

# DER WÄRME- UND STOFFAUSTAUSCH

DARGESTELLT IM MOLLIERSCHEN ZUSTANDS-  
DIAGRAMM FÜR ZWEISTOFFGEMISCHE

VON

**DR.-ING. ADOLF BUSEMANN**

PRIVATDOZENT FÜR STRÖMUNGSLEHRE UND THERMODYNAMIK  
AN DER SÄCHS. TECHN. HOCHSCHULE ZU DRESDEN

MIT 51 TEXTABBILDUNGEN



Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg GmbH  
1933

# DER WÄRME- UND STOFFAUSTAUSCH

DARGESTELLT IM MOLLIERSCHEM ZUSTANDS-  
DIAGRAMM FÜR ZWEISTOFFGEMISCHE

VON

**DR.-ING. ADOLF BUSEMANN**

PRIVATDOZENT FÜR STRÖMUNGSLEHRE UND THERMODYNAMIK  
AN DER SÄCHS. TECHN. HOCHSCHULE ZU DRESDEN

MIT 51 TEXTABBILDUNGEN



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1933

ISBN 978-3-662-31440-1      ISBN 978-3-662-31647-4 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-31647-4

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1933 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1933

**Richard Mollier**

zum 70. Geburtstag gewidmet

## Vorwort.

Seit über zehn Jahren sind aus der Hydrodynamik grundsätzlich alle Unterlagen bekannt, nach denen man die Gesetze des Wärme- und Stoffaustausches in ähnlicher Weise wie die der reinen Wärmeübertragung aufstellen könnte. Deswegen konnte H. Thoma schon im Jahre 1921 mit Erfolg darauf hinweisen, daß sich die Wärmeübergangszahlen auch mit Hilfe von Diffusionsversuchen ermitteln lassen. Aber erst eine Arbeit von W. K. Lewis aus dem Jahre 1922 gab Veranlassung, die Grundlagen des Wärme- und Stoffaustausches näher zu untersuchen. In dieser Arbeit wird nämlich eine Beziehung zwischen der Wärmeübergangszahl und der Verdunstungszahl abgeleitet, die offenbar auch die Anschauungen des Verfassers über den Austausch befriedigt, zu deren Ableitung aber ein anderer Weg benutzt wird, der infolge eines unexakten Grenzüberganges scheinbar zum Ziele führt. 1925 zeigt dann F. Merkel, daß diese Beziehung nur beim rein turbulenten Austausch genau erfüllt ist. Dann geben 1929 E. Schmidt und 1930 W. Nußelt unabhängig voneinander die Abweichungen an, die in wirklichen Strömungen zu erwarten sind. Die völlige Übereinstimmung dieser beiden Arbeiten könnte man als Beweis dafür ansehen, daß damit alle Fragen des Wärme- und Stoffaustausches grundsätzlich geklärt sind. Und doch decken gerade diese Arbeiten eine neue Schwierigkeit auf, es bleibt nämlich die Frage ungeklärt, wie man die verschiedenen Stoffe des Gemisches bewerten soll, um eindeutig zwischen der Diffusion der Stoffe und der Konvektion des Gemisches (auch „fühlbare“ Strömung genannt) unterscheiden zu können. Beide Verfasser sehen die Bewegung der gesamten Molgewichte aller beteiligten Stoffe als fühlbare Strömung an. Mit gleichem Recht könnte man statt dessen auch die Bewegung der gesamten Massen aller Stoffe nehmen. Eine derartige Unsicherheit in der Berechnung der Konvektion muß sich auf den gleichzeitig stattfindenden Wärmeaustausch, der aus Wärmeleitung und Wärmekonvektion besteht, übertragen, besonders wenn es sich um Gemische handelt, die eine Mischungswärme besitzen.

Um an dieser Stelle völlige Klarheit zu schaffen, wird in der vorliegenden Arbeit noch einmal neu aufgebaut, und zwar wird dabei die Wärmeleitung mit Diffusion und Konvektion zu dem Gesamtbegriff

„Austauschstrom“, einem Wärme- und Stoffstrom, zusammengefaßt. Hieran zeigt sich nun, daß die Schwierigkeiten, die bei der Unterteilung auftreten, für alle thermodynamischen Fragen nur scheinbar vorhanden sind. Erst wenn man in der Hydrodynamik die Druckunterschiede aus den Massenbeschleunigungen bestimmen oder den Impulsaustausch berechnen will, wird es nötig vom Wärme- und Stoffstrom einen Massenstrom abzuspalten. Für diesen bestehen aber keinerlei Zweifel über die Bewertung der Stoffe.

Der Begriff „Austauschstrom“ ist nun aber nicht nur für die Theorie des Wärme- und Stoffaustausches von einmaliger Bedeutung, um damit einwandfreiere Teilgesetze aufstellen zu können; gerade die Praxis wird sich ihn gern zu eigen machen, weil man ihn in das Molliersche Zustandsdiagramm für Zweistoffgemische eintragen kann, das auch F. Merkel und R. Mollier schon mit Erfolg für die Darstellung von Austauschvorgängen verwendet haben. Sowohl beim laminaren wie beim turbulenten Wärme- und Stoffaustausch bewähren sich die Mollierschen Koordinaten in ganz besonderem Maße. Es ist mir daher eine große Freude, Herrn Geheimrat R. Mollier den Beweis für diese Eignung gerade zu seinem 70. Geburtstag überreichen zu können. Man darf daran die Hoffnung knüpfen, daß der Wärme- und Stoffaustausch in Zukunft nur noch an Hand dieses Diagrammes behandelt wird, weil man auf diese Weise alle aus Versuchen bekannten Eigenschaften der Gemische voll berücksichtigen kann. Während die verschiedenen Abarten dieses Diagrammes für alle thermodynamischen Untersuchungen gleichwertig sind, dürfte mit der Zeit doch jenes Diagramm den Vorrang bekommen, das als Bezugsgröße die Masse oder das Gewicht des Gemisches hat, weil es für hydrodynamische Berechnungen am geeignetsten ist.

An dieser Stelle möchte ich auch Herrn F. Bošnjaković herzlich danken für seinen Anteil an der Entstehung dieser Arbeit. Seine Vorstöße zur Berechnung des Rektifikationsvorganges und meine Integration des Kühlturmvorganges mußten erst in gemeinsamen Aussprachen zusammenkommen, bevor die Gedanken reiften, die in der vorliegenden Arbeit dargestellt sind.

Dresden, im November 1933.

**A. Busemann.**

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	1
§ 1. Gemische . . . . .	1
<b>Erstes Kapitel: Räumliche und ebene Darstellungen von Zweistoffgemischen</b>	<b>5</b>
§ 2. Der Gesamtwert eines Zweistoffgemisches . . . . .	5
§ 3. Die Mollierschen Zweistoffdiagramme . . . . .	7
§ 4. Addition von Gemischen . . . . .	9
§ 5. Stromstärke, Stromdichte . . . . .	11
§ 6. Austausch im Gleich- und Gegenstrom . . . . .	14
§ 7. Zustand und Volumeneinheitngemisch . . . . .	15
§ 8. Der Gesamtwert einfacher Stoffe . . . . .	18
<b>Zweites Kapitel: Der turbulente Austausch</b> . . . . .	<b>21</b>
§ 9. Modell des turbulenten Austausches . . . . .	21
§ 10. Stationäres Gleichgewicht am Modell . . . . .	24
§ 11. Die unterbrochene Turbulenz . . . . .	30
§ 12. Gleichgewicht bei unterbrochener Turbulenz . . . . .	32
§ 13. Durchgehende Turbulenz im Diagramm . . . . .	34
§ 14. Unterbrochene Turbulenz im Diagramm . . . . .	37
<b>Drittes Kapitel: Der laminare Austausch</b> . . . . .	<b>38</b>
§ 15. Austausch durch unendlich dünne Schicht . . . . .	38
§ 16. Fremdkörpergeschwindigkeit . . . . .	40
§ 17. Der Austauschtensor . . . . .	42
§ 18. Der Austausch durch endliche Schichten . . . . .	45
§ 19. Lösungen bei einfachem Austauschtensor . . . . .	47
<b>Viertes Kapitel: Beispiele mit rein turbulentem Austausch</b> . . . . .	<b>50</b>
§ 20. Wärmeübertragung zwischen einfachem Stoff und fester Wand . . . . .	50
§ 21. Wärmeübertragung zwischen Gemisch und fester Wand . . . . .	52
§ 22. Wärme- und Stoffaustausch zwischen zwei Phasen eines einfachen Stoffes . . . . .	53
§ 23. Austausch zwischen feuchter Luft und Wasser . . . . .	56
§ 24. Integration des Kühlturmvorganges . . . . .	61
§ 25. Wärme- und Stoffaustausch bei der Rektifikation . . . . .	66
<b>Fünftes Kapitel: Beispiele mit laminaren Schichten</b> . . . . .	<b>69</b>
§ 26. Laminarer Austausch beim einfachen Stoff . . . . .	69
§ 27. Turbulenter Austausch mit laminaren Schichten . . . . .	70
§ 28. Laminarer Austausch bei Wasser-Luft-Gemischen . . . . .	73
Literaturverzeichnis . . . . .	76

## Zusammenstellung der Bezeichnungen.

### I. Deutsche und lateinische Buchstaben.

<p><math>A</math> = Stoffmenge eines Stoffes <math>A</math> = [kg-<math>A</math>]</p> <p><math>B</math> = Stoffmenge eines Stoffes <math>B</math> = [kg-<math>B</math>]</p> <p><math>a</math> = Temperaturleitzahl = [<math>m^2/h</math>]</p> <p><math>a, b</math> = Index für die Stoffkomponenten von Gesamtwerten</p> <p><math>c_p</math> = spez. Wärme = [kcal/kg<math>^{\circ}C</math>]</p> <p><math>C_p = \gamma \cdot c_p</math> = spez. Wärme = [kcal/<math>m^3</math> <math>^{\circ}C</math>]</p> <p><math>d</math> = Index für Dämpfe</p> <p><math>df, fd</math> = Index für die Oberfläche auf der Dampf- bzw. Flüssigkeitsseite</p> <p><math>f</math> = Index für Flüssigkeiten</p> <p><math>F</math> = Austauschfläche</p> <p><math>\mathcal{G}</math> = Gesamtwert (seine Komponenten haben verschiedene Dimension)</p> <p><math>g</math> = Richtung von <math>\mathcal{G}</math>, Zustand von <math>\mathcal{G}</math></p> <p><math>G</math> = Diagrammgewicht von <math>\mathcal{G}</math> = [<math>GE</math>]</p> <p><math>GE</math> = Gewichtseinheit des Diagrammgewichtes z. B. kg oder Mol usw.</p> <p><math>\mathcal{G}^*</math> = Volumeneinheitgemisch = [<math>\mathcal{G}/m^3</math>]</p> <p><math>G^*</math> = Diagrammgewicht von <math>\mathcal{G}^*</math> = [<math>GE/m^3</math>]</p> <p><math>\mathfrak{S}</math> = Stromstärke = [<math>\mathcal{G}/h</math>]</p> <p><math>\mathfrak{j}</math> = Richtung von <math>\mathfrak{S}</math> (realer oder fiktiver Zustand von <math>\mathfrak{S}</math>)</p> <p><math>H</math> = Diagrammgewicht von <math>\mathfrak{S}</math> = [<math>GE/h</math>]</p> <p><math>I</math> = gesamter Wärmehalt = [kcal]</p>	<p><math>i</math> = Wärmehalt bezogen auf das Diagrammgewicht = [kcal/<math>GE</math>]</p> <p><math>i</math> = Index für die Wärmehaltskomponente von Gesamtwerten</p> <p><math>\mathfrak{S}</math> = Stromdichte = [<math>\mathcal{G}/m^2 h</math>]</p> <p><math>\mathfrak{j}</math> = Richtung von <math>\mathfrak{S}</math> oder <math>\mathfrak{S}^*</math> (realer oder fiktiver Zustand von <math>\mathfrak{S}</math>)</p> <p><math>J</math> = Diagrammgewicht von <math>\mathfrak{S}</math> = [<math>GE/m^2 h</math>]</p> <p><math>j</math> = Index am Bildpunkt des Zustandes von <math>\mathfrak{S}</math> im Diagramm</p> <p><math>\mathfrak{S}^*</math> = wirksame Entfernung zweier Zustände [Gl.(24) oder Abb.21]</p> <p><math>J^*</math> = Diagrammgewicht von <math>\mathfrak{S}^*</math> = [<math>GE/m^2</math>]</p> <p><math>L</math> = Stärke der laminaren Schicht</p> <p><math>\mathfrak{M}</math> = <math>J \cdot (\mathfrak{j}_j - \mathfrak{j})</math> = Moment von <math>J</math> im Punkt <math>\mathfrak{j}_j</math> gegenüber <math>\mathfrak{j}</math></p> <p><math>O</math> = Koordinatenanfangspunkt</p> <p><math>p</math> = Druck = [kg/<math>m^2</math>]</p> <p><math>Q</math> = Wärmemenge = [kcal]</p> <p><math>s</math> = Index für den Schwerpunkt (Summe von zwei Gemischen)</p> <p><math>t</math> = Zeit = [h]</p> <p><math>V</math> = Fördervolumen = [<math>m^3/h</math>]</p> <p><math>W</math> = Stromstärke des Kühlwassers = [kg/h]</p> <p><math>x</math> = Stoffzusammensetzung im <math>i</math>-<math>x</math>-Diagramm, auch allgemein als Abszisse des Diagrammes verwandt</p> <p><math>\mathfrak{z}</math> = Radiusvektor im Zustandsdiagramm bezogen auf beliebigen Punkt</p>
---	---

### II. Griechische Buchstaben.

<p><math>\alpha</math> = Wärmeübergangszahl = [kcal/<math>m^2 h</math> <math>^{\circ}C</math>]</p> <p><math>\gamma</math> = spezifisches Gewicht = [kg/<math>m^3</math>]</p> <p><math>\delta</math> = Diffusionskonstante = [<math>m^2/h</math>]</p> <p><math>\varepsilon = \zeta_j / \zeta_a</math></p> <p><math>\zeta</math> = kinematische Durchgangszahl = (Maß für die Turbulenz) = [<math>m/h</math>]</p> <p><math>\vartheta</math> = Temperatur = [<math>^{\circ}C</math>]</p> <p><math>\lambda</math> = Wärmeleitzahl = [kcal/<math>m h</math> <math>^{\circ}C</math>]</p>	<p><math>A</math> = Austauschensor (mit Komponenten verschiedener Dimension)</p> <p><math>A' = A^{-1}</math> = reziproker Austauschensor</p> <p><math>A_1, A_2</math> = Hauptfaktoren des Austauschensors = [<math>m^2/h</math>]</p> <p><math>\nu</math> = kinematische Zähigkeit = [<math>m^2/h</math>]</p> <p><math>\sigma = G^* \cdot \zeta</math> = Stoffaustauschzahl = [<math>GE/m^2 h</math>].</p>
--	---

## Einleitung.

§ 1. Gemische. Der Dampf eines einfachen Stoffes besitzt bekanntlich Dampfzustände, die sich vollständig durch zwei unabhängige Zustandsgrößen angeben lassen, z. B. durch den Druck und die Temperatur. Ein Mischdampf, in dem die Dämpfe zweier verschiedener Stoffe gemischt auftreten, hat als dritte unabhängige Zustandsgröße noch die Stoffzusammensetzung, d. h. das Mischungsverhältnis der beiden Stoffe. Befindet sich ein Dampf in einem Raum unter konstantem Druck, so können demnach einfache Dämpfe noch verschiedene Temperaturen an verschiedenen Orten besitzen, während Mischdämpfe an verschiedenen Orten durch die Temperatur und das Mischungsverhältnis unterschieden sein können. Sie selbst überlassen streben die Dämpfe einen Ausgleich der Temperatur und der Stoffzusammensetzung an. Dies geschieht durch einen Wärme- und Stoffaustausch. Bei einfachen Dämpfen bezeichnet man diesen Vorgang als Wärmeübertragung, daher ist der Wärme- und Stoffaustausch als eine Verallgemeinerung der Wärmeübertragung für Gemische anzusehen. Genau wie die Wärmeübertragung selbst tritt der Wärme- und Stoffaustausch in zwei verschiedenen Formen auf: als sogenannter laminarer Austausch in unverwirbeltem Dampf, der auch unter der Bezeichnung Wärmeleitung mit Diffusion bekannt ist, und als turbulenter Austausch in wirbligem oder turbulentem Dampf. Beide Arten sind im allgemeinen von einer Dampfströmung begleitet, die sich als zusätzlicher Wärme- und Stofftransport auswirkt. Die Unterteilung in Wärmeleitung und Wärmekonvektion bleibt nicht mehr eindeutig, sobald eine Diffusion hinzukommt. Daher ist es am besten, unter dem neuen Namen Wärme- und Stoffaustausch die Wärmeleitung mit Diffusion und Konvektion sowohl in laminarer als auch turbulenter Form zu einem Begriff zusammenzufassen.

Für den vorliegenden Zweck wird man eine Flüssigkeit oder einen Dampf (Gas) erst dann als ein Gemisch bezeichnen, wenn örtliche oder zeitliche Verschiedenheiten der Stoffzusammensetzung zu beachten sind. Es muß dann immer möglich sein, die Flüssigkeit oder den Dampf als ein Gemisch von zwei oder mehreren einfachen Stoffen anzusehen; denn bei allen physikalischen und chemischen Vorgängen — von der Atomzertrümmerung natürlich abgesehen — bleiben wenigstens die

Atome erhalten. Diese einfachen Stoffe treten dann gleichsam an verschiedenen Orten mit verschiedener Dichte und verschiedener Geschwindigkeit auf und bewirken dadurch die räumlichen und zeitlichen Änderungen der chemischen Zusammensetzung des Gemisches. Trotzdem sind die einfachen Stoffe aber an jedem Ort wirklich miteinander vermischt vorzustellen, so daß man nicht mit den thermischen Eigenschaften der einfachen Stoffe sondern mit denen ihrer Gemische zu rechnen hat. Es gibt zwar Gemische, die keine anderen thermischen Eigenschaften besitzen als diejenigen, die auch die einfachen Stoffe zeigen würden, wenn sie nur gut verrührt wären, im Kleinen aber noch ungemischt blieben. Derartige Gemische bezeichnet man auch als Gemenge. Im allgemeinen ist aber damit zu rechnen, daß die Gemische neuartige Eigenschaften aufweisen, die sich z. B. durch eine Volumenänderung und eine Wärmetönung kundtun, wenn die Vermischung unter konstantem Druck und konstanter Temperatur vorgenommen wird. Zeigen aber Gas- oder Dampfgemische völlig die Eigenschaften von Gemengen, so kann man sich den Zustand innigster Vermischung nach Dalton folgendermaßen vorstellen: Jedes Teilgas erfüllt das gesamte Volumen des Gemisches so, als wenn es allein vorhanden wäre (Daltonsches Gesetz). Den Druck des Teilgases gegen die Wände des Gesamtvolumens nennt man den Teildruck oder Partialdruck. Er verhält sich bei vollkommenen Gasen zum gesamten Druck wie das Volumen des Teilgases vor der Vermischung zum Gesamtvolumen, wenn man die Mischung wieder bei konstantem Gesamtdruck und konstanter Temperatur vornimmt. Die Summe aller Teildrücke ergibt den gesamten Druck des Gemisches.

Für das Folgende ist es nebensächlich, ob ein Gemisch die Eigenschaften eines Gemenges hat oder ob neuartige Eigenschaften auftreten. Wesentlich ist aber, daß die Eigenschaften eines Gemisches nur durch diejenigen Gleichgewichtszustände bestimmt werden, denen das Gemisch unmittelbar nach dem Verrühren der Stoffkomponenten und im ganzen Raume zustrebt. Gibt es noch weitere Gleichgewichtszustände, die sich erst nach einer Entzündung oder nur an der Oberfläche eines Katalysators einstellen, so gelten diese als eine chemische Umsetzung des Gemisches und ergeben dem Gemisch fremde Zustände. Diese Bedingung gilt auch unverändert für flüssige Gemische und läßt sich auch auf die bekannten nicht mischbaren Flüssigkeiten anwenden. Derartige Flüssigkeiten brauchen nach dem Verrühren ebenfalls nur an allen Orten der Gleichgewichtsordnung zuzustreben, d. h. sich soweit als möglich zu entmischen. Feuchte Luft darf man auf Grund dieser Bedingung nicht als Dreistoffgemisch aus Stickstoff (einschl. Edelgasen), Sauerstoff und Wasserstoff ansehen, denn die Entstehung von Wasserdampf aus Sauerstoff und Wasserstoff setzt bei normalen Temperaturen eine Ver-

brennung voraus. Im allgemeinen wird man feuchte Luft als ein Zweistoffgemisch aus trockener Luft und Wasser bzw. Wasserdampf ansehen können. Bei sehr großen Wassermengen im Vergleich zur Luftmenge kann es Bedeutung erlangen, daß die im Wasser gelöste Luft etwas sauerstoffreicher ist als die über dem Wasser befindliche. In derartigen Ausnahmefällen müßte man mit einem Dreistoffgemisch aus Stickstoff, Sauerstoff und Wasser rechnen. Wie man sieht, hängt also die Anzahl und die Auswahl der Stoffkomponenten wesentlich von dem Vorgang selbst ab, den man untersucht. Bestimmend für diese Auswahl ist in den meisten Fällen das sogenannte Sättigungsgebiet des Gemisches, bei dem zugleich Flüssigkeiten und Dämpfe bestehen; denn hier ergeben sich bei Gemischen in der Regel andere Mischungsverhältnisse in der flüssigen Phase als in der dampfförmigen. Vielfach wird es sogar der Zweck des Vorganges sein, diese Verschiedenheiten der Stoffzusammensetzung technisch auszunutzen.

Sobald in einem Gleichgewichtszustand mehrere Phasen auftreten, also z. B. Flüssigkeit und Dampf, macht man sich in der Thermodynamik Gedanken darüber, welche Zustandsgrößen für das „Phasengleichgewicht“ bestimmend sind. Da die Phasen hierbei ohne Rücksicht auf ihre Menge miteinander im Gleichgewicht stehen, kann es sich bei den maßgebenden Zustandseigenschaften nicht um Größen handeln, die von der Menge abhängig sind wie das Volumen oder der Wärmeinhalt. Auch scheiden solche Eigenschaften aus, die als spezifische Werte aus diesen Größen abgeleitet sind. Bei reinen Stoffen ist es bekanntlich die Temperatur, in der die Flüssigkeit und der Dampf übereinstimmen müssen, nachdem sie an sich schon an der Oberfläche unter dem gleichen Druck stehen. Bei Gemischen müssen außerdem die einzelnen Stoffkomponenten im Dampf den richtigen Partialdruck besitzen. Aus der Stabilität des Phasengleichgewichtes erkennt man leicht, daß die Temperaturdifferenzen und Partialdruckdifferenzen die treibenden Kräfte für einen Wärme- und Stoffaustausch abgeben. Die Wärmemengen und die Stoffkomponenten hingegen wirken nur als angetriebene oder passive Größen beim Austausch mit. Diese Vorstellung, die der Forderung gerecht wird, daß der Austausch beim Gleichgewicht halt macht, liegt nun auch tatsächlich der üblichen Berechnung des Wärme- und Stoffaustausches zugrunde. Wir werden aber erkennen, daß dies im allgemeinen unzulässig ist. Einerseits ist die naheliegende Folgerung ungenau, daß die Temperaturdifferenzen nur die Wärmeleitung und daß die Partialdruckdifferenzen nur die Diffusion beeinflussen. Andererseits sind die Partialdrücke nur bei vollkommenen Gasen einfach bestimmbar, so daß man schon aus praktischen Gründen die Partialdruckdifferenzen durch die Konzentrationsdifferenzen der Stoffe ersetzt. Ganz entgegen dieser Vorstellung erhält man nämlich die vorteilhafteste Darstellung des Wärme-

und Stoffaustausches, wenn man nach R. Mollier nicht die treibenden Kräfte sondern gerade die angetriebenen Größen des Austausches zu den Koordinaten eines Diagrammes macht. Beim turbulenten Austausch leuchtet dies sehr schnell ein, wenn man bedenkt, daß hier die Turbulenz selbst oder die Wirbel die eigentlichen treibenden Kräfte werden, während sich das Gemisch ganz passiv das Verrühren gefallen lassen muß. Aber auch der laminare Austausch ist in einem derartigen Diagramm einfacher zu behandeln, weil er von der Konvektion nicht eindeutig zu trennen ist. Und bei der Konvektion werden auch nur diejenigen Eigenschaften benötigt, die sich passiv mit an andere Orte schleppen lassen. Nach einer allgemeinen Erläuterung der Mollierschen Diagramme für Zweistoffgemische im I. Kapitel wird daher im II. Kapitel zunächst der thermodynamisch einfachere turbulente Austausch behandelt. Darauf folgt im III. Kapitel der laminare Austausch oder die eigentliche Wärmeleitung mit Diffusion.

## Erstes Kapitel.

### Räumliche und ebene Darstellungen von Zweistoffgemischen.

§ 2. Der Gesamtwert eines Zweistoffgemisches. Da alle hier zu betrachtenden Vorgänge sich unter konstantem Druck, also etwa dem Druck der Atmosphäre, abspielen sollen, ist ein Gemisch aus den beiden Stoffen  $A$  und  $B$  schon dann völlig eindeutig bestimmt, wenn man die Stoffmengen  $A$  und  $B$  kennt, die zu dem Gemisch verrührt sind, und wenn man außerdem noch den gesamten Wärmehalt  $I$  (Gleichdruckwärme, Enthalpie) des Gemisches kennt, der sich aus den

Ursprungswärmehalten  $I_a$  und  $I_b$  der beiden Stoffe vor der Mischung und etwa noch der Wärmemenge  $Q$  ergibt, die man dem Gemisch außerdem zugeführt hat:  $I = I_a + I_b + Q$ . Wählt man daher diese drei Bestimmungsstücke  $A$ ,  $B$  und  $I$  als Koordinaten einer

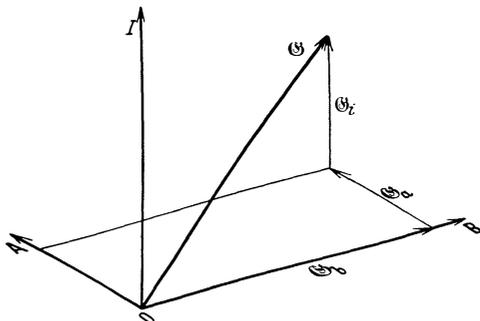


Abb. 1. Gesamtwert eines Zweistoffgemisches.

räumlichen Darstellung, so wird jedes mögliche Gemisch dieser beiden Stoffe durch einen Punkt des Raumes  $A$ - $B$ - $I$  dargestellt (Abb. 1). Die gerichtete Strecke, die den Koordinatenanfangspunkt  $0$  mit dem Bildpunkt eines Gemisches in diesem Raume verbindet, soll als der „Gesamtwert“ dieses Gemisches bezeichnet werden. Der Gesamtwert hat demnach längs der drei Achsen die Komponenten  $A$ ,  $B$  und  $I$ . Diese drei Komponenten haben völlig voneinander verschiedene Dimensionen, denn für die Herstellung eines Zweistoffgemisches ist es ja gerade wesentlich, daß eine gewisse Menge  $A$  durch keine einzige Menge  $B$  vollwertig ersetzt werden kann. Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, sollen die abgewogenen Mengen  $A$  und  $B$  nicht die gemeinsame Dimension  $\text{kg}$  erhalten, sie sollen vielmehr durch  $\text{kg-A}$  und  $\text{kg-B}$  unterschieden werden, während der Wärmehalt  $I$  an sich schon in der völlig verschiedenen Dimension  $\text{kcal}$  gemessen

wird. Bei der Vermischung zweier Teilgemische zu einem Gesamtgemisch bleibt jede dieser drei völlig verschiedenen Größen  $\text{kg-A}$ ,  $\text{kg-B}$  und  $\text{kcal}$  nach dem Satze der Erhaltung der Masse bzw. der Erhaltung der Energie für sich in der Summe erhalten, so daß sich die gleichartigen Komponenten der Teilgemische zu den drei Komponenten des Gesamtgemisches addieren.

Die Vermischung von Teilgemischen zu einem Gesamtgemisch ist der wesentliche Vorgang beim turbulenten Austausch. Um nun für diesen einfachen Vorgang auch eine einfache Anschauung und Bezeichnung zu erhalten, wollen wir uns erinnern, daß man gerichtete Größen

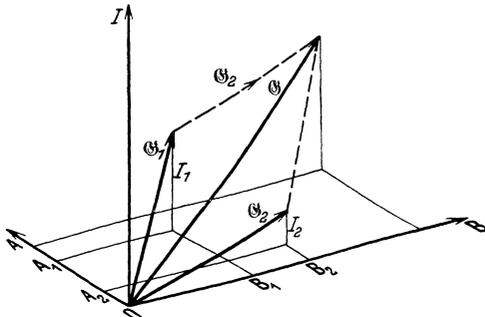


Abb. 2. Vermischung von  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  zu  $\mathcal{G}$ .

im Raume, sogenannte Vektoren, geometrisch so addiert, daß man sie parallelverschoben aneinanderfügt (Parallelogramm der Kräfte) oder, was dasselbe ist, daß man ihre Komponenten in Richtung von drei rechtwinkligen oder schiefwinkligen Achsen zu den Komponenten der Summe (Re-

sultierenden) addiert. Wir bezeichnen nun den Gesamtwert eines Gemisches mit  $\mathcal{G}$  entsprechend der üblichen Schreibweise der Vektoren in deutschen Buchstaben. Seine Komponenten in Richtung unserer drei Achsen sind

$$\mathcal{G}_a = A, \quad \mathcal{G}_b = B \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_i = I. \quad (1)$$

Ist  $\mathcal{G}$  durch die Vermischung zweier Teilgemische mit den Gesamtwerten  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  entstanden, so drücken wir dies aus durch die Vektorgleichung

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2, \quad (2)$$

die lediglich eine abgekürzte Schreibweise für die Aussage ist, daß  $\mathcal{G}$  die geometrische Summe von  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  bedeutet und daß ihre Komponenten die Gleichungen erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}_a &= \mathcal{G}_{1a} + \mathcal{G}_{2a} = A_1 + A_2 \\ \mathcal{G}_b &= \mathcal{G}_{1b} + \mathcal{G}_{2b} = B_1 + B_2 \\ \mathcal{G}_i &= \mathcal{G}_{1i} + \mathcal{G}_{2i} = I_1 + I_2. \end{aligned} \right\} (2a)$$

Die anschauliche Bedeutung dieser Gleichungen ist aus Abb. 2 zu entnehmen. Da ein Gemisch eindeutig durch seine Wärme- und Stoffmengen bestimmt ist, ergibt diese räumliche Darstellung sicher die übersichtlichste Aufstellung der Wärme- und Stoffbilanzen.



