrt{\lambda} R)}{J_0'(k \sqrt{\lambda} R)}. \quad (21)$$

Die Frequenzen $\lambda_{n,j}$ bestimmen die Schwingungsperioden der Platte

$$T_{n,j} = \frac{2\pi}{\lambda_{n,j}}. \quad (22)$$

Um aber die unbestimmten C , α und β in (15) zu bestimmen, muß auf die Anfangsbedingungen

$$w = F(r, \varphi); \quad \frac{\partial w}{\partial t} = f(r, \varphi) \quad \text{für } t = 0 \quad (23)$$

zurückgegriffen und das Verfahren der Fourier-Entwicklung benutzt werden wie beim Beispiel der runden Membrane § 79. Entsprechend der runden Membrane gibt es auch bei der kreisförmigen Platte ein aus Radian

$$\cos(n\varphi - \alpha_n) = 0 \tag{24}$$

und Kreisen

$$J_n(k\sqrt{\lambda}r) + J_n(ik\sqrt{\lambda}r) = 0 \tag{25}$$

bestehendes Knotenliniensystem, wie man durch Nullsetzen von W_n in (15) findet.

Die so möglichen Klangfiguren sind von Kirchhoff in zwei berühmten Arbeiten¹¹¹⁾ untersucht worden. Seine Berechnungen schließen ab mit einer Tabelle der Tonhöhen für die verschiedenen Klangfiguren. Allgemein gilt für die Kreisfrequenz der Schwingung der Ansatz

$$\lambda = 3,29 \frac{h}{R^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \zeta, \tag{26}$$

wo h die halbe Plattendicke bedeutet und für ζ je nach der Klangfigur ein aus der nachstehenden Tabelle zu entnehmender Wert einzusetzen ist.

$\frac{n}{j}$	0	1	2	3	4	5
0			1,00	2,32	4,05	6,20
1	1,61	3,70	6,40	9,64	13,39	17,63
2	6,96	10,84	15,30	20,32		
3	15,90					

Hier bedeutet n die Zahl der Knotendurchmesser, j die Zahl der Knotenkreise.

Ferner hat Kirchhoff die Radian der Knotenkreise berechnet, die für die entsprechenden derartigen Klangfiguren in der Tabelle

$\frac{n}{j}$	0	1	2	3	4	5
1	0,681	0,781	0,822	0,845	0,861	0,873
2	0,392	0,500	0,560	0,604		
	0,842	0,871	0,887	0,900		
3	0,257					
	0,591					
	0,894					

im Verhältnis zum Scheibenradius zusammengestellt sind.

§ 101. Schwingungen kreisförmiger Platten mit punktförmigen Randmassen.

Zur Untersuchung der Schwingungen kreisförmiger Platten mit punktförmigen Randmassen geht man aus von der Vorstellung, daß zunächst die Masse der Platte außer Betracht bleiben kann. Dann hat man aus der Differentialgleichung der mit Masse behafteten Platte (s. § 100) das Beschleunigungsglied, welches die Dichte enthält, zu streichen, und erhält als Differentialgleichung der masselosen Platte den Ansatz

$$\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \Delta \Delta w = 0. \quad (1)$$

Hier bedeutet h die halbe Dicke der Platte, E den Elastizitätsmodul und ν den Koeffizienten der Querkontraktion, während für den Operator Δ zu setzen ist:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1a)$$

Die Differentialgleichung (1) wird befriedigt durch jeden Ansatz der Gestalt

$$w = f(r) \sin k\varphi \sin \lambda_0 t, \quad (1b)$$

sofern man die Funktion $f(r)$ gleichsetzt mit

$$f(r) = Ar^k + Br^{-k} + Cr^{2+k} + Dr^{2+k}. \quad (2)$$

Setzt man voraus, daß die Platte in der Mitte keine Bohrung hat, so muß wegen der Endlichkeit der Lösung für $r = 0$ sein $B = D = 0$, also gelten

$$f(r) = Ar^k + Cr^{k+2}. \quad (3)$$

Die übrigbleibenden Integrationskonstanten A und C sowie die Frequenz λ_0 im Ansatz (1b) sind vermöge der Randbedingungen zu ermitteln. Zur Gewinnung der letzteren haben wir den äußeren Rand der Platte zu betrachten und hier das von den inneren Spannungen der Platte herrührende Moment M_r und die Schubkraft S mit den entsprechenden, von den punktförmigen Randmassen herrührenden Größen gleichzusetzen. Aus der Elastizitätstheorie¹¹²⁾ ergibt sich, daß das Moment der Radialspannungen ausgedrückt wird durch

$$M_r = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\}, \quad (4)$$

während die Schubkraft sich schreibt:

$$S = V + \frac{\partial M_r}{r \partial \varphi}, \quad (5)$$

wo die Zeichen V und M_r als Abkürzungen zu verstehen sind für

$$V = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \quad (6)$$

und

$$M_r = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \quad (7)$$

Bei punktförmigen Randmassen ist deren äußeres Moment O , also lautet die erste Randbedingung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (8)$$

Die Schubkraft dagegen wird gleich der Massentätigkeit der Randpunkte zu setzen sein gemäß

$$S = \frac{Nm\ddot{w}}{2\pi R}, \quad (9)$$

wo N die Zahl der Punkte der Masse m und $2R$ den Plattendurchmesser bedeutet. Ferner bedeutet

$$\ddot{w} = -\lambda_0^2 f(r) \sin k\varphi \sin \lambda_0 t \quad (10)$$

die Beschleunigung eines Plattenpunktes quer zur Plattenebene.

Aus (8) (erste Randbedingung) folgt Formel

$$Ak(k-1)(1-\nu) + CR^2(k+2)[k(1-\nu) + 1 + \nu] = 0, \quad (11)$$

aus (9), (10) sowie (5), (6), (7) folgt die zweite Randbedingung

$$A \left\{ \frac{k^2(k-1)}{1+\nu^2} p^2 - R^2 \lambda_0^2 \right\} + CR^2 \left\{ \frac{k(k-1)[k(1-\nu) - 4]}{1-\nu^2} p^2 - R^2 \lambda_0^2 \right\}, \quad (12)$$

wo als Abkürzung zu verstehen ist:

$$p = \frac{4\pi Eh^3}{3Nm}. \quad (12a)$$

Durch Auflösung von (11) und (12) nach λ_0^2 (bei Elimination von $\frac{C}{A} R^2$) folgt:

$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{R^2 (1 - \nu) [k(2 - \nu) + 1 - \nu]}{p^2 k^2 (k - 1) (3k + 3 + \nu)}. \quad (13)$$

Dieser Ansatz gibt also die Eigenfrequenzen einer masselosen Platte mit punktförmigen Randmassen bei Knotendurchmesser-schwingungen wieder.

Nunmehr betrachten wir die Platte als mit Masse behaftet und denken uns die Randmassen fort. Dann haben wir die bekannten Kirchhoffschen Plattenschwingungen mit Knotendurchmessern zu berechnen gemäß

$$\frac{1}{\lambda_k^2} = \frac{R^4 R^4 \varrho}{4 \pi^2 \beta_k^2 h^2 E}, \quad (14)$$

wo die β_k die Werte haben für:

$$\left. \begin{array}{cccc} k = & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \beta_k = & 0,51 & 1,18 & 2,06 & 3,16 \end{array} \right\} \quad (15)$$

Insofern es sich nun bei (13) und (15) um die Schwingungen von Systemen verschiedener Massen, aber gleicher elastischer Eigenschaften handelt, ist die Anwendung des Dunkerleyschen Prinzips^{112a)} gestattet, so daß man durch Addition von (13) und (14) das reziproke Frequenzquadrat $1:\lambda^2$ der Platte mit Eigenmasse und Randmassen erhält gemäß

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} &= \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_k^2} \\ &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left\{ 1 + \frac{3 \pi \beta_k^2 N m}{\varrho R^2 h} \frac{(1 + \nu) [k(2 - \nu) + 1 + \nu]}{k^2 (k - 1) (3k + 3 + \nu)} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Setzt man nun noch die Summe der Randmassen

$$N m = M_R$$

und die Plattenmasse

$$2 \pi R^2 h \varrho = M_S, \quad (17)$$

so erhält man schließlich als Ergebnis:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_k^2} \left\{ 1 + \frac{6 \pi^2 \beta_k^2}{k^2} \cdot \frac{M_R}{M_S} \cdot \frac{(1 + \nu) [k(2 - \nu) + 1 + \nu]}{k^2 (k - 1) (3k + 3 + \nu)} \right\}, \quad (18)$$

wo die Frequenz der Platte mit Randmassen bezogen ist auf

die Kirchhoffsche Frequenz und das Massenverhältnis $\frac{M_R}{M_S}$, auch durch das $G_R:G_S$ -Verhältnis ersetzt werden kann.

Durch einen Versuch wurde der Ansatz (18) geprüft an einer Platte von $2R = 30$ cm, $2h = 0,35$ cm, aus Stahl mit $\nu = 0,3$. Die Kirchhoffsche Frequenz für $k = 2$ war 232 pro sec, das Plattengewicht 1,96 kg. Die Randmassen waren durch kleine am Rande der Platte angeschraubte Eisenklötzchen von je 40 g Gewicht ausgeführt. Es wurden die Tonhöhen der Platte mit 48, 32, 16 Klötzchen bestimmt; die Messung ergab 128, 143, 173 Schwingungen in der Sekunde, während die Rechnung nach (18) die Beträge 125, 142, 171 lieferte.

§ 102. Schallbewegungen in einem unbegrenzt ausgedehnten elastischen Medium. Longitudinale und transversale Wellen.

Sehen wir vom Einfluß der Schwere oder anderer an der Masse haftender Kräfte, mit Ausnahme der Massenbeschleunigungskraft, ab, so haben wir in den Gleichungen (12) § 97 in X, Y, Z nur die Komponenten der letzteren:

$$-\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2}, \quad -\mu \frac{d^2 \eta}{dt^2}, \quad -\mu \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$$

zu berücksichtigen, wodurch die Differentialgleichungen entspringen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial \xi} &= \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \\ \Delta \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial \eta} &= \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \\ \Delta \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial \zeta} &= \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Da der Körper unbegrenzt ist, brauchen wir auf die Oberflächenbedingungen keine Rücksicht zu nehmen.

I. Zunächst prüfen wir, ob eine ebene Bewegung in der x -Richtung möglich ist, die gekennzeichnet ist durch den Ansatz:

$$\xi = F(x, t), \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0. \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) reduzieren sich dann auf:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

bzw.

$$\frac{2(m-1)}{m-2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Versucht man hier ξ als Produkt einer Funktion von x in einer Funktion t darzustellen:

$$\xi = \xi_0 X \cdot T,$$

so ergeben sich mit einer unbestimmt bleibenden Konstanten k^2 folgende „gewöhnliche“ Differentialgleichungen für X und T :

$$\left. \begin{aligned} \frac{2(m-1)}{m-2} X'' + k^2 X &= 0, \\ \frac{\mu}{G} T'' + k^2 T &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

deren partikuläre Lösungen sind:

$$\left. \begin{aligned} X &= \cos \frac{kx}{\sqrt{\frac{2(m-1)}{m-2}}} \quad \text{oder} \quad \sin \frac{kx}{\sqrt{\frac{2(m-1)}{m-2}}}, \\ T &= \cos \frac{kt}{\sqrt{\frac{\mu}{G}}} \quad \text{oder} \quad \sin \frac{kt}{\sqrt{\frac{\mu}{G}}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Mithin hat man in dem Ansatz:

$$\xi_0 X T = \xi_0 \cos k \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2(m-1)}{m-2}}} - \frac{t}{\sqrt{\frac{\mu}{G}}} \right) \quad (6)$$

eine Lösung, die zwei Paare möglicher partikulärer Ausdrücke von (5) umfaßt, womit wir uns hier begnügen. Führen wir jetzt im Ansatz (6) die Abkürzungen ein:

$$\frac{k}{\sqrt{\frac{2(m-1)}{m-2}}} = \frac{2\pi}{\lambda_0}; \quad \frac{k}{\sqrt{\frac{\mu}{G}}} = \frac{2\pi}{\tau_0}, \quad (7)$$

so wird:

$$\xi = \xi_0 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_0} - \frac{t}{\tau_0} \right). \quad (8)$$

Die beiden neuen Konstanten λ_0 und τ_0 unterliegen der Bedingung:

$$\frac{\lambda_0}{\tau_0} = \sqrt{\frac{2(m-1)G}{(m-2)\mu}} = V, \quad (9)$$

wie sich durch Division der beiden Gleichungen (7) ergibt. Setzt man (9) in (8) ein, so handelt es sich um den Verlauf der Funktion

$$\cos \frac{2\pi}{\tau_0} \left(\frac{x}{V} - t \right).$$

Die Werte dieser Funktion reproduzieren sich offenbar dann, wenn $\frac{x}{V} - t$ ein ganzzahliges Vielfaches von τ_0 wird:

$$\frac{x}{V} - t = n \tau_0, \tag{10}$$

woraus sich ergibt:

$$x = n \tau_0 V + t V = n \lambda_0 + t V, \tag{11}$$

d. h. zu einer gegebenen Zeit t befinden sich alle Punkte, die voneinander um die Strecke λ_0 abstehen, in demselben Schwingungszustand. Man nennt λ_0 die Wellenlänge.

Man kann aber (10) auch nach t auflösen:

$$t = \frac{x}{V} - n \tau_0, \tag{12}$$

d. h. in einem gegebenen Punkte x treten nach Verlauf ganzer Zeiträume τ_0 dieselben Schwingungszustände ein. Man nennt τ_0 die Schwingungsdauer. Das Verhältnis $V = \frac{\lambda_0}{\tau_0}$ heißt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, weil gewissermaßen ein zur Zeit t an der Stelle x eingetretener Zustand während der Zeit τ_0 bis zur Stelle $x + \lambda_0$ weiter läuft.

Der bisher von uns untersuchte Ansatz $\xi = F(x, t)$, der sich als mögliche Lösung herausgestellt hat, wird als longitudinale Wellenbewegung bezeichnet, weil die Schwingungsrichtung ξ mit der Fortpflanzungsrichtung x zusammenfällt.

II. Wir erörtern jetzt noch den Ansatz

$$\xi = 0; \quad \eta = F(x, t); \quad \zeta = 0. \tag{13}$$

Dieser unterscheidet sich von dem vorigen Ansatz (2) dadurch, daß wir nur Schwingungen η senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung voraussetzen. Setzt man (13) in die Differentialgleichungen (1) ein, so ergibt sich erstlich

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

und mithin als Differentialgleichung für η

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Dieser Gleichung genügt der zu (6) analoge partikuläre Ansatz

$$\eta = \eta_0 \cos k \left(x - \frac{t}{\sqrt{\frac{\mu}{G}}} \right), \quad (16)$$

der wiederum zur Definition einer Schwingungsdauer τ_0 und einer Wellenlänge λ_0 führt. Das Verhältnis dieser

$$\frac{\lambda_0}{\tau_0} = V = \sqrt{\frac{\mu}{G}} \quad (17)$$

wird aber kleiner als im Falle der longitudinalen Bewegung. Man nennt den Ansatz (16) eine transversale Wellenbewegung. Wir merken noch an, daß die Longitudinalwellen mit Verdichtungen und Verdünnungen des schwingenden Mediums verbunden sind, entsprechend dem Ausdruck für die Volumenänderung

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{2\pi \xi_0}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_0} - \frac{t}{\tau_0} \right), \quad (18)$$

während die transversalen Bewegungen entsprechend

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

kompansionslos vor sich gehen.

III. Will man einen der behandelten Bewegungsvorgänge (z. B. eine Transversalbewegung) einem gegebenen Anfangszustand anpassen, so hat man η als Reihe wie folgt anzusetzen:

$$\eta = \sum A_k \cos k \left(x - \frac{t}{\sqrt{\frac{\mu}{G}}} - q_k \right) \quad (20)$$

und hat die Größen $A_k \cos q_k$ und $A_k \sin q_k$ analog § 72 durch die Gleichungen:

$$[\eta]_{t=0} = g(x); \quad \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{t=0} = h(x) \quad (21)$$

als Fourier — Koeffizienten zu bestimmen.

Eine andere Form der Lösung für die Differentialgleichung einer ebenen Welle wird später bei Gelegenheit der elektromagnetischen Wellenbewegungen im § 116 gegeben werden.

§ 103. Radiale Formänderungen und Schwingungen einer Kugel.

Setzen wir bei einer Kugel nur solche Kräfte an den einzelnen Masselementen angreifend voraus, deren Richtung durch den Kugelmittelpunkt geht und deren Größe nur abhängig ist von dem Abstand des von ihr erfaßten Elementes vom Kugelmittelpunkt, so können die Kugelpunkte sich nur auf ihren Radien verschieben, und die Verschiebungen können nur von r abhängen. Unter diesen Umständen bleibt ein Raumelement der Kugel $dx dy dz$ bei der Formänderung sich selbst ähnlich und ähnlich liegend, und die Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ sind den Koordinaten $x y z$ proportional:

$$\xi = \varepsilon x, \quad \eta = \varepsilon y, \quad \zeta = \varepsilon z. \quad (1)$$

Bezeichnet man die Verschiebung eines Punktes auf seinem Radius mit ϱ , so ist

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \varepsilon \cdot r. \quad (2)$$

Man erkennt also

$$\varepsilon = \frac{\varrho}{r} \quad (3)$$

als die spezifische radiale Dehnung¹¹³).

Wir suchen jetzt die Ansätze (1), (2), (3) in die Gleichungen (12) § 97 einzuführen.

Erstlich bilden wir die Größen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \varepsilon + x \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \varepsilon + \frac{x^2}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = x \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = x \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{xz}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r},$$

und analog:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{yx}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \varepsilon + \frac{y^2}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{yz}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r};$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{zx}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{zy}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \varepsilon + \frac{z^2}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}.$$

aus denen sich die spezifische Volumänderung

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 3\varepsilon + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 3\varepsilon + r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}$$

ergibt.

Ferner ergibt die Bildung der zweiten Differentialquotienten die Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi &= \frac{4x}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + x \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} = \frac{\partial e}{\partial x}, \\ \Delta \eta &= \frac{4y}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + y \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} = \frac{\partial e}{\partial y}, \\ \Delta \zeta &= \frac{4z}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + z \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} = \frac{\partial e}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Gleichungen (12) § 89 nehmen mit den Resultaten (4) nunmehr die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{4x}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + x \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right) \left(1 + \frac{m}{m-2} \right) + \frac{X}{G} &= 0, \\ \left(\frac{4y}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + y \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right) \left(1 + \frac{m}{m-2} \right) + \frac{Y}{G} &= 0, \\ \left(\frac{4z}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + z \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right) \left(1 + \frac{m}{m-2} \right) + \frac{Z}{G} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$$

und addiert, so erhält man eine einzige Gleichung

$$\left(4 \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right) \frac{2(m-1)}{m-2} + \frac{K}{G} = 0, \quad (6)$$

wo

$$K = \frac{1}{r} (Xx + Yy + Zz)$$

die radial wirkende Kraft bedeutet, die wir jetzt als aus einer die Masse angreifenden Kraft k und einer von der Beschleunigung herrührenden Kraft $-\mu r \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$ zusammengesetzt betrachten.

$$2G \left(4 \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right) \frac{m-1}{m-2} + k = \mu r \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Zu dieser Gleichung für ε kommt noch die Oberflächenbedingung hinzu, die aus der Gleichung (9) § 89 zu entwickeln ist.

Zu diesem Zweck gehen wir auf die Ansätze (11) § 97 für $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ und (8) für τ_x, τ_y, τ_z zurück. Wir finden:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{m-2} \left\{ (m+1)\varepsilon + \left[r + (m-2) \frac{x^2}{r} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right\}, \\ \sigma_y &= \frac{2G}{m-2} \left\{ (m+1)\varepsilon + \left[r + (m-2) \frac{y^2}{r} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right\}, \\ \sigma_z &= \frac{2G}{m-2} \left\{ (m+1)\varepsilon + \left[r + (m-2) \frac{z^2}{r} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right\}, \\ \tau_x &= 2G \frac{yz}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}, \\ \tau_y &= 2G \frac{zx}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}, \\ \tau_z &= 2G \frac{xy}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Mit diesen Ausdrücken geht man in die Gleichungen (9) § 98 ein und hat jetzt zu berücksichtigen, daß die in den Formeln vorkommenden Winkel $(nx), (ny), (nz)$ mit den Winkeln des Radius r gegen die Koordinatenachsen identisch sind. Wir können also schreiben:

$$\cos(nx) = \frac{x}{r}; \quad \cos(ny) = \frac{y}{r}; \quad \cos(nz) = \frac{z}{r} \quad (9)$$

Da aber nach unseren Voraussetzungen die Richtung der äußeren Kraft, deren Komponenten X, Y, Z sind, in den Radius fällt, so kann man die Gleichungen (9) § 98 der Reihe nach mit $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ multiplizieren und addieren, wodurch eine einzige Gleichung entspringt:

$$P = \frac{2G}{m-2} \left\{ (m+1)\varepsilon + (m-1)r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right\}_{r=r_1}^{r=r_2}. \quad (10)$$

Hier bedeutet P die äußere auf die Kugeloberfläche wirkende Normalkraft, und der Ansatz verlangt, daß ε , wenn es als Funktion von r und t vermöge (7) gefunden ist, an der Oberfläche (d. h. für $r = r_1$ und $r = r_2$) die Gleichung (10) zu erfüllen hat.

Beispiel 1. Die Kugel sei eine Vollkugel: $r_1 = 0$. Auf der äußeren Oberfläche laste der Druck $-p$ (kg/qcm); an Massenhaftende Kräfte kommen nicht vor ($k = 0$), und es werde der Gleichgewichtszustand betrachtet ($\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = 0$). Dann liefert (7) den Ansatz:

$$4 \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} = 0 \tag{11}$$

mit dem allgemeinen Integral

$$\varepsilon = C_1 + \frac{C_2}{3 r^3}. \tag{12}$$

Hier muß $C_2 = 0$ sein, weil sonst für $r = 0$ (im Kugelmittelpunkt) $\varepsilon = \infty$ würde.

Setzt man dann

$$\varepsilon = C_1$$

in (10) ein, so folgt

$$-p = \frac{2 G}{m - 2} (m + 1) C_1$$

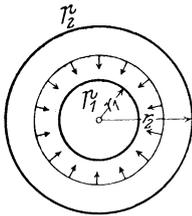
und

$$C_1 = \frac{-p (m - 2)}{2 (m + 1) G},$$

also

$$\varepsilon = \frac{-p (m - 2)}{2 (m + 1) G}. \tag{13}$$

Fig. 261. Radiale Beanspruchung einer Kugel.



Die Formänderung besteht also in diesem Fall in einer längs des Radius konstanten spezifischen Verkürzung des Abstandes der einzelnen Punkte vom Kugelmittelpunkt. Und zwar ist die Verkürzung nur von den elastischen Konstanten des Material'es und vom Druck p abhängig.

Beispiel 2. Ist die Kugel eine Hohlkugel nach Fig. 261, so ist der allgemeine Ansatz

$$\varepsilon = C_1 + \frac{C_2}{3 r^3} \tag{14}$$

in Gleichung (10) einzuführen, wodurch 2 Gleichungen zur Bestimmung von C_1 und C_2 erhalten werden. Die Berechnung der Konstanten ist leicht und soll daher nicht ausgeführt werden.

Beispiel 3. Freie Schwingungen der Kugel. Die Schwingungen der Kugel sind frei, wenn die Kraft k in Gleichung (7)

und die äußere Kraft P in Gleichung (10) nicht vorhanden sind. Es gilt dann für ε die partielle Differentialgleichung:

$$\mu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = 2G \frac{m-1}{m-2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right). \quad (15)$$

Eine hieraus etwa gefundene Lösung muß an der Oberfläche der Kugel bei $r = r_1$ und $r = r_2$ die Gleichung erfüllen:

$$(m+1)\varepsilon + (m-1)r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0. \quad (16)$$

In Gleichung (15) schreiben wir zunächst abkürzend

$$\frac{2G}{\mu} \cdot \frac{m-1}{m-2} = a^2 \quad (17)$$

und versuchen, ob ε durch einen partikulären Ansatz der Form

$$\varepsilon = B \cdot T \quad (18)$$

gefunden werden kann, bei welchem R nur r und T nur enthält. Durch Einsetzen in (15) erhält man:

$$RT'' = a^2 \left(R''T + \frac{4}{r} R'T \right). \quad (19)$$

woraus sich nach Division mit RT zwei Ansätze

$$T'' + k^2 T = 0 \quad (20a)$$

$$R'' + \frac{4}{r} R' + \frac{k^2}{a^2} R = 0 \quad (20b)$$

darbieten, wo k eine noch zu bestimmende Konstante ist.

Das allgemeine Integral von (20a) findet sich leicht mit

$$T = A \cos kt + B \sin kt. \quad (21)$$

Für (20b), welches eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, bilden wir die Frobeniussche Normalform¹¹⁴), indem wir statt 4 allgemeiner h setzen:

$$r^2 R'' + r \cdot h R' + r^2 \frac{k^2}{a^2} R = 0,$$

aus der wir das Koeffizientensystem

$$\begin{aligned} p_{20} &= 1 & p_{21} &= 0 \dots \\ p_{10} &= 4 & p_{11} &= 0 \dots \\ p_{00} &= 0 & p_{01} &= 0 & p_{02} &= \frac{k^2}{a^2} \end{aligned}$$

notieren.

Als determinierende Gleichung ergibt sich:

$$f_0(\varrho) = 0 + h\varrho + \varrho(\varrho - 1) = \varrho(\varrho + h - 1) = 0,$$

während sonst noch $f_1(\varrho) = 0$, $f_2(\varrho) = \frac{k^2}{a^2}$ von Wichtigkeit sind; alle höheren $f_i(\varrho)$ sind Null. Die Koeffizienten der Reihenentwicklung, die wir für R suchen, werden nun

$$a_0; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = a_0 \frac{-(k^2 : a^2)}{(\varrho + 2)(\varrho + 1 + h)}; \quad a_3 = 0;$$

$$a_4 = a_0 \frac{(k^2 : a^2)^2}{(\varrho + 2)(\varrho + 4)(\varrho + 1 + h)(\varrho + 3 + h)}; \quad a_5 = 0 \dots,$$

mit denen der allgemeine Reihenansatz:

$$R = r^\varrho \sum a_r r^r$$

für $\varrho = 0$ und $\varrho = -h + 1$ (Lösungen der determinierenden Gleichung) zwei Reihen liefert:

$$R = R^{(1)} = a_0 \left(1 - \frac{(k^2 : a^2) r^2}{2(h+1)} + \frac{(k^2 : a^2)^2 r^4}{2 \cdot 4(h+1)(h+3)} - \frac{(k^2 : a^2)^3 r^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(h+1)(h+3)(h+5)} + \dots \right)$$

und

$$R = R^{(2)} r^{-h+1} = a_0 r^{-h+1} \left(1 - \frac{(k^2 : a^2) r^2}{2(-h+3)} + \frac{(k^2 : a^2)^2 r^4}{2 \cdot 4(-h+3)(-h+5)} - \frac{(k^2 : a^2)^3 r^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(-h+3)(-h+5)(-h+7)} + \dots \right).$$

Jedenfalls kann man für R eine allgemeine Lösung

$$R = C R^{(1)} \begin{pmatrix} k \\ a \end{pmatrix} r + \frac{D}{r^3} R^{(2)} \begin{pmatrix} k \\ a \end{pmatrix} r \tag{22}$$

ansetzen.

Das Produkt von (21) und (22) liefert jetzt einen partikulären Ansatz für ε , in welchem nur noch über die Zahl k und die unbestimmten Konstanten $A B C D$ Entscheidung zu treffen ist.

Da es möglicherweise mehrere Werte von k geben kann, die zulässig sind, so hängen wir den Index n an und setzen eine allgemeinere Lösung für ε an durch die Summe:

$$\varepsilon = \sum_n \left\{ A_n \cos k_n t + B_n \sin k_n t \right\} \left\{ C_n R^{(1)}\left(\frac{k_n r}{a}\right) + \frac{D_n}{r^3} R^{(2)}\left(\frac{k_n r}{a}\right) \right\}. \quad (23)$$

Hier ist zunächst die Bemerkung zu machen, daß im Falle der Vollkugel alle $D_n = 0$ zu setzen sind, weil sonst für $r = 0$ die spezifische Dehnung im Mittelpunkt der Kugel ∞ werden würde; ist hingegen die Hohlkugel zu betrachten, dann muß der ganze Ansatz (23) weiter behandelt werden. Da das Prinzipielle der weiteren Entwicklung an der Vollkugel gezeigt werden kann, beschränken wir uns auf diese und suchen nun mit der Entwicklung (23) der Oberflächenbedingung

$$(m + 1)\varepsilon + (m - 1)r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \quad (24)$$

zu genügen, d. h. wir suchen die Gleichung zu erfüllen

$$\left[(m + 1) R^{(1)}\left(\frac{k_n r}{a}\right) + (m - 1)r \frac{\partial}{\partial r} R^{(1)}\left(\frac{k_n r}{a}\right) \right]_{r=r_2} = 0. \quad (24a)$$

Führt man die vorgeschriebenen Operationen aus, so erhält man die (transzendente) Gleichung mit unendlicher Gliederzahl:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{x_n^2}{2(h+1)} \left(1 + 2 \frac{m-1}{m+1} \right) \\ & + \frac{x_n^4}{2 \cdot 4 \cdot (h+1)(h+3)} \left(1 + 4 \frac{m-1}{m+2} \right) \\ & - \frac{x_n^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (h+1)(h+3)(h+5)} \left(1 + 6 \frac{m-1}{m+1} \right) - \dots = 0, \quad (24b) \end{aligned}$$

die nach $x_n = \frac{r_2 k_n}{a}$ aufzulösen ist, womit die Oberflächenbedingung erfüllt wird. Die Auflösung liefert unendlich viele positive Wurzeln x_n und damit unendlich viele Werte

$$k_n = \frac{x_n a}{r_2},$$

womit dann Ansatz (23) übergeht in:

$$\varepsilon = \sum \left(A_n C_n \cos \frac{x_n a}{r_2} t + B_n C_n \sin \frac{x_n a}{r_2} t \right) R^{(1)}\left(x_n \frac{r}{r_2}\right). \quad (25)$$

Nunmehr sind lediglich noch die Konstanten ($A_n C_n$) und ($B_n C_n$) zu bestimmen mit Hilfe der Anfangsbedingungen. Es handelt sich darum, den Bewegungszustand (25) dem zur Zeit $t = 0$

gegebenen Zustand anzupassen. Der Anfangszustand ist bestimmt, wenn für jeden Kugelpunkt die elastische Verschiebung $r\varepsilon$ und die Verschiebungsgeschwindigkeit $r \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ zur Zeit $t = 0$ als Funktionen $g(r)$ und $h(r)$ gegeben sind.

Dann fließen aus (25) die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} g(r) &= r \cdot \sum (A_n C_n) R^{(1)}\left(x_n \frac{r}{r_2}\right) \\ \text{und} \\ h(r) &= r \cdot \sum (B_n C_n) x_n \frac{a}{r_2} R^{(1)}\left(x_n \frac{r}{r_2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Multipliziert man beide Gleichungen mit dem Differential: $r^3 R^{(1)}\left(x_n \frac{r}{r_2}\right) dr$ und integriert von 0 bis r_2 , so hat man auf den rechten Seiten die Integrale

$$J = \int_0^{r_2} r^4 R^{(1)}\left(x_n \frac{r}{r_2}\right) \cdot R^{(1)}\left(x_n \frac{r_2}{r_2}\right) dr, \quad (27)$$

von denen man beweisen kann, daß sie für $m \geq n$ verschwinden. Sonach kann man gliedweise in (26) die Konstanten berechnen wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} (A_n C_n) &= \frac{\int_0^{r_2} r^3 g(r) R^{(1)}\left(x_n \frac{r}{r_2}\right) dr}{\int_0^{r_2} r^4 \left[R^{(1)}\left(x_n \frac{r}{r_2}\right) \right]^2 dr}, \\ (B_n C_n) &= \frac{\int_0^{r_2} r^3 h(r) R^{(1)}\left(x_n \frac{r}{r_2}\right) dr}{\frac{x_n a}{r_2} \int_0^{r_2} r^4 \left[R^{(1)}\left(x_n \frac{r}{r_2}\right) \right]^2 dr}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Hiermit ist aber ε vollständig in seiner Abhängigkeit von r und t ermittelt; es genügt den Oberflächen- und den Anfangsbedingungen.

Die physikalische Bedeutung des Ansatzes (25) ist dabei die, daß die Bewegung aus einer Übereinanderlagerung von Schwingungen oder Tönen besteht. Der einzelne Ton ist charakterisiert durch die Größe k_n , welche der Periode T_n der Schwingung umgekehrt proportional ist:

$$\frac{k_n}{2\pi} = \frac{1}{T_n} \quad (29)$$

Die Gleichung (24) oder (24a) bzw. (24b) heißt deshalb die Periodengleichung. Die Schwingungszahl Z_n des Tones wird geliefert durch die Beziehung:

$$T_n = \frac{k_n}{2\pi} = \frac{1}{Z_n}. \quad (30)$$

§ 104. Das Ritz-Lorenzsche Verfahren der näherungsweise Lösung von Elastizitätsaufgaben.

I. Bei allen Elastizitätsaufgaben, auch bei solchen, bei denen nur das Gleichgewicht zu untersuchen ist, handelt es sich um die Aufsuchung von Ansätzen für ξ , η , ζ , die 1. die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie befriedigen und 2. die Oberflächen- oder Randbedingungen erfüllen.

In vielen Fällen gehört schon eine beträchtliche mathematische Gewandtheit dazu, Ausdrücke zu finden, die diese beiden Anforderungen genau erfüllen.

II. Die besondere Natur der elastischen Aufgabestellung hat es nun mit sich gebracht, daß wir ein Näherungsverfahren¹¹⁵⁾ besitzen, welches gestattet, auch verwickeltere Aufgaben danach zu behandeln.

Die besondere Natur der elastischen Aufgabestellung (wir sprechen im folgenden nur von Gleichgewichtsaufgaben) ist darin begründet, daß sich die oben entwickelten Differentialgleichungen der Elastizität auch finden lassen aus der Forderung, daß die Formänderungsarbeit eines elastischen Systems ein Minimum sein muß. Wir betrachten hier die Formänderungsarbeit als die Summe der Formänderungsarbeiten der inneren und der äußeren Kräfte.

Die inneren Kräfte ergeben sich aus unseren Spannungskomponenten σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z nebst den zugehörigen spezifischen Formänderungen ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_x , γ_y , γ_z .

Der Spannung σ_x entspricht am Volumelement $dxdydz$ die Kraft $\sigma_x \cdot dydz$. Die Rechtecksseite $dydz$ verschiebt sich

durch die Formänderung um den Betrag $\frac{\partial \xi}{\partial x} dx$, mithin wird die Arbeit geleistet

$$\frac{1}{2} \sigma_x \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy dz = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x d\tau,$$

da wir uns die Spannung σ_x als von Null zum Betrage σ_x anwachsend denken müssen.

In entsprechender Weise ermittelt man die den übrigen fünf Spannungskomponenten entsprechenden Arbeiten und erhält als Formänderungsarbeit der inneren Kräfte am Raumelement $d\tau$:

$$dA_i = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) d\tau. \quad (1)$$

Hierzu hat man die Arbeit der äußeren Kräfte hinzuzufügen, deren Komponenten $X d\xi$, $Y d\eta$, $Z d\zeta$ sind. Die von diesen geleistete Arbeit ist:

$$dA_a = - (X \xi + Y \eta + Z \zeta) d\tau. \quad (2)$$

Als Gesamtarbeit ergibt sich demnach nach Integration über alle Volumenelemente:

$$A = \int \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z - X \xi - Y \eta - Z \zeta) d\tau. \quad (3)$$

Diese Gesamtarbeit soll ein Minimum werden. Durch Einführung der uns bekannten Ausdrücke, durch welche die Spannungen und Dehnungen als Funktionen der Differentialquotienten von ξ , η , ζ nach x , y , z dargestellt werden, geht A in eine Gestalt über, in welcher nur noch ξ , η , ζ , bzw. deren Differentialquotienten vorkommen. Dann ist ein Minimum von A vorhanden, wenn die erste Variation δA von A verschwindet. Wir wollen die Entwicklung der ersten Variation nicht durchführen, sondern lieber sofort das Resultat anschreiben¹¹⁶⁾:

$$\begin{aligned} \delta A = - \int d\tau \left\{ \left(A \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} \right) \delta \xi \right. \\ \left. + \left(A \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} \right) \delta \eta \right. \\ \left. + \left(A \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} \right) \delta \zeta \right\} = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Bei der Willkürlichkeit der Variationen $\delta \xi$, $\delta \eta$, $\delta \zeta$ kann dieser Ansatz aber nur erfüllt werden, wenn die Klammerausdrücke unter dem Integral einzeln verschwinden, d. h. wenn gilt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} &= 0, \\ \Delta \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= 0, \\ \Delta \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Wir haben mithin unsere bekannten Gleichungen der Elastizitätstheorie erhalten.

III. Das nun zu beschreibende Näherungsverfahren knüpft ebenfalls an den Ansatz (3) an, nachdem darin für die Spannungen und Dehnungen deren Ausdrücke in ξ , η , ζ eingeführt sind.

Dann setzt man für letztere Größen folgende Summen an:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^n a_i f_i(x, y, z), \\ \eta &= \sum_{i=1}^n b_i g_i(x, y, z), \\ \zeta &= \sum_{i=1}^n c_i h_i(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

in welchen die a_i, b_i, c_i unbestimmte Konstanten sind, während von den Funktionen f_i, g_i, h_i nur verlangt wird, daß sie die Grenzbedingungen befriedigen.

Nach Einführung von (6) in (3) kann man die dreifache Integration ausführen, worauf die Konstanten a_i, b_i, c_i so zu bestimmen sind, daß A ein Minimum wird. Man hat also das Gleichungssystem aufzulösen:

$$\frac{\partial A}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial b_i} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial c_i} = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

was immer möglich ist, da diese Gleichungen in den a_i, b_i, c_i stets linear sind.

IV. Nach H. Lorenz, Technische Elastizitätslehre 1913, geben wir ein einfaches Beispiel.

In § 26 kann man aus den Gleichungen 3 b, 4, 5, 7, 8 den Ansatz für die Normalspannung ableiten:

$$\sigma = z \frac{M}{J}.$$

Die zugehörige Dehnung ist

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

die Dehnungsarbeit wird

$$dA_i = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{1}{2} z^2 \frac{M^2}{EJ^2}.$$

Multipliziert man hier mit $d\tau = dx df$ und integriert über den ganzen Balken, so erhält man die Biegeungsarbeit der inneren Kräfte. Es bleibt mit

$$J = \int z^2 df$$

übrig

$$A_i = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx.$$

Mit

$$M = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

findet sich hieraus

$$A_i = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Ferner wird die Arbeit der äußeren Kraft

$$A_a = P y_0,$$

wo eine Integration nicht mehr erforderlich ist. Demnach hat man die Gesamtarbeit

$$A = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx - P y_0. \quad (8)$$

Wir setzen jetzt y als Funktion von x an wie folgt:

$$y = a_1 x^2 + a_2 x^3. \quad (9)$$

Der Ansatz genügt den Grenzbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{dy}{dx} = 0 \end{array} \right\} \text{für } x = 0, \text{ d. h. im Eir-} \\ \text{spannungsquerschnitt.}$$

Führen wir nun (9) in (8) ein, so wird

$$A = \frac{EJ}{2} \int_0^l (2a_1 + 6a_2x)^2 dx - P(a_1l^2 + a_2l^3).$$

Die Ausführung der Integration liefert folgenden Ausdruck für die Arbeit:

$$A = EJ(2a_1^2l + 6a_1a_2l^2 + 6a_2^2l^3) - Pa_1l^2 - Pa_2l^3. \quad (10)$$

Damit dieser Ausdruck ein Minimum wird, muß sein¹¹⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial a_1} &= EJ(4a_1l + 6a_2l^2) - Pl^2 = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial a_2} &= EJ(6a_1l^2 + 12a_2l^3) - Pl^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Auflösung von (11) nach a_1 und a_2 ergibt:

$$a_1 = \frac{Pl}{2EJ}, \quad a_2 = -\frac{P}{6EJ},$$

womit wird

$$y = \frac{P}{2EJ} \left(x^2l - \frac{x^3}{3} \right), \quad (12)$$

welches Resultat sich auch durch direkte Integration der Gleichung (7) § 26 ergeben würde.

Zufällig hat hier die Ritzsche Methode ein „genaues“ Resultat geliefert. Im allgemeinen ist dies nicht der Fall. Man erhält ein Näherungsergebnis, welches gegebenenfalls durch Hinzunahme von weiteren Funktionen f_i, g_i, h_i zu verbessern ist.

V. Die Differentialgleichungen der Hydrodynamik.

§ 105. Aufstellung der Eulerschen Grundgleichungen für Flüssigkeiten mit und ohne Reibung.

I. Zur Betrachtung von Flüssigkeitsbewegungen bieten sich von vornherein zwei Methoden dar.

Man kann entweder einen bestimmten Punkt x, y, z des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes ins Auge fassen und die zeitliche Änderung der Strömungsgeschwindigkeit an dieser Stelle verfolgen, oder man kann ein bestimmtes Flüssigkeitsteilchen

mit den Koordinaten x, y, z herausgreifen und dessen Bahn bestimmen.

Die erstere Betrachtungsweise führt zu den hydrodynamischen Differentialgleichungen von Euler und liefert die Komponenten (Fig. 262) der Geschwindigkeit

$$\left. \begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t), \\ v_y &= f_2(x, y, z, t), \\ v_z &= f_3(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

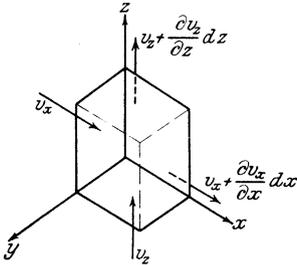


Fig. 262. Geschwindigkeitskomponenten im räumlichen Flüssigkeitselement.

als Funktionen des Ortes x, y, z und der Zeit t .

Die zweite Methode liefert die hydrodynamischen Differentialgleichungen nach Lagrange und bestimmt den jeweiligen Ort x, y, z eines Flüssigkeitselementes

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(a, b, c, t), \\ y &= \varphi_2(a, b, c, t), \\ z &= \varphi_3(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

als Funktion des Ortes a, b, c des Elementes zur Zeit $t = 0$ und der Zeit t .

Die Aufstellung der Eulerschen Gleichungen, die sich zunächst auf Flüssigkeiten ohne Reibung beziehen, knüpft zweckmäßig an das Gleichgewicht der Kräfte an einem Elementarparallelepiped $dx dy dz$ der Flüssigkeit an.

Die an einem Flüssigkeitselement angreifenden Kräfte sind folgende:

1. Die Massenträgheit des Elementes von der Form

$$\rho dx dy dz \frac{dv}{dt},$$

d. h. das Produkt seiner Masse in die Beschleunigung.

2. Die am Volumen haftende äußere Kraft $P dx dy dz$.
3. Die von der Flüssigkeit auf das Element ausgeübten Kräfte.

Bei der Bestimmung der letzteren haben wir zunächst Gelegenheit, zwischen reibungsfreien und reibungsbehafteten Flüssigkeiten zu unterscheiden. Zieht man in einer Flüssigkeit durch einen Punkt A eine Trennungsfäche Fig. 263, so daß zwei Flüssigkeitsteile a und b entstehen, so besteht die gegen-

seitige Einwirkung der beiden Teile zunächst in der Übertragung des Druckes p normal zur Trennungsfäche. Ist der Druck p unabhängig von der Richtung der Flächennormalen, dann ist die Flüssigkeit reibungsfrei. In diesem Falle findet keine Einwirkung zwischen a und b in Richtung der Trennungsfäche statt, auch wenn a und b in der Fläche aneinander gleiten.

Andererseits hat das Vorhandensein einer Wirkung zwischen a und b in Richtung ihrer Trennungsfäche zur Folge, daß man nicht mehr von einem nach allen Richtungen gleichen Drucke p sprechen kann. In diesem Falle liegt eine mit Reibung behaftete Flüssigkeit vor. Über die Art der Reibungswirkung werden wir uns unten weiter verbreiten.

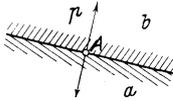


Fig. 263. Gegenseitige Einwirkung zweier Flüssigkeitsteile.

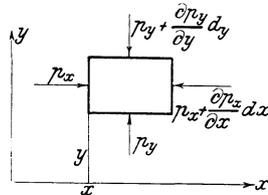


Fig. 264. Abhängigkeit des Druckes vom Ort.

Bei reibungsfreien Flüssigkeiten bleibt also nur der Druck p zur Betrachtung übrig, der natürlich von Ort zu Ort innerhalb der Flüssigkeit verschieden gefunden wird. Nach der Fig. 264 ändert sich der Druck beim Fortschreiten um ∂x in der Richtung der x -Achse um

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz,$$

ist also die vom Druck in der x -Richtung auf das Element ausgeübte Kraft, die sich mit der X -Komponente der Volumkraft $P dx dy dz$ zusammensetzt zu:

$$\left(X - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy dz. \tag{3}$$

Diese resultierende Kraft ist mit der in die x -Richtung fallenden Komponente der Massenträgheit gleichzusetzen:

$$\rho \frac{d^2 x}{dt^2} dx dy dz = \rho \frac{dv_x}{dt} dx dy dz = \left(X - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy dz, \tag{4}$$

woraus sich ergibt:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = \left(X - \frac{\partial p}{\partial x} \right). \tag{5}$$

Hier ist der totale Differentialquotient noch durch seine partiellen auszudrücken:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6)$$

womit sich dann, wenn wir die beiden anderen Koordinatenrichtungen entsprechend behandeln, das System ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= Z - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

II. Zu diesen drei Gleichungen kommt noch die sogenannte **Kontinuitätsgleichung** hinzu, die ebenfalls bereits von Euler aufgestellt worden ist. Diese Gleichung sagt aus, daß bei jedem Raumelement $dx dy dz$ die Differenz zwischen zuströmender und abströmender Flüssigkeitsmenge sich durch eine Änderung der im Element enthaltenen Menge bemerkbar machen muß. In Richtung der x -Achse strömt während der Zeit dt ein:

$$\rho v_x dy dz dt.$$

Er strömt ab

$$\left(\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \right) dy dz dt.$$

In Richtung der x -Achse verliert also das Element die Flüssigkeitsmenge:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Analoge Strömungen finden statt parallel zur y - und zur z -Achse. Die Summe der abströmenden Mengen muß der Mengenänderung im Element gleich sein. Letztere ist:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz.$$

Da es sich um eine Abnahme der Menge handelt, muß $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ negativ sein. Wir haben also

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} dx dy dz dt = - \left(\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

oder

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

Diese Form der Kontinuitätsgleichung gilt für kompressible Flüssigkeiten, bei denen ϱ variabel ist. Ist ϱ unveränderlich, die Flüssigkeit also inkompressibel, so lautet die Kontinuitätsgleichung einfacher:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

Die Gleichungen (7) und (9) lösen im Falle des konstanten ϱ die hydrodynamische Bewegungsaufgabe vollständig im Verein mit den noch später zu erörternden Oberflächen- und Anfangsbedingungen. Im Falle eines veränderlichen ϱ fehlt noch eine Gleichung zur Bestimmung dieser fünften abhängigen Veränderlichen, die wir in der sogenannten Zustandsgleichung

$$f(\varrho, p, T) = 0 \quad (10)$$

gewinnen. Durch diese wird die Dichte ϱ mit dem Druck p und der absoluten Temperatur T an der betrachteten Stelle in Verbindung gebracht, womit die Bewegung der elastischen Flüssigkeiten in das Gebiet der Thermodynamik verwiesen wird. Dann tritt die Temperatur T als sechste Variable auf, deren Verlauf streng genommen unter Zuhilfenahme der Wärmeleitung in Gasen untersucht werden muß. Die dadurch gegebene Verwicklung der Aufgaben fällt fort, wenn man so rasche Bewegungen betrachtet, daß die Wärmeabgabe eines Raumelementes außer Ansatz bleiben kann.

Dann kann man nicht nur von der Wärmeleitung absehen, sondern man ist auch berechtigt, die Umgrenzung des Raumelementes als wärmeundurchlässig anzusehen, d. h. es tritt dann die Zustandsgleichung in der speziellen Form der Adiabate auf, die für elastische Flüssigkeiten, also für Gase lautet:

$$\frac{p}{\varrho^\kappa} = \frac{p_0}{\varrho_0^\kappa}, \quad (11)$$

wo $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen bedeutet¹¹⁸⁾.

III. Es erübrigt jetzt noch, zu untersuchen, ob neben den Verschiebungen des Elementes $dx dy dz$ auch Drehungen möglich sind.

In § 86 hatten wir bereits die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die z -Achse ermittelt:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad (12)$$

der sich die Drehungsgeschwindigkeiten um die anderen Achsen anschließen

$$\left. \begin{aligned} \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Da nun weder die Volumkraft P noch der Druck p ein Moment ausübt, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} = 0. \quad (13)$$

Demnach bleiben die Größen $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ selbst konstant, und sie bleiben Null, wenn sie es zu Anfang der Bewegung waren.

Man nennt die Größen $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ die Wirbelkomponenten. Ihre Unzeränderlichkeit ist eine Folge des Nichtvorhandenseins von Schubkräften in den Begrenzungsflächen des Elementes $dx dy dz$, d. h. sie tritt ein bei reibungsfreien Flüssigkeiten. In letzteren können also Wirbel von selbst weder entstehen noch von selbst verschwinden.

Sind $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ Null, so heißt die Bewegung wirbelfrei. In diesem Falle gilt:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (14)$$

Diesen Ansätzen wird man nach Helmholtz gerecht durch Einführung eines Geschwindigkeitspotentials

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t) \quad (15)$$

derart, daß gilt:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ v_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

womit ersichtlich die Gleichungen (14) erfüllt sind. Setzt man die Ausdrücke (16) in die Kontinuitätsgleichung (9) ein, so entspringt:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (17)$$

durch deren Gestalt sich die Einführung des Ausdrucks Geschwindigkeitspotential aus der Übereinstimmung mit Gl. (6), § 87 erklärt.

IV. Wir verzichten nunmehr auf die Voraussetzung der Reibungsfreiheit und definieren zunächst, welche physikalische Wirkung mit dem Vorhandensein von Reibung unmittelbar verbunden ist.

Strömen zwei Flüssigkeitsschichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 Fig. 265 aneinander hin, so wird bei Vorhandensein von Reibung zwischen den Schichten die schneller fließende eine beschleunigende Kraft auf die langsamer fließende ausüben. Die Größe dieser Kraft, berechnet auf ein Quadratcentimeter der Trennungsfäche, muß nun in Zusammenhang gebracht werden mit den hydrodynamischen Zustandsgrößen: Druck p und Geschwindigkeit v .

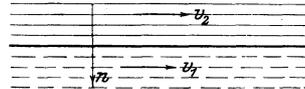


Fig. 265. Zur Definition der Flüssigkeitsreibung.

Dieser Zusammenhang kann nur experimentell bestimmt werden. Man hat gefunden, daß innerhalb gewisser Bereiche von p und v die Kraft vom Druck p unabhängig, dagegen der Geschwindigkeitsdifferenz $v_2 - v_1$ proportional ist. Handelt es sich um sehr kleine Geschwindigkeitsunterschiede dv , dann ist die Flüssigkeitsreibung proportional dem Quergefälle der Geschwindigkeit $\frac{\partial v}{\partial n}$. Man führt als Zähigkeitskoeffizienten den Buchstaben κ ein und hat als Reibungskraft:

$$R = \kappa \frac{\partial v}{\partial n}. \quad (18)$$

Wendet man diesen in seiner Urform $R = \kappa(v_2 - v_1)$ auf Newton zurückgehenden Ansatz auf das Elementarparallelepiped $dx dy dz$ an, so hat man für jedes seiner 6 Begrenzungsrechtecke Reibungskräfte anzunehmen.

Von diesen Reibungskräften hängen die an dem Element $dx dy dz$ angreifenden Spannungskomponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$

ab, in einer Weise, über die verschiedene mit (18) verträgliche Hypothesen möglich sind. Die durch Versuchsergebnisse hinreichend gesicherte Hypothese der Abhängigkeit ist folgende:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p - \frac{2}{3} z \operatorname{div} v + 2z \frac{\partial v_x}{\partial x}; & \tau_x &= z \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \sigma_y &= -p - \frac{2}{3} z \operatorname{div} v + 2z \frac{\partial v_y}{\partial y}; & \tau_y &= z \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \\ \sigma_z &= -p - \frac{2}{3} z \operatorname{div} v + 2z \frac{\partial v_z}{\partial z}; & \tau_z &= z \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Hier ist zur Abkürzung

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

gesetzt, während p den hydraulischen Druck im Flüssigkeitselement bedeutet, der durch

$$p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (20)$$

definiert ist.

Dieses Resultat findet sich durch Addition der drei Gleichungen für die σ . Die Normalspannungen in den Grenzen des Flüssigkeitselementes sind also bei zähen Flüssigkeiten nicht mehr mit dem Druck p identisch, und die Schubspannungen verschwinden nicht.

Die Gewinnung der Bewegungsgleichungen ist nunmehr sehr leicht. Wir haben die Spannungskomponenten (19) nur einzusetzen in die Gleichgewichtsgleichungen 5a, 6, 0 § 97 eines Elementarparallelepipedes, wodurch wir unter Aussonderung der Massenträgheiten $\varrho \frac{dv}{dt}$ aus den Kräften P für inkompressible Flüssigkeiten ($\operatorname{div} v = 0$) erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + z A v_x, \\ \varrho \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + z A v_y, \\ \varrho \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + z A v_z, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

wo A das Zeichen des Differentialparameters (vgl. § 87) ist.