Mengeneinheit verschiedenen Mengen liegen dann außerhalb dieser Ebene und zwar so, daß zu der Projektionsebene parallele Ebenen stets Gemische von gleicher Menge enthalten. Bezeichnet man also die Gemischmenge mit  $G$ , so kann sie aus der Gleichung

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \iota \cdot I = G \quad (3)$$

entnommen werden, denn für festgehaltene Werte  $G$  ergeben sich parallele Ebenen zur ursprünglichen Projektionsebene. Als Projektionsebene und daher als Diagrammebene wird man diejenige Ebene wählen, in der die Gemischmenge gleich der Gemischmengeneinheit ( $GE$ ) ist:

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \iota \cdot I = 1 GE. \quad (4)$$

Die verschiedenen Arten der Mollierschen Zweistoffdiagramme unterscheiden sich noch hinsichtlich der Lage der Diagrammebene im Gemischraum. In jeder Diagrammart wird daher die Gemischmenge einen anderen Wert bekommen. Um hieran zu erinnern, wollen wir  $G$  deutlicher als „Diagrammgewicht“ eines Gemisches bezeichnen, d. h. den zu einem ganz bestimmten Diagramm gehörenden Wert  $G$ . Gebräuchlich sind folgende Diagrammarten geworden:

1. Das Gewichts-Diagramm (Massen-Diagramm). Die Bezeichnung Diagrammgewicht erinnert schon daran, daß man als Maß für die Gemischmenge etwas Ähnliches zu wählen hat wie das Gewicht des Gemisches auf einer Waage. Man kann dies sogar wirklich erreichen und als Diagrammgewichtseinheit das kg erhalten, wenn man die Faktoren  $\alpha$  und  $\beta$  gleich 1 und  $\iota$  gleich 0 setzt. Ist man etwas strenger in den Dimensionen, so ergeben sich in diesem Falle folgende Werte für die Faktoren:

$$\alpha = 1 \frac{\text{kg}}{\text{kg} \cdot A}, \quad \beta = 1 \frac{\text{kg}}{\text{kg} \cdot B}, \quad \iota = 0. \quad (5)$$

Setzt man nämlich diese Werte in die Gl.(3) ein, so ergibt sich als Diagrammgewicht genau das Eigengewicht des Gemisches.

2. Das Mol-Diagramm. Bei Gasgemischen vertreten sich die Stoffe  $A$  und  $B$  in mancher Hinsicht so, daß ein Molekül des Stoffes  $A$  durch ein Molekül des Stoffes  $B$  ersetzt werden kann. Ergeben sich dadurch Vereinfachungen, so wird man die Stoffmengen nicht nach den Gewichten sondern nach den Mol-Gewichten messen. Als Diagrammgewichtseinheit  $GE$  ergibt sich in diesem Fall das kg-Mol. Hat nun der Stoff  $A$  das Molekulargewicht  $\mu_a$ , entsprechend der Stoff  $B$  das Molekulargewicht  $\mu_b$ , so sind jetzt folgende Faktoren anzuwenden:

$$\alpha = \frac{1}{\mu_a} \frac{\text{kg} \cdot \text{Mol}}{\text{kg} \cdot A}, \quad \beta = \frac{1}{\mu_b} \frac{\text{kg} \cdot \text{Mol}}{\text{kg} \cdot B}, \quad \iota = 0. \quad (5a)$$

3. Das  $i$ - $x$ -Diagramm. In diesem von Mollier zuerst angegebenen Diagramm wird die eine Stoffkomponente ( $A$ ) ganz besonders verfolgt,

während die andere Stoffkomponente ( $B$ ) als Beimischung betrachtet wird. Man zählt daher im Diagrammgewicht überhaupt nur die Menge  $A$ , während die Menge des Stoffes  $B$  genau wie die zugeführte Wärmemenge nicht im Diagrammgewicht erscheinen. Das Diagrammgewicht hat also die Einheit  $\text{kg}\cdot A$  und die Faktoren erhalten die Werte

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \iota = 0. \quad (5b)$$

Dieses Diagramm eignet sich z. B. für die Behandlung feuchter Luft, wenn man die trockene Luft als die Stoffkomponente  $A$  und Wasser bzw. Wasserdampf als die Stoffkomponente  $B$  einführt. Man kann dann bequem Luftmengen verfolgen, die sich mit Wasser beladen oder die das Wasser herausregnen lassen. In der Literatur hat diese Diagrammart als „ $i$ - $x$ -Diagramm für Dampf-Luft-Gemische“ Eingang gefunden.

In der Diagrammebene oder der Ebene der Diagrammgewichteinheit  $G = 1 GE$  gehen die Komponenten  $A$ ,  $B$  und  $I$  der hier verzeichneten Gemische direkt in die bezogenen oder „spezifischen“ Werte  $a = A/G$ ,  $b = B/G$  und  $i = I/G$  über. Da alle bisher benutzten Diagramme parallel zur  $I$ -Achse verlaufen, kann man die Ordinaten dieser Diagramme direkt als den spezifischen Wärmeinhalt  $i$  bezeichnen. Für die Abszissen haben sich dagegen verschiedene Bezeichnungen eingebürgert. Im Gewichtsdiagramm heißt die Abszisse  $\xi$ , sie erfüllt die Beziehung  $\xi = \beta \cdot b$ . Im Mol-Diagramm nennt man sie  $\psi$  mit der Bestimmungsgleichung  $\psi = \beta \cdot b$ . Die Abszisse  $x$  des  $i$ - $x$ -Diagrammes ist dagegen gegeben durch die Gleichung  $x = b = B/G = B/A$ . Streng genommen wäre es richtiger, auch die Ordinaten in den einzelnen Diagrammen verschieden zu bezeichnen, weil die Bezugsgröße  $G$  für den Wärmeinhalt selbst von der Diagrammart abhängt. Sollte dies eine Rolle spielen, so wollen wir die Unterscheidung durch Indices vornehmen (vgl. Abb. 3).

**§ 4. Addition von Gemischen.** Die handlichere Darstellung der Zweistoffgemische in ebenen Zustandsdiagrammen statt im Gesamtwertsraum ist gewonnen auf Kosten der Einfachheit in der Veranschaulichung einer Vermischung von Teilgemischen zu einem Gesamtgemisch. Nach Gl.(2) bedeutet diese Vermischung eine geometrische Addition (s. Abb. 2), weil man dadurch alle drei Komponenten zugleich berücksichtigen kann. Im ebenen Diagramm zerfällt der Gesamtwert jedes Gemisches in einen Zustandspunkt  $P$  und einen Zahlenwert  $G$ , das Diagrammgewicht des Gemisches. Man muß daher teils rechnerisch, teils zeichnerisch aus den Werten  $G_1$  und  $G_2$  und den Zustandspunkten  $P_1$  und  $P_2$  der Teilgemische den Wert  $G$  und den Zustandspunkt  $P_s$  ihrer Gemischsumme finden können. Es ergibt sich dabei die Beziehung  $G = G_1 + G_2$ , und  $P_s$  ist der Schwerpunkt von  $P_1$  und  $P_2$ , wenn man in  $P_1$  das Gewicht  $G_1$  und in  $P_2$  das Gewicht  $G_2$  angebracht denkt. Es ergibt sich also immer noch eine recht einfache Mischungsregel, die wir analytisch ableiten wollen. Zu diesem Zweck wählen wir noch einen be-

liebigen Zustandspunkt  $P_0$  als Pol, von dem aus wir die gerichteten Strecken  $\delta_1, \delta_2$  und  $\delta_s$  nach den Punkten  $P_1, P_2$  und  $P_s$  ziehen, mit denen wir die Lage der Punkte beschreiben können (vgl. Abb. 5).

Um den Bildpunkt und das Diagrammgewicht  $G$  in Beziehung zum

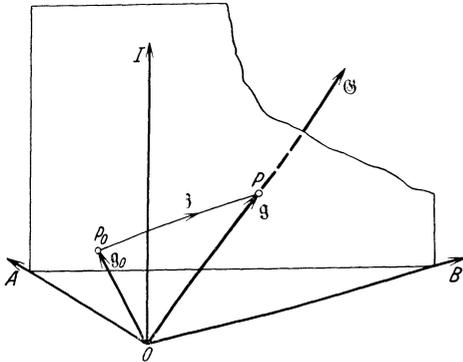


Abb. 4. Radiusvektor im Zustandsdiagramm.

Gesamtwert  $\mathcal{G}$  eines Gemisches zu setzen, wollen wir uns an Hand von Abb. 4 klarmachen, daß der Gesamtwert  $\mathcal{G}$  gerade  $G$ mal länger ist als der Gesamtwert eines gleichartigen Gemisches vom Diagrammgewicht 1, dessen Endpunkt in der Diagrammebene liegt und den wir mit  $g$  bezeichnen wollen:

$$\mathcal{G} = G \cdot g. \quad (6)$$

Nach jedem Zustandspunkt des ebenen Diagrammes zeigt ein solches Einheitsgemisch  $g$  vom Punkte 0 des Gemischraumes aus, und man erkennt in Abb. 4, daß das Einheitsgemisch  $g$  gerade die geometrische Summe vom Einheitsgemisch  $g_0$  und dem Radiusvektor  $\delta$  im Diagramm darstellt

$$g = g_0 + \delta. \quad (7)$$

Man kann daher jeden Gesamtwert nach Gl. (6 u. 7) in der Form schreiben

$$\mathcal{G} = G (g_0 + \delta). \quad (7a)$$

Geschieht dies mit sämtlichen Gesamtwerten, die in Gl. (2) vorkommen (Abb. 5), so findet man

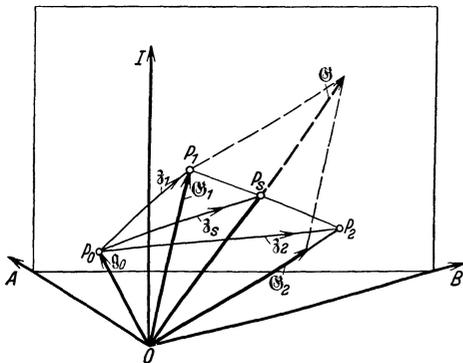


Abb. 5. Vermischung im Diagramm.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 &= G_1 (g_0 + \delta_1) + G_2 (g_0 + \delta_2) \\ &= (G_1 + G_2) g_0 + G_1 \delta_1 + G_2 \delta_2 \\ &= (G_1 + G_2) (g_0 + \delta_s) = \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Das Gesamtgemisch  $\mathcal{G}$  erhält also ein Diagrammgewicht  $G$  und einen Radiusvektor im Diagramm  $\delta_s$ , die die Gleichungen erfüllen:

$$G = G_1 + G_2. \quad (8)$$

$$(G_1 + G_2) \delta_s = G_1 \delta_1 + G_2 \delta_2. \quad (9)$$

In der Tat ist also  $G$  die Summe der Teilgewichte und  $P_s$  ist der Schwer-

punkt von  $P_1$  und  $P_2$  unter Berücksichtigung der Teilgewichte  $G_1$  und  $G_2$  in diesen Punkten.

Die geometrische Addition der Gesamtwerte im Raume verwandelt sich durch die Zentralprojektion in den Ersatz zweier Gewichte durch die Gewichtssumme im Schwerpunkt. Entsprechend ist die geometrische Subtraktion, d. h. die Addition mit geändertem Richtungssinn einzelner Summanden, zu behandeln. Man gelangt auf diese Weise auch zu einer Schwerpunktermittlung, doch sind dann positive und negative Gewichte zu beachten. Will man nun in Gl. (9) die Bezeichnung der Zustandspunkte durch die Vektoren  $\mathfrak{z}$  vermeiden, so kann man auch deren Komponenten nehmen, die mit der Abszisse und der Ordinate des Diagrammes zusammenfallen, wenn man den Pol  $P_0$  in den Koordinatenanfangspunkt des Diagrammes legt. Als Bezeichnung der Koordinaten mögen die Buchstaben  $i$  und  $x$  nach dem ersten Mollierschen  $i$ - $x$ -Diagramm gewählt werden, ohne daß die angegebenen Beziehungen auf diese Diagrammart beschränkt wären:

$$G = G_1 + G_2, \quad (8)$$

$$G i_s = G_1 i_1 + G_2 i_2, \quad (9a)$$

$$G x_s = G_1 x_1 + G_2 x_2. \quad (9b)$$

Mit diesen drei Gleichungen ist der Anschluß an die ursprüngliche Molliersche Darstellung erreicht, denn diese drei Gleichungen lassen sich ohne weiteres als Mengenbilanz, Wärmebilanz und Zusammensetzungsbilanz des Gemisches deuten. Die räumliche Darstellung geht aber insofern darüber hinaus, als man aus ihr erkennt, welche Änderungen bei einem Wechsel der Diagrammart eintreten.

**§ 5. Stromstärke, Stromdichte.** Die Zentralprojektion, durch die die ebenen Diagramme gewonnen werden, verdeckt gewisse Zusammenhänge. Aus diesem Grunde lassen sich einige Begriffe leichter im Raume als in der Zustandsebene bilden. Ändert sich z. B. der Gesamtwert  $\mathcal{G}$  des Gemisches in einem betrachteten Volumen mit der Zeit, so bewegt sich das Bild dieses Gesamtwertes im Gemischraum. Die Änderung des Gemisches im betrachteten Volumen kann aber nur dadurch entstehen, daß durch die Oberfläche dieses Volumens Wärme- und Stoffmengen hindurchtreten. Nennt man die in der Zeiteinheit durch die Oberfläche hindurchtretenden Mengen die Stärke des Wärme- und Stoffstromes, so wird die Wanderungsgeschwindigkeit eines Gesamtwertes gleichbedeutend mit einer Stromstärke. Diese Gleichwertigkeit ist auch einleuchtend, weil man an einem Strom durch eine Fläche  $F$  drei ganz entsprechende Komponenten unterscheiden kann, nämlich die in der Zeiteinheit hindurch gelangenden Stoffmengen  $A$  und  $B$  und die Wärmemengen  $I$ . Zählt man nun als positive Stromstärke die von innen nach außen durch die Oberfläche gelangenden Mengen, so entsprechen sie

gerade der Abnahme des im Inneren befindlichen Gemisches  $\mathcal{G}$ . Demnach gilt mit  $t$  als Zeit folgende Beziehung für die Stromstärke  $\mathfrak{H}$  durch die gesamte Oberfläche

$$\mathfrak{H} = - \frac{d \mathcal{G}}{d t} . \tag{10}$$

$\mathfrak{H}$  hat folgende Komponenten [s. Gl.(1)]

$$\mathfrak{H}_a = - \frac{d A}{d t} , \quad \mathfrak{H}_b = - \frac{d B}{d t} , \quad \mathfrak{H}_i = - \frac{d I}{d t} . \tag{10 a}$$

Verteilt man aber die Stromstärke  $\mathfrak{H}$  an der Oberfläche auf die einzelnen Oberflächenelemente  $dF$ , so gelangt man zum Begriff der Stromstärke der Flächeneinheit, der sogenannten „Stromdichte“. Für die Stromdichte  $\mathfrak{J}$  ergibt sich demnach

$$\mathfrak{H} = \int \mathfrak{J} \cdot dF = - \frac{d \mathcal{G}}{d t} . \tag{11}$$

Die Stromstärke in der Zeiteinheit oder die Stromdichte in der Zeiteinheit und auf der Flächeneinheit bilden nun nach Gl.(11) Größen, die den Gesamtwerten von Gemischen gleichwertig sind und sich als gerichtete Strecken im Gemischraum darstellen lassen (Abb. 6). Ein grundsätzlicher Unterschied besteht nur darin, daß ein Gemisch stets im Zustand inniger Vermischung vorzustellen ist, so daß den Richtungen  $g$  der Gemische  $\mathcal{G}$  immer gewisse thermische Eigenschaften

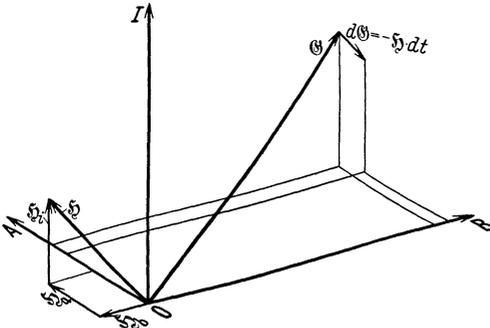


Abb. 6. Gesamtwert eines Wärme- und Stoffstromes.

zugeordnet sind. Diese Zustandseigenschaften gelten nicht ohne weiteres für den Strom. Im allgemeinen fällt der Strom nur rein bilanzmäßig in irgendeine Richtung, und die Ströme sind nicht einmal auf diejenigen Richtungen beschränkt, in denen wir reale Gemische finden. Für Gemische müssen nämlich immer positive Mengen  $A$  mit positiven Mengen  $B$  vermischt werden, auch ist der Wärmeinhalt  $I$  nach unten begrenzt, so daß die Gemische nur etwa ein Achtel des ganzen Gemischraumes ausfüllen. Die Stromstärken zählen dagegen strömende Mengen mit beliebigen Vorzeichen, so daß wirklich alle Richtungen möglich sind. Hat man es aber zufällig mit einem sogenannten Konvektionsstrom zu tun, strömt also ein Gemisch mit einheitlicher Geschwindigkeit durch eine Fläche  $F$ , dann stimmen die bilanzmäßigen Mengenverhältnisse des Stromes genau mit

der Zusammensetzung des Gemisches überein. In diesem Falle hat je nach der Richtung der Geschwindigkeit die positive oder negative Stromstärke  $\mathfrak{S}$  dieselbe Richtung wie das Gemisch  $\mathfrak{G}$  selbst.

Trägt man nun eine beliebige Stromstärke oder Stromdichte vom Koordinatenanfangspunkt 0 aus auf (vgl. Abb. 6), so trifft sie selbst oder ihre positive bzw. negative Verlängerung stets einen Punkt der Diagrammebene, wenn man an eine unendlich ausgedehnte Ebene denkt. Dies ist der Bildpunkt des Stromes in der Mollierschen Zustandsebene. Außer diesem Bildpunkt ist noch ein Betrag  $H$  oder  $J$  nötig, der das Diagrammgewicht des Stromes angibt, das in der Zeiteinheit durch die Fläche gelangt. Der Bildpunkt des Stromes kann nun sowohl im Inneren des eigentlichen Zustandsgebietes liegen, er kann aber auch über die Grenzen des Zustandsgebietes hinausfallen. Hierdurch wird der Rahmen eines einfachen Zustandsdiagrammes gesprengt, und die ganze Diagrammebene erhält bei sinngemäßer Erweiterung der Koordinaten des Zustandsdiagrammes auf negative Mengenteile überall verschiedene Wärme- und Stoffzusammensetzungsverhältnisse. Bezeichnet man den Bildpunkt des Stromes durch seine Koordinaten  $i_h, x_h$  bzw.  $i_j, x_j$  oder durch seinen Radiusvektor  $\mathfrak{z}_h$  bzw.  $\mathfrak{z}_j$ , so läßt sich die Gl. (11) nach den Gl. (8 u. 9 oder 9a u. 9b) aus dem Gemischraum in die Diagrammebene übertragen. Man erhält so

$$H = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} = - \frac{dG}{dt} \quad (12)$$

$$H \cdot \mathfrak{z}_h = \int \mathbf{J} \cdot \mathfrak{z}_j \cdot d\mathbf{F} = - \frac{d}{dt} (G \mathfrak{z}) = - \mathfrak{z} \frac{dG}{dt} - G \frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

Bringt man in der letzten Gleichung das erste Glied der rechten Seite auf die linke Seite, indem man es vorher mit Hilfe der ersten Gleichung umformt, so wird daraus

$$H (\mathfrak{z}_h - \mathfrak{z}) = \int \mathbf{J} (\mathfrak{z}_j - \mathfrak{z}) \cdot d\mathbf{F} = -G \frac{d\mathfrak{z}}{dt}. \quad (13)$$

In Komponenten geschrieben heißt die letzte Gleichung

$$H (i_h - i) = \int \mathbf{J} (i_j - i) \cdot d\mathbf{F} = -G \frac{di}{dt}, \quad (13a)$$

$$H (x_h - x) = \int \mathbf{J} (x_j - x) \cdot d\mathbf{F} = -G \frac{dx}{dt}. \quad (13b)$$

Der Austritt einer Stromstärke  $\mathfrak{S}$  aus einem Raume mit dem Gemisch  $\mathfrak{G}$  läßt sich hiernach im Diagramm als eine Schwerpunktwanderung deuten, die dadurch entsteht, daß man im Punkte  $i_h, x_h$  in der Zeiteinheit eine Menge vom Gewicht  $-H$  aufschüttet. Bleibt der Punkt  $i_h, x_h$  dauernd derselbe, so ändert sich das Moment des jeweiligen Gesamtgewichtes  $G$  in bezug auf diesen Punkt nicht:  $\mathfrak{M} = G (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_h) = \text{konst.}$

§ 6. Austausch im Gleich- oder Gegenstrom. Die Bedeutung der Stromstärken und Stromdichten sowie der Konvektionsströme können wir an einem Beispiel erkennen, das zugleich die häufigste technische Anordnung zeigt, mit der man es beim Wärme- und Stoffaustausch zu tun hat. In Abb. 7 ist ein Kanal mit wärme- und stoffundurchlässigen Wänden dargestellt, in dem übereinander zwei Ströme  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  fließen, die sich dadurch unterscheiden mögen, daß der eine ein Dampf, der andere eine Flüssigkeit ist. Die Ströme berühren einander in der Austauschfläche  $F$ . Zwischen zwei benachbarten Querschnitten des Kanales liegt ein Flächenelement  $dF$ , durch das ein Austauschstrom von der Strom-

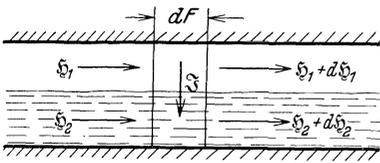


Abb. 7. Austausch zwischen zwei Strömen.

dichte  $\mathfrak{S}$  vom Strom 1 zum Strom 2 geht. Beim stationären Betrieb der Austauschanlage wird durch folgende Flächen, die obere Kanalwand, die beiden oberen Querschnittshälften und durch die Austauschfläche  $dF$ , ein Volumen aus dem oberen Strom ausgeschnitten, dessen Inhalt dem

Gesamtwerte nach keine zeitlichen Änderungen mehr erfahren darf. Nach Gl. (11) muß dann die Summe sämtlicher durch diese Flächen austretenden Ströme verschwinden. Dasselbe gilt für den darunter befindlichen Ausschnitt aus dem zweiten Ströme. Man erhält daher

$$\begin{aligned} -\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S} \cdot dF + (\mathfrak{S}_1 + d\mathfrak{S}_1) &= 0, \\ -\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S} \cdot dF + (\mathfrak{S}_2 + d\mathfrak{S}_2) &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$d\mathfrak{S}_1 = -\mathfrak{S} \cdot dF = -d\mathfrak{S}_2 \tag{14}$$

und

$$d\mathfrak{S}_1 + d\mathfrak{S}_2 = 0. \tag{15}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich auch aus der Betrachtung des ganzen zwischen beiden Querschnitten liegenden Volumens und ist nur ein Ausdruck für die Wärme- und Stoffundurchlässigkeit der Kanalwände. Ihr Integral

$$\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \text{konst.} = \mathfrak{S}. \tag{15 a}$$

besagt, daß durch alle Querschnitte des Kanales derselbe Gesamtstrom fließen muß. Der gesamte Strom  $\mathfrak{S}$  wird daher auch als „Querschnittsstrom“ bezeichnet.

Um den Vorgang berechnen zu können, erlaubt sich der Ingenieur einige Vereinfachungen (hydraulische Auffassung), die darin bestehen, daß die Ströme  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  in jedem Querschnitt als Konvektionsströme angenommen werden sollen. Dies bedeutet, daß man den Austauschstrom  $\mathfrak{S}$  sofort über den ganzen Querschnitt verteilt annimmt und daß

aus den Zustandsunterschieden desselben Stromes in aufeinanderfolgenden Querschnitten keine Längsaustauschströme entstehen sollen. Sobald die Ströme  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  aber reine Konvektionsströme sind, kommt ihrer positiven oder negativen Richtung im Gemischraum ein bestimmter Gemischzustand zu. Auf Grund dieser Annahme weiß man nun also, welche Gemischzustände sich in beiden Kanalhälften gegenüberstehen. Es wird die Aufgabe der weiteren Kapitel sein, aus dem Zustandsunterschied und der Leitfähigkeit oder der Wirblichkeit der Ströme die Austauschstromdichte  $\mathfrak{J}$  quantitativ zu bestimmen. Hier wollen wir uns damit begnügen, die Zuordnung eines Zustandes zu dem Strom  $\mathfrak{S}_1$  bzw.  $\mathfrak{S}_2$  symbolisch auszudrücken. Geht die Strömung in beiden Strömen wirklich in der für  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  als positiv angenommenen Richtung (Gleichstrom), so entspricht der positiven Stromrichtung ein Zustand  $g_1$  bzw.  $g_2$ , der durch die Richtung  $h_1$  bzw.  $h_2$  der Ströme festgelegt ist. Hat dagegen ein Strom in Wirklichkeit die umgekehrte Richtung (Gegenstrom), so ist der Zustand der umgekehrten Richtung zugeordnet. Es gilt daher

$$\left. \begin{aligned} \text{Zust}(\pm \mathfrak{S}_1) &= \pm h_1 = g_1, \\ \text{Zust}(\pm \mathfrak{S}_2) &= \pm h_2 = g_2. \end{aligned} \right\} (16)$$

Im ebenen Zustandsdiagramm geben die Bildpunkte  $i_{h_1}, x_{h_1}$  und  $i_{h_2}, x_{h_2}$  direkt die Zustände der Ströme in dem betreffenden Querschnitt an. Gemeinsam für alle Querschnitte besteht aber nach Gl. (15a) noch der Bildpunkt  $i_h, x_h$  des Querschnittsstromes, der allerdings kein Konvektionsstrom ist. Bei Gleichstrom haben die beiden Stromstärken  $H_1$  und  $H_2$  gleiches Vorzeichen, daher muß der Bildpunkt des Querschnittsstromes im Innern der Verbindungsstrecke der Bildpunkte beider Teilströme liegen. Bei Gegenstrom haben die Stromstärken jedoch verschiedenes Vorzeichen und der Bildpunkt des Querschnittsstromes liegt auf dem äußeren Teil der Verbindungsgeraden der beiden Bildpunkte der Teilströme. Beim Gegenstrom kann daher der Bildpunkt des Querschnittsstromes auch außerhalb des realen Zustandsgebietes liegen.

**§ 7. Zustand und Volumeneinheitsgemisch.** Im Gemischraum und im Mollierschen Zustandsdiagramm geschieht die Einordnung der Gemische nach ihrer bilanzmäßigen Zusammensetzung. An einem fertigen Gemisch wird man aber höchstens noch die Stoffzusammensetzung durch eine chemische Analyse bestimmen, während man statt des Wärmeinhaltes leichter die Temperatur des Gemisches messen kann. An jedem Zustandspunkt wird daher im Diagramm gewöhnlich die Temperatur  $\vartheta$  bzw. die absolute Temperatur  $T$  vermerkt, die einmal durch Versuch bestimmt werden muß. Bei diesem Versuch erfährt man neben der Temperatur auch gleich, ob das Gemisch flüssig oder dampfförmig ist, oder ob es zufällig in eine flüssige und eine dampfförmige Phase zerfällt.

Man wird daher im Zustandsdiagramm im allgemeinen ein Dampfgebiet, ein Flüssigkeitsgebiet und ein Sättigungsgebiet verzeichnet finden. Im Sättigungsgebiet zerfällt das Gemisch in eine siedende Flüssigkeit und einen gesättigten Dampf von gleicher Temperatur, die bei gleicher Beschaffenheit in jeder Menge miteinander im Gleichgewicht stehen würden. Daher sind die Isothermen im Sättigungsgebiet die geradlinigen Verbindungen

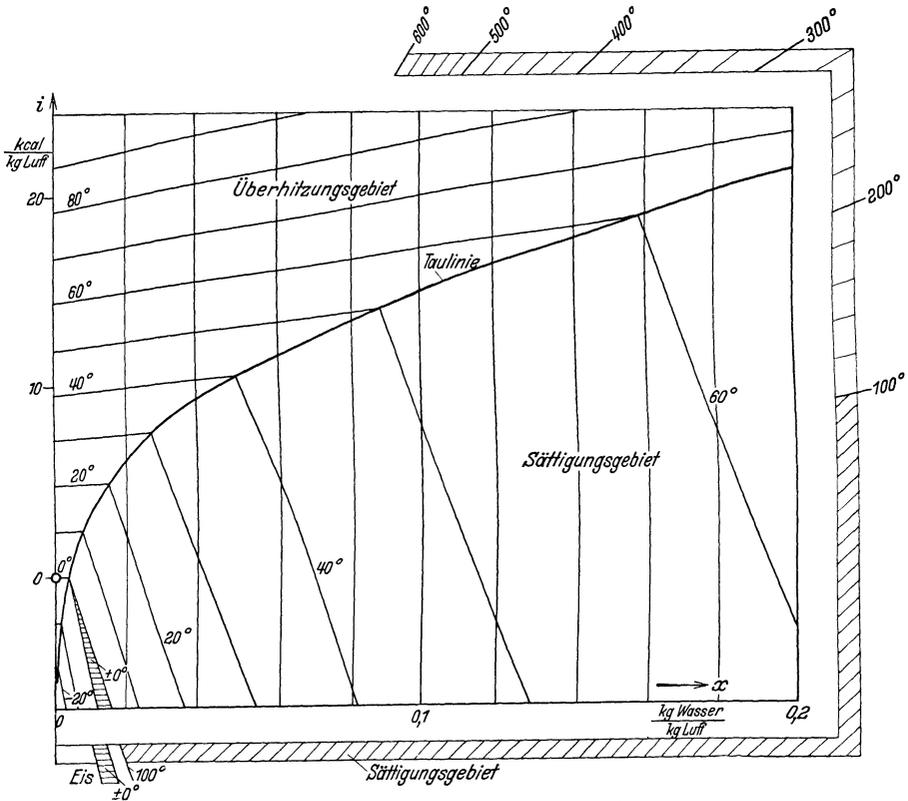


Abb. 8.  $i$ - $x$ -Diagramm für Dampf-Luft-Gemische.

dungen der siedenden Flüssigkeit auf der unteren Grenzlinie des Sättigungsgebietes und des trocken gesättigtem Dampfes auf der oberen Grenzlinie. Diese Linien werden auch als Siedelinie und als Kondensationslinie bzw. Taulinie bezeichnet. Da die Flüssigkeit bei nicht allzu großen Mengen im Vergleich zum Dampf auch in Form von Nebel im Dampfe verteilt sein kann, ist auch der Name Nebelgebiet für das Sättigungsgebiet gebräuchlich. Im Dampfgebiet werden die Isothermen nur dann geradlinig verlaufen, wenn auch der Dampf die Eigenschaften eines Gemenges aufweist, d. h. wenn das Daltonsche Gesetz gültig ist und die Teildämpfe sich wie vollkommene Gase verhalten.

Im Mollierschen  $i$ - $x$ -Diagramm (Abb. 8) sind die Isothermen im Dampfgebiet fast geradlinig. Unter der Taulinie, der Linie aller Taupunkte, befindet sich nur noch das Sättigungsgebiet mit selbstverständlich geradlinigen Isothermen. Das Flüssigkeitsgebiet fehlt, weil das Gebiet reiner Flüssigkeit nur reines Wasser darstellt und erst auf der unendlich fernen Geraden abgebildet ist. Da die Lage der Taulinie ziemlich stark vom gesamten Druck  $p$  abhängt, sind auch  $i$ - $x$ -Diagramme mit mehreren Taulinien gebräuchlich, denen dann verschiedene Drücke angeschrieben sind. Doch sollen hier grundsätzlich nur Vorgänge unter konstantem Druck  $p$  behandelt werden.