Hierzu tritt noch die Kontinuitätsgleichung im Falle inkompressibler Flüssigkeiten:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

sowie im Falle kompressibler Flüssigkeiten außer der diesen entsprechenden Kontinuitätsgleichung noch die Zustandsgleichung.

§ 106. Die Grenzbedingungen bei hydrodynamischen Aufgaben.

Bei Flüssigkeitsbewegungen kommen der Natur der Sache nach zwei Arten von Grenzflächen vor:

- a) Freie Oberflächen,
- b) Flächen, die Teile fester Körper sind.

Bewegungen, bei denen nur freie Oberflächen vorkommen, sind sehr bekannt. Z. B. ein fallender Tropfen oder ein Weltkörper sind unter diesem Gesichtspunkt zu betrachten.

Für ideale Flüssigkeiten lautet die Grenzbedingung an der freien Oberfläche

$$p = P, \tag{1}$$

d. h. an der freien Oberfläche muß der Flüssigkeitsdruck p dem Druck P der Umgebung gleich sein. Im Weltraum würde $P = 0$, in der Erdatmosphäre dagegen $P = 1$ zu setzen sein.

Für zähe Flüssigkeiten muß an der freien Oberfläche die Resultierende der Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ mit der Resultierenden des Druckes der Umgebung übereinstimmen, d. h. es gelten Gleichungen wie bei den elastischen Körpern:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_z \cos(ny) + \tau_y \cos(nz), \\ Y &= \sigma_y \cos(ny) + \tau_x \cos(nz) + \tau_z \cos(nx), \\ Z &= \sigma_z \cos(nz) + \tau_y \cos(nx) + \tau_x \cos(ny), \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

wo für $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ die durch (19) § 93 gegebenen Werte einzusetzen sind.

Jede Oberfläche (freie und nicht freie) hat eine Gleichung

$$f(x, y, z, t) = 0, \tag{3}$$

in der im allgemeinen die Zeit vorkommt.

Im Falle der freien Oberfläche gibt (3) die mit der Zeit veränderliche Gestalt des Spiegels. Die Form von f liegt zunächst in keinem Augenblick fest und sie muß aus dem ganzen Komplex der Prämissen (insbesondere unter Zuhilfenahme der

hydrodynamischen Differentialgleichungen) bestimmt werden, außerdem aber auch folgendem Ansatz genügen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung sagt aus, daß an der Oberfläche keine Geschwindigkeit relativ und normal zur Fläche existiert, es können nur relative Strömungen in der Fläche stattfinden.

Ist f eine nicht freie Oberfläche, die durch Teile eines starren Körpers gebildet wird, so kann ihre Gleichung ebenfalls die Zeit enthalten. Man hat dann die unfreien Oberflächen als Teile von sich bewegendem starren Körpern zu betrachten. Hierher würden z. B. die Schaufelbegrenzungen in Kreisrädern gehören oder auch die Begrenzungsflächen von Körpern, die sich in der Flüssigkeit ganz oder teilweise eingetaucht bewegen.

Ist f Teil eines unbeweglichen starren Körpers, dann verschwindet in (4) der Differentialquotient $\frac{\partial f}{\partial t}$, und man erhält als Oberflächenbedingung

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Bis auf den Einfluß der Zeit hat bei starren Körpern f eine gegebene Form:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

und es ist im Falle beweglicher Körper der Einfluß der Zeit auf die Konstanten der Flächengleichung zu bestimmen.

Man kann übrigens die Grenzbedingung (4) noch umformen.

Differenziert man nämlich (3) nach der Zeit, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

oder wenn man die Geschwindigkeiten u, v, w eines Punktes der sich bewegendem starren Fläche einführt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Durch Vergleich von (6) und (4) findet man, daß die in Richtung der Normalen n der Fläche f genommene absolute Strömungsgeschwindigkeit

$$v_n = v_x \cos(nx) + v_y \cos(ny) + v_z \cos(nz)$$

der nach derselben Normalen genommenen Geschwindigkeit des Körperpunktes

$$N = u \cos(nx) + v \cos(ny) + w \cos(nz)$$

gleich sein muß:

$$v_n = N. \tag{7}$$

Handelt es sich um die Bewegung von unbegrenzt ausgedehnten Flüssigkeitsmassen, so muß man sich auch das Verhalten der Strömung im Unendlichen klarmachen. Soll im Unendlichen Ruhe herrschen, so heißt dies, daß über eine genügend groß genommene geschlossene Oberfläche hinaus weder im Ganzen noch in einzelnen beliebig kleinen Teilen der Oberfläche o Flüssigkeit gelangen soll. Für diese Bedingung kann man die Formel anschreiben:

$$\int v_n do = 0, \tag{8}$$

wo das Integral über jedes im Unendlichen gelegene Flächenstück genommen werden kann. Es bedeutet $v_n do$ das in der Zeiteinheit durch das Flächenelement do hindurchtretende Flüssigkeitsvolumen.

Die Bedingung (8) ist nicht erfüllbar, wenn sich in der Flüssigkeit ein volumenbeständiger Körper bewegt. Wir betrachten aber nur starre Körper, für welche gilt:

$$dt \int N do = 0. \tag{9}$$

Der Integralwert, mit dt multipliziert, bedeutet das vom Körper während des Zeitraumes dt bestrichene Volumen, vermindert um das freigewordene Volumen; vgl. Fig. 266. Diese Differenz muß aber bei starren Körpern Null sein.

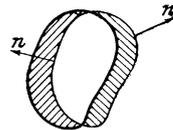


Fig. 266. Zur Definition eines volumbeständigen Körpers.

§ 107. Integration der Eulerschen Gleichungen im Falle einer idealen wirbelfreien inkompressiblen Flüssigkeit.

Wir knüpfen an die Gleichungen (14) bis (17) § 105 an und führen die Komponenten von v ein in die Eulerschen Gleichungen (7).

Man erhält folgende Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} &= X - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hier ist aber

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 = v^2 \quad (2)$$

zu setzen, so daß folgende Gleichungen entstehen:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) &= X, \\ \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) &= Y, \\ \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) &= Z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Es erweisen sich also die Volumkräfte XYZ als Ableitungen nach den Koordinatenachsen von einer einzigen Funktion

$$\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) = -V(x, y, z, t). \quad (4)$$

Die Volumkräfte besitzen also ein Potential.

Führen wir das Kräftepotential in die Gleichungen (3) ein, so erhalten wir im Falle der stationären Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit v von der Zeit unabhängig ist, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ also verschwindet, als ein erstes Integral der Gleichungen, den Ansatz

$$V + p + \frac{1}{2} \rho v^2 = C, \quad (5)$$

welchen wir als Energiegleichung der stationären Bewegung ansprechen. Nach ihr ist die Summe des Kräftepotentials, des Flüssigkeitsdruckes und der kinetischen Energie an einer Raumstelle von Ort und Zeit unabhängig.

Schreibt man die Gleichungen (3) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\rho} (V + p) + \frac{1}{2} v^2 \right\}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\rho} (V + p) + \frac{1}{2} v^2 \right\}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{\rho} (V + p) + \frac{1}{2} v^2 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

so sieht man, daß die zeitlichen Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten in irgendeinem Zeitpunkte von einem Potential

$$\left\{ \frac{1}{\rho} (V + p) + \frac{1}{2} v^2 \right\}$$

ableitbar sind, wenn die Volumkräfte das Potential $-V$ und die Geschwindigkeitskomponenten in dem Zeitpunkte das Potential Φ haben. Damit ist aber folgender wichtiger Satz gewonnen: Ist eine ideale inkompressible Flüssigkeit in irgendeinem Zeitpunkt wirbelfrei, so bleibt sie dies dauernd, wenn sie unter Einfluß von Potentialkräften steht.

§ 108. Dirichlets Untersuchung der Bewegung einer reibungsfreien Flüssigkeit um eine Kugel¹¹⁹⁾.

Eine Kugel vom Radius R befinde sich im Anfangspunkt eines Koordinatensystems x, y, z innerhalb einer reibungsfreien Flüssigkeit der Dichte ρ . Die Kugel sei fest. Die Elemente der Flüssigkeit unterliegen massenproportionalen Kräften P , die vom Ort unabhängig sind, also x, y, z nicht enthalten. Dagegen soll in P und seinen Komponenten X, Y, Z die Zeit vorkommen können. Die Kräfte genügen also dem Potential

$$V = (Xx + Yy + Zz),$$

denn wir haben hieraus:

$$x\text{-Komponente} = \frac{\partial V}{\partial x} = X,$$

$$y\text{-Komponente} = \frac{\partial V}{\partial y} = Y,$$

$$z\text{-Komponente} = \frac{\partial V}{\partial z} = Z.$$

Die Bewegung wird, wenn sie zu irgendeiner Zeit als wirbelfrei angenommen wird, dauernd wirbelfrei sein. Außer-

dem wird sie in großer Entfernung vom Anfangspunkt so stattfinden, also ob die Kugel nicht vorhanden wäre, d. h. die Bewegung ist im Unendlichen in allen Punkten dieselbe. Infolgedessen sind die Differentialquotienten des Flüssigkeitsdruckes p :

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z}$$

im Unendlichen nicht vorhanden, und die Eulerschen Gleichungen reduzieren sich auf:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= X, \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= Y, \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= Z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hieraus ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten im Unendlichen:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{\rho} \int_0^t X dt, & v_y &= \frac{1}{\rho} \int_0^t Y dt, & v_z &= \frac{1}{\rho} \int_0^t Z dt. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha & &= \beta & &= \gamma \end{aligned}$$

Das Nichtvorhandensein von Wirbeln und die Existenz eines Kräftepotentials ergibt nach dem Früheren die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials Φ , welche im ganzen Flüssigkeitsgebiete die Geschwindigkeitskomponenten wie folgt liefert:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ v_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Im Unendlichen hat man speziell aus (2):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \alpha; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \beta; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \gamma. \quad (4)$$

Überall hat Φ der Differentialgleichung zu genügen:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Diese Differentialgleichung formen wir auf Polarkoordinaten r, ϑ, φ um nach den Ansätzen:

$$x = r \cos \vartheta; \quad y = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Im Anschluß an die Entwicklung des § 77 erhalten wir in Polarkoordinaten die Differentialgleichung des Potentials Φ :

$$r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (6)$$

Dieser Gleichung suchen wir zu genügen durch den Ansatz

$$\Phi = R X, \quad (7)$$

in welchem R nur die Variable r , X dagegen ϑ und φ enthalten soll. Die Ausführung der nach (6) erforderlichen Operationen an (7) und Einführung der Ergebnisse in (6) liefert den Ansatz:

$$\frac{r^2 R'' + 2r R'}{R} + \frac{1}{X} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} \right\} = 0. \quad (8)$$

Diese Gleichung zerfällt mit einer Konstanten $n(n+1)$, in welcher n eine ganze Zahl ist, in zwei Gleichungen, nämlich:

$$r^2 R'' + 2r R' - n(n+1)R = 0 \quad (9a)$$

und

$$X n(n+1) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (9b)$$

Die Differentialgleichung (9a) hat, wie man leicht verifiziert, zwei partikuläre Integrale r^n und $\frac{1}{r^{n+1}}$, während (9b) die bekannte Differentialgleichung der Kugelfunktionen ist.

Sind X_n und Y_n zwei Kugelfunktionen von ϑ und φ , welche (9b) befriedigen, so ist

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n X_n + \frac{B_n}{r^{n+1}} Y_n \right) \quad (10)$$

ein Ansatz, der die Differentialgleichung (6) des Potentials Φ befriedigt.

Nunmehr betrachten wir unsere in die Flüssigkeit getauchte Kugel vom Radius R . Sie gibt Anlaß zur Einführung einer Oberflächenbedingung nach § 106 (7). Nach diesem Ansatz

$$v_n = N \quad (11)$$

soll die nach der Flächennormale n genommene Geschwindigkeitskomponente v_n der Flüssigkeit gleich der flächennormal genommene Bewegungsgeschwindigkeit N des betrachteten Oberflächenpunktes sein. Da die Kugel in Ruhe ist, ist $N = 0$. Die Komponente v_n ist aber identisch mit der nach r genommenen Geschwindigkeit der Flüssigkeit, d. h. mit $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$. Wir haben also an der Oberfläche der eingetauchten Kugel ($r = R$) die Bedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \quad (12)$$

Wendet man diese Bedingungen an auf Ansatz (10), so findet sich als Oberflächenbedingung:

$$\sum \left(n A_n R^{n-1} X_n - \frac{(n+1) B_n}{R^{n+2}} Y_n \right) = 0 \quad (13)$$

und hieraus, da jedes Glied einzeln verschwinden muß:

$$Y_n = \frac{A_n}{B_n} \frac{n}{n+1} R^{2n+1} X_n. \quad (14)$$

Hiermit wird aber das Potential Φ :

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n \left(r^n + \frac{n}{n+1} \frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}} \right). \quad (15)$$

Dieser Ansatz muß im Unendlichen die Bedingungen (4) befriedigen, darf also zunächst im Unendlichen nicht unendliche Geschwindigkeiten liefern, d. h. $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ darf nicht unendlich werden. Dies ist aber nur dann möglich, wenn $n = 0$ oder $= 1$ ist; $n = 2$ würde bereits $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ unendlich wachsen lassen. Es vereinfacht sich also (15) auf:

$$\Phi = A_0 X_0 + A_1 X_1 \left(r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right). \quad (16)$$

Nach § 93 ist

$$X_0 = 1 \quad \text{und} \quad X_1 = a \cos \vartheta + b \sin \vartheta \cos \varphi + c \sin \vartheta \sin \varphi.$$

A_0 läßt man als Konstante fort, weil sie wegen der Differentiation zu den Geschwindigkeitskomponenten doch nichts beiträgt, und X_1 multipliziert man mit r und erhält unter Einrechnung von A_1 in die Konstanten a, b, c

$$X_1 r = ax + by + cz$$

oder

$$\Phi = (ax + by + cz) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right). \quad (17)$$

Hieraus ergeben sich im Unendlichen die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= a = \alpha, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= b = \beta, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= c = \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

wo α, β, γ nach (2) gegeben sind. Mithin wird das Potential endgültig:

$$\Phi = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z). \quad (19)$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten in einem beliebigen Raumpunkte x, y, z findet man aus (19):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) - \frac{3x R^3}{2r^5} (\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ v_y &= \beta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) - \frac{3y R^3}{2r^5} (\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ v_z &= \gamma \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) - \frac{3z R^3}{2r^5} (\alpha x + \beta y + \gamma z). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Greifen wir jetzt auf die Gleichungen (3) § 82 zurück, so liefern diese ein erstes Integral:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{p}{\rho} \\ &= \frac{1}{\rho} [C + \int (X dx + Y dy + Z dz)] = \frac{1}{\rho} (C + V). \end{aligned} \quad (22)$$

Hier ist V das Kräftepotential $Xx + Yy + Zz$ und C eine nur die Zeit enthaltende Integrationskonstante. $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ findet sich jetzt aus (19) im Verein mit (2) zu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right) \frac{X \cdot x + Y \cdot y + Z \cdot z}{\rho}, \quad (23)$$

womit sich der Druck p ergibt:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{C}{\rho} - \frac{1}{2\rho} \frac{R^3}{r^3} (Xx + Yy + Zz) - \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (24)$$

An der Oberfläche der Kugel findet sich

$$\frac{p}{\rho} = \frac{C}{\rho} - \frac{1}{2\rho} (Xx + Yy + Zz) - \frac{1}{2} v^2. \quad (25)$$

Multipliziert man p mit dem Oberflächenelement der Kugel $R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ sowie bzw. mit $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta \cdot \cos \varphi$, $\sin \vartheta \sin \varphi$ und integriert über die Kugel, so erhält man die Achsenkomponenten P_x , P_y , P_z der seitens der Kugel auf die Flüssigkeit ausgeübten Gesamtkraft. Zu dieser kann aber C und $\frac{\rho v^2}{2}$ nichts beitragen, weil diese Größen in diametral gegenüberliegenden Punkten der Kugeloberfläche entgegengesetzt gleiche Anteile liefern. Für C erkennt man dies ohne weiteres, für v^2 aus dem Ansatz:

$$v^2 = \frac{9}{4} \left[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2}{R^2} \right],$$

der sich aus (21) ergibt.

Es bleiben also nur folgende Ansätze übrig:

$$P_x = - \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (Xx + Yy + Zz) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

$$P_y = - \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (Xx + Yy + Zz) \sin^2 \vartheta \cos \varphi d\vartheta d\varphi,$$

$$P_z = - \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (Xx + Yy + Zz) \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta d\varphi.$$

Wir führen die P_x betreffende Integration aus, indem wir einsetzen:

$$x = R \cos \vartheta, \quad y = R \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = R \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Dann liefert Xx zum Werte P_x den Beitrag:

$$-\frac{R^3 X}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Um die auf ϑ bezügliche Integration

$$\int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

zu bewerkstelligen, greifen wir auf die Formel Hütte 1908, S. 78 zurück:

$$\int \sin^p x \cos^q x dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p x \cos^{q-2} x dx,$$

welche mit

$$x = \vartheta, \quad p = 1, \quad q = 2$$

liefert:

$$\begin{aligned} \int \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta &= \frac{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{3} + \frac{1}{3} \int \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{3} - \frac{\cos \vartheta}{3}. \end{aligned}$$

Die Integration zwischen 0 und π ergibt

$$\left[\frac{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{3} - \frac{\cos \vartheta}{3} \right]_0^\pi = 0 - 0 - \frac{1}{3}(-1 - 1) = \frac{2}{3}.$$

Es erübrigt jetzt noch, die Integration nach φ auszuführen, welche liefert

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{3} d\varphi = \frac{4}{3} \pi.$$

Also wird $-\frac{2}{3} \pi X R^3$ der von Xx herrührende Anteil zu P_x .

Die Berechnung des Anteils von Yy an P_x führt auf das Integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta d\varphi.$$

Hier ist zunächst das innere Integral

$$\int_0^\pi \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta$$

zu bilden, für welches man auf Grund der gleichen Formel aus der Hütte den Wert:

$$\left[-\frac{\sin \vartheta \cos^2 \vartheta}{3} + \frac{\sin \vartheta}{3} \right]_0^{\pi} = 0$$

erhält. Yy liefert also zu P_x keinen Beitrag, ebensowenig Zz . Es wird also endgültig:

$$P_x = -\frac{2}{3}\pi X R^3.$$

Entsprechend findet man:

$$P_y = -\frac{2}{3}\pi Y R^3$$

und

$$P_z = -\frac{2}{3}\pi Z R^3.$$

Hier erkennt man aus den negativen Vorzeichen, daß wir die seitens der Kugel auf die Flüssigkeit ausgeübte Kraft gefunden haben (wie schon oben vorausgesagt), welche der Richtung der Komponenten X , Y , Z naturgemäß entgegengesetzt ist.

Die mit positivem Vorzeichen versehene Resultante von P_x , P_y , P_z liefert dagegen die auf die Kugel ausgeübte Kraft.

$$\frac{2}{3}\pi R^3 \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Handelt es sich um eine stationäre Flüssigkeitsbewegung, bei welcher X , Y , Z Null sind, so wird die auf die Kugel ausgeübte Kraft ebenfalls Null. Einer stationären, wirbelfreien Bewegung einer reibungsfreien Flüssigkeit setzt demnach eine eingetauchte Kugel keinen Widerstand entgegen.

§ 109. Die Differentialgleichungen der Bewegung inkompressibler Flüssigkeiten von Lagrange.

I. Die Gleichungen von Euler

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

enthalten außer der Zeit t als unabhängige Veränderliche die Koordinaten x, y, z eines Raumpunktes der Flüssigkeit und liefern die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z als Funktionen der Zeit und des Ortes. Sind v_x, v_y, v_z gefunden, so liefert das Differentialgleichungssystem

$$v_x : v_y : v_z = dx : dy : dz$$

die Stromlinien.

Führt man jetzt in (1) sowie in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

statt der Koordinaten eines Raumpunktes x, y, z die Koordinaten a, b, c eines bestimmten Flüssigkeitsteilchens zur Zeit $t = 0$ ein, so erhält man die Differentialgleichungen von Lagrange.

Die Umformung geschieht an Hand der Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial a} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial p}{\partial b} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial p}{\partial c} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c} \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

und liefert:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial a} \\ &= X \frac{\partial x}{\partial a} + Y \frac{\partial y}{\partial a} + Z \frac{\partial z}{\partial a} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial b} \\ &= X \frac{\partial x}{\partial b} + Y \frac{\partial y}{\partial b} + Z \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial c} \\ &= X \frac{\partial x}{\partial c} + Y \frac{\partial y}{\partial c} + Z \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c}. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Die Umrechnung der Kontinuitätsgleichung auf die abhängigen Variablen a, b, c , die wir im einzelnen nicht durchführen wollen, liefert

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 1. \quad (5)$$

Durch das Gleichungssystem (4) und (5) wird die Bahn eines Flüssigkeitsteilchens, welches zur Zeit $t = 0$ sich am Orte a, b, c befand, durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(a, b, c, t) \\ y &= \varphi_2(a, b, c, t) \\ z &= \varphi_3(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

bestimmt, wozu noch eine weitere Gleichung für den Druck kommt:

$$p = \varphi_4(a, b, c, t). \quad (7)$$

II. Die Gleichungen (4) können im Falle der Existenz eines Kräftepotentials

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (8)$$

auf eine einfachere Form gebracht werden, indem man zugleich die linken Seiten umformt.

Es ist

$$\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(v_x \frac{\partial x}{\partial a} \right) - v_x \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(v_x \frac{\partial x}{\partial a} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_x^2}{\partial a}$$

Entsprechend z. B.

$$\frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(v_y \frac{\partial y}{\partial b} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_y^2}{\partial b}.$$

Die Gleichungen (4) werden jetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_x \frac{\partial x}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(v_y \frac{\partial y}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(v_z \frac{\partial z}{\partial a} \right) \\ = -\frac{\partial V}{\partial a} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial a} \end{aligned} \quad (9)$$

nebst zwei analogen Ansätzen. Hier kann man nach t integrieren zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = t$. Zur Zeit $t = 0$

sei die Geschwindigkeit v_0 im Punkte a, b, c , der zur Zeit $t = 0$ mit x, y, z identisch ist. Dann gilt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} \Big|_{t=0} &= 1; & \frac{\partial y}{\partial a} \Big|_{t=0} &= 0; & \frac{\partial z}{\partial a} \Big|_{t=0} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial b} \Big|_{t=0} &= 0; & \frac{\partial y}{\partial b} \Big|_{t=0} &= 1; & \frac{\partial z}{\partial b} \Big|_{t=0} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial c} \Big|_{t=0} &= 0; & \frac{\partial y}{\partial c} \Big|_{t=0} &= 0; & \frac{\partial z}{\partial c} \Big|_{t=0} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Integration liefert, wenn wir

$$U = \int_0^t \left(-V - \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) \partial t$$

setzen:

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial x}{\partial a} + v_y \frac{\partial y}{\partial a} + v_z \frac{\partial z}{\partial a} &= v_{x0} + \frac{\partial U}{\partial a}, \\ v_x \frac{\partial x}{\partial b} + v_y \frac{\partial y}{\partial b} + v_z \frac{\partial z}{\partial b} &= v_{y0} + \frac{\partial U}{\partial b}, \\ v_x \frac{\partial x}{\partial c} + v_y \frac{\partial y}{\partial c} + v_z \frac{\partial z}{\partial c} &= v_{z0} + \frac{\partial U}{\partial c}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Durch diese Gleichungen werden die Geschwindigkeitskomponenten eines Flüssigkeitsteilchens zur Zeit t mit den Komponenten zur Zeit $t = 0$ verbunden.

§ 110. Der Integralsatz von Stokes.

Der Satz von Stokes beschäftigt sich mit der Untersuchung von Linienintegralen, d. h. von Integralen einer Größe P_s , genommen über eine offene oder geschlossene Kurve s (Fig. 267).

Ein solches Integral lautet:

$$\int P_s ds \quad (1)$$

und stellt die Arbeit dar, welche die tangential zur Kurve s gerichtete Kraft P_s bei Umfahrung der Kurve leistet.

Betrachten wir jetzt P_s als die-

Hort. Differentialgleichungen. 2. Aufl.

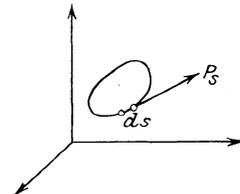


Fig. 267. Zur Definition des Linienintegrals.

jenige Komponente eines Vektors P , die in die Richtung von ds fällt, so kann man das Linienintegral durch die Komponenten X, Y, Z von P ausdrücken;

$$\int_s P_s ds = \int_s X dx + Y dy + Z dz. \quad (2)$$

Wir berechnen nun das Linienintegral für den Fall, daß die Kurve s ein kleines achsenparalleles Rechteck in einer der Koordinatenebenen, z. B. der xz -Ebene, ist. Dann haben wir nach der Fig. 268 als Integralwert:

$$\begin{aligned} Z dz + \left(X + \frac{\partial X}{\partial z} dz \right) dx - \left(Z + \frac{\partial Z}{\partial x} dx \right) dz - X dx \\ = \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dz. \end{aligned}$$

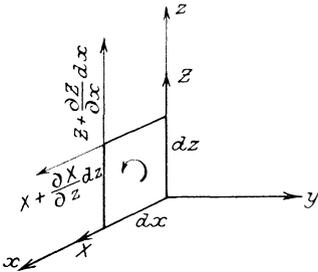


Fig. 268. Integration über den Rand eines Rechtecks.

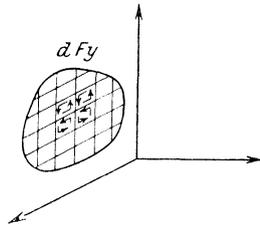


Fig. 269. Integration über eine geschlossene Kurve in einer Koordinatenebene.

Ist das Flächenelement in der xz -Ebene jetzt kein Rechteck $dx dz$, sondern eine beliebig berandete kleine Figur dF_y (Fig. 269), so kann man diese in Rechtecke $dx dz$ auflösen und für jedes dieser Rechtecke das Linienintegral aufstellen. Bildet man die Summe aller dieser Linienintegrale:

$$\sum' \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dz,$$

so ergibt sich das Linienintegral über die Berandung von dF_y , nämlich

$$\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \sum' dx dz = \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dF_y, \quad (3)$$

weil bei der Summation die Seiten der Rechtecke $dx dy$ je zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden, so daß die auf die Rechteckseiten entfallenden Teile der Linien-

integrale sich aufheben und nur die auf die Umgrenzung von dF_y entfallenden Anteile übrigbleiben.

Entsprechend sind nun noch die Linienintegrale für kleine Figuren dF_x und dF_z in der $y z$ - bzw. $x y$ -Ebene

$$\left. \begin{array}{l} \text{mit} \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dF_x \\ \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dF_z \end{array} \right\} \quad (3)$$

anzuschreiben.

Gehen wir jetzt dazu über, das Linienintegral für ein kleines Dreieck $dF = ABC$ zu bilden, welches nach Fig. 270 orientiert ist, so kann man die Integration über den Umfang ABC ersetzen durch die Summe der Integrationen über die drei Dreiecke $dF_x = OABO$, $dF_y = OBCO$, $dF_z = OCAO$, wobei sich die Integrationsanteile längs OA , OB , OC aufheben und nur der Anteil längs ABC übrigbleibt. Als Linienintegral längs ABC haben wir demnach:

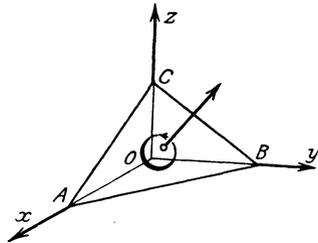


Fig. 270. Linienintegral über den Rand eines Dreiecks.

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dF_x + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dF_y + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dF_z$$

oder mit Einführung der Achsenwinkel der Normale n des Dreiecks ABC

$$\left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(nz) \right\} dF. \quad (4)$$

Da aber die oben entwickelten Ansätze (3) für beliebig gestaltete dF_x , dF_y , dF_z galten, so gilt auch (4) für ein beliebig gestaltetes Element dF .

Haben wir nunmehr eine endliche Fläche F , so kann man diese durch ein Liniensystem nach Fig. 271 in Elemente dF zerlegen. Integrieren wir nun den Ausdruck (4) über die ganze Fläche, so resultiert augenscheinlich als Summe das Randintegral (1) bzw. (2), weil die Integrationsanteile längs der Linien

im Innern von F verschwinden. Wir haben dann endgültig als Ausdruck des Satzes von Stokes:

$$\int_S (X dx + Y dy + Z dz) = \iint_F \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(nz) \right\} dF, \quad (5)$$

womit das Linienintegral (2) in ein Flächenintegral übergeführt ist.

Der Satz (5) gestattet noch eine einfachere Schreibungsart, wenn man beachtet, daß die Ausdrücke

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

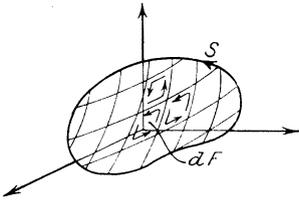


Fig. 271. Linienintegral über eine beliebige Randkurve.

aus den Komponenten X, Y, Z bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ ebenso gebildet sind wie die Wirbelkomponenten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ in § 93 aus den Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z . Demnach kann man die erstgenannten Größen als Komponenten des Wirbels C von P bezeichnen. Man schreibt:

$$C = \text{Wirbel von } P$$

oder unter Benutzung des englischen Wortes für Wirbel:

$$C = \text{curl } \mathfrak{P}$$

und würde haben:

$$\begin{aligned} \iint_F \{ C_x \cos(nx) + C_y \cos(ny) + C_z \cos(nz) \} dF \\ = \int_S (X dx + Y dy + Z dz). \end{aligned} \quad (6)$$

In der Klammer $\{ \}$ steht nun nichts anderes als C_n , die zur Fläche F normale Komponente von C .

Es ergibt sich also als einfachste Form des Satzes von Stokes:

$$\iint_F C_n dF = \int_S P_s ds. \quad (7)$$

Durch diesen Ansatz wird ein Linienintegral in Flächenintegral und umgekehrt umgeformt.

§ 111. Die Sätze von Helmholtz über die Wirbelbewegungen¹²⁰).

I. Wir nehmen jetzt an, daß die Wirbelkomponenten ω_x , ω_y , ω_z zum mindesten in einem Teile der Flüssigkeit nicht verschwinden.

Durch Differentiation an den Ausdrücken (12) § 105 stellen wir fest, daß der Ansatz gilt

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Entsprechend § 90 bezeichnen wir die linke Seite des Ansatzes als Divergenz des Wirbelvektors ω , welche demnach überall verschwindet:

$$\text{Div } \omega = 0. \quad (2)$$

Andererseits kann man auch die Gleichungen (12) § 105 in Vektorform schreiben. Diese Gleichungen sagen nichts anderes aus, als daß der Vektor ω der Wirbel des Vektors v sei. Unter Benutzung des Wortes curl für Wirbel schreibt man demnach:

$$\omega = \text{curl } v. \quad (3)$$

Ansatz (2) kann hiernach auch in die Form gebracht werden:

$$\text{Div curl } v = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung spricht den wichtigen Satz der Vektoranalysis aus: Die Divergenz des Curles eines Vektors ist immer gleich Null.

II. Wir haben also die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen durch zwei Vektoren v und ω gekennzeichnet.

In jedem Punkte der Flüssigkeit sind dadurch zwei Richtungen festgelegt: die Richtung des Geschwindigkeitsvektors und des Wirbelvektors.

Geht man von einem Flüssigkeitspunkt in Richtung eines der Vektoren zum benachbarten Punkt, so erhalten wir zwei Liniensysteme: die Stromlinien und die Wirbellinien.

An ersteren ist in jedem Punkt der Geschwindigkeitsvektor Tangente, an letzteren der Wirbelvektor.

Beide Liniensysteme werden durch die Differentialgleichungssysteme bzw.

$$dx : dy : dz = v_x : v_y : v_z \quad (\text{Stromlinien})$$

und

$$dx : dy : dz = \omega_x : \omega_y : \omega_z \quad (\text{Wirbellinien})$$

bestimmt.

Bringt man an einer Stromlinie S in zwei Punkten P_1 und P_2 , Fig. 272, senkrecht zu ihr zwei Flächenelemente f_1 und f_2 an, so kann man sich durch die Berandung von f_1 alle Stromlinien gelegt und f_2 so gewählt denken, daß seine Berandung von denselben Stromlinien gebildet wird.

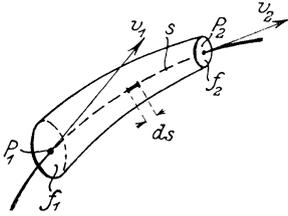


Fig. 272. Zur Definition des Stromfadens.

Den von allen diesen Stromlinien gebildeten röhrenförmigen Bereich nennt man einen **Stromfaden**, dessen Querschnitt an beliebiger Stelle f sei.

Wenden wir jetzt auf das zwischen P_1 und P_2 liegende Stück des Stromfadens den Satz von Gauß (s. § 90) an:

$$\int \operatorname{div} v \, d\tau = \int_{P_1}^{P_2} \operatorname{div} v f \, ds = - \int v_n \, do, \quad (5)$$

wo do das Flächenelement des Stromfadenteiles ist, so reduziert sich das Integral $\int v_n \, do$ auf die von den Endflächen f_1 und f_2 herrührenden Anteile $-v_2 f_2 + v_1 f_1$. Hiermit ergibt sich aber:

$$\int_{P_1}^{P_2} \operatorname{div} v f \, ds = v_2 f_2 - v_1 f_1. \quad (6)$$

Liegt mit $\operatorname{div} v = 0$ eine inkompressible Flüssigkeit vor, so wird hiernach

$$v_2 f_2 = v_1 f_1 = \text{Const}, \quad (7)$$

d. h. alle Querschnitte eines Stromfadens werden in gleichen Zeiten von gleichen Flüssigkeitsmengen vf durchströmt.

Bildet man in analoger Weise zu einer gegebenen Wirbellinie einen Wirbelfaden, so gelangt man, da $\operatorname{div} \omega$ stets Null ist, zu dem Satz:

$$\omega_2 f_2 = \omega_1 f_1 = \text{Const}, \quad (8)$$

d. h. das Wirbelmoment ωf ist längs des ganzen Wirbelfadens konstant.

III. Ziehen wir jetzt in der Flüssigkeit zur Zeit $t = 0$ eine geschlossene Linie S_0 , so werden wir zur Zeit t die Flüssigkeitselemente aufsuchen können, die zur Zeit $t = 0$ die Linie S_0 erfüllten. Sie werden eine Linie S erfüllen. Durch die Linien S_0

und S legen wir Flächen F_0 und F , die zu den Zeiten 0 und t von denselben Flüssigkeitsteilchen erfüllt seien. Bilden wir jetzt das Linienintegral der Geschwindigkeit zur Zeit 0, zu welcher das einzelne Flüssigkeitselement die Koordinaten a, b, c , habe:

$$\int_{S_0} v_{x_0} da + v_{y_0} db + v_{z_0} dc,$$

so liefern die Gleichungen (11) § 97 einen Zusammenhang mit dem Linienintegral der Geschwindigkeit über dieselben Flüssigkeitselemente zur Zeit t . Beide Integrale sind gleich, da

$$\int_{S_0} dU$$

verschwindet.

Nach dem Satz von Stokes folgt aber aus der Gleichheit der Linienintegrale

$$\int_{S_0} v_0 ds_0 = \int_S v ds \tag{9}$$

die Gleichheit der zugehörigen Flächenintegrale

$$\iint_{F_0} \omega_{n_0} dF_0 = \iint_F \omega_n dF, \tag{10}$$

wo

$$\omega = \text{curl } v$$

gilt.

Für ein unendlich kleines Flächenelement f hatten wir das Produkt ωf als Wirbelmoment eines Wirbelfadens bezeichnet.

Wir nennen jetzt

$$\iint_F \omega_n dF \tag{11}$$

das Wirbelmoment der endlichen Fläche F , dessen Konstanz im Verlauf der Bewegung, sofern F immer von denselben Flüssigkeitsteilchen gebildet wird, durch den Ansatz (10) für eine unter Einfluß von Potentialkräften erfolgende Flüssigkeitsbewegung ausgesprochen wird.

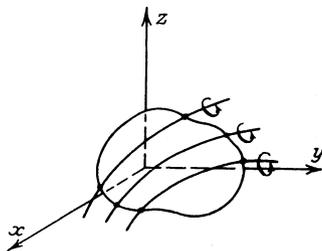


Fig. 273. Von Wirbellinien erfüllte Fläche.

IV. Nehmen wir jetzt an, daß die Fläche F nach Fig. 273 von Wirbellinien gebildet sei, so gibt es keine Wirbelkomponenten ω_n normal zur Fläche, d. h. das Wirbelmoment der Fläche

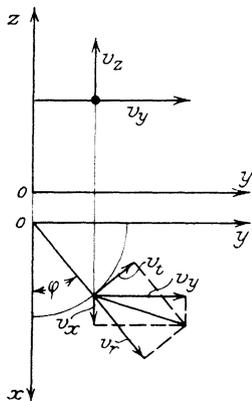
$$\iint_F \omega_n dF = 0.$$

Diese Eigenschaft des Wirbelmomentes einer von Wirbellinien erfüllten Fläche bleibt dauernd erhalten; es kann also niemals eine normal zur Fläche gerichtete Wirbelkomponente entstehen. Dieser Satz gilt für jede irgendwie geartete Fläche F , also auch für einen schmalen Streifen längs einer Wirbellinie. Aus der dauernden Abwesenheit von normalen Wirbelkomponenten zu einem solchen Streifen folgt das dauernde Verbleiben aller Flüssigkeitsteilchen auf der Wirbellinie, sofern sie sich zu irgendeiner Zeit auf derselben befanden.

§ 112. Umformung der Eulerschen Differentialgleichungen auf Zylinderkoordinaten.

I. Die in der Technik verwendeten Flüssigkeitsströmungen verlaufen mehr oder weniger symmetrisch um eine Achse.

Für solche Bewegungen sind die Zylinderkoordinaten r, φ, z statt der Cartesianischen Koordinaten x, y, z zweckmäßig. Gegenstand der Untersuchung sind wieder die Strömungsgeschwindigkeiten (Fig. 274) bzw. deren Komponenten:



- v_r = Radialgeschwindigkeit.
- v_t = Tangentialgeschwindigkeit.
- v_z = Axialgeschwindigkeit.

Für die ersten beiden besteht folgender Zusammenhang mit v_x und v_y :

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_r \cos \varphi - v_t \sin \varphi, \\ v_y &= v_r \sin \varphi + v_t \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Fig. 274. Die Strömungsgeschwindigkeiten in Zylinderkoordinaten.

während v_z ungeändert bleibt.

Durch Differentiation der Formeln (1) nach der Zeit gewinnt man die Beschleunigungen:

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{dv_r}{dt} \cos \varphi - v_r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \frac{dv_t}{dt} \sin \varphi - v_t \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

bzw. mit den Beschleunigungen:

$$v_t = r \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{und} \quad v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_t^2}{r} \right) \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{d(v_t r)}{dt} \sin \varphi \\ \text{und entsprechend:} \\ \frac{dv_y}{dt} &= \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_t^2}{r} \right) \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{d(v_t r)}{dt} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

In gleicher Weise formen wir die in den Eulerschen Gleichungen vorkommenden Komponenten X und Y der äußeren Massenkraft auf eine Radial- und eine Tangentialkomponente R bzw. T um:

$$\left. \begin{aligned} X &= R \cos \varphi - T \sin \varphi, \\ Y &= R \sin \varphi + T \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Schließlich sind die Größen $\frac{\partial p}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ noch durch $\frac{\partial p}{\partial r}$ und $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ auszudrücken:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Aus diesen Ansätzen folgen vermöge der Definition der Zylinderkoordinaten:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}, \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \varphi, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sin \varphi}{r}, & \frac{d \varphi}{d y} &= \frac{\cos \varphi}{r} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

die Transformationsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Gleichungssysteme (2), (3), (6) sind nun in die Eulerschen Gleichungen § 93 einzuführen. Es finden sich zunächst die Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left\{ \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_t^2}{r} \right) \cos q - \frac{1}{r} \frac{d(v_t r)}{dt} \sin q \right\} &= R \cos q - T \sin q \\ &\quad - \frac{\partial p}{\partial r} \cos q + \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\sin q}{r}, \\ \rho \left\{ \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_t^2}{r} \right) \sin q + \frac{1}{r} \frac{d(v_t r)}{dt} \cos q \right\} &= R \sin q + T \cos q \\ &\quad - \frac{\partial p}{\partial r} \sin q - \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\cos q}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Nach Multiplikation mit $\cos q$ und $\sin q$ und Addition erhält man

$$\rho \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_t^2}{r} \right) = R - \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (8)$$

Nach Subtraktion:

$$\rho \cdot \frac{1}{r} \frac{d(v_t r)}{dt} = T - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial q}. \quad (9)$$

Hierzu kommt als dritte Gleichung:

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (10)$$

Die Kontinuitätsgleichung endlich nimmt die Form an:

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial(v_t r)}{\partial r} + \frac{c v_t}{c q} + \frac{\partial(v_z r)}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

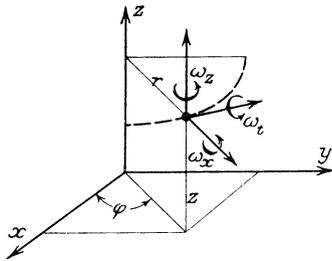


Fig. 275. Die Wirbelkomponenten in Zylinderkoordinaten.

Wir schreiben noch die Wirbelkomponenten für Zylinderkoordinaten an:

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial(v_t r)}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial q} \right), \\ \omega_t &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial q} - \frac{\partial(v_t r)}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Herleitung der Ansätze (12) geht aus von den Wirbelkomponenten in Cartesischen Koordinaten § 105 (12), unter Benutzung der Transformationsformeln (5) dieses Paragraphen.

Die Wirbelkomponenten (12) tragen folgende Benennungen:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \text{Radialwirbel,} \\ \omega_t &= \text{Tangential- oder Ringwirbel,} \\ \omega_z &= \text{Axialwirbel,} \end{aligned}$$

die in positivem Sinn in Fig. 275 gezeichnet sind.

II. Auch in Zylinderkoordinaten lassen sich die Sätze über wirbelfreie und nicht wirbelfreie Bewegungen (vgl. § 107 und 111) aufstellen.

Insbesondere existiert im Falle der wirbelfreien Bewegung ein Geschwindigkeitspotential Φ , welches der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

genügt. Aus Φ leiten sich die drei Geschwindigkeitskomponenten wie folgt ab:

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_t = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (14)$$

Der den Gleichungen (3) § 93 analoge Ansatz lautet:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\varrho} \right) &= R, \\ \varrho \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\varrho} \right) &= T, \\ \varrho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\varrho} \right) &= Z, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

woraus sich wiederum ein Kräftepotential

$$\varrho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\varrho} \right) = -V(r, \varphi, z, t) \quad (16)$$

ergibt.

III. Besonders einfach werden die Differentialgleichungen in Zylinderkoordinaten, wenn es sich um eine achsensymmetrische Flüssigkeitsbewegung handelt. Diese Bewegungsart ist dadurch charakterisiert, daß die Geschwindigkeit und der Druck von der Koordinate φ unabhängig sind, d. h. dadurch, daß

$$\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v_t}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad (11)$$

gilt. Damit nehmen die Gleichungen (8), (9), (10), (11) die Form an:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_t^2}{r} \right) = R - \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (8a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_t}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_t}{\partial z} + \frac{v_r v_t}{r} \right) = T. \quad (9a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = Z - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (10a)$$

$$\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r v_z)}{\partial z} = 0. \quad (11a)$$

Aus diesen Gleichungen ist die Koordinate φ vollständig verschwunden, nur r und z sind als unabhängige Variable übriggeblieben. Offenbar genügt es, wenn man v_r , v_t , v_z , p für die Punkte einer beliebigen durch die Z -Achse gelegten Meridianebene bestimmt. Durch Rotation dieser Meridianebene um die Z -Achse erhält man die Geschwindigkeit und den Druck in allen anderen Raumpunkten.

In jeder Meridianebene bestimmen nun v_r und v_z die Bahnelemente von Kurven C (Fig. 276), durch deren Rotation um die Z -Achse Flächen entstehen, auf denen die Flüssigkeitsbahnen liegen. Letztere sind einander kongruent.

Die Wirbelkomponenten (12) nehmen im Falle der achsensymmetrischen Bewegung die Form an:

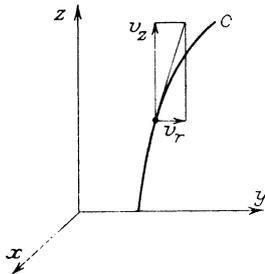


Fig. 276. Stromlinie in der Meridianebene.

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{2r} \frac{\partial(r v_t)}{\partial z}, \\ \omega_t &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \\ \omega_z &= -\frac{1}{2r} \frac{\partial(r v_t)}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

Fragen wir nach einer achsensymmetrischen stationären wirbelfreien Strömung, so sind zunächst die Gleichungen (12a) zu erfüllen durch die Ansätze:

$$v_t = \frac{c}{r}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0,$$

welche die Wirbelkomponenten ω_r , ω_t , ω_z zum Verschwinden bringen. c bedeutet eine Konstante.

Der Gleichung

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

genügt man durch den Ansatz:

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (18)$$

wo Φ eine Funktion von r und z ist. Diese hat noch der Kontinuitätsgleichung (11 a) zu genügen, d. h. dem Ansatz

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)}{\partial z} = 0, \quad (19)$$

woraus sich die partielle Differentialgleichung ergibt:

$$r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (20)$$

Wichtiger als dies Geschwindigkeitspotential Φ ist die sogenannte Stromfunktion Ψ , die wie folgt gewonnen wird. Es ist ersichtlich, daß die Kontinuitätsgleichung (11 a) durch den Ansatz befriedigt wird:

$$r v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad r v_z = - \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (21)$$

Hiernach ist Ψ in Gleichung (17) einzuführen, wodurch sich für Ψ die partielle Differentialgleichung findet:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (22)$$

Jede Funktion Ψ von r und z , welche diese Differentialgleichung befriedigt, ist geeignet, eine achsensymmetrische stationäre wirbelfreie Bewegung darzustellen.

Bildet man das Differential von Ψ :

$$\partial \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = 0,$$

so findet sich unter Einführung von (21):

$$- v_z dr + v_r dz = 0,$$

d. h.

$$\frac{v_z}{v_r} = \frac{dz}{dr}.$$

Hieraus ergibt sich, daß überall die in die Meridianebene fallende Komponente der Strömungsgeschwindigkeit mit dem Kurvenelement der Kurve

$$\Psi(r, z) = C$$

zusammenfällt. Die Strömung findet also in der Meridianebene längs der Kurve C statt. Aus diesem Grunde heißt Ψ die Strömungsfunktion.

§ 113. Grundlegung der Turbinentheorie von H. Lorenz.

Das durch eine Turbinenzelle strömende Wasser übt auf die Zellenwände 1 und 2, längs deren es strömt, Drucke p_1 und p_2 aus (Fig. 277). Zerlegt man diese Drucke, die bei reibungsfreier Bewegung auf den Zellenwänden senkrecht stehen, in eine radiale und eine tangential Komponente, so beruht die Drehung der Turbine unter Überwindung eines Momentes M auf dem endlichen Unterschiede der Tangentialkomponenten p_{t_1} und p_{t_2} . Ist n die Zellenzahl, so wird das Drehmoment:

$$M = n \int r(p_{t_1} - p_{t_2}) df. \quad (1)$$

Das Integral ist über die erzeugende Kurve einer Zellenwand zu erstrecken, wenn es sich um eine reine Radialturbine handelt. Aus dem endlichen Unterschiede zwischen p_{t_1} und p_{t_2} ergibt sich nun schon, daß diese Wasserbewegung keine sym-

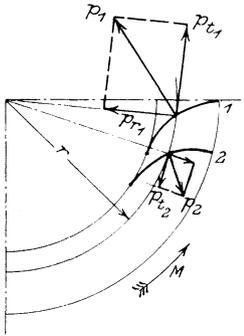


Fig. 277. Angriff der Druckkräfte in einer Radialturbine.

metrische ist, da ja $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ nicht gleich Null sein kann, wenn endliche Druckdifferenzen längs des Turbinenumfangs vorkommen.

Um diesem Übelstand abzuweichen, hat Prof. H. Lorenz in Danzig zwei Schritte getan.

1. Er hat die endliche Druckdifferenz $p_1 - p_2$ als äußere am Flüssigkeitselement angreifende Volumkraft P angesehen und in die Differentialgleichungen eingeführt, indem er

2. die Volumkraft P unter unendlicher Vermehrung der Zellenzahl gleichmäßig längs des Turbinenumfangs verteilte.

Das Ergebnis dieser Vorstellung ist, daß jetzt die Flüssigkeit die Turbine durch unendlich viele Zellen durchströmt, deren unendlich dünne Trennwände der Sitz jener als Zwangskräfte

zu bezeichnenden Volumkräfte sind. $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ kann dann = 0 gesetzt werden.

Sind nun R, T, Z die Komponenten von P , so gelten die Gleichungen (8), (9), (10) § 112 ohne weiteres für die Turbinenbewegung, wenn man in der Gleichung (10) noch ϱg als von der Schwerkraft herrührenden Beitrag zur Volumkraft einführt:

$$\left. \begin{aligned} R - \frac{\partial p}{\partial r} &= \varrho \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_t^2}{r} \right), \\ T &= \varrho \frac{1}{r} \frac{d(v_t r)}{dt}, \\ Z + g\varrho \frac{\partial p}{\partial z} &= \varrho \frac{dv_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Um jetzt das Drehmoment zu berechnen, haben wir das Moment der Tangentialkomponente rT über das ganze Volumen der Turbine zu integrieren:

$$\begin{aligned} M &= \iiint r T r dr d\varphi dz \\ &= 2r\varrho \iint r \frac{d(v_t r)}{dt} dr dz, \end{aligned} \quad (3)$$

wo die Integration sich über einen Meridianschnitt der Turbine zu erstrecken hat.

Schreibt man in (3) statt

$$\frac{d(v_t r)}{dt} = \frac{\partial(v_t r)}{\partial r} \frac{\partial r}{dt} + \frac{\partial(v_t r)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial(v_t r)}{\partial r} v_r + \frac{\partial(v_t r)}{\partial z} v_z,$$

so kann man noch die Wirbelkomponenten (12a) § 112 einführen, womit man findet:

$$M = 4\pi\varrho \iint r^2 (v_z \omega_r - v_r \omega_z) dr dz. \quad (4)$$

Hieraus ergibt sich schon, daß auf Grund der Lorenzschen Theorie die Turbinenströmung keine wirbelfreie sein kann, weil sich sonst kein Drehmoment ergeben könnte. Die Ursache hierfür ist die Einführung der nicht von einem Potential ableitbaren Zwangskräfte R, T, Z .

Wegen der Verwendung dieser Theorie zur Berechnung von Turbinen verweisen wir auf die Lorenzschen Originalarbeiten¹²¹⁾.

VI. Die Differentialgleichungen der Elektrodynamik.

§ 114. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik.

I. Verständigung über die Maßeinheiten. Die Grundeinheiten des absoluten Maßsystems sind:

die Längeneinheit: das Zentimeter 1 [cm],
 die Zeiteinheit: die Sekunde 1 [sec],
 die Masseneinheit: die Massen eines ccm
 Wassers bei 4° C . . . 1 [g]

Aus diesen drei Einheiten leiten sich alle übrigen physikalischen Größen ab.

Wir benötigen noch:

die Kräfteinheit: das Dyn 1 [g cm sec⁻²],

welche definiert ist durch das Newtonsche Bewegungsgesetz: Kraft gleich Masse mal Beschleunigung. Sie ist diejenige Kraft, die der Masse 1 [g] die Beschleunigung 1 [cm sec⁻²] erteilt.

Die Differentialgleichungen der Elektrodynamik regeln die Veränderlichkeit der elektrischen und magnetischen Kräfte. Die Definition dieser Kräfte greift zurück auf die Grunderscheinungen der Elektrostatik und Magnetostatik, die an elektrischen Mengen e bzw. magnetischen Mengen m , die sich im Gleichgewichtszustand befinden, wahrgenommen werden und die darin bestehen, daß zwischen zwei elektrischen Mengen e und e_1 gesetzmäßige Kraftwirkungen gemessen werden können ebenso wie zwischen zwei magnetischen Mengen m und m_1 . Die Kraftgesetze lauten:

$$K_e = \frac{e e_1}{r^2}, \quad K_m = \frac{m m_1}{r^2}, \quad (1)$$

wenn K_e und K_m die Kräfte, r den Abstand der aufeinander wirkenden Mengen bedeuten.

Ist nun $e = e_1$ und $m = m_1$, und ist weiter K_e wie $K_m = 1$ Dyn, $r = 1$ cm, so wird

$$\left. \begin{aligned} e &= \text{der elektrostatischen Einheit der Elektrizitätsmenge} \\ &= 1 [\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{sec}^{-1}], \\ m &= \text{der elektrostatischen Einheit der magnetischen Menge} \\ &= 1 [\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{sec}^{-1}]. \end{aligned} \right\} (2)$$

Wir führen nun den Begriff des elektrischen und magnetischen Kraftfeldes ein. Ein elektrisches Kraftfeld wird definiert

als die Umgebung elektrischer Mengen, ein magnetisches analog als die Umgebung magnetischer Mengen. Bringt man in die Felder eine einzelne elektrische bzw. magnetische Menge e bzw. m , so werden diese laut obigem gewissen Kraftwirkungen ausgesetzt sein, die wir proportional der Menge selbst und einer gewissen Eigenschaft des Feldes an der betreffenden Stelle setzen. Die Eigenschaft ist die elektrische bzw. magnetische Feldstärke E bzw. M . Die Einheit dieser soll da vorhanden sein, wo das Feld auf die statische elektrische bzw. magnetische Mengeneinheit $= 1 [g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ sec}^{-1}]$, die Kräfteinheit $= 1 \text{ Dyn} = 1 [g \text{ cm sec}^{-2}]$ ausübt. Die Dimensionsgleichungen für E bzw. M lauten also:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot 1 [g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ sec}^{-1}] &= 1 [g \text{ cm sec}^{-2}], \\ M \cdot 1 [g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ sec}^{-1}] &= 1 [g \text{ cm sec}^{-2}], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

aus denen sich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \text{statische Einheit der elektrischen Feldstärke} \\ E &= 1 [g^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ sec}^{-1}], \\ \text{statische Einheit der magnetischen Feldstärke} \\ M &= 1 [g^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ sec}^{-1}]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Befinden sich die elektrischen und magnetischen Mengen nicht im Gleichgewicht, sondern in Bewegung, so treten neue Erscheinungen auf: die elektromagnetischen. Die wichtigste dieser ist durch die Tatsache gegeben, daß eine bewegte Elektrizitätsmenge auf eine in Ruhe befindliche magnetische Menge Kraftwirkungen ausübt, die den Wirkungen eines magnetischen Feldes äquivalent sind.

Eine bewegte Elektrizitätsmenge nennen wir einen elektrischen Strom. Es gilt die Beziehung:

$$e = J \cdot t, \quad (5)$$

d. h. fließt ein Strom $J t$ Sekunden lang, so ist die Elektrizitätsmenge e bewegt worden.

Eine Elektrizitätsbewegung, an der die Äquivalenz der Wirkungen mit einem magnetischen Felde leicht konstatiert werden kann, ist gegeben durch einen elektrischen Kreisstrom.

Unter den Verhältnissen der Fig. 278 wird auf die magnetische Menge $+m$ die Kraft K ausgeübt:

$$K = \frac{J \cdot l \cdot m}{r^2} \quad (6)$$

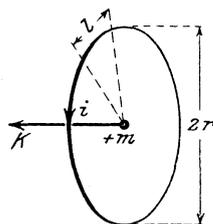


Fig. 278. Einwirkung eines Kreisstromes auf einen Magnetpol.

von einem Stück des Kreisstromes, welches die Länge l besitzt. Diese Formel benutzt man zur Definition der Einheit der Stromstärke:

$$J = \frac{K \cdot r^2}{l \cdot m} = \frac{\text{cm g sec}^{-2} \text{ cm}^2}{\text{cm cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}} = [\text{cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}].$$

Nach Ansatz (5) ergibt sich hiernach die Elektrizitätsmenge:

$$e = J \cdot t = [\text{cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2}]. \quad (7)$$

Wir erkennen, daß sich diese Dimension der elektromagnetisch gemessenen Elektrizitätsmenge von der Dimension der elektrostatisch gemessenen durch den bei ihr fehlenden Faktor $[\text{cm sec}^{-1}]$ unterscheidet.

Die Definition der Elektrizitätsmenge benutzen wir nun an Hand von Ansatz (3) zur Definition der elektromagnetisch ausgedrückten elektrischen Feldstärke:

$$\left. \begin{aligned} E &= [\text{cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2}] = [\text{cm g sec}^{-2}], \\ E &= [\text{cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-2}], \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

die sich von der elektrostatisch gemessenen durch den zu dieser hinzukommenden Faktor $[\text{cm sec}^{-1}]$ unterscheidet.

II. Grundbegriffe der Vektorenanalyse. Die elektrische Feldstärke E und die magnetische Feldstärke M sind die physikalischen Größen, mit denen sich die elektromagnetische Dynamik beschäftigt. Dabei handelt es sich stets um die Verteilung dieser beiden Größen im Raum und um ihre Veränderlichkeit mit der Zeit. Des weiteren hat jede der Größen in einem bestimmten Raumpunkt außer ihrem Zahlwert E bzw. M eine Richtung, die bestimmt wird durch die Richtung der Kraft, die das Feld an der betrachteten Stelle auf die positive elektrische bzw. magnetische Mengeneinheit ausübt. Kürzer ausgedrückt sind die elektrische und die magnetische Feldstärke Vektoren, für die wir das Zeichen \mathfrak{E} bzw. \mathfrak{M} wählen. Diese Vektoren haben Komponenten nach den Koordinatenachsen, die bezeichnet werden für

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &\text{ mit } E_x, E_y, E_z, \\ \mathfrak{M} &\text{ mit } M_x, M_y, M_z. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Zahlenwerte oder Tensoren der Vektoren sind dann

$$\left. \begin{aligned} E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}, \\ M &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Neben den Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{M} werden wir noch die Vektoren curl \mathfrak{E} und curl \mathfrak{M} benötigen, die sich mit Hilfe der Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{M} wie folgt bestimmen:

Der Vektor curl \mathfrak{E} hat die Komponenten:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (11)$$

Der Vektor curl \mathfrak{M} hat die Komponenten:

$$\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}. \quad (12)$$

Schließlich wird noch die Divergenz der Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{M} vorkommen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z}. \quad (14)$$

Die Ausdrücke $\operatorname{div} \mathfrak{E}$ und $\operatorname{div} \mathfrak{M}$ sind keine Vektoren, sondern Skalare, d. h. Feldgrößen, die nur einen Zahlwert, jedoch keine Richtung besitzen.

Bildet man unter Heranziehung der Komponenten (11) und (12) die Divergenz der Vektoren curl \mathfrak{E} und curl \mathfrak{M} , so ergibt sich:

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathfrak{E} = 0; \quad \operatorname{div} \operatorname{curl} \mathfrak{M} = 0. \quad (15)$$

III. Elektrische und magnetische Polarisierung des Dielektrikums.

Seit Faraday und Maxwell betrachtet man nicht mehr die metallischen Körper (die Leiter) als den Sitz der elektromagnetischen Energie, sondern die nicht leitende Umgebung der Körper, das Dielektrikum.

Über dieses hat man sich eine Vorstellung zu machen, welche die Eigenschaften des nichtelektromagnetischen Zustandes ebenso erklärt wie die des elektromagnetischen Zustandes. Wir erörtern die Vorstellungen über die unelektrische und die magnetische Konstitution des Dielektrikums gesondert.

Man denkt sich das Dielektrikum als aus Volumenelementen bestehend, in denen positive und negative Elektrizität überall in gleicher relativer Menge vorhanden ist (Fig. 279).

Die Wirkungen der beiden entgegengesetzten Elektrizitäten heben sich auf; das Dielektrikum ist unelektrisch.

Erzeugt man nun im Dielektrikum ein elektrisches Feld, etwa indem man nach Fig. 280 zwei Platten aufstellt, zwischen denen die elektrische Spannung E herrscht, so werden die Elektrizitätsmengen in den einzelnen Volumelementen verschoben, jedes Volumelement wird elektrisch polarisiert. Der Zustand der Polarisation ist einem Spannungszustand analog; er verschwindet wieder, wenn die spannende Ursache, die Ladung der Platten, verschwindet.

Zur Gewinnung einer formelmäßigen Fixierung dieser Vorstellung greifen wir auf die Beobachtungen an einem Kondensator zurück, der ja durch Fig. 280 dargestellt wird.

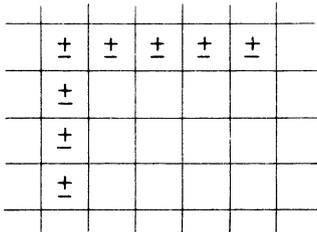


Fig. 279. Spannungsloses Dielektrikum.

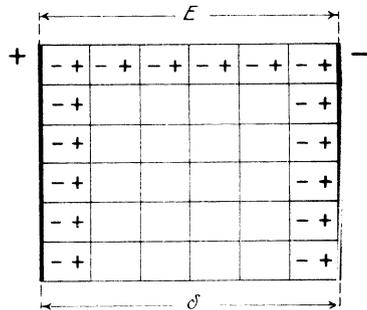


Fig. 280. Gespanntes Dielektrikum.

Verbindet man nämlich die beiden Platten miteinander durch einen leitenden Draht, so fließt durch diesen eine Elektrizitätsmenge Q , die gemessen werden kann. Es ist:

$$Q = \frac{\epsilon}{4\pi} \cdot \frac{E}{\delta} \cdot F.$$

Der Kondensator ist damit entladen, der Spannungszustand des Dielektrikums ist verschwunden. Legt man andererseits an den spannungslosen Kondensator eine Spannungsdifferenz E , so verschiebt sich zwischen den Platten die positive Menge Q in der Richtung von der $+$ -Platte zur $-$ -Platte. Es ist:

$$Q = \frac{\epsilon}{4\pi} \cdot \frac{E}{\delta} \cdot F \quad (16)$$

wie oben. Der hier vorkommende Faktor ϵ ist die sogenannte Dielektrizitätskonstante.

Die Formel (16) stellt man nun um wie folgt:

$$Q = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{E}{\delta} \quad (17)$$

und man nennt

$$b_e = \frac{Q}{F} \quad (18)$$

die dielektrische Verschiebung.

$$\mathfrak{E} = \frac{E}{\delta} \quad (19)$$

die elektrische Feldstärke oder elektrische Kraft, von welcher letzterer wir unter I ausgegangen waren. Setzen wir für Q das elektromagnetische Maßsystem voraus, so ergibt sich als Dimension der dielektrischen Verschiebung:

$$[b_e] = [\text{cm}^{-3/2} \text{g}^{1/2}] \quad (20)$$

und, wenn man dies in (17) einsetzt, mit

$$[\mathfrak{E}] = [\text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{sec}^{-2}] \quad (21)$$

als Dimension der Dielektrizitätskonstante

$$[\varepsilon] = [\text{cm}^{-2} \text{sec}^2]. \quad (22)$$

Die sich aus (17), (18), (19) ergebende Formel

$$b_e = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E} \quad (23)$$

kann man nach der Zeit differenzieren:

$$\frac{\partial b_e}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}. \quad (24)$$

Hier ist $\frac{\partial b_e}{\partial t}$ von der Dimension $[\text{cm}^{-3/2} \text{g}^{1/2} \text{sec}^{-1}]$, also eine Stromdichte, d. h. eine Stromstärke dividiert durch eine Fläche. Bezeichnet man diese mit i , so gibt

$$i = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \quad (25)$$

die Abhängigkeit der Stromdichte der elektrischen Verschiebung von der zeitlichen Veränderung der Feldstärke.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß das Dielektrikum keine Leitfähigkeit besitzt. Ist diese $= \lambda$ vorhanden, so tritt neben den Verschiebungsstrom

$$i \mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{F} \quad (26)$$

auch noch der Leitungsstrom

$$i' \mathbf{F} = \lambda \mathfrak{E} \mathbf{F}, \quad (27)$$

so daß die Gesamtstromdichte wird:

$$i + i' = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \lambda \mathfrak{E}. \quad (28)$$

Für die magnetischen Eigenschaften des Dielektrikums stellen wir analoge Betrachtungen an. Wir definieren die magnetische Verschiebung

$$b_m = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \mathfrak{M} \quad (29)$$

und erkennen in $4\pi b_m$ die Größe \mathfrak{B} , welche man die magnetische Induktion nennt, die in einem Medium der Permeabilität μ durch die magnetische Feldstärke \mathfrak{M} induziert wird. Magnetische Verschiebung, Induktion und Feldstärke haben dieselbe Dimension: [$\text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{sec}^{-1}$]; die Permeabilität μ ist eine Zahl.

Analog (25) bildet man noch die Stromdichte der magnetischen Verschiebung

$$j = \frac{\partial b_m}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}. \quad (30)$$

Ein Analogon zu Formel (27) aufzustellen ist nicht nötig, da die magnetische Leitfähigkeit der bekannten Stoffe so klein ist, daß magnetische Leitungsströme gegenüber den Verschiebungsströmen unter allen Umständen vernachlässigt werden können.

IV. Die Grundgleichungen.

Zwischen den Feldstärken \mathfrak{E} und \mathfrak{M} und den Stromdichten i und j bestehen zwei Gleichungen, die für Stromleiter schon vor Maxwell bekannt waren.

a) Nach der Figur 281 hat man in dem durch einen Strom der Dichte i hervorgerufenen magnetischen Felde eine den Strom umschließende Kurve s zu ziehen. Die Kurve begrenze den Flächeninhalt ω . Dann gilt die Gleichung

$$4\pi i \omega = \int \mathfrak{M} \cos(\mathfrak{M}, ds) ds. \quad (31)$$

Das Integral bedeutet die Summe der Tangentialkomponenten der Feldstärke längs der Kurve s .

b) Wird in entsprechender Weise ein magnetischer Strom der Dichte j von einer Kurve s umschlossen, so gilt (s. Fig. 282)

$$4 \pi j \omega = - \int \mathfrak{E} \cos(\mathfrak{E}, ds) ds. \quad (32)$$

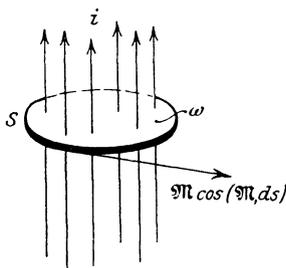


Fig. 281. Magneto- motorisches Grundgesetz.

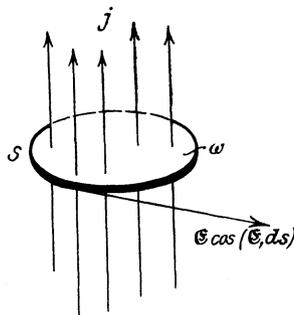


Fig. 282. Elektromotorisches Grundgesetz.

§ 115. Aufstellung der Maxwell'schen Gleichungen.

Es ist das Verdienst von Maxwell, die Gleichungen (31) und (32) des vorigen Paragraphen auf die Vorgänge im Dielektrikum angewendet zu haben.

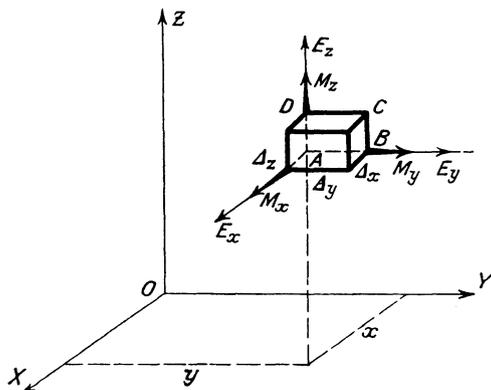


Fig. 283. Zur Aufstellung der Maxwell'schen Gleichungen.

Wir betrachten ein Volumenelement $\Delta_x \Delta_y \Delta_z$ Fig. 283. Im Punkte A herrsche die elektrische Feldstärke \mathfrak{E} und die magne-

tische Feldstärke \mathfrak{M} mit den Komponenten bzw. $E_x E_y E_z$ und $M_x M_y M_z$.

Die Komponente E_x der Feldstärke ergibt nach Gleichung (25) eine Verschiebungsstromdichte in Richtung der x -Achse

$$i_x = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (1)$$

und den Leitungsstrom

$$i_x' = \lambda E_x. \quad (2)$$

Hiermit ergibt sich für die linke Seite der Gleichung (31), wenn $\omega = A_y A_x (= \text{Rechteckseite } ABCD)$ ist:

$$\left(\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi \lambda E_x \right) A_y A_z.$$

Die rechte Seite der Gleichung (31) erfordert die Aufstellung der Komponenten von \mathfrak{M} , die längs der Berandung von $ABCD$ wirken. Diese sind in:

$$\begin{aligned} AB \dots M_y, \\ BC \dots M_z + \frac{\partial M_z}{\partial y} A y, \\ CD \dots - M_y - \frac{\partial M_y}{\partial z} A z, \\ DA \dots - M_y. \end{aligned}$$

Es wird hiermit

$$\int \mathfrak{M} \cos(\mathfrak{M}, ds) ds = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) A_y A_z,$$

d. h. an Stelle von Gleichung (31) kommt

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi \lambda E_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (3)$$

und analog für die anderen Achsenrichtungen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + 4\pi \lambda E_y &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + 4\pi \lambda E_z &= \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Gleichungen (3) und (4) bilden das erste Maxwellsche Gleichungssystem.

Das zweite erhält man aus Gleichung (32), indem man die Stromdichte der magnetischen Verschiebung in Richtung der x -Achse anschreibt:

$$j_x = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial t}. \quad (5)$$

Die Ermittlung des Integrals in Gleichung (32) liefert dann

$$- \int \mathfrak{E} \cos(\mathfrak{E}, ds) = - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \quad (6)$$

und mithin:

$$\mu \frac{\partial M_x}{\partial t} = - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right). \quad (7)$$

Analog für die beiden anderen Koordinatenrichtungen:

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial M_y}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \\ \mu \frac{\partial M_z}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(7) und (8) stellen das zweite Maxwell'sche Gleichungssystem dar.

Vergleicht man die rechten Seiten der Maxwell'schen Systeme mit den Definitionen (11) und (12) des § 114, so erkennt man die Ausdrücke der curl-Komponenten wieder. Man kann also die beiden Gleichungssysteme in Vektorform schreiben:

Vektorform des ersten Maxwell'schen Gleichungssystems:

$$\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi \lambda \mathfrak{E} = \text{curl } \mathfrak{M}. \quad (9)$$

Vektorform des zweiten Maxwell'schen Gleichungssystems:

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = - \text{curl } \mathfrak{E}. \quad (10)$$

Die Dimensionen von \mathfrak{E} , \mathfrak{M} , ε , μ sind hier die des elektromagnetischen Maßsystems.

§ 116. Untersuchung ebener elektromagnetischer Wellen.

I. Aus den Gleichungen (3) und (4) § 115 folgt, wenn man sie der Reihe nach nach x, y, z differenziert und dann addiert:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + 4\pi \lambda \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

oder nach Gleichung (13) § 102:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{E} + 4\pi\lambda \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0. \quad (2)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß dauernd

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \quad (3)$$

gilt, wenn diese Gleichung zu irgendeiner Zeit galt. Die Bedeutung des Satzes (3) kann man sich wie folgt näher veranschaulichen. Aus Gleichung (23) § 102

$$b_c = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E} \quad (4)$$

folgt nach beiderseitiger Bildung der Divergenz

$$\operatorname{div} b_c = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E}. \quad (5)$$

Hier hat $\operatorname{div} b_c$ die Dimension $[\text{cm}^{-5/2} \text{sec}^{-1/2}]$, d. h. die Dimension der Raumdichte der Elektrizitätsmenge:

$$[\text{cm}^{-1/2} \text{sec}^{-1/2}] : [\text{cm}^3].$$

In der Tat bedeutet $\operatorname{div} b_c$ eine elektrische Raumdichte, und zwar diejenige im Raumelemente $dx dy dz$. Wir benutzen nunmehr, wie früher § 75, das Zeichen ϱ für diese:

$$\operatorname{div} b_c = \frac{\varepsilon}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho. \quad (6)$$

Hieraus folgt, daß die Gleichung (3) stets dann gilt, wenn überall die Dichte ϱ der „freien“ Elektrizität gleich Null ist.

Durch Gleichung (6) kann man übrigens noch eine von früher her (§ 87) bekannte Beziehung ableiten, wenn wir annehmen, daß \mathfrak{E} ein Potentialvektor ist, dessen Komponenten sich als erste partielle Derivierte einer Raumsfunktion V bestimmen, wie folgt:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (7)$$

Dann wird der Ausdruck

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = \varrho, \quad (8)$$

eine Gleichung, welche mit $\varepsilon = 1$ mit der Laplace-Poissonschen Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -4\pi\rho \quad (9)$$

§ 87, identisch ist. Diese Gleichung regelt, wie wir in Kapitel III des zweiten Teils gesehen haben, die elektrischen Gleichgewichtszustände.

In der gleichen Weise wie oben läßt sich auch die Gültigkeit der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} = 0 \quad (3a)$$

im ganzen Felde nachweisen.

Nunmehr eliminieren wir aus Gleichung (9) und (10) § 115 den Vektor \mathfrak{M} , indem wir (9) nach der Zeit, differenzieren:

$$\operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial t^2} + 4\pi\lambda \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} \quad (10)$$

und von Gleichung (10) den curl bilden:

$$\mu \operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{C}. \quad (11)$$

Durch Gleichsetzung von (10) und (11) folgt:

$$\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial t^2} + 4\pi\mu\lambda \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{C}. \quad (12)$$

Rechnet man die Komponenten des Vektors

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{C}$$

aus, so ergibt sich z. B. für die x -Komponente:

$$B_x = \frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{C}}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right) \quad (13)$$

(wovon man sich durch Ausführung der Operationen leicht überzeugt), so daß man infolge (3) folgendes Gleichungssystem für $E_x E_y E_z$ erhält:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 4\pi\lambda \mu \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + 4\pi\lambda \mu \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + 4\pi\lambda \mu \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ein analoges Gleichungssystem existiert für $M_x M_y M_z$.

II. Mit Hilfe der beiden Systeme sollen \mathfrak{E} und \mathfrak{M} bzw. deren Komponenten in ihrer Abhängigkeit von Raum und Zeit gefunden werden. Dabei müssen die Komponenten als Funktionen von x, y, z zur Zeit $t = 0$ gegeben sein, wonach sich die ersten Ableitungen der Komponenten nach der Zeit, ebenfalls für $t = 0$, aus den Gleichungen (9) und (10) § 115 bestimmen lassen.

Es handelt sich also um die Bestimmung einer Funktion $U(x, y, z, t)$, die der Differentialgleichung:

$$\Delta U = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4 \pi \mu \lambda \frac{\partial U}{\partial t} \quad (15)$$

genügen und dabei nebst ihrer ersten zeitlichen Ableitung für $t = 0$ in gegebene Ortsfunktionen übergehen soll

$$\left. \begin{aligned} U_{t=0} &= f(x, y, z), \\ \frac{\partial U}{\partial t}_{t=0} &= g(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wir untersuchen nun einen Vorgang, bei welchem die elektromagnetische Größe U (eine elektrische oder magnetische Kraft) abgesehen von der Zeit, nur von der Variablen x abhängt. Es handele sich also um die Fortpflanzung einer ebenen Welle, und zwar wollen wir zuvörderst voraussetzen, daß mit $\lambda = 0$ der Vorgang ohne Dämpfung (in einem nicht leitenden Dielektrikum) erfolge. Die Gleichung (15) wird dann einfach

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (16)$$

Ferner wollen wir die Größe U und die Dielektrizitätskonstante ε elektrostatisch messen.

Nach § 115 haben wir, wenn die elektrostatischen Größen für den Augenblick mit U_e und ε_e bezeichnet werden, die Dimensionsbeziehungen:

$$\begin{aligned} U &= [\text{cm/sec}] U_e, \\ \varepsilon &= [\text{cm/sec}]^{-2} \varepsilon_e. \end{aligned}$$

Hiermit geht die Gleichung (16) über in

$$[\text{cm/sec}] \frac{\partial^2 U_e}{\partial x^2} = [\text{cm/sec}] [\text{cm/sec}]^{-2} \varepsilon_e \mu \frac{\partial^2 U_e}{\partial t^2},$$

oder nach Rückkehr zu U und ε (die aber nun als elektrostatische Größen zu gelten haben)

$$[\text{cm/sec}]^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (17)$$

Auf der linken Seite ist also ein Faktor von der Dimension eines Geschwindigkeitsquadrats hinzugekommen, den wir mit V^2 bezeichnen:

$$V^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (18)$$

III. Diese Differentialgleichung ist identisch mit der in § 72 betrachteten Gleichung der Saitenschwingung, wenn wir

$$a^2 = \frac{V^2}{\varepsilon \mu}$$

einsetzen. Die zu erfüllenden Anfangsbedingungen lauten für $t = 0$:

$$U = f(x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g(x).$$

Die Lösung kann auch hier durch Fouriersche Reihen erfolgen; wir wollen jedoch eine andere Lösung benutzen, die uns einige Haupteigenschaften der elektromagnetischen Wellen zeigen soll.

Wir schreiben als die Lösung an:

$$U = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(x) dx, \quad (19)$$

die für $t = 0$ tatsächlich $U = f(x)$ ergibt. Ferner ist

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{a}{2} [f'(x+at) - f'(x-at)]$$

$$+ \frac{1}{2a} [ag(x+at) + ag(x-at)],$$

welcher Ausdruck liefert für $t = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g(x).$$

Andererseits kann man durch direkte Ausrechnung nachweisen, daß (19) der Differentialgleichung (18) genügt.

Wir betrachten nun einen Anfangszustand, für welchen überall längs der x -Achse $g(x) = 0$ ist. Die anfängliche elek-

trische oder magnetische Störung $f(x)$ soll aber nur innerhalb eines Intervalles

$$-l \leq x \leq +l$$

endliche Werte besitzen, im übrigen aber Null sein (Fig. 284).

Die Funktion $f(x + at)$ ist hiernach nur dann von Null verschieden, wenn gilt

$$-l < x + at < +l \quad (20)$$

und $f(x - at)$ ist von Null verschieden, wenn gilt:

$$-l < x - at < +l. \quad (21)$$

Die Bedingungen (20) und (21) kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} -l - at < x < at + l, \\ -l + at < x < at + l, \end{aligned}$$

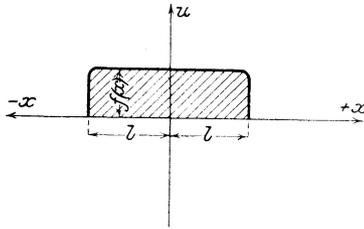


Fig. 284. Anfänglich elektromagnetisches Störungsgebiet.

woraus sich ergibt, daß nach Verlauf der Zeit t die Größe U nur in den Fig. 285 gezeichneten Bereichen von Null verschieden sein kann. Hierbei ist aber rechts von der U -Achse $f(x + at) = 0$, links davon $f(x - at) = 0$, so daß sich U auf

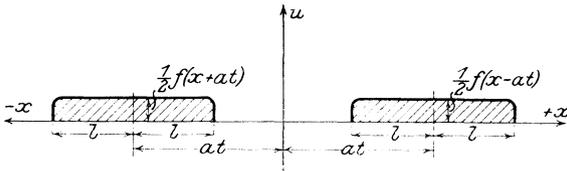


Fig. 285. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung ohne Dämpfung.

$\frac{1}{2} f(x - at)$ oder $\frac{1}{2} f(x + at)$ reduziert, d. h. auf die Hälfte des zur Zeit 0 existierenden Wertes. Wir deuten dies Ergebnis dahin, daß sich das anfänglich vorhandene Störungsgebiet $f(x)$ mit halber Intensität der Störung nach beiden Seiten in ursprünglicher Breite fortpflanzt mit der Geschwindigkeit a .

Es war aber

$$a = \frac{V}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Hiermit findet sich die Größe V als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Störung im freien Äther, in welchem $\epsilon = \mu = 1$ ist.

IV. Nehmen wir nun noch den Vorgang als mit Dämpfung behaftet an, so findet man (wofür wir den Beweis nicht geben wollen), daß sich die Grenzen des Störungs- oder Erregungsgebietes ebenfalls mit der Geschwindigkeit $\frac{V}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ fortpflanzen, daß aber die Gebietsbreite dauernd wächst, während die Intensität der Erregung dauernd abnimmt. Fig. 286 gibt das Grundsätzliche des Vorganges.

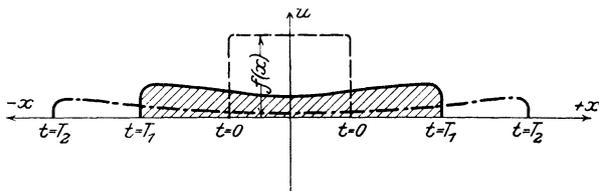


Fig. 286. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung mit Dämpfung.

§ 117. Elektromagnetische Eigenschaften von Gleichströmen in linear ausgedehnten Leitern.

I. Wir betrachten einen sehr langen Draht OA , der längs der positiven x -Achse ausgedehnt ist (Fig. 287). D ist eine Dynamomaschine, deren Pol B zunächst frei sei, während der andere C mit irgendeinem Körper K von qualitativ denselben elektrischen Eigenschaften wie der Draht verbunden sein soll. Im übrigen sei K so weit entfernt, daß sein Einfluß auf die Vorgänge im Draht verschwindet. Ein Voltmeter V verbindet K mit dem entfernten Leitungsende A . Das Voltmeter wird nichts anzeigen. Zur Zeit $t = 0$ verbinden wir B mit O , worauf das Voltmeter anzudeuten beginnt. Nach Verlauf einer Zeit T wird die Anzeige konstant geworden sein. Wir wollen den Vorgang von $t = 0$ bis $t = T$ den Ausgleichvorgang nennen und von dem Beharrungszustand, der für $t > T$ eintritt, getrennt untersuchen. Beide Vorgänge werden von den Maxwell'schen Gleichungen auf Zylinderkoordinaten.

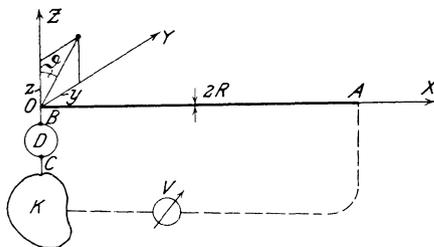


Fig. 287. Zur Umformung der Maxwell'schen Gleichungen auf Zylinderkoordinaten.

Zur Zeit $t = 0$ verbinden wir B mit O , worauf das Voltmeter anzudeuten beginnt. Nach Verlauf einer Zeit T wird die Anzeige konstant geworden sein. Wir wollen den Vorgang von $t = 0$ bis $t = T$ den Ausgleichvorgang nennen und von dem Beharrungszustand, der für $t > T$ eintritt, getrennt untersuchen. Beide Vorgänge werden von den Maxwell'schen Gleichungen be-

herrscht, die wir zunächst auf den Beharrungszustand anwenden wollen.

Zu diesem Zweck transformieren wir die Maxwell'schen Gleichungen des § 115 auf Zylinderkoordinaten x, ϑ, r durch die Gleichungen

$$y = r \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta. \quad (1)$$

Das Feldgrößensystem

$$E_x, E_y, E_z \\ M_x, M_y, M_z$$

geht dann über in das System

$$E_r, E_\vartheta, E_\varrho \\ M_r, M_\vartheta, M_\varrho.$$

Die Gleichungssysteme (3) und (4) bzw. (7) und (8) § 115 gehen dann über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial M_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial(r M_\vartheta)}{\partial r} \right) &= \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_x, \\ \left(\frac{\partial M_x}{\partial r} - \frac{\partial M_x}{\partial x} \right) &= \varepsilon \frac{\partial E_\vartheta}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_\vartheta, \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r M_\vartheta)}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial \vartheta} \right) &= \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_r. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial(r E_\vartheta)}{\partial r} \right) &= \mu \frac{\partial M_x}{\partial t}, \\ \left(\frac{\partial E_x}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial x} \right) &= \mu \frac{\partial M_\vartheta}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r E_\vartheta)}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial \vartheta} \right) &= \mu \frac{\partial M_r}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hier kommt dann noch die Gleichung (3) und (3a) § 115 hinzu, die ebenfalls auf x, ϑ, r umzuformen sind:

$$\frac{\partial(r E_x)}{\partial x} + \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(r M_x)}{\partial x} + \frac{\partial M_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial(r M_r)}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Die Durchführung der zu dieser Transformation erforderlichen Rechnung, welche in partiellen Differentiationen der Gleichung (1) besteht, verfolgen wir hier nicht weiter.

Das Feld um den linear ausgestreckten Leiter nehmen wir nunmehr achsensymmetrisch an, d. h. wir setzen fest, daß sämtliche Komponenten M und E von ϑ unabhängig sind.

Ferner gehört zur Achsensymmetrie, daß quer zur Achse des linearen Leiters keine elektrischen Kräfte wirken, d. h. die Komponente E_ϑ ist nicht vorhanden, also gleich Null zu setzen. Ebenso folgt aus unserer Annahme, daß das magnetische Feld nur eine Querkomponente hat, also M_x und M_r sind Null.

Die Gleichungen (2) und (3) reduzieren sich danach auf folgende:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial(r M_\vartheta)}{\partial r} &= \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi\lambda E_x, \\ +\frac{1}{r} \frac{\partial(r M_\vartheta)}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + 4\pi\lambda E_r, \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial x} \right) = -\mu \frac{\partial M_\vartheta}{\partial t}, \quad (3a)$$

während (4) und (5) ergeben:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial M_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0. \quad (4a)$$

Hier ist Gleichung (5a) bereits oben aus der Eigenschaft der Achsensymmetrie hervorgegangen.

II. Wir kehren nun zu Fig. 287 zurück und setzen die Dynamo als Gleichstrommaschine der Klemmspannung E voraus. Ist nach Anschalten des Poles B der Beharrungszustand eingetreten, dann herrscht am anderen Drahtende ebenfalls die Spannung E . Damit wird aber

$$E_x = \frac{E - E}{L} = 0.$$

Ebenso wird

$$E_r = 0$$

und

$$M_\vartheta = 0.$$

Dies Beispiel der unter Gleichstromspannung stehenden Leitung bietet also nichts Besonderes.

Wird dagegen das freie Drahtende auf der Spannung 0 gehalten, so wird

$$E_x = \frac{E}{L} \quad (6)$$

von der Zeit unabhängig. Dieser Ansatz befriedigt neben

$$E_r = 0 \quad (7)$$

die Gleichung (4a) und liefert aus (3a) und der zweiten Gleichung (2a) das Ergebnis, daß M_ϑ von x und t unabhängig ist. Jetzt bleibt noch übrig, aus der ersten Gleichung (2a) die erforderlichen Schlüsse zu ziehen. Sie hat mit

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

das Ergebnis:

$$\frac{\partial(r M_\vartheta)}{\partial r} = -4\pi\lambda r E_x. \quad (8)$$

Sie ist zu integrieren innerhalb des Drahtes ($r < R$) sowie außerhalb ($r > R$). Außerhalb des Drahtes ist $\lambda = 0$, weil wir uns hier im Dielektrikum befinden; die Gleichung (8) lautet dann:

$$\frac{\partial(r M_\vartheta)}{\partial r} = 0 \quad r > R \quad (3a)$$

und liefert nach Integration:

$$M_\vartheta = \frac{C}{r} \quad r > R. \quad (8b)$$

wo C eine zunächst unbekannte Konstante bedeutet.

Innerhalb des Drahtes lautet die Gleichung (8):

$$\frac{\partial(r M_\vartheta)}{\partial r} = -4\pi\lambda r E_x \quad r < R, \quad (8c)$$

woraus nach Integration folgt:

$$r M_\vartheta = C_1 - 2\pi\lambda r^2 E_x. \quad (8d)$$

Hier muß aber $C_1 = 0$ sein, weil für $r = 0$ beide Seiten der Gleichung (8d) verschwinden müssen. Es bleibt also übrig:

$$M_\vartheta = -2\pi\lambda r E_x \quad r < R. \quad (8e)$$

Für $r = R$, d. h. an der Drahtoberfläche müssen die Werte von M_ϑ aus der Gleichung (8b) und (8e) ineinander übergehen, d. h. es muß sein:

$$\frac{C}{R} = -2\pi\lambda R E_x,$$

womit sich die Konstante C findet:

$$C = -2\pi\lambda R^2 E_x,$$

so daß für das magnetische Feld außerhalb des Drahtes sich

$$M_\vartheta = -\frac{2\pi\lambda R^2}{r} E_x \quad r > R \quad (9)$$

ergibt. Setzt man hier Gleichung (6) ein, so wird

$$M_\vartheta = -\frac{2\pi\lambda R^2 E}{r L},$$

d. h., da $w = \frac{L}{R^2 \pi \lambda}$ den Leitungswiderstand des Drahtes bedeutet, mit dem Strom $i = \frac{E}{w}$ (elektromagnetisch gemessen)

$$M_\vartheta = -\frac{2i}{r}$$

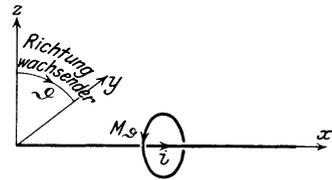


Fig. 288. Magnetisches Feld eines geradlinigen Stromes.

Dies ist die bekannte Formel des magnetischen Feldes eines geradlinigen Stromes i . Das negative Zeichen gibt an, daß die Feldstärke entgegengesetzt der Richtung wachsender ϑ , d. h. nach Fig. 288 orientiert ist.

§ 118. Elektromagnetische Vorgänge bei Wechselströmen in geradlinigen Leitern. Ferrantiphänomen.¹²³⁾

I. Wir legen wieder Fig. 287 § 117 zugrunde, nur mit dem Unterschied, daß die Dynamomaschine Wechselstrom der Maximalspannung E liefere.

Unter den Komponenten E_x , E_r und M_ϑ interessiert uns in erster Linie E_x , d. h. die elektrische Kraft parallel zur Richtung des ausgespannten Drahtes. Wir gewinnen eine Differentialgleichung für E_x , indem wir E_r und M_ϑ aus den Gleichungen (2a) bis (4a) § 117 eliminieren. Dies geschieht wie folgt.

Zunächst wird (3a) mit r multipliziert und darauf partiell nach r differenziert. Resultat:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_x}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 (r E_r)}{\partial x \partial r} \right\} = -\mu \frac{\partial^2 (r M_\vartheta)}{\partial r \partial t}. \quad (1)$$

Weiter wird (4a) nach x differenziert:

$$r \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 (r E_r)}{\partial x \partial r} \quad (2)$$

Schließlich wird die erste Gleichung (2a) mit μ multipliziert und nach t differenziert. Resultat:

$$r \left\{ \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 4\pi \mu \lambda \frac{\partial E_x}{\partial t} \right\} = - \mu \frac{\partial (r M_r)}{\partial r \partial t}. \quad (3)$$

Substituiert man (2) und (3) in (1), so entsteht:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} \right\} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 4\pi \mu \lambda \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (4)$$

In diese Gleichung führen wir die Stärke J des im Drahte fließenden Stromes ein.

Zunächst gilt für die Dichte des im Querschnittsdifferential $r dr$ fließenden Stromes

$$i = \lambda E_x.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $2\pi r dr$, und setzt man $2\pi i r \cdot dr = dJ$, so wird

$$dJ = 2\pi \lambda r E_x dr$$

die Stromstärke im Querschnittsdifferential $2\pi r dr$. Integriert man von 0 bis R , so ergibt sich der Gesamtstrom im Draht

$$J = 2\pi \lambda \int_0^R r E_x dr. \quad (5)$$

Dies wird in Gleichung (4) eingeführt durch Multiplikation mit $r dr$ und Integration von 0 bis R . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} R \left[\frac{\partial E_x}{\partial r} \right]_{x=R} + \int_0^R r \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} dr &= \mu \varepsilon \int_0^R r \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} dr \\ &+ 4\pi \mu \lambda \int_0^R r \frac{\partial E_x}{\partial t} dr, \end{aligned} \quad (6)$$

während durch geeignete Differentiationen aus (5) die Beziehungen folgen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} &= 2\pi\lambda \int_0^R r \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} dr; & \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} &= 2\pi\lambda \int_0^R r \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} dr; \\ \frac{\delta j}{\partial J} &= 2\pi\lambda \int_0^R r \frac{\partial E_x}{\partial t} dr \end{aligned} \right\} (7)$$

Substituiert man (7) in (6), so kommt:

$$R \left[\frac{\partial E_x}{\partial r} \right]_{r=R} + \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \frac{\mu\epsilon}{2\pi\lambda} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (8)$$

Das erste Glied auf der linken Seite vergleichen wir jetzt mit dem letzten Glied auf der rechten Seite, indem wir

$$J = \pi R^2 \lambda \cdot E_x = \frac{E_x}{w} \quad (9)$$

setzen, wo w den Ohmschen Widerstand der Längeneinheit des Drahtes bedeutet. Dann vergleichen wir

$$w \cdot R \left[\frac{\partial E_x}{\partial r} \right]_{r=R} \quad \text{mit} \quad 2\mu \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Hier repräsentiert $w \cdot R$ den Widerstand eines Drahtstückes von der Länge R (der halben Drahtdicke), also einen sehr kleinen Wert, während $\frac{\partial E_x}{\partial t}$, die Änderungsgeschwindigkeit eines Wechselstromes, eine sehr große Zahl ist. Wir vernachlässigen also $R \left[\frac{\partial E_x}{\partial r} \right]_{r=R}$ gegen $2\mu \frac{\partial j}{\partial t}$ und schreiben für (8)

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + 4\pi\mu\lambda \frac{\partial J}{\partial t}, \quad (10)$$

nach welcher Gleichung sich die Leitungsstromstärke J im Draht regelt.

II. Es ist nun bemerkenswert, daß eine Differentialgleichung für J auch gewonnen wird, wenn man die Vorstellungen über elektromagnetische Vorgänge benutzt, die vor Maxwell üblich waren. Diese Vorstellungen operieren an Stelle der in den Maxwellschen Gleichungen vorkommenden elektrischen Feldstärke mit „Spannungen“ und „elektromotorischen Kräften“ (p) und außerdem mit der Stromstärke in einem Leiter, die wir soeben mit J bezeichnet haben.

Die Verknüpfung von Spannungen p und Stromstärken J geschieht auf Grund des zweiten Induktionsgesetzes Gl. (3?) § 114.

$$4\pi j\omega = - \int \mathfrak{E} \cos(\mathfrak{E}, ds) ds,$$

welches auf Grund von Gleichungen (5) § 115 die Form annimmt

$$\mu \frac{\partial(\omega M)}{\partial t} = - \int \mathfrak{E} \cos(\mathfrak{E}, ds) ds.$$

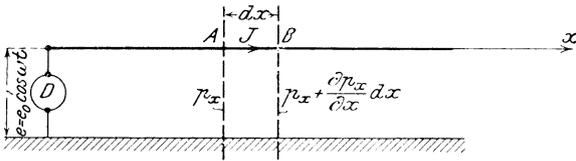


Fig. 289. Zur Ableitung der Heavisideschen Gleichung.

Dies Induktionsgesetz wird unmittelbar auf einen in Fig. 289 mit AB bezeichneten Abschnitt des stromführenden Leiters angewendet. ωM ist der ganze magnetische Kraftfluß, der das Rechteck der Basis AB durchsetzt, während das Integral durch die Summe der im Linienzuge des Rechtecks wirkenden Spannungen

$$wJ dx + \left(p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} \right) dx - p_x$$

gegeben ist. Als Besonderheit tritt hier nun auf, daß die Permeabilität $\mu = 1$ zu setzen ist und der Kraftfluß $M\omega$ durch den Strom J selbst hervorgerufen worden ist. In diesem Falle hat man bekanntlich die Stromstärke mit deren Kraftfluß durch den Koeffizienten der Selbstinduktion zu verknüpfen. Die entsprechende Formel lautet hier:

$$M\omega = LJ dx,$$

wo L den Selbstinduktionskoeffizienten der Längeneinheit des geradlinig ausgestreckten Drahtes bedeutet. Es ergibt sich demnach der Ansatz:

$$L dx \frac{\partial J}{\partial t} = - \left(wJ dx + p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx - p_x \right)$$

oder

$$- \frac{\partial p_x}{\partial x} = wJ + L \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (11)$$

Zur Gewinnung einer zweiten Gleichung zwischen den Größen p_x und J betrachtet die vormalige Anschauungsweise das Leiterelement dx als einen Kondensator, dessen Ladestrom durch

$$C dx \frac{\partial p_x}{\partial t}$$

gegeben ist, wenn C die Kapazität der Längeneinheit des ausgestreckten Drahtes bedeutet. Der Ladestrom kombiniert sich mit dem zufließenden Leitungsstrom J und dem abfließenden Strom $J + \frac{\partial J}{\partial x} dx$ durch eine Gleichung, welche die Kontinuität der elektrischen Strömung ausspricht:

$$J = J + \frac{\partial J}{\partial x} dx = C dx \frac{\partial p}{\partial t}$$

welche sich vereinfacht auf:

$$-\frac{\partial J}{\partial x} = C \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{11 a}$$

Aus den Gleichungen (11) und (11 a) kann man in einfacher Weise die Variable p_x eliminieren, wodurch man für J die nach Heaviside bekannte partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + wC \frac{\partial J}{\partial t} \tag{11 b}$$

erhält. Für p würde durch Elimination von J entstehen

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + wC \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{11 c}$$

Man kann auch eine Funktion W von x und t einführen, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + wC \frac{\partial W}{\partial t} \tag{11 d}$$

genügt, und aus welcher sich p und J dann durch die Ansätze ableiten:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\partial W}{\partial x} \\ J &= -C \frac{\partial W}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \tag{11 e}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Ansätze (11 d) und (11 e) mit (11) und (11 a) gleichbedeutend sind.

Hiermit wäre erwiesen, daß die ältere Theorie für die technischen Größen p und J (Spannung und Stromstärke) ganz ähnliche Differentialgleichungen liefert wie die Maxwellsche Theorie z. B. für die elektrische Feldstärke. Selbstverständlich muß es möglich sein, von den Maxwellschen Ansätzen (z. B. den Gleichungen (2 a), (3 a), (4 a) § 117) zu den Gleichungen (11 b) und (11 c) zu gelangen, wobei sich die Abhängigkeit der Konstanten w , C , L von den Daten des Problems ergeben müßte. Hierzu sind weitergehende mathematische Untersuchungen erforderlich, deren Durchführung bereits von der Wissenschaft in Angriff genommen worden ist. Eine kurze Darstellung des hierher gehörigen Gedankenganges gibt § 121.

III. Es handelt sich nun für uns um die Weiteruntersuchung der Gleichungen (11 b) und (11 c). Wir wenden uns zunächst der zweiten zu, die wir nochmals anschreiben:

$$\frac{\partial^2 p_x}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 p_x}{\partial t^2} + wC \frac{\partial p_x}{\partial t^2}. \quad (12)$$

Dieser Gleichung suchen wir durch einen Ansatz für p_x

$$p_x = XT \quad (13)$$

zu genügen, in welchem X nur die Variable x , T nur die Variable t enthalte. Setzen wir (13) nach Ausführung der vorgeschriebenen Differentiationen in (12) ein, so erhalten wir die Differentialgleichung:

$$X'' T = LC XT'' + wC XT'$$

oder nach Division mit XT :

$$\frac{X''}{X} = LC \frac{T''}{T} + wC \frac{T'}{T}. \quad (14)$$

Hier kommen auf beiden Seiten nur Ausdrücke je einer Variablen vor, so daß wir der Gleichung (14) durch die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -\alpha^2 \\ LC \frac{T''}{T} + wC \frac{T'}{T} &= -\alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

genügen können. α ist hier eine wählbare Konstante, über die wir noch die Verfügung treffen werden.

Die beiden Differentialgleichungen (15) bringen wir auf uns geläufige Formen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X &= 0, \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{w}{L} \frac{dT}{dt} + \frac{\alpha^2}{LC} T &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

von denen uns partikuläre Integrale bekannt sind. Wir haben

$$\left. \begin{aligned} \text{für } X \text{ die Lösung: } e^{i\alpha x}, \\ \text{für } T \text{ die Lösung: } e^{i\beta x}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

wenn β aus der Gleichung bestimmt wird:

$$\beta^2 - i\beta \frac{w}{L} - \frac{\alpha^2}{LC} = 0. \quad (18)$$

Letztere Gleichung schreiben wir

$$\alpha = \pm \sqrt{\beta^2 LC - i\beta wC} \quad (19)$$

und wir erkennen, daß β durch die Wahl von α bestimmt ist und umgekehrt. Wir entscheiden uns dafür, daß β einen positiven und einen negativen reellen Wert (beide absolut gleich) annehmen, wodurch sich vier Werte von α ergeben. Ziehen wir die Wurzel in der Gleichung (19) tatsächlich aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \pm (a + ib) \dots \dots \beta \text{ negativ,} \\ \alpha_2 &= \pm (-a + ib) \dots \dots \beta \text{ positiv,} \end{aligned}$$

wo für die Größen a und b gilt:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{C^2 \beta^2 (L^2 \beta^2 + w^2)} + LC \beta^2 \}}, \\ b &= \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{C^2 \beta^2 (L^2 \beta^2 + w^2)} - LC \beta^2 \}}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Es ergeben sich jetzt für

$$p_x = XT = e^{i(a x + t \beta)} \quad (21)$$

folgende vier partikulären Ansätze

$$e^{-(b + ia)x} \cdot e^{i\beta t}; \quad e^{+(b + ia)x} \cdot e^{i\beta t}; \quad e^{-(b - ia)x} \cdot e^{-i\beta t}; \quad e^{+(b - ia)x} \cdot e^{-i\beta t},$$

aus denen wir mit 4 unbestimmten Integrationskonstanten A, B, C, D das Integral

$$\begin{aligned} p_x &= A e^{-(b + ia)x} e^{i\beta t} + B e^{+(b + ia)x} e^{i\beta t} + C e^{-(b - ia)x} e^{-i\beta t} \\ &\quad + D e^{+(b - ia)x} e^{-i\beta t} \end{aligned} \quad (22)$$

zusammenstellen. Hier bestimmen sich die beiden Konstanten B und D ohne weiteres $= 0$, da für $x = \infty$ das Unendlichwerden von p_k ausgeschlossen sein muß. Der Ansatz vereinfacht sich also zu

$$p_x = A e^{-(b+ia)x} e^{i\beta t} + C e^{-(b-ia)x} e^{-i\beta t} \quad (22a)$$

$$= (A+C) e^{-bx} \cos(\beta t - ax) + i(A-C) e^{-bx} \sin(\beta t - ax). \quad (22b)$$

Diesen Ausdruck haben wir in Zusammenhang zu bringen mit der für $x = 0$ (am Anfang der Leitung) gegebenen Spannung der Dynamomaschine (Fig. 289)

$$e = e_0 \cos \omega t.$$

Die Konstanten A und C in Gleichung (22 b) sind so zu bestimmen, daß wird

$$p_x = e_0 \cos \omega t \quad \text{für} \quad x = 0.$$

Unter Ausführung dieser Bedingung erhält man

$$\begin{aligned} i(A-C) &= 0 \\ (A+C) &= e_0 \\ \beta &= \omega \end{aligned}$$

und hat demnach zu schreiben:

$$p_x = e_0 e^{-bx} (\cos \omega t - ax). \quad (23)$$

Für den Strom J gilt die Beziehung:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -C \frac{\partial p_x}{\partial t}. \quad (24)$$

Setzen wir hier für p_x den Wert aus Gleichung (23) ein, so folgt:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -C \omega e_0 e^{-bx} \sin(\omega t - ax). \quad (25)$$

Durch Integration nach x ergibt sich hieraus mit einer unbestimmten Integrationskonstanten B :

$$J = B + \frac{C \omega e_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-bx} \cos(\omega t - ax + \varphi). \quad (26)$$

Da J für $x = \infty$ verschwinden muß (wegen des offenen Leitungsendes), so muß B verschwinden, und es wird

$$J = e_0 \frac{C \omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-bx} \cos(\omega t - ax + \varphi). \quad (27)$$

Setzt man hier für a und b die durch (20) gegebenen Werte ein, so wird:

$$\text{und } \left. \begin{aligned} \frac{C\omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} &= \sqrt[4]{\frac{C^2\omega^2}{L^2\omega^2 + w^2}} \\ \text{tg } \varphi &= \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{L^2\omega^2 + w^2} - L\omega}{\sqrt{L^2\omega^2 + w^2} + L\omega} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Nunmehr kann eine Diskussion der Gleichungen (27) und (23) an Hand eines Beispieles gegeben werden.

Bei der Leitung sei der Drahradius $r = 0,2$ cm. Dann ist:

1. der Widerstand pro Kilometer

$$w = 1,36 \text{ Ohm} \cdot \text{km}^{-1},$$

2. die Selbstinduktion

$$\begin{aligned} L &= 2 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\lg n \frac{2000}{0,2 \cdot 10^{-2}} - 0,75 \right) \\ &\cong 0,0026 \text{ Henry} \cdot \text{km}^{-1}, \end{aligned}$$

3. die Kapazität

$$C = 0,0030 \text{ Mikrofarad} \cdot \text{km}^{-1}.$$

Mit diesen Daten berechnen sich die in den Formeln für a und b vorkommenden Konstanten:

$$\begin{aligned} L\omega &= 0,0026 \cdot 50 \cdot 2\pi = 0,82 \text{ [sec}^{-1}\text{]}, \\ C\omega &= 0,0030 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 2\pi = 0,94 \cdot 10^{-6} \text{ [sec km}^{-2}\text{]}, \\ w &= 1,36 \text{ [sec}^{-1}\text{]}, \end{aligned}$$

während für a und b selbst sich findet:

$$a = 1,17 \cdot 10^{-3} \text{ [km}^{-1}\text{]}; \quad b = 0,36 \cdot 10^{-3} \text{ [km}^{-1}\text{]},$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ [km}^{-1}\text{]}$$

und

$$\text{tg } \varphi = \frac{b}{a} = 0,303,$$

$$\varphi = 17^{\circ} 7'.$$

Liefert nun die Dynamomaschine eine Wechselspannung der maximalen Momentanstärke $e_0 = 10000$ Volt, so wird die maximale Momentanstärke des von der Leitung aufgenommenen Stromes

$$J_0 = \frac{0,94 \cdot 10^{-6}}{1,22 \cdot 10^{-3}} \cdot 10000 = 7,7 \text{ Ampere.}$$

Dieser Strom hat gegen die Spannung eine Voreilung

$$\varphi = 17^{\circ} 7'.$$

Längs der Leitung variiert nun die Spannung e so, daß ihr Maximalwert nach dem Gesetze e^{-bx} abnimmt. Die Abnahme ist eine sehr langsame. Der Halbwert ergibt sich aus der Gleichung

$$e^{-bx} = \frac{1}{2}$$

für

$$x = \frac{\lg n 2}{b} = \frac{0,693}{0,36} \cdot 1000 \text{ km} = 1920 \text{ km},$$

d. h. erst in einer Entfernung von 1920 km vom Anfangspunkt sinkt die Spannung auf den Halbwert.