Für den turbulenten Mischungsvorgang ist es noch wichtig, das Volumen jedes Gemisches zu kennen. Da die Mengeneinheiten in jeder Diagrammart verschieden festgelegt werden, wollen wir zu-

nächst als eine eindeutige Angabe auf jedem Zustandsstrahl im Gemischraum denjenigen Gesamtwert bestimmen, der gerade die Volumeneinheit also z. B. ein  $m^3$  ausfüllt. Dieser Wert soll mit  $\mathcal{G}^*$  bezeichnet werden. Die Punkte aller dieser „Volumeneinheitsgemische“ bilden eine Fläche, die den Punkt 0 soweit einhüllt, als der Raumausschnitt der realen Gemische

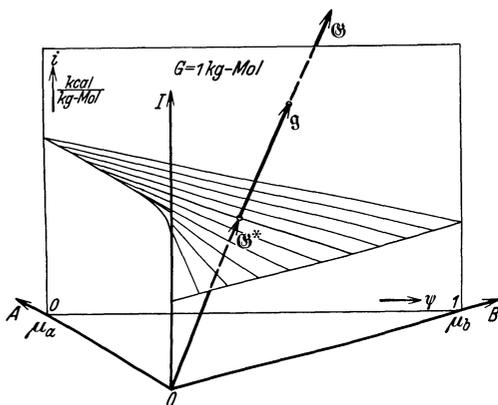


Abb. 9. Fläche der Volumeneinheitsgemische.

reicht. In einem besonders einfachen Fall ist die  $\mathcal{G}^*$ -Fläche eine Ebene, wenn man nämlich das Gemisch zweier vollkommener Gase betrachtet, die dem Daltonschen Gesetz gehorchen und die außerdem noch das gleiche Verhältnis der spezifischen Wärmen  $c_p/c_v$  besitzen. Mißt man in diesem Falle den Wärmeinhalt unter Annahme konstanter spezifischer Wärme vom absoluten Nullpunkt der Temperatur an, so ist dies eine Ebene von konstantem Wärmeinhalt  $I$ , für den beim Druck  $p$  die Beziehung gilt:

$$I = p \cdot \frac{c_p}{c_p - c_v} = \text{konst.}$$

(Dabei muß allerdings der Druck von  $1 \text{ kg/m}^2$  auf  $\frac{1}{427} \text{ kcal/m}^3$  umgerechnet werden.) Ist die Gleichheit des Verhältnisses der spezifischen Wärmen nicht erfüllt, so ergibt sich eine sattelförmig gekrümmte Fläche, die nur von den Ebenen durch die  $I$ -Achse und den Ebenen konstanten

Mol-Gewichtes der Gemische in Geraden geschnitten wird (Abb. 9). Allgemein kann aber die  $\mathcal{G}^*$ -Fläche jede beliebige Gestalt besitzen.

Geht man vom Gemischraum zu irgendeiner Diagrammebene über, so sind die Gesamtwerte  $\mathcal{G}^*$  durch Diagrammgewichte  $G^*$  zu bezeichnen, die jedem Zustandspunkt zugeordnet sind. Die Dimension der auf ein  $\text{m}^3$  bezogenen Diagrammgewichte ist  $GE/\text{m}^3$ . Je nach der Art des Diagrammes ist die Berechnung der Gemischmenge  $G$  verschieden, daher werden auch die Gemische  $\mathcal{G}^*$  verschieden bewertet, die in einem  $\text{m}^3$  Platz haben. Der reziproke Wert  $V^* = 1/G^*$  mit der Dimension  $\text{m}^3/GE$  gibt das Volumen der Diagrammgewichtseinheit an, er ist also das Volumen der im Zustandsdiagramm abgebildeten Gemische. Beim Gewichtsdiagramm, in dem alle Gemische vom Gewicht 1 kg verzeichnet sind, ist  $V^*$  das spezifische Volumen  $v$ , ebenso ist  $G^*$  gleich dem spezifischen Gewicht  $\gamma$  des Gemisches. In allen anderen Diagrammen sind aber die spezifischen Diagrammgewichte  $G^*$  wohl zu unterscheiden von den spezifischen Gewichten  $\gamma$ , die man braucht, wenn man den Auftrieb der Gemische im Erdschwerefeld berechnen will. So ist dieser Unterschied z. B. im  $i$ - $x$ -Diagramm zu beachten, wo in  $G^*$  nur die trockene Luft gezählt wird, die in einem  $\text{m}^3$  Gemisch enthalten ist, während in  $\gamma$  natürlich auch das Gewicht des Wasserdampfes berücksichtigt wird. Hierbei gilt allgemein:

$$\text{im Gewichtsdiagramm } \gamma = G^*,$$

$$\text{im Mol-Diagramm } \gamma = G^* \left[ \mu_a + \psi (\mu_b - \mu_a) \right] \frac{\text{kg}}{\text{kg-Mol}},$$

$$\text{im } i\text{-}x\text{-Diagramm } \gamma = G^* \left( 1 \frac{\text{kg}}{\text{kg} \cdot A} + x \frac{\text{kg}}{\text{kg} \cdot B} \right).$$

**§ 8. Der Gesamtwert einfacher Stoffe.** Einfache Stoffe sind bereits durch die Stoffkomponenten  $A$  oder  $B$  der Zweistoffgemische und deren Gesamtwerte in den Ebenen  $I\text{-}A$  oder  $I\text{-}B$  unseres Gemischraumes dargestellt. Da der Name des einfachen Stoffes keine Rolle im Diagramm mehr spielt, soll die Stoffmenge gleich durch ihr Gewicht  $G$  bezeichnet werden, so daß das Gesamtwertsdiagramm des einfachen Stoffes durch eine  $I\text{-}G$ -Ebene dargestellt wird. Genau wie im Gemischraum haben auch in der  $I\text{-}G$ -Ebene alle Strahlen vom Koordinatenanfangspunkt 0 aus den gleichen Zustand, und es ändert sich mit der Entfernung von 0 nur die Stoffmenge. Die verschiedenen Zustände allein könnte man schon auf einer einzigen Geraden auftragen. Wählt man hierfür etwa die Gerade  $G = 1 \text{ kg}$ , so entspricht dies dem Ersatz des Gemischraumes durch ein Zustandsdiagramm. Auch hier wird man die Länge der Geraden durch den spezifischen Wärmehalt  $i$  ausmessen, der mit dem gesamten Wärmehalt  $I$  auf der Geraden gleichwertig ist. Auf jedem Zustandsstrahl kann man nun wieder das Volumeneinheitsgemisch aufsuchen, dessen Stoffmenge  $G^*$  zugleich das spezifische Gewicht des Zu-

standes ist, weil hier die Stoffmenge durch das wirkliche Gewicht gemessen wird. Die Punkte  $\mathcal{G}^*$  auf den Strahlen bilden eine  $\mathcal{G}^*$ -Linie oder  $\gamma$ -Linie. Bei Flüssigkeiten ändert sich das Volumen gewöhnlich sehr wenig mit der Temperatur, so daß im Flüssigkeitsgebiet der Wert  $G^*$  nahezu konstant ist. Bei vollkommenen Gasen ergibt sich eine Gerade parallel zur Temperaturlinie  $\vartheta = -273^\circ \text{C}$ , die die  $I$ -Achse in dem Werte  $I$  schneidet, der auf S. 17 für Gemische angegeben ist (Abb. 10).

Man kann nun das Molliersche  $i$ - $x$ -Diagramm als ein  $I$ - $G$ -Diagramm für Wasser auffassen, bei dem aber jedem Gesamtwert noch 1 kg trockene Luft von  $0^\circ \text{C}$  beigemischt ist. Aber bei der Verwendung des  $i$ - $x$ -Diagrammes wird auch das  $I$ - $G$ -Diagramm für Wasser selbst herangezogen. Der sog. „Randmaßstab“ des  $i$ - $x$ -Diagrammes (vgl. Abb. 8) bedeutet nämlich das  $I$ - $G$ -Diagramm für Wasser, aus dem man die Gesamtwerte des

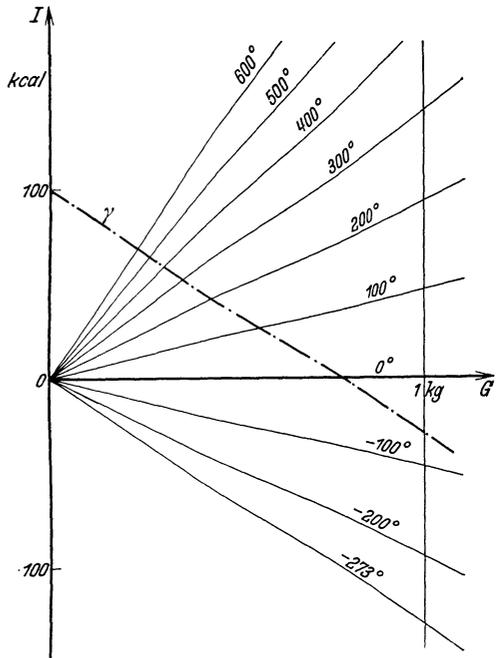


Abb. 10. Gesamtwert eines einfachen Stoffes.

reinen Wassers als Vektoren herausnimmt, wenn man einem Dampf-Luftgemisch reines Wasser oder reinen Wasserdampf beimengen will. In etwas versteckter Weise ist demnach die Molliersche Vorschrift zur Verwendung des Randmaßstabes eine geometrische Addition im Raume der Gesamtwerte. Bezieht man nämlich den ganzen Vorgang auf 1 kg trockene Luft, so endet der Gesamtwert des Wasser-Luftgemisches in der Diagrammebene des  $i$ - $x$ -Diagrammes (Abb. 11). Addiert man zu diesem Gesamtwerte geometrisch einen Gesamtwert des reinen Wassers aus der  $I$ - $B$ -Ebene, so liegt die Resultierende wieder mit dem Endpunkt im  $i$ - $x$ -Diagramm. Die Vermischung eines Wasser-Luft-Gemisches mit reinem Wasser ist daher auch im  $i$ - $x$ -Diagramm eine regelrechte Streckenaddition, während die Vermischung zweier Wasser-Luft-Gemische stets zu einer Schwerpunktsermittlung führt.

Hier bietet sich die Gelegenheit, näher darauf einzugehen, daß man nicht jeden Gesamtwert einer Stromstärke oder Stromdichte und im  $i$ - $x$ -Diagramm auch nicht den Gesamtwert des reinen Stoffes  $B$  durch einen



selbst übergehen, obwohl es zunächst in unbestimmter Form erscheint, weil das Diagrammgewicht  $G$  verschwindet, während der Radiusvektor  $\mathfrak{z}$  über alle Grenzen wächst. Dieser Fall der Entartung wird daher durch die Gleichung beherrscht:

$$\mathfrak{G} = \lim_{|\mathfrak{z}| = \infty} (G \cdot \mathfrak{z}). \quad (17)$$

Es handelt sich hierbei aber **nicht** um einen unangenehmen Ausnahmefall. Im Gegenteil, es ist der eigentliche Zweck des  $i$ - $x$ -Diagrammes, bei den häufigsten Vorgängen mit wahren Gemischvektoren arbeiten zu können. Wir werden später sehen, daß gerade solche Vorgänge besonders anschaulich im Diagramm wiedergegeben werden, bei denen wahre Vektoren Verwendung finden.

## Zweites Kapitel.

### Der turbulente Austausch.

**§ 9. Modell des turbulenten Austausches.** Der turbulente Austausch bedeutet einen Wärme- und Stoffaustausch, der von zahlreichen kleinen Wirbeln in einer Strömung herrührt. Diese Wirbel schleppen Flüssigkeits- oder Gasteilchen mit sich und bilden dadurch ein dauerndes Hin- und Herströmen von Flüssigkeit oder Gas, das sofort einen sichtbaren Erfolg bekommt, wenn starke Verschiedenheiten vorhanden sind. Ist z. B. die Temperatur in benachbarten Schichten verschieden, so nehmen die Teilchen ihre Temperatur mit an den neuen Ort und bewirken so allmählich einen Temperatenausgleich. Bei Verschiedenheiten in der Stoffzusammensetzung wird in gleicher Weise ein Ausgleich herbeigeführt. Von einem rein turbulenten Austausch wollen wir dann sprechen, wenn außer diesem Austausch ganzer Stoffteilchen kein weiterer Stoff- oder Wärmeaustausch zu beachten ist. In diesem Falle kann man nämlich auf die Größe des Stoffaustausches schließen, wenn die des Wärmeaustausches bekannt ist und umgekehrt; denn die ausgetauschten Teilchen bringen ihren ganzen früheren Zustand an den neuen Ort, so daß sich Wärmeinhalts- und Stoffzusammensetzungsdifferenzen in gleichem Maße auswirken müssen.

Um die Darstellung nicht zu stark mit hydrodynamischen Vorstellungen zu belasten, die nicht unmittelbar zu greifbaren Lösungen führen, mag es gestattet sein, die Turbulenz hier durch ein ganz einfaches hydrodynamisches Modell zu ersetzen. Die darin enthaltenen Vereinfachungen bedeuten bei den späteren Anwendungen dieselben Vernachlässigungen, die der Ingenieur gewöhnlich macht, um z. B. den Wärmeübergang in Rohren über die Rohrlänge zu integrieren. Das Modell selbst hat den Sinn, eine physikalisch mögliche Art des Austausches in allen Einzel-

heiten überblicken zu können. Ob das Modell die wirklichen Vorgänge in den Beispielen genau genug wiedergibt, muß man dagegen erst von Fall zu Fall entscheiden.

Die erste Vereinfachung besteht darin, daß der Austausch zwischen zwei Vorratsgefäßen vonstattengehen soll, die so groß sind, daß ihr Inhalt allein in die Wärme- und Stoffbilanzen eingeht. Außerdem soll der Austausch zwischen ihnen so langsam vor sich gehen, daß der Zustand

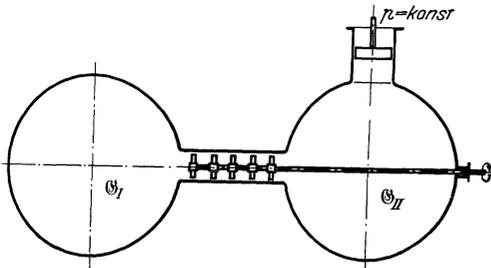


Abb. 12. Turbulenter Austausch zwischen Gefäßen.

in jedem Gefäß einheitlich ist und einen Gleichgewichtszustand darstellt. Man kann dann nämlich den Austausch quasistationär behandeln, d. h. man braucht bei einem Augenblicksvorgang keine Rücksicht darauf nehmen, daß die Zustände in den Vorratsgefäßen sich mit der Zeit ändern. Ein derartiger Idealfall wird einigermaßen wiedergegeben durch zwei Gefäße, die durch ein Rührchen verbunden sind, in dem sich ein Rührwerk befindet. Das Rührwerk sorgt dafür, daß der Austausch rein turbulent vor sich geht (Abb. 12).

Das Rührwerk würde selbst noch ein viel zu verschwommenes Bild von der Turbulenz geben. Um den Austausch wirklich berechnen zu

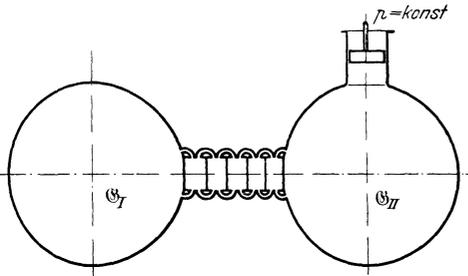


Abb. 13. Ersatz der Wirbel durch Strompaare.

können, soll daher ein vollständig bestimmtes Austauschmodell zwischen die beiden Gefäße geschaltet werden. Das Verbindungsrohr wird zu diesem Zweck in  $n-1$  Zellen unterteilt, die nur mit ihren Nachbarzellen durch Leitungen verbunden sind. Die 1. und die  $n-1$ . Zelle sind entsprechend mit den Vorratsgefäßen verbunden (Abb. 13). Zwischen je zwei benachbarten Zellen gibt es eine Hinleitung und eine Rückleitung, die jede eine Förderpumpe besitzen. Die Zellen selbst haben den Zweck, eine völlige Durchmischung bis zu einem stationären Gleichgewichtszustand zu ermöglichen, bevor die zufließenden Ströme in die Entnahmel Leitungen gelangen können.

Man könnte wohl Anstoß an den zahlreichen Annahmen des Modelles

nehmen, die nötig sind, um dieses eindeutig zu machen. Demgegenüber läßt sich jedoch zeigen, daß der ganze Austauschmechanismus lediglich die Geschwindigkeit des Austausches, in keiner Weise aber die Wirkung des Austausches für die Gefäße beeinflusst. Hierzu muß man die Bedingungen betrachten, unter denen die Gemische in diesen Gefäßen stehen. Da der Austausch unter konstantem Druck vor sich gehen soll, ist es eine zu starke Forderung, für beide Gefäße I und II auch konstantes Volumen vorschreiben zu wollen. Zum Druckausgleich genügt nach Abb. 12 bereits ein Ausgleichskolben an einem Gefäß. Dann wäre allerdings willkürlich für das eine Gefäß konstantes Volumen, für das andere Gefäß das Restvolumen vorgeschrieben. Diese Willkür wird jedoch nicht geringer, wenn man an beide Gefäße Druckausgleichskolben anbringt. In diesem Falle bliebe nur die Bewegung des einen Kolbens einer willkürlichen Bedingung unterworfen. Diese Willkür ist also eine notwendige Begleiterscheinung des Wärme- und Stoffaustausches. Denn wenn man zwei Gemische durch Wärme- und Stoffaustausch abändert, so würden sich ihre Grenzen verwischen, wenn man nicht für alle Zeiten angibt, wieweit das eine und wieweit das andere Gemisch zu rechnen ist.

Ist die ganze Anordnung wärme- und stoffdicht abgeschlossen, so genügt die Bedingung konstanten Volumens in einem Gefäß bei turbulentem Austausch bereits, um die aufeinanderfolgenden Zustände für beide Gefäße bis zum völligen Ausgleich eindeutig angeben zu können. Es fehlt dann nur die bis zum Erreichen eines bestimmten Zustandes verstrichene Zeit. Zunächst unterliegen sämtliche Vorgänge der Erhaltung von Stoff und Wärme in der ganzen Anordnung. Befinden sich zu Anfang die beiden Gemische  $\mathcal{G}_{I_0}$  und  $\mathcal{G}_{II_0}$  in den Gefäßen und beobachtet man zu irgendeiner Zeit die veränderten Gemische  $\mathcal{G}_I$  und  $\mathcal{G}_{II}$  in diesen Gefäßen, so besteht die Bedingung

$$\mathcal{G}_I + \mathcal{G}_{II} = \text{konst.} = \mathcal{G}_{I_0} + \mathcal{G}_{II_0} = \mathcal{G}. \quad (18)$$

Aus der Tatsache, daß der turbulente Austausch nur aus Vermischungen von Teilgemischen besteht, folgt eine weitere Einschränkung. Da die Vermischung von Teilgemischen sich im Gesamtwertsraum durch geometrische Addition darstellen läßt und da die Teilgemische selbst letzten Endes nur Vermischungen von Teilen aus  $\mathcal{G}_{I_0}$  und  $\mathcal{G}_{II_0}$  sein können, so müssen sämtliche Zustände auf der Ebene des Gesamtwerttraumes liegen, die durch  $\mathcal{G}_{I_0}$  und  $\mathcal{G}_{II_0}$  hindurchgeht. Außerdem kann durch die Vermischung nur eine Annäherung der Zustände bewirkt werden, wodurch die Zustände in dieser Ebene noch auf den Keil zwischen  $\mathcal{G}_{I_0}$  und  $\mathcal{G}_{II_0}$  beschränkt werden (Abb. 14). Besteht nun noch die Bedingung konstanten Volumens für das Gemisch  $\mathcal{G}_I$ , so gibt es auf jedem Zustandsstrahl in diesem Keil nur einen Punkt, der diese Bedingung erfüllt. Für die Veränderung des Gemisches  $\mathcal{G}_{I_0}$  ist daher bereits eine Linie im Ge-

samtwertraum vorgeschrieben. Sie stellt eine ähnliche Vergrößerung der Spur dar, die die  $\mathcal{G}^*$ -Fläche auf der Ebene  $\mathcal{G}_{I_0}, \mathcal{G}_{II_0}$  hat. Jedem Wert  $\mathcal{G}_I$  auf dieser festliegenden Linie ordnet die Gl. (18) noch eindeutig einen Wert  $\mathcal{G}_{II}$  zu, so daß auch die ganze Veränderung von  $\mathcal{G}_{II_0}$  bekannt ist.

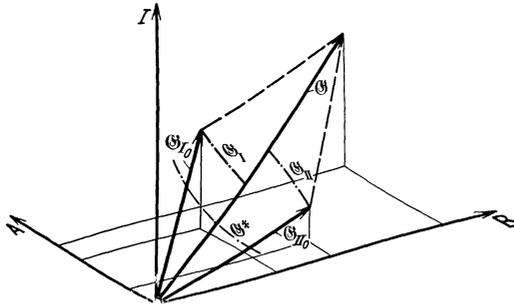


Abb. 14. Äußere Bedingungen des Austausches.

**§ 10. Stationäres Gleichgewicht am Modell.** Zwischen die Zustände  $g_0 = g_I$  und  $g_{n+1} = g_{II}$  der Gemische  $\mathcal{G}_I$  und  $\mathcal{G}_{II}$  in den Vorratsgefäßen werden im Austauschmodell nach Abb. 15 noch  $n - 1$  weitere Zustände in den Zellen geschaltet.

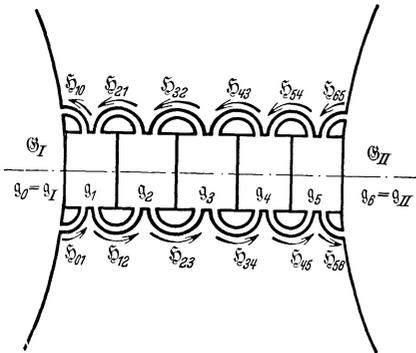


Abb. 15. Austauschmodell.

Nimmt man also die Tatsache vorweg, daß nur ein turbulenter Austausch in Frage kommt, so kann das Austauschmodell selbst nur noch die Zeiten liefern, mit denen die Linien durchlaufen werden, d. h. die Austauschgeschwindigkeiten.

Wegen der Annahme völliger Vermischung in allen Zellen sind daher nur diese  $n + 1$  Zustände in einem Augenblicksbild der Anlage zu unterscheiden, die den Richtungen angehören mögen:

$$g_0 = g_I, g_1, g_2, g_3, \dots$$

$$g_{n-2}, g_{n-1}, g_n = g_{II}.$$

Zwischen den Zellen befinden sich Leitungen, die zunächst einmal den Sinn haben, die Austauschstromstärke  $\mathfrak{S}$  vom Gefäß I nach dem Gefäß II zu leiten, die

dort die Änderung der Gesamtwerte  $\mathcal{G}_I$  und  $\mathcal{G}_{II}$  herbeiführt. Nach Gl. (10) entspricht die Stromstärke den Wanderungsgeschwindigkeiten der Gesamtwerte:

$$\mathfrak{S} = - \frac{d \mathcal{G}_I}{d t} = \frac{d \mathcal{G}_{II}}{d t}. \tag{19}$$

Die Richtung der Änderungen und damit auch die Richtung der Wanderungsgeschwindigkeiten liegt nach § 9 durch äußere Bedingungen fest. Daher ist auch die Richtung  $\mathfrak{h}$  der Austauschstromstärke  $\mathfrak{S}$  gegeben. In Wirklichkeit wird der Austausch aber durch die Ströme in den Lei-



Je zwei aufeinanderfolgende Dreiecke werden dabei durch die Bedingung (20) aneinandergefügt, weil der letzte Strom des vorausgehenden Dreiecks teilweise mit dem ersten des folgenden zusammenfällt (Abb. 17). Die Dreiecke bilden daher eine zusammenhängende Fläche und sogar ein ebenes Flächenstück, weil die dritte Seite  $\zeta \cdot F$  in allen Dreiecken dieselbe Richtung  $\mathfrak{h} = \mathfrak{j}$  hat, die nach Gl. (19) bereits durch äußere Bedingungen vorgeschrieben ist.

Der Zweck des Austauschmodelles ist nun, die thermodynamischen Größen des ausgetauschten Stoffes und die mechanischen Größen des

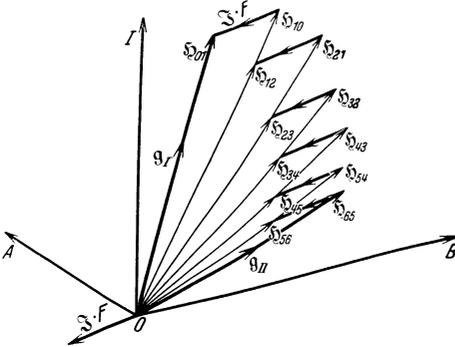


Abb. 17. Innere Bedingungen des Austausches.

Modelles voneinander zu trennen, damit man weiß, wie sich beim gleichen Austauschmodell (in Wirklichkeit also beim gleichen turbulenten Mischungsvorgang) die verschiedensten Stoffe unter den verschiedensten äußeren Bedingungen verhalten. Die leitende Annahme bei dieser Übertragbarkeit soll sein, daß in vergleichbaren Strömungen

Wirbel gleicher Größe und gleicher Umlaufgeschwindigkeit entstehen. Die Bestimmungsstücke der Turbulenzstärke sollen also reingeometrische und kinematische Größen sein. Dies bedeutet am Modell, daß die sekundlichen Fördervolumina der  $2n$  Pumpen in den Leitungen der Austauschströme gegeben sein sollen. Weil nun aber in jeder der  $n - 1$  Zellen und im Gefäß I konstanter Druck bei konstantem Volumen herrschen soll, dürfen nicht alle diese Pumpen unabhängig voneinander betrieben werden. Es würden  $n$  Pumpen in den Hinleitungen bzw.  $n$  Pumpen in den Rückleitungen völlig ausreichen. In beiden Fällen besteht aber eine Bevorzugung einer Richtung. Ohne Auszeichnung einer Richtung erreicht man dasselbe, wenn man die  $n$  Pumpenpaare mit einem Differentialgetriebe wie beim Automobil angetrieben denkt, so daß nicht die Einzelfördervolumina wohl aber die Summe der Fördervolumina in jedem Pumpenpaar bekannt ist. Entsprechend dem Doppelindex des geförderten Stromes sollen auch die in der Zeiteinheit geförderten Volumina mit  $V_{01}$ ,  $V_{10}$  usw. bezeichnet werden. Durch die  $n$  Größen  $\zeta_{01}$ ,  $\zeta_{12}$ ,  $\dots$ ,  $\zeta_{n-1, n}$  von der Dimension einer Geschwindigkeit lassen sich dann die Fördervolumina der  $n$  Pumpenpaare bestimmen, wenn  $F$  wie oben die Austauschfläche der Anordnung darstellt:

$$\left. \begin{aligned} F \cdot \zeta_{01} &= \frac{1}{2} (V_{01} + V_{10}), & F \cdot \zeta_{12} &= \frac{1}{2} (V_{12} + V_{21}), & \dots & \\ F \cdot \zeta_{n-1, n} &= \frac{1}{2} (V_{n-1, n} + V_{n, n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Aus dem Fördervolumen einer Pumpe läßt sich nun der zugehörige Konvektionsstrom völlig berechnen, wenn man noch den Gesamtwert  $\mathfrak{G}^*$  kennt, der beim Zustand  $g$  in der Volumeneinheit Platz hat. Zu dem Konvektionsstrom  $\mathfrak{S}_{01}$  gehört z. B. seinem Zustand  $g_0$  entsprechend ein Volumeneinheitgemisch  $\mathfrak{G}^*_{01}$ . Aus dem Fördervolumen  $V_{01}$  ergibt sich somit der Wert von  $\mathfrak{S}_{01}$ :

$$\mathfrak{S}_{01} = \mathfrak{G}^*_{01} \cdot V_{01} \text{ usw.}$$

Die Gl. (22) stellt demnach folgende Bedingung für die Konvektionsströme dar:

$$\left. \begin{aligned} F \cdot \zeta_{01} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{S}_{01}}{\mathfrak{G}^*_{01}} + \frac{\mathfrak{S}_{10}}{\mathfrak{G}^*_{10}} \right), & F \cdot \zeta_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{S}_{12}}{\mathfrak{G}^*_{12}} + \frac{\mathfrak{S}_{21}}{\mathfrak{G}^*_{21}} \right), \dots \\ F \cdot \zeta_{n-1, n} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{S}_{n-1, n}}{\mathfrak{G}^*_{n-1, n}} + \frac{\mathfrak{S}_{n, n-1}}{\mathfrak{G}^*_{n, n-1}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (22 a)$$

Die mittleren Fördervolumina  $F \cdot \zeta_{01}$  usw. geben also im Mittel an, um wieviel die Stromstärken  $\mathfrak{S}_{01}$  usw. im Gesamtwertsraum größer sind als die Volumeneinheitgemische  $\mathfrak{G}^*$  usw., deren Größe ja bekannt ist. Verkleinert man demnach alle Dreiecke aus einem Stromstärkepaar und dem Austauschstrom  $\mathfrak{S} \cdot F$  durch Division mit dem dazugehörigen mittleren Fördervolumen, so fällt der verkleinerte Austauschstrom, also z. B.  $\mathfrak{S}/\zeta_{01}$ , mit mindestens einem Punkt auf die Spur der  $\mathfrak{G}^*$ -Fläche in der Ebene aller Dreiecke. Sind nämlich die beiden Summanden in Gl. (22 a) also z. B.  $\frac{\mathfrak{S}_{01}}{\mathfrak{G}^*_{01}}$  und  $\frac{\mathfrak{S}_{10}}{\mathfrak{G}^*_{10}}$  gleich, so liegen sogar beide Endpunkte der dritten Dreiecksseite auf dieser Kurve; sind sie verschieden, so liegt der eine Endpunkt außerhalb, der andere innerhalb der  $\mathfrak{G}^*$ -Kurve, die dritte Dreiecksseite bekommt also mindestens einen Schnittpunkt (Abb. 18). (Wären nur Pumpen in den Hinleitungen oder in den Rückleitungen vorhanden, so würden dann immer die End- bzw. Anfangspunkte der dritten Dreiecksseiten auf der Kurve liegen.) Die Fläche aller auf diese Weise verkleinerten Dreiecke entspricht daher fast völlig der Fläche innerhalb der  $\mathfrak{G}^*$ -Linie (Abb. 19).

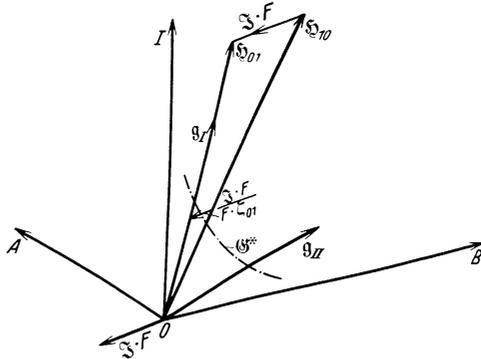


Abb. 18. Division durch das mittlere Fördervolumen.