Ferner erscheint die Spannung in ihrer Phase gegen den Anfangspunkt immer mehr verzögert, je weiter man sich von diesem entfernt. In der Entfernung

$$x = \frac{\pi}{a} = \frac{3,14}{0,35} \cdot 1000 = 2680 \text{ km}$$

ist die Verzögerung $= \pi$ geworden, d. h. in diesem Punkte ist die Spannung der Anfangsspannung gerade entgegengesetzt.

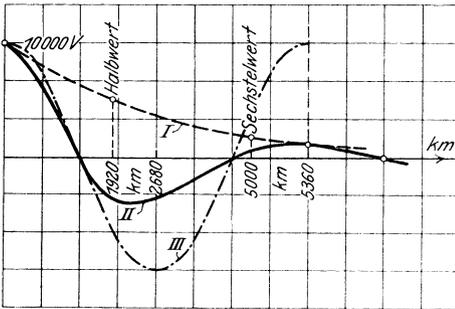


Fig. 290. Verteilung einer Wechselstromspannung längs unbegrenzter Leitung.

Die Spannungsverteilung für die ganze Leitung ergibt sich in einem gegebenen Zeitpunkt, z. B. $t = 0$, zu

$$\begin{aligned} e &= e_0 e^{-bx} \cos(-ax) \\ &= e_0 \cdot e^{-bx} \cdot \cos ax. \end{aligned}$$

Da man die Kurve e^{-bx} leicht aufzeichnen kann, wenn man vielleicht noch den Sechstelwert

$$e^{-bx} = \frac{1}{6},$$

$$x = \frac{\lg n 6}{b} = 5000 \text{ km}$$

bestimmt, so ergibt sich $e_0 e^{-bx} \cos ax$ ebenfalls in einfacher Weise, da wir oben die Periode von $\cos ax$ bereits mit 5360 km festgestellt haben. In der Fig. 290 gibt

$$\begin{array}{lll} \text{Kurve I} & \text{die Funktion} & e_0 \cdot e^{-bx}, \\ \text{II} & \text{''} & e_0 \cos ax, \\ \text{III} & \text{''} & e_0 \cdot e^{-bx} \cos ax. \end{array}$$

IV. Eine besonders wichtige Erscheinung zeigt sich, wenn die betrachtete Leitung von endlicher Länge l ist. Sie soll auch jetzt an ihrem freien Ende offen sein. Da die Gleichungen sich vereinfachen, nehmen wir die Dynamomaschine am Ende

$$x = l$$

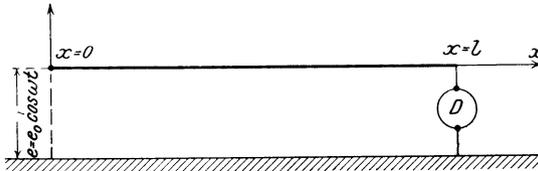


Fig. 291. Dynamomaschine an einer begrenzten Leitung.

an, Fig. 291, verlegen also das offene Leitungsende in den Anfangspunkt $x = 0$, für welchen dann gilt:

$$\text{Spannung } e = e_0 \cos \omega t,$$

$$\text{Strom} = 0.$$

Zur Behandlung der Aufgabe steht uns wieder unsere Gleichung (22) zur Verfügung, die für $x = 0$ als erste Bedingung für die Integrationskonstanten A, B, C, D den Ansatz liefert:

$$(A + B)e^{+i\beta t} + (C + D)e^{-i\beta t} = e_0 \frac{e^{+i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

Hieraus findet sich zunächst

$$\beta = \omega$$

und

$$\left. \begin{aligned} A + B &= \frac{e_0}{2}, \\ C + D &= \frac{e_0}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Zwei weitere Gleichungen für A, B, C, D liefert die Bedingung, daß für $x = 0$ der Strom $J = 0$ sein soll.

Wir haben erstlich für $\frac{\partial J}{\partial x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &= -C \frac{\partial p}{\partial t} = -C \omega i e^{+i\omega t} [A e^{-(b+ia)x} + B e^{+(b+ia)x}] \\ &\quad - C \omega i e^{-i\omega t} [C e^{-(b-ia)x} + D e^{+(b-ia)x}]. \end{aligned}$$

Nach Integration nach x findet sich

$$J = + \frac{C \omega i e^{+i \omega t}}{b + i a} [A e^{-(b+i a) x} - B e^{+(b+i a) x}] \\ + \frac{C \omega i e^{-i \omega t}}{b - i a} [C e^{-(b-i a) x} - D e^{+(b-i a) x}].$$

Führt man nun die Bedingung für

$$x = 0, \quad J = 0$$

ein, so entsteht:

$$\left. \begin{aligned} A - B = 0, \\ C - D = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Aus (29) und (30) ergibt sich

$$A = B = C = D = \frac{e_0}{4}$$

und

$$p_x = \frac{e_0}{2} [e^{-bx} \cos(\omega t - ax) + e^{+bx} \cos(\omega t + ax)]. \quad (31)$$

Diesen Ausdruck wollen wir auf die Form

$$p_x = \frac{e_0}{2} M \cos(\omega t + \psi) \quad (32)$$

bringen. Nach Entwicklung der Kosinus in der eckigen Klammer bieten sich die Ansätze dar:

$$\left. \begin{aligned} M \cos \omega t \cos \psi &= (e^{+bx} + e^{-bx}) \cos ax \cos \omega t, \\ M \sin \omega t \sin \psi &= (e^{+bx} + e^{-bx}) \sin ax \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Addiert man beide Gleichungen, nachdem man sie zum Quadrat erhoben hat, so kommt

$$M^2 = e^{+2bx} + e^{-2bx} + 2 \cos 2ax. \quad (34)$$

Dividiert man die erste in die zweite, so entsteht:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{e^{+bx} - e^{-bx}}{e^{+bx} + e^{-bx}} \operatorname{tg} ax. \quad (35)$$

Von besonderem Interesse ist hier die Größe M , nach welcher sich die Änderung der Spannung vom offenen Leitungsende gegen das Generatorende hin regelt.

Für $x = 0$ ist $M^2 = 4$.

Da ferner

$$\frac{d(M^2)}{dx} = 2b(e^{+2bx} - e^{-2bx}) - 4a \sin 2ax$$

für $x=0$ den Wert Null annimmt, so hat die Kurve

$$y = M^2$$

für $x=0$ ein Extrem.

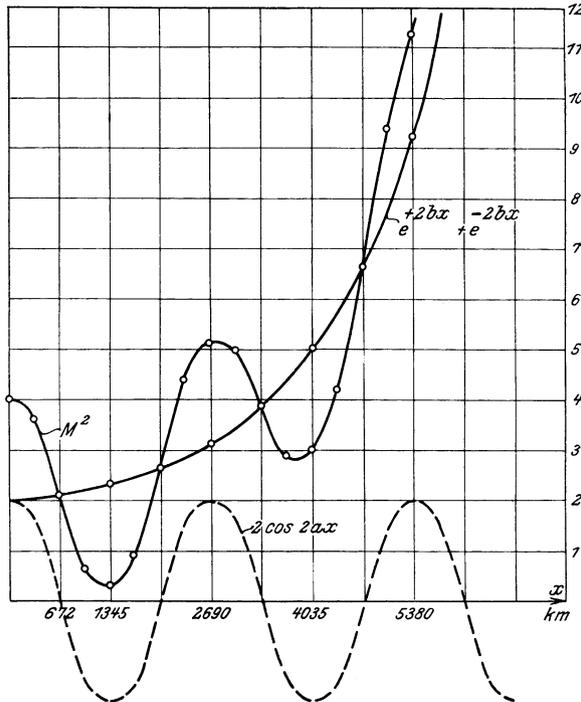


Fig. 292. Verteilung einer Wechselstromspannung längs einer begrenzten Leitung.

Da

$$\frac{d^2(M^2)}{dx^2} = 4b^2(e^{+2bx} + e^{-2bx}) - 8a^2 \cos 2ax$$

für $x=0$ den Wert $8b^2 - 3a^2$ annimmt, so ist das Extrem ein Maximum für $b < a$, ein Minimum für $b > a$.

Ist $b = a$, so gibt es bei $x=0$ weder ein Minimum noch ein Maximum, sondern die Kurve $y = M^2$ hat eine horizontale Wendetangente.

In unserem oben behandelten Beispiel war $a > b$, mithin ergibt dieses Beispiel eine vom freien Ende nach dem Dynamoende hin abfallende Spannungsverteilung. In der Fig. 292 ist der mit $a = 1,17 \cdot 10^{-3}$ und $b = 0,36 \cdot 10^{-3}$ sich ergebende Verlauf von $y = M^2$ gezeichnet. Demnach würde eine Freileitung von 672 km Länge, mit diesen Konstanten angeschlossen an eine Dynamo von $e_0 = 10000$ Volt Maximalspannung, am offenen Ende eine Spannung von $10000 \cdot \frac{2}{\sqrt{2,1}} = 13800$ Volt,

also eine beträchtliche Spannungssteigerung ergeben. Diese Erscheinung der Spannungszunahme von der Dynamomaschine nach dem offenen Leitungsende hin ist unter dem Namen Ferrantiphänomen seit 1890 bekannt.

§ 119. Ausgleichsvorgänge in linearen Leitern.

I. In § 117 haben wir den Vorgang, der sich nach Änderung der elektrischen Zustandsbedingungen einer Leitung bis zum Eintreten eines neuen Beharrungszustandes vollzieht, als Ausgleichsvorgang bezeichnet.

Eine Änderung der elektrischen Zustandsbedingungen tritt u. a. ein in folgenden Fällen:

1. Änderung der Größe der auf die Leitung aufgedrückten Spannung. Hierher gehört als wichtigstes Beispiel das Anschalten einer spannungslosen am Ende offenen Leitung an einen Generator.

2. Änderung der Größe des aus der Leitung entnommenen Stromes, z. B. beim Einschalten eines Stromverbrauchers (Transformator, Motor usw.) oder beim Durchbrennen einer Sicherung oder beim Auftreten eines Kurzschlusses.

3. Übertritt von atmosphärischer Elektrizität auf den Leiter.

II. Zur weiteren Untersuchung ziehen wir wieder die Gleichung (11 d) § 118 heran:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + wC \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (1)$$

und wir behalten uns vor, je nach Bedarf entweder die Spannung p oder den Strom J aus Φ vermöge der Ansätze:

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad J = -C \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2)$$

abzuleiten.

Für die Differentialgleichung (1) hatten wir in § 118 bereits eine Lösung

$$\Phi = e^{i(\alpha x + \beta t)} \quad (3)$$

mit reellem β und mit einem von β abhängigen α :

$$\alpha = \pm \sqrt{\beta^2 LC - i\beta wC} \quad (4)$$

aufgestellt. Diese Lösung ist hier aber unbrauchbar, denn sie ist in t rein periodisch (weil $e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \sin \beta t$ ist). Jetzt erkennen wir, warum wir damals β reell genommen haben. Wir hatten den Beharrungszustand zu untersuchen, der bei imaginärem β (etwa $= \pm i\beta_0$) niemals vorhanden sein könnte, weil dann $\Phi = e^{i\alpha x} \cdot e^{\pm \beta_0 t}$ mit der Zeit entweder bis Null abnehmen oder unendlich zunehmen würde. Dies kann aber niemals die Eigenschaft des Beharrungszustandes sein.

Anders liegt jedoch die Sache im vorliegenden Fall, wo ein Ausgleichsvorgang zu untersuchen ist. Der Ausgleichsvorgang verbindet zwei stationäre Zustände miteinander, er führt sie ineinander über. Dieser Übergang kann nur in endlicher Zeit erfolgen, da Zustandsänderungen nie in der Zeit Null erfolgen können.

Bezeichnet man die Zustandsgröße vom Augenblick $t = 0$ des Eintritts der Änderung der Zustandsbedingungen mit Φ , so kann man sich den Ausgleich vollzogen denken durch Hinzufügung der Ausgleichsgröße Φ_f , wodurch man die Zustandsgröße Φ_{II} , die nach Herstellung des neuen Beharrungszustandes gelten soll, von $t = 0$ an erhalten würde:

$$\Phi_{II} = \Phi + \Phi_f. \quad (5)$$

Hier sind alle Φ Zeitfunktionen und können auch die Variable x enthalten.

Φ_{II} stellen wir jetzt durch $\Phi_{II}(0) + \Phi_{II}(t)$ dar:

$$\Phi_{II} = \Phi_{II}(0) + \Phi_{II}(t), \quad (6)$$

wo $\Phi_{II}(0)$ den dem Zeitpunkt $t = 0$ entsprechenden Wert bedeutet und $\Phi_{II}(t)$ demnach für $t = 0$ verschwinden muß. Analog stellen wir Φ_f wie folgt dar:

$$\Phi_f = \Phi_f(0) + \Phi_f(t). \quad (7)$$

Der Übergang findet dann statt, wenn

- a) Φ_{II} und Φ_f der Differentialgleichung (1) genügen,
- b) $\Phi_f(0) = \Phi_{II} - \Phi(0)$ ist, (8)
- c) Φ_f für $t = \infty$ verschwindet. Es gilt dann Fig. 293.

Die Funktion Φ_{II} muß als Beharrungszustandsgröße eine rein periodische Funktion sein, deren Ermittlung mit reellem β sich auf den Ansatz (3) aufbaut.

Die Funktion Φ_f muß als Ausgleichszustandsgröße die Exponentialfunktion enthalten, und zwar mit negativem Exponenten, weil Φ_f mit wachsendem t verschwinden muß. Dieser Anforderung wird man in der Gleichung (4) gerecht, wenn man α reell wählt. Denn dann hat man:

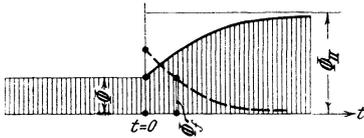


Fig. 293. Übergang von einem Beharrungszustand in einen neuen.

$$\beta^2 LC - i\beta wC = \alpha^2 \quad (9)$$

oder

$$\beta = \frac{w}{2L} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{LC} - \frac{w^2}{4L^2}}, \quad (10)$$

$$= ia \pm b. \quad (11)$$

Als allgemeinen Ansatz erhalten wir dann für Φ :

$$\Phi = e^{i\alpha x} e^{(-a \pm ib)t}. \quad (12)$$

Da wir hier statt $+a$ auch $-a$ wählen dürfen, so ergeben sich folgende vier partikuläre Lösungen für Φ :

$$e^{i\alpha x} e^{(-a+ib)t}; \quad e^{i\alpha x} e^{(-a-ib)t}; \quad e^{-i\alpha x} e^{(-a+ib)t}; \quad e^{-i\alpha x} e^{(-a-ib)t}.$$

Aus diesen setzen wir mit vier willkürlichen Konstanten eine allgemeine Lösung zusammen:

$$\Phi = e^{-at} (A' e^{+i\alpha x} + B' e^{-i\alpha x}) (C' e^{+ibt} + D' e^{-ibt}) \quad (13)$$

oder nach Einführung der zyklometrischen Funktionen

$$\Phi = e^{-at} (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) (C \cos bt + D \sin bt). \quad (14)$$

Jede Wahl von α liefert eine Lösung, wenn

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{w}{2L} \\ b &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{LC} - \frac{w^2}{4L^2}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

genommen wird.

Aus (14) leiten wir die Spannung p ab:

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{-at} \alpha (-A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) C \cos bt + D \sin bt \quad (16)$$

sowie den Strom J :

$$J = -C \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -C e^{-at} (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) \\ \{ (bD - aC) \cos bt - (aD + bC) \sin bt \}. \quad (17)$$

Der Möglichkeit, daß mehrere Werte von α zu berücksichtigen sind, werden wir nun durch einen Reihenansatz gerecht, indem wir α mit einem Zeiger k versehen, über den wir noch Verfügung treffen werden. Jedenfalls aber bilden wir die Reihe aus der Gesamtheit aller der Werte von (16) bzw. (17), die durch Berücksichtigung aller geeigneten Werte von α_k sich darbieten, d. h. die Summen:

$$p = e^{-at} \sum_k \alpha_k (B_k \cos \alpha_k x - A_k \sin \alpha_k x) (C_k \cos b_k t + D_k \sin b_k t), \quad (18)$$

$$J = -C e^{-at} \sum_k (A_k \cos \alpha_k x + B_k \sin \alpha_k x) \\ \{ (b_k D_k - a C_k) \cos b_k t - (a D_k + b_k C_k) \sin b_k t \} \quad (19)$$

in welchen Entwicklungen gilt:

$$b_k = \sqrt{\frac{\alpha_k^2}{LC} - \frac{w^2}{4L^2}}. \quad (20)$$

Die Reihenentwicklungen (18) und (19) sind genügend allgemein, um alle durch eine spezielle Aufgabe gegebenen Bedingungen berücksichtigen zu können.

III. Es handle sich um den Ausgleichsvorgang, der eintritt, wenn man eine am Ende offene Leitung der Länge l zur Zeit $t = 0$ an eine Gleichstromspannung E anlegt. Hiernach haben wir als anfängliche Zustandsgröße $\Phi(0)$

die Spannung

$$p(0) = 0$$

und den Strom

$$J(0) = 0$$

einzuführen.

Wir wissen auch ohne weiteres, wie die nach vollzogenem Ausgleich vorhandenen Zustandsgrößen $\Phi_{II} = \Phi_{II}(0) + \Phi_{II}(t)$ aussehen. Die Spannung ist:

$$p_{II}(0) = E; \quad p_{II}(t) = 0$$

der Strom

$$J_{II}(0) = 0; \quad J_{II}(t) = 0.$$

Nach Gleichung (8) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} p_f(0) &= p_{II}(0) - p(0) = E, \\ J_f(0) &= J_{II}(0) - J(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Die Ausgleichsgrößen, die wir zu bestimmen haben, sind $p_f(t)$ und $J_f(t)$, für deren Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ die Ansätze (21) maßgebend sind. Diese Ansätze führen wir in die Reihen (18) und (19) ein:

$$\left. \begin{aligned} E &= \sum_k \alpha_k C_k (B_k \cos \alpha_k x - A_k \sin \alpha_k x), \\ 0 &= -C \sum (b_k D_k - a C_k) (A_k \cos \alpha_k x + B_k \sin \alpha_k x). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Mit Ansetzung der beiden Gleichungen (22) haben wir die sogenannten Anfangsbedingungen (21) berücksichtigt, und es gilt jetzt, aus (22) die unbekanntenen Konstanten A_k, B_k, C_k, D_k zu ermitteln. Zwei Gleichungen sind hierzu nicht hinreichend; es fehlen noch die Grenzbedingungen, welche festsetzen, wie die Zustandsgrößen p und J während des Ausgleichs am Anfang und am Ende der Leitung beschaffen sind. Am Anfang der Leitung gilt dauernd

$$p_f = p_{II} - p = E - E = 0 \quad \text{für } x = 0, \quad (23a)$$

wenn wir annehmen können, daß die Stromquelle durch den Ausgleichsvorgang nicht beeinflußt werde. Am Ende der Leitung gilt, da dort kein Strom fließen kann, weil sie offen ist,

$$J = 0 \quad \text{für } x = l. \quad (23b)$$

Wir setzen (23a) in (18) ein und erhalten:

$$e^{-at} \sum_k \alpha_k B_k (C_k \cos b_k t + D_k \sin b_k t) = 0,$$

welchem Ansatz offensichtlich nur durch

$$B_k = 0 \quad (24)$$

genügt werden kann. Berücksichtigt man dies Resultat sofort bei Gleichung (19), in welche wir die Bedingung (23b) einzutragen haben, so muß gelten:

$$C e^{-at} \sum A_k \cos \alpha_k l \{ (b_k D_k - a C_k) \cos b_k t - (a D_k + b_k C_k) \sin b_k t \} = 0.$$

Dieser Gleichung kann genügt werden durch:

$$\cos \alpha_k l = 0. \quad (25)$$

Das Verschwinden des Kosinus tritt ein für alle ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, d. h. für

$$\alpha_k l = (2k + 1) \frac{\pi}{2}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

womit die bisher noch unbekanntenen Größen α_k festgelegt sind:

$$\alpha_k = (2k + 1) \frac{\pi}{2l}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

woraus noch folgt:

$$b_k = \sqrt{\frac{(2k + 1)^2 \pi^2}{4l^2 LC} - \frac{w^2}{4L^2}}.$$

Wenden wir nun das Ergebnis (24) auf die noch nicht berücksichtigten Gleichungen (22) an, so gewinnt man:

$$\left. \begin{aligned} E &= - \sum_k \alpha_k C_k A_k \sin \alpha_k x \\ \text{und} \\ 0 &= \sum_k (b_k D_k A_k - \alpha_k C_k A_k) \cos \alpha_k x, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

in denen man noch abkürzend

$$\begin{aligned} C_k A_k &= M_k, \\ D_k A_k &= N_k, \end{aligned}$$

mit dem Resultat:

$$\left. \begin{aligned} E &= - \sum_k \alpha_k M_k \sin \alpha_k x, \\ 0 &= \sum_k (b_k N_k - a M_k) \cos \alpha_k x \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

setzen kann.

In der ersten dieser Gleichungen multiplizieren wir nach Fourier (siehe § 72) links und rechts mit $\sin \alpha_k x dx$ und integrieren von 0 bis l . Dann bleibt nur übrig:

$$M_k = - \frac{1}{\alpha_k} \frac{E \int_0^l \sin \alpha_k x dx}{\int_0^l \sin^2 \alpha_k x dx} = - \frac{4E}{(2k + 1) \pi \alpha_k}. \quad (29)$$

Aus der zweiten Gleichung findet sich:

$$b_k N_k - a M_k = 0$$

oder

$$N_k = \frac{a}{b_k} M_k = \frac{4aE}{(2k+1)\pi\alpha_k b_k}. \quad (30)$$

Hiermit lassen sich die Ausgleichsgrößen p_f und J_f bzw. der tatsächliche Verlauf der Spannung und des Stromes auf der Leitung

$$p_{II} - p_f = E - e^{-at} \frac{4E}{\pi} \sum \frac{1}{2k+1} \sin\alpha_k x \left(\cos b_k t + \frac{a}{b_k} \sin b_k t \right) \quad (31)$$

$$J_{II} - J_f = \frac{C e^{-at}}{LC} \frac{4E}{\pi} \sum \frac{1}{2k+1} \frac{\alpha_k}{b_k} \cos\alpha_k x \sin b_k t \quad (32)$$

aus den Gleichungen (18) bzw. (19) ermitteln, womit die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist. In diesen Formeln haben die Größen E und a folgende physikalische Benennungen:

E = aufgedrückte Spannung,

$a = \frac{w}{2L}$ = Dämpfungskonstante.

Über α_k stellen wir folgende Betrachtung an:

$$\sin\alpha_k x = \sin(2k+1) \frac{\pi}{2l} x$$

hat für $k=0$ die räumliche Periode $4l$, d. h. in allen Punkten der Leitung, die um die Strecke $4l$ auseinanderliegen, hat die Funktion $\sin \frac{2\pi}{4l} x$ gleiche Werte; $4l$ heißt die Wellenlänge. Für höhere Ordnungszahlen $k=1, 2, 3, \dots$ sind die Wellenlängen kürzer:

$$\lambda_k = \frac{4l}{2k+1}. \quad (33)$$

Die Funktion

$$\cos b_k t = \cos \frac{2\pi}{T_k} t \quad (T_k \cdot b_k = 2\pi)$$

liefert die zeitlichen Perioden T_k , denen die Schwingungszahlen oder Frequenzen $\frac{1}{T_k} = \frac{b_k}{2\pi}$ entsprechen.

Die Ausgleichsgrößen stellen sich also dar als räumliche und zeitliche Übereinanderlagerungen von Schwingungen ungerader Ordnung, deren Wellenlängen sich wie die ungeraden Zahlen verhalten.

IV. Wir berechnen jetzt mit den Zahlenwerten von § 106 an einer $l = 1$ km langen Leitung ein Beispiel. Es ergeben sich die Konstanten

$$a = \frac{w}{2L} = \frac{1,36}{0,0052} = 260 [\text{sec}^{-1}],$$

$$\frac{\alpha_k^2}{LC} = \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4l^2 LC} = \frac{(2k+1)^2 9,8}{4 \cdot 1 \cdot 0,0026 \cdot 0,0030 \cdot 10^{-6}}$$

$$= 0,314 (2k+1)^2 \cdot 10^{12} [\text{sec}^{-2}].$$

Demnach ist schon für die Schwingungen niedrigster Ordnung $\frac{\alpha_0^2}{LC} = 0,314 \cdot 10^{12}$ so groß, daß daneben $a^2 = 6,8 \cdot 10^4$ vernachlässigt werden kann. Hiermit ergibt sich das angenäherte Resultat:

$$b_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{LC}}. \quad (34)$$

$\frac{1}{\sqrt{LC}}$ hat die Dimension $[\text{km}/\text{sec}^{-1}]$, ist also eine Geschwindigkeit, die wir abgekürzt mit V bezeichnen wollen, womit wir das Ergebnis

$$\frac{b_k}{\alpha_k} = V \quad (35)$$

erhalten oder mit

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k}{2\pi} \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2\pi}{T_k}$$

$$\frac{\lambda_k}{T_k} = V. \quad (36)$$

Angenähert ist also das Verhältnis zwischen Wellenlänge und Schwingungsdauer für Schwingungen aller Ordnungen konstant.

Unter diesen Umständen vereinfachen sich die Gleichungen (31) und (32) wie folgt:

$$p = E - e^{-at} \frac{4E}{\pi} \sum \frac{1}{2k+1} \sin \frac{2\pi}{\lambda_k} x \cos \frac{2\pi}{T_k} t, \quad (37)$$

$$J = \frac{e^{-at} 4E}{L} \frac{1}{\pi} \sum \frac{1}{2k+1} \frac{1}{V} \cos \frac{2\pi}{\lambda_k} x \sin \frac{2\pi}{T_k} t. \quad (38)$$

Die Produkte der Winkelfunktionen schreiben wir jetzt wie folgt:

$$\begin{aligned}\sin \frac{2\pi}{\lambda_k} x \cos \frac{2\pi}{T_k} t &= \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_k} x + \frac{2\pi}{T_k} t \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_k} x - \frac{2\pi}{T_k} t \right), \\ \cos \frac{2\pi}{\lambda_k} x \sin \frac{2\pi}{T_k} t &= \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_k} x + \frac{2\pi}{T_k} t \right) - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_k} x - \frac{2\pi}{T_k} t \right).\end{aligned}$$

Hier stellt $\frac{1}{2} \sin \pi \left(\frac{x}{\lambda_k} + \frac{t}{T_k} \right)$ eine nach Richtung der negativen x mit der Geschwindigkeit $V = \frac{\lambda_k}{T_k}$ fortschreitende Welle dar, während $\frac{1}{2} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_k} - \frac{t}{T_k} \right)$ in Richtung der positiven x fortschreitet. (Vgl. § 102.) Aus derartigen Paaren von Wellenzügen setzen sich nun auch p und J zusammen, so daß beide Zustandsgrößen durch zwei in entgegengesetzter Richtung sich längs der x -Achse mit der Geschwindigkeit V verschiebende Wellen dargestellt werden, von denen jede die Summe unendlich vieler harmonischer (sinusförmiger) Wellen ungerader Ordnung ist. Die Form der Wellen bleibt, wenn wir vorläufig von dem Einfluß des Faktors $e^{-\alpha t}$ absehen, mit der Zeit unveränderlich, so daß es genügt, wenn wir ihre Gestalt zur Zeit $t=0$ bestimmen.

Dann haben wir für p die beiden Wellen

$$-\frac{E}{2} \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2k+1} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda_k} \quad \text{und} \quad -\frac{E}{2} \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2k+1} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda_k} \quad (39)$$

zu untersuchen. Sie sind offenbar identisch.

Mit

$$\lambda_k = \frac{4l}{2k+1}$$

wird die Summe

$$\sum \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \cdot \frac{2\pi}{4l} x = \frac{\pi}{4} \quad (39a)$$

für $0 < x < 2l$.

Um dies zu beweisen, entwickeln wir die Funktion $f(x) = \frac{\pi}{4}$ in eine Fouriersche Sinusreihe:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} = \sum a_n \sin nx$$

zunächst im Intervall $0 < x < \pi$. Die Fouriersche Vorschrift ergibt:

$$\frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = a_n \int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx.$$

Die Auswertung der Integrale liefert:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin nx \, dx = -\frac{1}{n}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{n}(1 - \cos n\pi) = \frac{1 - (-1)^n}{n},$$

womit sich findet

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{2n}.$$

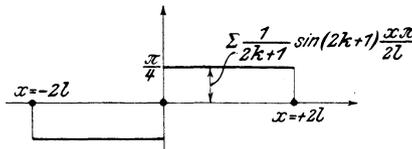


Fig. 294. Zur Darstellung der Funktion $\frac{\pi}{4}$ durch eine Fouriersche Reihe.

Also wird:

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin(2k+1)x \tag{40}$$

im Intervall $0 < x < \pi$.

Setzt man jetzt statt x ein: $\frac{\pi x}{2l}$, so entsteht aus (40)

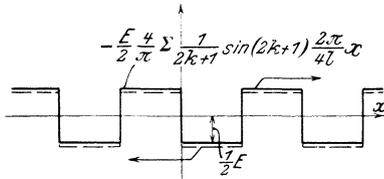
$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\frac{x\pi}{2l} = \frac{\pi}{4} \tag{41}$$

im Intervall $0 < x < 2l$, welche Funktion in Fig. 294 dargestellt ist.

Daß die Summe (41) im Intervall $-2l < x < 0$ den Wert $-\frac{\pi}{4}$ ergibt, wollen wir nicht besonders beweisen, und auch nicht,

daß sich der gezeichnete Linienzug für $x > 2l$ und $x < -2l$ in kongruenter Weise wiederholt.

Demnach gestattet (39) die Darstellung Fig. 295 als rechteckige Wellen, bei denen die Pfeile das Fortschreiten mit der Zeit t nach der positiven und negativen x -Richtung charakterisieren sollen. Mit diesen beiden Wellen kombiniert sich nach



Formel (37) der konstant über die ganze Leitungslänge ausgedehnte Spannungswert E zu der tatsächlichen Spannung p .

Die längste vorkommende Schwingungsdauer ist die der Schwingung der Ordnung $k=0$

Fig. 295. Zur Darstellung eines rechteckigen Wellenzuges durch Fouriersche Reihen.

$$T_k = \frac{4l}{2k+1} \sqrt{LC},$$

$$T = 4l\sqrt{LC} = 4 \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} = 1,12 \cdot 10^{-5} [\text{sec}]$$

bei einer Leitungslänge $l = 1$ km. Wir versuchen uns den Vorgang auf der Leitung während dieser Zeit durch Fig. 296 zu verbildlichen.

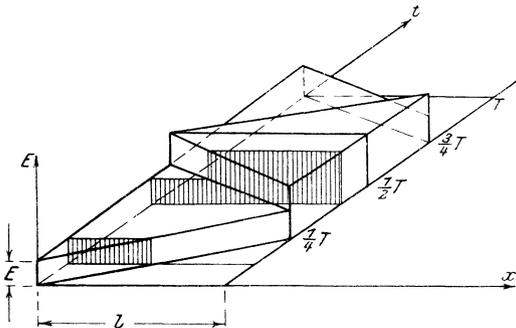


Fig. 296. Spannungsverteilung bei einem Ausgleichsvorgang.

Während der ersten Viertelperiode ladet sich die Leitung auf die Spannung E auf, wobei eine scharfe Grenze zwischen dem geladenen und dem noch nicht geladenen Teil der Leitung besteht. Diese Grenze schreitet mit der Geschwindigkeit $V = \sqrt{LC}$ vorwärts. Die ganze Leitung ist aufgeladen nach Verlauf der Zeit $t = \frac{1}{4}T$. Von jetzt ab addieren sich, vom Leitungsende l anfangend, die beiden gegenläufigen Wellenzüge zur Spannung E , so daß eine Ladewelle der Spannung $2E$ in Richtung auf den

Anfangspunkt der Leitung fortschreitet. Man bezeichnet diesen Vorgang als Reflexion der Welle am Leitungsende. Nach Verlauf der Zeit $t = \frac{T}{2}$ (wenn die Ladewelle $2E$ am Anfang der Leitung angekommen ist) beginnt sich die Leitung zu entladen, bis zur Zeit $t = T$ der Anfangszustand wieder erreicht wird. Während dieser Zeit hat aber die Amplitude E der Welle nach Maßgabe des Faktors

$$e^{-aT} = e^{-0,26 \cdot 1,11 \cdot 10^{-2}}$$

auf $\frac{E}{1,004}$, also um ca. 4 v. T. abgenommen. Nach der Zeit $10^5 T = 1,12 \text{ sec}$ ist jedoch der Einfluß der beiden gegenläufigen Wellenzüge praktisch auf Null abgeklungen, so daß als Endzustand die Ladung der ganzen Leitung mit der konstanten Spannung E übrigbleibt.

Der Ladestrom J , dessen Verlauf wir im einzelnen nicht verfolgen, klingt gleichzeitig mit p auf den Dauerwert Null ab.

Fig. 297 gibt bildlich den Verlauf von J ohne Berücksichtigung der Dämpfung.

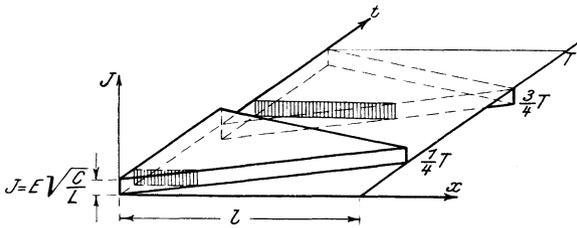


Fig. 297. Stromverteilung bei einem Ausgleichsvorgang.

V. Handelt es sich um schwierigere Fälle, z. B. plötzliche Erhöhung der Wechselstromspannung am Anfang einer am Ende offenen Leitung von

$$P_I(0) \sin [\omega t + \varphi_1(0)]$$

auf

$$P_{II}(0) \sin [\omega t + \varphi_2(0)],$$

so hat man folgende Schritte zu tun.

a) Der Beharrungszustand vor Eintritt des Schaltvorganges muß bekannt sein nach Strom und Spannung:

$$p_i = P_i(x) \sin [\omega t + \varphi_1(x)],$$

$$J_i = J_i(x) \sin [\omega t + \psi_1(x)].$$

b) Der neue Beharrungszustand nach Abklingen des Schaltvorganges muß ebenfalls bekannt sein:

$$\begin{aligned} p_{II} &= P_{II}(x) \sin[\omega t + \varphi_2(x)], \\ J_{II} &= J_{II}(x) \sin[\omega t + \psi_2(x)]. \end{aligned}$$

c) Die Ausgleichsgrößen p_f und J_f stehen zu den Beharrungsgrößen in folgender Beziehung:

$$\begin{aligned} p_{II} &= p + p_f, \\ J_{II} &= J + J_f, \end{aligned}$$

wo p und J die Zustandsgrößen während des Ausgleichs bedeuten.

d) Setzen wir hier für p_f und J_f die Reihenentwicklungen ein, die formal die Differentialgleichungen (1) und (2) befriedigen, so liefert der Ausdruck der Anfangsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} p_f(0) &= p_{II}(0) - p_I(0) \\ J_f(0) &= J_{II}(0) - J_I(0) \end{aligned} \right\} t = 0$$

zwei Gleichungen für die 4 unbekanntenen Konstanten A_k , B_k , C_k , D_k . Um zwei weitere Bedingungen, die zur restlosen Bestimmung sämtlicher Konstanten noch erforderlich sind, zu gewinnen, führen wir die Grenzbedingungen ein:

$$p_f = p_{II} - p = 0 \quad \text{für} \quad x = 0,$$

weil am Anfang der Leitung dauernd

$$p_{II} = p = P_2(0) \sin[\omega t + \varphi_2(0)]$$

ist,

$$J_f = 0 \quad \text{für} \quad x = l,$$

weil die Leitung am Ende offen ist.

Die Grenzbedingungen liefern eine Wertreihe α_k (die Perioden) sowie das Verhältnis $\frac{B_k}{A_k}$, während die Anfangsbedingungen die Werte C_k und D_k und hiermit Amplitude und Phase der einzelnen Schwingungen zu berechnen gestatten. Wir haben hier formal dasselbe Ergebnis wie bei den radialen Schwingungen der Kugel. Die Oberflächenbedingung lieferte die Periodengleichung zur Bestimmung der Perioden, die Anfangsbedingung lieferte Amplituden und Phasen¹²⁴).

§ 120. Der Skineffekt.

Wir verzichten jetzt auf die Vernachlässigung, die wir in § 118 durch Fortlassen des Gliedes $R \left[\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial r} \right]_{r=R}$ eingeführt haben, und gehen auf die Gleichungen des zylindrischen Feldes in § 117 zurück:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial (r M_\theta)}{\partial r} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} + 4 \pi \lambda \mathbf{E}_x, \\ +\frac{1}{r} \frac{\partial (r M_\theta)}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial t} + 4 \pi \lambda \mathbf{E}_r, \\ \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial x} &= \mu \frac{\partial M_\theta}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathbf{E}_r)}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Von Hertz stammt die Bemerkung, daß es eine potentialartige Funktion $\Pi(x, r, t)$ gibt, von der man \mathbf{E}_x , \mathbf{E}_r , M_θ wie folgt ableitet:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}, \\ \mathbf{E}_r &= -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial r}, \\ M_\theta &= -\varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} - 4 \pi \lambda \frac{\partial \Pi}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Es läßt sich leicht verifizieren, daß die ersten beiden Gleichungen und die vierte Gleichung (1) durch den Ansatz (2) befriedigt werden, während die dritte Gleichung (1) die Funktion Π der partiellen Differentialgleichung:

$$\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + 4 \pi \mu \lambda \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad (3)$$

unterwirft.

Versucht man, dieser Gleichung durch einen partikulären Ansatz

$$\Pi = X P T \quad (4)$$

gerecht zu werden, so findet sich, wie wir ohne weitere Rechnung angeben wollen:

$$\left. \begin{aligned} X &= e^{i \alpha x}, \\ T &= e^{i \beta t}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

während P als Funktion von r der gewöhnlichen Differentialgleichung zu genügen hat:

$$(-\varepsilon \mu \beta^2 + 4\pi \mu \lambda \beta i + \alpha^2)P = \frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr}. \quad (6)$$

Setzen wir hier abkürzungshalber

$$-\varepsilon \mu \beta^2 + 4\pi \mu \lambda \beta i + \alpha^2 = -\alpha^2, \quad (7)$$

so erkennen wir in

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} + \alpha^2 P = 0 \quad (8)$$

die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen der Ordnung Null.

Die Differentialgleichung hat zwei voneinander unabhängige partikuläre Integrale: $J_0(ar)$ und $K_0(ar)$, in welchen das Argument ar wegen (7) auch komplex sein kann.

Aus diesen Integralen würde sich die allgemeine Lösung von (8) mit den beiden Integrationskonstanten A und B schreiben:

$$P = AJ_0(ar) + BK_0(ar). \quad (9)$$

Weil aber $K_0(ar)$ für $r = 0$ (logarithmisch) unendlich wird, muß sich (9) auf

$$P = AJ_0(ar) \quad (10)$$

reduzieren (vgl. § 96).

Vermöge (2) und (4) finden wir jetzt unter Einrechnung des negativen Vorzeichens in die Konstante

$$E_x = AX T a^2 J_0(ar). \quad (11)$$

Im folgenden wollen wir zuvörderst von der Abhängigkeit von E_x von x absehen, d. h. wir setzen in (7) $\alpha = 0$ und in (11) $X = 1$ und finden

$$E_x = Aa^2 J_0(ar) e^{i\omega t}. \quad (12)$$

wo $\beta = \omega$ die Kreisfrequenz eines in der Leitung fließenden Wechselstromes bedeutet.

Der elektrischen Feldstärke E_x entspricht eine Dichte des Leitungsstromes

$$i_x = \lambda E_x = A\lambda a^2 J_0(ar) e^{i\omega t}. \quad (13)$$

Den Verschiebungsstrom vernachlässigen wir, indem wir $\varepsilon = 0$ und demnach $\alpha^2 = -4\pi\mu\lambda\omega i$ setzen.

Infolge der Symmetrie um die Achse des Leiters (vgl. Fig. 298) ist $2\pi r i_x dr$ die Stromstärke im ringförmigen Querschnittselement $2\pi r dr$ und mithin

$$2\pi \int_0^R r i_x dr$$

die Gesamtstromstärke im Draht, die effektiv $= I$ sei. Dann hat man den Ansatz:

$$2\pi A \lambda \alpha^2 \int_0^R r J_0(ar) dr e^{i\omega t} = I \sqrt{2} e^{i\omega t}, \quad (14)$$

aus welchem sich die Konstante bestimmt:

$$A = \frac{I \sqrt{2}}{2\pi \lambda a R J_1(aR)}. \quad (15)$$

Hier haben wir folgende wichtige Eigenschaft der Besselschen Funktionen benutzt:

$$\frac{d[r J_1(ar)]}{dr} = ar J_0(ar)$$

oder allgemeiner

$$\frac{d[r J_n(ar)]}{dr} = ar J_{n-1}(ar),$$

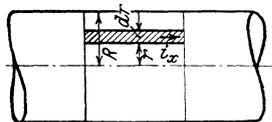


Fig. 298. Zur Verteilung der Stromdichte in einem Leiterquerschnitt.

welche zwei aufeinander folgende Besselsche Funktionen miteinander verknüpft.

Führt man (15) in (13) ein, so findet sich:

$$E_x = \frac{i_x}{\lambda} = \frac{a I \sqrt{2} J_0(ar) e^{i\omega t}}{\lambda 2\pi R J_1(aR)}, \quad (16)$$

woraus sich für $r = R$ nach Multiplikation mit l die Spannungsdifferenz in der Oberfläche an den Enden eines Leiterstückes l ergibt:

$$E = \frac{l a I \sqrt{2} J_0(aR) e^{i\omega t}}{\lambda 2\pi R J_1(aR)}. \quad (17)$$

Dieselbe Spannungsdifferenz muß sich aber ergeben, wenn man den Wechselstrom $I \sqrt{2} e^{i\omega t}$ mit dem vektoriell geschriebenen Wechselstromwiderstand des Leiterstückes l multipliziert. Bekanntlich setzt sich der Wechselstromwiderstand zusammen aus dem Ohmschen Teile w und dem induktiven Teile ωL zu

$w + i\omega L$, wo L die Selbstinduktivität des Leiterstückes der Länge l bedeutet. Es muß also

$$(w + i\omega L) I \sqrt{2} e^{i\omega t}$$

mit E nach Phase und Amplitude übereinstimmen, d. h. es muß sein:

$$(w + i\omega L) = \frac{l}{\lambda} \frac{a J_0(aR)}{2\pi R J_1(aR)}. \quad (18)$$

Aus (16) hat sich bereits ergeben, daß die Stromdichte ungleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist, und zwar nimmt die effektive Stromdichte von der Leiterachse nach außen hin zu (vgl. Fig. 299). Hieraus folgt, daß das w in Gleichung (18) größer sein muß als der Widerstand w_g eines Leiterstückes der Länge l , wenn Gleichstrom darin fließt:

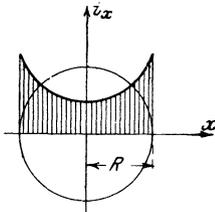


Fig. 299. Darstellung des Skin-Effekts.

$$w_g = \frac{l}{\lambda R^2 \pi}. \quad (19)$$

Dividieren wir mit Gleichung (19) in (18), so kommt

$$\frac{w}{w_g} + \frac{i\omega L}{w_g} = \frac{aR J_0(aR)}{2 J_1(aR)}. \quad (20)$$

Da hier sowohl a wie J_0 und J_1 komplex sind, so ist auch die ganze rechte Seite von (20) komplex; sie ermöglicht also durch Vergleich der reellen und der imaginären Teile die Bestimmung von

$$\frac{w}{w_g} \quad \text{und} \quad \frac{\omega L}{w_g}.$$

Wie man sieht, sind beide Größen nur von $|a|R$ abhängig, und wir können sie demnach in Fig. 300 als Funktion von $|a|R$ auftragen.

§ 121. Herleitung der Konstanten der Heavisideschen Gleichung aus den Maxwell'schen Gleichungen des axialsymmetrischen Feldes.

Wir greifen jetzt auf Gleichung (9) § 108 zurück

$$P = A J_0(ar) + B K_0(ar) \quad (1)$$

und spalten zunächst aus $B K_0(ar)$ das Glied $B J_0(ar) \lg \frac{2}{a\gamma}$

ab, welches wir zu $AJ_0(ar)$ hinzufügen. Von $K_0(ar)$ bleibt übrig (vgl. § 96)

$$-Y_0(ar) = -J_0(ar) \lg(r) - 2 \left(J_2 - \frac{1}{2} J_4 + \frac{1}{3} J_6 - \dots \right), \quad (2)$$

so daß wir unter Beibehaltung der Konstanten als allgemeines Integral auch schreiben können:

$$P = AJ_0(ar) + BY_0(ar). \quad (3)$$

Nunmehr haben wir das Gebiet I innerhalb des Drahtes von dem Außenraum II zu unterscheiden. Beide Gebiete sind durch Verschiedenheit der elektrischen Konstanten $\epsilon_1, \lambda_1, \mu_1$ bzw. $\epsilon_2, \lambda_2, \mu_2$ charakterisiert, denen die Werte

$$a_1^2 = \epsilon_1 \mu_1 \beta^2 - 4\pi \mu_1 \lambda_1 \beta i - \alpha^2$$

bzw.

$$a_2^2 = \epsilon_2 \mu_2 \beta^2 - 4\pi \mu_2 \lambda_2 \beta i - \alpha^2$$

entsprechen.

Demgemäß haben wir auch das Potential $II = PXT$ für beide Gebiete getrennt anzuschreiben:

$$\left. \begin{aligned} II_1 &= A_1 J_0(a_1 r) + B_1 Y_0(a_1 r) T X, \\ II_2 &= A_2 J_0(a_2 r) + B_2 Y_0(a_2 r) T X. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Aus den Eigenschaften der Funktionen J_0 und Y_0 folgt, daß B_1 und A_2 verschwinden müssen, weil sonst II_1 (wegen Y_0) für $r=0$ unendlich und II_2 (wegen J_0) für $r=\infty$ ebenfalls unendlich werden würde.

Nunmehr schreiben wir an Hand der Gleichungen (2) § 120 die elektrische und die magnetische Feldstärke für beide Gebiete hin:

$$\left. \begin{aligned} E_{x1} &= -a_1^2 A_1 J_0(a_1 r), & E_{x2} &= -a_2^2 B_2 Y_0(a_2 r), \\ M_{\theta 1} &= \frac{a_1^2 + \alpha^2}{i \mu_1 \beta} A_1 J_0'(a_1 r), & M_{\theta 2} &= \frac{a_2^2 + \alpha^2}{i \mu_2 \beta} B_2 Y_0'(a_2 r). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Es gilt jetzt, die Bedingungen zu erfüllen, daß E_{x1} und $M_{\theta 1}$ an der Drahtoberfläche (für $r=R$) in E_{x2} und $M_{\theta 2}$ übergehen. Dies wird durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$\left. \begin{aligned} -a_1^2 A_1 J_0(a_1 R) &= -a_2^2 B_2 Y_0(a_2 R), \\ \frac{a_1^2 + \alpha^2}{i \mu_1 \beta} A_1 J_0'(a_1 R) &= \frac{a_2^2 + \alpha^2}{i \mu_2 \beta} B_2 Y_0'(a_2 R). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Nun machen wir über die Konstanten ε , μ , λ folgende nähere Angaben:

1. μ_1 und μ_2 sind überall $= 1$.
2. Im Dielektrikum des Außenraumes ist die Leitfähigkeit $\lambda_2 = 0$.
3. Im Leiter ist die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_1 = 0$, und wir setzen voraus, daß
4. der Drahradius R so klein ist, daß wir von folgenden Näherungen Gebrauch machen können:

$$\left. \begin{aligned} J_0(a_1 R) = 1; \quad J_0'(a_1 R) = -a_1^2 \frac{R}{2}, \\ Y_0(a_2 R) = \lg(R); \quad Y_0'(a_2 R) = \frac{1}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

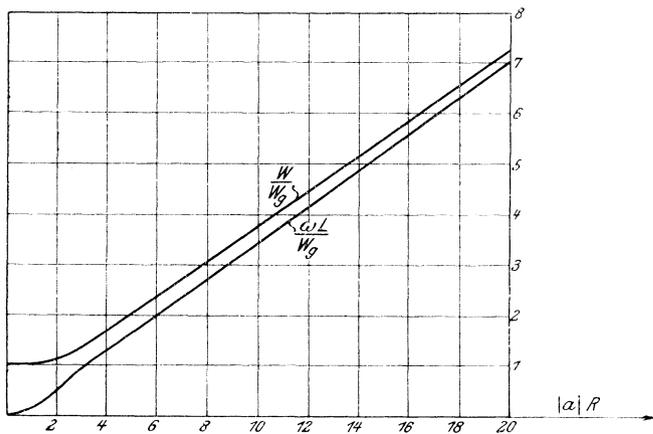


Fig. 300. Effektiver Widerstand und Selbstinduktion eines geradlinigen Leiters¹²⁵⁾.

Setzt man (7) in (6) ein und dividiert die Ansätze (6) durch einander, so daß die Konstanten A und B herausfallen, so entsteht folgende Gleichung:

$$-\frac{a_1^2}{a_1^2 + c^2} \frac{1}{a_1^2 \frac{R}{2}} = -\frac{a_2^2}{a_2^2 + c^2} \frac{\lg R}{1 \cdot R} \quad (8)$$

die mit

$$a_1^2 + c^2 = -4\pi\lambda_1\beta^2 i, \quad a_2^2 = \varepsilon_2\beta^2 - c^2$$

und einigen Umstellungen übergeht in:

$$\varepsilon_2 \beta^2 + \frac{\varepsilon_2}{2 \lg R \cdot \pi R^2 \lambda_1} \beta i - \alpha^2 = 0. \quad (9)$$

Dies ist die Bedingungsgleichung für die Größe α bei gegebenem β und umgekehrt.

Einen ganz analogen Ansatz hatten wir bei der Heavisideschen Gleichung zu erfüllen, nämlich

$$\beta^2 LC - w C \beta i - \alpha^2 = 0. \quad (10)$$

Beim Vergleich von (10) und (9) konstatieren wir zunächst den Widerstand der Längeneinheit des Drahtes

$$w = \frac{1}{\lambda_1 n R^2}. \quad (11)$$

Hieraus ergibt sich aber sofort die Kapazität der Längeneinheit

$$C = - \frac{\varepsilon_2}{2 \lg R} \quad (12)$$

und die Selbstinduktion

$$L = - 2 \lg R, \quad (13)$$

welche Ansätze, abgesehen vom Vorzeichen, auch auf anderem Wege für Kapazität und Selbstinduktion gefunden werden können.

Durch die Formeln (11), (12), (13) werden demnach die Größen w , C , L , die nach Heaviside ohne eingehendere Begründung eingeführt werden, als Ergebnisse der genaueren Untersuchung des elektromagnetischen Feldes im Grenzfalle $R =$ kleine Größe gewonnen¹²⁶).

Dritter Teil.

Grundzüge der Variationsrechnung.

§ 122. Die Aufgaben der Variationsrechnung.

In der Differentialrechnung wird gezeigt, wie man Maxima und Minima einer gemäß

$$y = f(x) \tag{1}$$

veränderlichen Größe y findet. Durch Nullsetzen der Ableitung ergibt sich für die Unabhängige x eine Gleichung

$$f'(x) = 0, \tag{2}$$

deren Wurzeln die Stellen angeben, wo Extremwerte der Abhängigen y zu erwarten sind. Aus den zweiten und höheren Ableitungen an den betrachteten Stellen schließt man dann, ob ein Extremwert vorliegt und welcher Art dieser ist.