Betrachtet man jetzt die Gesamtheit aller dritten Dreiecksseiten nach der Verkleinerung, so können sie die  $\mathfrak{G}^*$ -Linie nicht völlig ersetzen, weil

jede Seite die Richtung  $j$  hat, die höchstens zufällig einmal mit der Richtung der  $\mathcal{G}^*$ -Linie übereinstimmen kann. Selbst wenn man die Zellenzahl über alle Grenzen wachsen läßt, gibt die Gesamtheit dieser dritten

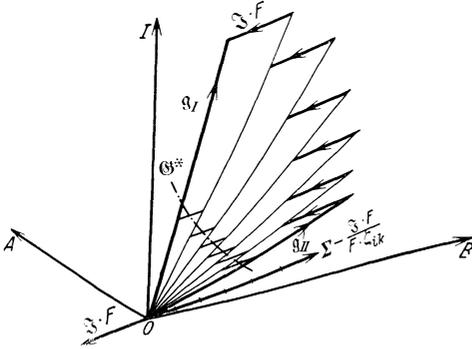


Abb. 19. Division durch die mittleren Fördervolumina.

dreiecksseitigen  $\mathcal{G}^*$ -Linie nur unstetig wieder, weil sie nur aus Linienelementen in der Richtung  $j$  zusammengesetzt ist. Die Länge dieser einzelnen Linienelemente ergibt aber in der Summe einen Betrag, der sicher einem eindeutigen Grenzwert zustrebt, der mit  $\mathfrak{F}^*$  bezeichnet werden soll. Diese Entfernung der beiden Zustände  $g_I$  und  $g_{II}$ , die längs der  $\mathcal{G}^*$ -Linie in der Richtung  $j$  des Austauschstromes ausgemessen werden muß, wird beim turbulenten Austausch dasselbe werden, was bei der Wärmeleitung die Temperaturdifferenz

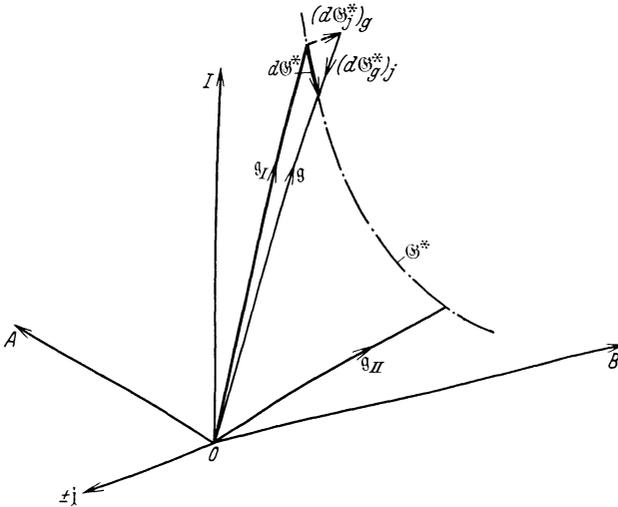


Abb. 20. Zerlegung eines Linienelementes im Raum.

zweier Zustände ist; es ist also eine eindeutig definierte Zustandsdifferenz, der wir die größte Aufmerksamkeit widmen wollen. Um diesen Grenzwert mathematisch angeben zu können, soll ein Linienelement der  $\mathcal{G}^*$ -Linie zunächst nach den beiden nicht rechtwinkligen Richtungen  $j$  und  $g$  zerlegt werden (Abb. 20).  $g$  ist dabei stets die Richtung



lenten Austausch erfassen; auch dort addieren sich die Mischwirkungen in hintereinandergeschalteten Schichten mit ihren Reziprokwerten. Solange man daher hoffen darf, dieselbe Kinematik der Wirbelschicht unter verschiedenen Bedingungen wiederzufinden, ist es durch das Modell gelungen, den Austauschvorgang in den Faktor zu zerspalten, der von dieser Kinematik der Wirbel herrührt, und in den Faktor, den das Gemisch selbst liefert. Daher soll  $\zeta$  jetzt als die „kinematische Durchgangszahl“ der turbulenten Schicht bezeichnet werden; sie hat die Dimension einer Geschwindigkeit.  $\mathfrak{S}^*$  soll den Namen „wirksame Entfernung“ der beiden Zustände  $g_I$  und  $g_{II}$  oder den Namen „nach  $j$  ausgerichtete Bogenlänge der  $\mathcal{G}^*$ -Linie“ erhalten. In völliger Übereinstimmung mit der Berechnung der Wärmestromdichte ergibt sich nun die Stromdichte des Wärme- und Stoffaustausches als Produkt der wirksamen Entfernung zweier Zustände und der kinematischen Durchgangszahl:

$$\mathfrak{S} = -\zeta \cdot \mathfrak{S}^* . \quad (25)$$

**§ 11. Die unterbrochene Turbulenz.** Bisher ist angenommen, daß in jeder Zelle des Austauschmodelles ein einheitlicher Zustand herrscht. Befindet sich aber im Gefäß I ein Dampf vom Gesamtwert  $\mathcal{G}_d$  und im Gefäß II eine Flüssigkeit vom Gesamtwert  $\mathcal{G}_f$ , so müssen einige der zwischengeschalteten Zustände notwendig im Sättigungsgebiet des Gemisches liegen. Hier zerfallen aber die Gleichgewichtszustände in die dampfförmige und die flüssige Phase. In solchen Fällen wird der Austausch erst dann wieder eindeutig berechenbar, wenn man weiß, wieviel Dampf und wieviel Flüssigkeit von den Entnahmeleitungen erfaßt wird. Besonders einfach liegen die Verhältnisse in zwei Grenzfällen, die als „durchgehende“ und „unterbrochene“ Turbulenz bezeichnet werden sollen. Ist nämlich die Mischbewegung in den Zellen, die zwei Phasen enthalten, so stark, daß sich Flüssigkeit und Dampf nicht trennen können, so verhält sich die Zelle völlig so, als wenn ihr ein einheitlicher Gemischzustand zukäme. Die Entnahmeleitungen können Flüssigkeit und Dampf dann nur in demselben Verhältnis erfassen, in dem beides in der Zelle vorhanden ist. Dieser Fall der durchgehenden Turbulenz bringt daher kein neues Moment in die Berechnung des Austausches. Für den anderen Grenzfall wird dagegen angenommen, daß sich Flüssigkeit und Dampf völlig trennen und die Leitungen, je nachdem ob sie unten oder oben angebracht sind, nur Flüssigkeit oder nur Dampf bekommen. In diesem Falle der unterbrochenen Turbulenz ist das Austauschmodell am vernünftigsten so zu betreiben, daß das Gefäß mit dem Dampf senkrecht über dem Gefäß mit der Flüssigkeit steht. In der mittleren Zelle befindet sich dann die Flüssigkeitsoberfläche, diese Zelle enthält also allein Flüssigkeit und Dampf. Die Zellen über der mittleren Zelle sind nur mit Dampf, die unter der mittleren Zelle nur mit Flüssigkeit angefüllt

(Abb. 22). Welcher von diesen beiden Grenzfällen in einem wirklichen Beispiel vorkommt, wird man daran erkennen, ob die Flüssigkeitsoberfläche durch den turbulenten Austausch zerschlagen wird oder ob sie erhalten bleibt. Wird sie etwa zu Schaum zerschlagen oder bilden sich stark flüssigkeitshaltige Zonen im Dampf, die einen allmählichen Übergang zwischen Flüssigkeit und Dampf ermöglichen, so hat man es mit annähernd durchgehender Turbulenz zu tun. Sorgt dagegen die Oberflächenspannung für die Aufrechterhaltung der Flüssigkeitsoberfläche, so hat man es mit unterbrochener Turbulenz zu tun. Die Oberfläche der flüssigen Phase braucht dabei durchaus nicht zusammenhängend zu sein, bei vielen Austauschvorgängen regnet die flüssige Phase durch die dampfförmige hindurch; es ist dann nur erforderlich, daß die Tröpfchen, aus denen die flüssige Phase besteht, ihren Weg völlig unter dem Einfluß der Erdschwere nehmen (vgl. Abb. 43). Entsprechendes gilt, wenn etwa Dampf in Blasen durch die flüssige Phase hindurchgeleitet wird (vgl. Abb. 47).

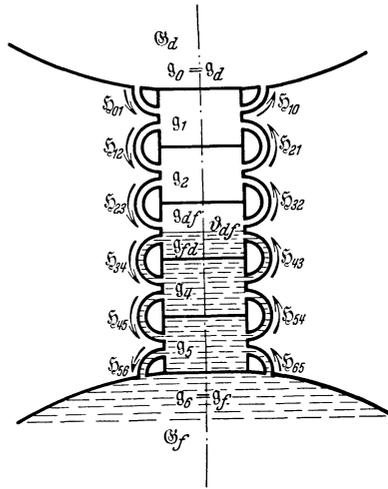


Abb. 22. Modell mit unterbrochener Turbulenz.

Bei der unterbrochenen Turbulenz sind die Wirbel im Dampf, die die Mischbewegung des Dampfes verursachen, durch die Flüssigkeitsoberfläche völlig von denen getrennt, die in der Flüssigkeit die turbulente Durchmischung der flüssigen Phase bewirken. Die Flüssigkeitsoberfläche bedeutet eine Unterbrechung der Turbulenz. Sie stellt bei wirklichen Strömungen eine Grenzfläche dar, an der sich im Dampf und in der Flüssigkeit je eine laminare Grenzschicht bilden. Da wir noch bei der Betrachtung der reinen Turbulenz sind, sollen diese laminaren Grenzschichten als verschwindend dünn angenommen werden. Immerhin bleibt diese Unterbrechung der Turbulenz an der Flüssigkeitsoberfläche ein laminarer Vorgang, denn wir nehmen an, daß die beiden Grenzzustände im Dampf und in der Flüssigkeit einem Gleichgewicht angehören, daß also hier die Temperaturdifferenzen und die Partialdruckdifferenzen sich voll auswirken können und nicht durch die Mischbewegung gestört werden. Die Vereinfachung besteht also nur darin, daß keine laminaren Schichten endlicher Dicke berücksichtigt werden, wie sie im nächsten Kapitel behandelt werden.

Die Flüssigkeitsoberfläche teilt die Mischbewegung bei der unterbrochenen Turbulenz in zwei völlig getrennte Teile, die Turbulenz in

der dampfförmigen Phase über der Oberfläche und in die Turbulenz der flüssigen Phase unter der Oberfläche. Es zerfällt daher auch das Austauschmodell in zwei Teile, die als Dampfseite und Flüssigkeitsseite der Zellenanordnung unterschieden werden sollen. Die Pumpen in den Leitungen der Dampfseite ergeben zusammen die kinematische Durchgangszahl  $\zeta_d$  des Dampfes, die Pumpen der Flüssigkeitsseite die kinematische Durchgangszahl  $\zeta_f$  der Flüssigkeit (Abb. 22). In der mittleren Zelle besteht Gleichgewicht zwischen Flüssigkeit und Dampf bei der Temperatur  $\vartheta_{df}$ , der Oberflächentemperatur der Flüssigkeit. Da hierdurch der Anschluß beider Modellseiten genau so eindeutig wird, wie im Falle der durchgehenden Turbulenz, muß es auffallen, daß man ein Bestimmungsstück mehr gebraucht nämlich statt der einen Durchgangszahl  $\zeta$  die beiden  $\zeta_d$  und  $\zeta_f$ . Dieses Bestimmungsstück ist tatsächlich mehr als früher. Dafür wird aber eine früher willkürliche Bedingung, und zwar die Vorschrift über das Volumen für das Gemisch  $\mathcal{G}_I$ , jetzt eindeutig durch das Modell festgelegt. Sobald man nämlich die Gemische  $\mathcal{G}_I$  und  $\mathcal{G}_{II}$  als Dampf  $\mathcal{G}_d$  und Flüssigkeit  $\mathcal{G}_f$  unterscheidet und man außerdem annimmt, daß die Flüssigkeitsoberfläche beim Austausch erhalten bleibt und nicht zerschlagen wird, so gibt es keine verschwommenen Grenzen mehr, die erst durch eine willkürliche Bedingung wieder verschärft werden müssen. Bei der unterbrochenen Turbulenz wird daher auch die Richtung  $j$  der Austauschstromdichte zu einer inneren Angelegenheit des Austauschmodelles. Daher kann man einen Austausch überhaupt erst dann berechnen, wenn man nicht mit einer einzigen Durchgangszahl arbeitet sondern wirklich die beiden Durchgangszahlen  $\zeta_d$  und  $\zeta_f$  unterscheidet. Schon beim reinen Wärmeübergang zwischen Flüssigkeiten und Dämpfen einfacher Stoffe ergeben sich unter verschiedenen Verhältnissen die unglaublichsten Differenzen in den Wärmeübergangszahlen, während eine Trennung in die beiden Wärmedurchgangszahlen im Dampf und in der Flüssigkeit sofort klare Verhältnisse schaffen würde.

**§ 12. Gleichgewicht bei unterbrochener Turbulenz.** Um nun für die unterbrochene Turbulenz nicht alle Bedingungen am Modell neu aufstellen zu müssen, teilen wir das Modell an der mittleren Zelle in zwei Teile mit jeweils durchgehender Turbulenz, die Dampfseite und die Flüssigkeitsseite. Diese beiden Teile müssen nur noch an der Oberfläche in der mittleren Zelle derart zusammengesetzt werden, daß Gleichgewicht im stationären Betrieb besteht. Die erste neue Bedingung ist daher, daß in der mittleren Zelle der Zustand des Dampfes  $g_{df}$  gerade dem trocken gesättigten Dampf sowie der Zustand  $g_{fd}$  der Flüssigkeit gerade der siedenden Flüssigkeit bei einer einheitlichen Temperatur  $\vartheta_{df}$  der Zelle entsprechen. Die Dampfseite arbeitet demnach zwischen den Zuständen  $g_d$  und  $g_{df}$ , die Flüssigkeitsseite zwischen den Zuständen  $g_{fd}$  und

$g_f$  und zwar jede Seite als Modell mit durchgehender Turbulenz. Nimmt man also z. B. eine Oberflächentemperatur  $\vartheta_{df}$  als gegeben an, so kann man beide Seiten völlig eindeutig im Gesamtwertsraum aufzeichnen und erhält Zustände in den beiden Ebenen durch  $g_d$

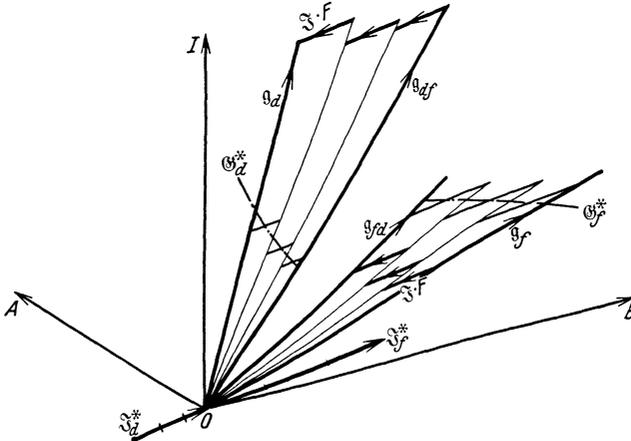


Abb. 23. Unterbrochene Turbulenz im Gesamtwertsraum.

und  $g_{df}$  bzw. durch  $g_{da}$  und  $g_f$  (Abb. 23). Die einzige Bedingung, die noch fehlt, ist die, daß in beiden Seiten des Austauschmodelles dieselbe Austauschstromdichte  $\mathfrak{S}$  fließen muß. Es müssen sich daher nicht nur

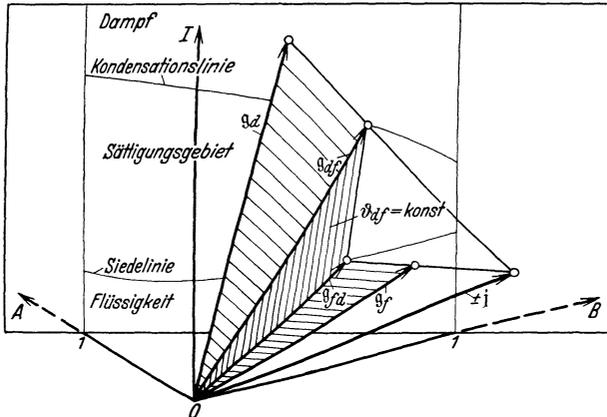


Abb. 24. Gemeinsame Richtung zweier Ebenen.

die Konvektionsstrompaare in der gleichen Ebene sondern in allen beiden Ebenen durch denselben Austauschstrom  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S} \cdot F$  entsprechend Gl. (21) zu geschlossenen Dreiecken ergänzen lassen. In zwei verschiedenen Ebenen durch den Punkt  $O$  gibt es aber stets nur eine Richtung  $j$ ,

in der sich völlig gleich gerichtete Strecken auftragen lassen. Diese Richtung ist gegeben durch die Schnittgerade beider Ebenen. Da diese Schnittgerade nach Abb. 24 völlig festliegt, sobald man  $\vartheta_{df}$  gewählt hat, so lassen sich in beiden Ebenen eindeutig die nach dieser Richtung j ausgerichteten Bogenlängen der  $\mathcal{G}^*$ -Linien bestimmen. Sie mögen die Werte  $\mathfrak{S}_d^*$  und  $\mathfrak{S}_j^*$  besitzen. Aus diesen Größen muß sich aber der gemeinsame Austauschstrom  $\mathfrak{S}$  ergeben, wenn man jede nach Gl. (24) bzw. Gl. (25) mit der zugehörigen kinematischen Durchgangszahl  $\zeta_d$  bzw.  $\zeta_j$  multipliziert. Es ergibt sich daraus als neue Bedingung

$$-\mathfrak{S} = \zeta_d \cdot \mathfrak{S}_d^* = \zeta_j \cdot \mathfrak{S}_j^* , \quad (26)$$

in der die Größen  $\mathfrak{S}_d^*$  und  $\mathfrak{S}_j^*$  nach der Gl. (24) zu berechnen sind

$$\mathfrak{S}_d^* = \int_d^{df} (d\mathcal{G}_j^*)_g, \quad \mathfrak{S}_j^* = \int_j^{df} (d\mathcal{G}_j^*)_g. \quad (26a)$$

Da die Gl. (26) nicht mit jeder Oberflächentemperatur zu befriedigen ist, muß man zunächst diejenige Oberflächentemperatur  $\vartheta_{df}$  suchen, die allein die rechte Gleichung in der Doppelgleichung (26) mit den gegebenen Werten  $\zeta_d$  und  $\zeta_j$  erfüllt. Erst dann erhält man aus ihr auch die wirkliche Austauschstromdichte  $\mathfrak{S}$ . Hieraus erkennt man die ausschlaggebende Bedeutung der beiden Teile  $\zeta_d$  und  $\zeta_j$  von der kinematischen Durchgangszahl.

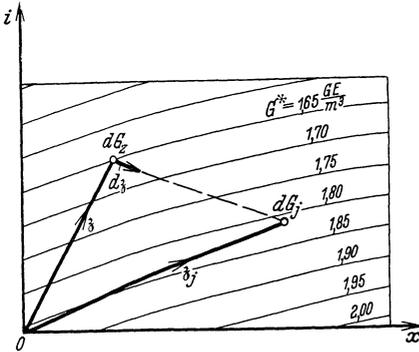


Abb. 25. Zerlegung von  $d\mathcal{G}^*$  im Zustandsdiagramm.

§ 13. Durchgehende Turbulenz im Diagramm.

Die Gleichgewichtsbedingungen der Austauschmodelle sind zunächst im Gemischraum aufgestellt, weil sich dieser für die bequeme Übersicht aller Bilanzgleichungen am besten eignet. Andererseits bekommt das Ergebnis dieser Betrachtungen, die nach j ausgerichtete Bogenlänge der  $\mathcal{G}^*$ -Linie, nur im Gemischraum ihre einfachste und anschaulichste Gestalt. Für den praktischen Gebrauch müssen diese Begriffe aber doch alle in ein Mollier'sches Zustandsdiagramm übersetzt werden. Der einzige Ausdruck, der nicht sofort mit den Überlegungen des I. Kapitels in ein Diagramm übertragen werden kann, ist nun gerade diese ausgerichtete Bogenlänge. Nach Gl. (24 u. 23) muß man nämlich die gerichtete Größe  $d\mathcal{G}^*$ , ein Linienelement auf der  $\mathcal{G}^*$ -Fläche, in zwei Komponenten nach den Richtungen j und g zerlegen. Die  $\mathcal{G}^*$ -Fläche selbst ist in dem Zustandsdiagramm insofern vorhanden, als zu jedem Zustandspunkt  $i, x$ , den

man auch durch den Radiusvektor  $\mathfrak{z}$  bezeichnen kann, ein spezifisches Diagrammgewicht  $G^*$  bekannt ist (Abb. 25). Geht man von  $\mathfrak{z}$  zu einem Nachbarzustand  $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ , so ist auch dort das spezifische Diagrammgewicht  $G^* + dG^*$  bekannt. Das Hinzufügen des Linienelementes  $d\mathfrak{G}^*$  bedeutet in der Ebene den Übergang von  $G^*$  im Bildpunkt  $\mathfrak{z}$  zu dem abgeänderten Wert  $G^* + dG^*$  im Nachbarpunkt  $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ . Das Linienelement  $d\mathfrak{G}^*$  ist nun aber nicht selbst gesucht, sondern die eine seiner Komponenten, wenn man es nach den Richtungen  $j$  und  $g$  zerlegt. Diesen Richtungen entsprechen in der Ebene die Bildpunkte  $\mathfrak{z}_j$  und  $\mathfrak{z}$ , wobei  $\mathfrak{z}_j$  von  $\mathfrak{z}$  aus gesehen in der Richtung  $d\mathfrak{z}$  liegen muß. Bringt man in diesen Bildpunkten der beiden Komponenten ihre noch unbekanntes Diagrammgewichte  $dG_j$  und  $dG_z$  an, so muß ein Schwerpunkt vom Diagrammgewicht  $G^*$  im Punkte  $\mathfrak{z}$  nach dem Punkte  $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$  mit dem Gesamtgewicht  $G^* + dG^*$  gelangen, sobald man diese Gewichte  $dG_j$  und  $dG_z$  addiert. Hierfür bestehen aber entsprechend den Gl. (8 u. 9) folgende Bedingungen

$$\begin{aligned} G^* + dG^* &= G^* + dG_z + dG_j, \\ (G^* + dG^*) (\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}) &= (G^* + dG_z) \mathfrak{z} + dG_j \cdot \mathfrak{z}_j. \end{aligned}$$

Ersetzt man die Summe  $G^* + dG^*$  in der unteren Gleichung durch den Ausdruck  $G^* + dG^* - dG_j$  nach der oberen Gleichung, so kann man die untere auch in folgende Form bringen

$$(G^* + dG^*) \cdot d\mathfrak{z} = dG_j \cdot (\mathfrak{z}_j - \mathfrak{z}).$$

Vernachlässigt man nun  $dG^*$  als klein gegen  $G^*$ , so erhält man für das Diagrammgewicht  $dG_j$  oder besser  $(dG_j^*)_z$  der gesuchten Komponente  $(d\mathfrak{G}_j^*)_g$  den Ausdruck

$$(dG_j^*)_z = G^* \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_j - \mathfrak{z}},$$

der zum Bildpunkt  $\mathfrak{z}_j$  gehört. In diesem Bildpunkt findet man entsprechend Gl. (24) das Diagrammgewicht  $J^*$  der wirksamen Entfernung  $\mathfrak{Z}^*$  durch Integration vom Zustand  $\mathfrak{z}_I$  bis zum Zustand  $\mathfrak{z}_{II}$  längs ihrer Verbindungsgeraden, auf der auch der Punkt  $\mathfrak{z}_j$  liegen muß:

$$J^* = \int_I^{II} (dG_j^*)_z = \int_I^{II} G^* \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_j - \mathfrak{z}} = -J \cdot \frac{1}{\zeta}. \quad (27)$$

Sollte der Punkt  $\mathfrak{z}_j$  im Unendlichen liegen, so ist nach Gl. (17) der wahre Vektor  $\mathfrak{Z}^*$  oder die wahre „wirksame Entfernung“ zu verwenden, für die man erhält

$$\mathfrak{Z}^* = \int_I^{II} G^* \cdot d\mathfrak{z} = G_m^* (\mathfrak{z}_{II} - \mathfrak{z}_I) = -\mathfrak{Z} \cdot \frac{1}{\zeta}. \quad (27a)$$

Arbeitet man dabei in einem Gebiet des Zustandsdiagrammes, in dem sich die spezifischen Diagrammgewichte  $G^*$  mit genügender Genauig-

keit durch einen Mittelwert  $G_m^*$  ersetzen lassen, so wird die „wahre wirk-  
same Entfernung“ wirklich die Entfernung der Zustände  $\beta_I$  und  $\beta_{II}$   
im Zustandsdiagramm, wenn man statt der kinematischen Durchgangs-  
zahl  $\zeta$  die Stoffdurchgangszahl  $\sigma = G_m^* \cdot \zeta$  benutzt. Im  $i$ - $x$ -Dia-  
gramm liegen die brauchbaren Zustände  $\beta_j$  immer im Unendlichen,  
wenn es sich um den Austausch zwischen Wasser und feuchter Luft  
handelt. Daher entstand im  $i$ - $x$ -Diagramm die Auffassung zuerst,  
daß die Entfernung zweier Zustände direkt für die Austauschgeschwin-  
digkeit maßgebend ist. Die Gl. (24) oder die entsprechenden Gl. (27)  
u. 27a) im Zustandsdiagramm sind lediglich vom Diagramm unab-  
hängige Fassungen dieser Aussage. Sie gelten aber nur für rein turbu-  
lenten Austausch.

Die nach Gl. (27) berechneten Werte  $J$  oder  $H = F \cdot J$  sind die  
Diagrammgewichte des Austauschstromes im Punkte  $\beta_j$  des Dia-  
grammes. Nach Gl. (19) geht aus ihnen die Veränderung der Zustände  
und der Diagrammgewichte in den Gefäßen I und II hervor. Ent-  
sprechend der Übertragung von Gl. (11) ins Diagramm, wie sie durch  
Gl. (12, 13, 13a u. 13b) wiedergegeben ist, ergeben sich diese Ver-  
änderungen in der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} H &= J \cdot F = -\zeta \cdot J^* \cdot F = -\frac{dG_I}{dt} = \frac{dG_{II}}{dt} \\ H(\beta_j - \beta_I) &= -\zeta J^*(\beta_j - \beta_I) \cdot F = -G_I \frac{d\beta_I}{dt}, \\ H(\beta_j - \beta_{II}) &= -\zeta J^*(\beta_j - \beta_{II}) \cdot F = G_{II} \frac{d\beta_{II}}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Tritt  $\mathfrak{S}^*$  aber als wahrer Vektor auf, so gilt entsprechend

$$\begin{aligned} dG_I &= dG_{II} = 0, \\ \mathfrak{S} &= -\zeta \cdot F \cdot \mathfrak{S}^* = -G_I \frac{d\beta_I}{dt} = G_{II} \frac{d\beta_{II}}{dt}. \end{aligned} \quad (28a)$$

Außer diesen Gleichungen ist beim durchgehenden turbulenten Aus-  
tausch noch auf eine äußere Bedingung zu achten, aus der die Lage des  
Punktes  $\beta_j$  auf der Geraden durch  $\beta_I$  und  $\beta_{II}$  hervorgeht. Diese kann  
durch die Bedingung konstanten Volumens für das Gemisch  $\mathfrak{G}_I$  gegeben  
sein. In diesem Falle darf sich das Diagrammgewicht  $G_I$  bei der Zu-  
standsänderung nur proportional dem spezifischen Diagrammgewicht  $G^*$   
verändern. Aus Gl. (28) entnimmt man, wenn man die 2. Zeile durch  
die 1. dividiert, daß dies nur für den Punkt  $\beta_j$  zutrifft, der folgende Gleichung erfüllt

$$\beta_j - \beta_I = \left( G^* \cdot \frac{d\beta}{dG^*} \right)_I. \quad (29)$$

Dieser Punkt  $\beta_j$  gilt gewöhnlich nur für den nächsten Schritt  $d\beta_I$ , für  
die weitere Wanderung ist dann mit einem neuen Punkte  $\beta_j$  zu rechnen.

Bei vollkommenen Gasen ergeben sich vielfach feste Punkte  $\delta_j$  für den ganzen Austauschvorgang, wodurch dessen Integration natürlich sehr erleichtert wird.

**§ 14. Unterbrochene Turbulenz im Diagramm.** Der große Unterschied zwischen dem Austausch mit durchgehender und unterbrochener Turbulenz liegt darin, daß die Richtung des Austauschstromes  $\mathfrak{J}$ , also im Diagramm der Bildpunkt  $\delta_j$ , nicht mehr einer äußeren Bedingung entspringt, die man nach Gl. (29) unabhängig von der Stärke des Aus-

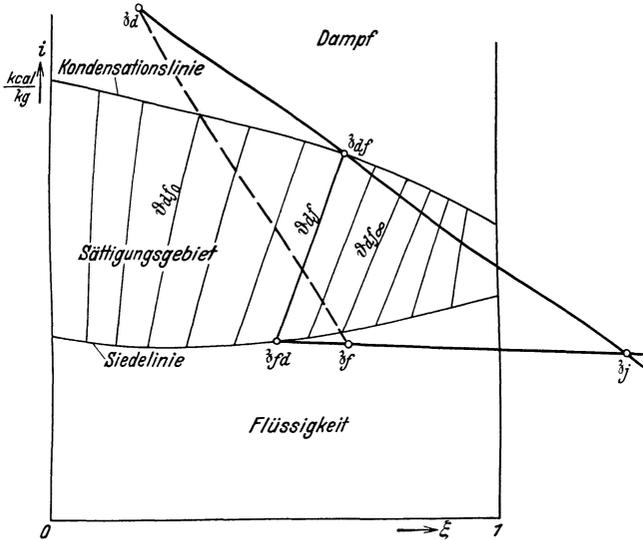


Abb. 26. Unterbrochene Turbulenz im Diagramm.

tauschstromes berechnen kann. Sie wird vielmehr durch die beiden kinematischen Durchgangszahlen  $\zeta_a$  und  $\zeta_f$  oder genauer durch deren Verhältnis  $\varepsilon = \zeta_f/\zeta_a$  bestimmt. Überträgt man nämlich die Gl. (26) in das Zustandsdiagramm, so ergibt sich

$$-J = \zeta_a \cdot J_a^* = \zeta_f \cdot J_f^* , \tag{30}$$

wobei die Werte  $J_a^*$  und  $J_f^*$  entsprechend der Gl. (27) durch die Integrale bestimmt sind

$$J_a^* = \int_a^{\delta_f} G^* \frac{d\delta}{\delta_j - \delta} , \quad J_f^* = \int_{\delta_a}^{\delta_f} G^* \frac{d\delta}{\delta_j - \delta} . \tag{31}$$

Die Zustände  $\delta_a$  und  $\delta_f$  sind die gegebenen Zustände im Gefäß I und II, die Zustände  $\delta_{af}$  und  $\delta_{fa}$  sind zunächst noch durch eine probeweise angenommene Oberflächentemperatur  $\vartheta_{af}$  bestimmt (Abb. 26). Es sind die Endpunkte der Sättigungsisotherme  $\vartheta_{af}$ , von denen  $\delta_{af}$  auf der Kondensations- oder Taulinie liegt, während  $\delta_{fa}$  auf der Siedelinie liegt.