Oft sind indessen die Aufgaben, Extremwerte irgendwelcher Größen zu bestimmen, viel allgemeinerer Art als die genannte. Um sie zu lösen, bedarf es besonderer Rechenmethoden, der Variationsrechnung. Z. B. ist die Bogenlänge einer Kurve, die auf einer Oberfläche zwischen zwei Punkten gezogen ist, ohne weiteres berechenbar. Ist aber außer den beiden Punkten nur die Bogenlänge gegeben, so ist im allgemeinen mehr als eine Kurve zwischen den beiden Punkten möglich, welche die gegebene Bogenlänge aufweist. Soll man nun unter den zwischen zwei Punkten auf einer Oberfläche überhaupt möglichen Kurven die mit der kürzesten Bogenlänge (geodätische Linie) aussuchen, so kommt man auf eine Aufgabe der Variationsrechnung und erhält eine i. a. eindeutige Lösung. Zur Einführung in die Methoden der Variationsrechnung sei der einfache Fall der geraden Linie als kürzester Verbindung zweier Punkte einer Ebene im folgenden analytisch behandelt. Die Weglänge einer

die Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ verbindenden Kurve $y = y(x)$ ist das Integral des Bogenelements $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, nämlich

$$J = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (3)$$

Jede Funktion $y(x)$, die für x_1 bzw. x_2 die Werte y_1 bzw. y_2 annimmt, liefert i. a. einen anderen Wert J . Die Funktion

$$y = a + bx; \quad b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad a = y_1 - bx_1 \quad (4)$$

liefert unter allen Werten J den kleinsten. Analytisch ergibt sich dies wie folgt:

Ändere ich den Funktionsverlauf der unbekanntenen „Minimalkurve“ $y(x)$ ein wenig ab, etwa indem ich zu y die mit einem genügend kleinen Faktor ε multiplizierte ganz beliebige Funktion $\eta(x)$, die nur noch den Grenzbedingungen $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ zu genügen braucht, hinzufüge, so ändert sich auch J ein wenig, und es liegt ein Minimum vor, wenn diese Änderung klein von zweiter Ordnung und stets positiv ist. Wir setzen also die geänderte (varierte) Funktion

$$y_1(x) = y(x) + \varepsilon \cdot \eta(x) \quad (5)$$

und die geänderte Bogenlänge

$$J_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_1'^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y' + \varepsilon \eta')^2} dx \dots \quad (6)$$

Ist $\eta(x)$ in zulässiger Weise irgendwie gewählt, so wird J_1 eine Funktion von ε allein und als solche in die Taylorsche Reihe

$$J_{1(\varepsilon)} = J_1(0) + \varepsilon \frac{\partial J_1(0)}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 J_1(0)}{\partial \varepsilon^2} + \dots \quad (7)$$

entwickelbar. Hier ist $J_1(0) = J$. Die Ableitungen von J_1 nach ε sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{y' + \varepsilon \eta'}{\sqrt{1 + (y' + \varepsilon \eta')^2}} \cdot \eta' dx; \\ \frac{\partial^2 J_1}{\partial \varepsilon^2} &= \int_x \frac{1}{\sqrt{1 + (y' + \varepsilon \eta')^2}^3} \cdot \eta'^2 dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Damit ergibt sich aus (7):

$$J_1 = J + \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \eta' dx + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}^3} \cdot \eta'^2 dx + \dots \quad (9)$$

Soll J_1 für $\varepsilon = 0$ ein Minimum werden, so muß $\left(\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0$ sein. Demnach erhalten wir die Minimumsbedingung

$$\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \eta' dx = 0. \quad (10)$$

Der Integralausdruck hier läßt sich partiell integrieren. $\int \eta' dx = \eta(x)$ verschwindet nach Voraussetzung bei x_1 und x_2 und es bleibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon} &= \left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \eta(x) dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \eta(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Da $\eta(x)$ beliebig sein sollte, so kann dieses Integral nur dann identisch verschwinden, wenn

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \quad (12)$$

ist. Daraus aber folgt durch Integration $y = a + bx$. Für diese Funktion ist J auch sicher ein Minimum, denn aus (9) erkennt man, daß

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2} = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}^3} \eta'^2 dx \quad (13)$$

für jede Wahl von η sicher positiv ist, denn der Integrand ist überall positiv.

Mit diesem Beispiel haben wir Einblick in die einfacheren Probleme der Variationsrechnung gewonnen. Diese sind all-

gemein der Art, daß der Wert eines bestimmten Integrals, dessen Integrand bis auf Randbedingungen unbekannte Funktionen enthält, dadurch zu einem Extremwert gemacht werden soll, daß der Verlauf dieser Funktionen in geeigneter Weise bestimmt wird. Fast alle Naturgesetze lassen sich durch „Minimalprinzipien“ darstellen, auf Grund deren bestimmte Integrale einen kleinsten Wert haben müssen, wenn die im Integranden auftretenden unbekannt Funktionen den Naturvorgang richtig beschreiben sollen. Der Weg des Lichts in einem inhomogenen Medium verläuft so, daß er in kürzester Zeit zurückgelegt wird. Gleichgewichtszustände sind durch das Minimum der potentiellen Energie bestimmt, sei es, daß diese als Energie der Lage in einem Kraftfelde oder als Formänderungsarbeit in einem beanspruchten Maschinenteil auftritt. Die Bewegung eines mechanischen Systems ist nach dem Hamiltonschen Prinzip durch den minimalen zeitlichen Mittelwert des sogenannten „kinetischen Potentials“, der Differenz aus kinetischer und potentieller Energie, bestimmt. Wie man unbekannt Größen aus Gleichungen ermittelt, so gewinnt man die unbekannt Funktionen (die „Extremalen“) solcher Variationsprobleme aus Differentialgleichungen, den sogenannten „Eulerschen Differentialgleichungen“¹²⁷). Analog dem eingangs erwähnten Verfahren zur Bestimmung gewöhnlicher Extremwerte erhält man diese Bedingungsdifferentialgleichungen für die Extremalen durch Nullsetzen der „ersten Variation“, auch „Lagrangesche Ableitung“¹²⁸) des Problems genannt, einer Funktion, die aus dem Integranden durch Differentiationsprozesse gebildet wird. Die Aufgabe der Variationsrechnung gilt mit Aufstellung der Lagrangeschen Ableitung i. a. als gelöst, da sie damit auf die nächst einfachere Aufgabe der Auflösung von Differentialgleichungen zurückgeführt ist.

§ 123. Variationsprobleme mit einer Unbekannten und ihrer ersten Ableitung bei einer Unabhängigen.

Als einfachsten Fall betrachten wir ein Integral, dessen Integrand nur eine unbekannt Funktion $y = y(x)$ sowie deren erste Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$ bei einer unabhängigen Veränderlichen x enthält. Der Integrand F ist also dann als eine gegebene Funktion der drei Veränderlichen y , y' und x auffaßbar:

$$F = F(y, y', x). \quad (1)$$

Das Integral sei zwischen festen Grenzen a und b genommen :

$$J \langle y \rangle = \int_a^b F(y, y', x) dx. \quad (2)$$

Das Zeichen $\langle y \rangle$ möge dabei andeuten, daß der Zahlwert J von dem Verlaufe der Funktion y abhängig ist. Man sagt auch, J sei eine „Funktionsfunktion“ von $y(x)$. Wir nehmen nun wie im Beispiel des § 122 an, y werde in seinem Verlaufe ein wenig abgeändert, indem wir wieder eine im Intervall von a bis b ganz beliebige, aber stetige und endliche mit dem

sehr kleinen Faktor ε multiplizierte Funktion $\eta = \eta(x)$ zu y hinzuaddieren, so daß

$$y_1(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (3)$$

die „varierte“ Kurve ist (Fig. 301). Der Unterschied zwischen y_1 und y kann durch die Wahl von ε beliebig klein gemacht werden. Sind die Randbedingungen, welche der Funktion y vorgeschrieben sind, z. B. die, daß y an den Stellen $x = a$ und $x = b$ ge-

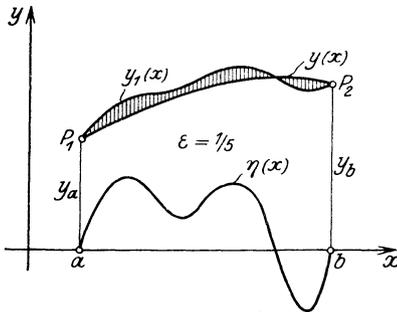


Fig. 301. Variation einer Kurve.

gebene Werte y_a und y_b annehmen soll, so wollen wir dasselbe von y_1 verlangen. Danach muß $\eta(a) = \eta(b) = 0$ sein, die einzige Beschränkung, der η unterliegt.

Wie oben setzen wir nun y_1 in das Integral (2) ein und entwickeln in eine nach Potenzen von ε fortschreitende Taylorsche Reihe, indem wir y und η als gegebene Funktionsverläufe und ε als veränderlichen Parameter auffassen.

$$J \langle y_1 \rangle = J \langle y_1 \rangle_{\varepsilon=0} + \varepsilon \frac{\partial J \langle y_1 \rangle_{\varepsilon=0}}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 J \langle y_1 \rangle_{\varepsilon=0}}{\partial \varepsilon^2} + \dots$$

Soll $J \langle y_1 \rangle$ für $\varepsilon = 0$ ein Extremwert sein, so ist dazu nach den Regeln der Differentialrechnung notwendig, daß $\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}$ verschwindet, und zwar für jede zulässige Wahl der Funktion $\eta(x)$. Die Funktion F der 3 Variablen y, y' und x hat partielle Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \frac{\partial F}{\partial x}$ nach allen dreien, die rein

formal zu bilden sind, als ob die 3 Variablen gar nicht in einem Abhängigkeitsverhältnis ständen. Es ist nun

$$J\langle y_1 \rangle = \int_a^b F(y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', x) dx.$$

Zur Bildung von $\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}$ haben wir unter dem Integral nach allen Variablen zu differenzieren, in denen ε auftritt und erhalten

$$\frac{\partial J\langle y_1 \rangle}{\partial \varepsilon} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F(y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', x)}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F(y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', x)}{\partial y'} \cdot \eta'(x) \right\} dx,$$

für $\varepsilon = 0$ ergibt sich also die Bedingung

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \cdot \eta'(x) \right\} dx = 0,$$

die sich durch partielle Integration vereinfachen läßt zu:

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot \eta(x) dx = 0.$$

Der Randausdruck verschwindet wegen $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Das totale Differentiationszeichen $\frac{d}{dx}$ deutet an, daß $\frac{\partial F}{\partial y'}$ nach allen Größen zu differenzieren ist, die von x abhängen. Das Integral muß für jede beliebige Wahl von $\eta(x)$ verschwinden. Dazu ist notwendig, daß im ganzen Intervall die Klammergröße verschwindet. Denn wäre das nicht der Fall, so könnte ich $\eta(x)$ so wählen, daß es überall dasselbe Vorzeichen hätte wie die Klammer. Dann aber wäre der Integrand, von Nullstellen abgesehen, überall positiv und damit auch das Integral. Es muß also für alle x gelten:

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Das ist, explizit ausgerechnet, die Eulersche Differentialgleichung des Variationsproblems, aus der die Unbekannte y zu bestimmen ist. In Analogie zum Minimalproblem der Differentialrechnung nennt man die linke Seite von (4) auch die „Lagrangesche Ableitung“ des Integranden F (zu Ehren

von Lagrange, von dem der Kunstgriff der partiellen Integration stammt), schreibt dafür $[F]_y$ und sagt, $J\langle y \rangle$ werde ein Extremum für Funktionen y , welche die Lagrangesche Ableitung von F zum identischen Verschwinden bringen. Die Kurven $y(x)$, welche die Eulersche Gleichung befriedigen, heißen die Extremalen des Variationsproblems. Es ist nun üblich, in (3) $\varepsilon \eta(x) = \delta y = \delta y(x)$ zu setzen und diese kleine Zusatzfunktion als Variation der Funktion y zu bezeichnen. Zur Einführung in die Rechnung habe ich die Form (3) vorgezogen, weil durch sie die Willkür der kleinen Funktion δy , die mit y nicht das geringste zu tun hat, deutlicher hervortritt. Die Änderungen, welche die anderen veränderlichen Größen durch die Variation von y erfahren, werden ebenso durch Vorsetzen des Variationszeichens δ bezeichnet, z. B. ändert sich y' um $\delta y'$. Ist nun

$$y_1 = y + \delta y,$$

so ist daraus durch Differentiation

$$y_1' = y' + \frac{d}{dx} \delta y.$$

Danach gilt also

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \delta y, \quad (5)$$

d. h. das Differentiationszeichen $\frac{d}{dx}$ und das Variationszeichen δ sind miteinander vertauschbar. In der Taylorsche Reihe für $J\langle y_1 \rangle$ schreibt man entsprechend

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \delta J, \quad \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2} = \delta^2 J, \dots$$

und nennt diese Größen die erste, zweite usw. Variation von J , so daß die notwendige Bedingung für ein Extremum von J das Verschwinden der ersten Variation ist.

Mit dieser Symbolik geht die Herstellung der Variation eines Integrals so vor sich, daß man unter dem Integralzeichen partiell nach den zu variierenden Veränderlichen und ihren Ableitungen differenziert, mit den zugehörigen Variationen multipliziert und die Variationen der Ableitungen der Unbekannten partiell integriert. Die oben vorgenommene Rechnung sei in dieser Form noch einmal kurz zusammengestellt:

$$J = \int_a^b F(y y' x) dx, \quad J(y + \delta y) = J + \delta J + \delta^2 J + \dots$$

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right) dx$$

$$\delta J = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \delta y \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot \delta y dx = 0,$$

$\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ ist vorauszusetzen; schließlich folgt

$$[F]_y = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Von diesen Formeln machen wir eine Anwendung auf die Biegung und Knickung eines in seiner Längsrichtung mit kleiner Unsymmetrie auf Druck beanspruchten Stabes, wobei auch die Anwendung der zweiten Variation kurz zu erläutern ist.

Der Stab von der Länge l sei an beiden Enden gestützt (Fig. 302) und mit dem Druck P belastet. $B = EJ$ sei seine Biegesteifigkeit, die x -Achse zeige von oben in Richtung der Stabachse senkrecht nach unten, $y(x)$ sei die Biegungslinie des Stabes, s seine Bogenlänge und $\arctg y' = \varphi(s)$ seine Tangentenrichtung. Die Zusammendrückung der Stabachse vernachlässigen wir als klein gegen die Längenänderung der Sehne zwischen beiden Stützpunkten infolge des seitlichen Ausweichens des Stabes. Die Biegeenergie des Stabes ist mit der Krümmung $\frac{d\varphi}{ds}$

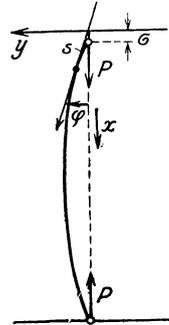


Fig. 302. Biegungslinie eines Druckstabes.

$$U_1 = \frac{1}{2} B \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds.$$

Die Last P dagegen hat auf dem kleinen Wege

$$\sigma = \int_0^l (1 - \cos \varphi) ds$$

die potentielle Energie

$$- U_2 = P \cdot \int_0^l (1 - \cos \varphi) ds$$

verloren. Wird die potentielle Energie des undeformierten

Systems zu Null angenommen, so ist sie nach der Deformation

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} B \int_0^l \varphi'^2 ds + P \int_0^l \cos \varphi ds - Pl$$

und dieser Ausdruck ist im Gleichgewichtsfall durch entsprechende Bestimmung von $\varphi(s)$ zu einem Minimum zu machen. Unter Annahme kleiner Auslenkungen y will ich nur mit der ersten nicht verschwindenden Größenordnung rechnen, d. i. hier für φ die zweite. Dann ist $\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} \varphi^2$, $ds = dx$ und das Variationsproblem lautet

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (B \varphi'^2 - P \varphi^2) dx = \int_0^l F(\varphi, \varphi', x) dx = \text{Min.} \quad (7)$$

In unseren Formeln oben tritt also einfach φ an die Stelle von y , und es ergibt sich die Eulersche Differentialgleichung wie folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi'} = B \varphi', \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -P \varphi$$

$$[F]_{\varphi} = B \varphi'' + P \varphi = 0.$$

Mit $\sqrt{\frac{P}{B}} = \alpha$ ist ihre Lösung

$$\varphi = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x = y'$$

$$y = -\frac{A_1}{\alpha} \cos \alpha x + \frac{A_2}{\alpha} \sin \alpha x + C.$$

Bei gegebener Exzentrizität des Kraftangriffs oben und unten sind auch die Integrationskonstanten eindeutig bestimmt. Es fragt sich nun, ob das Gleichgewicht stabil, indifferent oder labil ist. Dazu müssen wir entscheiden, ob U wirklich ein Minimum, Sattelpunkt oder Maximum ist, und das geschieht auf Grund des Vorzeichens der zweiten Variation. Diese lautet, wie man leicht aus der noch nicht partiell integrierten ersten Variation erhält

$$\begin{aligned} \delta^2 U &= \int_0^l \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi'^2} \delta \varphi'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \varphi'} \delta \varphi \delta \varphi' + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \delta \varphi^2 \right) dx \\ &= \int_0^l (-P \delta \varphi^2 + B \delta \varphi'^2) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Dieser Größe sieht man sofort an, daß sie nicht immer positiv zu sein braucht, da aber $\delta \varphi$ und $\delta \varphi' = \frac{d}{dx} \delta \varphi$ nicht

unabhängig voneinander sind, kann man bestimmte Schlüsse nicht ohne weiteres ziehen. Die zweite Variation hat zu verschiedenen scharfsinnigen Untersuchungsmethoden Veranlassung gegeben. Nach A. Kneser¹²⁹⁾ unterscheidet man schwache und starke Extrema. Ein schwaches liegt vor, wenn zum Beweis vorausgesetzt werden muß, daß die variierte Kurve der Extremale nach Lage und Tangentenrichtung benachbart sei. Bei einem starken Extremum braucht dagegen nur die Lage der variierten Kurve benachbart zur Extremale zu sein, ihre Richtung darf beliebig steil gegen die der Extremale verlaufen¹³⁰⁾.

Ein schwaches Extremum existiert (der Beweis findet sich z. B. bei Jordan¹³¹⁾), wenn erstens die Legendresche Bedingung $\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi'^2} > 0$ erfüllt ist, wie dies in unserem Beispiel zutrifft, da B wesentlich positiv ist. Zweitens muß die Jakobische Differentialgleichung¹³²⁾ für eine Funktion $u(x)$, nämlich

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi'^2} \cdot u'' + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi'^2} \right) u' + \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \varphi'} - \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) u = 0, \quad (9)$$

wo in den Ableitungen von F die Extremalenfunktion $\varphi(x)$ einzusetzen ist, ein Integral u haben, das für $x=0$ verschwindet, aber für alle anderen Punkte des Intervalls $0 < x \leq l$ von 0 verschieden ist. Bei uns wird die Gleichung von Jakobi

$$Bu'' + Pu = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad u = A \cdot \sin \alpha x,$$

und dieses Integral, das für $x=0$ verschwindet, hat seine nächste Nullstelle bei $x = \frac{\pi}{\alpha}$. Diese liegt außerhalb des Stabes, solange

$$\alpha l < \pi, \quad \text{d. h.} \quad P \leq \frac{\pi^2}{l^2} EJ \quad \text{ist.} \quad (10)$$

Das aber ist gerade die Eulersche Bedingung¹³³⁾ für die Knicksicherheit des Stabes.

§ 124. Höhere Variationsprobleme. Schwingungen eines Flugzeugflügels.

Ich betrachte zunächst ein Integral, unter dem zwei unbekannt Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ einer Unabhängigen x auftreten:

$$J \langle y, z \rangle = \int_a^b F(y, y', z, z', x) dx. \quad (1)$$

Wie oben untersuche ich den Zuwachs δJ erster Ordnung von J , wenn ich y um δy und z um δz vermehre, wo beide Variationen wieder willkürliche und genügend kleine Funktionen von x sind, die für $x = a$ und $x = b$ verschwinden. Es ist dann

$$\delta J = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta z' \right\} dx.$$

Unter dem Integral stehen hier wieder die Ableitungen von F nach allen Veränderlichen, die mit y und z variiert werden (x als Unabhängige zu variieren ist zur Lösung der Aufgabe nicht nötig), multipliziert mit der entsprechenden Variation. Die Variationen der Ableitungen der Unbekannten werden nun wieder integriert, wobei der Randausdruck

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta z \right]_a^b = 0$$

ist, so daß nur noch bleibt

$$\delta J = \int_a^b \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y + \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} \right] \delta z \right\} dx.$$

Soll nun δJ für alle zulässigen Variationen δy und δz verschwinden, so steht es uns frei, einmal $\delta z = 0$ und einmal $\delta y = 0$ anzunehmen und für das jeweils übrig bleibende Integral dieselben Betrachtungen anzustellen wie in § 2 bei einer Unbekannten.

Wir schließen also, daß als Bedingung für ein Extremum gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} [F]_y &= \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ [F]_z &= \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

bestehen müssen. Man erhält demnach die Minimalbedingung durch Nullsetzen der Lagrangeschen Ableitungen des Integranden nach den unbekannt Funktionen als simultanes System zweier Eulerscher Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach y und z . Das Verfahren läßt sich Wort für Wort auf Probleme mit n unbekannt Funktionen einer Veränderlichen übertragen. Der Integrand hat dann n Lagrangesche

Ableitungen nach den Unbekannten, die jede für sich verschwinden müssen und so ein simultanes System von n Eulerschen Differentialgleichungen ergeben.

Als Beispiel sei die Bewegungsgleichung eines auf zwei Holmen federnd gelagerten Flugzeugflügels (Fig. 303) nach dem Hamiltonschen Prinzip hergeleitet. Die Bewegung werde in erster Näherung als zweidimensionales (ebenes) Problem behandelt,

überdies sei der Flügel steif in der Anblaserichtung (x -Achse), so daß er also nur eine Translation in der Vertikalen (y -Achse) und eine Drehung um eine Horizontale parallel seiner Vorderkante ausführen kann. Seine Sehne habe dann zur Zeit t die Neigung $\varphi(t)$ gegen die Horizontale und sein Druckmittelpunkt (in $\frac{1}{4}$ der Flügeltiefe), durch den die y -Achse gehen möge, die Ordinate $p(t)$. In der Ruhelage sei $p = \varphi = 0$. Die Flügelsehne hat allgemein die Gleichung $y = p + \varphi x$, immer kleine Auslenkungen vorausgesetzt. Man kann dann leicht zeigen, daß die Direktionskräfte der zwei Holme so wirken, als ob nur ein Holm mit der Abszisse $x = a$ vorhanden wäre, an dem der Flügel mit der Direktionskraft $c \text{ kg/m}$ gegen Translation (Biegung) und dem Torsionsmoment $\gamma \text{ kg}\cdot\text{m}$ gegen Verdrehung gefedert ist, wie dies schematisch in der Figur durch einen Hebel, an dem zwei Federn angreifen, angedeutet ist. Die elastische Kraft K und ihr Moment M , bezogen auf den Ursprung, sind dann durch

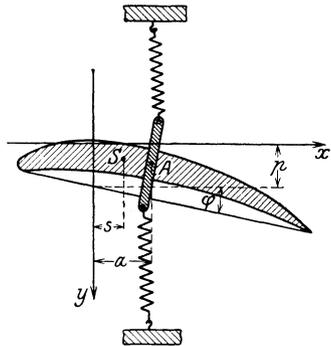


Fig. 303. Elastisch befestigtes Flügelprofil (schematisch).

$$K = -c(p + a\varphi).$$

$$M = -ca p - (ca^2 + \gamma)\varphi.$$

gegeben und die potentielle Energie, die im Flügel aufgespeichert ist, hat den Wert

$$U = \frac{1}{2} c p^2 + ca p \varphi + \frac{1}{2} (ca^2 + \gamma) \varphi^2, \tag{3}$$

ist also eine quadratische Form in den unbekanntenen Funktionen $p(t)$ und $\varphi(t)$. Der Flügel habe ferner das Gewicht G , sein Schwerpunkt die Abszisse $x = s$ und sein Trägheitsmoment um die Schwerpunktsachse parallel der Vorderkante sei $\Theta = \frac{G}{g} r^2$.

Dann ist seine kinetische Energie L , wenn $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$ die Translationsgeschwindigkeit des Druckmittelpunkts und $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ die Drehgeschwindigkeit sind:

$$L = \frac{1}{2} \frac{G}{g} \dot{p}^2 + \frac{G}{g} s p \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{G}{g} (s^2 + r^2) \dot{\varphi}^2. \quad (4)$$

Mit neuen Konstanten ist also

$$\begin{aligned} 2U &= a_{11} p^2 + 2 a_{12} p \varphi + a_{22} \varphi^2. \\ 2L &= b_{11} \dot{p}^2 + 2 b_{12} \dot{p} \dot{\varphi} + b_{22} \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen der „kräftefreien“ Bewegung des Flügels, d. h. seiner Eigenschwingungen, folgen nun aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (L - U) dt = \text{Min.}$$

zwischen irgend zwei Zeiten t_1, t_2 . Es ist also in unserer früheren Bezeichnung $F = L - U$, $x = t$, $y = p$, $z = \varphi$ zu setzen, so daß die Eulerschen Gleichungen wie folgt lauten:

$$\left. \begin{aligned} [L - U]_p &= \frac{d}{dt} \frac{\partial(L - U)}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial(L - U)}{\partial p} = 0. \\ [L - U]_{\varphi} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial(L - U)}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial(L - U)}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Das sind schon die Bewegungsgleichungen des Flügels, die sich auf Grund des einfachen Baues von L und U noch wie folgt weiter ausrechnen lassen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} + \frac{\partial U}{\partial p} &= b_{11} \ddot{p} + b_{12} \ddot{\varphi} + a_{11} p + a_{12} \varphi = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= b_{12} \ddot{p} + b_{22} \ddot{\varphi} + a_{12} p + a_{22} \varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Mit den zuerst benutzten Daten lauten sie

$$\left. \begin{aligned} \frac{G}{g} (\ddot{p} + s \ddot{\varphi}) &= K. \\ \frac{G}{g} (s \ddot{p} + [r^2 + s^2] \ddot{\varphi}) &= M. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

In dieser Form identifiziert man sie leicht mit dem Impuls- und dem Drehimpulssatze der Newtonschen Mechanik, die natürlich auch auf elementarem Wege gewonnen werden können.

Als nächste Möglichkeit bei Variationsaufgaben behandle ich das Auftreten höherer Ableitungen der Unbekannten y unter dem Integralzeichen, z. B. der zweiten. Es sei also vorgelegt

$$J(y) = \int_a^b F(y, y', y'', x) dx = \text{Min.} \quad (8)$$

Ich bilde die Variationen wie bisher, habe aber natürlich auch y'' zu variieren. Für $\delta y''$ folgt leicht $\delta y'' = \frac{d}{dx} \delta y' = \frac{d^2}{dx^2} \delta y$.

Diese Funktion läßt sich dann nach der Lagrangeschen Methode zweimal partiell integrieren, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right) dx, \\ \delta J &= \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right]_a^b + \int_a^b \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right\} dx \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) dx \end{aligned}$$

Ich muß hier von der variierenden Funktion δy verlangen, daß neben δy auch noch $\delta y'$ an den Enden a und b des Intervalls verschwinden, Beschränkungen, die an der Willkür von δy im Innern des Intervalls nichts ändern. Die Eulersche Gleichung nimmt hier die Form an:

$$[F]_y = \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Sie ist eine Differentialgleichung vierter Ordnung für die Extremalen. Diese lassen sich aus ihr so bestimmen, daß die Funktion und ihre erste Ableitung in den Randpunkten gegebene Werte annehmen.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß das Verfahren beim Auftreten noch höherer Ableitungen in F beliebig fortgesetzt werden kann. Treten Ableitungen bis $y^{(n)}$ auf, so muß man $\delta y^{(n)}$ gerade n mal partiell integrieren, ehe man δy als

Faktor aus dem Integranden der ersten Variation heraussetzen kann, um so die Lagrangesche Ableitung zu erhalten. Die Eulersche Gleichung wird dann vom Grade $2n$. Die Methode läßt sich auch leicht bei mehreren Unbekannten anwenden, so daß wir die einfachsten Variationsprobleme bei einer unabhängigen Veränderlichen damit beherrschen. Da dieses Kapitel nur einen Einblick in die Methoden der Variationsrechnung geben soll, muß ich es mir versagen, auf Variationsprobleme bei veränderlichen Integrationsgrenzen und mit Nebenbedingungen einzugehen. Ich verweise dazu auf A. Kneser¹³⁴) oder O. Bolza¹³⁵) und gehe nun dazu über, Variationsprobleme mit mehreren unabhängigen Veränderlichen zu behandeln.

§ 125. Variation mehrfacher Integrale. Stab- und Plattenschwingungen.

I. Es sei eine unbekannte Funktion u zweier unabhängiger Veränderlichen x und y so zu bestimmen, daß das Doppelintegral

$$J\langle u \rangle = \int_G F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right) dx dy \quad (1)$$

über das reguläre Gebiet G der xy -Ebene zu einem Minimum wird. Man variiert u um eine beliebige kleine Fläche $\delta u = \delta u(x, y)$ und erhält durch Nullsetzen der ersten Variation von J eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für u , nachdem man $\delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta u$ und $\delta \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \delta u$ partiell integriert und den Randausdruck durch geeignete Mittel zum Verschwinden gebracht hat. Dazu ist durchaus nicht immer nötig, daß δu in den Randpunkten von G verschwinden muß. Je nach der physikalischen Deutung einer Aufgabe darf man δu an gewissen Randstellen auch beliebige Werte annehmen lassen. Das gilt immer dann, wenn u selbst am Rande nicht gegeben ist. Gerade dann erhält man aber aus dem Verschwinden der durch partielle Integration entstandenen Randausdrücke die Randbedingungen, die zur eindeutigen Bestimmung der Extremale, die hier eine Fläche ist, aus der partiellen Eulerschen Gleichung notwendig sind.

II. Da die Methode der Variation nichts prinzipiell Neues bietet, wollen wir gleich ein Beispiel behandeln, in dem die zweite partielle Ableitung der Unbekannten unter dem Integral

auftritt. Es handle sich darum, die Bewegungsgleichungen für die transversalen Biegungsschwingungen eines elastischen Stabes mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips abzuleiten. Der Stab habe die Länge l , x sei die Abszisse in Richtung der Stabachse, bei $x=0$ sei der Stab eingespannt, bei $x=l$ sei die Grenzbedingung noch nicht festgelegt. Ferner sei E der Elastizitätsmodul, $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ die Dichte des Stabmaterials, $q(x)$ der Stabquerschnitt und $J(x)$ das Querschnittsträgheitsmoment für die Schwingungsrichtung, beides bekannte Funktionen der Stablänge. Schließlich sei $y = y(x, t)$ die zu bestimmende Biegelinie als Funktion von Ort und Zeit. Zunächst muß ich die potentielle und kinetische Energie U und L des Stabes bestimmen. Das Biegemoment befolgt die Beziehung $M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ein Stabelement von der Länge dx enthält also die potentielle Energie $dU = \frac{1}{2} EJ M^2 dx = \frac{1}{2} EJ \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx$ und die kinetische $dL = \frac{1}{2} \varrho q \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$. Damit erhält man das kinetische Potential

$$L - U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\varrho q \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \right] dx \quad (2)$$

Das Hamiltonsche Prinzip verlangt nun

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (L - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{1}{2} \left\{ \varrho q \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \right\} dx dt = \text{Min.} \quad (3)$$

Die Grenzbedingungen, die bis jetzt festliegen, sind nur $y(0) = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0$ für alle Zeiten t . Die Variation $\delta y(x, t)$ wird also die Bedingung $\delta y(0, t) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x} \delta y(0, t) = 0$ erfüllen müssen. Das Hamiltonsche Prinzip verlangt, daß die wahre und variierte Bahn an den Grenzen des Zeitintervalls übereinstimmen, d. h. es muß sein $\delta y(x, t_1) = \delta y(x, t_2) = 0$. Das Gebiet G in der x - t -Ebene ist das Rechteck mit den Seiten $x=0$ und $x=l$ sowie $t=t_1$ und $t=t_2$. Auf dem Rande des Gebiets ist also δy auf drei Seiten Null, auf der

vierten beliebig, $\delta \frac{\partial y}{\partial x}$ auf einer Seite Null und auf den drei anderen beliebig. Es ist also nun

$$H = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l F \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx dt$$

zu variieren. Ich erhalte

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial t}} \cdot \delta \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \cdot \delta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx dt$$

oder einmal partiell integriert

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_0^l \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial t}} \cdot \delta y \right]_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \cdot \delta \frac{\partial y}{\partial x} \right]_0^l dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial t}} \delta y + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \delta \frac{\partial y}{\partial x} \right\} dx dt. \end{aligned}$$

Der Integrand des ersten Integrals verschwindet nach unseren Festsetzungen ganz, der des zweiten für $x=0$. Das zweite Glied des letzten Integrals läßt sich noch einmal partiell integrieren; da δy für $x=0$ verschwindet, so erhält man schließlic

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \delta \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \delta y \right]_{x=l} dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial t}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \right\} \delta y dx dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Soll dieser Ausdruck für alle zugelassenen Variationen verschwinden, so erhält man erstens die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial t}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = 0,$$

oder ausgeführt mit

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial t}} = \varrho q \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = E \cdot J \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$\varrho q(x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - E \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(J_{(x)} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (5)$$

Für $q = \text{konst.}$ und $J = \text{konst.}$ nimmt sie die bekannte Form an:

$$\varrho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = E J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}. \quad (6)$$

Da t_1 und t_3 beliebig sind, muß ferner für $x = l$ zu allen Zeiten gelten

$$E J \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \frac{\partial y}{\partial x} - E \frac{\partial}{\partial x} \left(J \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y = 0. \quad (7)$$

Bei eingespanntem Stabende ist diese Gleichung von selbst erfüllt, denn dann muß δy und $\delta \frac{\partial y}{\partial x}$ zu Null angenommen werden. Ist das Ende gestützt, dann ist $y(l)$ und damit $\delta y(l)$ Null, so daß nur noch

$$E J \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

zu setzen ist, d. h. das Biegemoment muß daselbst verschwinden. Ist das Stabende frei, so sind dort y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ beliebige Größen. Dasselbe gilt also auch von δy und $\delta \frac{\partial y}{\partial x}$. Soll obige Gleichung dann für alle Werte dieser Zahlen erfüllt sein, so muß sowohl

$$E J \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{als auch} \quad E \frac{\partial}{\partial x} \left(J \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (9)$$

sein, d. h. Moment und Querkraft müssen am freien Ende verschwinden. Daß δy und $\delta \frac{\partial y}{\partial x}$ zur selben Zeit t für $x = l$ beliebig sind, ist so zu verstehen: Setze ich $t = t_1 = \text{konst.}$,

so ist $\delta y(x, t_1)$ noch eine beliebige Funktion von x , für die aber $\delta \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta y$ gilt, so daß überall $\delta \frac{\partial y}{\partial x}$ durch δy schon mit bestimmt ist. Hat nun δy am Stabende den Wert ε_1 und $\delta \frac{\partial y}{\partial x}$ den Wert ζ_1 , so kann ich mir immer noch eine andere Variationsfunktion $\delta \bar{y}$ denken, die am Stabende denselben Wert $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ hat wie δy , aber eine andere Tangentenrichtung $\zeta_2 \neq \zeta_1$. Die obige Gleichung (7) muß nun für beide Wertepaare $\varepsilon_1 \zeta_1$ und $\varepsilon_1 \zeta_2$ erfüllt sein. Schreibt man beide Bedingungen hin, so folgt leicht, daß die Beziehungen $J \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x} \left(J \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0$

jede für sich erfüllt sein müssen.

III. Wir gehen nun um eine Dimension weiter und behandeln das dem Stabe analoge Problem der Eigenschwingungen einer homogenen ebenen Platte (Fig. 304), wie es Kirchhoff in einer klassischen Arbeit¹³⁶⁾ durchgeführt hat. Hier sind die Randintegrale noch auf die Randlinie der Platte

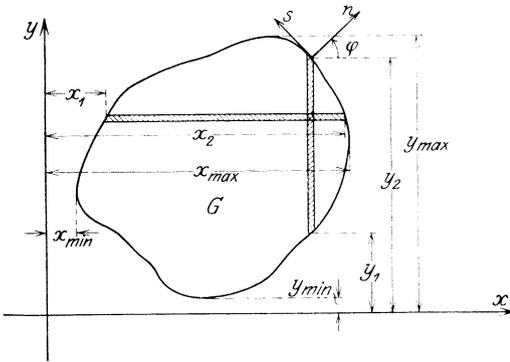


Fig. 304. Ebene Platte mit willkürlichem Rand.

umzuformen, ehe man die Randbedingungen aus ihnen ablesen kann.

Die Platte bedecke ein Gebiet G der x - y -Ebene, sei eben, habe die konstante Dicke $2h'$, den Elastizitätsmodul E , die Dichte ρ , und schließlich sei ν die Poissonsche Zahl der Quersammenziehung. Mit $w = w(x, y, t)$ bezeichne ich die kleine Durchbiegung der Platte als Funktion von Ort und Zeit, und für diese Unbekannte ist die Bewegungsgleichung nebst ihren Randbedingungen aufzustellen. Die Mittelebene der Platte ist im Bewegungszustande eine gekrümmte Oberfläche mit zwei Hauptkrümmungshalbmessern ρ_1 und ρ_2 in zueinander senkrechten Richtungen. Nach Kirchhoff [vgl. auch A. Stodola¹³⁷⁾] ist die potentielle Energie der Platte gegeben durch

$$U = \frac{1}{3} E' h'^3 \iint \left\{ \left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right]^2 - \frac{2(1-\nu)}{\rho_1 \rho_2} \right\} dx dy. \quad (10)$$

Hier ist $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ gesetzt und für die Krümmungen gilt

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Die kinetische Energie ist einfach

$$L = \varrho h' \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy. \quad (11)$$

Das Hamiltonsche Prinzip lautet also

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (L - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \iint_G \left\{ \frac{1}{3} E' h'^3 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) - \varrho h' \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dt dx dy = \text{Min.} \quad (12)$$

Da in $F = L - U$ nur vier partielle Ableitungen von w vorkommen, so ist

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} \iint_G \left\{ \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial t}} \delta \frac{\partial w}{\partial t} \right\} dx dy dt. \quad (13)$$

Explizit ist das, wenn ich gleich $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w$ statt $\delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ usw. schreibe und $\lambda = \frac{2}{3} E' h'^3$ setze

$$\delta H = \lambda \int_{t_1}^{t_2} \iint_G \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \delta w + \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta w - \frac{3 \varrho}{E' h'^2} \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta w \right\} dx dy dt. \quad (14)$$

Hier integriert man die beiden ersten Summanden partiell nach x , den dritten partiell nach y und den letzten partiell nach t .

Mit x_1, x_2 bezeichne ich Randabszissen, die zur Ordinate y gehören, mit y_1, y_2 Randordinaten, die zur Abszisse x gehören. Dann ergibt sich, wenn mit $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$ die äußersten Abszissen bzw. Ordinaten bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \delta H = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial x} \delta w \right\}_{x_1}^{x_2} dy dt \\ & + 2(1 - \nu) \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta w \right\}_{x_1}^{x_2} dy dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left\{ \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial y} \delta w \right\}_{y_1}^{y_2} dx dt \\ & - \frac{3 \varrho}{E' h'^2} \int_G \int \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right\}_{t_1}^{t_2} dx dy \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial x} \delta w \right. \\ & + 2(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \delta w \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial y} \delta w \\ & \left. - \frac{3 \varrho}{E' h'^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right\} dx dy dt = 0. \end{aligned}$$

Das Raumgebiet, über welches das Hamiltonsche Integral zu erstrecken war, ist der über der Platte, d. h. dem ebenen Gebiet G zwischen den Ebenen $t = t_1$ und $t = t_2$ errichtete Zylinder. Auf seinen Stirnflächen haben wir $\delta w(t_1) = \delta w(t_2) = 0$ zu setzen; wie sich δw auf seinem Mantel zu verhalten hat, darüber ist noch nichts festgelegt, so daß wir zunächst beliebige Variationen annehmen müssen. Es verschwindet also nur das letzte der vier Doppelintegrale. Das dreifache Integral läßt sich nun nochmals partiell integrieren, und zwar der erste Summand nach x , der zweite und dritte nach y , während der letzte unverändert bleibt. Damit erhalte ich

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda} \delta H = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial x} \delta w \right\}_{x_1}^{x_2} dy dt \\
 & + 2(1 - \nu) \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta w \right\}_{x_1}^{x_2} dy dt \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left\{ \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial y} \delta w \right\}_{y_1}^{y_2} dx dt \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta w \right\}_{x_1}^{x_2} dy dt \\
 & - 2(1 - \nu) \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta w \right\}_{y_1}^{y_2} dx dt \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta w \right\}_{y_1}^{y_2} dx dt \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_G \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{3 \varrho}{E' h'^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} \cdot \delta w \cdot dx dy dt. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Aus dem letzten Integral ergibt sich nun durch Nullsetzen des Faktors von δw die Schwingungsgleichung der Platte

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{3 \varrho}{E' h'^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Mit Einführung der ganzen Dicke $h = 2h'$ der Platte, des Moduls E und des Symbols $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ lautet sie auch

$$\frac{E h^2}{12(1 - \nu^2) \varrho} \cdot \Delta \Delta w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

Es handelt sich nun vor allem noch um die Gewinnung der Randbedingungen aus dem Verschwinden der Summè der sechs Doppelintegrale in δH (15). In diesen kommt δw am Rande und $\frac{\partial}{\partial x} \delta w$ sowie $\frac{\partial}{\partial y} \delta w$, ebenfalls am Rande genommen, vor. Es fragt sich, welche Werte für diese Größen zulässig sind.

1. Der einfachste Fall ist der einer am Rande überall horizontal eingespannten ebenen Platte. Bei einer solchen ist also $w = 0$ am Rande gegeben und ebenso ist dort $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$, da die Tangentialebene überall horizontal sein muß. Da alles dies auch für die variierte Deformationsfläche $w + \delta w$ gelten muß, so müssen wir verlangen, daß am Rande auch

$$\delta w = \frac{\partial}{\partial x} \delta w = \frac{\partial}{\partial y} \delta w = 0$$

sind. Damit werden die fraglichen Doppelintegrale von selbst Null, wie es ja schließlich sein muß, nachdem die Randbedingungen für w schon festgesetzt sind.

2. Es sei weiterhin der Plattenrand frei und die Randbedingungen für w , die sich übrigens auch auf elementarem Wege ableiten lassen, zunächst unbekannt. Da die Auslenkung w_r (der Index r möge immer andeuten, daß der betreffende Wert in einem Randpunkte von G gebildet werden soll) am Rande beliebig ist, so gilt dasselbe von δw_r . Ist die Variation δw_r , z. B. als Funktion der auf dem Rande von G in positivem Umlaufsinne gemessenen Bogenlänge s , einmal gewählt, was an der Willkür von δw im Innern von G nichts ändert, so ist auch ihre Ableitung $\frac{\partial}{\partial s} \delta w$ längs des Randes bestimmt. Mit n will ich die äußere Normale des Gebiets G bezeichnen. Sie bilde den Winkel $\varphi = \theta$ (Fig. 304) mit der positiven x -Achse (das Bogenelement in Richtung wachsender s bildet dann mit dieser den Winkel $\theta + \frac{\pi}{2}$). Nun ist aus der Flächentheorie bekannt, daß die partielle Ableitung der Funktion $w(xy)$, wenn ich in einer Richtung, die den Winkel φ mit der x -Achse bildet, vorwärts gehe, den Wert

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \varphi$$

hat. Also ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \vartheta. \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\frac{\partial w}{\partial x} \sin \vartheta + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die Tangentialebene an die Fläche w kann man auf Grund dieser beiden Gleichungen mit nichtverschwindender Determinante aus den Größen $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ oder aus $\frac{\partial w}{\partial n}$ und $\frac{\partial w}{\partial s}$ bestimmen. Bei unserem Randwertproblem ist es das natürliche, $\frac{\partial w}{\partial n}$ und $\frac{\partial w}{\partial s}$ zu wählen. Analoges gilt für die Variation δw . Wir sahen oben, daß durch die Wahl von δw_r schon $\frac{\partial}{\partial s} \delta w_r$ bestimmt ist. Dagegen ist $\frac{\partial}{\partial n} \delta w_r$, d. h. die Neigung der Variationsfläche gegen den Rand, noch ganz beliebig, in dem Sinne wie beim Stab $\delta y(l)$ und $\frac{\partial}{\partial x} \delta y(l)$ willkürlich waren. Wir können uns also auf dem Rande zwei Funktionen $\delta w_r = u_{(s)}$ und $\frac{\partial}{\partial n} \delta w_r = v_{(s)}$ beliebig vorgeben und müssen verlangen, daß für diese die Randintegrale in δH identisch verschwinden. Unser Bestreben muß also zunächst sein, die Doppelintegrale in Randintegrale über $dt ds$ zu verwandeln, welche δw_r und $\frac{\partial}{\partial n} \delta w_r$ enthalten, deren Faktoren dann jede für sich gleich Null zu setzen sind. Sind die so erhaltenen Bedingungen identisch erfüllt, so ist δH immer und überall Null und unser Problem ist gelöst.

Ist G zunächst ein Gebiet, welches von jeder Parallelen zur x - und y -Achse nur zweimal geschnitten wird, so ist offenbar, wenn L irgendeine Funktion von x und y bedeutet,

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} [L]_{x_1}^{x_2} dy = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (L_{(x_2)} - L_{(x_1)}) dy = \int_s L_r \cos \vartheta ds,$$

wo s andeuten soll, daß das Integral einmal über die Randkurve zu erstrecken ist. Es ist nämlich $|dy| = ds |\cos \vartheta|$ und an allen Stellen x_2 ist $\cos \vartheta > 0$, an allen Stellen x_1 ist $\cos \vartheta < 0$. Entsprechend ist mit irgendeiner Funktion $M_{(x, y)}$

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [M]_{y_1}^{y_2} dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (M_{(y_2)} - M_{(y_1)}) dx = \int_s M_r \sin \vartheta ds.$$

Denn an allen Stellen y_2 ist $\sin \vartheta > 0$, an allen Stellen y_1 dagegen $\sin \vartheta < 0$ und überall ist $|dx| = |ds| |\sin \vartheta|$. Ist das Gebiet G nicht von der vorausgesetzten Art, so gelten die Formeln trotzdem, wie man durch Zerlegung des Gebiets in einzelne der zulässigen Gebiete sofort einsieht^{137b}).

In den ersten drei Integralen von δH (15) führen wir nun noch die Auflösung der Gleichungen (17) ein, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \delta w &= -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial s} \delta w + \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial n} \delta w, \\ \frac{\partial}{\partial y} \delta w &= \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial s} \delta w + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial n} \delta w. \end{aligned}$$

Dann lassen sich die ersten sechs Integrale von (15), die wir einfach mit δR zusammenfassend bezeichnen, in das folgende Doppelintegral zusammenschreiben:

$$\begin{aligned} \delta R &= \int_{t_1}^{t_2} \int_s \left\{ \cos \vartheta \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \left[-\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial s} \delta w + \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial n} \delta w \right] \right. \\ &\quad + 2(1 - \nu) \cos \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left[\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial s} \delta w + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial n} \delta w \right] \\ &\quad + \sin \vartheta \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \left[\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial s} \delta w + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial n} \delta w \right] \\ &\quad - \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta w - 2(1 - \nu) \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta w \\ &\quad \left. - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta w \right\} dt ds = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

In den drei ersten Gliedern lassen sich die Größen $\frac{\partial}{\partial s} \delta w$ durch partielle Integration längs der Randkurve entfernen. Da man bei einem Umlauf an dieselbe Stelle des Randes, d. h. zum selben Wert von δw zurückkommt, so verschwindet der integrierte Teil, der ein einfaches Integral nach t darstellt und

es bleibt nur noch ein Ausdruck unter dem Doppelintegral mit dem Faktor δw stehen. In den letzten drei Gliedern lassen sich dann mit Hilfe der Formeln (17) partielle Ableitungen erster Ordnung nach s und n einführen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 & -\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2(1-\nu) \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 & -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 = & -\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (1-\nu) \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 & - (1-\nu) \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 = & -\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (1-\nu) \cdot \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial y} - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 = & -\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned}$$

Damit nimmt unser Randintegral δR nun schließlich die erwünschte Form an:

$$\begin{aligned}
 0 = \delta R = & \int_{t_1}^{t_2} \int_s \left\{ \left[\cos^2 \vartheta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2(1-\nu) \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin^2 \vartheta \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial n} \delta w \right. \\
 & \left. - \left[\frac{\partial}{\partial s} (1-\nu) \left(\sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \delta w \right\} \cdot ds dt. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Für beliebige Randvariationen δw und $\frac{\partial}{\partial n} \delta w$ erhält man nach einfacher Umformung die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned}
 1. \quad & \nu \Delta w + (1 - \nu) \left(\cos^2 \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. \\
 & \left. + \sin^2 \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \\
 2. \quad & \frac{\partial}{\partial n} \Delta w + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \vartheta \cos \vartheta \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \right\} = 0.
 \end{aligned} \right\} (20)$$

Sie sagen aus, daß das Biegemoment um den Plattenrand verschwinden muß und daß die Querkraft überall der Änderung des Drillingsmoments (vgl. Love, Lehrbuch der Elastizitätstheorie) das Gleichgewicht zu halten hat.

3. Für einen „gestützten“ Rand, an dem die Platte um die Randtangente drehbar gehalten wird ($\frac{\partial w}{\partial n}$ beliebig), findet man leicht, daß obige Bedingung 1, zusammen mit $w_r = 0$, das Integral der Schwingungsgleichung eindeutig bestimmt.

Vierter Teil.

Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen.

§ 126. Anwendung der Methode der Einflußlinien auf das Problem der schwingenden Saite.

Eine in der graphischen Statik sehr häufig angewandte Methode ist die der Einflußlinien, die von Müller-Breslau¹³⁸⁾ ausgebildet wurde. Unter Einflußlinie für irgendeine Größe y , z. B. Biegemoment, Querkraft, Durchbiegung, Tangentenrichtung o. dgl., versteht man deren Wert η als Funktion der Systemkoordinate x , wenn an irgendeiner beliebig gegebenen Stelle $x = \xi$ des Systems eine Kraft oder ein Moment o. dgl. vom Betrage 1 angreift und wenn das System so beschaffen ist, daß die beeinflusste Größe proportional mit der wirkenden Kraft bzw. Moment usw. wächst. Bei einem eindimensionalen System z. B. sind Systemkoordinate x und Kraftangriffsstelle ξ ganz beliebig, der Einfluß η ist also i. a. eine Funktion zweier Variablen x und ξ , die aber beide demselben Wertebereich entnommen sind. Meistens ist dann noch η auf Grund physikalischer Gesetze symmetrisch in x und ξ . Man kann auch sagen, η als Funktion von x bilde eine einparametrische Kurvenschar mit der Kraftangriffsstelle ξ als Parameter. Betrachten wir z. B. eine Saite von der Länge l , dem Querschnitt f und der Materialdichte $\rho = \frac{\gamma}{g}$. Wenn die Saite beiderseits mit der Kraft P gespannt und an der Stelle ξ mit der Kraft $Q = 1$ belastet wird, so ist ihre Durchbiegung als Funktion von x , wenn ich noch dimensionslose Koordinaten $\bar{x} = \frac{x}{l}$ und $\bar{\xi} = \frac{\xi}{l}$ einführe, so daß die Saite von $\bar{x} = 0$ bis $\bar{x} = 1$ reicht,

$$\eta = \frac{l}{P} \cdot K(\bar{x}, \bar{\xi}). \quad \begin{aligned} K &= \bar{x}(1 - \bar{\xi}), \bar{x} \leq \bar{\xi}, \\ K &= \bar{\xi}(1 - \bar{x}), \bar{x} \geq \bar{\xi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Die Zahl $K = K(\bar{x}, \bar{\xi})$ ist offenbar der Einfluß der Kraft 1 an der Stelle $\bar{\xi}$ auf die Durchbiegung einer Saite von der Länge 1, wenn diese mit der Kraft 1 gespannt ist. Als Kurvenschar mit dem Parameter ξ betrachtet, stellt K sämtliche Dreiecke mit der Basis 1 dar, deren Spitzen auf der Parabel $y = \bar{x}(1 - \bar{x})$ liegen (Fig. 305).

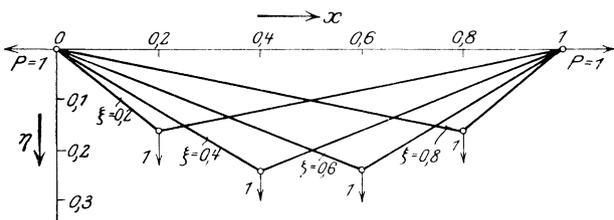


Fig. 305. Einflußlinien für die Durchbiegung einer Saite

$$\eta = \begin{cases} x(1 - \xi), & x \leq \xi. \\ \xi(1 - x), & x \geq \xi. \end{cases}$$

Der Nutzen der Anwendung von Einflußlinien ist ein doppelter:

1. Wirkt an der Stelle $\bar{\xi}$ die Kraft Q , so ist die beeinflusste Größe Q mal so groß als bei der Kraft 1, also allgemein

$$y = Q \cdot \eta. \quad (2)$$

2. Wirken an verschiedenen Stellen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ verschiedene große Kräfte Q_1, Q_2, \dots, Q_n , so ist z. B. die Durchbiegung gleich der Summe der Durchbiegungen, welche die Lasten $Q_1 \dots Q_n$ jede für sich hervorrufen würden, allgemein ist die beeinflusste Größe (Fig. 306)

$$y = Q_1 \cdot \eta(x \xi_1) + Q_2 \cdot \eta(x \xi_2) + \dots + Q_n \cdot \eta(x \xi_n). \quad (3)$$

Die Einflußlinien stellen also nichts weiter dar, als die methodische Ausgestaltung des Prinzips der linearen Überlagerung, und ihre Anwendung ist überall da möglich, wo die Voraussetzungen für dieses Prinzip erfüllt sind.

Es steht nun nichts im Wege, die Kräfte Q durch Trägheitskräfte zu ersetzen und damit auch dynamische Probleme mit Hilfe der Einflußlinien zu lösen. Z. B. sei die Eigen-

schwingung der oben betrachteten Saite auf diesem Wege zu ermitteln. Man wird dann so vorgehen, daß man die Saite in eine Anzahl Intervalle teilt und in den Teilpunkten Massenpunkte geeigneter Größe an Stelle der kontinuierlich verteilten Saitenmasse anbringt. Wir wählen z. B. n gleiche Teile $\lambda = \frac{1}{n} l$.