Die Integration kann nach Gl. (31) nur dann erfolgen, wenn man zur Integration die beiden Geraden durch  $\zeta_a$  und  $\zeta_{df}$  bzw. durch  $\zeta_{fa}$  und  $\zeta_f$  benutzt, und wenn  $\zeta_j$  den Schnittpunkt dieser Geraden angibt. Bei beliebiger Wahl einer Sättigungsisotherme  $\vartheta_{df}$  wird man auch unsinnige und unstabile Lagen des Schnittpunktes  $\zeta_j$  antreffen. Diese lassen sich durch eine einfache Regel nahezu ausschalten, wenn man nämlich zunächst die Verbindungsgerade  $\zeta_a$  nach  $\zeta_f$  zieht und nun nur diejenigen Sättigungsisothermen zuläßt, die von dieser Geraden geschnitten werden. Da die Sättigungsisothermen selbst geradlinig sind, gibt es zunächst den Ausnahmefall, daß überhaupt nur diejenige Sättigungsisotherme in Frage kommt, die ein Stück der geradlinigen Verbindung von  $\zeta_a$  nach  $\zeta_f$  darstellt. In diesem Falle sind die möglichen Punkte  $\zeta_j$  durch die Punkte der Geraden durch  $\zeta_a$  und  $\zeta_f$  gegeben, die außerhalb der Strecke  $\zeta_a$  bis  $\zeta_f$  liegen. Im allgemeinen ergeben sich Sättigungsisothermen zwischen zwei Temperaturgrenzen, die mit  $\vartheta_{df_0}$  und  $\vartheta_{df_\infty}$  bezeichnet werden sollen. Von  $\zeta_a$  kommend trifft man im Sättigungsgebiet zuerst auf  $\vartheta_{df_0}$  und zuletzt auf  $\vartheta_{df_\infty}$  (Abb. 26). Bestimmt man nun der Reihe nach für die verschiedensten Temperaturen zwischen diesen Grenzen die Integrale  $J_a^*$  und  $J_f^*$ , so ergibt sich, daß man auf diese Weise nur positive Werte  $\varepsilon$  erhält, die bei  $\vartheta_{df_0}$  mit dem Werte  $\varepsilon = J_a^*/J_f^* = \zeta_f/\zeta_a = 0$  beginnen und bei  $\vartheta_{df_\infty}$  mit dem Werte  $\varepsilon = \infty$  enden. Dazwischen ändern sich die Werte stetig. (Es ist nicht unbedingt notwendig, daß sie monoton steigen. Tun sie dies nicht, dann werden verschiedene Werte mehrmals erreicht. Von diesen sind nur die in steigenden Intervallen angetroffenen Werte stabil. Der Austausch selbst ist in solchen Gebieten mehrdeutig.) Man ist also sicher, für jedes Verhältnis  $\varepsilon$  einen Punkt  $\zeta_j$  finden zu können. Fällt dieser Punkt  $\zeta_j$  ins Unendliche, so sind nach Gl. (27 a) die wahren Vektoren  $\mathfrak{S}_a^*$  und  $\mathfrak{S}_f^*$  zu ermitteln:

$$\mathfrak{S}_a^* = \int_a^{df} G^* \cdot d\zeta, \quad \mathfrak{S}_f^* = \int_{fa}^f G^* \cdot d\zeta. \quad (31 a)$$

Auch hier wird man im allgemeinen mit zwei Mittelwerten  $G_{ma}^*$  und  $G_{mf}^*$  rechnen dürfen, so daß die eigentliche Integration fortfällt und nur die parallelen Strecken  $\zeta_{df} - \zeta_a$  und  $\zeta_f - \zeta_{fa}$  auszumessen sind; dies ist gewöhnlich schon dann erlaubt, wenn der Punkt  $\zeta_j$  sehr weit aus dem Diagramm herausfällt. Außer der Gl. (29) bleiben bei unterbrochener Turbulenz alle übrigen Beziehungen von § 13 für die Verfolgung der Zustandsänderungen in den Gefäßen I und II erhalten.

### Drittes Kapitel.

#### Der laminare Austausch.

§ 15. Austausch durch unendlich dünne Schicht. Der laminare Wärme- und Stoffaustausch stellt einen Vorgang dar, den ein Stoff von

sich aus vornimmt, bei dem also im Gegensatz zum turbulenten Austausch fremde Bestimmungsstücke keine Rolle spielen. Man kann daher den ganzen laminaren Austauschvorgang nur durch Versuche bestimmen, bei denen aber peinlichst alle Störungen durch Wirbel vermieden werden müssen. Immerhin kann man sich auch ohne einen Versuch schon darüber Rechenschaft geben, auf welche Größen man beim Versuch achten muß und welche Folgerungen aus den Beobachtungen zu ziehen sind. Denn die grundlegenden Beziehungen sind in einfachen Fällen aus Beobachtungen und aus der kinetischen Gastheorie bekannt.

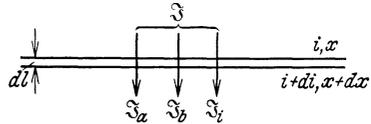


Abb. 27. Wärme- und Stoffstrom durch unendlich dünne Schicht.

Im laminaren Austausch zeigt sich das Bestreben eines Gemisches, seine Zustandsunterschiede auszugleichen. Hierzu sind Wärme- und Stofftransporte nötig. Versucht man z. B. an den beiden Grenzflächen einer dünnen ebenen Schicht der Stärke  $dl$  einen Zustandsunterschied aufrechtzuerhalten, der keinem Gleichgewichtszustand entspricht, so gelingt das nur, wenn man durch die Schicht dauernd einen Wärme- und Stoffstrom fließen läßt (Abb. 27). Nach den Ausführungen des I. Kapitels kann man nun in einem Mollierschen Zustandsdiagramm für dieses Gemisch nicht nur die beiden Zustände der Grenzflächen

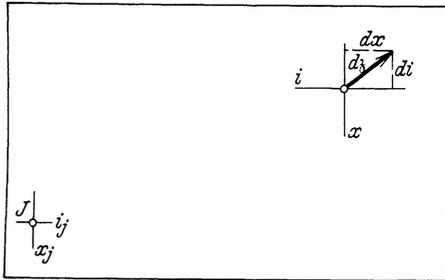


Abb. 28. Zustandsdifferenz und Austauschstrom.

$i, x$  und  $i + di, x + dx$  auftragen, sondern man kann entsprechend der Zusammensetzung des Wärme- und Stoffstromes auch an einem bestimmten Punkt  $i_j, x_j$  die Stromdichte  $J$  angeben, die den Strom vollständig wiedergibt (Abb. 28). Bezeichnet man die Zustände im Diagramm bequemer durch einen Radiusvektor von irgend einem beliebigen Anfangspunkt  $P_0$  aus (vgl. Abb. 4), so sind also  $z$  und  $z + dz$  die Zustände des Gemisches an den Grenzflächen der Schicht, während die Stromdichte einen Bildpunkt  $z_j$  und ein Diagrammgewicht  $J$  besitzt. Bekannt ist nun die Linearität in der Abhängigkeit der Stromdichte  $J$  von der reziproken Schichtdicke oder von dem Differentialquotienten  $\frac{dz}{dl}$ . Verkleinert man also die Schichtdicke, so ist dann ein entsprechend stärkerer Strom  $J$  in demselben Punkt  $z_j$  nötig, um den Zustandsunterschied aufrechtzuerhalten. Den Differentialquotienten  $\frac{dz}{dl}$  bezeichnet man auch als den Zustandsanstieg oder Zustandsgradient.

Behält man den Punkt  $z$  im Diagramm und die Richtung  $d_z$  von diesem Punkte aus bei, so kann man das stationäre Gleichgewicht in unendlich dünnen Schichten stets mit solchen Strömen aufrechterhalten, die im Punkte  $z_j$  einem Diagrammgewicht  $J$  proportional dem Zustandsanstieg entsprechen. Es gibt nun aber einen sehr einfachen Fall, der sich noch nicht in dieser Art darstellen läßt. Wählt man nämlich den Zustandsanstieg gleich Null, so wäre dieser Vorgang bisher nur durch das Diagrammgewicht  $J = 0$  im Punkte  $z_j$  wiederzugeben. Da aber doch weiter nichts verlangt ist, als die gegebenen Zustände an den Grenzflächen der Schicht stationär aufrechtzuerhalten, so ist es in diesem Falle auch erlaubt, einen reinen Konvektionsstrom mit dem Zustand  $z$  durch die Schicht hindurchtreten zu lassen. Wenn man nun auch in

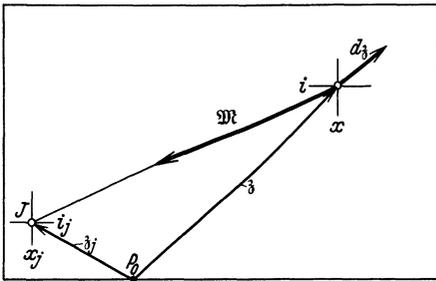


Abb. 29. Moment des Austauschstromes.

diesem einfachen Falle  $d_z = 0$  genau angeben könnte, wann ein Wärme- und Stoffstrom konvektiv hindurchtritt, so ist im allgemeinen Fall  $d_z > 0$  noch keine Beschränkung auf konvektionsfreien Austausch gemacht. Daher kann unser Strom  $J$  im Punkte  $z_j$  noch einen konvektiven Anteil von nicht bekannter Größe enthalten. Dieser konvektive Anteil würde für sich allein durch ein Diagrammgewicht  $J_k$  im Punkte  $z$  selbst wiedergegeben; es lassen sich aber die Ströme in dieser Schicht ohne gegenseitige Störung überlagern. Wir können daher davon Gebrauch machen, daß man in dem Mollierschen Zustandsdiagramm besonders einfache Beziehungen für die Summen und Differenzen zweier Ströme hat. Da diese Subtraktion beider Ströme auf eine Schwerpunktsbestimmung ihrer Diagrammgewichte  $J$  und  $-J_k$  in ihren Bildpunkten  $z_j$  und  $z$  hinausläuft, läßt sich derselbe Zustandsunterschied  $d_z$  in der Schicht von der Dicke  $dl$  je nach dem konvektiven Anteil in sämtlichen anderen Punkten der Geraden durch  $z_j$  und  $z$  aufrechterhalten. Eindeutig bestimmt ist nur die Richtung dieser Geraden durch  $z$  sowie das Moment  $\mathfrak{M}$  des Diagrammgewichtes  $J$  in bezug auf den Punkt  $z$ :

$$\mathfrak{M} = J (z_j - z). \quad (32)$$

Dieses Moment  $\mathfrak{M}$  nach Richtung und Größe ist also das einzige eindeutige Ergebnis unseres Versuches (Abb. 29).

**§ 16. Fremdkörpergeschwindigkeit.** Man wird sich zunächst nicht gleich zufrieden geben mit denjenigen Größen, die auch ohne Kenntnis der Konvektion eindeutig sind. Man wird vielmehr weiter nach Mitteln

fragen, die eine Trennung von Austauschstrom und Konvektionsstrom gestatten. Hierbei gerät man nun auf die hartnäckigsten Schwierigkeiten. Der Stoffaustausch oder die Diffusion stellt in einem Gemisch einen Vorgang dar, bei dem etwa die Stoffkomponente  $A$  von oben nach unten, die Stoffkomponente  $B$  umgekehrt von unten nach oben strömt. In einem derartigen Vorgang gibt es sicher kein Koordinatensystem, in dem zugleich beide Stoffe in Ruhe sind. Daher wird man für den Zustand größtmöglicher Ruhe schon ein solches Koordinatensystem suchen müssen, in dem dieselbe Menge  $A$  in der einen Richtung fließt als an Menge  $B$  in der entgegengesetzten Richtung fließt. Nun sind aber  $A$  und  $B$  völlig verschiedene Stoffe, so daß es keine eindeutige Menge  $A$  gibt, die einer Menge  $B$  völlig entspricht. Genau die gleiche Schwierigkeit, die es früher nicht gestattete, ein eindeutiges Zustandsdiagramm anzugeben, tritt hier bei der Diffusion mit Konvektion wieder auf. Natürlich ist auch bei einem Stoff ohne Diffusion keine eigentliche Ruhe in demjenigen Koordinatensystem, in dem keine Konvektion stattfindet. Selbst beim „ruhenden“ Gase bewegen sich ja die Moleküle sehr heftig, obwohl die Wände des Gefäßes ruhen, in dem sich das Gas befindet. Diese Bewegung der Gasmoleküle geht aber ohne Entropievermehrung vor sich, so daß man wirklich von Ruhe sprechen kann. Die Diffusion ist bereits dem Wesen nach ein Vorgang mit Entropievermehrung, daher ist bei ihr nicht mit demselben Recht ein Zustand der Ruhe zu verlangen.

In Strömungen, die mit ihren Deformationen der Flüssigkeits- oder Gasteilchen sicher keine völlige Ruhe darstellen, hilft man sich dadurch, daß man die Strömungsgeschwindigkeit und damit die Konvektionsgeschwindigkeit durch kleine Fremdkörper feststellt. Man könnte daher auch versuchen, die Konvektionsgeschwindigkeit während der Diffusion durch die Geschwindigkeit kleiner Fremdkörper zu messen. Wahrscheinlich ergibt sich dabei eine Geschwindigkeit, die von der Art und Gestalt dieser Fremdkörper unabhängig ist. Diese Geschwindigkeit ist auch unbedingt wichtig z. B. als Geschwindigkeit, mit der sich Nebeltröpfchen während der Diffusion bewegen. Diese „Fremdkörpergeschwindigkeit“ ist aber jedenfalls eine Größe, die man nur durch den Versuch bestimmen kann. Versucht man sie nämlich mit Hilfe der Vorstellungen der kinetischen Gastheorie vorauszusagen, so erkennt man, daß sie von der Zähigkeit der beiden Stoffanteile  $A$  und  $B$  herrührt. Diese Zähigkeiten sind nun aber sicher nicht diejenigen Größen, nach denen man die beiden Stoffmengen a priori bewerten würde. Daher scheint der Begriff der Fremdkörpergeschwindigkeit doch nicht die folgerichtige Weiterentwicklung des Begriffes Konvektionsgeschwindigkeit zu sein.

Das Ergebnis dieser Überlegungen ist demnach, daß der Begriff der Konvektion bei einem gleichzeitigen Auftreten einer Diffusion so verschwommen wird, daß eine eindeutige Trennung von Diffusion und Kon-

vektion unmöglich erscheint. Man kann zwar eine mittlere Geschwindigkeit berechnet nach den Massen oder auch nach den Mol-Gewichten als „Konvektionsgeschwindigkeit“ einführen. Beide Festlegungen widersprechen sich aber gewöhnlich und können daher keinesfalls die beobachtbare Fremdkörpergeschwindigkeit ersetzen. Für die Behandlung des Wärme- und Stoffaustausches genügt es jedoch völlig, Diffusion und Konvektion als einen Begriff aufzufassen und in diesem Sinne die Ergebnisse des § 15 weiter zu entwickeln.

§ 17. Der Austauschtensor. Verzichtet man auf eine willkürliche Abtrennung der Konvektion vom Wärme- und Stoffaustausch, so ist nach § 15 einem bestimmten Zustandsanstieg  $\frac{d\zeta}{dl}$  in einer Schicht von der Dicke  $dl$  ein eindeutiges Moment  $\mathfrak{M}$  des Wärme- und Stoffaustauschstromes in bezug auf den Zustand  $\zeta$  dieser dünnen Schicht zugeordnet. Dieses Moment ist proportional dem Zustandsanstieg, wenn dabei die

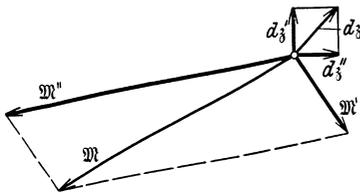


Abb. 30. Addition von Zustandsdifferenzen und von Momenten.

zwei verschiedene Momente  $\mathfrak{M}'$  und  $\mathfrak{M}''$ , die voneinander unabhängig sind:

$$\mathfrak{M}' \sim \frac{d\zeta'}{dl}, \quad \mathfrak{M}'' \sim \frac{d\zeta''}{dl}.$$

Alle übrigen Zustandsveränderungen gegenüber dem Zustand  $\zeta$  lassen sich jedoch aus diesen beiden Änderungen berechnen, denn man kann jede Zustandsänderung  $d\zeta$  in zwei Komponenten nach den Richtungen  $d\zeta'$  und  $d\zeta''$  zerlegen. Da derartige Vorgänge überlagerungsfähig sind, müssen sich dann auch die entsprechenden Momente  $\mathfrak{M}'$  und  $\mathfrak{M}''$ , die zu diesen Komponenten des Zustandsanstieges gehören, geometrisch zum Moment  $\mathfrak{M}$  des Austauschstromes addieren lassen (Abb. 30). Um also den ganzen laminaren Austausch bei einem Zweistoffgemisch zu beherrschen, müssen an jedem Zustandspunkt zwei Richtungen  $d\zeta'$  und  $d\zeta''$  untersucht werden. In einem beliebigen Mollierschen Zustandsdiagramm mit den Koordinaten  $i$  und  $x$  wird man diese Versuche zweckmäßig so vornehmen, daß  $d\zeta'$  in die Richtung  $i$  und  $d\zeta''$  in die Richtung  $x$  fällt. Als Einheit des Zustandsanstieges kann man dann zugleich diejenigen Veränderungen  $\Delta i$  bzw.  $\Delta x$  wählen, die der Fortschritteinheit in diesen Richtungen des Diagramms für die Einheit  $\Delta l$  der Schichtdicke entsprechen. Zu diesen Einheitsanstiegen gehören zwei Momente  $\mathfrak{M}'$  und

Richtung von  $d\zeta$  und der Punkt  $\zeta$  im Zustandsdiagramm erhalten bleiben ( $\sim$  bedeutet proportional):

$$\mathfrak{M} = J (\zeta_j - \zeta) \sim \frac{d\zeta}{dl}$$

Für zwei verschiedene Richtungen  $d\zeta'$  und  $d\zeta''$  im Zustandsdiagramm (Abb. 30) liefert der Versuch auch

$\mathfrak{M}''$ , die beliebig gerichtet sein können und daher je eine Komponente in der Richtung  $i$  bzw.  $x$  besitzen (Abb. 31). Zu einem beliebigen Zustandsanstieg  $\frac{d\mathfrak{z}}{dl}$  mit den Komponenten  $\frac{di}{dl}$  und  $\frac{dx}{dl}$  gehört dann ein Moment  $\mathfrak{M}$ , dessen Komponenten  $\mathfrak{M}_i$  und  $\mathfrak{M}_x$  sich aus den Komponenten der Momente  $\mathfrak{M}' \cdot \frac{di}{dl}$  und  $\mathfrak{M}'' \cdot \frac{dx}{dl}$  zusammensetzen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_i &= \mathfrak{M}'_i \cdot \frac{di}{dl} + \mathfrak{M}''_i \cdot \frac{dx}{dl}, \\ \mathfrak{M}_x &= \mathfrak{M}'_x \cdot \frac{di}{dl} + \mathfrak{M}''_x \cdot \frac{dx}{dl}. \end{aligned} \right\} (33)$$

Die 4 Momentkomponenten der rechten Seite bestimmen also den Zusammenhang zwischen dem Austauschstrom und dem Zustandsanstieg. Zur Vereinfachung der Schreibweise sollen die oberen Striche durch einen zweiten Index  $i$  bzw.  $x$  ersetzt werden, außerdem ist es zweckmäßig, diese Faktoren dadurch vom Diagrammgewicht unabhängig zu machen, daß man sie durch das spezifische Diagrammgewicht dividiert. Unter gleichzeitiger Vornahme eines Zeichenwechsels soll daher gelten

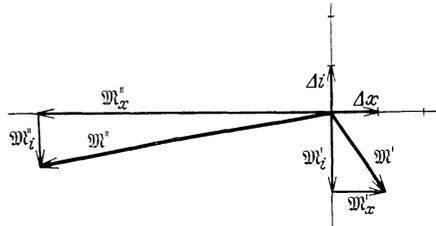


Abb. 31. Komponenten vom Austauschensor.

$$\mathfrak{M}'_i = -G^* \cdot A_{ii}, \quad \mathfrak{M}''_i = -G^* A_{ix}, \quad \mathfrak{M}'_x = -G^* A_{xi}, \quad \mathfrak{M}''_x = -G^* A_{xx}.$$

Demnach bekommt Gl. (33) die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_i &= J (i_j - i) = -G^* \left( A_{ii} \frac{di}{dl} + A_{ix} \frac{dx}{dl} \right), \\ \mathfrak{M}_x &= J (x_j - x) = -G^* \left( A_{xi} \frac{di}{dl} + A_{xx} \frac{dx}{dl} \right). \end{aligned} \right\} (34)$$

Die Faktoren  $A_{ii}$  usw. sind zwar schon in gewisser Hinsicht unabhängig von der Art des Mollierschen Zustandsdiagrammes. Völlig unabhängig wird man erst, wenn man die sog. Hauptrichtungen bestimmt; das sind diejenigen Richtungen, in denen das Moment  $\mathfrak{M}$  in die (negative) Richtung von  $d\mathfrak{z}$  fällt. In der Komponentendarstellung erkennt man dies daran, daß die Momente  $\mathfrak{M}_i$  und  $\mathfrak{M}_x$  sich wie  $di$  zu  $dx$  verhalten. Dividiert man daher die beiden Gl. (34) durcheinander und setzt man  $\mathfrak{M}_i/\mathfrak{M}_x$  gleich  $di/dx$ , so ergibt sich eine quadratische Gleichung für die Werte  $di/dx$ , welche die Hauptrichtungen bestimmen. Ihre Lösungen sind

$$\frac{di}{dx} \cdot 2 A_{xi} = A_{ii} - A_{xx} \pm \sqrt{(A_{ii} - A_{xx})^2 + 4 A_{ix} A_{xi}} \quad (35)$$

Der Radikand dieser Wurzel dürfte sich immer positiv ergeben, so daß stets zwei reelle Hauptrichtungen bestehen. Von der Art des Zustands-

diagrammes wirklich unabhängig sind nun die Zustände, die diesen Hauptrichtungen angehören, sie müssen daher nach den Zustandsmerkmalen, nicht nach den Richtungswinkeln in andere Diagramme übertragen werden.

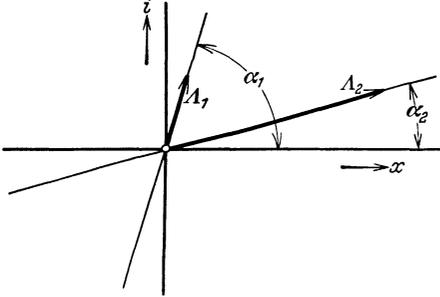


Abb. 32. Hauptrichtungen und Hauptfaktoren.

Außerdem sind die Faktoren  $A_1$  und  $A_2$  von der Diagrammart unabhängig, nach denen sich die Momente in diesen Hauptrichtungen aus den mit  $-G^*$  multiplizierten Zustandsanstiegen ergeben. Da in den Hauptrichtungen die Momentkomponenten proportional den Zustandsanstiegkomponenten sind, ergeben

sich die Hauptfaktoren  $A_1$  und  $A_2$  aus der Gleichung

$$\mathfrak{M}_x = -G^* \left( A_{xi} \cdot \frac{di}{dx} + A_{xx} \right) \frac{dx}{dl} = -G^* A_1 \frac{dx}{dl}.$$

Die beiden Werte sind daher nach Gl. (35)

$$A_1 \text{ bzw. } A_2 = \frac{1}{2} \left[ A_{ii} + A_{xx} \pm \sqrt{(A_{ii} - A_{xx})^2 + 4 A_{ix} A_{xi}} \right] \quad (36)$$

Kennt man nun umgekehrt in einem Diagramm die beiden Hauptrichtungen 1 und 2 durch ihre Richtungstangenten:

$$\text{tg } \alpha_1 = \left( \frac{di}{dx} \right)_1, \quad \text{tg } \alpha_2 = \left( \frac{di}{dx} \right)_2,$$

und sind zugleich die Hauptfaktoren  $A_1$  und  $A_2$  bekannt (Abb. 32), so ergeben sich die 4 Faktoren von Gl. (34) in folgender Weise:

$$\left. \begin{aligned} A_{ii} &= + \frac{A_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - A_2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}, \\ A_{ix} &= - \frac{(A_1 - A_2) \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}, \\ A_{xi} &= + \frac{(A_1 - A_2) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}, \\ A_{xx} &= - \frac{A_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 - A_2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}. \end{aligned} \right\} (37)$$

Eine lineare Zuordnung zweier gerichteter Größen in der hier beschriebenen Weise nennt man auch eine Tensormultiplikation. Der Tensor  $A$  mit den 4 Komponenten  $A_{ii}, A_{ix}, A_{xi}, A_{xx}$  in der  $i$ - $x$ -Ebene wird nämlich mit dem Vektor  $d_{\beta}$  multipliziert; das Produkt ist der Vektor  $\mathfrak{M}$ , der zwar linear von  $d_{\beta}$  abhängt aber im allgemeinen nicht in dieselbe Richtung fällt, in der  $d_{\beta}$  liegt. Entartet der Tensor, indem die Komponenten  $A_{ix}$  und  $A_{xi}$  verschwinden und außerdem  $A_{ii}$  und  $A_{xx}$  gleich wer-

den, so liegt  $\mathfrak{M}$  stets in derselben Richtung wie  $d_{\mathfrak{z}}$  und die Tensormultiplikation geht in eine gewöhnliche Multiplikation des Vektors  $d_{\mathfrak{z}}$  mit einem Faktor über. Symbolisch bezeichnet man die Tensormultiplikation wie eine gewöhnliche Multiplikation, doch macht man den Tensor etwa durch einen großen griechischen Buchstaben kenntlich

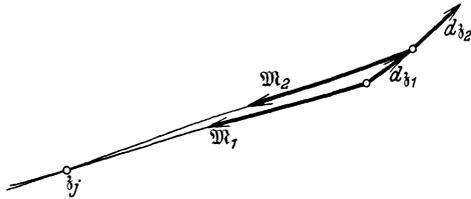


Abb. 33. Aufeinanderfolgende Zustandsdifferenzen.

$$\mathfrak{M} = J (\mathfrak{z}_j - \mathfrak{z}) = -G^* \frac{A \cdot d_{\mathfrak{z}}}{dl} . \tag{38}$$

Diese Gleichung ist daher nur eine abgekürzte Schreibweise von der Gl. (34). Der Tensor  $A$  soll als Austauschtensor bezeichnet werden.

**§ 18. Der Austausch durch endliche Schichten.** Folgt nun auf die erste Schicht von der Stärke  $dl_1$  eine zweite unendlich dünne Schicht  $dl_2$ , so gehört zu dieser zweiten Schicht schon ein weiterer Fortschritt  $d_{\mathfrak{z}2}$  im Zustandsdiagramm, der nicht mehr von dem Punkte  $\mathfrak{z}$ , sondern von dem Punkte  $\mathfrak{z} + d_{\mathfrak{z}1}$  ausgeht.

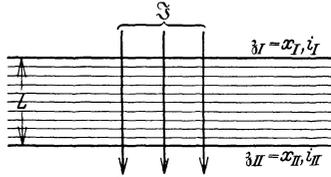


Abb. 34. Austausch durch endliche Schicht.

Aus den Momenten  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  ergeben sich jetzt zwei verschiedene Geraden im Zustandsdiagramm (Abb. 33), die den Bildpunkt  $\mathfrak{z}_j$  enthalten müssen, der dem gemeinsamen Wärme- und Stoffaustauschstrom  $\mathfrak{S}$  entspricht. Dieser Bildpunkt ist daher bei stationärem Austausch notwendig der Schnittpunkt beider Geraden. Wird der Wärme- und Stoffaustausch durch eine endliche Schicht in stationärem Gleichgewicht betrieben, so muß derselbe Bildpunkt  $\mathfrak{z}_j$  und dasselbe Diagrammgewicht  $J$  der Austauschstromdichte zugleich für alle Lamellen der Schicht gelten (Abb. 34). Hat die Schicht die Dicke  $L$  und haben die Deckflächen der ganzen Schicht die Zustände  $\mathfrak{z}_I$  und  $\mathfrak{z}_{II}$ , so muß es einen oder mehrere Bildpunkte  $\mathfrak{z}_j$  mit Diagrammgewichten  $J$  geben, die einen derartigen stationären Austausch darstellen können. Im Zustandsdiagramm muß zu diesem Zweck eine Zustandslinie zwischen  $\mathfrak{z}_I$  und  $\mathfrak{z}_{II}$  gefunden werden, deren einzelne Linienelemente Momente  $\mathfrak{M}$  ergeben, die durch den gemeinsamen Punkt  $\mathfrak{z}_j$  gehen (Abb. 35).

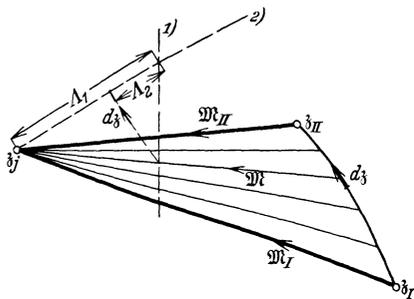


Abb. 35. Zustandslinie für eine Schicht.

Diese Zustände werden dann noch so über die Dicke  $L$  verteilt, daß die einzelnen Zustandsanstiege auch stets denselben Betrag  $J$  ergeben. Mathematisch bedeutet dies eine Integration der Gl. (38) mit konstantem Wert für  $J$  und mit konstantem Bildpunkt  $\mathfrak{z}_j$ . Diese Integration gelingt durch Trennung derjenigen Variablen, die vom Zustand  $\mathfrak{z}$  abhängen (das sind  $\mathfrak{z}$ ,  $d\mathfrak{z}$ ,  $G^*$  und  $\mathcal{A}$ ), von denjenigen, die vom Orte in der Schicht abhängen (das ist nur  $dl$ ). Man erhält bei der Trennung:

$$J \cdot dl = - G^* \frac{\mathcal{A} \cdot d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_j - \mathfrak{z}}.$$

In dieser Gleichung ist zu beachten, daß die Vektoren im Zähler und im Nenner der rechten Seite von gleicher Richtung sein müssen. Auf einer Verbindungslinie von  $\mathfrak{z}_I$  nach  $\mathfrak{z}_{II}$  im Zustandsdiagramm, die diese Bedingung erfüllt, gelingt dann die Integration

$$- J \cdot \int_0^L dl = - J \cdot L = \int_I^{II} G^* \frac{\mathcal{A} \cdot d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_j - \mathfrak{z}} = J_{\text{laminar}}^* \quad (39)$$

Für Punkte  $\mathfrak{z}_j$  auf der unendlich fernen Geraden des Diagrammes hat man wieder nach Gl. (17) mit den wahren Vektoren zu rechnen. In diesem Fall ist daher zu schreiben

$$- \mathfrak{S} \cdot L = \int_I^{II} G^* \mathcal{A} \cdot d\mathfrak{z} = \mathfrak{S}_{\text{laminar}}^* \quad (39a)$$

Aber auch in diesem Fall muß zunächst eine Verbindung von  $\mathfrak{z}_I$  nach  $\mathfrak{z}_{II}$  gefunden werden, auf der alle Momente  $- G^* \mathcal{A} \cdot d\mathfrak{z}$  in diejenige Richtung  $j$  zeigen, in der der unendlich ferne Punkt  $\mathfrak{z}_j$  liegt.

Das Ergebnis des laminaren Austausches ist äußerlich sehr ähnlich dem des turbulenten Austausches, wie man feststellt, wenn man die Gl. (39 u. 27 bzw. 39a u. 27a) miteinander vergleicht. Der wesentliche Unterschied besteht aber darin, daß  $\mathcal{A}$  ein Tensor und kein gewöhnlicher Faktor ist. Beim laminaren Austausch ist daher nicht etwa nur die Geschwindigkeit des Austausches verschieden von dem turbulenten, sondern auch die Zustandsänderung selbst, die durch ihn herbeigeführt wird. Je mehr der Austauschtensor aber zu einem gewöhnlichen Faktor entartet, um so geringer wird dieser Unterschied. Der Dimension nach entspricht die kinematische Durchgangszahl  $\zeta$  dem Quotienten aus dem Austauschtensor und der Schichtdicke  $L$ . Während nun aber die Durchgangszahl  $\zeta$  unabhängig von der Art des Gemisches bestimmt werden kann [vgl. Gl. (24)], ist der Austauschtensor zustandsabhängig und nur die Schichtdicke  $L$  läßt sich allein integrieren. Aus der verschiedenartigen Trennung der Zustandsvariablen von den räumlichen Variablen erkennt man daher noch die Annahmen, die dem turbulenten und dem laminaren Austausch zugrunde liegen. Im Raume ist sicher der laminare

Austausch der einfachere, denn dort wird aus dem Raume nur die Schichtdicke  $L$  entnommen, während beim turbulenten Austausch die kinematische Durchgangszahl  $\zeta$  im Raume bekannt sein soll. Einfacher im Zustandsdiagramm ist dagegen gerade der turbulente Austausch, denn dafür brauchen nur die spezifischen Diagrammgewichte  $G^*$  bekannt sein und die Integrationslinien verlaufen geradlinig. Vom thermodynamischen Standpunkt aus war es daher richtig, daß im II. Kapitel der als schwieriger bekannte turbulente Austausch vor dem laminaren behandelt wurde.

**§ 19. Lösungen bei einfachem Austauschtensor.** Um einen laminaren Austausch wirklich berechnen zu können, muß in jedem Zustandspunkt des Diagrammes der Austauschtensor gegeben sein. Man müßte also in jedem Punkt die Hauptrichtungen und die Hauptfaktoren angeben können. Da diese Angaben zum größten Teil völlig fehlen, ist man hier auf vernünftige Annahmen angewiesen. Bei den meisten Gemischen wird die Annahme nicht allzu schlecht sein, daß sich die Stoffzusammensetzung völlig ausgleicht, wenn man lediglich eine Temperaturdifferenz im Gemisch aufrechterhält. Wäre das genau der Fall, so wäre die Richtung  $x = \text{konst.}$  schon eine Hauptrichtung. Aus Versuchen kennt man zwar Abweichungen hiervon, die sich auch aus der kinetischen Gastheorie ergeben, doch sind diese Abweichungen nicht sehr groß. Als Gegenstück zu dieser wird man wohl die Richtung konstanter Temperatur als zweite Hauptrichtung wählen dürfen, solange keine Versuche vorliegen, die die zweite Hauptrichtung genauer festlegen. In diesen beiden Richtungen kennt man nämlich aus Versuchen je einen Faktor, den wir jetzt vorläufig zum Hauptfaktor erheben müssen. Dividiert man nämlich die Wärmeleitzahl  $\lambda$  durch das spezifische Gewicht  $\gamma$  und die spezifische Wärme  $c_p$ , so erhält man die sog. „Temperaturleitzahl“  $a = \lambda/\gamma \cdot c_p$ . Diese Temperaturleitzahl ist unser Hauptfaktor für die Hauptrichtung  $i$ , d. h.  $x = \text{konst.}$  Der sog. Diffusionskoeffizient  $\delta$ , der genau wie die Temperaturleitzahl die Dimension Länge<sup>2</sup>/Zeit hat, ist dann der Hauptfaktor für die Hauptrichtung  $\vartheta = \text{konst.}$  Ist der Verlauf der Isothermen bekannt, so ist  $\vartheta$  als Funktion von  $i$  und  $x$  gegeben. Diese Hauptrichtungen haben daher die Richtungstangenten:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \left( \frac{di}{dx} \right)_{x = \text{konst.}} = \infty, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \left( \frac{di}{dx} \right)_{\vartheta = \text{konst.}} = - \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial x}}{\frac{\partial \vartheta}{\partial i}}. \end{aligned}$$

Folgende 4 Komponenten des Austauschensors bezogen auf die Achsen  $i$  und  $x$  ergeben sich nach Gl. (37) aus diesen Hauptrichtungen und den

Werten  $A_1 = a$  und  $A_2 = \delta$ :

$$\left. \begin{aligned} A_{ii} &= a, & A_{ix} &= (\delta - a) \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = (a - \delta) \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial x}}{\frac{\partial \vartheta}{\partial i}}, \\ A_{xi} &= 0, & A_{xx} &= \delta. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Die Integration der Gl. (38 u. 39) gelingt leichter, wenn man den reziproken Austausch tensor  $A^{-1} = A'$  einführt. Es ist dies ein Tensor mit denselben Hauptrichtungen aber den reziproken Hauptfaktoren. Allgemein gelten für ihn die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} A'_{ii} &= \frac{A_{xx}}{A_{ii} A_{xx} - A_{xi} A_{ix}}, & A'_{ix} &= \frac{-A_{ix}}{A_{ii} A_{xx} - A_{xi} A_{ix}}, \\ A'_{xi} &= \frac{-A_{xi}}{A_{ii} A_{xx} - A_{xi} A_{ix}}, & A'_{xx} &= \frac{A_{ii}}{A_{ii} A_{xx} - A_{xi} A_{ix}}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Mit Hilfe des reziproken Tensors kann man nämlich die Gl. (38)

$$\mathfrak{M} = J (\beta_j - \beta) = -G^* \frac{A \cdot d\beta}{dl}$$

in die bequemere Form bringen

$$A' \cdot \mathfrak{M} = J A' \cdot (\beta_j - \beta) = -G^* \frac{d\beta}{dl}.$$

In Komponenten findet man hieraus

$$\left. \begin{aligned} di &= -J [A'_{ii}(i_j - i) + A'_{ix}(x_j - x)] \frac{dl}{G^*}, \\ dx &= -J [A'_{xi}(i_j - i) + A'_{xx}(x_j - x)] \frac{dl}{G^*}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Aus der Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich die Differentialgleichung der Zustandslinie im  $i$ - $x$ -Diagramm:

$$\frac{di}{dx} = \frac{A'_{ii}(i_j - i) + A'_{ix}(x_j - x)}{A'_{xi}(i_j - i) + A'_{xx}(x_j - x)}. \quad (42 a)$$

Erstreckt sich die Integration über kein allzugroßes Gebiet, so wird es fast immer erlaubt sein, diese Differentialgleichung mit konstanten mittleren Werten für die Komponenten des reziproken Austausch tensors zu integrieren. In diesem Falle ist die Integration obiger Gleichung allgemein möglich. Die übersichtlichste Form der Integration ergibt sich dabei, wenn man das Koordinatensystem in die Richtungen der Hauptachsen legt, denn es ist nicht verlangt, daß im  $i$ - $x$ -Diagramm mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem gearbeitet wird. In diesem Falle verschwinden die Komponenten  $A'_{ix}$  und  $A'_{xi}$  und man erhält einfach

$$\frac{di}{dx} = \frac{A'_{ii}(i_j - i)}{A'_{xx}(x_j - x)} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{i_j - i}{x_j - x}.$$

Ein Integral dieser Gleichung, das durch den Zustandspunkt  $i_I, x_I$  geht, ist dann mit  $A_1 = a$  und  $A_2 = \delta$ :

$$\frac{i_j - i}{i_j - i_I} = \left[ \frac{x_j - x}{x_j - x_I} \right]^{\frac{\delta}{a}} \tag{43}$$

Als Bildpunkte  $i_j, x_j$  für die Austauschstromstärke kommen aber nur solche Punkte in Frage, die eine Verbindungslinie der beiden Zustände

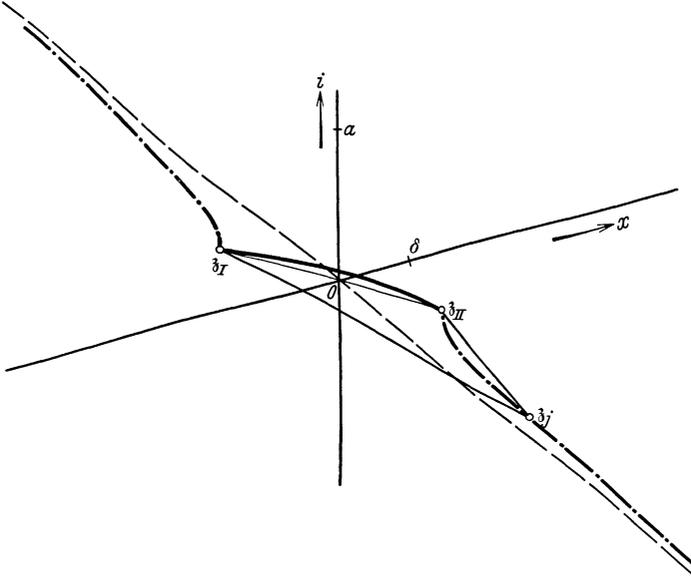


Abb. 36. Geometrischer Ort für den Bildpunkt des Stromes.

$i_I, x_I$  und  $i_{II}, x_{II}$  ermöglichen. Als geometrischen Ort für  $i_j, x_j$  findet man daher

$$\frac{i_j - i_{II}}{i_j - i_I} = \left[ \frac{x_j - x_{II}}{x_j - x_I} \right]^{\frac{\delta}{a}}$$

Nach  $i_j$  aufgelöst erhält man hieraus die Gleichung

$$i_j - i_I = \frac{i_{II} - i_I}{1 - \left[ \frac{x_j - x_{II}}{x_j - x_I} \right]^{\frac{\delta}{a}}} \tag{44}$$

Entartet der Tensor zu einem einfachen Faktor, indem  $a = \delta$  gilt, so wird die Integrationslinie eine Gerade durch die beiden Zustandspunkte  $i_I, x_I$  und  $i_{II}, x_{II}$ . Auf dieser Geraden liegen auch die allein möglichen Punkte  $i_j, x_j$ . Für den Fall  $a = 2\delta$  oder  $a = \frac{1}{2}\delta$  bekommt man als Integrationslinien Parabelbögen und als geometrischen Ort für den Punkt  $i_j, x_j$  zwei Hyperbelbögen (Abb. 36).

Um die Stärke des Austauschstromes zu berechnen, ist auf den gefundenen Integrationslinien noch die Gl. (39) auszuwerten. Auch diese Integration ist einfacher mit dem reziproken Austauschensor nach Gl. (42) auszuführen. Auf der bereits bekannten Integrationslinie kann man sowohl die obere als auch die untere der beiden Gleichungen verwenden:

$$\int_I^{II} \frac{G^* \cdot dx}{A'_{xi}(i_j - i) + A'_{xx}(x_j - x)} = J^*_{\text{laminar}} = -J \cdot L.$$

Verschwindet wieder  $A'_{xi}$ , so erhält man einfach mit  $A'_{xx} = \frac{1}{\delta}$

$$J^*_{\text{laminar}} = G^* \cdot \delta \cdot \ln \frac{x_j - x_I}{x_j - x_{II}} = -J \cdot L \tag{45}$$

In einfachen Fällen läßt sich der laminare Austausch demnach geschlossen integrieren.

### Viertes Kapitel.

## Beispiele mit rein turbulentem Austausch.

### § 20. Wärmeübertragung zwischen einfachem Stoff und fester Wand.

Als erstes Beispiel soll der einfache Wärmeübergang zwischen einer Flüssigkeit oder einem Dampf und einer festen Wand behandelt werden.

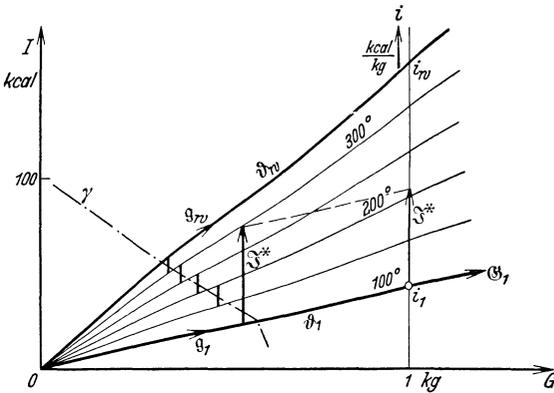


Abb. 37. Wärmeübergang an Wasserdampf.

Die Flüssigkeit bzw. der Dampf soll aus einem einfachen Stoff bestehen und sich in turbulenter Mischbewegung befinden. Der Zustand kann daher im Ganzen als einheitlich aufgefaßt werden. Die einzige Störung komme von einer Wand, an die die Flüssigkeit (bzw. der Dampf) grenzt. Sie habe die Temperatur  $\vartheta_w$ . Die Wirbel der Mischbewegung

können diese feste Wand weder durchdringen, noch können sie sie völlig erreichen, weil die Flüssigkeit an der Wand haftet. Infolgedessen bildet sich eine laminare Schicht in unmittelbarer Nähe der Wand aus. Um weiterhin trotzdem rein turbulent rechnen zu dürfen, soll angenommen werden, daß diese laminare Schicht so dünn ist, daß in ihr kein Tem-

peraturgefälle verloren geht. Der turbulente Austausch vollzieht sich dann zwischen einer Flüssigkeitsschicht von der Temperatur  $\vartheta_w$  und der übrigen Flüssigkeit.

Dieses Beispiel läßt sich am anschaulichsten in der Gesamtwertebene  $I-G$  des einfachen Stoffes verfolgen. Dort ist der Gesamtwert  $\mathcal{G}_1$  des Stoffes aufgetragen (Abb. 37). Die Flüssigkeitsschicht an der Wand ist durch den Zustand  $g_w$  mit der Temperatur  $\vartheta_w$  anzugeben. Für den Austausch stehen sich daher die beiden Zustände  $g_1$  und  $g_w$  gegenüber. Weiterhin ist durch die feste Wand bedingt, daß der Austauschstrom  $\mathfrak{S}$  ein reiner Wärmestrom sein muß; er besitzt daher nur die Komponente  $\mathfrak{S}_i$  in Richtung der  $I$ -Achse. In bezug auf diese Richtung ist dann auch die Bogenlänge der spezifischen Gewichtslinie auszumessen. In Abb. 37 ist gezeigt, wie man diese wirksame Entfernung  $\mathfrak{S}^*$  der beiden Zustände  $g_1$  und  $g_w$  aus mehreren Stücken zusammensetzt. Die Austauschstromdichte  $\mathfrak{S}$  berechnet sich aus Gl. (25) mit Hilfe der kinematischen Durchgangszahl  $\zeta$ :

$$\mathfrak{S} = -\zeta \cdot \mathfrak{S}^*.$$

Bei einer Austauschfläche  $F$  findet man dann die gesamte Stromstärke  $\mathfrak{S}$  und die Veränderung des Gesamtwertes  $\mathcal{G}_1$  nach Gl. (11)

$$\frac{d\mathcal{G}_1}{dt} = -\mathfrak{S} = -\mathfrak{S} \cdot F = \zeta \cdot F \cdot \mathfrak{S}^*. \quad (46)$$

Alle gerichteten Größen dieser Gleichung haben die Richtung der  $I$ -Achse. Daher verändert sich die Menge  $G$  des Stoffes nicht, es wird lediglich sein Wärmehalt  $I$  um die Wärmemenge  $Q$  erhöht. Infolgedessen kann man Gl. (46) auch in der Form angeben:

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \zeta \cdot F \cdot \mathfrak{S}_i^*. \quad (46a)$$

Wie man aus Abb. 37 ersieht, läßt sich die wirksame Entfernung  $\mathfrak{S}^*$  völlig auf der Linie der bezogenen Wärmehalte  $G=1$  kg zur Darstellung bringen. Für diesen Fall gilt nach Gl. (27 a) mit  $G^* = \gamma$ :

$$\mathfrak{S}_i^* = \int_{i_1}^{i_w} \gamma \cdot di = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_w} \gamma \cdot c_p \cdot d\vartheta. \quad (47)$$

Bei nicht zu großen Temperaturdifferenzen wird es erlaubt sein, bei der Integration an Stelle der veränderlichen Werte für die spezifische Wärme der Volumeneinheit  $C_p = \gamma \cdot c_p$  einen konstanten Mittelwert  $C_{pm}$  zu benutzen. Aus Gl. (46 a u. 47) folgt dann

$$dQ = F \cdot dt \cdot \zeta \cdot \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_w} \gamma \cdot c_p \cdot d\vartheta = F \cdot \zeta \cdot C_{pm} (\vartheta_w - \vartheta_1) \cdot dt. \quad (48)$$



oder einem Dampf und einer festen Wand nicht um einen einfachen Stoff sondern um ein Zweistoffgemisch, so ist der Zustand der laminaren Schicht an der Wand nicht allein durch die Wandtemperatur  $\vartheta_w$  bestimmt. Zustände mit der gleichen Temperatur  $\vartheta_w$  findet man vielmehr im Mollierschen Zustandsdiagramm längs der ganzen Isothermen  $\vartheta_w$ , die alle Zusammensetzungen  $x$  schneiden muß (Abb. 38). Das Zweistoffgemisch treffen dafür aber die Bedingungen des Austauschstromes an der Wand härter. Die feste Wand ist nämlich allein durchlässig für die Wärme, aber weder für den Stoff  $A$  noch für den Stoff  $B$ . Entsprechend der Abb. 37 besteht daher auch für das Gemisch nur eine einzige Komponente der Austauschstromdichte, nämlich  $\mathfrak{S}_i$ . Sie erscheint im Diagramm als wahrer Vektor, weil sie parallel zur Diagrammebene verläuft, und sie ist außerdem parallel zur  $i$ -Achse. Ist das Gemisch z. B. durch den Zustandspunkt  $\vartheta_1, x_1$  gegeben (Abb. 38), so muß jetzt der Zustand an der festen Wand die beiden Bestimmungsstücke  $\vartheta_w$  und  $x_1$  bekommen, wenn sich eine reine Wärmeübertragung einstellen soll. Als Integrationslinie erhält man dann nämlich die Gerade  $x_1 = \text{konst.}$ , und sie ist die einzige auf der man nach Gl. (27a) einen wahren Vektor  $\mathfrak{S}_i^*$  findet, der nur die Komponente  $\mathfrak{S}_i^*$  besitzt:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_i^* = \int_{i_1}^{i_w} G^* \cdot di = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_w} C_{p_x} \cdot d\vartheta = C_{p_x m} (\vartheta_w - \vartheta_1). \quad (50)$$

Man erhält also dasselbe Ergebnis wie beim einfachen Stoff, aber dazu die Bedingung überall konstanter Stoffzusammensetzung  $x_1$ . Beim turbulenten Austausch ergibt sich daher stets dieselbe Stoffzusammensetzung an allen kälteren und wärmeren Flächen, wenn diese Flächen für beide Stoffkomponenten undurchlässig sind und wenn man nicht ins Sättigungsgebiet des Gemisches gerät.

**§ 22. Wärme- und Stoffaustausch zwischen zwei Phasen eines einfachen Stoffes.** Die feste Wand als Begrenzung der Flüssigkeit oder des Gases verhindert den Stoffaustausch in den bisher behandelten Beispielen. Betrachtet man nun eine Flüssigkeitsoberfläche als Grenze zwischen Flüssigkeit und Dampf desselben einfachen Stoffes, so bildet auch diese nach § 11 eine Grenze für die Wirbel in der Flüssigkeit und im Dampf. Für den Wärme- und Stoffaustausch selbst ist die Oberfläche aber keine undurchlässige Grenze. Das Verhältnis von Wärmeaustausch zum Stoffaustausch, d. h. also die Richtung des Austauschstromes in der  $I$ - $G$ -Ebene des einfachen Stoffes, richtet sich dabei nach dem Verhältnis der kinematischen Durchgangszahlen  $\zeta_d$  und  $\zeta_f$  für Dampf und Flüssigkeit, die die Gl. (26 u. 26a) erfüllen müssen:

$$-\mathfrak{S} = \zeta_d \cdot \mathfrak{S}_d^* = \zeta_f \cdot \mathfrak{S}_f^*. \quad (51)$$

Der Gesamtwert des Dampfes  $\mathfrak{G}_d$  und der Flüssigkeit  $\mathfrak{G}_f$  sowie die Grenzen des keilförmigen Sättigungsgebietes (Abb. 39) von der einheit-

lichen Temperatur  $\vartheta_{df}$  legen die Integrationsgrenzen für die wirksamen Entfernungen  $\mathfrak{S}_d^*$  und  $\mathfrak{S}_f^*$  fest. Da die Änderungen von  $\mathcal{G}_d$  und  $\mathcal{G}_f$  durch  $\mathfrak{S}_d^*$  und  $\mathfrak{S}_f^*$  bestimmt werden, sind in Abb. 39 die Werte  $\mathfrak{S}_d^*$  in den verschiedensten Richtungen  $j$  von  $\mathcal{G}_d$  aus abgetragen, ebenso die Werte  $-\mathfrak{S}_f^*$  von  $\mathcal{G}_f$  aus. Aus Abb. 39 erkennt man nun, daß  $\mathfrak{S}_d^*$  für die

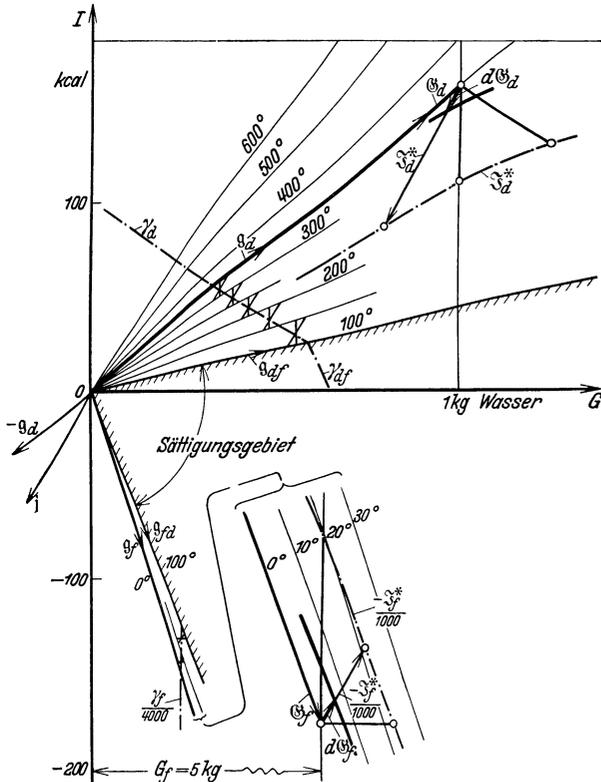


Abb. 39. Austausch zwischen Wasser und Dampf.

Richtung  $j = -g_d$  unendlich wird, während  $\mathfrak{S}_f^*$  für  $j = g_f$  unendlich wird. Dreht man  $j$  daher in Richtung wachsender Winkel von  $-g_d$  nach  $+g_f$ , so werden alle möglichen Verhältnisse  $\varepsilon = \mathfrak{S}_d^*/\mathfrak{S}_f^*$  erreicht.

Eine Ausnahme würde eintreten, wenn man mit Satttdampf oder mit siedender Flüssigkeit arbeitete. Denn beim Satttdampf mit  $g_d = g_{df}$  ist  $\mathfrak{S}_d^*$  sonst Null und nur in der Richtung  $j = \pm g_d$  unbestimmt. Die Bedingung Gl. (51) ist daher unabhängig vom Werte  $\zeta_d$  nur mit der Richtung  $j = -g_d$  zu erfüllen. Für den Austauschstrom wird dann die kinematische Durchgangszahl der Flüssigkeit allein maßgebend.

Entsprechend ist bei einer siedenden Flüssigkeit nur eine Richtung  $j = g_f = g_{fd}$  möglich, und  $\zeta_d$  bestimmt den Austauschstrom nach Gl. (51) allein. Sind weder der Dampf noch die Flüssigkeit an der Grenze des Sättigungsgebietes, so sind alle beiden Größen  $\zeta_d$  und  $\zeta_f$  maßgebend.

Hat man eine Richtung  $j_1$  gefunden, für die Gl. (51) erfüllt ist, so kann man nach den Veränderungen fragen, die z. B. für den Dampf eintreten, wenn bei gleicher Anordnung, also gleicher Turbulenz, eine kältere Flüssigkeit gewählt würde. Sicher ist dann für die frühere Richtung  $j_1$  eine größere wirksame Entfernung  $\mathfrak{S}_f^*$  vorhanden, weil der Bereich  $g_{fd}$  bis  $g_f$  vergrößert ist. Das neue Gleichgewicht erfordert daher eine Richtung  $j_2$ , die man durch Drehung entgegen der Richtung

wachsender Winkel findet. Da die Änderung  $d\mathcal{G}_d$  bei gleicher Turbulenz im Dampf proportional  $\mathfrak{S}_d^*$  ist, so erkennt man aus Abb. 39, daß bei kälterer Flüssigkeit eine stärkere Kondensation des Dampfes eintritt. Man kann aus dieser Abbildung aber auch die Temperaturänderung des Dampfes ersehen, und man findet überraschender Weise, daß sich der Dampf bei kälterer Flüssigkeit langsamer abkühlt. Die merkwürdige Tatsache, daß die kältere Flüssigkeit scheinbar schlechter kühlt, gilt für alle einfachen Stoffe. Der Unterschied  $\Delta \mathfrak{S}_d^* = \mathfrak{S}_{d_2}^* - \mathfrak{S}_{d_1}^*$  liegt nämlich stets in einer mittleren Richtung zwischen  $-g_d$  und  $-g_{df}$ . Damit sich die Temperatur mindestens ebenso schnell ändert, wäre aber eine Abänderung  $\Delta \mathfrak{S}_d^*$  erforderlich, die gegenüber  $-g_d$  in Richtung wachsender Winkel verdreht liegt, oder mindestens parallel  $g_d$  ist. Entsprechend ergibt ein stärker überhitzter Dampf zwar eine geringere Kondensation bzw. eine stärkere Verdampfung der Flüssigkeit, aber die Temperaturerhöhung der flüssigen Phase wird hierdurch verzögert. In diesem Falle ist der neue Gleichgewichtszustand mit einer Richtung  $j$  zu finden, die in Richtung wachsender Winkel verdreht ist. Die dabei auftretende Abänderung  $\Delta \mathfrak{S}_j^*$  hat eine Richtung zwischen  $g_j$  und  $g_{jd}$ , so daß sie einen langsameren Temperaturanstieg liefert.

Dieselben Zusammenhänge erkennt man rein analytisch aus Gl. (28 u. 31), wofür man hier bei einer Austauschfläche  $F$  folgende Gestalt erhält:

$$-J \cdot F \cdot dt = \zeta_d \cdot F \cdot dt \cdot \int_d^{d_j} \gamma \cdot \frac{di}{i_j - i} = dG_d = G_d \cdot \frac{di_d}{i_j - i_d}, \quad (51a)$$

$$-J \cdot F \cdot dt = \zeta_j \cdot F \cdot dt \cdot \int_{j_d}^j \gamma \cdot \frac{di}{i_j - i} = -dG_j = -G_j \cdot \frac{di_j}{i_j - i_j}. \quad (51b)$$

Der „fiktive“ Wärmehalt  $i_j$  des Austauschstromes kann alle Werte außerhalb des Bereiches  $i_j$  bis  $i_d$  annehmen. Wie man an den Vorzeichen von  $dG_d$  und  $dG_j$  ersehen kann, bedeutet  $i_j < i_d$  eine Verdampfung,  $i_j > i_d$  eine Kondensation. Nimmt man nun bei gleichen Verhältnissen im Dampf und gleichen Werten  $\zeta_d$  und  $\zeta_j$  kälteres Wasser, so ändert sich  $i_j$  in dem Sinne, daß eine Kondensation erhöht wird, indem  $i_j$  mehr nach  $i_d$  rückt, oder eine Verdampfung verringert wird, indem sich  $i_j$  von  $i_j$  entfernt. Hierbei erfährt in Gl. (51a) nur der Wert  $i_j$  eine Veränderung, und zwar erhält man in beiden Fällen eine Verringerung des Betrages von  $di_d$ . Kälteres Wasser verlangsamt daher die Abkühlung des Dampfes. Gl. (51b) stimmt bei Umkehrung des Richtungssinnes vom Austauschstrom und der Integrationsgrenzen völlig mit Gl. (51a) überein. Infolgedessen muß auch umgekehrt ein stärker überhitzter Dampf die Erwärmung des Wassers verzögern.

Der Wärme- und Stoffaustausch gibt also eine völlige Aufklärung der scheinbar paradoxen Beobachtung, daß Sattedampf besser heizt als

überhitzter Dampf und daß siedende Flüssigkeit stärker kühlt als kältere Flüssigkeit. Die Heizung und die Kühlung wird dabei allerdings immer nur nach der Temperaturänderung der gegenüberliegenden Phase beurteilt. Diese Tatsache bleibt unter Umständen auch dann erhalten, wenn die Erwärmung und die Abkühlung durch ein Rohr hindurch geschieht. In diesem Falle ist nur die Bedingung zu stellen, daß die Phase, bei der diese Erscheinung auftritt, an Gewicht abnimmt. Beobachtet man z. B. die Temperatur des strömenden überhitzten Dampfes in einem Rohr, so kühlt die Rohrwand am besten, wenn sie etwas unter die Siedetemperatur des Dampfes gebracht wird. Unterschreitet man die Siedetemperatur aber stärker, so kondensiert dauernd Dampf an der Rohrwand, während der Rest des Dampfes sich nicht mehr so stark abkühlt. Entsprechendes gilt für die Flüssigkeit, die beste Temperatur für ihre Erwärmung liegt nahe bei der Siedetemperatur. An heißeren Wänden verdampft ein Teil der Flüssigkeit, während der Rest der Flüssigkeit seine Temperatur dann langsamer erhöht. (Versuche von Jakob, Erk und Eck sind im Literaturverzeichnis S. 76 unter Nr. 20 angegeben.)

**§ 23. Austausch zwischen feuchter Luft und Wasser.** Im Sättigungsgebiet der Wasser-Luft-Gemische tritt dadurch eine Besonderheit ein, daß die flüssige Phase so gut wie keine Luft enthält. Die Wasseroberfläche läßt also Wärme und Wasser hindurchtreten, sie hält aber die Luft zurück. Flächen mit derartigen Eigenschaften bezeichnet man als halbdurchlässig. Für den Austauschstrom bedeutet dies, daß er nur die Komponenten  $\mathfrak{S}_i$  und  $\mathfrak{S}_b$  besitzen kann, daß aber die dritte Komponente  $\mathfrak{S}_a$ , der Austausch des Stoffes *A* (Luft), stets verschwinden muß. Das Molliersche *i-x*-Diagramm für Wasser-Luft-Gemische ist dieser Besonderheit dadurch angepaßt, daß seine Ebene im Gesamtwertraum parallel zur *I-B*-Ebene verläuft (Abb. 11). Alle Austauschströme zwischen feuchter Luft und Wasser sind daher im *i-x*-Diagramm als wahre Vektoren darzustellen. Für diesen Vorteil ist der Nachteil in Kauf genommen, daß die Zustandspunkte des reinen Wassers auf der unendlich fernen Geraden des Diagrammes zu denken sind. Im Endlichen kann man daher nur die Richtung angeben, bei deren Verfolgung man auf den gewünschten Zustand gelangen würde. Alle diese Richtungen sind auf dem Mollierschen Randmaßstab des Diagrammes angegeben. Die Bedeutung des Randmaßstabes kann man z. B. an den Sättigungs- oder Nebelisothermen erkennen. Sie müssen geradlinige Verbindungen des Wasserdampf-Luft-Gemisches am Taupunkt mit dem Wasser von gleicher Temperatur darstellen. Da sie diesen Wasserzustand aber erst im Unendlichen erreichen, müssen sie parallel zu der Richtung des Randmaßstabes verlaufen, die dieser Wassertemperatur zukommt.