In jedem Teilpunkt $x_1 \dots x_{n-1}$ bringen wir eine Masse m an, die gleich der Masse eines Saitenstücks der Länge λ ist, also $m = \rho f \lambda$. Dabei stellen wir uns also vor, daß die auf der Strecke $x_i - \frac{1}{2} \lambda$ bis $x_i + \frac{1}{2} \lambda$ symmetrisch um den Teilpunkt x_i verteilte Masse in diesem konzentriert sei. Die Endpunkte x_0

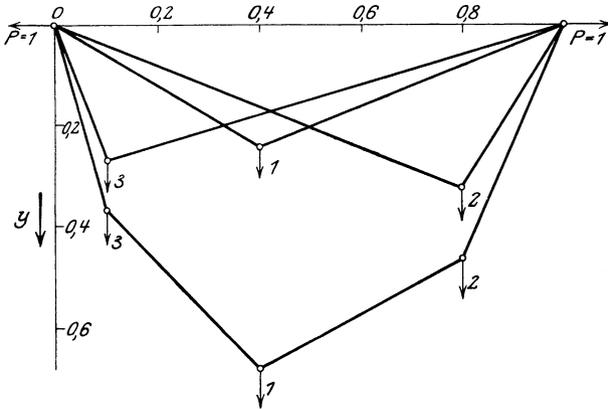


Fig. 306. Resultierende Durchbiegung einer Saite, $y = \sum c \cdot \eta$.

und x_n sind danach mit je $\frac{1}{2} m$ behaftet. Unsere Annahme wird um so eher der Wahrheit entsprechen, je größer wir n wählen. Wir bestimmen jetzt die Ordinaten y_i der einzelnen Massenpunkte m als Funktion der Zeit t auf Grund des d'Alembertschen Prinzips, nach dem die Beziehung 3 zu allen Zeiten erfüllt sein muß, wenn wir an Stelle der Q_i die Trägheitskräfte $-m \ddot{y}_i$ einführen. Es ist nun

$$\bar{x}_i = \frac{i}{n}, \quad \bar{\xi}_j = \frac{j}{n}, \quad \text{wo } i, j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Die Größen $K(\bar{x}_i, \bar{\xi}_j)$ werden damit konstante Zahlen, die wir mit

$$K_{ij} = K_{ji} = K(\bar{x}_i, \bar{\xi}_j) = \frac{i}{n} \left(1 - \frac{j}{n} \right), \quad i \leq j \quad (4)$$

bezeichnen wollen. Die Gleichung (3) schreiben wir nun für jeden der i Massenpunkte hin:

$$y_i = \frac{l}{P} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} m \ddot{y}_j K_{ij} \dots i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

und dieses System von Bewegungsgleichungen haben wir zu lösen. Wir setzen an

$$y_i = z_i \cdot e^{i\omega t}, \quad \ddot{y}_i = -\omega^2 z_i e^{i\omega t} \quad (6)$$

und erhalten

$$z_i = \frac{l m \omega^2}{P} \sum_{j=1}^{n-1} z_j K_{ij} \dots i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (7)$$

Das ist ein lineares homogenes Gleichungssystem für die z_i , das sich nur dann lösen läßt, wenn seine Determinante verschwindet. Diese Bedingung liefert die Gleichung der möglichen Frequenzen, mit denen die Saite schwingen kann. An dem speziellen Beispiel $n = 6$ will ich die Rechnung durchführen. Setze ich noch $\frac{P}{l m \omega^2} = \frac{P n}{l^2 \rho f \omega^2} = \lambda$, so lauten die Gleichungen (7):

$$\begin{aligned} \lambda z_1 &= K_{11} z_1 + K_{12} z_2 + K_{13} z_3 + K_{14} z_4 + K_{15} z_5, \\ \lambda z_2 &= K_{21} z_1 + K_{22} z_2 + \phantom{K_{23} z_3} + K_{25} z_5, \\ &\vdots \\ \lambda z_5 &= K_{51} z_1 + K_{52} z_2 + \phantom{K_{53} z_3} + K_{55} z_5. \end{aligned}$$

Die K_{ij} haben die Werte

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{5}{36}, & K_{12} &= \frac{1}{9}, & K_{13} &= \frac{1}{12}, & K_{14} &= \frac{1}{18}, & K_{15} &= \frac{1}{36}, \\ & & K_{22} &= \frac{2}{9}, & K_{23} &= \frac{1}{6}, & K_{24} &= \frac{1}{9}, & K_{25} &= \frac{1}{18}, \\ & & & & K_{33} &= \frac{1}{4}, & K_{34} &= \frac{1}{6}, & K_{35} &= \frac{1}{12}, \\ & & & & & & K_{44} &= \frac{2}{9}, & K_{45} &= \frac{1}{9}, \\ & & & & & & & & K_{55} &= \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

Setzen wir noch $n^2 \lambda = 36 \lambda = \varkappa$ und erweitern die Gleichungen mit $n^2 = 36$, so lauten sie schließlich

$$\left[\begin{array}{cccccc} (5 - \varkappa) z_1 + & 4 z_2 + & 3 z_3 + & 2 z_4 + & z_5 = 0, \\ 4 z_1 + (8 - \varkappa) z_2 + & 6 z_3 + & 4 z_4 + & 2 z_5 = 0, \\ 3 z_1 + & 6 z_2 + (9 - \varkappa) z_3 + & 6 z_4 + & 3 z_5 = 0, \\ 2 z_1 + & 4 z_2 + & 6 z_3 + (8 - \varkappa) z_4 + & 4 z_5 = 0, \\ z_1 + & 2 z_2 + & 3 z_3 + & 4 z_4 + (5 - \varkappa) z_5 = 0. \end{array} \right] \quad (\varepsilon)$$

Die K_{ij} sind in unserm Falle mehrfach symmetrisch, es ist nämlich $K_{ji} = K_{ij} = K_{n-i, n-j} = K_{n-j, n-i}$. Aus diesem Grunde lassen sich die Wurzeln κ , welche die fünfgliedrige Gleichungsdeterminante zu Null machen, leicht bestimmen. Vertauscht man in unserm Gleichungssystem z_1 mit z_5 und z_2 mit z_4 , so erhält man das alte System wieder. Wenn es also Lösungen gibt, so wird es auch solche geben, wo $z_1 = z_5$ und $z_2 = z_4$ ist, denn dann ist die vierte und fünfte Gleichung von selbst erfüllt, wenn es die erste und zweite sind. Entsprechendes gilt, wenn man $z_1 = -z_5$, $z_2 = -z_4$, $z_3 = -z_3 = 0$ setzt. Mit diesen Annahmen spaltet sich das System in die folgenden beiden:

$$\text{I. } z_1 = z_5, \quad z_2 = z_4. \quad \left| \begin{array}{ccc} (6 - \kappa)z_1 + & 6z_2 + & 3z_3 = 0, \\ 6z_1 + (12 - \kappa)z_2 + & & 6z_3 = 0, \\ 6z_1 + & 12z_2 + (9 - \kappa)z_3 = 0. \end{array} \right|$$

$$\text{II. } z_1 = -z_5, \quad z_2 = -z_4, \quad z_3 = 0. \quad \left| \begin{array}{ccc} (4 - \kappa)z_1 + & 2z_2 = 0, \\ 2z_1 + (4 - \kappa)z_2 = 0. \end{array} \right|$$

Die Wurzeln der zugehörigen Determinanten

$$A_1 = \left| \begin{array}{ccc} 6 - \kappa & 6 & 3 \\ 6 & 12 - \kappa & 6 \\ 6 & 12 & 9 - \kappa \end{array} \right| = \kappa^3 - 27\kappa^2 + 108\kappa - 108 = 0.$$

$$A_2 = \left| \begin{array}{cc} 4 - \kappa & 2 \\ 2 & 4 - \kappa \end{array} \right| = \kappa^2 - 8\kappa + 12 = 0$$

sind, nach fallenden Werten geordnet:

$$\kappa_1 = 22,392, \quad \kappa_2 = 6, \quad \kappa_3 = 3, \quad \kappa_4 = 2, \quad \kappa_5 = 1,608. \quad (9)$$

Mit diesen Wurzeln κ ergeben sich nun die Hauptkreisfrequenzen unseres Systems zu

$$\omega_i = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{Pn}{\varrho \lambda_i f}} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{n^3}{\kappa_i}} \cdot \sqrt{\frac{P}{\varrho f}}. \quad (10)$$

Die genaue Theorie der schwingenden Saite, behandelt mit der partiellen Differentialgleichung¹³⁹⁾, ergibt

$$\omega_i = \frac{\pi i}{l} \cdot \sqrt{\frac{P}{\varrho f}}.$$

Es müßte also $\frac{1}{i} \sqrt[n^3]{\alpha_i} = \pi$ sein. Eine gute Erfüllung dieser Beziehung ist nur für die tiefsten Töne der Saite zu erwarten, denn für die höheren ist die gewählte Zahl der Intervallteile zu klein. Wir erhalten schließlich auch nur so viel Töne, als mitschwingende Massenpunkte vorhanden sind, während die Saite doch in Wirklichkeit unendlich viele Töne hat. Will man für einen bestimmten Ton, z. B. den k -ten, die Eigenfrequenz mit einer bestimmten Genauigkeit erhalten, so steht dem natürlich nichts im Wege, wenn man nur die Zahl n der Intervalle genügend viel größer als k wählt. In unserem Beispiele ist

$$\begin{aligned} \sqrt[n^3]{\alpha_1} &= 3,11 \quad \dots \quad 1 \text{ } 0/0 \quad \text{Fehler} \\ \frac{1}{2} \sqrt[n^3]{\alpha_2} &= 3 \quad \dots \quad 4,7 \text{ } 0/0 \quad \text{''} \\ \frac{1}{3} \sqrt[n^3]{\alpha_3} &= 2,83 \quad \dots \quad 10 \text{ } 0/0 \quad \text{''} \\ \frac{1}{4} \sqrt[n^3]{\alpha_4} &= 2,6 \quad \dots \quad 16,5 \text{ } 0/0 \quad \text{''} \\ \frac{1}{5} \sqrt[n^3]{\alpha_5} &= 2,315 \quad \dots \quad 26,3 \text{ } 0/0 \quad \text{''} \end{aligned}$$

Die beiden ersten Schwingungszahlen werden also mit großer bzw. hinreichender Genauigkeit erhalten, ein bei der Grobheit des Näherungsverfahrens beachtenswertes Ergebnis.

Nun liegt der Gedanke nahe, die Zahl n der Intervallteile ins Grenzenlose zu steigern und so bei gleichzeitiger Verkleinerung der Massen m das Näherungsverfahren zu einem völlig exakten zu erweitern. Das scheint zunächst keine Schwierigkeiten zu bieten. Wir untersuchen erst das statische Problem, welche Form die Saite annimmt, wenn wir eine stetige Lastverteilung $p(\xi)$, bezogen auf die Längeneinheit der Saite, auf diese bringen. Am Längenelement $d\xi = l d\xi$ greift die kleine Kraft $p d\xi$ an und trägt zur Durchbiegung der Saite den kleinen Betrag

$$dy = p d\xi \cdot \eta(\bar{x}, \bar{\xi})$$

bei. Um die gesamte Durchbiegung zu erhalten, haben wir das entsprechend (3) über die Länge der Saite zu summieren,

d. h. nach der Kraftangriffsstelle $\bar{\xi}$ zu integrieren, wobei unterm Integral \bar{x} , die eigentliche Veränderliche der linken Seite, als von der Integration selbst nicht berührter Parameter auftritt. Wir erhalten so mit (1):

$$y = \frac{l^2}{P} \int_0^1 p(\bar{\xi}) K(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}. \tag{11}$$

Man sagt auch, die Biegelinie sei in dieser Form „quellenmäßig“ dargestellt und verbindet damit die Vorstellung, der Anteil $dy = p \eta d\xi$ habe seine Quelle in dem Element $d\xi$ an der Stelle ξ , wo dann p die Quellstärke ist.

Um nun vom statischen auf das dynamische Problem überzugehen, brauchen wir wieder nur wie oben an Stelle von $p d\xi$ die Trägheitskraft des Saitenelements einzuführen:

$$p d\xi = - \rho f \frac{\partial^2 y(\bar{\xi})}{\partial t^2} \cdot l d\bar{\xi}$$

und erhalten damit die Beziehung:

$$y(\bar{x}) = - \frac{l^2 \rho f}{P} \int_0^1 \frac{\partial^2 y(\bar{\xi})}{\partial t^2} \cdot K(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}.$$

Wie oben setzen wir an:

$$y(\bar{x}) = z(\bar{x}) \cdot e^{i\omega t}.$$

Setzen wir noch $\frac{l^2 \rho f \omega^2}{P} = \lambda$ (ein anderer Wert als der oben gebrauchte), so erhalten wir schließlich

$$z(\bar{x}) = \lambda \int_0^1 K(\bar{x}, \bar{\xi}) \cdot z(\bar{\xi}) d\bar{\xi}. \tag{12}$$

Das ist eine Funktionalgleichung für die uns noch unbekannte Funktion z . Da diese unter dem bestimmten Integral als Funktion des Integrationsparameters ξ auftritt, so kann man ihrer nach Ausführung der Integration und Einsetzung der Grenzen nicht mehr habhaft werden, die Unbekannte ist, wie man sich wohl auch ausdrückt, „wegintegriert“ und man muß besondere Rechenmethoden anwenden, um sie als Funktion von \bar{x} zu finden. Die Gleichung (12) heißt eine lineare homogene Integralgleichung für die Funktion z . Um sie

zu lösen, kann man das Integral näherungsweise durch eine endliche Summe ersetzen und erhält dann genau das Näherungsverfahren, das wir oben schon ausgeführt haben. In den folgenden Paragraphen wird die Theorie und die Lösungsmethoden der Integralgleichungstheorie entwickelt werden, soweit das im Rahmen dieses kurzen Kapitels möglich ist. Hier sei nur noch kurz die Lösung der Gleichung (12) angegeben. Wie wir oben bei der Näherungslösung eine Determinantenbedingung erfüllen mußten, so zeigt sich hier, daß die Integralgleichung nur dann Lösungen hat, wenn λ bestimmte Werte annimmt. Es muß nämlich

$$\lambda = (i\pi)^2, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (13)$$

sein, d. h. die möglichen Frequenzen haben die Werte

$$\omega_i = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{P}{\rho f}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (14)$$

Wir können dann leicht verifizieren, daß (12), d. h. jetzt

$$z(x) = (i\pi)^2 \int_0^1 K(x, \xi) z(\xi) d\xi$$

durch die Funktion $z = \sin i\pi x$ identisch befriedigt wird. Wir müssen das Integral zwecks Auswertung in zwei Teile zerlegen, da K nicht durch einen einzigen analytischen Ausdruck dargestellt werden kann. Für $0 \leq \xi \leq x$ ist $K = \xi(1-x)$ einzusetzen, für $x \leq \xi \leq 1$ dagegen $K = x(1-\xi)$, also ist zu bestätigen:

$$\sin i\pi x = (i\pi)^2 \int_0^x \xi(1-x) \sin i\pi \xi d\xi + (i\pi)^2 \int_x^1 x(1-\xi) \sin i\pi \xi d\xi.$$

Nun ist

$$(i\pi)^2 \int \xi \sin i\pi \xi d\xi = -i\pi \xi \cos i\pi \xi + \sin i\pi \xi,$$

also folgt

$$\begin{aligned} \sin i\pi x &= (1-x) [-i\pi \xi \cos i\pi \xi + \sin i\pi \xi]_0^x \\ &\quad + x [-i\pi \cos i\pi \xi + i\pi \xi \cos i\pi \xi - \sin i\pi \xi]_x^1 \\ &= (1-x) (-i\pi x \cos i\pi x + \sin i\pi x) \\ &\quad + x (i\pi - i\pi + i\pi \cos i\pi x - i\pi x \cos i\pi x \\ &\quad + \sin i\pi x) \\ &= \sin i\pi x, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Zum Schluß will ich zeigen, wie aus der Integralgleichung (12) die Differentialgleichung der Saite gefunden werden kann. Differenziere ich (12), so folgt

$$\frac{dz}{d\bar{x}} = \lambda \int_0^1 \frac{\partial K(\bar{x}, \bar{\xi})}{\partial \bar{x}} \cdot z(\bar{\xi}) d\bar{\xi}$$

Nun ist für $0 \leq \bar{\xi} \leq \bar{x}$ $\frac{\partial K}{\partial \bar{x}} = -\bar{\xi}$ und für $\bar{x} \leq \bar{\xi} \leq 1$ ist

$$\frac{\partial K}{\partial \bar{x}} = 1 - \bar{\xi}, \text{ also}$$

$$\frac{dz}{d\bar{x}} = \lambda \int_0^{\bar{x}} (-\bar{\xi} \cdot z(\bar{\xi})) d\bar{\xi} + \lambda \int_{\bar{x}}^1 (1 - \bar{\xi}) \cdot z(\bar{\xi}) d\bar{\xi}.$$

Hier kommt \bar{x} nicht mehr als Parameter im Integranden vor, sondern nur noch in den Grenzen der beiden Teilintegrale. Differenziert man ein bestimmtes Integral nach seiner oberen bzw. unteren Grenze, so erhält man den Integranden an der betreffenden Stelle mit positivem bzw. negativem Vorzeichen. Wir erhalten also bei nochmaliger Differentiation nach \bar{x}

$$\frac{d^2 z}{d\bar{x}^2} = -\lambda \bar{x} \cdot z(\bar{x}) - \lambda(1 - \bar{x}) \cdot z(\bar{x})$$

oder

$$\frac{d^2 z}{d\bar{x}^2} + \lambda z = 0 \tag{15}$$

und das ist die Differentialgleichung, der z genügen muß. Der Unterschied zwischen der Differentialgleichung (15) und der Integralgleichung (12) besteht im wesentlichen in folgendem: Gleichung (15) hat für alle Werte λ , d. h. auch für alle ω , Integrale: $z = A \sin \sqrt{\lambda} \bar{x} + B \cos \sqrt{\lambda} \bar{x}$. Diese sind aber nicht sämtlich als Lösungen des Saitenproblems zu gebrauchen. Um die brauchbaren Lösungen aus dem allgemeinen Integral auszuwählen, muß man nachträglich die Randbedingungen des Problems, nämlich $z = 0$ für $\bar{x} = 0$ und $\bar{x} = 1$ zu befriedigen suchen und erhält daraus erst die Bedingung (13) für die Frequenzen ω . Bei der Integralgleichung hat man das nicht nötig. Die Größe K , der sogenannte Kern der Gleichung, erfüllt bereits die Randbedingungen. Damit wird aber für jede Lösung von (12) die Randbedingung automatisch erzwungen, denn setze ich in (12) $\bar{x} = 0$ oder 1 , so ist $K(0, \bar{\xi})$ bzw. $K(1, \bar{\xi})$ für alle

Werte $\bar{\xi}$ null, damit verschwindet aber das Integral und damit auch $z(0)$ und $z(1)$.

Diese automatische Erfüllung der Randbedingungen ist es vor allen Dingen, welche den Integralgleichungen eine selbständige Bedeutung zukommen läßt, denn die Hauptschwierigkeit bei der Lösung partieller Differentialgleichungen liegt nicht in der Auffindung von Lösungen an sich (solche findet man meist in beliebiger Zahl), sondern in der Anpassung dieser Lösungen an die Randbedingungen. Dieser Schwierigkeit entgeht man, wenn man die gesuchte Größe „quellenmäßig darstellen“ kann, d. h. wenn die Unbekannte sich aus den Einflüssen irgendwelcher Kraft-, Wärme-, Licht-, Elektrizitätsquellen an verschiedenen Punkten des Systems linear zusammensetzen läßt. Die zugehörige „Einflußfunktion“, die meist als „Greensche Funktion“ einer Randwertaufgabe auftritt, läßt sich i. a. leichter finden, als die fertige Lösung der Differentialgleichung. Ist dann die Quellstärke eine lineare Funktion der Unbekannten selbst, was auf Grund physikalischer Gesetze oder durch geeigneten Ansatz eintritt, so erhält man eine lineare Integralgleichung für die Unbekannte, die man dann zu lösen hat. Wirkt z. B. auf die behandelte Saite an der Stelle $\bar{\xi}$ die periodische Kraft $p_0(\bar{\xi}) e^{i\omega t}$ pro Längeneinheit, so hätte man an Stelle von p in (11) die Größe $\left(p_0(\bar{\xi}) e^{i\omega t} - \varrho f \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$ zu setzen. Mit dem Ansatz $y = z(\bar{x}) \cdot e^{i\omega t}$ erhielte man für die erzwungenen Schwingungen der Saite die Beziehung

$$z(\bar{x}) = \frac{l^2}{P} \int_0^1 (p_0(\bar{\xi}) + \varrho f \omega^2 z(\bar{\xi})) K(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi},$$

oder wenn man noch das als bekannt anzusehende Integral

$$\frac{l^2}{P} \int_0^1 p_0(\bar{\xi}) K(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi} = P_0(\bar{x})$$

setzt und auswertet:

$$z(\bar{x}) = P_0(\bar{x}) + \lambda \int_0^1 z(\bar{\xi}) \cdot K(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}. \quad (16)$$

Diese Integralgleichung für z nennt man inhomogen, weil in ihr $P_0(\bar{x})$ als „Störungsfunktion“ auftritt. Genähert führt sie auf ein System von inhomogenen linearen Gleichungen.

Ihre genaue Lösung kann nach den Regeln der folgenden Paragraphen leicht gefunden werden, nachdem die Lösungen der Gleichung (12) bekannt sind. Integralgleichungen vom Typus (12) oder (16) treten außer bei Schwingungsproblemen auch sonst noch häufig bei den Problemen der technischen Physik auf. Hat man den Einfluß einer Wärmequelle auf die Temperaturverteilung in irgendeinem Körper gefunden, so findet man für den Temperaturverlauf beim Wärmeaustausch eine Integralgleichung, wenn man eine Temperaturzunahme an irgendeiner Stelle als scheinbare negative Wärmequelle in die Einflußfunktion einführt. In der Potentialtheorie treten Integralgleichungen mit unsymmetrischer Einflußfunktion auf¹⁴⁰); die Untersuchung der Knicksicherheit elastisch beanspruchter Konstruktionsteile führt ebenfalls auf Probleme der Integralgleichungstheorie¹⁴¹); schließlich sei erwähnt, daß auch hydrodynamische Probleme der modernen Tragflügeltheorie nach Prandtl auf Integralgleichungen für Wirbelverteilungen, seien sie stationär oder nicht stationär, führen¹⁴²). Nach diesen einleitenden Untersuchungen, die nur einen Einblick in das Wesen einer Integralgleichung geben sollten, gehen wir zu den Hauptsätzen und Lösungsmethoden selbst über.

§ 127. Die Fredholmschen Sätze und die Lösung der Integralgleichungen nach Neumann und Fredholm.

Wir nennen eine Funktionalgleichung

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (1)$$

eine inhomogene lineare Integralgleichung, auch Integralgleichung zweiter Art genannt, für die Funktion $\varphi(x)$. Es bedeuten $f(x)$ eine im Intervall zwischen den festen Zahlwerten a und b gegebene „Störungsfunktion“, λ eine gegebene (evtl. komplexe) Zahl und $K(x, \xi)$ einen gegebenen „Kern“, der im gleichen Intervall wie f eine stetige Funktion der beiden Veränderlichen x und ξ sein möge. Es sei zunächst nicht vorausgesetzt, daß K in x und ξ symmetrisch ist. Verschwindet $f(x)$ in x identisch, d. h. wirkt keine „äußere Kraft“, so bleibt die homogene Integralgleichung übrig:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Zwischen den homogenen und inhomogenen linearen Integralgleichungen und den homogenen und inhomogenen linearen

Gleichungssystemen für n Unbekannte bestehen bemerkenswerte Analogien, wie wir schon auf Grund der Tatsache erwarten, daß jene aus diesen durch einen Grenzübergang gewonnen werden können. Diese Beziehungen sind von Fredholm¹⁴³) aufgestellt worden und unter dem Namen Fredholmsche Sätze bekannt (Fredholm zieht übrigens den Faktor λ in den Kern hinein, so daß wir $\lambda = 1$ zu setzen hätten, eine Bezeichnung, von der wir zwecks leichteren Übergangs zu der Hilbertschen Theorie Abstand nehmen wollen). Bei unsymmetrischem K nennt Fredholm die Gleichungen

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(\xi, x) \cdot \varphi(\xi) d\xi \quad (3)$$

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(\xi, x) \psi(\xi) d\xi \quad (4)$$

die zu (1) bzw. (2) „adjungierten“ oder „transponierten“ Gleichungen. In einem System von linearen Gleichungen entspricht diesem Vertauschungsprozeß offenbar eine Umklappung des Koeffizientenschemas um die Diagonale. Die Fredholmschen Sätze, die sich nicht einfach beweisen lassen, lauten dann so:

Ist der Wert von λ gegeben, so ist nur einer der zwei Fälle möglich:

1. Die Gleichung (1) ist bei beliebigem $f(x)$ eindeutig lösbar, dagegen hat (2) keine andere als die Lösung $\varphi \equiv 0$. Entsprechendes gilt dann von den Gleichungen (3) bzw. (4).

2. Die Gleichung (2) hat eine oder mehrere Lösungen, die nicht identisch null sind. Gleichung (1) ist dann nicht bei beliebigem $f(x)$ lösbar. Gleichung (2) hat in diesem Falle höchstens endlich viele (n) linear unabhängige Lösungen, jede andere Lösung läßt sich aus diesen linear zusammensetzen. Entsprechendes gilt von den Gleichungen (3) und (4). Die Zahl n der linear unabhängigen Lösungen ist bei den Gleichungen (2) und (4) dieselbe.

Ferner gelten die Sätze:

3. Im Falle 1. läßt sich ein „lösender Kern“ $\Gamma(x, \xi)$ bestimmen, mit dem die Lösungen die Formen

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (5)$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(\xi, x) g(\xi) d\xi \quad (6)$$

annehmen.

4. Haben die Gleichungen (2) und (4) entsprechend Satz 2 nicht verschwindende, sog. „Nulllösungen“ φ_0 bzw. ψ_0 so lassen (1) und (3) nur dann Lösungen zu, wenn

$$\int_a^b f(x) \psi_0(x) dx = 0 \quad (7)$$

bzw.

$$\int_a^b g(x) \varphi_0(x) dx = 0 \quad (8)$$

ist, wo ψ_0 bzw. φ_0 die allgemeinste Nulllösung der jeweils adjungierten homogenen Gleichung (4) bzw. (2) sind. Die Lösungen von (1) und (3) sind dann nicht mehr eindeutig, sondern nur bis auf eine beliebige additive Nulllösung φ_0 bzw. ψ_0 der homogenen Gleichung bestimmt.

Die Bedingungen (7) und (8) pflegt man auch so auszusprechen, daß die Störungsfunktionen f und g auf den Nulllösungen ψ_0 und φ_0 der adjungierten Gleichungen „senkrecht stehen“ müssen, indem man zwei beliebige Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die aber im Intervall von a bis b der Bedingung

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$$

genügen, als zueinander senkrecht oder orthogonal bezeichnet. Daß die Störungsfunktion gerade zur adjungierten Nulllösung orthogonal sein muß, wenn Fall 2 vorliegt, ist leicht einzusehen. Setze ich nämlich voraus, daß Gleichung (4) die Lösung ψ_0 zulasse und zugleich Gleichung (1) die Lösung φ habe, so gilt also

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Das multipliziere ich beiderseits mit $\psi_0(x)$ und integriere von a bis b :

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_0(x) dx = \int_a^b f(x) \psi_0(x) dx + \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi_0(x) dx \varphi(\xi) d\xi.$$

Nun ist wegen Erfüllung von (4)

$$\lambda \int_a^b K(x, \xi) \psi_0(x) dx = \psi_0(\xi),$$

also

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_0(x) dx = \int_a^b f(x) \psi_0(x) dx + \int_a^b \psi_0(\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Da das Integral links und das letzte Integral rechts denselben Zahlwert darstellen, so ist hiermit die Beziehung (7) als notwendig erwiesen.

Die Zahlwerte $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots$, für welche Nulllösungen existieren, heißen die „Eigenwerte“ des Kernes K , die Nulllösungen selbst die „Eigenfunktionen“. Beim Beispiel der Saite sahen wir, daß es Eigenwerte und Eigenfunktionen geben kann und daß durch diese die Eigenschwingungszahlen und -formen des Systems bestimmt werden. Es gibt indessen auch unsymmetrische Kerne, welche keine Eigenwerte, also auch keine Eigenfunktionen haben.

Wir wollen nun annehmen, daß λ nicht mit einem Eigenwert zusammenfällt, wenn es solche gibt, so daß also (1) eine Lösung hat. Um sie zu finden, wollen wir so vorgehen, daß wir in (1) unter dem Integral an Stelle von $\varphi(\xi)$ die rechte Seite von (1) selbst wieder einsetzen, wobei ξ an Stelle von x und ein neuer Integrationsparameter, etwa r an Stelle des alten, ξ , zu schreiben ist:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \left\{ f(\xi) + \lambda \int_a^b K(\xi, r) \varphi(r) dr \right\} d\xi \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) K(\xi, r) \varphi(r) dr d\xi. \end{aligned}$$

Die Integration nach ξ im 2. Integral läßt sich ausführen. Wir wollen das Resultat mit

$$\int_a^b K(x, \xi) K(\xi, r) d\xi = K^{(2)}(x, r) \quad (9)$$

bezeichnen und den einmal iterierten Kern nennen. Damit lautet die vorhergehende Gleichung, wenn ich statt r wieder ξ einführe:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b K^{(2)}(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Auch hier kann man statt $\varphi(\xi)$ im letzten Integral wieder die Gleichung (1) einsetzen, d. h. die Iteration fortsetzen. Allgemein versteht man unter dem „ n mal iterierten Kern“ die Funktion

$$K^{(n+1)}(x, \xi) = \int_a^b K^{(n)}(x, r) K(r, \xi) d\xi, \quad (10)$$

wo $K^{(n)}$ der $(n - 1)$ mal iterierte Kern ist. Diese iterierten Kerne kann man offenbar durch Quadraturen nacheinander alle

bestimmen, d. h. wir dürfen sie als bekannte Funktionen ansehen. Setzt man also nun die Iteration wie angegeben fort, so ergibt sich für φ die folgende Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von λ , die sogenannte Neumannsche Reihe

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b K^{(2)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \dots \\ & + \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Vergleicht man das mit Gleichung (5), so ist unter Voraussetzung der Konvergenz die Existenz des lösenden Kerns durch die Formel bewiesen:

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \xi) = & K(x, \xi) + \lambda K^{(2)}(x, \xi) + \lambda^2 K^{(3)}(x, \xi) + \dots \\ & + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, \xi) + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Es wird nun von der Größe der iterierten Kerne abhängen, ob die Reihen (11) bzw. (12) konvergieren. Ist M der höchste Absolutwert, den K als Funktion von x und ξ annehmen kann, so konvergiert die Reihe sicher, solange $\lambda < \frac{1}{M}$ ist. Da die Gleichung (1) nach Fredholm nur dann keine endlichen Lösungen hat, wenn λ ein Eigenwert ist, so folgt überhaupt nach Sätzen der Funktionentheorie, daß die Reihen gerade bis zum kleinsten Eigenwert $\lambda = \lambda_1$ konvergent sind. Es läßt sich dann beweisen, daß die bis dahin definierte Funktion $\Gamma(x, \xi)$ ihre Eigenschaft als lösender Kern beibehält, wenn man sie analytisch fortsetzt, so daß funktionentheoretisch die Integralgleichung als gelöst gelten kann. Der lösende Kern $\Gamma(x, \xi)$ ergibt sich danach als eine meromorphe Funktion des Parameters λ , die an den Stellen der Eigenwerte $\lambda = \lambda_i$ Pole hat.

Eine andere Form der Lösung der Integralgleichung (1) ist die der Fredholmschen Reihen, die den Charakter des lösenden Kerns Γ am besten erkennen lassen und zugleich eine Gleichung für die Eigenwerte ergeben. Auf die Beweise der Formeln müssen wir hier freilich verzichten. Nach Fredholm ist der lösende Kern der Quotient zweier Reihen:

$$\Gamma(x, \xi) = \frac{D(x, \xi)}{D} \quad (13)$$

und diese Reihen lauten

$$\left. \begin{aligned} D(x, \xi) &= A_0(x, \xi) - \frac{\lambda}{1!} A_1(x, \xi) + \frac{\lambda^2}{2!} A_2(x, \xi) \\ &\quad - \frac{\lambda^3}{3!} A_3(x, \xi) + \dots \\ D &= 1 - \frac{\lambda}{1!} A_1 + \frac{\lambda^2}{2!} A_2 - \frac{\lambda^3}{3!} A_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Dabei ist gesetzt

$$A_0(x, \xi) = K(x, \xi).$$

$$\begin{aligned} A_n(x, \xi) &= \int_a^b \dots \int_a^b \begin{array}{c} K(x, \xi) K(x\alpha_1) \dots K(x\alpha_n) \\ K(\alpha_1 \xi) K(\alpha_1 \alpha_1) \dots K(\alpha_1 \alpha_n) \\ \vdots \\ K(\alpha_n \xi) K(\alpha_n \alpha_1) \dots K(\alpha_n \alpha_n) \end{array} \cdot d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n \\ A_n &= \int_a^b A_{n-1}(\alpha, \alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

Diesen Formeln sieht man sofort an, daß sie durch einen Grenzprozeß aus der Lösung in Determinantenform eines linearen Gleichungssystems hervorgegangen sind. Für die Rechnung sind sie ebenso unhandlich wie die Lösung mit iterierten Kernen, mit denen die $A_n(x, \xi)$ übrigens eng zusammenhängen. Auf Grund der Determinantentheorie erhält man nämlich den zur Berechnung von $A_n(x, \xi)$ etwas bequemeren Ausdruck

$$A_n(x, \xi) = A_n \cdot K(x, \xi) - n \int_a^b A_{n-1}(x, \alpha) K(\alpha, \xi) d\alpha. \quad (16)$$

Die Reihen konvergieren für alle Kerne, die im Gebiet von a bis b für beide Variablen stetig sind. Für den der gespannten Saite zugrunde liegenden Kern

$$\begin{aligned} K &= x(1 - \xi), & x \leq \xi \\ K &= \xi(1 - x), & x \geq \xi \end{aligned} \quad a = 0, \quad b = 1 \dots \quad (17)$$

seien die ersten Glieder der Fredholmschen Reihen angegeben:

$$\begin{aligned} A_0(x, \xi) &= \begin{cases} x(1 - \xi), & x \leq \xi \\ \xi(1 - x), & x \geq \xi \end{cases} \\ A_1(x, \xi) &= \begin{cases} \frac{1}{6} x(1 - \xi)[x^2 + (1 - \xi)^2], & x \leq \xi \\ \frac{1}{6} \xi(1 - x)[\xi^2 + (1 - x)^2], & x \geq \xi \end{cases} \end{aligned}$$

$$A_2(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{180} x(1 - \xi)[3(x^4 + \xi^4) + 10x^2\xi^2 - 4\xi(5x^2 + 3\xi^2) \\ \quad + 18\xi^2 + 10x^2 - 12\xi + 3] & x \leq \xi. \\ \frac{1}{180} \xi(1 - x)[3(x^4 + \xi^4) + 10x^2\xi^2 - 4x(5\xi^2 + 3x^2) \\ \quad + 18x^2 + 10\xi^2 - 12x + 3] & x \geq \xi. \end{cases}$$

$$A_0 = 1. \quad A_1 = \frac{1}{6}. \quad A_2 = \frac{1}{60}. \quad A_3 = \frac{1}{840}. \quad A_4 = \dots \quad (18)$$

Damit wird z. B. die Nennerreihe von Γ

$$D = 1 - \frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{120}\lambda^2 - \frac{1}{5040}\lambda^3 + \dots \quad (19)$$

Die Reihe für $\sin \sqrt{\lambda}$ lautet

$$\sin \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{3!} + \frac{\lambda^2}{5!} - \frac{\lambda^3}{7!} + \dots \right). \quad (20)$$

Nun ergeben offenbar die Nullstellen von D die Pole der Funktion Γ . Fredholm beweist, daß die Wurzeln λ_i von $D = 0$ in der Tat die Eigenwerte des Kerns K sind. Durch die ersten Glieder von (19) wird damit die Formel (13) des vorhergehenden Paragraphen bis zu einem gewissen Grade bestätigt, wonach die Eigenwerte von (17) die Wurzeln von $\sin \sqrt{\lambda}$ sind, denn die angegebenen Glieder von (19) stimmen mit denen in der Klammer von (20) genau überein.

Nachdem man die Eigenwerte des Kerns K als Wurzeln der Gleichung $D_{(\lambda)} = 0$ bestimmen kann, interessiert man sich noch dafür, wie die zugehörigen Eigenfunktionen zu finden sind. Diese gewinnt man durch einen Grenzprozeß wie folgt:

Die Funktion $D(x, \xi)$ ist eine Potenzreihe nach λ . Es sei $\lambda = \lambda_1$ ein Eigenwert, zu dem eine Eigenfunktion gefunden werden soll. Wir entwickeln $D(x, \xi)$ an der Stelle $\lambda = \lambda_1$ in eine Reihe und erhalten

$$D(x, \xi) = D_1(x, \xi) \cdot (\lambda - \lambda_1)^k + D_2(x, \xi) \cdot (\lambda - \lambda_1)^{k+1} + \dots$$

Dabei ist k eine ganze Zahl oder null und die Nennerreihe $D_{(\lambda)}$ hat bei $\lambda = \lambda_1$ eine mindestens $(k + 1)$ fache Nullstelle. $D_1(x, \xi)$, $D_2(x, \xi)$ usw. sind stetige Funktionen von x und ξ . Auf Grund einer Integralgleichung, welcher der lösende Kern Γ genügen muß, läßt sich dann zeigen, daß D_1 identisch die Beziehung erfüllt

$$D_1(x, \xi) = \lambda_1 \int_a^b D_1(\alpha, \xi) \cdot K(x, \alpha) d\alpha. \quad (21)$$

Es genügt hiernach, der Größe ξ in $D_1(x, \xi)$ einen konstanten Wert ξ_0 beizulegen, für den $D_1(x, \xi_0)$ als Funktion von x nicht überall null ist, um eine Eigenfunktion zu λ_1 zu erhalten:

$$\varphi_1(x) = D_1(x, \xi_0). \quad (22)$$

§ 128. Die Hilbertschen Sätze über die linearen Integralgleichungen mit symmetrischem Kern und die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen.

Praktischen Gebrauch von den Sätzen der Integralgleichungstheorie kann man erst machen, wenn man die Reihe der Eigenwerte λ_i und der zugehörigen Eigenfunktionen φ_i vollständig kennt, und von den Eigenschaften der Eigenfunktionen Gebrauch macht, die Hilbert¹⁴⁴⁾ in seiner Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern entwickelt hat. Wir wollen also weiterhin voraussetzen, daß der Kern $K(x, \xi)$ symmetrisch sei, d. h. daß überall

$$K(x, \xi) = K(\xi, x) \quad (1)$$

gilt. Es läßt sich dann beweisen, daß es mindestens eine Zahl λ_n gibt, für welche die Gleichung

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, \xi) \varphi_n(\xi) d\xi \quad (2)$$

eine endliche Lösung zuläßt. Im allgemeinen sind sogar unendlich viele Eigenwerte λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, vorhanden, die sich im Endlichen nirgends häufen. Hilbert zeigt, daß die Eigenwerte reeller symmetrischer Kerne sicher alle reell sind, und daß die Pole des lösenden Kerns an den Stellen λ_n alle einfach sind. Weiterhin haben die Eigenfunktionen φ_n die wichtige Eigenschaft, daß irgend zwei Eigenfunktionen, die zu verschiedenen Eigenwerten λ_m und λ_n gehören, zueinander orthogonal sind, d. h. daß der Mittelwert ihres Produktes verschwindet. Wir setzen zum Beweis voraus, daß λ_m und λ_n zwei verschiedene Eigenwerte und φ_m und φ_n zugehörige Eigenfunktionen seien, d. h. daß die Gleichungen erfüllt sind:

$$\varphi_m(x) = \lambda_m \int_a^b K(x, \xi) \varphi_m(\xi) d\xi.$$

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, \xi) \varphi_n(\xi) d\xi.$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\lambda_n \varphi_n(x)$, die zweite mit $\lambda_m \varphi_m(x)$, integrieren beide Seiten über x von a bis b , subtrahieren die Resultate und erhalten so

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx &= \lambda_m \lambda_n \int_a^b \int_a^b \{ K(x, \xi) \varphi_m(\xi) \varphi_n(x) \\ &\quad - K(x, \xi) \varphi_n(\xi) \varphi_m(x) \} dx d\xi. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von K erhalten wir bei der Integration des ersten Gliedes der geschweiften Klammer rechts dieselbe Zahl wie bei der Integration des zweiten Gliedes, so daß die rechte Seite verschwindet. Da $\lambda_n - \lambda_m$ nach Vorauss. nicht null ist, so gilt

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_m, \quad (3)$$

was bewiesen werden sollte. Die Eigenfunktionen sind auf Grund der Integralgleichung nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. In der Tat, ist $\varphi_n(x)$ eine Lösung der Gleichung (2), so ist auch $c_n \cdot \varphi_n(x)$ eine solche. Den Faktor c_n kann ich dann aus der Gleichung

$$c_n^2 = 1 : \int_a^b \varphi_n^2(x) dx$$

für jede Eigenfunktion bestimmen. Schreibe ich für $c_n \varphi_n(x)$ wieder $\varphi_n(x)$, so gilt für jede Eigenfunktion

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1. \quad (4)$$

Die so eindeutig bestimmten Eigenfunktionen heißen dann normiert auf Grund von (4), und sie sind untereinander orthogonal auf Grund von (3).

Der wichtigste Satz der Hilbertschen Integralgleichungstheorie ist nun der Entwicklungssatz:

Jede willkürliche, im Intervalle von a bis b stückweise stetige Funktion $f(x)$ läßt sich nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ eines stetigen symmetrischen Kernes $K(x, \xi)$ in eine konvergente Reihe entwickeln:

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots \quad (5)$$

Wir nehmen hier den Beweis dieser Reihenentwicklung als erbracht an und können unter dieser Voraussetzung leicht die Koeffizienten der Reihe auf Grund der Beziehungen (3) und (4) bestimmen. Soll z. B. c_n bestimmt werden, so multiplizieren wir beide Seiten mit $\varphi_n(x)$ und integrieren dann von a bis b

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx &= c_1 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_n(x) dx + c_2 \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_n(x) dx + \dots \\ &\quad + c_n \int_a^b \varphi_n^2(x) dx + \dots \end{aligned}$$

Wegen (3) verschwinden rechts alle Integrale bis auf das mit c_n multiplizierte, welches nach (4) zu 1 wird, so daß wir direkt erhalten

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (6)$$

Die Koeffizientenbestimmung ist also ebenso elegant und einfach wie bei der Theorie der Fourierschen Reihen. Diese selbst sind ja in der Tat nichts anderes als nur ein spezieller Fall der Entwicklungen nach Eigenfunktionen, denn zur Fourierschen Sinusreihe gehört nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen der Kern der schwingenden Saite. Man bezeichnet die Reihe (5) nach Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns oft auch als verallgemeinerte Fouriersche Reihe. Unter Umständen läßt sich die Entwicklung nach Eigenfunktionen auch auf den Kern $K(x, \xi)$ anwenden. Nach Mercer¹⁴⁵) ist diese Entwicklung stets möglich, wenn K definit oder quasidefinit ist. Ein Kern nämlich heißt positiv bzw. negativ definit, wenn seine Eigenwerte sämtlich positiv bzw. negativ sind. Dazu ist nach Hilbert notwendig und hinreichend daß

$$\int_a^b K(x, \xi) f(x) f(\xi) dx d\xi \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \leq 0 \quad (7)$$

sei, wenn f irgendeine ganz beliebige Funktion ist.

Ein Kern heißt weiter positiv oder negativ quasidefinit, wenn er nur endlich viele Eigenwerte von jeweils entgegengesetztem Vorzeichen hat. Ist nun K definit oder quasidefinit, so können wir die Koeffizienten der Entwicklung z. B. nach $\varphi_n(\xi)$ leicht erhalten. Es ist auf Grund der Integralgleichung und nach (6)

$$c_n = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_n(\xi) d\xi = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Also lautet die Reihe für den Kern

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_n(\xi) \lambda_n. \quad (8)$$

Die rechte Seite heißt die bilineare Reihe, die Gleichung selbst heißt die bilineare Formel. Diese läßt die vorausgesetzte Symmetrie des Kernes besonders deutlich hervortreten.

Mit dieser bilinearen Reihe läßt sich nun eine vorgelegte inhomogene Integralgleichung leicht lösen. Es sei z. B. gegeben

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad (9)$$

$f(x)$ sei beliebig, λ kein Eigenwert. Wir setzen $\varphi(x)$ als eine Reihe nach Eigenfunktionen mit unbestimmten Koeffizienten a_n an:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x). \quad (10)$$

Für $f(x)$ und K benutzen wir die Entwicklungen (5) und (8). Führen wir das alles in die Integralgleichung ein, so wird diese

$$\sum_n a_n \varphi_n(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x) + \lambda \int_a^b \sum_n \sum_m \frac{\varphi_n(x) \varphi_m(\xi)}{\lambda_n} a_m \varphi_m(\xi) d\xi.$$

Das Integral läßt sich wieder auf Grund der Beziehungen (3) und (4) auswerten, und zwar verschwinden alle Glieder, in denen nicht $n = m$ ist, während diese selbst den Betrag $\frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n(x)$ ergeben, so daß einfach bleibt:

$$\sum_n a_n \varphi_n(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x) + \lambda \sum_n \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Zwei Reihen nach Eigenfunktionen sind nur dann identisch, wenn sie in allen Koeffizienten übereinstimmen. Man beweist das leicht, indem man wieder beide Seiten mit $\varphi_n(x)$ multipliziert und von a bis b integriert, wobei dann wegen (3) und (4) beiderseits nur die Koeffizienten von φ_n übrigbleiben. Wir dürfen also in der letzten Gleichung gliedweise vergleichen und erhalten

$$a_n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) = c_n, \quad a_n = \frac{\lambda_n c_n}{\lambda_n - \lambda}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n c_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x), \quad c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (11)$$

Wir können der Lösung noch die Form geben

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \int_a^b f(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi. \quad (12)$$

Diese Gleichung heißt die Schmidtsche Lösung^{145a}). Der lösende Kern ist hiernach durch die Reihe

$$\Gamma(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(\xi)}{\lambda_n - \lambda} \quad (13)$$

darstellbar und läßt in dieser Form besonders gut die Einfachheit der Pole an den Stellen $\lambda = \lambda_n$ erkennen. Die Schmidtsche Lösung (12) zeigt nun noch mit einem Blick, daß die inhomogene Gleichung (9) für einen Eigenwert, z. B. $\lambda = \lambda_j$, nur dann eine endliche Lösung zuläßt, wenn neben dem Nenner $\lambda_j - \lambda$ auch noch das Integral $\int_a^b f(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi$ verschwindet, wenn also die Störungsfunktion orthogonal zur zugehörigen Eigenfunktion steht. φ_j bekommt dann in (12) den unbestimmten Faktor $0/0$, der hier alle Werte annehmen kann, da die Lösung nach Fredholm nicht eindeutig ist. Wir können z. B. noch annehmen, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ ein k -facher Eigenwert und daß λ diesem gleich sei. Dann muß $f(x)$ auf sämtlichen k Eigenfunktionen $\varphi_1(x)$ bis $\varphi_k(x)$ senkrecht stehen, wenn (9) eine Lösung haben soll. Diese selbst erhalten wir, wenn wir die Reihe in (12) von $k+1$ ab laufen lassen und dazu ein lineares Aggregat von φ_1 bis φ_k mit beliebigen Koeffizienten a_1 bis a_k hinzufügen:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{r=1}^k a_r \varphi_r(x) + \lambda \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \int_a^b f(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Lösung gelingt leicht durch Einsetzen in die Gleichung (9), nachdem die Werte c_1 bis c_k in (5) nach Voraussetzung Null sind. Auch der Umstand, daß die Differenz zweier verschiedener Lösungen von (9) bei $\lambda = \lambda_1$ eine Eigenlösung zu diesem Eigenwert sein muß, läßt die Richtigkeit von (14) leicht erkennen.

Zum Schluß will ich noch annehmen, daß in (9) die Funktion $f(x) = K(x, y)$ sei, wo y irgendeine zweite Variable aus dem Bereich von a bis b sein möge, die beim Löser der Gleichung als Parameter zu betrachten ist. Dann ergibt die Schmidtsche Formel (12)

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= K(x, y) + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \int_a^b K(\xi, y) \varphi_n(\xi) d\xi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(y)}{\lambda_n} + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \cdot \frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(y)}{\lambda_n - \lambda} = \Gamma(x, y). \end{aligned}$$

Der lösende Kern $\Gamma(x, y)$ genügt also selbst der Integralgleichung

$$\Gamma(x, y) = K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \Gamma(\xi, y) d\xi. \quad (15)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit der Eigenfunktion $\varphi_n(x)$ und integrieren über das Intervall von a bis b , wobei wir die Gleichung (2) beachten, so folgt

$$\varphi_n(y) = (\lambda_n - \lambda) \int_a^b \Gamma(\xi, y) \varphi_n(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Jeder zu einem Kern K und einer beliebigen Zahl $\lambda \neq \lambda_n$ gehörende lösende Kern Γ hat also, selbst wieder als Kern einer Integralgleichung betrachtet, dieselben Eigenfunktionen wie K und die Eigenwerte $\lambda - \lambda_n$.

Damit hätten wir die wesentlichsten Sätze und Methoden der Theorien der linearen Integralgleichungen kennengelernt und wollen im nächsten Paragraphen noch eine Anwendung der Theorie auf erzwungene Schwingungen behandeln. Die Lösung der inhomogenen Gleichung (16) des ersten Paragraphen dieses Kapitels sei dem Leser überlassen, sie bietet mit Hilfe der angegebenen Formeln keinerlei Schwierigkeiten, nachdem die Eigenwerte und Eigenfunktionen sämtlich bekannt sind.

§ 129. Die erzwungenen Schwingungen biegsamer Stäbe.

Im Dampfturbinenbau spielen die erzwungenen Schwingungen der Laufschaufeln eine große Rolle, da sie oft genug Anlaß zu Schaufelbrüchen geben. Die Maschinen müssen so konstruiert werden, daß gefährliche Resonanzschwingungen nach Möglichkeit vermieden werden. Eine Turbinenschaufel läßt sich als am einen Ende eingespannter Stab betrachten, auf den seiner ganzen Länge nach periodische Kräfte infolge der

Dampfstöße wirken. Wir wollen im folgenden einen solchen Stab von der Länge l , dem konstanten Querschnitt f mit dem konstanten Trägheitsmoment J , dem Elastizitätsmodul E und der Dichte $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ untersuchen. Wir legen die x -Achse in die

Stabmittellinie und rechnen die Abszisse x vom Einspannquerschnitt aus. $x = \xi$ bedeute wieder den Angriffspunkt einer Einzelkraft oder eines Kraftelements. $y(x, t)$ sei die gesuchte Ordinate der Biegelinie des Stabes. Um vom Maßsystem frei zu werden, wollen wir nach den Grundsätzen der Ähnlichkeitsmechanik „dimensionslos“ rechnen, d. h. alle veränderlichen Größen als Produkt eines fest gewählten Dimensionsfaktors mit einer veränderlichen Zahl betrachten. Alle Gesetze und Bestimmungsgleichungen lassen sich dann als Gleichungen zwischen reinen Zahlen schreiben und man kann die erhaltenen Formeln sofort auf alle in der Praxis üblichen Maßsysteme anwenden. Als natürliche Abszissen und Ordinaten führen wir die Größen $\bar{x} = x/l$, $\bar{\xi} = \xi/l$ und $\bar{y} = y/l$ ein. Auf den Stab wirke nun die periodische Kraft $Q = Q(\bar{x}) \cdot e^{i\omega t}$ pro Längeneinheit, in üblicher Weise komplex geschrieben, wobei wir stillschweigend nur mit dem einen, z. B. dem imaginären, Bestandteil rechnen. Ferner sei der Stab noch durch innere oder äußere Reibungskräfte und durch Schallausstrahlung gedämpft, die dämpfende Verzögerung sei $2b \frac{\partial y}{\partial t}$. Als Grenz-

bedingung haben wir, wenn wir mit ' Differentiationen nach \bar{x} bezeichnen, $\bar{y} = \bar{y}' = 0$ für $\bar{x} = 0$. Das andere Ende des Stabes sei entweder

- a) frei, d. h. $\bar{y}'' = \bar{y}''' = 0$ für $\bar{x} = 1$, oder
- b) drehbar gehalten, d. h. $\bar{y} = \bar{y}'' = 0$ für $\bar{x} = 1$.

Von Interesse ist auch noch der dritte Fall, daß

- c) beide Enden gehalten sind.

Dann ist

$$\bar{y} = \bar{y}'' = 0 \quad \text{für} \quad \bar{x} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{x} = 1.$$

Nach den Regeln der Biegelohre bestimmen wir nun die elastische Linie des Stabes, wenn an der Stelle $\bar{\xi}$ eine Einzelkraft P wirkt, mit vorgezogenen Dimensionsfaktoren zu

$$y = l \bar{y}(x) = \frac{P l^3}{E J} \cdot K(\bar{x}, \bar{\xi}). \quad (1)$$

Die Einflußfunktion K ist eine dimensionslose Zahl, die als Funktion von \bar{x} und $\bar{\xi}$ auf Grund des Maxwellschen Satzes

von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen in diesen Veränderlichen symmetrisch ist, so daß alle Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf unsere Untersuchungen anwendbar sind. Speziell lauten die Kernfunktionen K in den Fällen a), b) und c):

$$\left. \begin{aligned} K_a &= \frac{1}{6} \bar{x}^2 (3 \bar{\xi} - \bar{x}), & \bar{x} &\leq \bar{\xi} \\ &= \frac{1}{6} \bar{\xi}^2 (3 \bar{x} - \bar{\xi}), & \bar{x} &\geq \bar{\xi}, \\ K_b &= \frac{1}{2} \bar{x}^2 \left[\bar{\xi} - \frac{1}{3} \bar{x} - \frac{3}{10} \bar{\xi}^2 \left(1 - \frac{1}{3} \bar{\xi} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \bar{x} \right) \right] & \bar{x} &\leq \bar{\xi} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\xi}^2 \left[\bar{x} - \frac{1}{3} \bar{\xi} - \frac{3}{10} \bar{x}^2 \left(1 - \frac{1}{3} \bar{x} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \bar{\xi} \right) \right], & \bar{x} &\geq \bar{\xi}, \\ K_c &= \bar{x} (1 - \bar{\xi}) (2 \bar{\xi} - \bar{\xi}^2 - \bar{x}^2), & \bar{x} &\leq \bar{\xi} \\ &= \bar{\xi} (1 - \bar{x}) (2 \bar{x} - \bar{x}^2 - \bar{\xi}^2), & \bar{x} &\geq \bar{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

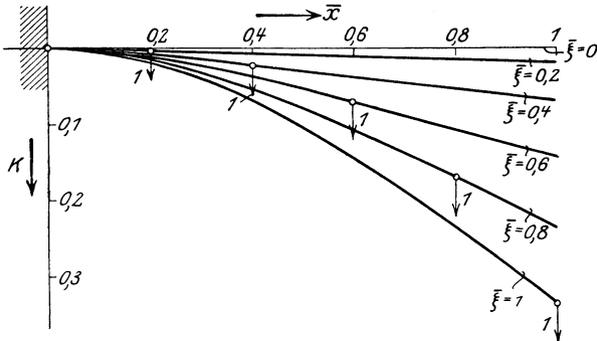


Fig. 307. Einflußlinien für den eingespannt-freien Stab, $K_a(\bar{x}, \bar{\xi})$.

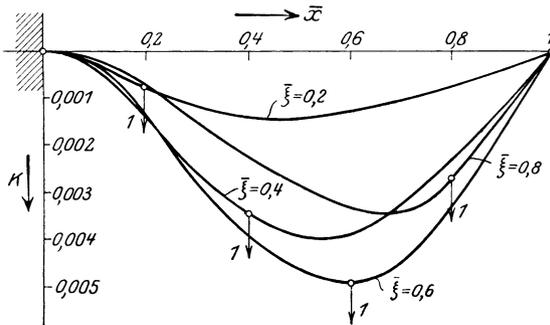


Fig. 308. Einflußlinien für den eingespannt-gehaltenen Stab, $K_b(\bar{x}, \bar{\xi})$.

Mit Hilfe dieser Einflußfunktionen (Fig. 307 und 308) erhalten wir die Biegelinie, wenn die statische Last $p(\bar{\xi})$ pro

Längeneinheit an der Stelle $\bar{\xi}$ wirkt, als

$$\bar{y} = \frac{l^3}{EJ} \int_0^1 K(\bar{x}, \bar{\xi}) \cdot p(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (3)$$

quellenmäßig dargestellt. Im Schwingungsproblem wird p die Summe aus Erregung Q , Trägheitskraft und Dämpfungskraft an der Stelle $\bar{\xi}$, je pro Längeneinheit, d. h. für die Masse ρf , gerechnet:

$$p(\bar{\xi}) = Q(\bar{\xi}) \cdot e^{i\omega t} - \rho f \frac{\partial^2 y(\bar{\xi})}{\partial t^2} - 2b\rho f \frac{\partial y(\bar{\xi})}{\partial t}. \quad (4)$$

Für y setzen wir an

$$y = l\bar{y}(\bar{x}) = l \cdot u(\bar{x}) \cdot e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Wir wollen ferner setzen

$$L(\bar{x}) = \frac{l^3}{EJ} \int_0^1 K(\bar{x}, \bar{\xi}) \cdot Q(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (6)$$

und

$$\lambda = l^4 \frac{\rho f}{EJ} (\omega^2 - 2bi\omega). \quad (7)$$

L und λ sind ebenso wie $u(\bar{x})$ wieder dimensionslose Zahlen. Setzen wir dann (5) und (4) in (3) ein, so erhalten wir für $u(\bar{x})$ die Integralgleichung

$$u(\bar{x}) = L(\bar{x}) + \lambda \int_0^1 K(\bar{x}, \bar{\xi}) \cdot u(\bar{\xi}) d\bar{\xi}. \quad (8)$$

Hier ist die Störungsfunktion L nach Gleichung (3) offenbar die dimensionslos geschriebene Biegelinie des Stabes, wenn die Kraftverteilung $Q(\bar{\xi})$ statisch auf diesen wirken würde. Zur Lösung von (8) benötigen wir die Eigenwerte λ_j und die normierten Eigenfunktionen $u_j(\bar{x})$ der Kerne K , welche die homogene Gleichung

$$u_j(\bar{x}) = \lambda_j \int_0^1 K(\bar{x}, \bar{\xi}) u_j(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \dots j = 1, 2, 3 \quad (9)$$

befriedigen und die im vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten Eigenschaften haben. Zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen ist es vielfach praktisch, auf Grund der Unstetigkeitseigenschaften der Ableitung des Kernes eine Differential-

gleichung abzuleiten und in deren Lösung λ_j so zu bestimmen, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Die Ableitungen des Kernes nach \bar{x} sind hier stetig bis zur Dritten, welche proportional der Querkraft

$$EJ \cdot \frac{d^3 y}{d\bar{x}^3}$$

ist. Da diese sich in Formel (1) an der Stelle $\bar{\xi}$ um P ändert, so muß K''' dort den Sprung 1 haben, wie man leicht einsieht, d. h. es muß

$$[K''']_{\bar{\xi}} = K'''_{|\bar{x}=\bar{\xi}+\varepsilon} - K'''_{|\bar{x}=\bar{\xi}-\varepsilon} = 1$$

sein. Zerlegt man dann

$$u_j'''(\bar{x}) = \lambda_j \int_0^1 K_j'''(\bar{x}, \bar{\xi}) u_j(\bar{\xi}) d\bar{\xi}$$

in Teilintervalle von 0 bis \bar{x} und \bar{x} bis 1 und beachtet, daß $K_j'''' = 0$ ist, so folgt durch nochmalige Differentiation aus jedem der Kerne

$$u_j''''(x) = \lambda_j u_j(\bar{x}). \tag{10}$$

Die Eigenfunktionen müssen diese Gleichungen und zugleich die Randbedingungen der einzelnen Fälle erfüllen. Die Ausführung dieser Rechnung und die Normierung liefert in den drei Fällen:

a) Freies Ende:

$$u_j(\bar{x}) = \mathfrak{Cof} \beta_j \bar{x} - \cos \beta_j \bar{x} - \frac{1}{k_j} (\mathfrak{Sin} \beta_j \bar{x} - \sin \beta_j \bar{x}), \tag{11}$$

$$\cos \beta_j \mathfrak{Cof} \beta_j + 1 = 0, \quad \lambda_j = \beta_j^4,$$

$$k_j = \frac{\mathfrak{Sin} \beta_j + \sin \beta_j}{\mathfrak{Cof} \beta_j + \cos \beta_j} = \frac{\mathfrak{Cof} \beta_j + \cos \beta_j}{\mathfrak{Sin} \beta_j - \sin \beta_j},$$

$$\beta_1 = 1,875, \quad \beta_2 = 4,694, \quad \beta_3 = 7,855, \quad \beta_4 = 10,996, \\ \beta_5 = 14,137.$$

b) Gehaltenes Ende:

$$w_j(\bar{x}) = \mathfrak{Cof} \gamma_j \bar{x} - \cos \gamma_j \bar{x} - \frac{1}{\varkappa_j} (\mathfrak{Sin} \gamma_j \bar{x} - \sin \gamma_j \bar{x}), \tag{12}$$

$$\cos \bar{\beta}_j \mathfrak{Cof} \bar{\beta}_j - 1 = 0, \quad \gamma_j = \frac{1}{2} \bar{\beta}_{2j+1}, \quad \lambda_j = \gamma_j^4, \quad \varkappa_j = \text{tg} \gamma_j = \mathfrak{Tg} \gamma_j,$$

$$\gamma_1 = 3,927, \quad \gamma_2 = 7,069, \quad \gamma_3 = 10,210, \quad \gamma_4 = 13,352, \\ \gamma_5 = 16,493.$$

c) Beide Enden gehalten:

$$\begin{aligned} v_j(\bar{x}) &= \sqrt{2} \sin \delta_j \bar{x}, \\ \delta_j &= \pi \cdot j, \quad \lambda_j = \delta_j^4. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Eigenfunktionen von K_c sind also dieselben wie die des Kerns $K_0 = x(1 - \xi)$, $\xi(1 - x)$ der schwingenden Saive. Die Rechnung zeigt, daß K_c der iterierte Kern von K_0 , $K_c = K_0^{(2)}$ ist. Auf Grund der bilinearen Formel sieht man leicht ein, daß der iterierte Kern bei Symmetrie immer dieselben Eigenfunktionen hat wie der gegebene, daß aber seine Eigenwerte gleich den Quadraten der Eigenwerte des gegebenen Kerns sind.

Die Eigenfunktionen sind die bei den Eigenschwingungen auftretenden Biegelinien. Da nun die Eigenwerte λ_j reell sind, was auch schon nach Hilbert aus der Symmetrie der Kerne folgt, so wird die aus (7) folgende Frequenz komplex. Wir erhalten

$$\omega^2 - 2bi\omega = \frac{\lambda_j EJ}{l^4 \rho f} = \omega_{j0}^2, \quad (14)$$

wenn wir mit ω_{j0} die Eigenfrequenz des ungedämpften Stabes bezeichnen. Es folgt dann

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_{j0}^2 - b^2} + bi = \pm \omega_j + bi. \quad (15)$$

Das so definierte ω_j ist die eigentliche Frequenz des gedämpft schwingenden Stabes und unser Ansatz (5) liefert für die j -te Eigenschwingung

$$y_j = l u_j(\bar{x}) \cdot e^{-bt} \cdot e^{i\omega_j t}, \quad (16)$$

d. h. diese klingt im Verhältnis e^{-bt} ab.

Zur Bestimmung der erzwungenen Schwingungen aus Gleichung (8) schließen wir uns eng an die Resultate des vorhergehenden Paragraphen an. Wir setzen an:

$$u(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j(\bar{x}). \quad (17)$$

Die λ_j sind alle positiv, also gilt für den Kern die bilineare Formel:

$$K(\bar{x}, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j(\bar{x}) u_j(\xi)}{\beta_j^4}. \quad (18)$$

Die Erregung Q , mit dem Faktor $\frac{l^3}{EJ}$ dimensionslos gemacht, hat die folgende Entwicklung nach Eigenfunktionen:

$$\frac{l^3}{EJ} Q = q = \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j(\bar{x}),$$

$$c_j = \frac{l^3}{EJ} \int_0^1 Q(\bar{\xi}) u_j(\bar{\xi}) d\bar{\xi}. \quad (19)$$

Damit erhält die Störungsfunktion L nach (6) die Entwicklung

$$L(\bar{x}) = \int_0^1 K(\bar{x}, \bar{\xi}) q(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j^4} u_j(\bar{x}).$$

Nach Formel (11) des vorhergehenden Paragraphen, in der c_j durch $\frac{c_j}{\beta_j^4}$ zu ersetzen ist, folgt nun

$$a_j = \frac{c_j}{\beta_j^4 - \lambda}.$$

Die vollständige Lösung der Aufgabe ist also

$$\bar{y}(\bar{x}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j^4 - \lambda} u_j(\bar{x}) e^{i\omega t}. \quad (20)$$

Da λ eine komplexe Funktion der aufgeprägten Frequenz ω ist, so tritt für kein ω ein Verschwinden eines Nenners ein, d. h. infolge der Dämpfung hat die Amplitude endliche Resonanzmaxima. Mit dem j -ten Tone tritt Resonanz ein, wenn

$$\omega^2 = \omega_j^2 - b^2 = \omega_{j0}^2 - 2b^2 \quad (21)$$

ist. Der maximale Ausschlag, der hierbei auftritt, ergibt sich nach einfacher Rechnung und Umformung auf die gegebenen Größen als

$$y_{\max} = \frac{1}{\rho f} \cdot \frac{\int_0^1 Q(\bar{\xi}) u_j(\bar{\xi}) d\bar{\xi}}{2b\omega_j} \cdot u_j(\bar{x}), \quad (22)$$

Anmerkungen, Literaturangaben, Verbesserungen.

§ 1. Allgemeine Festsetzungen über Koordinaten und Funktionen.

¹⁾ Folgende Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung sind zu empfehlen:

Schlömilch, O.: Kompendium der höheren Analysis. 6. A., II Teile. bearb. v. A. Kneser. Braunschweig 1923/24.

Dies Werk ist in hervorragender Weise geeignet, eine umfassende Kenntnis der Differential- und Integralrechnung zu verschaffen. Von Figuren wird mäßiger Gebrauch gemacht.

Schlömilch, O.: Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Leipzig. Bd. 1, 5. A. 1904. Bd. 2, 4. A. 1900.

Enthält eine große Fülle von Aufgaben zur Einübung der im Kompendium vorgetragenen Lehren.

Kiepert, L. Grundriß der Differential- und Integralrechnung. Hannover. Bd. 1, 12. A. 1912. Bd. 2, 10. A. 1912.

Ein in den Händen von Ingenieuren weitverbreitetes Lehrbuch.

Fricke, R.: Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. Braunschweig. 5. A. 1909.

Gedrängte Darstellung des auf den Hochschulen vorgetragenen Wissensstoffes mit knapper, aber strenger Begründung der einzelnen Sätze.

Lorenz, H.: Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik. 2 A. Berlin und München 1923.

Darstellung des für das Studium von Technik und Naturwissenschaft unentbehrlichsten Wissensstoffes.

Koestler, W., und M. Tramer: Differential- und Integralrechnung. I. T.: Grundlagen. Berlin 1913.

Enthält eine äußerst ausführliche Behandlung der Grundlagen der Infinitesimalrechnung.

^{1a)} Die im Texte gegebene Definition einer algebraischen Funktion ist zu eng. Demgegenüber ist y im weitesten Sinne eine algebraische Funktion von x , wenn gilt:

$$\varphi(x_1 y) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = 0,$$

wo die $A_0 \dots A_n$ ganze rationale Funktionen von y sind.

§ 6. Berechnung eines bestimmten und unbestimmten Integrals.

²⁾ Siehe „Hütte“ Bd. 1, S. 57. 1923. 24. A.

§ 7. Der Differenzen- und der Differentialquotient.

^{2a)} Die praktische Durchführung von Differentiationen nach diesem Ansatz mit dem Endziel, die Differentialkurve $f'(x)$ angenähert zu erhalten, wird eingehend erörtert von R. Slaby: Z. V. d. I. 1913, S. 821 und den anschließenden Veröffentlichungen in dieser Zeitschrift.

Ferner sind die Methoden der graphischen Differentiation ausführlich behandelt in:

Mehmke, R.: Leitfaden zum graphischen Rechnen. Leipzig und Berlin 1917, sowie bei:

Runge, C.: Graphische Methoden. Leipzig u. Berlin 1915.

§ 11. Die mechanische Herstellung der Integralkurve.

³⁾ Eine ausführliche Theorie des Integraphen (mit Beschreibung der Zwischenkonstruktionen und Anwendungsbeispielen) ist enthalten in: Br. Abdank-Abakanowicz: Die Integraphen. Deutsch von E. Bitterli. Leipzig: B. G. Teubner 1889.

§ 12. Instrumente zur mechanischen Herstellung spezieller bestimmter Integrale: Flächen- und Momentenplanimeter.

⁴⁾ Ausführliches über die Theorie der Integrierapparate enthält: de Morin, H.: Les Appareils d'Intégration. Paris: Gauthier-Villars. 1913. Das Werk behandelt auch die Integrierapparate der Firma Amsler, Schaffhausen.

§ 13. Allgemeine Regeln für die Durchführung der Differentiationen.

⁵⁾ Siehe „Hütte“ Bd. 1, S. 64, e. 3. 1923. 24. A.

⁶⁾ Siehe „Hütte“ Bd. 1, S. 214. 1923. 24. A.

§ 14. Bestimmung des Differentialquotienten der einfachen Funktionen.

⁷⁾ Vgl. „Hütte“ Bd. 1, S. 57. 1923. 24. A.

§ 16. Differentialquotient und Differentialgleichung.

^{7a)} An neueren Hilfsmitteln zur Behandlung der Differentialgleichungen sind besonders zu empfehlen:

Bieberbach, L.: Theorie der Differentialgleichungen. Berlin 1923.

Courant, R., und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik. Bd. 1. Berlin 1924.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Behandlung der Differentialgleichungen ist die Theorie der Reihen. Hierfür ist zu empfehlen:

Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin 1924.

§ 17. Anwendungsbeispiel: Die Spiegelkurve eines fließenden Gewässers. Angenäherte Integration einer Differentialgleichung.

⁸⁾ Vgl. zum folgenden: a) Grashof, F.: Theoretische Maschinenlehre. Bd. 1. Leipzig 1875. b) Lorenz, H.: Technische Hydromechanik. München und Berlin 1910. c) Föppl, A.: Technische Mechanik. Bd. 1. Leipzig 1900.

⁹⁾ Siehe „Hütte“ Bd. 1, S. 70. 1903.

¹⁰⁾ Bresse, J. J. Ch.: Cours de Mécanique appliquée. Bd. 2. Paris 1860.

¹¹⁾ Das Folgende bis zum Schluß des § wird von Lesern, die den Gebrauch des zweiten Differentialquotienten noch nicht kennen, zweckmäßig bis nach Erledigung von § 24 aufgespart.

¹²⁾ Siehe „Hütte“ Bd. 1, Nr. 12, S. 96. 1910.

§ 19. Anwendungsbeispiel: Die Spiegelkurve des Grundwasserstromes in der Umgebung eines Brunnens.

¹³⁾ Vgl. hierzu die Arbeiten A. Thiems im Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung 1870, 1876, 1879, 1880.

§§ 22. Das singuläre Integral.¹⁴⁾ Siehe „Hütte“ Bd. 1, Nr. 16, S. 100. 1923. 24. A.**§ 23. Die Methode des integrierenden Faktors.**¹⁵⁾ Dieser § ist erst nach § 51 zu lesen.¹⁶⁾ Z. B. Forsyth, R. A.: Lehrbuch der Differentialgleichungen. Mit Aufgaben von H. Maser. 2. A. von W. Jacobsthal. Braunschweig 1912.**§ 24. Höhere Differentialquotienten. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.**¹⁷⁾ Der im Texte enthaltene Satz über das allgemeine Integral gilt nicht für die Lösungen jeder beliebigen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Im allgemeinen gilt er für lineare Differentialgleichungen, unter Voraussetzungen, über die man z. B. L. Bieberbach: Theorie der Differentialgleichungen, Berlin 1923, S. 107f. nachsehe.

Verbesserung: Auf S. 83, Z. 14 von unten soll es heißen: Formel (8) statt Formel (1).

§ 25. Die Differentialgleichung der Seilkurve.¹⁸⁾ Siehe „Hütte“ Bd. 1, S. 71. 1923. 24. A.¹⁹⁾ Aus der Abb. 71 ergibt sich noch, daß die zweiten Integralkurven zu abc in den zu den Abszissenpunkten b gehörigen Kurvenpunkten sogenannte Wendetangenten besitzen müssen. Dies lehrt unmittelbar die Konstruktion des Seilecks zu $f(x)$. Überall, wo die Werte von $f(x)$ einen Zeichenwechsel erleiden, nehmen die Polstrahlen und mithin auch die Tangenten des Seilecks Grenzlagen ein. Das letztere ist aber das Kennzeichen der Wendetangenten. Diejenigen Punkte, in denen die Wendetangenten ihre Kurven berühren, nennt man Wendepunkte. Vgl. „Hütte“ Bd. 1, S. 99. 1923. 24. A.**§ 26. Differentialgleichung der elastischen Linie.**¹⁹⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 98. 1923. 24. A.**§ 29. Die Kettenlinie.**²⁰⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 97. 1923. 24. A.²¹⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 69. 1920. 24. A.²²⁾ Vgl. Janke, E., und F. Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig und Berlin 1909. Dies Werk enthält reichhaltiges Zahlenmaterial und graphische Darstellungen zu den verschiedenen Funktionen und wird von uns noch mehrfach zitiert werden unter der Abkürzung: J. und E.²³⁾ Hierfür genügt die Tafel: „Hütte“ Bd. 1, S. 30. 1923. 24. A.**§ 30. Genaue Form der Differentialgleichung der elastischen Linie.**

Verbesserung: Auf S. 119, Z. 4 v. u. muß lauten

$$\frac{P}{EJ} \left(l_x - \frac{x^2}{2} \right) = \xi.$$

§ 31. Eindimensionale Differentialgleichungen.²⁴⁾ Vgl. Föppel, A.: Technische Mechanik Bd. 3, S. 322. Leipzig 1900.**§ 36. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung.**²⁵⁾ Ist die abhängige Variable y eine physikalische Größe, so wird man verlangen müssen, daß sie niemals unendliche Werte annimmt. Dies

wird nur dann erreicht, wenn keine der Wurzeln μ einen positiven reellen Anteil hat. Hierfür müssen die Koeffizienten a_1 der Gleichung (7) gewissen Bedingungen genügen, die z. B. bei W. Hort: Technische Schwingungen. 2. A. Berlin 1922, S. 163 nachgesehen werden können.

§ 37. Anwendungsbeispiele: Föppls Differentialgleichung der Formänderung einer Eisenbahnschwelle auf nachgiebiger Unterlage; Formänderung der Wandung eines Wasserbehälters.

²⁶⁾ Föppl, A.: Technische Mechanik Bd. 2, S. 254. 1900.

²⁷⁾ Siehe Lorenz, H.: Technische Physik Bd. 4, S. 615 und Pöschl, Th. und K. v. Terzaghi: Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Berlin: Julius Springer 1913.

²⁸⁾ Siehe über die Berechnung von Behältern aus mehreren zylindrischen Teilen: Runge, C.: Z. f. Math. Phys. 1904.

§ 38. Integration durch Reihen.

²⁹⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 71. 1923. 24. A.

³⁰⁾ Crelles Journ. Bd. 80, S. 317 ff.

³¹⁾ Crelles Journ. Bd. 66, S. 148 ff.; Bd. 68, S. 361 ff.

³²⁾ Crelles Journ. Bd. 66, S. 126 ff.

§ 40. Aufsuchung des Fundamentalsystems, falls die Wurzeln der determinierenden Gleichung nicht sämtlich verschieden sind.

³³⁾ Die folgenden Ausführungen sind der Arbeit von G. Frobenius: Crelles Journ. Bd. 76, S. 214—224 entnommen.

³⁴⁾ Siehe auch H. Reißner: Beton und Eisen 1909, S. 150.

§ 42. Ein Beispiel simultaner Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: Dampfmaschine mit Regulator.

³⁵⁾ Vgl. zu diesem §: Hort, W.: Technische Schwingungslehre. 2. A. Berlin: Julius Springer 1922, und Hort, W.: Regulierung der Kraftmaschinen. Z. Math. Phys. 1904.

§ 43. Die Zentralbewegung als Beispiel eines Systems nichtlinearer Differentialgleichungen.

³⁶⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 156 und 197. 1923. 24. A.

³⁷⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 118, 12. 1923. 24. A.

³⁸⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 100. 1923. 24. A.

§ 44. Die Pendelgleichung. Elliptische Funktionen.

³⁹⁾ Dies ergibt sich daraus, daß der Integrand von K symmetrisch zum Werte $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ liegt.

⁴⁰⁾ Siehe z. B. J. u. E. S. 46.

⁴¹⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 57. 1923. 24. A.

⁴²⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 58. 1923. 24. A.

⁴³⁾ Den Modul k kann man beim Anschreiben der Formeln fortlassen, wenn keine Mißverständnisse möglich sind. Die Differentiationsformel (32) ist zu finden bei J. u. E. S. 46.

⁴⁴⁾ Dieser Ansatz ist ein Spezialfall des Additionstheorems der elliptischen Funktion $\sin am$ und ergibt sich z. B. nach J. u. E. S. 47 aus $sn(u+v)$ mit $v=K$ und den Werten der Tafel 4. Auf S. 46 bei J. u. E. sind unsere beiden Formeln (55) zu finden.

Beweise für alle von uns angewendeten Formeln der elliptischen Funktionen und Integrale findet man in: Krause, M.: Theorie der elliptischen Funktionen. Teubner 1912.

§ 45. Definition linearer Differenzgleichungen.

⁴⁵⁾ Näheres über Differenzgleichungen siehe in: a) Markoff, A. A.: Differenzenrechnung. St. Petersburg 1889—1891; deutsch von Th. Friesendorf und E. Prümm, Leipzig 1896 und b) Wallenberg, G., und A. Guldberg: Theorie der linearen Differenzgleichungen. Teubner 1911.

§ 46. Die linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

⁴⁶⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 468. 1923. 24. A.

⁴⁷⁾ Siehe hierzu Routh, J. E.: Dynamik der Systeme starrer Körper. Deutsch von A. Schepp. Bd. 2, S. 297. Teubner 1898.

§ 48. Anwendung der Differenzgleichung auf die Stromverteilung in einem Kettenleiter.

⁴⁸⁾ Siehe Wagner, K. W.: Die Theorie des Kettenleiters nebst Anwendungen. Arch. Elektrot. Bd. 3, S. 315. 1915.

⁴⁹⁾ Vgl. Rüdenberg, R.: Die Spannungsverteilung an Hängeisolatoren. ETZ 1914, S. 412.

Weitere Beispiele bietet: P. Funk, Die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. J. Springer 1923.

§ 49. Differentialgleichungen erster Ordnung in graphischer Behandlung.

⁵¹⁾ Runge, C.: Graphische Methoden, S. 96. Leipzig u. Berlin 1915.

§ 50. Einige technische Anwendungen der Differentialgleichungen erster Ordnung.

⁵²⁾ Mie, G.: Über die Kurzschlußstromkurve einer Gleichstrommaschine. Z. Math. Phys. Bd. 53, S. 37. 1906.

§ 51. Das Isoklinenverfahren der Differentialgleichungen erster Ordnung.

⁵³⁾ Die im Text zu Gl. (3) und (4) angedeuteten Beziehungen zwischen den Einhüllenden und den Spitzenörtern haben eine sehr tiefgehende geometrische Bedeutung, deren genaue Erörterung zu weit führen würde. Wie z. B. bei Clebsch, A.: Vorlesungen über Geometrie, S. 962f. Leipzig 1876, ausgeführt wird, sind die uns interessierenden Beziehungen zwischen Isoklinen und Trajektorienbüscheln bzw. der vorgelegten Differentialgleichung und ihren Integralkurven Spezialfälle der Beziehungen viel allgemeinerer Gebilde, die bei Clebsch als Konnexen Koinzidenzen bezeichnet werden.

§ 52. Zwei Anwendungen des Isoklinenverfahrens.

⁵⁴⁾ Massau, J.: Mémoire sur l'Intégration graphique et ses Applications. (Extrait des Annales de l'Association des Ingenieurs sortis des Écoles spéciales de Gand.) Livre IV—VI, p. 525. 1886/82.

⁵⁵⁾ Cranz, C., und R. Rothe: Zur Lösung des Hauptproblems der äußeren Ballistik für ein beliebiges Luftwiderstandsgesetz. Artilleristische Monatsh. 1917, Januar bis Juni, S. 197. Vgl. auch Rothe, R.: Math. Ges. Bd. 16, 3. Stück, S. 92. 1918.

Als weiteres Beispiel vgl.: K. Pohlhausen, Zur näherungsweise Integration der laminaren Grenzschicht *Z. f. a. M. u. M.* Bd. 1. 252f. 1921.

Verbesserung: Auf S. 236, Z. 7 v. u. muß es statt Fig. 264 heißen: Fig. 131.

§ 53. Eine Sondergestalt des Isoklinenverfahrens.

⁵⁶⁾ Czuber, E.: *Z. Math. Phys.* Bd. 44, S. 41. 1899.

Verbesserung: S. 240, Z. 3 v. o. muß es statt Fig. 265 heißen: Fig. 132.

§ 54. Runges Methode zur angenäherten Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung.

⁵⁷⁾ Runge, C.: *Math. Ann.* Bd. 46, S. 167—178. 1895.

§ 55. Anwendung der Rungeschen Methode.

⁵⁸⁾ Die Daten sind mit geringen Abweichungen entnommen aus: Dwelshauvers-Dery, V.: *Étude expérimentale dynamique de la machine à vapeur.* Paris: Gauthiers-Villars. O. J.

⁵⁹⁾ Wegen der Erklärung der Bezeichnung „simultan“ siehe § 41.

§ 56. Numerische Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung nach G. Duffing.

⁶⁰⁾ Duffing, G.: Zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. *Forsch.-Arb. d. V. d. I.* 1920, H. 224, S. 29—50.

§ 57. Das Verfahren der schrittweisen Verbesserung bei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

⁶¹⁾ Schwarz, H. A.: *Gesammelte math. Abhandl.* Bd. 1, S. 141.

⁶²⁾ Picard, E.: *Traité d'Analyse* Bd. 2 u. 3. Paris 1905/1908. 2. A.

⁶³⁾ Runge, C.: Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Math. Ann.* 46 (1895) und *Jahresb. Deutsch. Math. Ver.* Bd. 16, S. 270—272. 1907.

⁶⁴⁾ $x = (u - u_0) \cos \alpha + (p - p_0) \sin \alpha$; $y = -(u - u_0) \sin \alpha + (p - p_0) \cos \alpha$.

Hierin ist α der Winkel, um den beide Koordinatensysteme gegeneinander gedreht sind; $u = u_0$, $p = p_0$ ist der neue Anfangspunkt.

⁶⁵⁾ Runge, C.: *Graphische Methoden*, S. 122. B. G. Teubner 1915.

§ 58. Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe der Krümmungskreise.

⁶⁶⁾ Lord Kelvin: *On Graphic Solution of Dynamical Problems.* *Phil. Mag.* Bd. 34. 1892.

⁶⁷⁾ Runge, C.: *Graphische Methoden.* 1915, S. 132.

⁶⁸⁾ Boys, C. V.: *On the Drawing of Curves by their Curvature.* *Phil. Mag.* V. Bd. 36, S. 75. 1893. — Beschrieben ist das Lineal in Dyck, W.: *Katalog mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente.* Nachtrag. S. 49. München 1893.

⁶⁹⁾ Rothe, R.: Zur graphischen Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Z. Math. Phys.* Bd. 64, H. 1. 1916.

⁷⁰⁾ Mit Hilfe des Lineals ist von R. Rothe, (s. Anm. 69) die Legendresche Differentialgleichung $y'' = \frac{20y - 2xy'}{x^2 - 1}$ mit den Anfangs-

bedingungen $x=0$, $y=0,375$, $y'=0$ zwischen $x=0$ und $x=1$ integriert worden.

⁷¹⁾ Gümbel, L.: Die elastische Linie dünner (krummer) Stäbe. Z. „SchiŒb.“ 1918, H. 7—10.

Auf S. 246, Z. 5 v. u. ist noch hinzuzufügen: Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn ϱ zwischen ϱ_1 und ϱ_2 beständig abnimmt.

§ 59. Das Krümmungskreis-Verfahren von Meißner.

⁷²⁾ Meißner, E.: ber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen. Schweiz. Bauzg Bd. 62, Nr. 15/16. Zürich u. Leipzig 1913.

§ 60. Das Verfahren der Seilkurve.

⁷³⁾ Gümbel, L.: Die graphische Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Anwendung auf die Schwingungslehre. Z. V. d. I. 1919, S. 771.

§ 61. Die Methode von Runge zur zeichnerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

⁷⁴⁾ Kutta, W.: Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen. Z. Math. Phys. Bd. 46, H. 4, S. 435. 1901.

§ 62. Numerische Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach G. Duffing.

⁷⁵⁾ Duffing, G.: Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. Forsch.-Arb. d. V. d. I. H. 224. Berlin 1920.

§ 63. Abgeändertes Verfahren nach G. Duffing.

^{76a)} S. Anm. ⁷⁵⁾ a. a. O.

§ 65. Anwendung der schrittweisen Verbesserung bei einer Randwertaufgabe.

⁷⁶⁾ Picard, E.: Traité d'Analyse Bd. 3, S. 90. 1908. 2. A.

§ 66. Prüfung der Verfahren nach Gümbel und Duffing.

⁷⁷⁾ S. Anm. ⁷³⁾ a. a. O.

VIII. Mechanische Integration von Differentialgleichungen.

^{77a)} Während des Druckes wurde die Münchener Dissertation (T. H.) von U. Knorr: ber einen Integrappen zur mechanischen Integration einer sehr allgemeinen Gruppe von Differentialgleichungen, bekannt. Eine kurze Beschreibung und Abbildung des Apparates ist in ETZ Bd. 45, H. 33, S. 869. 1924 enthalten. Dieser Integrapp leistet nach Angabe der Dissertation die mechanische Integration von Differentialgleichungen des Typus:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi \left(\frac{dx}{dt} \right) + \psi(x) = \chi(t),$$

wo φ , ψ , χ willkürliche Funktionen sind. Eine Nachprüfung oder Würdigung dieser Angaben war bisher nicht möglich. Der Integrapp und die Dissertation kann von der Firma Gebr. Strzl, München, Kapuzinerstr. 18 bezogen werden.

§ 67. Integration linearer Differentialgleichungen nach Pascal.

⁷⁸⁾ Vgl. hierzu Br. Abdank-Abakanowicz: Die Integrappen. Deutsch von E. Bitterli. Leipzig 1889.

Ferner die Untersuchung von Willers, Fr. A.: Zum Integrator von E. Pascal. Z. Math. Phys. Bd. 59, S. 36. 1911.

§ 68. Der Apparat von Lord Kelvin.

⁷⁹⁾ Proc. Roy. Soc. Bd. 24, S. 269. 1876.

§ 71. Die Arten der Integrale partieller Differentialgleichungen im allgemeinen.

⁸⁰⁾ Dieser Satz über die Funktionaldeterminante Δ wird in den Lehrbüchern über Differentialgleichungen, z. B. bei A. R., Forsyth: Differentialgleichungen § 9.

^{80a)} Zum Studium der allgemeinen Integrationstheorien partieller Differentialgleichungen können folgende Werke dienen:

1. Horn, J.: Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Göschen 1910.
2. v. Weber, E.: Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Teubner 1900.
3. Forsyth, A. R.: Differentialgleichungen. 2. A. Vieweg 1912.
4. Bieberbach, L.: Theorie der Differentialgleichungen. Berlin: Julius Springer 1923.

⁸¹⁾ Außer diesen hier zu behandelnden exakten Integrationsmethoden gibt es eine Reihe graphischer und numerischer Näherungsmethoden für partielle Differentialgleichungen, über die bei Runge C., und Fr. A. Willers: Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, Enzykl. d. math. Wiss. Bd. 2, H. 3, S. 159, berichtet wird. Von diesen stellen wir unten (§ 104) das technisch und physikalisch besonders wichtige Verfahren von Rayleigh-Ritz ausführlich dar.

§ 72. Differentialgleichungen der schwingenden Saite.

⁸²⁾ Vgl. hierzu ausführliche geschichtliche Angaben bei Burkhardt, H.: Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen usw. B. G. Teubner 1908.

^{82a)} Man nennt die Funktionen $u_n\left(\frac{x}{l}\right) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ die Eigenfunktionen der Saite oder der Saiten-Differentialgleichungen. Die durch Ansatz (17) gekennzeichnete Eigenschaft der Eigenfunktion nennt man Orthogonalität.

^{82b)} Aus (18) ergibt sich, daß für die Funktionen

$$N_n\left(\frac{x}{l}\right) = \sqrt{2} u_n\left(\frac{x}{l}\right)$$

gilt:

$$\frac{1}{l} \int_0^l N_n^2\left(\frac{x}{l}\right) dx = 1.$$

Statt dessen kann man auch schreiben:

$$\int_0^1 N_n^2(\xi) d\xi = 1.$$

Die somit erklärten Funktionen $N_n(\xi)$ nennt man die Normalfunktionen der Saite.

§ 73. Rechnerische Ermittlung der Fourierschen Koeffizienten.

^{82c)} Außer dem im Texte mitgeteilten numerischen Verfahren der harmonischen Analyse gibt es noch eine große Anzahl weiterer, von

den die wichtigsten bei Hort, W.: Technische Schwingungslehre, 2. A. 1922, § 37—40, behandelt werden. Von diesen sei besonders auf das Verfahren nach Herrmann-Zipperer (Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. Bd. 47, S. 45. 1890 und Dingler Bd. 333, S. 201. 1918) hingewiesen.

§ 74. Mechanische Verfahren zur Bestimmung des Fourierschen Koeffizienten.

⁸³⁾ Über die Formel der partiellen Integration siehe „Hütte“ Bd. 1, S. 72. 1908.

O. Henrici hat seinen Analysator beschrieben in: On a new harmonic analysis. Phil. Mag. (5) Bd. 38, S. 110. (1894). —

⁸⁴⁾ Als weitere Mittel zur harmonischen Analyse sind zu nennen der Apparat von A. A. Michelson und S. W. Stratton, beschrieben in Am. Journ. of Sc. (4) Bd. 5, Nr. 25, 1. New Haven 1898 und derjenige von O. Mader, beschrieben ETZ 1909.

§ 75. Die Differentialgleichung der Stabschwingungen. Biegungsschwingungen.

^{84a)} Man nennt die Funktionen $u_i\left(\frac{x}{l}\right)$, von denen für jeden Einspannungsfall eine unendliche Reihe existiert, die Eigenfunktionen des Stabes oder der Stabdifferentialgleichung (für den betreffenden Einspannungs- oder Randbedingungsfall). Die Eigenfunktionen genügen der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^l u_i\left(\frac{x}{l}\right) u_j\left(\frac{x}{l}\right) dx = 0, \quad i \neq j.$$

⁸⁵⁾ Strutt, J. W. (Baron Rayleigh). Theorie des Schalles. Deutsch von Fr. Neesen. Bd. I u. II. Braunschweig 1879/80.

⁸⁶⁾ Ribière, S.: Phares et Signaux Maritimes. Paris 1908.

Verbesserung: Auf S. 371, Z. 7 v. u. ist das zweite x in $\mathcal{C}of \frac{mx}{l} \cdot x$ zu streichen.

§ 76. Schiffsschwingungen.

⁸⁷⁾ Literatur der Schiffsschwingungen: a) L. Gumbel: Jahrb. Schiffsbaut. Ges. 1901, S. 211. b) A. Kriloff: Math. Ann. 1905. S. 211.

§ 77. Analytische Ermittlung der Eigentöne nicht gleichförmiger, insbesondere verzüngter Stäbe.

⁸⁸⁾ Strutt, J. W. (Baron Rayleigh): Die Theorie des Schalles. Übers. v. Fr. Neesen. Bd. 1, S. 292 ff. Braunschweig 1880.

^{88a)} Der dem folgenden zugrunde liegende Gedanke geht auf Rayleigh zurück. Vgl. Anm. ⁸⁸⁾ a. a. O. Bd. 1, S. 121 ff., 316 ff.

⁸⁹⁾ Die Normalfunktionen $N(\xi)$, die ausführlicher mit $N_i\left(\frac{x}{l}\right)$ bezeichnet werden, gewinnt man aus den Eigenfunktionen $u_i\left(\frac{x}{l}\right)$ (vgl. § 75. Anm. ^{84a)}) durch Multiplikation mit einer derartigen Konstante, daß gilt

$$\frac{1}{l} \int_0^l N_i^2\left(\frac{x}{l}\right) dx = \frac{1}{l} \int_0^l c^2 u_i^2\left(\frac{x}{l}\right) dx = 1.$$

Nun kann man wieder wie in § 72, Anm. ^{82b)} setzen: $x:l = \xi$ und hat

$$\int_0^1 N_i^2(\xi) d\xi = 1.$$

^{89a)} Die Auswertung der Integrale bzw. die Berechnung der Koeffizienten σ und τ ist von Dr. W. Kiby durchgeführt worden.

⁹⁰⁾ Die nachfolgende Untersuchung hat auf meine Anregung Dr. K. Lachmann begonnen und Dr. W. Kiby zu Ende geführt.

§ 79. Runde Membran. Besselsche Funktionen.

⁹¹⁾ Vgl. z. B. Schafheitlin, P.: Die Theorie der Besselschen Funktionen. B. G. Teubner 1908.

§ 80. Schwingungen einer rotierenden Membran. Hypergeometrische Funktion.

²²⁾ Vgl. Love, A. E. H.: Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe. S. 102. B. G. Teubner 1907.

⁹³⁾ Lamb, H., u. R. V. Southwell: The Vibrations of a Spinning Disk. Proc. Roy. Soc. Ser. A Bd. 99, S. 272. 1921.

^{93a)} Siehe z. B. Riemann, B. u. H. Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bd. 2, S. 4ff. Braunschweig 1901.

⁹⁴⁾ Die eingehende Theorie dieser Reihe verdankt man C. F. Gauß: Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$$

Ges. Werke Bd. 3, S. 129ff.

⁹⁵⁾ Der Beweis hierfür ist von Gauß mittelst des nach ihm benannten Konvergenzkriteriums (vgl. Ges. Werke Bd. 3, S. 140) erbracht worden.

Näheres über das Kriterium bei Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. S. 289. Berlin: Julius Springer 1924. 2. A.

§ 81. Wärmeleitung.

⁹⁶⁾ Die Konstante c bedeutet in Formel (4) die spezifische Wärme.

§ 83. Berücksichtigung der Oberflächenbedingung.

⁹⁷⁾ Siehe „Hütte“ Bd. 1, S. 97. 1923. 24. A.

§ 84. Wärmeleitung in einem Stabe bei veränderlicher Stabtemperatur.

⁹⁸⁾ Ausführliches über die Theorie der Wärmeleitung findet man in: Fourier, J. B.: Théorie analytique de la Chaleur. Paris 1822. b) Heine, E.: Handbuch der Kugelfunktionen. Bd. 2. Berlin 1881. c) Riemann, B., u. H. Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bd. 2. Braunschweig 1901.

§ 85. Anwendung auf der Wärmebewegung in den Wandungen des Dampfmaschinenzylinders.

⁹⁹⁾ Die hier in Frage kommenden Rechenvorschriften finden sich z. B. in „Hütte“, Bd. 1, S. 82. 24. A.

¹⁰⁰⁾ Die Wärmebewegung durch die Wandung des Dampfmaschinenzylinders wird ebenfalls behandelt von: a) Kirsch, A.: Die Bewegung der Wärme in den Zylinderwandungen der Dampfmaschine. Leipzig 1883. b) Lorenz, H.: Lehrbuch der technischen Physik. Bd. 2. München 1904.

§ 86. Stationäre ebene Bewegung einer inkompressibelen Flüssigkeit.

¹⁰¹⁾ Zum Begriff der orthogonalen Trajektorien vgl. „Hütte“ Bd. 1, S. 100. 1923. 24. A.

¹⁰²⁾ Lehrbuchliteratur zur ebenen Flüssigkeitsströmung: Föppl, A.: Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. 4 u. 6. Leipzig 1901/1910.
b) Lorenz, H.: Lehrbuch der technischen Physik. Bd. 3. München 1910.
c) Riemann, B., u. H. Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bd. 2. Braunschweig 1901.

§ 87. Die allgemeine Massenanziehung, das Coulombsche Gesetz und die Laplace-Poissonsche Differentialgleichung.

¹⁰³⁾ Lehrbuchliteratur zur Differentialgleichung des Potentials:
a) Heine, E.: Handbuch der Kugelfunktionen. Bd. 2. Berlin 1881. b) Riemann, B., u. H. Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bd. 2. 1901. c) Neumann, F.: Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Leipzig 1887.

§ 88. Allgemeine Eigenschaften des Potentials.

¹⁰⁴⁾ „Hütte“ Bd. 1, S. 68. 1923. 24. A. Die höheren Glieder der Entwicklung sind fortgelassen.

§ 89. Zusammenfassung und Übersicht über die Aufgaben der Potentialtheorie.

¹⁰⁵⁾ Ein Beispiel für die zweite Randwertaufgabe wird im § 108 gegeben. Für die dritte Randwertaufgabe sind Beispiele u. a. bei Riemann-Weber zu finden, auf die wir hier der Raumbeschränkung halber nicht eingehen.

¹⁰⁶⁾ Abgesehen von den später zu behandelnden Beispielen zur Reihemethode, sei auf Riemann, B.: Ges. Werke, Nr. 24: Über das Potential eines Ringes verwiesen.

¹⁰⁷⁾ Ein Unterfall der Methode der Greenschen Funktion ist die von Riemann zur Lösung von Differentialgleichungen elastischer Schwingungen angewendete Methode. Man sehe über diese das mehrfach angeführte Werk von Riemann-Weber, 2. Bd., wo auch die Riemannsche Originalarbeit angeführt ist. Anwendung hat die Riemannsche Methode dann noch durch M. Radakovic: Wiener Berichte Bd. 108, S. 577, auf die Bewegung einer Saite unter der Einwirkung einer Kraft mit wanderndem Angriffspunkt. Diese Aufgabe ist wichtig für die Frage nach den Erschütterungen einer Brücke infolge eines darüberfahrenden Eisenbahnzuges oder nach den Querschwingungen eines Geschützes beim Schusse.

§ 92. Das Potential einfachster Massenarrangierungen und die Legendreschen Kugelfunktionen.

¹⁰⁸⁾ Z. B. die schon angeführte Tafel von Jahnke und Emde.

§ 96. Zylinderfunktionen.

¹⁰⁹⁾ Den Beweis des Satzes siehe z. B. bei Riemann-Weber, a. a. O. Anm. ¹⁰⁸⁾, Bd. 1.

§ 97. Aufstellung der Grundgleichungen.

¹¹⁰⁾ Näheres über die Beziehungen des Hookeschen Gesetzes zum Spannungszustand siehe in den Lehrbüchern der technischen Mechanik. z. B. A. Föppl, Bd. 3 und H. Lorenz, Bd. 4. (Anm. ¹⁰²⁾.)

§ 99. Erzwungene gedämpfte Schwingungen von Stäben.

^{110a)} Das Stabschwingungsproblem ohne Dämpfung ist einer sehr bemerkenswerten Untersuchung von St. Timoschenko: Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. Z. f. Math. u. Phys. 59 (1911), 163 behandelt.

^{110b)} Vgl. zur allgemeinen Resonanztheorie: W. Hort, Techn. Schwingungslehre. 2. A. S. 60 ff; 645 ff. 1922.

§ 100. Schwingungen einer kreisförmigen Platte nach Kirchhoff.

¹¹¹⁾ Kirchhoff, G.: Über die Schwingungen einer elastischen Scheibe. Crelles Journ. Bd. 40, S. 51. 1850. (Anm. ¹⁰⁸⁾.)

Kirchhoff, G.: Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. Pogg. Ann. Bd. 81. 1850. Die genaue experimentelle Bestätigungen der Berechnungen Kirchhoffs ist zu verdanken: Strehlke, F.: Über die Schwingungen homogener elastischer Scheiben. Pogg. Ann. Bd. 95, S. 577. 1855.

§ 101. Schwingungen kreisförmiger Platten mit punktförmigen Randmassen.

¹¹²⁾ Vgl. über die Randbedingungen speziell z. B. Love, A. E. H.: Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe. S. 526. Leipzig 1907. Die Ausdrücke für M, S, V findet man z. B. angeführt bei Stodola, A.: Über die Schwingungen von Dampfturbinenlaufrädern, Schweiz. Bauz. Bd. 63, S. 272. 1914.

§ 103. Radiale Schwingungen einer Kugel.

¹¹³⁾ Für das Folgende verweisen wir auf Clebsch, A.: Theorie der Elastizität. 1862.

¹¹⁴⁾ Vgl. hierzu § 40 dieses Buches.

§ 104. Das Ritz-Lorenzsche Verfahren der näherungsweise Lösung von Elastizitätsaufgaben.

¹¹⁵⁾ Vgl. zum folgenden A. Ritz: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Crelles Journ. 1908 und Lorenz, H.: Technische Physik Bd. 4. 1913. — Die Beziehungen des Verfahrens von Ritz zu dem Satz von Rayleigh über die Extremeigenschaft der längsten Eigenperiode eines schwingenden Systems sind dargelegt bei A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 5. A., S. 914f. J. Springer, 1922.

¹¹⁶⁾ Die Ausrechnung der Variation findet man z. B. bei A. Föppl: Technische Mechanik Bd. 3.

¹¹⁷⁾ Die Minimalbedingung für Funktionen zweier Variablen siehe „Hütte“ Bd. 1, S. 70. 1908.

§ 105. Aufstellung der Eulerschen Grundgleichungen für Flüssigkeiten mit und ohne Reibung.

¹¹⁸⁾ Vgl. hierzu die Fortpflanzung des Schalles in Gasen, z. B. bei Lorenz, H.: Technische Wärmelehre. München u. Berlin 1904.

§ 108. Dirichlets Untersuchung der Bewegung einer reibungsfreien Flüssigkeit um eine Kugel.

¹¹⁹⁾ Die Originalarbeit von P. L. Dirichlet ist zu finden in den Berichten der Berliner Akademie 1852.

§ 111. Die Sätze von Helmholtz über die Wirbelbewegungen.

¹²⁰⁾ Helmholtz, H.: Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Journ. f. Math. 1858.

Die Helmholtzsche Theorie ist mehr oder weniger ausführlich wiedergegeben u. a. bei:

Föppl, A.: Technische Mechanik Bd. 6. 1910.

Lorenz, H.: Technische Hydrodynamik. 1910.

Riemann-Weber: Partielle Differentialgleichungen Bd. 2. 1901.

§ 113. Grundlegung der Turbinentheorie von H. Lorenz.

¹²¹⁾ Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder. München 1906.

§ 116. Untersuchung ebener elektromagnetischer Wellen.

¹²²⁾ Dies ist die D'Alembertsche Lösung der Differentialgleichung (18), während die im § 72 unter (13) gegebene Lösung der Saitengleichung auf D. Bernoulli zurückzuführen ist.

§ 118. Elektromagnetische Vorgänge bei Wechselströmen in geradlinigen Leitern. Ferrantiphänomen.

¹²³⁾ Technische Einzelheiten zum folgenden und wertvolles Konstantenmaterial findet man bei G. Rößler: Die Fernleitung von Wechselströmen. Berlin: Julius Springer 1905.

§ 119. Ausgleichsvorgänge in linearen Leitern.

¹²⁴⁾ Für ausführliches Studium sei hierzu verwiesen auf Wagner, K. W.: Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Leipzig: B. G. Teubner 1908.

§ 121. Herleitung der Konstanten der Heavisideschen Gleichung aus den Maxwell'schen Gleichungen des axialsymmetrischen Feldes.

¹²⁵⁾ Abb. 300 ist gezeichnet nach Tabelle 21 des Anm. ²²⁾ zitierten Buches von Jahnke und Emde.

¹²⁶⁾ Vgl. zu § 121: G. Mie: Ann d. Phys. Bd. 2, S. 201. 1900; H. Poincaré: Eclairage elect. Bd. 40. 1904, A. Sommerfeld: Wied. Ann. Bd. 67, S. 233. 1899.

§ 122. Die Aufgaben der Variationsrechnung.

¹²⁷⁾ Euler, L.: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes, Kap. 2, Art. 21. Lausanne u. Genf 1744.

¹²⁸⁾ Lagrange, J. L.: Misc. Taur. Bd. 2³, S. 173. 1762, sowie Œuvres Bd. 14, S. 141.

§ 123. Variationsprobleme mit einer Unbekannten und ihrer ersten Ableitung bei einer Unabhängigen.

¹²⁹⁾ Kneser, A.: Lehrbuch der Variationsrechnung. § 17, Braunschweig 1900.

¹³⁰⁾ Zermelo, E.: Untersuchungen zur Variationsrechnung. Diss. S. 41. Berlin 1894.

¹³¹⁾ Jordan, C.: Cours d'analyse Bd. 3, S. 58. Paris 1915.

¹³²⁾ Jakobi, C. G. J.: Journ. f. Math. Bd. 17, S. 68. 1837.

¹³³⁾ Die bekannte Knickformel ist entwickelt bei Euler, L.: Berl. Nouv. Mém. Bd. 13. S. 252. 1759.

§ 124. Höhere Variationsprobleme. Schwingungen eines Flugzeugflügels.

¹³⁴⁾ Kneser, A.: Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig 1900.

¹³⁵⁾ Bolza, O.: Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig u. Berlin 1909.

§ 125. Variation mehrfacher Integrale. Stab- und Plattenschwingungen.

¹³⁶⁾ Kirchhoff, G.: Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. Crelles Journ. Bd. 40, S. 51. 1850.

¹³⁷⁾ Stodola, A.: Über die Schwingungen von Dampfturbinenlauf-
rädern. Schweiz. Bauztg. Bd. 63, H. 18. 1914.

^{137a)} Hort, W.: Technische Schwingungslehre. S. 444. Berlin 1922. 2. A.

^{137b)} Hier möge noch folgendes ergänzt werden: Schneiden die Parallelen zur x -bez. y -Achse, längs deren auf S. 632 ff. partiell integriert wird, das Gebiet G mehrmals, z. B. in den Punktepaaren (x_1, y) (x_2, y) ; (x_3, y) (x_4, y) ; ..., so sind natürlich alle diese Randpunkte in die partiellen Integrale einzuführen; z. B. auf S. 632 oben:

$$\int_{t_1}^{t_1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left[\left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \delta w \right\}_{x_1}^{x_2} + \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \delta w \right\}_{x_3}^{x_4} + \dots \right] dy dt$$

und entsprechend in anderen Fällen.

§ 126. Anwendung der Einflußlinien auf das Problem der schwingenden Saite.

¹³⁸⁾ Müller-Breslau, H. F. B.: Statik der Baukonstruktionen.

¹³⁹⁾ Hort, W.: Technische Schwingungslehre. S. 428. Berlin 1922. 2. A.

¹⁴⁰⁾ Kneser, A.: Die Integralgleichungen. S. 244. Braunschweig 1922. 2. A.