Betrachtet man zunächst nur die Vorgänge über einer Wasseroberfläche von der Temperatur  $\vartheta_{df}$ , so sorgt eine dünne laminare Luftschicht dort für die Aufrechterhaltung des Zustandes  $\zeta_{df}$  auf der Kondensations- oder Taulinie am Endpunkt der Sättigungsisotherme  $\vartheta_{df}$ . Befindet sich nun über der Wasseroberfläche feuchte Luft von einem beliebigen Zustand  $\zeta_a$ , so stellt sich eine Stromdichte des Wärme- und Stoffaustausches ein, die nur noch von der Wirblichkeit der Luft, also von  $\zeta_a$  abhängt [Gl. (31 a)]:

$$\mathfrak{J} = -\zeta_a \cdot \mathfrak{J}_a^* = -\zeta_a \int_a^{df} G_m^* \cdot d\zeta = -\zeta_a \cdot G_m^* (\zeta_{df} - \zeta_a). \quad (52)$$

Handelt es sich um eine endliche Luftmenge mit dem Diagrammgewicht  $G_a$ , so kann man nach Gl. (28) die Abhängigkeit des Diagrammgewichtes und des Luftzustandes  $\zeta_a$  von der Zeit berechnen (Abb. 40). Man findet, weil der Austauschstrom ein wahrer Vektor ist, keine Änderung des Diagrammgewichtes aber folgende Änderung des Zustandes bei einer Oberfläche  $F$  nach Gl. (28 a):

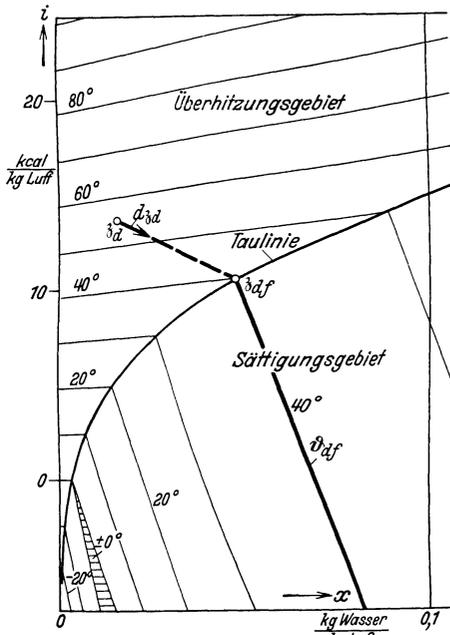


Abb. 40. Austausch zwischen feuchter Luft und Wasseroberfläche.

Der Zustand  $\zeta_a$  wird nach dieser Gleichung wie durch ein zähes Medium mit einer Kraft proportional dem Abstand  $\zeta_{df} - \zeta_a$  auf den Punkt  $\zeta_{df}$  hinbewegt. In Komponenten zerlegt erhält man folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} G_a \cdot \frac{d\zeta_a}{dt} &= -\mathfrak{J} \cdot F \\ &= \zeta_a \cdot G_m^* (\zeta_{df} - \zeta_a) \cdot F. \end{aligned} \right\} (53)$$

$$\left. \begin{aligned} G_a \cdot \frac{di_a}{dt} &= \frac{dI}{dt} = \zeta_a \cdot G_m^* (i_{df} - i_a) \cdot F, \\ G_a \cdot \frac{dx_a}{dt} &= \frac{dB}{dt} = \zeta_a \cdot G_m^* (x_{df} - x_a) \cdot F. \end{aligned} \right\} (53a)$$

In der Literatur ist die Berechnung der ausgetauschten Wärme- und Stoffmengen mit Hilfe einer Wärmeübergangszahl  $\alpha$  und einer Stoffaustauschzahl  $\sigma$  üblich. Bewertet man den Wärmeinhalt  $i_b$  des Wassers

zur Vereinfachung so, daß man den Nullpunkt auf die Dampftemperatur  $\vartheta_a$  legt, so verschwindet der konvektive Beitrag des Wärmestromes und im Überhitzungsgebiet der Dampf-Luftgemische fällt die Linie  $i_a = \text{konst}$  mit der Isotherme  $\vartheta_a = \text{konst}$  zusammen. In diesem Falle gelten folgende Gleichungen (sonst  $dI = dQ + dB \cdot i_b$ ):

$$\left. \begin{aligned} dI &= dQ = \alpha(\vartheta_{af} - \vartheta_a) \cdot F \cdot dt, \\ dB &= \sigma(x_{af} - x_a) \cdot F \cdot dt. \end{aligned} \right\} (53b)$$

Aus dem Vergleich mit Gl. (53a) ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den verschiedenen Faktoren:

$$\sigma = \zeta_a \cdot G_m^*, \quad \alpha = \zeta_a \cdot G_m^* \cdot \frac{di}{d\vartheta} = \sigma \cdot \frac{di}{d\vartheta} = \sigma \cdot c_{pm}. \quad (54)$$

Bildet man trotz des nicht ganz parallelen Verlaufes der Isothermen im Dampfgebiet einen etwas gewagten Wert  $c_{pm} = \frac{di}{d\vartheta}$  als mittlere spezifische Wärme bezogen auf das Diagrammgewicht, so sind die Gl. (53a u. 53b) gleichwertig. Die in Gl. (54) enthaltene Beziehung zwischen  $\alpha$  und  $\sigma$  bezeichnet man in der thermodynamischen Literatur vielfach als die „Lewis'sche Beziehung“. Sie ist demnach eine Folge des rein turbulenten Austausches. Da man in der Hydrodynamik den turbulenten Austausch und seine Folgen für alle vom Stoff mitgeschleppten Größen wie Wärme, Farbe, Staub, Salzgehalt, Impuls usw. weit eher allgemein erkannt hat, kann man die Priorität von Lewis (1922) jedoch kaum aufrechterhalten (Lit.-Verz. Nr. 8, 9, 10, 11, 14 und 15). Zwar nimmt Lewis bei seiner Ableitung nicht Bezug auf die Turbulenz, doch ist der von ihm angegebene Weg unexakt in den Grenzübergängen. Erst F. Merkel gibt in 1925 eine stichhaltige Ableitung, dafür erkennt er auch, daß die Lewis'sche Beziehung nicht allgemein gültig ist sondern auf rein turbulenten Austausch beschränkt bleibt (Lit.-Verz. Nr. 16). Aus den Gl. (53, 53a oder 53b) kann man den Wärme- und Stoffaustausch völlig berechnen, wenn man noch die Annahme macht, daß die Oberflächentemperatur des Wassers kaum von der mittleren Temperatur des Wassers abweicht. In dieser Form ist der Austausch schon von Mollier und Merkel im  $i$ - $x$ -Diagramm behandelt (Lit.-Verz. Nr. 5, 16).

Bei genaueren Untersuchungen wird man prüfen müssen, ob die Stromdichte des Austausches auch von der Flüssigkeitsoberfläche ins Innere der Flüssigkeit gelangen kann. Hierfür kann man genau wie in §22 das  $I$ - $G$ -Diagramm für reines Wasser benutzen, d. h. also die  $I$ - $B$ -Ebene desselben  $I$ - $A$ - $B$ -Raumes für Wasser-Luft-Gemische, in dem auch die Diagrammebene des  $i$ - $x$ -Diagrammes liegt. Zeichnet man den Randmaßstab des  $i$ - $x$ -Diagrammes gesondert und zwar mit durchgezogenen Strahlen, so braucht man auf den Strahlen nur noch die spezifischen Werte  $\gamma$  für Wasserdampf und Wasser zu vermerken, um



Luft zum Wasser gelangen, so muß unter der Wasseroberfläche dieselbe Stromdichte bestehen wie über der Oberfläche. Die Richtung  $j$  ist also

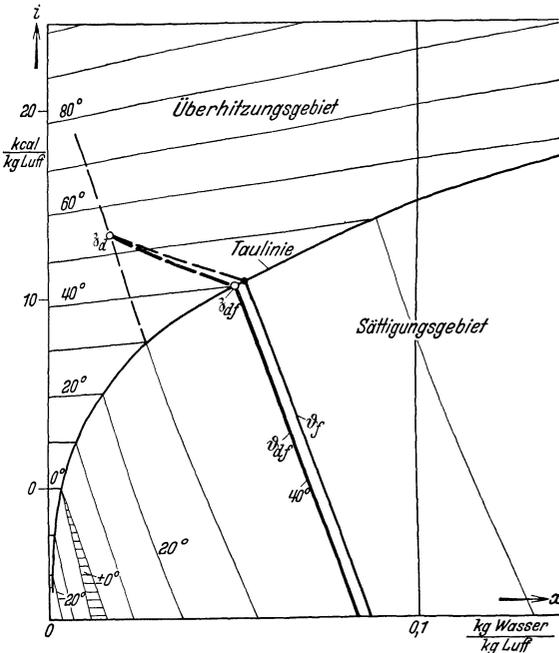


Abb. 42. Beeinflussung der Oberflächentemperatur durch die Luft.

Temperatur des Wassers  $\vartheta_f$ . Unter dieser Annahme findet man im  $i-x$ -Diagramm schon eine erste Richtung  $j = \text{Richtg}(\mathfrak{S}_a^*) = \text{Richtg}(\delta_{df} - \delta_a)$ , in der man dort auch eine erste Austauschstromdichte  $\mathfrak{S}$  berechnen kann

$$-\mathfrak{S} = \zeta_a \cdot G_m^* (\delta_{df} - \delta_a). \tag{55}$$

Eine Verbesserung für  $\vartheta_{df}$  ergibt sich nun, wenn man in der Gleichung

$$-\mathfrak{S} = \zeta_f \int_{j_a}^j (d\mathfrak{G}_j^*)_g \tag{55 a}$$

die untere Grenze  $g_{fa}$  des Integrales in der  $I-B$ -Ebene als Unbekannte ansieht. Bringt man die hieraus gefundene Verbesserung auch bei  $\delta_{df}$  und  $\mathfrak{S}$  in Gl. (55) an, so werden sich daraus nur noch geringe Änderungen von  $g_{fa}$  in (55a) ergeben. Fällt  $j$  schon beim ersten Male in die Richtung  $g_f$ , so ist die Annahme  $\vartheta_{df} = \vartheta_f$  bzw.  $g_{fa} = g_f$  völlig richtig. Im  $i-x$ -Diagramm erkennt man dies daran, daß die Strecke  $\delta_{df} - \delta_a$  ohne Knick in die Sättigungsisotherme  $\vartheta_{df}$  übergeht. Im allgemeinen kann die Oberflächentemperatur  $\vartheta_{df}$  sowohl über als auch unter  $\vartheta_f$  liegen. Im  $i-x$ -Diagramm bildet die Sättigungsisotherme der wirk-

durch die Vorgänge über dem Wasser festgelegt. Nach Gl.(52) ist die Richtung  $\pm j$  direkt durch die Strecke  $\delta_{df} - \delta_a$  bestimmt. In dieser Richtung ist daher auch  $\mathfrak{S}_j^*$  zu ermitteln. Gewöhnlich wird nun aber nicht die Oberflächentemperatur  $\vartheta_{df}$  sondern die Wassertemperatur  $\vartheta_f$  gegeben sein. Dann ist die Oberflächentemperatur  $\vartheta_{df}$  erst noch zu berechnen. Dabei kann man im allgemeinen annehmen, daß der Wärmeaustausch im Wasser groß gegenüber dem Austausch in der Luft ist. In erster Näherung ist daher  $\vartheta_{df}$  gleich der

lichen Oberflächentemperatur stets einen geringeren Knick mit der Strecke  $\delta_{df} - \delta_a$  als bei der ersten Näherung mit der Annahme  $\vartheta_{df}$  gleich  $\vartheta_f$  (Abb. 42).

Hat man es mit einer endlichen Wassermenge zu tun, so folgt die Temperatur des Wassers allmählich der Temperatur, die an der Oberfläche durch den Austausch aufgezwungen ist. Dadurch muß sich der Knick zwischen  $\delta_{df} - \delta_a$  und der Sättigungsisotherme  $\vartheta_{df}$  dauernd verringern. Schließlich gelangt das Wasser einschließlich seiner Oberfläche auf diejenige Temperatur, deren Sättigungsisotherme selbst schon in der Verlängerung durch  $\delta_a$  hindurchgeht. Auf diese Weise kommt die Anzeige des feuchten Thermometers im Augustschen Psychrometer zustande, sobald die Annahme berechtigt ist, daß der Wärme- und Stoffaustausch an der feuchten Oberfläche rein turbulent vor sich geht und daß das hierdurch bedingte Gleichgewicht weder durch die Strahlung noch durch die Wärmeleitung über die trockene Oberfläche des Thermometers gestört wird. Dann ist die Anzeige des feuchten Thermometers gleich derjenigen Sättigungsisotherme, deren Verlängerung ins Dampfgebiet durch den Luftzustand  $\delta_a$  hindurchgeht. Diese Temperatur bezeichnet man in der Technik als „Kühlgrenze“. Unter Beschränkung auf rein turbulenten Austausch erhält man sie hier in genau der gleichen Weise, wie sie von R. Mollier angegeben ist (Lit. Verz. Nr. 5). Die Abweichungen bei laminarem Austausch werden in § 28 behandelt.

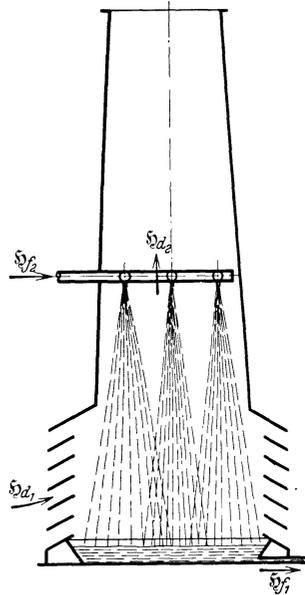


Abb. 43. Kühlturm.

**§ 24. Integration des Kühlturmvorganges.** Eine praktische Anwendung des Wärme- und Stoffaustausches ist die Abkühlung des warmen Wassers durch Wärmeübertragung und Verdunstung in einem Kühlturm. Die technische Ausführung eines Kühlturmes ist in Abb. 43 wiedergegeben. In einem Teil des Kühlturmes läßt man das warme Wasser von oben nach unten rieseln, während Luft aus der Atmosphäre von unten nach oben strömt. Es handelt sich also um einen Austausch im Gegenstrom, wie er in § 6 behandelt ist. Nimmt man auch die Wände des Kühlturmes wieder als undurchlässig für Stoff und Wärme an, so gilt die Gl. (15a), daß die Summe der Gesamtwerte beider Ströme in jedem Querschnitt des Turmes dieselbe ist. Wählt man nach § 6 ohne Rücksicht auf die tatsächliche Strömung als positive Richtung diejenige von

unten nach oben, so soll in dieser Richtung der Luftstrom mit  $\xi_a$ , der Wasserstrom mit  $-\xi_f$  bezeichnet werden. Ihre geometrische Summe bleibt in jedem Querschnitt dieselbe:

$$\xi_a - \xi_f = \text{konst} = \xi. \tag{56}$$

Die Integration des Kühlturvorganges kann praktisch nur im ebenen Diagramm vorgenommen werden. Daher sind alle Bestimmungsgleichungen in das  $i$ - $x$ -Diagramm oder die  $I$ - $B$ -Ebene zu übertragen. Der

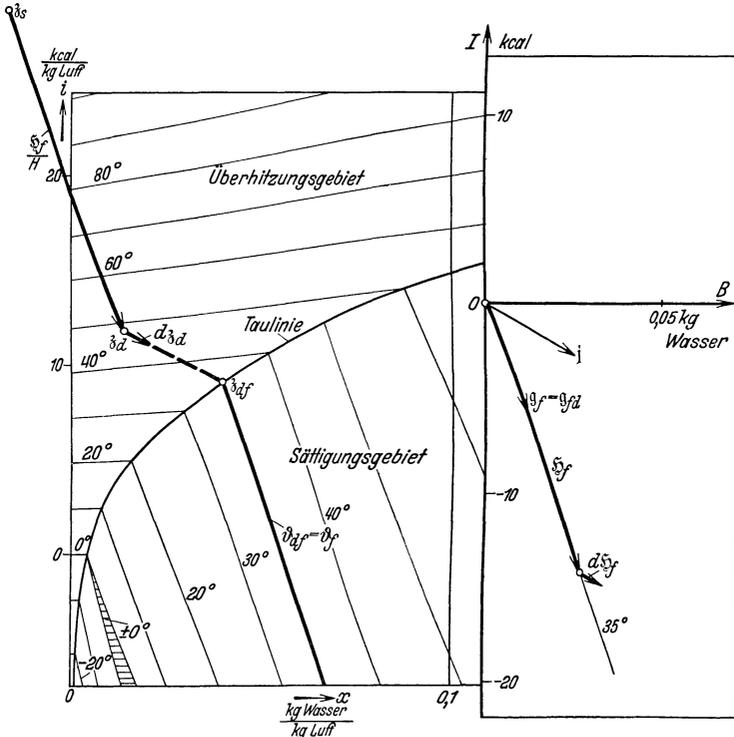


Abb. 44. Zustandsänderung von Luft und Wasser im Kühlturm.

Strom  $\xi_a$  hat im  $i$ - $x$ -Diagramm einen Bildpunkt  $\delta_a$  und ein Diagrammgewicht  $H_a$ , der Strom  $\xi_f$  erscheint dagegen in beiden Ebenen als wahrer Vektor. Daraus folgt eine Beziehung zwischen den Bildpunkten  $\delta_a$  des Luftstromes und  $\delta_s$  des Querschnittstromes  $\xi$ :

$$H_a \cdot \delta_a - \xi_f = H \cdot \delta_s. \tag{56 a}$$

Nach Gl. (56) sind nun sowohl  $H$  als auch  $\delta_s$  konstant. Da  $\xi_f$  als wahrer Vektor kein Diagrammgewicht hat, so findet man (Abb. 44)

$$\left. \begin{aligned} H_a &= H = \text{konst.} \\ \delta_a - \frac{\xi_f}{H} &= \delta_s = \text{konst.} \end{aligned} \right\} \tag{57}$$

Beachtet man außerdem, daß beide Ströme  $\mathfrak{S}_a$  und  $\mathfrak{S}_f$  Konvektionsströme darstellen, so ergibt sich aus dem Bildpunkt  $\mathfrak{z}_a$  auch der Zustand der Luft in jedem Querschnitt und aus der Richtung von  $\mathfrak{S}_f$  die Wassertemperatur in der *I-B*-Ebene:

$$\text{Zust}(\mathfrak{S}_a) = \mathfrak{z}_a, \quad \text{Zust}(\mathfrak{S}_f) = \mathfrak{h}_f = \mathfrak{g}_f. \quad (58)$$

Da man aber aus Gl. (57) schon die Richtung von  $\mathfrak{S}_f$  aus  $\mathfrak{z}_s$  und  $\mathfrak{z}_a$  erkennen kann, schreibt man noch besser

$$\text{Zust}(\mathfrak{S}_f) = \mathfrak{g}_f = \text{Richtg}(\mathfrak{z}_a - \mathfrak{z}_s). \quad (58a)$$

Als Vereinfachung soll nun angenommen werden, daß man die Temperaturdifferenz zwischen der Wasseroberfläche und der mittleren Wassertemperatur vernachlässigen kann. Es ist dann auch die Oberflächen-temperatur  $\vartheta_{af}$  gleich der mittleren Wassertemperatur  $\vartheta_f$  des Konvektionsstromes:

$$\mathfrak{g}_{fa} = \mathfrak{g}_f = \text{Richtg}(\mathfrak{z}_a - \mathfrak{z}_s). \quad (59)$$

Statt der unbekanntenen Sättigungsisotherme  $\vartheta_{af}$  benutzt man nach dieser Annahme einfach die Sättigungsisotherme  $\vartheta_f$ , die im *i-x*-Diagramm dieselbe Richtung wie  $\mathfrak{g}_f$  oder  $\mathfrak{z}_a - \mathfrak{z}_s$  hat.

Der eigentliche Austausch vollzieht sich nun an der Oberfläche der Wassertropfen. Photographiert man die Tropfen in einem Augenblick, so erhält man die in jedem Augenblick vorhandene Gesamtoberfläche aller Tropfen, die man von unten her zur Austauschfläche *F* summieren kann. Zwischen zwei benachbarten Querschnitten des Kühlturmes liegt genau wie in Abb. 7 auch im Kühlturm eine Austauschfläche *dF* als Summe aller dazwischen befindlichen Tropfen. Entsprechend dem Zustandsunterschied und der Stärke der Turbulenz ergibt sich die Austauschstromdichte  $\mathfrak{S}$  an diesen Oberflächen. Unter Beachtung des Vorzeichens von  $-\mathfrak{S}_f$  liefert Gl. (14)

$$d\mathfrak{S}_a = -\mathfrak{S} \cdot dF = d\mathfrak{S}_f. \quad (60)$$

Die Austauschstromdichte  $\mathfrak{S}$  ist nach Gl. (52 u. 54):

$$\mathfrak{S} = -\zeta_a \cdot \mathfrak{S}_a^* = -\sigma(\mathfrak{z}_{af} - \mathfrak{z}_a). \quad (61)$$

Im *i-x*-Diagramm sind  $\mathfrak{S}_f$  und  $\mathfrak{S}$  wahre Vektoren, daher liefert Gl. (60) unter Beachtung von Gl. (57)

$$H \cdot d\mathfrak{z}_a = \sigma \cdot (\mathfrak{z}_{af} - \mathfrak{z}_a) \cdot dF = d\mathfrak{S}_f. \quad (62)$$

Mit *H* = konst nach Gl. (57) gelingt die Integration dieser Differentialgleichung durch Trennung derjenigen Variablen, die im *i-x*-Diagramm verzeichnet sind, von denjenigen, die der Kühlturm liefert:

$$\int_1^2 \frac{d\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_{af} - \mathfrak{z}_a} = \int_0^F \frac{\sigma \cdot dF}{H} = \frac{\sigma_m \cdot F}{H} \quad (63)$$

Die Integration auf der linken Seite läßt sich nun im  $i-x$ -Diagramm vornehmen, indem man zunächst eine Linie einzeichnet, bei der Zähler und Nenner stets gleiche Richtung besitzen. Der Fortschritt  $d\delta_a$  muß also stets dem Punkte  $\delta_{af}$  auf der Kondensationslinie zustreben. Dieser Punkt  $\delta_{af}$  ist jedem Punkte  $\delta_a$  dadurch zugeordnet, daß die hier endende Sättigungsisotherme  $\vartheta_{af} = \vartheta_f$  nach Gl. (59) die Richtung von  $\delta_a - \delta_s$  besitzt (Abb. 44). Fügt man derartige Fortschritte aneinander, so er-

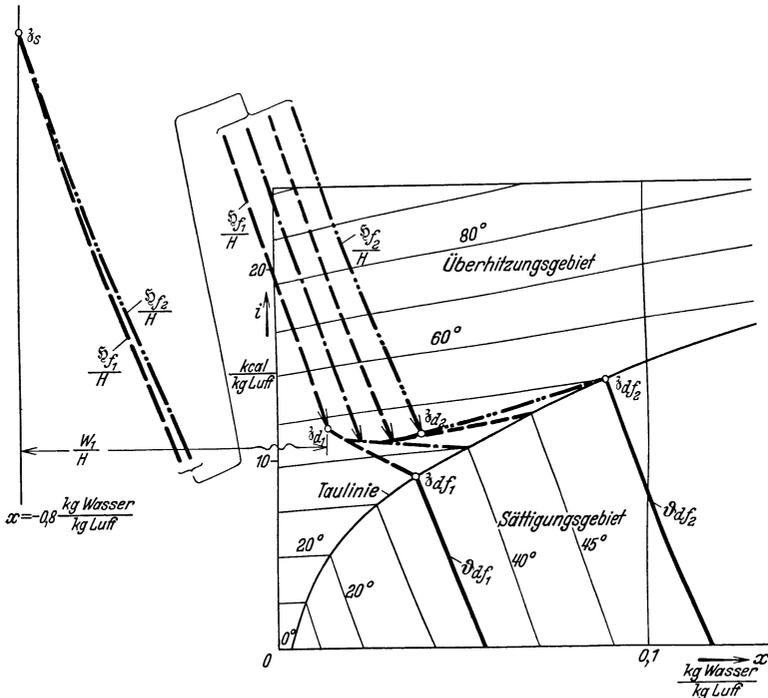


Abb. 45. Zustandslinie der Luft im Kühlturm.

gibt sich die Zustandsänderung der Luft im Kühlturm, aus der man dann das Integral der linken Seite von Gl. (63) auch zahlenmäßig bestimmen kann (Abb. 45).

Die rechte Seite von Gl. (63) stellt schon in gewisser Weise ein Maß für die Güte des Kühlturmes dar. Je größer ihr Wert wird, um so weiter kann man die Zustandsänderung der Luft treiben. Da es nun aber nicht auf die Zustandsänderung der Luft, sondern auf die Zustandsänderung des warmen Wassers ankommt, dividiert Merkel auf der rechten Seite nicht durch  $H$ , sondern durch die Stromstärke  $W$  des Wassers. Es kommt dann in der Gleichung zum Ausdruck, daß die Oberfläche  $F$  sich mit der Wassermenge  $W$  ändert. Die Wassermenge  $W$  ist die  $B$ -Komponente

von  $\mathfrak{S}_f$ , also  $W = \mathfrak{S}_{fb}$  :

$$\frac{H}{W} \int_1^2 \frac{d \delta a}{\delta a_f - \delta a} = \frac{\sigma_m \cdot F}{W} = \text{Kühlstärke} = \frac{1}{a} . \quad (64)$$

Merkel umgeht allerdings diese exakte Integration im  $i$ - $x$ -Diagramm (Lit.-Verz. Nr.16), daher ist seine Kühlziffer  $a$  nur näherungsweise mit der aus Gl. (64) identisch. Auch in dieser Gleichung sind noch Unvoll-

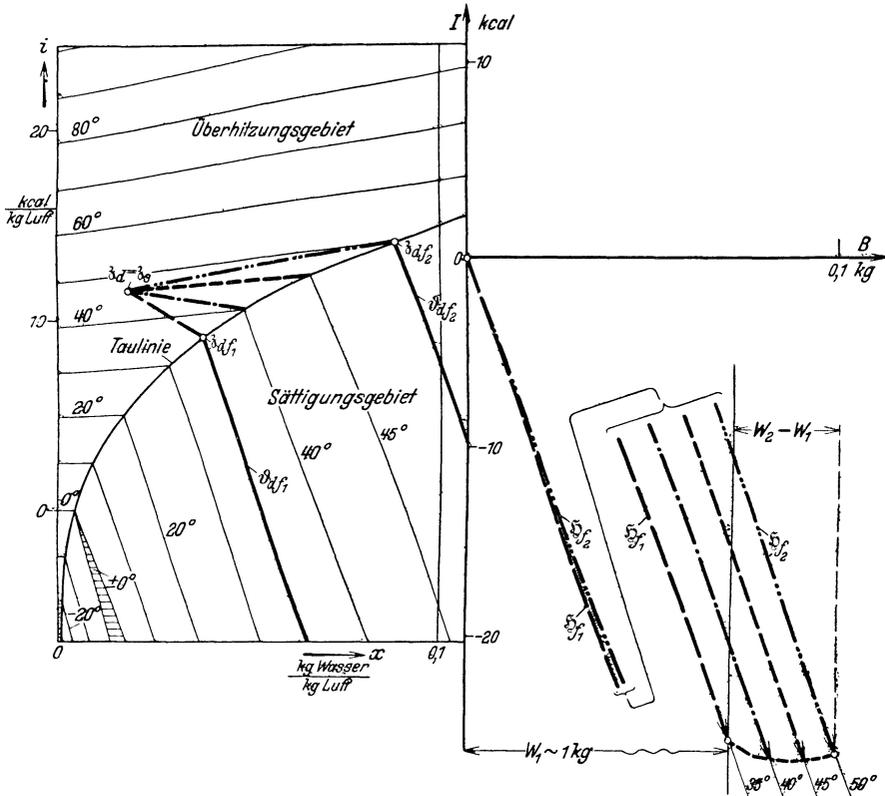


Abb. 46. Verdunstung bei unendlichem Luftstrom im Kühlturm.

kommenheiten, die bei Wasser belanglos sind. So bleibt die Austauschfläche  $F$  nicht genau dieselbe, wenn sich die Verdunstung ändert. Auch ist die Wassermenge  $W_2$  oben und  $W_1$  unten verschieden. Die verdunsteten Wassermengen  $W_2 - W_1$  sind jedoch praktisch so klein, daß in den Abb. 45 u. 46 Unterbrechungen in den Strecken  $\mathfrak{S}_f$  angewandt werden mußten, um die Änderungen größer darstellen zu können. Da die Güte eines Kühlturmes auch von der Luftmenge abhängt, die er

ansaugt, bildet Merkel als Vergleichsgröße noch die Kühlziffer  $\alpha_\infty$  für beliebig große Luftmenge  $H$ . In diesem Falle wird Gl. (64) unbestimmt. Man berechnet daher besser die Änderung des Gesamtwertes  $\mathfrak{S}_f$  nach Gl. (62):

$$\frac{1}{W} \int_1^2 \frac{d\mathfrak{S}_f}{\delta_{af} - \delta_a} = \frac{\sigma_m \cdot F}{W} = \text{Kühlstärke} = \frac{1}{a}. \quad (65)$$

Bei unendlich großer Luftmenge vereinfacht sich diese Gleichung dadurch, daß sich der Zustand  $\delta_a$  der Luft nicht mehr ändert. Trägt man

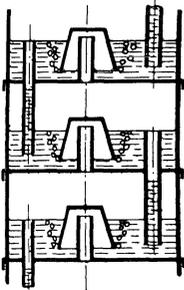


Abb. 47.  
Rektifikationsssäule.

nun  $\mathfrak{S}_f$  in der  $I$ - $B$ -Ebene auf, so ergibt sich aus der Richtung von  $\mathfrak{S}_f$  die Temperatur  $\vartheta_f$  und damit auch die Sättigungsisotherme  $\vartheta_{af} = \vartheta_f$ . Der Fortschritt  $d\mathfrak{S}_f$  ist nun stets in Richtung der Verbindungslinie des festen Punktes  $\delta_a$  im  $i$ - $x$ -Diagramm mit dem jeweiligen Punkt  $\delta_{af}$  vorzunehmen. Auf diese Weise erhält man die Verdunstung und Abkühlung des Wassers im  $I$ - $B$ -Diagramm (Abb. 46). Bei endlicher Luftmenge erhält man eine ganz ähnliche Darstellung von  $\frac{\mathfrak{S}_f}{H}$  zwischen dem Punkt  $\delta_s$  und der Zustandslinie  $\delta_a$ .

### § 25. Wärme- und Stoffaustausch bei der Rektifikation.

Die Integration des Kühlturmvorganges vereinfacht sich dadurch, daß die Flüssigkeit aus reinem Wasser besteht und daher der Austauschstrom auf 2 Komponenten beschränkt ist. Bei der Rektifikation von Gemischen ist auch die Flüssigkeit von verschiedener Zusammensetzung, so z. B. bei Gemischen von Alkohol und Wasser. Technisch könnte der Austausch in Rektifikationsanlagen in derselben Weise wie beim Kühlturm ausgeführt werden. Man verwendet hier aber auch vielfach Säulen, die aus Böden bestehen, in denen sich eine größere Flüssigkeitsmenge ansammelt. Der Dampf steigt dann in Blasen durch die Flüssigkeit auf (Abb. 47). Um nun nicht zu weit vom Austausch selbst abzugehen, soll hier nur die Zustandsänderung einer Dampfblase beim Durchlaufen eines Bodens betrachtet werden. Wesentlich für die Größe des Austausches sind dabei die Aufstiegszeit  $\tau$  in der Flüssigkeit, die Oberfläche  $F$  der Dampfblase und ihr Gesamtwert  $\mathcal{G}_a$ . Aus der Stärke der turbulenten Mischbewegung ergeben sich die Werte  $\zeta_a$  und  $\zeta_f$ , die nach Gl. (54) auch durch die Stoffaustauschzahlen  $\sigma_a = \zeta_a \cdot G_{am}^*$  und  $\sigma_f = \zeta_f \cdot G_{fm}^*$  ersetzt werden können, wenn man mit Mittelwerten für  $G_a^*$  und  $G_f^*$  auskommt. Der Flüssigkeitsvorrat in einem Boden kann gegenüber der aufsteigenden Blase als beliebig groß angesehen werden.

Bei der Berechnung der Austauschstromdichte  $\mathfrak{S}$  in Dampf und Flüssigkeit ist es besonders angenehm, daß die Dampfzustände alle fast auf

der Kondensationslinie liegen, während die Flüssigkeitszustände auf der Siedelinie liegen. Nach Abb. 48 verändert sich dann der Schnittpunkt  $\delta_j$  der Geraden durch  $\delta_a$  und  $\delta_{df}$  bzw. durch  $\delta_{fa}$  und  $\delta_f$  nicht sehr stark, wenn man der Reihe nach alle Sättigungsisothermen  $\vartheta_{df}$  zwischen  $\vartheta_a$  und  $\vartheta_f$  daraufhin prüft, ob sie als Oberflächentemperatur in Frage kommen. Verlaufen die Kondensations- und Siedelinien völlig geradlinig, so ist  $\delta_j$

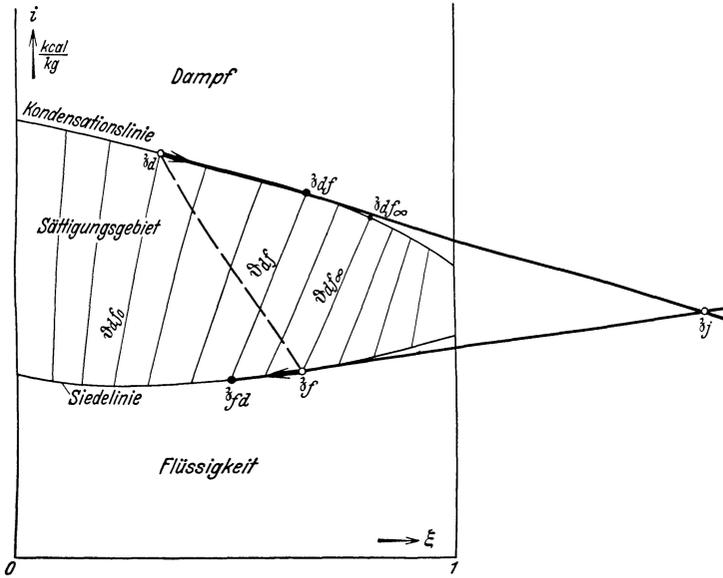


Abb. 48. Austausch bei der Rektifikation.

überhaupt ein fester Punkt, der in einem geeigneten Diagramm ins Unendliche verlegt werden kann. Für das Diagrammgewicht  $J$  erhält man aus Gl. (30 u. 31) die beiden Ausdrücke:

$$-J = \sigma_a \cdot \ln \frac{\delta_j - \delta_a}{\delta_j - \delta_{df}} = \sigma_f \cdot \ln \frac{\delta_j - \delta_{fa}}{\delta_j - \delta_f}. \tag{66}$$

Liegt  $\delta_j$  in genügend großer Entfernung, so kann man auch die Näherungen für den Logarithmus benutzen:

$$-J = \sigma_a \cdot \frac{\delta_{df} - \delta_a}{\delta_j - \delta_a} = \sigma_f \cdot \frac{\delta_f - \delta_{fa}}{\delta_j - \delta_{fa}}. \tag{66a}$$

Aus Gl. (66a) ist die gesuchte Oberflächentemperatur  $\vartheta_{df}$  besonders leicht zu bestimmen. Hat man diese gefunden, so ergibt sich aus der Gleichung auch das Diagrammgewicht  $J$ , das im Punkte  $\delta_j$  die Austauschstromdichte verkörpert. Der positive oder negative Wert  $J$  zieht nun die Bildpunkte  $\delta_a$  und  $\delta_f$  auf  $\delta_j$  zu oder von  $\delta_j$  weg. Man erkennt daraus, daß ihre Wanderung tatsächlich nahezu auf der Kondensations- bzw.

Siedelinie erfolgt. Unbekannt sind hier also nicht die durchlaufenen Zustände, sondern nur der Endpunkt der Wanderung nach der Aufstiegszeit  $\tau$  der Dampfblase. Diesen kann man nach Gl. (28) bestimmen, die folgende Differentialgleichung liefert:

$$H \cdot dt = J \cdot F \cdot dt = - G_d \cdot \frac{d\delta_a}{\delta_j - \delta_a} = - dG_d. \quad (67)$$

Während der ganzen Zustandsänderung des Dampfes soll der Zustand der Flüssigkeit  $\delta_f$  wegen der großen Flüssigkeitsmenge konstant bleiben, außerdem soll  $\delta_j$  stets derselbe Punkt sein. Man findet zunächst

$$\frac{dG_d}{G_d} = \frac{d\delta_a}{\delta_j - \delta_a}$$

oder  $G_d \cdot (\delta_j - \delta_a) = \text{konst.}$  Die weitere Integration läßt sich rein analytisch nur durchführen, wenn  $\sigma_f$  gegenüber  $\sigma_a$  als beliebig groß angesehen werden darf. Dann ist die Oberflächentemperatur  $\vartheta_{df}$  gleich  $\vartheta_f$ . Der Punkt  $\delta_{df}$  liegt daher in Abb. 48 auf  $\vartheta_{df\infty}$ . Man erhält in diesem Fall aus Gl. (67 u. 66):

$$\int_0^\tau \sigma_a \cdot F \cdot dt = G_d (\delta_j - \delta_a) \int_1^2 \frac{d\delta_a}{(\delta_j - \delta_a)^2 \cdot \ln \frac{\delta_j - \delta_a}{\delta_j - \delta_{df\infty}}}. \quad (68)$$

Ist es erlaubt, Gl. (66a) zu verwenden, so vereinfacht sich dieser Ausdruck in folgender Weise:

$$\int_0^\tau \sigma_a \cdot F \cdot dt = \sigma_{cm} \cdot F \cdot \tau = G_d \ln \frac{\delta_{df\infty} - \delta_{a1}}{\delta_{df\infty} - \delta_{a2}}. \quad (68a)$$

Ist nun aber  $\sigma_f$  vergleichbar mit  $\sigma_a$ , so ist auf die Veränderung von  $\delta_{df}$  Rücksicht zu nehmen. Verlaufen die Isothermen in dem Bereich von  $\delta_a$  bis  $\delta_f$  einigermaßen parallel oder schneiden sie sich annähernd in einem Punkte, so ist die Strecke  $\delta_{df} - \delta_a$  nahezu proportional  $\delta_{df\infty} - \delta_a$ . In diesem Fall ist die Integration nicht schwieriger. Völlig andere Ergebnisse sind jedoch möglich, wenn die Neigung der Sättigungsisothermen hin und her geht. In diesem Falle kann man die Integration nur schrittweise an Hand des Zustandsdiagrammes durchführen.

Aus der Näherungsgleichung (68a) bekommt man schon ein gewisses Bild, wie sich auch bei der Rektifikation alle Zustandsänderungen in solche Faktoren zerlegen lassen, die von der Ausführung der Anlage abhängen, und solche die aus den Stoffeigenschaften hervorgehen. Auch hier muß sich daher mit der Zeit das Ziel erreichen lassen, eine Rektifikationsanlage völlig auf Grund des Zustandsdiagrammes vorzuberechnen.

nen. Natürlich sind dazu noch Untersuchungen über Blasengrößen, Stärke der Turbulenz usw. nötig. In vielen Fällen werden außerdem auch laminare Schichten in der Flüssigkeit zu beachten sein.

Fünftes Kapitel.

**Beispiele mit laminaren Schichten.**

§ 26. **Laminarer Austausch beim einfachen Stoff.** In Kapitel III ist nur der allgemeinere Fall behandelt, daß man es mit einem Zweistoffgemisch zu tun hat. In den Ausführungen ist aber sicher auch der Austausch beim einfachen Stoff enthalten, weil schon der reine Stoff  $A$  bei  $x=0$  ein derartiger einfacher Stoff ist. Nimmt man nun den Stoff  $B$  als überhaupt nicht vorhanden an, so liegen alle Zustände auf der einen Linie  $x=0$ . Da aber auch die Wärme- und Stoffströme den Stoff  $B$  nicht enthalten können, liegen auch ihre Bildpunkte auf dieser Linie  $x=0$ . Bei jedem Zweistoffgemisch ist daher sicher die Linie  $x=0$  eine Hauptrichtung des Austauschensors. Auf ihr gilt stets der Hauptfaktor  $a$ . (Für  $x=0$  gilt daher diese Vereinfachung exakt, die in § 19 für jede Linie  $x=\text{konst.}$  angenommen ist.) Beim einfachen Stoff ist aber  $a$  zugleich die einzige Komponente des Austauschensors, so daß dieser stets zu dem gewöhnlichen Faktor  $a$  entartet. Aber auch der Zustandsvektor  $\xi$  verliert hier eine Komponente und läßt sich durch den spezifischen Wärmeinhalt  $i$  allein angeben. Als Bezugsgröße wird man beim einfachen Stoff immer das Gewicht benutzen und daher  $G^*$  durch  $\gamma$  ersetzen können. In Gl. (39) kann man also folgende Vereinfachungen einführen:

$$-J \cdot L = \int_I^{II} \gamma \cdot a \frac{di}{i_j - i} = J_{\text{laminar}}^* \tag{69}$$

Geht man in gleicher Weise bei dem turbulenten Austausch Gl. (27) vor, so erhält man beim einfachen Stoff:

$$-J \frac{1}{\zeta} = \int_I^{II} \gamma \cdot \frac{di}{i_j - i} = J_{\text{turbulent}}^* \tag{70}$$

Diese beiden Gleichungen stimmen völlig überein, wenn man die Stoffeigenschaft  $\gamma \cdot a$  durch die Stoffeigenschaft  $\gamma$  ersetzt und wenn man statt der geometrischen „Durchgangszahl“  $\frac{1}{L}$  die kinematische Durchgangszahl  $\zeta$  benutzt. Will man den einfachen Stoff in der  $I$ - $G$ -Ebene behandeln, so braucht man daher auch dort die  $\gamma$ -Linie nur durch eine  $(\gamma \cdot a)$ -Linie zu ersetzen (Abb.49). Alle Ergebnisse des turbulenten Austausches beim einfachen Stoff behalten auch beim laminaren Austausch ihre Gültigkeit, soweit es dabei auf die genaue Gestalt der  $\gamma$ -Linie selbst

nicht ankommt. In vielen Fällen kann man mit einem konstanten Mittelwert der Temperaturleitzahl  $a$  auskommen. Dann läßt sich in Gl. (69) der Faktor  $a$  vor das Integral und auf die linke Seite bringen. In diesem

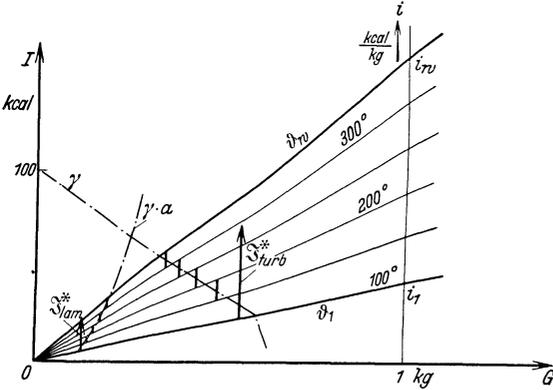


Abb. 49. Laminarer Wärmeübergang an Wasserdampf.

Falle ist die Übereinstimmung beider Gleichungen noch größer. Lediglich auf der linken Seite ist dann beim laminaren Austausch die kinematische Durchgangszahl  $\frac{a}{L}$  statt der turbulenten  $\zeta$  einzusetzen. Beide Größen haben die gleiche Dimension. Es rührt nur  $\frac{a}{L}$  von der natürlich vor-

handenen Wärmebewegung der Moleküle her, während  $\zeta$  aus einer künstlichen Mischbewegung stammt.

Im Sättigungsgebiet verschwindet bei einfachen Stoffen die Temperaturleitzahl  $a$ . Hier unterscheidet sich der laminare Austausch wesentlich von dem turbulenten. Beim laminaren Austausch erhält das Sättigungsgebiet die Schichtdicke Null, während es beim turbulenten Austausch in endlicher Schicht auftreten kann. Im allgemeinen kommt dieser Unterschied deswegen nicht zur Geltung, weil man es mit der unterbrochenen Turbulenz nach § 22 zu tun hat. Bei Gemischen verschwindet im Sättigungsgebiet ein Hauptfaktor des

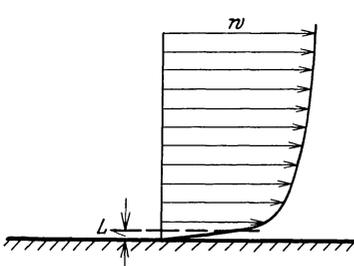


Abb. 50. Laminare Wandschicht einer Strömung.

Austauschtensors. Doch läßt sich in diesem Gebiet deswegen nicht nach den gleichen Ansätzen rechnen, weil man z. B. die Nebeltropfen als Fremdkörper in der gesättigten Luft betrachten muß.

**§ 27. Turbulenter Austausch mit laminaren Schichten.** Beim einfachen Stoff sind die Gesetze des turbulenten und laminaren Austausches so gleichartig, daß man ohne Schwierigkeit neben turbulenten Schichten auch die laminaren berücksichtigen kann. An dieser Stelle sind aber gerade in Kapitel II und IV Vernachlässigungen gemacht, indem alle laminaren Schichten als unendlich dünn angesehen sind. Ist es beim einfachen Stoff sogar gestattet, mit einem konstanten Mittelwert für  $a$  zu rechnen, so kann man beim Austausch durch mehrere Schichten gleich

deren Austauschwiderstände, d. h. die reziproken kinematischen Durchgangszahlen, addieren. Befindet sich an einer Wand oder Flüssigkeitsoberfläche zunächst eine laminare Schicht von der Stärke  $L$  (Abb. 50), auf die dann erst eine rein turbulente Schicht mit der kinematischen Durchgangszahl  $\zeta_0$  folgt, so gilt für die gesamte Durchgangszahl  $\zeta$  die Beziehung

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\zeta_0} + \frac{L}{a}. \tag{71}$$

Bei Strömungen entlang der Oberfläche ist nach Prandtl (Lit.-Verz. Nr. 17) sowohl die Stärke der turbulenten Mischbewegung, die in  $\zeta_0$  zum Ausdruck kommt, als auch die laminare Schichtdicke  $L$  rein durch die hydrodynamischen Bedingungen bestimmt. An Stoffeigenschaften spielt dabei also nur die kinematische Zähigkeit  $\nu$  und das spezifische Gewicht  $\gamma$  eine Rolle. Bei einer aufgezwungenen Strömung (Lit.-Verz. Nr. 21) mit einer Geschwindigkeit  $w$  und einer Kanalabmessung oder Modellabmessung  $l$  ist daher unter ähnlichen geometrischen Bedingungen nur die Reynoldssche Zahl

$$Re = \frac{w \cdot l}{\nu} \tag{72}$$

zu beachten. Handelt es sich um eine freie Strömung durch den Auftrieb, der im Erdschwerefeld von der Erdbeschleunigung  $g$  und der spezifischen Gewichts-differenz  $\gamma_1 - \gamma_2$  stammt, so ist statt der Reynoldsschen Zahl die Grashofsche Zahl

$$Gr = \frac{l^3 \cdot g \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)}{\nu^2 \cdot \gamma_1} \tag{73}$$

maßgebend. Die dimensionslose rein turbulente Durchgangszahl  $\frac{\zeta_0 \cdot l}{\nu}$  hängt daher nur noch von der Reynoldsschen (bzw. Grashofschen) Kennzahl ab:

$$\frac{\zeta_0 \cdot l}{\nu} = f_0(Re). \tag{74}$$

Dasselbe gilt auch für die dimensionslose Schichtdicke  $L/l$ :

$$\frac{L}{l} = f_1(Re). \tag{75}$$

Sobald man auch die Wärmeleitung in einer derartigen Doppelschicht betrachtet, kommt in der laminaren Schicht noch die Stoffeigenschaft  $a$  hinzu, die dieselbe Dimension hat wie die kinematische Zähigkeit  $\nu$ . Das Verhältnis beider Größen ist die Prandtlsche Zahl

$$Pr = \frac{\nu}{a}. \tag{76}$$

Die gesuchte Größe, nämlich die Wärmeübergangszahl  $\alpha$ , bezeichnet man in einer dimensionslosen Form, die sich sowohl für aufgezwungene als

auch für freie Strömungen eignet, als die Nußeltsche Zahl. Unter Berücksichtigung von Gl. (49) kann man sie auch als dimensionslose Form für  $\zeta$  ansehen:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot l}{\gamma \cdot c_p \cdot a} = \frac{\zeta \cdot l}{a}. \quad (77)$$

Für die verschiedensten geometrischen Bedingungen hat man die Wärmeübergangszahl und damit die Nußeltsche Zahl  $Nu$  schon in Abhängigkeit von der Reynoldsschen (bzw. Grashofschen) Zahl und der Prandtlschen Zahl bestimmt. Man kennt daher empirische Funktionen  $F$ :

$$Nu = F(Re, Pr). \quad (78)$$

Nach Gl. (71, 74, 75 u. 77) kann diese Funktion  $F$  nicht mehr in beliebiger Weise von der Prandtlschen Zahl  $Pr$  abhängen, denn man erhält aus den genannten Gleichungen:

$$Nu = \frac{\zeta \cdot l}{a} = \frac{Pr}{\frac{1}{f_0(Re)} + f_1(Re) \cdot Pr} \quad (78a)$$

Da bisher die Versuchsgenauigkeit nicht genügt, um zu entscheiden, ob der Prandtlsche Ansatz (78a) richtig ist, muß man alle empirischen Funktionen  $F$  als mit (78a) verträglich ansehen, wenn man in dem Gebiet der Prandtlschen Zahlen bleibt, in dem tatsächlich gemessen ist. Es ist aber nicht ganz gleichgültig, wie man anders gebaute Funktionen  $F$  auf die Form (78a) bringt. Um hierbei keine allzu großen Fehler machen zu können, soll angenommen werden, man bildet bei gleicher Reynoldsscher (bzw. Grashofscher) Zahl zwei verschiedene Nußeltsche Zahlen  $Nu_1$  und  $Nu_2$  aus der bekannten Funktion  $F$  entsprechend den beiden Prandtlschen Zahlen  $Pr_1$  und  $Pr_2$ , bei denen wirkliche Messungen angestellt sind. Bezogen auf die kinematische Durchgangszahl  $\zeta_1$  der Doppelschicht für die Prandtlsche Zahl  $Pr_1$  findet man dann die laminare Schichtdicke  $L$ :

$$L = \frac{a_1}{\zeta_1} \cdot \frac{Nu_1/Nu_2 - Pr_1/Pr_2}{1 - Pr_1/Pr_2}. \quad (79)$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite ist zugleich das Verhältnis des laminaren Wärmewiderstandes  $\frac{L}{a_1}$  zum gesamten Wärmewiderstand der Doppelschicht  $\frac{1}{\zeta_1}$ .

Ist nun z. B. die Nußeltsche Zahl in der bekannten Potenzform gegeben ( $Pé = Re \cdot Pr = Péclet'sche$  Zahl):

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pé^n = C \cdot Re^{m+n} \cdot Pr^n,$$

so erhält man nach Gl. (79):

$$L = \frac{a_1}{\zeta_1} \cdot \frac{(Pr_1/Pr_2)^n - Pr_1/Pr_2}{1 - Pr_1/Pr_2}. \quad (79a)$$

Liegen z. B. Meßwerte vor für Luft mit  $v_1 = 0,14 \text{ cm}^2/\text{s}$  und  $a_1 = 0,196 \text{ cm}^2/\text{s}$  und für Wasser mit  $v_2 = 0,010 \text{ cm}^2/\text{s}$  und  $a_2 = 0,0014 \text{ cm}^2/\text{s}$ , so erhält man etwa für die Strömung im Rohr bei  $n = 0,38$ :

$$L = \frac{a_1}{\zeta_1} \cdot \frac{0,1^{0,38} - 0,1}{1 - 0,1} = \frac{a_1}{\zeta_1} \cdot 0,35 \quad (80)$$

für die Verhältnisse in Luft. Entsprechend findet man

$$L = \frac{a_2}{\zeta_2} \cdot \frac{10^{0,38} - 10}{1 - 10} = \frac{a_2}{\zeta_2} \cdot 0,84 \quad (80a)$$

für die Verhältnisse in Wasser. Aus den Zahlenwerten in Gl. (80 u. 80a) erkennt man, daß die Wirkung der laminaren Schichten beträchtlich sein kann, wenn sie sich beim Austausch anders verhalten als die turbulenten. Dies ist aber bei Gemischen stets der Fall, wenn ihre Hauptfaktoren  $a$  und  $\delta$  stark voneinander abweichen. Für Luft gegen Wasserdampf ist  $\delta = 0,22 \text{ cm}^2/\text{s}$  also  $a/\delta = 0,90$  und für Wasser gegen Alkohol etwa  $\delta = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$  und daher  $a/\delta = 140$ . Man wird aus diesem Grunde beim Wärme- und Stoffaustausch noch viel mehr als beim reinen Wärmeübergang besonderen Wert auf die laminaren Schichten legen müssen, sobald man es mit Flüssigkeiten und nicht mit Gasen zu tun hat. Aus diesem Grunde ist in Kapitel III auf alle Feinheiten beim laminaren Austausch hingewiesen.

**§ 28. Laminarer Austausch bei Wasser-Luft-Gemischen.** Die Wasser-Luft-Gemische haben den Vorteil, daß man ihre flüssige Phase als reines Wasser ansprechen darf. Daher ist in der Flüssigkeit kein wesentlicher Unterschied zwischen laminarem und turbulentem Austausch. In diesem Falle hat es einen Sinn, auf feinere Unterschiede im Dampf einzugehen, die eintreten, sobald man laminare Schichten endlicher Dicke berücksichtigt. Als Beispiel soll hier die Berechnung der Luftfeuchtigkeit aus einem trockenen und einem feuchten Thermometer behandelt werden. In dem letzten Absatz von § 23 ist bereits der Fall angegeben, daß man den Austausch als rein turbulent ansieht. Betrachtet man jetzt eine laminare Schicht endlicher Stärke über und unter der Wasseroberfläche, so kann sich im Wasser bis einschließlich der Wasseroberfläche grundsätzlich nichts ändern. An der Oberfläche ist bei der unterbrochenen Turbulenz immer eine laminare Schicht, wenn auch von verschwindender Dicke, angenommen und im Wasser haben wir es mit einem einfachen Stoff zu tun. Der Beharrungszustand der Temperatur des feuchten Thermometers wird daher auch jetzt wieder eintreten, wenn die Temperatur der Wasseroberfläche gleich der Temperatur des übrigen Wassers also gleich der Anzeige des feuchten Thermometers ist. Die ganze Änderung betrifft nur die Zustände über der Wasseroberfläche.

Sei die Temperatur des feuchten Thermometers und der Wasseroberfläche  $\vartheta_{df}$  (vgl. Abb. 51), so liegt der Austauschstrom  $\mathfrak{J}$  schon der

Richtung nach fest. Auch jetzt ist die Oberfläche eine halbdurchlässige Wand, die den Stoff *A*, die Luft, nicht hindurch läßt. Daher erscheint der Austauschstrom im *i*-*x*-Diagramm als wahrer Vektor. Seine Richtung in diesem Diagramm ist parallel zur Sättigungsisotherme  $\vartheta_{af}$ , wenn die Wasseroberfläche in der Temperatur nicht mehr von dem übrigen Wasser abweicht. Bei turbulentem Austausch folgt nach Gl. (52) aus der Richtung des Austausches auch die Richtung der Zustandsdifferenz

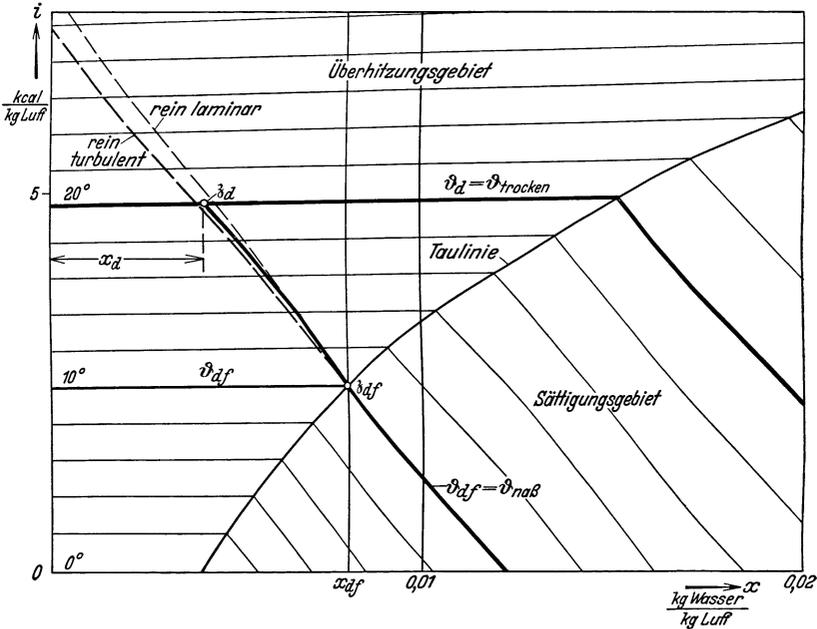


Abb. 51. Psychrometer Theorie.

$\delta_{af} - \delta_a$ , wobei  $\delta_a$  der Zustand der Luft in großer Entfernung vom Thermometer ist. Daher hat man beim turbulenten Austausch nur die Verlängerung der Sättigungsisotherme  $\vartheta_{af}$  zu ziehen und mit der Isotherme  $\vartheta_a$  des trockenen Thermometers zum Schnitt zu bringen. Beim laminaren Austausch ist aber gerade die Gleichheit der beiden Richtungen, Zustandsdifferenz und Austauschstrom, gestört. Die Zustandslinie, die von dem Endpunkt  $\delta_{af}$  der Sättigungsisotherme ausgeht, muß in der laminaren Schicht erst nach Gl. (42a) bestimmt werden:

$$\frac{di}{dx} = \frac{A'_{ii}(i_j - i) + A'_{ix}(x_j - x)}{A'_{xi}(i_j - i) + A'_{xx}(x_j - x)}$$

Da der Austauschstrom im *i*-*x*-Diagramm als wahrer Vektor seinen Bildpunkt *i<sub>j</sub>*, *x<sub>j</sub>* im Unendlichen hat, kommt es hier nur auf seine Richtung also das Verhältnis *i<sub>j</sub>/x<sub>j</sub>* an. Legt man nun noch die Hauptrich-

tungen in die Gerade  $x = \text{konst}$  und die Überhitzungsisotherme  $\vartheta_{af} = \text{konst}$ , so kann man diese Geraden auch als neue  $i$ -Achse und  $x$ -Achse ansehen. Dann verschwinden die Faktoren  $A'_{ix}$  und  $A'_{xi}$  in obiger Gleichung. Setzt man nun wieder  $A'_{ii}$  und  $A'_{xx}$  als konstant an mit den Werten  $\frac{1}{a}$  und  $\frac{1}{\delta}$ , so vereinfacht sich die Gl. (42a) in folgender Weise:

$$\frac{di}{dx} = \frac{\delta}{a} \frac{i_j}{x_j} = \text{konst.} \quad (81)$$

Nach § 27 ist  $a/\delta = 0,90$  für Luft mit geringen Mengen Wasserdampf. Im  $i$ - $x$ -Diagramm wird daher die laminare Zustandlinie vom Taupunkt  $\delta_{af}$  aus 1,11 mal steiler verlaufen als die Sättigungsisotherm  $\vartheta_{af}$ , wenn man auch die Steilheit in bezug auf die Gerade  $x = \text{konst}$  und die Überhitzungsisotherme  $\vartheta_{af} = \text{konst}$  angibt (Abb. 51). Zwischen dem rein turbulenten Austausch und dem rein laminaren ergeben sich dabei beachtliche Unterschiede für die Feuchtigkeit  $x$  bei gleichen Temperaturen  $\vartheta_a$  und  $\vartheta_{af}$  des trockenen und des feuchten Thermometers. Da das feuchte Thermometer aber immer angeblasen werden muß, um überhaupt die übrigen Fehlerquellen gering zu halten, so ist nur eine teilweise laminare und teilweise turbulente Auswertung von Bedeutung. In Abb. 51 ist daher der Fall eingetragen, daß der laminare Anteil auf der  $i$ -Achse gemessen nach Gl. (80) etwa 35% beträgt. Nimmt man diesen Fall als den wirklich eintretenden an, so ergibt die Molliersche Anweisung etwas zu geringe Feuchtigkeiten. Da aber die Fehler durch Strahlung und falsche Wärmeleitung die feuchte Temperatur der trockenen nähern, so dürfte die Molliersche Anweisung nur innerhalb der natürlichen Fehlergrenze von der Wirklichkeit abweichen.

## Literaturverzeichnis.

### A. Zustandsdiagramme für Zweistoffgemische.

1. Mollier, R.: Ein neues Diagramm für Dampfluftgemische. Z. VDI Bd. 67 (1923) S. 869.
2. Huber, J.: Zustandsänderungen feuchter Luft in zeichnerischer Darstellung. Z. bayer. Revis.-Ver. 28 (1924) 79.
3. Grubenmann, M.:  $I$ - $x$ -Tafeln feuchter Luft. Berlin 1926.
4. Hirsch, M.: Die Trockentechnik. Berlin 1927.
5. Mollier, R.:  $i$ - $x$ -Diagramm. Stodola, Festschrift, Zürich 1929.
6. Merkel, F. u. F. Bošnjaković: Diagramme und Tabellen zur Berechnung der Absorptions-Kältemaschinen. Berlin 1929.
7. Merkel, F.: Hütte, des Ing. Taschenbuch. 26. Aufl., Bd. I, S. 540.

### B. Turbulenz und Austausch.

8. Reynolds, O.: Papers, Bd. 1, S. 81.
9. Prandtl, L.: Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeit. Physik. Z. 11 (1910) 1072.
10. Taylor, G. J.: On the eddy motion in the atmosphere. Philos. Trans. (A) 215 (1914) 1.
11. Schmidt, W.: Der Massenaustausch bei ungeordneter Strömung in freier Luft und seine Folgen. Wien. Sitzber. IIa 126 (1917) 757.
12. v. Kármán, Th.: Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech. 1 (1921) 233.
13. Schmidt, W.: Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen. Hamburg 1925.

### C. Wärmeleitung, Diffusion usw.

14. Thoma, H.: Hochleistungskessel. Berlin 1921.
15. Lewis, W. K.: The Evaporation of a Liquid into a Gas. Mech. Engng. (1922), S. 445.
16. Merkel, F.: Verdunstungskühlung. Forschungsarbeiten, herausg. vom VDI (1925) Heft 275.
17. Prandtl, L.: Bemerkungen über den Wärmeübergang im Rohr. Z. Physik 29 (1928) 487.
18. Schmidt, E.: Verdunstung und Wärmeübergang, Gesundh.-Ing. 52 (1929) 525.
19. Nußelt, W.: Wärmeübergang, Diffusion und Verdunstung. Z. angew. Math. Mech. 10 (1930) 105.
20. Jakob, M., S. Erk u. H. Eck: Der Wärmeübergang beim Kondensieren strömenden Dampfes in einem vertikalen Rohr. Forschg. Ing.-Wes. 3 (1932) 161.
21. Gröber, H. u. S. Erk: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. 2. Aufl. Berlin 1933.