¹⁴¹⁾ Trefftz, E.: Allgemeine Theorie der Knickung des geraden Stabes. Z. f. ang. Math. Mech. Bd. 3, S. 272. 1923.

¹⁴²⁾ Prandtl, L.: Erste Mitteilung über Tragflügeltheorie. Gött. Nachr. math. phys. Kl. 1918, S. 21.

§ 127. Die Fredholm'schen Sätze und die Lösung der Integralgleichungen nach Neumann und Fredholm.

¹⁴³⁾ Fredholm, J.: Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta mathematica. Bd. 27. 1903.

§ 128. Die Hilbert'schen Sätze über die linearen Integralgleichungen mit symmetrischem Kern und die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen.

¹⁴⁴⁾ Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig 1912.

¹⁴⁵⁾ Mercer, T.: Functions of positive and negative type. London Phil. Transactions (A). S. 219. 1909.

^{145a)} Schmidt: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Gött. Diss. 1905, Math. Annalen Bd. 63.

§ 129. Die erzwungenen Schwingungen biegsamer Stäbe.

¹⁴⁶⁾ Birnbaum, W.: Über die erzwungenen Schwingungen biegsamer Stäbe. Z. f. techn. Physik. Jg. 6. 1925.

Verzeichnis der behandelten Differentialgleichungen.

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

a) Erste Ordnung.

Allgemeine Form:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad \text{S. 50}$$

Einfachste Formen, lösbar durch unmittelbare Integration:

$$\frac{dy}{dx} - f(x) = 0, \quad \text{S. 51}$$

$$\frac{dy}{dx} - f(y) = 0. \quad \text{S. 51}$$

Graphisches Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 0,2, \quad \text{S. 219}$$

Technisches Beispiel:

Spiegelkurve eines fließenden Gewässers:

$$\frac{dy}{dx} - J \frac{y^3 - h^3}{y^3 - k^3} = 0. \quad \text{S. 52, 220}$$

Formen, lösbar durch Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} = 0. \quad \text{S. 64}$$

$$\varphi(x)\psi(y) + \varphi_1(x)\psi_1(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad \text{S. 64}$$

Technisches Beispiel:

Spiegelkurve des Grundwasserstromes:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{Q}{2\pi kxy} = 0. \quad \text{S. 66 221}$$

Bernoullis Substitutionsmethode:

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_0 = 0. \quad \text{S. 65}$$

Technisches Beispiel:

Entstehung eines Wechselstromes:

$$\frac{dJ}{dx} + \frac{W}{L} J - E_0 \sin \omega t = 0. \quad \text{S. 68}$$

Differentialgleichung 1. Ordnung 2. Grades:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\varphi(x, y) \frac{dy}{dx} - \psi(x, y) = 0. \quad \text{S. 73}$$

Tangentenbüschel der Astroide:

$$y = x y' + \frac{a y'}{\sqrt{1 + \eta'^2}}. \quad \text{S. 75}$$

Differentialgleichung, lösbar als totales Differential:

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad \text{S. 77}$$

unter der Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Beispiel:

$$\left(x^m + 2xy^2 + \frac{1}{x}\right) dx + \left(y^m + 2x^2y + \frac{1}{y}\right) dy = 0. \quad \text{S. 78}$$

Lösbar durch die Methode des integrierenden Faktors $J(x, y)$:

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$$

nach Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$f \frac{\partial J}{\partial y} - g \frac{\partial J}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) J = 0. \quad \text{S. 79}$$

Beispiel:

$$(Xy + X_0) dx + dy = 0. \quad \text{S. 80}$$

Graphische Beispiele für das Isoklinenverfahren:

Spiegelgleichung eines Gewässers

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Jx^3y^3 - p^5g\alpha x + p^5y}{x^3y^3 - p^5x}. \quad \text{S. 225}$$

Ballistische Hauptgleichung:

$$\frac{du}{dz} = \mathfrak{Fg}(z) + F(u). \quad \text{S. 233}$$

Sondergestalt:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \quad \text{S. 237}$$

Runges Methode:

Einfaches Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = \sin x. \quad \text{S. 241}$$

Allgemeinere Form:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad \text{S. 244}$$

Simultane Differentialgleichungen 1. Ordnung nach Runge's Verfahren :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), & \text{S. 242} \\ \frac{dz}{dx} &= g(x, y, z). \end{aligned} \right\}$$

Dampfmaschinenbewegung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\vartheta} &= \frac{2 F(\vartheta) - \omega^2 E'(\vartheta)}{2 \omega E(\vartheta)} \\ \frac{dt}{d\vartheta} &= \frac{1}{\omega} \end{aligned} \right\} \text{S. 262}$$

b) Zweite Ordnung.

Allgemeine Form:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \quad \text{S. 82}$$

Graphisch oder rechnerisch lösbar, wenn die Auflösung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad \text{S. 82, 274, 292, 302, 305, 309, 313}$$

möglich ist.

Lineare Differentialgleichungen im weiteren Sinne:

$$P_0(x, y) \frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x, y) \frac{dy}{dx} + P_2(x, y) y + P_3(x, y) = 0. \quad \text{S. 83}$$

Lineare Differentialgleichungen im engeren Sinne:

$$P_0(x) \frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x) y + P_3(x) = 0. \quad \text{S. 83, 150}$$

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y + a_3 = 0. \quad \text{S. 84, 150, 328}$$

Differentialgleichung der Seilkurve:

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = -f(x). \quad \text{S. 90, 288}$$

Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$EJ \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -M_x. \quad \text{S. 99, 281}$$

Nichtlineare Differentialgleichung der Ketten-Linie:

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = \gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad \text{S. 109}$$

Eindimensionale Differentialgleichungen S. 120

des dickwandigen Rohres:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = 0, \quad \text{S. 124}$$

der kreisförmigen Platte:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -a x. \quad \text{S. 126}$$

Differentialgleichung der Pendelbewegung, lösbar durch elliptische Funktionen:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0. \quad \text{S. 183}$$

Bewegungsgleichung der Dampfmaschine:

$$E(\vartheta) \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{1}{2} E'(\vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = F(\vartheta) \quad \text{S. 257}$$

Differentialgleichung der Besselschen (Zylinder-) Funktionen:

$$x^2 \frac{d^2 J}{dx^2} + x \frac{dJ}{dx} + (x^2 - m^2) J = 0. \quad \text{S. 394, 501}$$

Numerische Lösung von

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 0,5 \frac{dy}{dx} + \sin y = 0. \quad \text{S. 276}$$

Graphische Lösung von

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} + 1\frac{1}{6}\frac{1}{4} p = 15. \quad \text{S. 286}$$

Hypergeometrische Differentialgleichung:

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \{y - (\alpha + \beta + 1)x\} \frac{dy}{dx} - \alpha \beta y = 0 \quad \text{S. 402}$$

Differentialgleichung der Legendreschen (einfachen Kugel-) Funktionen:

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} + n(n+1) P_n(\mu) = 0. \quad \text{S. 376}$$

Differentialgleichung des k -ten Differentialquotienten der Legendreschen Kugelfunktionen:

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 D_n^{(k)}(\mu)}{d\mu^2} - 2\mu(k+1) \frac{dD_n^{(k)}(\mu)}{d\mu} + [n(n+1) - k(k+1)] D_n^{(k)}(\mu) = 0. \quad \text{S. 389}$$

c) n -te Ordnung.

Allgemeine Form:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \quad \text{S. 129}$$

Einfachste Formen:

$$\frac{d^n y}{dx^n} - X = 0; \quad \text{S. 130}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} - Y = 0. \quad \text{S. 130}$$

Durch Substitution auf Differentialgleichungen erster bzw. zweiter Ordnung zurückführbar:

$$\left. \begin{aligned} F\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) &= 0 \\ F\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) &= 0 \\ F\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 131}$$

Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung:

$$X_0 \frac{d^ny}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X. \quad \text{S. 133}$$

Erniedrigung der Ordnungszahl

S. 134

Mathematisches Beispiel:

$$(x^2 - 2x + 2) \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = 0. \quad \text{S. 136}$$

Variation der Konstanten

S. 137

Mathematisches Beispiel:

$$(x^2 - 2x + 2) \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = f(x). \quad \text{S. 139}$$

Lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i y^{(n-i)} = X. \quad \text{S. 140}$$

Technische Beispiele:

Eisenbahnschwelle auf nachgiebiger Unterlage

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} + ky = f(x). \quad \text{S. 143}$$

Rechtecksquerschnittige Behälterwand

$$\frac{d^4\eta}{dx^4} + k^4\eta = l^4x. \quad \text{S. 146}$$

Integration durch Reihen

S. 147

Mathematisches Beispiel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0. \quad \text{S. 149}$$

Technische Beispiele:

Trapezquerschnittige Behälterwand

$$(1 + \alpha\xi) \frac{2d^4\eta}{d\xi^4} + 6a(1 + \alpha\xi) \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + 6a^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \alpha\eta = 0. \quad \text{S. 155}$$

Dreiecksquerschnittige Behälterwand

$$\xi^3 \frac{d^4 u}{d\xi^4} + 6\xi^2 \frac{d^3 u}{d\xi^3} + 6\xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + k\xi u = 0. \quad \text{S. 159}$$

d) Simultane Differentialgleichungen.

Allgemeine Form bei zwei abhängigen Variablen:

$$\left. \begin{aligned} F\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dy}, \frac{dx_2}{dy}, \dots\right) &= 0 \\ G\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dy}, \frac{dx_2}{dy}, \dots\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 166}$$

Allgemeine Form eines Systems erster Ordnung bei n abhängigen Variablen:

$$\frac{dx_i}{dy} = f_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y); \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad \text{S. 166}$$

Einfaches Beispiel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dy} + 8x_1 + 9x_2 &= 0 \\ \frac{dx_2}{dy} - 7x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 167}$$

Numerische Lösung in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= g(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 262}$$

Gleichungen der Dampfmaschinenbewegung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\vartheta} &= \frac{2F(\vartheta) - E'(\vartheta)\omega^2}{2\omega E(\vartheta)} \\ \frac{dt}{d\vartheta} &= \frac{1}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 262}$$

Allgemeine Form eines Systems m -ter Ordnung bei n abhängigen Variablen:

$$\frac{d^m x_i}{dy^m} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n', \dots, x_1^{(m-1)}, x_2^{(m-1)}, \dots, x_n^{(m-1)}, y); \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad \text{S. 168}$$

Differentialgleichungen der Dampfmaschinenregulierung:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 \eta}{dt^2} + b \frac{d\eta}{dt} + c\eta &= \kappa\omega \\ \frac{\Theta}{r} \frac{d\omega}{dt} &= -k\eta + T_0 - k\tau_0 - W \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 173}$$

Differentialgleichungen der ungestörten Planetenbewegung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3} (m + M) x &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3} (m + M) y &= 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3} (m + M) z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 175}$$

e) Differenzengleichungen.

Allgemeine Form:

$$\Psi(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}) = 0. \quad \text{S. 203}$$

Lineare Differenzengleichungen:

$$y_x P_0(x) + y_{x+1} P_1(x) + \dots + y_{x+n} P_n(x) = -Q(x). \quad \text{S. 204}$$

Einfaches Beispiel: $y_{x+1} + (a + bx)y_x = 0$. S. 204

Mit konstanten Koeffizienten:

$$y_x a_0 + y_{x+1} a_1 + \dots + y_{x+n} a_n = 0. \quad \text{S. 204}$$

Differenzgleichung für die Biegemomente des durchlaufenden Balkens: $M_k + 4M_{k+1} + M_{k+2} = -\frac{1}{2}ql^2$. S. 206

Differenzgleichung für die Amplituden der Bewegung einer Kette von Massenpunkten:

$$L_{p,k} + \left(\frac{4p^2 \pi^2}{c^2} - 2 \right) L_{p,k+1} + L_{p,k+2} = 0. \quad \text{S. 208}$$

Simultane Differenzgleichungen für die Strom- und Spannungsverteilung in einem Kettenleiter:

$$\left. \begin{aligned} J_{n-1} &= J_n + \frac{1}{2} G V_n + \frac{1}{2} G V_{n-1} \\ V_{n-1} &= V_n + R \left(J_{n-1} - \frac{1}{2} G V_{n-1} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 210}$$

II. Partielle Differentialgleichungen.

a) Allgemeine Form bei einer abhängigen und zwei unabhängigen Variablen:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots, a, b, c, \dots\right) = 0. \quad \text{S. 259}$$

b) Saitenschwingung, Schallschwingung, Stabtorsionsschwingung, ebene elektrische Wellen:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad \text{S. 348, 363, 364}$$

c) Freie Stabbiegunsschwingung:

$$\rho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0; \quad \text{S. 367}$$

$$\rho q(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(J(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0; \quad \text{S. 373}$$

d) Membranschwingungen:

ruhend:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right); \quad \text{S. 385}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \right); \quad \text{S. 395}$$

rotierend:
$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\sigma_\tau}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}. \quad \text{S. 407}$$

e) Wärmeleitung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \quad \text{S. 407}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad \text{S. 407}$$

f) Ebene Strömung:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 420}$$

g) Stationäre ebene Strömung (Geschwindigkeitspotential):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad \text{S. 423}$$

h) Newtonsches Potential:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4 \pi \rho; \quad \text{S. 437}$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = -4 \pi \rho; \quad \text{S. 484}$$

in Polarkoordinaten:

$$r \frac{\partial^2 (Vr)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -4 \pi \rho. \quad \text{S. 460}$$

Differentialgleichung der allgemeinen Kugelfunktionen:

$$n(n+1) X_n + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial X_n}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} = 0. \quad \text{S. 473}$$

i) Differentialgleichungen der Elastizität:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} &= 0 \\ \Delta \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= 0 \\ \Delta \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} &= 0 \\ e &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 494}$$

Erzwungene gedämpfte Stabbiegungsschwingung:

$$\varrho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2 \varrho q b \frac{\partial y}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p \cos \omega t + q \sin \omega t. \quad \text{S. 497}$$

Freie Plattenschwingung:

$$\frac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad \text{S. 500}$$

Platte ohne Masse:

$$\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \Delta \Delta w = 0. \quad \text{S. 504}$$

Radiale Kugelschwingungen:

$$2G \left(4 \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right) \frac{2(m-1)}{m-2} + k = \mu r \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \quad \text{S. 512}$$

k) Hydrodynamische Differentialgleichungen:

Eulersche Gleichungen für reibungsfreie Flüssigkeiten in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \varrho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \varrho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho v_z)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 526}$$

Bewegungsgleichungen für zähe inkompressible Flüssigkeiten:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x \\ \varrho \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y \\ \varrho \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 530}$$

Gleichungen von Lagrange:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial a} &= X \frac{\partial x}{\partial a} + Y \frac{\partial y}{\partial a} + Z \frac{\partial z}{\partial a} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial a} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial b} &= X \frac{\partial x}{\partial b} + Y \frac{\partial y}{\partial b} + Z \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial b} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial c} &= X \frac{\partial x}{\partial c} + Y \frac{\partial y}{\partial c} + Z \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial c} \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 543}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 1 \quad \text{S. 544}$$

Eulersche Gleichungen in Zylinderkoordinaten:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_t^2}{r} \right) &= R - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\varrho}{r} \frac{d(v_t r)}{dt} &= T - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \varrho \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{\partial v_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial(v_z r)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 554}$$

Differentialgleichung der Stromfunktion in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad \text{S. 557}$$

Differentialgleichungen der Lorenzschen Turbinentheorie:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_t^2}{r} \right) &= R - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\varrho}{r} \frac{d(v_t r)}{dt} &= T \\ \varrho \frac{dv_z}{dt} &= Z + g \varrho \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r v_t)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 559}$$

S. 556

1) Elektro-dynamische Differentialgleichungen.

Maxwellsche Gleichungen in Vektorform:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4 \pi \lambda \mathfrak{E} &= \text{curl } \mathfrak{M} \\ \mu \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= - \text{curl } \mathfrak{E} \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 569}$$

Maxwellsche Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_x &= \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \\ \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_y &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \\ \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_z &= \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 568}$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial M_x}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ \mu \frac{\partial M_y}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \mu \frac{\partial M_z}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 568}$$

Die erste Gleichung Maxwells nach Elimination von \mathfrak{M} :

$$\Delta E_x = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 4 \pi \lambda \mu \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad \text{S. 571}$$

Differentialgleichung einer ebenen elektrischen Welle:

$$\Delta U = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4 \pi \lambda \mu \frac{\partial U}{\partial t}. \quad \text{S. 572}$$

Erstes Maxwellsches Gleichungssystem in Zylinderkoordinaten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial M_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r M_\vartheta)}{\partial r} \right) &= \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_x \\ \left(\frac{\partial M_x}{\partial r} - \frac{\partial M_r}{\partial x} \right) &= \varepsilon \frac{\partial E_\vartheta}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_\vartheta \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r M_\vartheta)}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial \vartheta} \right) &= \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_r \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 576}$$

Maxwellsche Gleichungen des axialsymmetrischen Feldes:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial (r M_\vartheta)}{\partial r} &= \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_x \\ \left(\frac{\partial E_x}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial x} \right) &= -\mu \frac{\partial M_\vartheta}{\partial t} \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial (r M_\vartheta)}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + 4 \pi \lambda E_r \end{aligned} \right\} \quad \text{S. 577}$$

Heavisidesche Gleichung:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + wC \frac{\partial J}{\partial t}. \quad \text{S. 583}$$

Differentialgleichung der Potentialfunktion des axialsymmetrischen Feldes:

$$\varepsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + 4 \pi \mu \lambda \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r}. \quad \text{S. 514}$$

Namenverzeichnis.

- Abdank-Abakanowicz**, Br., 24, Anm. 3, 78.
d'Alembert, J. L. 349, 641, Anm. 122.
Bazin, H., 221, 225.
Bernoulli, D., 66, 349, Anm. 122.
Bessel, F. W., 304.
Bieberbach, L., Anm. 1, 70, 80 a.
Birnbaum, W., Anm. 146.
Bitterli, E., Anm. 3, 78.
Bolza, O., 626, Anm. 135.
Boys, C. V., 277, Anm. 68.
Bresse, J. J. Ch., 60, Anm. 10.
Clapeyron, B. P. E., 205.
Clebsch, A., Anm. 53.
Coradi, A., 25, 359.
Coulomb, Ch. A., 427, 429.
Courant, R., Anm. 1.
Cranz, C., 232, 234, Anm. 55.
Czuber, E., 237, Anm. 56.
Dirichlet, P. L., 535, Anm. 119.
Duffing, G., 266, 302, 305, 322, Anm. 60, 75.
Dunkerley, W., 506.
Dwelshauvers-Dery, V., Anm. 58.
Emde, F., 188, 190, 197, 199, 200, Anm. 22, 125.
Euler, L., 243, 247, 266, 286, 294, 349, 524, 617, Anm. 127, 133.
Eytelwein, J. A., 54.
Faraday, M. 563.
Ferranti, S. Z. de, 579.
Föppl, A., 126, 129, Anm. 8, 24, 26, 102, 110, 116, 120.
Forsyth, R. A., Anm. 16, 80, 80 a.
Fourier, J. B. J., 353, 658, Anm. 98.
Fredholm, J., 649, Anm. 143.
Fricke, R., Anm. 1.
Friesendorf, Th., Anm. 45.
Frobenius, G., 151, 515, Anm. 33.
Fuchs, L., 153.
Gauß, C. F., 173, 183, 449, 452, 550, Anm. 94, 95.
Grashof, F., Anm. 8.
Green, G., 449, 452, 648.
Guldberg, A., Anm. 45.
Gümbel, L., 279, 291, 322, Anm. 71, 73, 87.
Hamilton, W. R., 632.
Heaviside, O., 608, 611.
Hele-Shaw, H. S., 38, 41.
Helmholtz, H. v., 528, 549, Anm. 120.
Heine, E., 487, Anm. 98, 103.
Henrici, O., 359, Anm. 84.
Herrmann, L., Anm. 82 c.
Hertz, H., 605.
Hilbert, D., 650, 656, 666, Anm. 1, 144.
Hooke, R., 123, 493.
Horn, J., Anm. 80 a.
Hort, W., 107, Anm. 25, 35, 82 c, 110 b, 137, 139.
Jacobsthal, W., Anm. 16.
Jahnke, E., 188, 190, 197, 199, 200, Anm. 22, 125.
Jakobi, C. G. J., 621, Anm. 132.
Jordan, C., 621, Anm. 131.
Kelvin, Lord, 274, 329, Anm. 66.
Kepler, J., 177.
Kiby, W., Anm. 89 a, 90.
Kirchhoff, G., 500, 630, Anm. 111, 136.
Kirsch, A., Anm. 100.

- Kneser, A.**, 621, 626, Anm. 1, 129, 134, 140.
Knopp, K., Anm. 1, 95.
Knorr, W., Anm. 77 a.
Koestler, W., Anm. 1.
Krause, M., Anm. 44.
Kriloff, A., Anm. 87.
Kutta, W., Anm. 74.

Lachmann, K., Anm. 90.
Lagrange, J. L., 428, 542, Anm. 123.
Lamb, H., Anm. 93.
Laplace, P. S. de, 427, 429, 431, 437, 445.
Legendre, A. M., 191, 455, 462, 469, 471.
Lipschitz, R. 310, 318.
Lorenz, H., 519, 521, 558, Anm. 1, 8, 27, 100, 102, 110, 115, 118, 120.
Love, A. E. H., 638, Anm. 92, 112.

Maclaurin, C. 149, 461.
Mader, O., Anm. 84.
Markoff, A. A., Anm. 45.
Maser, H., Anm. 16.
Massau, J., 225, Anm. 54.
Maxwell, J. C., 563, 576, 608, 662.
Mehmke, R., Anm. 2 a.
Meißner, E., 282, Anm. 72.
Mercer, T., 658, Anm. 145.
Michelson, A. A., Anm. 84.
Mie, G., 221, Anm. 52, 126.
Morin, L. H., Anm. 4.
Müller-Breslau, H. F. B., 639, Anm. 138.

Neesen, Fr., Anm. 85, 88.
Neumann, F., 649, Anm. 103.
Newton, J., 184, 445.

Pascal, E., 326.
Picard, E., 270, 272, 318, Anm. 62, 76.
Poincaré, H., Anm. 126.
Poisson, S. D., 126, 427, 437, 494.
Prandtl, L., 649, Anm. 142.
Prony, R. de, 225, 231.
Prümm, E., Anm. 45.

Radakovic, M., Anm. 107.

Rayleigh, Lord J. W., 370, 376, Anm. 81, 88 a, 115.
Ribière, S., Anm. 86.
Riemann, B., 400, Anm. 93 a, 98, 102, 103, 105, 106, 120.
Ritz, A., 519, Anm. 81, 115.
Reißner, H., Anm. 34.
Röbller, G., Anm. 123.
Rothe, R., 232, 234, 277, Anm. 55, 69.
Routh, J. E., Anm. 47.
Rüdenberg, R., Anm. 49.
Runge, C., 240, 245, 247, 252, 253, 262, 270, 292, Anm. 2 a, 51, 57, 63, 65, 67, 81.

Saint-Venant, B., 62.
Simpson, Th. 248, 264.
Slaby, R., Anm. 2.
Sommerfeld, A., Anm. 126.
Southwell, R. V., Anm. 93.
Schafheitlin, P., Anm. 91.
Schepp, A., Anm. 47.
Schlömilch, O., Anm. 1.
Schmidt, E., 660, Anm. 145 a.
Schwarz, H. A., 270, Anm. 61.
Stodola, A., 630, Anm. 112, 115, 137.
Stokes, G. G., 545.
Stratton, S. W., Anm. 84.
Strehlke, F., Anm. 111.
Strutt, J. W. (Baron Rayleigh) Anm. 85, 88.

Taylor, S. D., 148, 244, 247, 296, 443, 616.
Terzaghi, K. v., Anm. 27.
Thiems, A., Anm. 13.
Thomson, W., s. Kelvin, Lord.
Timoschenko, St., Anm. 110 a.
Timpe, A., Anm. 92, 112.
Tramer, M., Anm. 1.
Treffitz, E., Anm. 141.

Wagner, K. W., 213, Anm. 48, 124.
Wallenberg, G., Anm. 45.
Weber, H., Anm. 93 a, 98, 102, 103, 105, 120.
Willers, Fr. A., Anm. 78, 81.

Zermelo, E., Anm. 130.
Zipperer, L., Anm. 82 c.

Sachverzeichnis.

- Ableitung 16.
Abszisse 2.
Addition 6.
Adiabate 527.
Amplitude 185, 604.
Analysator 358.
Anfangsbedingung 69, 210, 219, 350, 352, 497, 604.
Anfangstemperaturverteilung 407.
Anomalie, exzentrische 182.
— wahre 179, 180.
Anwendung, technische 220.
Äquator 457.
Arbeit 520.
Arcuscosinusfunktion 47.
Arcussinusfunktion 46.
Arcustangensfunktion 47.
Argument 2.
Astroide 77.
Asymptote 3, 64.
asymptotisch 105.
Attraktionskonstante 173.
Aufpunkt 434.
Ausgleichsvorgang 575, 592, 593.
- Bahnelemente** 183.
Balken 97.
— kontinuierlicher 205.
Bedingung, Eulersche 621.
Behandlung, graphische 216.
Beharrungszustand 172, 575, 593.
Belastungselement 289.
Belastungsfläche 88, 99.
Bettungsziffer 143.
Bewegung, aperiodische 106.
— stationäre 534.
— — ebene 419.
— wirbelfreie 422.
Biegungsschwingungen 362.
Brennpunkte 225.
Brennpunktsgleichung 178.
Brunnen 65.
- Curl 549, 563.
- Dampfmaschine 169, 253.
Dampfmaschinenzylinder 416.
Dämpfung 104, 572.
Dämpfungskonstante 100.
Darstellung, komplexe 211.
Dekrement, logarithmisches 105.
Deltaamplitude 193.
Dichte 527.
Dielektrikum 563.
Dielektrizitätskonstante 564.
Differentialgleichung 50, 202.
— Besselsche 394.
— eindimensionale 124.
— erster Ordnung 50, 66, 216, 266, 326.
— Eulersche 552.
— homogene 204, 206, 321.
— hypergeometrische 402.
— Laplacesche 431.
— lineare 83, 321.
— — vollständige 134.
— reduzierte 137.
— simultane 165.
— — nichtlineare 173.
— — particelle 337.
— simultanes System von 213.
— zweiter Ordnung 81, 274, 302.
Differentialquotient 15, 17, 18.
— unbestimmter 17.
Differentialparameter, zweiter 437.
Differential, totales 77.
Differentialzeichen 13.
Differentiationen 41.
Differenz 17.
Differenzenzeichen 13.
Dimensionen 120.
Diskriminate 224.
Divergenz 451, 549.
Doppelbelegung 443.
Doppelfläche 443.

- Doppelflächenpotentiale 445.
 Doppelintegrale, Fouriersche 387.
 Drehrichtung 2.
 Drehungen 528.
 Druck 527.
 — hydraulischer 530.
 Dyn 560
 Dynamik 169.
 Dynamo 577.
- Eigenfunktionen 652.
 Eigenfunktionsentwicklung 498.
 Eigentöne 376.
 Eigenwerte 652.
 Einflußfunktion 648.
 Einflußlinien 639.
 Einhüllende 224.
 Eisenbahnschwelle 142.
 Elastizitätsaufgabe 519.
 Elastizitätsgesetz, Hookesches 493.
 Elastizitätsmodul 123, 366, 494.
 Elektrizitätsmenge 478.
 Elektrizitätsverteilung 478.
 Elektrodynamik 560.
 Elektrostatik 446, 478, 560.
 Elementarrechteck 12.
 Energiegleichung 534.
 Entwicklungsgesetz 657.
 Extremale 618.
 Extrempunkt 3.
 Extreme 3.
 Exponentialfunktion 3, 48, 69, 102.
- Faktor, integrierender 77, 80.
 Federgewichtsregulator 169.
 Feld, axialsymmetrisches 608.
 Feldgröße 563.
 Feldstärke, elektrische 561.
 — magnetische 561.
 Ferrantiphanomen 592.
 Flächendichtigkeit 442.
 Flächeninhalt 27.
 Flächenplanimeter 27, 30.
 Flächenpotentiale 445.
 Flächen- und Mometennintegrator 38.
 Flugzeugflügel 621.
 Flüssigkeit, ideale 531.
 — inkompressible, wirbelfreie 419, 533, 542.
 — mit und ohne Reibung 523, 528, 535.
 — zähe 531.
- Flüssigkeitsbewegung, achsensymmetrische 555.
 Flüssigkeitsreibung 529.
 Formänderung 97, 121.
 Formänderungsarbeit 519.
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit 509.
 Frequenz 71.
 Fundamentalgleichung, determinierende 153.
 Fundamentalsystem 153, 157, 403.
 Funktion 1, 2.
 Funktion, algebraische 3.
 — Besselsche 389, 397.
 — — erster Art 393, 486.
 — — zweiter Art 486.
 — Bressesche 61.
 — Greensche 449.
 — — für die Kugel 482.
 — einer Funktion 43.
 — elliptische 191.
 — hypergeometrische 400.
 — integrable 216.
 — inverse 44.
 — irrationale 3.
 — logarithmische 47.
 — nicht explizite 4.
 — periodische 104.
 — quadratische 91.
 — rationale ganze 3.
 — — gebrochene 3.
 — transzendente 3.
 — unentwickelte 4.
- Geschwindigkeitspotential 423, 528.
 Geschwindigkeitsvektor 549.
 Gefällarbeit 53.
 Gerinneachse 53.
 Getriebefunktion 256, 261.
 Gleichstromanker 221.
 Gleichstrommaschine 577.
 Gleichstromspannung 595.
 Gleichung, adjungierte 650.
 — Maxwellsche 567.
 — reduzierte 127.
 — transponierte 650.
 Gravitationsgesetz 173.
 Gravitationskonstante 427.
 Grenzbedingung 350, 531, 596, 604.
 Grenzen 13.
 Grundformeln der Differential-Grundkurve 9. [rechnung 49.
 Grundton 352.
 Grundwasserspiegel 64.
 Grundwasserstrom 65.

- Hauptgleichung**, ballistische 232.
Hauptspannungen 497.
Hauptwert 211.
Henry 587.
Himmelsäquator 176.
Himmelskörper 173.
Hohlkugel 514.
Homogenität 474.
Horizontalzug 86, 118.
Hydrodynamik 523.
Hyperbelamplitude 200.
Hyperbelfunktion 4, 115.
Hyperbel, gleichseitige 113.
- Impedanz** 71.
Indikatorgramm 256.
Induktion, magnetische 566.
Inhaltskurve 6, 8, 9.
Integrabilitätsbedingung 77.
Integral 11.
 — allgemeines 51, 130, 165, 340.
 — bestimmtes 13.
 — elliptisches 120.
 — — erster Gattung 188.
 — — vollständiges 198.
 — logarithmenbehaftetes 158.
 — partikuläres 51, 83, 340, 351, 367.
 — singuläres 73, 340.
 — unbestimmtes 13, 17.
Integralfunktion 347.
Integralgleichung, lineare 639.
 — — homogene 645.
Integralkurve 23, 24, 222, 276.
 — zweite 96.
Integralsatz von Gauß 449.
 — von Stokes 545.
Integralzeichen 13.
Integraph 24.
Integration, graphische 216.
 — mechanische 326.
Integrationsformel 12.
Integrationskonstante 51, 67.
 — willkürliche 77.
Integrator für lineare Differentialgleichungen 330.
 — mechanischer 327.
 — nach Hele-Shaw 39.
Intervall 13.
Isoklinen 271.
Isoklinenschar 231.
Isoklinenverfahren 222, 237.
Isolatoren 446, 478.
- Kapazität** 583, 611.
Kegelschnitt 178.
Kern, iterierter 652.
 — lösender 650.
 — symmetrischer 656.
Kettenleiter 210.
 — erster Art 213.
Kettenlinie 107.
Klemmspannung 577.
Knoten, aufsteigender 176.
Knotenlinie 176, 387.
Knotenpunkt 387.
Koeffizienten, Fouriersche 355.
Kompensationsplanimeter 33.
Konduktoren 478.
Konstante 41.
 — unbestimmte 90.
Kontinuitätsgleichung 526.
Koordinaten 1.
Koordinatensystem, rechtwinkl. 1.
Körper, elastischer 489.
Korrektionsverfahren 378.
Kosinusamplitude 193.
Kosinusfunktion 46.
Kosinus, hyperbolischer 113.
Kräfte, äußere 519.
 — innere 519.
Kräfteplan 85.
Kraftfeld, elektrisches 560.
 — magnetisches 560.
Kraftfunktion 428.
Kreisfrequenz 71, 211.
Kreisfunktion 4.
Kreisstrom, elektrischer 561.
Kreuzkopf 253.
Kreuzkopfgeschwindigkeit 254.
Krümmung 366.
Krümmungskreis 82, 274.
Krümmungsradius 275.
Kugelfunktion 537.
 — allgemeine 472.
 — einfache 462.
 — Legendresche 455.
Kugelroll-Integrator 38.
 — Planimeter 34.
Kugel, Schwingungen der 514.
 — — einer 511.
Kurbelarm 254.
Kurbelwinkel 253.
Kurve 2.
 — einhüllende 74.
Kurvenbüschel 83.
Kurvenschar 52, 73.
Kurzschlußstromkurve 221.

- Längsdehnung** 123.
Längsschwingung 362.
Leiter 446.
 — lineare 592.
 — linear ausgestreckte 575.
Leitkurve 30.
Leistungsstrom 566.
Leuchtturm, Planier 371.
Linearplanimeter 33.
Linie, elastische 96, 100, 118.
Liniendiagramm 282.
Linienelement 222.
Linienintegral 546.
Logarithmus 3.
Lösungen, partikuläre 127.

Magnetostatik 560.
Mannigfaltigkeit 52.
Maßeinheiten 560.
Massenanziehung, allgemeine 427.
Massenpunkte, Kette von 207.
Maximum 3, 10, 22.
Membran, rechteckige 387.
 — rotierende 400.
 — runde 389.
Membranschwingungen 384.
Meridian 457.
Mikrofarad 587.
Minimalkurve 613.
Minimum 3, 10, 22, 520.
Mittelwertsatz 22, 334.
Modul 188.
Momentenfläche 99.
Momenten-Integrator 37.
 — -Planimeter 27.
Momente, statische 27.
Muffengewicht 169.

Näherungsbehandlung 216.
Neigungswinkel 19.
Niveaulinien 423.
Nordpol 456.
Normalform 151.
 — Frobeniussche 515.
Normalfunktion 377, 499.
Normalspannung 96, 490.
Nulllösung 651.
Nullpunkt 2, 21.
Nullstelle 2.

Oberflächenbedingung 408, 495, 538, 604.
Obertöne 352, 381.
Ohm 68.

Oktave 352.
Ölbremse 171.
Ordinate 2.

Parabel 91.
Parallelkreis 457.
Parallelströmung 435.
Parameterdarstellung 4, 133.
Partialbrüche 101.
Partialbruchzerlegung 60.
Platte, kreisförmige 500.
Pendelgleichung 321.
Perihel 179.
Periheldurchgang 183.
Perihelwinkel 183.
Periodengleichung 351, 369, 378, 382, 519, 604.
Permeabilität 566.
Phase 211, 604.
Phasenverschiebung 71, 499.
Planimeter 30.
Platte, kreisförmige 129.
Platten mit punktförmigen Randmassen 504.
Plattenschwingungen 626.
Pleuelstange 253.
Polarisation 563, 564.
Polarkoordinaten 455.
Polarplanimeter 33.
Poldistanz 461.
Pole 3.
Polygonzug 218, 239.
Potential einer dünnen Kugelschale 433.
 — einer Vollkugel 434.
Potentialvektor 570.
Prinzip, d'Alembertsches 641.
 — Dunkerleysches 506.
Produkte, unendliche 4.
Produkt von zwei Funktionen 42.
Profilradius 53, 221.

Quadratur 10, 51.
Quellstärke 645.
Querkontraktion 123.
Querkraftfläche 99.
Querschnittsträgheitsmoment 366.
Quotient zweier Funktionen 43.

Radialspannungen 504.
Radiusvektor 177.
Randbedingungen 209.
Randwertaufgabe 313, 447.
 — erste, für den Kugelinnenraum 482.

- Raumpotentiale 445.
 Reaktanz 71.
 Rechenschieber 277.
 Rechteck 5.
 Regulator 169, 253.
 Reibungsarbeit 53.
 Reihe, bilineare 658.
 Reihenentwicklung 70.
 — Methode der 148.
 Reihenfolge der Differentiationen 336.
 Reihenmethode 499.
 Resonanzbedingung 499.
 Resonanztheorie 499.
 Richtungsfeld 222.
 Richtungstangens 19.
 Rolle, gleitende 25.
 — scharfkantige 25.
 Rohr, dickwandiges 120.
 Rückkehrpunkte 224.

Saite, schwingende 348, 639.
 Sehnepolygon 217.
 Sehnentrapez 246, 250, 263.
 Sehnentrapez-Näherung 297.
 Seileck 25.
 Seilkurve 84, 108, 288.
 Seilpolygon 87, 99.
 Sekante 19.
 Selbstinduktion 68, 582, 611.
 Singularitäten 221.
 Sinusamplitude 191, 193.
 Sinusfunktion 45.
 Sinus, hyperbolischer 113.
 Skalare 563.
 Skineffekt 605.
 Sohlengefälle 54, 221.
 Spannungsellipsoide 497.
 Spannungskomponenten 491.
 Spannungszustand 564.
 — räumlicher 495.
 Spannweite 87.
 Spiegelgefälle 54.
 Spiegelgleichung 221.
 Spiegelkurve 52, 230.
 — des Grundwasserstromes 221.
 — eines fließenden Gewässers 220.
 Spirale, logarithmische 225.
 Spitzen 224.
 Substitutionsmethode 66.
 Summationsfehler 11.
 Summationsformel 12.
 Summen, unendliche 4.
 Summenzeichen 13.

 Summe von Funktionen 42.
 Summierung, graphische, der Geraden 4, 8.
 Scheinleitwert 212.
 Scheinwiderstand 212.
 Schiffsschwingungen 372.
 Schranke 273.
 Schubmodul 494.
 Schubspannungen 97.
 Schubspannungspaare 490.
 Schulspannungen 96.
 Schwerkraft 320.
 Schwingungen, erzwungene 661.
 — — gedämpfte 497.
 — kleine 84.
 Schwingungsdauer 509, 599.
 Schwingungsvorgang 351.
 Schwingungszahl 519.
 Schwungkugeln 169.
 Schwungrad 254.
 Stab 407.
 — biegsamer 661.
 — verjüngter 376.
 Stabschwingungen 626.
 Staukurve 52.
 Störungsfunktion 126, 326, 648.
 Stromdichte 565.
 Strom, elektrischer 561.
 Stromfaden 550.
 Stromfunktion 557.
 Stromlinien 424, 543, 549.
 Stromnacheilung 72.
 Stromverteilung 210.
 Stufenkurve 220.
 Stufenteilung, erster Art 216.
 — zweiter Art 217.
 Stützkurve 283.
 Stützkurvenschar 287.

Tangensfunktion 46.
 Tangens, hyperbolischer 116.
 Tangentenpolygon 216.
 Tangententrapez 248, 250, 262.
 Tangententrapez-Näherung 295.
 Tangentialdruckdiagramm 261.
 Tangentialkraft 260.
 Tangentialkraftmoment 260.
 Teil, abklingender 69.
 Temperatur 405, 527.
 Temperaturverteilung 414, 415.
 Tensoren 562.
 Thermodynamik 527.
 Torsionsschwingungen 363.
 Trägheit, rotatorische 367.

- Trägheitsmoment 30, 36, 97.
 Trajektorien 224.
 Transformator 592.
 Trapeze 8.
 Turbinentheorie 558.
- Umlaufsinn** 2.
 — negativer 6.
 — positiver 6.
Umlaufzeiten 179.
- Variablen, abhängige** 2.
 — Trennung der 64.
 — unabhängige 2.
Variation der Konstanten 137.
 — erste 520.
Variationsrechnung 612.
Vektor 549, 562.
Verbesserung, schrittweise 270, 322.
Verschiebung, dielektrische 565.
 — magnetische 566.
Verschiebungsstrom 566.
Vollkugel 514.
Volumkräfte 534.
Vorstellungen, geometrische 1.
- Wärmebewegung** 416.
Wärmeleitfähigkeit 405.
Wärmeleitung 405, 527.
 — stationäre 405.
Wasserbehälter 142, 145, 154.
- Wasserbewegung** 53.
Wechselstrom 68, 579.
Wellen 254.
 — ebene 572.
 — elektromagnetische 569.
 — transversale 507.
Wellenbewegung, longitudinale 509.
 — transversale 510.
Wellenlänge 599.
Wellen, longitudinale 507.
Widerstand 68, 611.
 — scheinbarer 71.
Wildbach 63.
Windungspunkt 231.
Winkelfunktion 3.
Winkelgeschwindigkeit 253, 528.
Wirbelbewegungen 549.
Wirbelfaden 530.
Wirbelkomponenten 528.
Wirbellinien 549.
Wirbelmoment 550.
Wirbelvektor 549.
Wirbelverteilung 649.
Wurzelgruppe 157.
- Zähigkeitskoeffizienten** 529.
Zeichengenauigkeit 275.
Zeitwegschaubild 287.
Zentralbewegung 173.
Zustandsgleichung 527.
Zylinderfunktion 484.
Zylinderkoordinaten 552.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Technische Schwingungslehre

Ein Handbuch für Ingenieure, Physiker und Mathematiker bei der Untersuchung der in der Technik angewendeten periodischen Vorgänge

Von

Dipl.-Ing. Dr. **Wilhelm Hort**

Oberingenieur bei der Turbinenfabrik der A. E. G.
Privatdozent an der Technischen Hochschule in Berlin

Zweite, völlig umgearbeitete Auflage

Mit 423 Textfiguren. 836 Seiten. 1922. Gebunden 24 Goldmark

Bei dem regen Interesse und der hervorragenden praktischen Wichtigkeit, welche die Schwingungserscheinungen (im weitesten Sinne) in der Technik finden und besitzen, ist es unbedingtes Erfordernis, sowohl für den Hochschulunterricht, dieses umfassende Gebiet gehörig zu pflegen, als auch für jeden Ingenieur, sich mit den allgemeinen Gesetzen und Schwingungsvorgängen und deren Anwendung auf diese oder jene Sonderaufgabe vertraut zu machen. Denn es gibt in der Tat kaum einen Teil der Mechanik, der von so allgemeiner Bedeutung wäre und dessen Wirkungen überall zu spüren sind. Das ist der erste, nachhaltige Eindruck, den man bei der Durchsicht des vorliegenden Buches erhält. Mathematik, analytische Mechanik, Maschinenbau, Elektrotechnik, Elastizitätstheorie und Bauwesen, Hydromechanik, Flugtechnik und Theorie der Gase, alle diese Gebiete werden durch zum Teil sehr eingehend behandelte Beispiele in dem Buche berührt... Der Verfasser hat mit vorbildlichem Überblick und Fleiß aus mehr als 1000 Originalabhandlungen das Material zusammengetragen, unter einheitlichen Gesichtspunkten bearbeitet und zusammengefaßt. Man muß ihm insbesondere für die reiche Literaturangabe zu den einzelnen Kapiteln dankbar sein. Die Behandlung des Stoffes ist recht geschickt und bei aller gebotenen Kürze leicht verständlich... Die äußere Ausstattung des Werkes bezüglich Druck, Papier und Einband ist einwandfrei und eine große Anzahl vorzüglicher und gut wiedergegebener Abbildungen erleichtern das Verständnis. Die zweite Auflage des Werkes kann daher ebenso wie seinerzeit die erste bestens empfohlen werden. *Aus „Maschinenbau-Gestaltung“.*

Mathematische Schwingungslehre. Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sowie einiges über partielle Differentialgleichungen und Differenzgleichungen. Von Dr. **Erich Schneider.** Mit 49 Textabbildungen. (200 S.) 1924.
8.40 Goldmark; gebunden 9.15 Goldmark

Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen und das Gesetz ihres Ausgleichs. Von Dr.-Ing. **Hans Wydler,** Kiel. Mit einem Nachwort: Betrachtungen über die Eigenschwingungen reibungsfreier Systeme von Prof. Dr.-Ing. **Guido Zerkowitz,** München. Mit 46 Textfiguren. (106 S.) 1922. 6 Goldmark

Die Berechnung der Drehschwingungen und ihre Anwendung im Maschinenbau. Von **Heinrich Holzer,** Oberingenieur der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg. Mit vielen praktischen Beispielen und 48 Textfiguren. (204 S.) 1921. 8 Goldmark; gebunden 9 Goldmark

Grundzüge der technischen Schwingungslehre. Von Prof. Dr.-Ing. **Otto Föppl,** Braunschweig, Technische Hochschule. Mit 106 Abbildungen im Text. (157 S.) 1923.
4 Goldmark; gebunden 4.80 Goldmark

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Tafeln zur harmonischen Analyse periodischer Kurven.

Von Dr.-Ing. **L. Zipperer**. Mit 6 Zahlentafeln, 9 Abbildungen und 23 graphischen Berechnungstafeln. (18 S.) 1922. Mappe 4.20 Goldmark
Einzelne Grundtafeln je 10 Stück 0.50 Goldmark

Mathematik. Von Prof. Dr. phil. **H. E. Timerding**, Braunschweig.

(„Handbibliothek für Bauingenieure, 1. Teil, 1. Bd.“) Mit 192 Textabbildungen. (250 S.) 1922. Gebunden 6.40 Goldmark

Lehrbuch der technischen Physik. Von Prof. Dr. Dr.-Ing. **Hans Lorenz**, Geheimer Regierungsrat, Danzig. Zweite, neubearbeitete Auflage.

Erster Band: **Technische Mechanik starrer Gebilde.** Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage der „Technischen Mechanik starrer Systeme“.

Erster Teil: **Mechanik ebener Gebilde.** Mit 295 Textabbildungen. (398 S.) 1924. Gebunden 18 Goldmark

Ed. Autenrieth, Technische Mechanik. Ein Lehrbuch der Statik

und Dynamik für Ingenieure. Neu bearbeitet von Dr.-Ing. **Max Esslin**, Eßlingen. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 295 Textabbildungen. (580 S.) 1922. Gebunden 15 Goldmark

Theoretische Mechanik. Eine einleitende Abhandlung über die

Prinzipien der Mechanik. Mit erläuternden Beispielen und zahlreichen Übungsaufgaben. Von Prof. **A. E. H. Love**, Oxford. Autorisierte deutsche Übersetzung der zweiten Auflage von Dr.-Ing. **Hans Polster**. Mit 88 Textfiguren. (438 S.) 1920. 12 Goldmark; gebunden 14 Goldmark

Lehrbuch der Technischen Mechanik für Ingenieure und Studierende.

Zum Gebrauche bei Vorlesungen an Technischen Hochschulen und zum Selbststudium. Von Prof. Dr.-Ing. **Theodor Pöschl**, Prag. Mit 206 Abbildungen. (269 S.) 1923.

6 Goldmark; gebunden 7.25 Goldmark

Lehrbuch der Technischen Mechanik. Von Prof. Dr. phil. h. c.

Martin Grübler, Dresden.

Erster Band: **Bewegungslehre.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 144 Textfiguren. (150 S.) 1921. 4.20 Goldmark

Zweiter Band: **Statik der starren Körper.** Zweite, berichtigte Auflage. (Neudruck.) Mit 222 Textfiguren. (290 S.) 1922.

7.50 Goldmark

Dritter Band: **Dynamik starrer Körper.** Mit 77 Textfiguren. (163 S.) 1921. 4.20 Goldmark

Grundzüge der Technischen Mechanik des Maschineningenieurs. Ein Leitfaden für den Unterricht an maschinen-technischen Lehranstalten.

Von Prof. Dipl.-Ing. **P. Stephan**, Regierungsbaumeister. Mit 283 Textabbildungen. (166 S.) 1923. 2.50 Goldmark

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Graphische Dynamik. Ein Lehrbuch für Studierende und Ingenieure. Mit zahlreichen Anwendungen und Aufgaben. Von Prof. **Ferdinand Wittenbauer** †, Graz. Mit 745 Textfiguren. (813 S.) 1923.
Gebunden 30 Goldmark

Christmann-Baer, Grundzüge der Kinematik. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage von Prof. Dr.-Ing. **H. Baer**, Breslau. Mit 164 Textabbildungen. (144 S.) 1923.
4 Goldmark; gebunden 5.50 Goldmark

Franz Reuleaux und seine Kinematik. Von Dipl.-Ing. **Carl Weihe**, Frankfurt a. M. Mit dem Aufsätze „Kultur und Technik“ von F. Reuleaux. (105 S.) 1925. Gebunden 3 Goldmark

Aufgaben aus der Technischen Mechanik. Von Prof. **Ferd. Wittenbauer**, Graz.

Erster Band: **Allgemeiner Teil.** 839 Aufgaben nebst Lösungen. Fünfte, verbesserte Auflage, bearbeitet von Prof. Dr.-Ing. **Theodor Pöschl**, Prag. Mit 640 Textfiguren. (289 S.) 1924.
Gebunden 8 Goldmark

Zweiter Band: **Festigkeitslehre.** 611 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 505 Textfiguren. (408 S.) 1918. Unveränderter Neudruck. 1922.
Gebunden 8 Goldmark

Dritter Band: **Flüssigkeiten und Gase.** 634 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 433 Textfiguren. (398 S.) 1921. Unveränderter Neudruck. 1922. Gebunden 8 Goldmark

Die technische Mechanik des Maschineningenieurs mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Von Prof. Dipl.-Ing. **P. Stephan**, Regierungs-Baumeister. In 4 Bänden.

Erster Band: **Allgemeine Statik.** Mit 300 Textfiguren. (166 S.) 1921. Gebunden 4 Goldmark

Zweiter Band: **Die Statik der Maschinenteile.** Mit 276 Textfiguren. (272 S.) 1921. Gebunden 7 Goldmark

Dritter Band: **Bewegungslehre und Dynamik fester Körper.** Mit 264 Textfiguren. (258 S.) 1922. Gebunden 7 Goldmark

Vierter Band: **Die Elastizität gerader Stäbe.** Mit 255 Textfiguren. (254 S.) 1922. Gebunden 7 Goldmark

Aufgaben aus der Maschinenkunde und Elektrotechnik.

Eine Sammlung für Nichtspezialisten nebst ausführlichen Lösungen. Von Ing. Prof. **Fritz Süchting**, Clausthal. Mit 88 Textabbildungen. (251 S.) 1924. 6.60 Goldmark; gebunden 7.50 Goldmark

Aufgaben aus dem Wasserbau. Angewandte Hydraulik. 40 vollkommen durchgerechnete Beispiele. Von Dr.-Ing. **Otto Streck**. Mit 133 Abbildungen, 35 Tabellen und 11 Tafeln. (371 S.) 1924. Gebunden 11,40 Goldmark

Aufgaben und Lösungen aus der Gleich- und Wechselstromtechnik. Ein Übungsbuch für den Unterricht an technischen Hoch- und Fachschulen, sowie zum Selbststudium. Von Prof. **H. Vieweger**. Achte Auflage. Mit 210 Textfiguren und 2 Tafeln. (302 S.) Unveränderter Neudruck. 1923. 4 Goldmark; gebunden 5 Goldmark

Taschenbuch für den Maschinenbau. Bearbeitet von zahlreichen Fachleuten. Herausgegeben von Professor **Heinrich Dubbel**, Ingenieur, Berlin. Vierte, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 2786 Textfiguren. In zwei Bänden. (739 S.) 1924. Gebunden 18 Goldmark

Freytags Hilfsbuch für den Maschinenbau für Maschineningenieure sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. Urter Mitarbeit zahlreicher Fachleute herausgegeben von Prof. **P. Gerlach**. Siebente, vollständig neu bearbeitete Auflage. Mit 2484 in den Text gedruckten Abbildungen, 1 farbigen Tafel und 3 Konstruktionstafeln. (1502 S.) 1924. Gebunden 17.40 Goldmark

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. **W. Ludwig**, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden.

Erster Teil: **Das rechtwinklige Zweitafelssystem.** Vielfache, Kreis, Zylinder, Kugel. Mit 58 Textfiguren. (141 S.) 1919. Unveränderter Neudruck. 1924. 4.50 Goldmark

Zweiter Teil: **Das rechtwinklige Zweitafelssystem.** Kegelschnitte, Durchdringungskurven, Schraubenlinie. Mit 50 Textfiguren. (140 S.) 1922. 4.50 Goldmark

Dritter Teil: **Das rechtwinklige Zweitafelssystem.** Krumme Flächen, Axonometrie, Perspektive. Mit 47 Textfiguren. (174 S.) 1924. 5.70 Goldmark

Die drei Teile in 1 Band gebunden 16.20 Goldmark

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In zwei Bänden. Von Dr. **Georg Scheffers**, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin.

Erster Band: Zweite, durchgesehene Auflage. (Neudruck.) Mit 404 Textfiguren. (434 S.) 1922. Gebunden 14 Goldmark

Zweiter Band: Mit 396 Figuren im Text. (447 S.) 1920. 11 Goldmark; gebunden 14 Goldmark

Die Grundlagen der Nomographie. Von Ing. **B. M. Konorski**. Mit 72 Abbildungen im Text. (86 S.) 1923. 3 Goldmark

Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage. Von Studienrat **H. Schwerdt**, Berlin. Mit 137 Textabbildungen und 151 angewandten Aufgaben mit Lösungen. (275 S.) 1924. Gebunden 12.90 Goldmark

Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomographie). Von Prof. Dr.-Ing. **P. Werkmeister**, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Stuttgart. Mit 164 Textabbildungen. (201 S.) 1923. 9 Goldmark; gebunden 10 Goldmark