1961 г. ТРУДЫ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА Том 10

РОД РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА[1]

А. С. Шварц

СОДЕРЖАНИЕ[2]

[1]) Основные результаты статьи доложены на заседаниях Московского математического общества 11 февраля 1958 г. и 17 февраля 1959 г.

[2]) Работа содержит семь глав. Редакцией, ввиду большого объема статьи, в настоящий том включены лишь главы I—V. Окончание статьи будет опубликовано в следующем томе «Трудов».

Введение

В настоящей работе вводится и изучается понятие рода расслоенного пространства. **Родом расслоения** p: $E \to B$ называется наименьшая мощность открытого покрытия базы B, состоящего из множеств, над каждым из которых существует секущая поверхность.

Род расслоения можно рассматривать как некоторую «меру сложности» этого расслоения: расслоение имеет род 1, если у него существует секущая поверхность, расслоение имеет род $\leqslant n$, если оно может быть «склеено» из n расслоений, имеющих секущую поверхность.

Пусть в пространстве E действует без неподвижных точек группа G. Если естественное отображение пространства E на пространство траекторий E/G является главным расслоением, то род этого главного расслоения будем называть также родом пространства E относительно действующей в нем группы G.

Если в пространстве E действует преобразование A, имеющее период n, и преобразования $A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ не имеют неподвижных точек, то **родом пространства** E относительно преобразования A называется род пространства E относительно группы преобразований $\{A, A^2, \ldots, A^{n-1}, A^n\}$ (т. е. род накрытия $E \to E'$, где E' — пространство, получающееся из E отождествлением точек, эквивалентных относительно преобразования A).

Род расслоенного пространства рассматривался ранее в частных случаях М. А. Красносельским и Ян Чжун-дао. М. А. Красносельский [31] определил род топологического пространства относительно действующего в этом пространстве периодического преобразования и применил это понятие к исследованию стационарных значений функционалов на сфере гильбертова пространства. Стационарные значения функционалов вслед за М. А. Красносельским изучал с помощью понятия рода Ю. Г. Борисович [1]) [11]—[14], [16]. Ян Чжун-дао [75] ввел понятие B-**индекса** пространства относительно действующей в нем без неподвижных точек инволюции и применил это понятие к изучению структуры непрерывных отображений сферы в евклидовы пространства. B-индекс пространства относительно инволюции отличается на 1 от рода пространства относительно инволюции (в смысле Красносельского [2])).

С понятием рода расслоенного пространства тесно связано понятие категории топологического пространства в смысле Люстерника—Шнирельмана: род локально тривиального расслоенного пространства с паракомпактной базой не превышает категории базы; если пространство расслоения стягиваемо, то род расслоенного пространства равен категории базы. Отметим, что как Красносельский, так и Ян Чжун-дао при определении рода пространства относительно инволюции исходили из одной леммы Люстерника—Шнирельмана [34], передоказанной позже Борсуком [17].

В работе исследуется в разных направлениях понятие рода расслоенного пространства, в частности даются различные оценки рода и указываются некоторые приложения понятия рода расслоенного пространства.

---

[1]) Ю. Г. Борисович [15] ввел понятие рода пространства относительно непрерывного отображения пространства в себя. Это понятие не содержится в понятии рода расслоенного пространства.

[2]) В. К. Мельников ввел понятие рода пространства относительно инволюции и применил это понятие к исследованию структуры непрерывных отображений сфер. Работа В. К. Мельникова не была опубликована, так как выяснилось, что результаты этой работы получил несколько ранее Ян Чжун-дао.

Перейдем к обзору содержания работы по главам.

Глава I имеет предварительный характер. В ней указываются обозначения, используемые в дальнейшем, а также приводятся определения некоторых топологических понятий. Формулируются некоторые теоремы, касающиеся этих понятий.

Во второй главе определяются и изучаются операции с расслоенными пространствами: сумма и произведение расслоений, имеющих одну и ту же базу, соединение главных расслоений с одной и той же группой. Определения и результаты этой главы используются в дальнейшем для изучения рода расслоенного пространства. Они могут быть применены и для других целей[1]).

В третьей главе дается определение рода расслоенного пространства. Доказывается теорема: для того чтобы расслоение $\mathfrak{B}$ имело род $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы у суммы n экземпляров расслоения $\mathfrak{B}$ существовала секущая поверхность. С помощью этой теоремы получаются гомологические оценки рода расслоенного пространства. Указывается связь рода расслоения с размерностью базы этого расслоения. Даются гомологические необходимые и достаточные условия для того, чтобы расслоение, слой которого асферичен в размерностях $<s$, а база является ns-мерным полиэдром, имело род $n+1$. Вводится и исследуется понятие k-мерного рода расслоения, в частности доказываются неравенства, связывающие k-мерный род с родом расслоенного пространства.

В главе IV изучается род главного расслоенного пространства. Строится универсальное главное расслоенное пространство рода $\leqslant n$, т. е. такое главное расслоенное пространство с группой G, что в него можно допустимо отобразить те и только те главные расслоения с группой G, которые имеют род $\leqslant n$. Указываются гомологические оценки рода главного расслоенного пространства. В частности, вводится понятие гомологического рода главного расслоения.

Пятая глава посвящена исследованию рода расслоенного пространства с дискретной группой, т. е. рода топологического пространства относительно действующей в нем без неподвижных точек дискретной группы преобразований. В этом случае также даются оценки рода. Подробно изучается понятие гомологического рода, введенное в предыдущей главе.

В шестой главе устанавливается связь категории топологического пространства в смысле Люстерника — Шнирельмана и близких понятий (категория непрерывного отображения, k-мерная категория, категория класса когомологий) с понятием рода расслоенного пространства. С помощью указанных в предыдущих главах оценок рода расслоенного пространства получаются оценки для категории.

В седьмой главе указываются различные приложения понятия рода расслоенного пространства. Показывается, что с помощью результатов, содержащихся в главе IV, можно доказать теорему о классификации главных расслоенных пространств для расслоений с базой, являющейся произвольным нормальным пространством (группой расслоения может быть произвольная топологическая группа).

Для любого топологического пространства K род $g_p(K)$ пространства $K^p \diagdown d(K)$ относительно периодического преобразования T: $K^p \diagdown d(K) \to K^p \diagdown d(K)$, $T(x_1, \ldots, x_p) = (x_p, x_1, \ldots, x_{p-1})$ является топо-

[1]) Примечание при корректуре. Введенные в главе II операции с расслоенными пространствами оказались полезными при построении двойственности расслоенных пространств.

логическим инвариантом пространства K (через K^p обозначено произведение p экземпляров пространства K, d: $K \to K^p$ — диагональное вложение: $d(x) = (x, \ldots, x)$, p — простое число). Этот инвариант тесно связан с проблемой вложения пространства K в евклидово пространство E^n. Именно, для того чтобы пространство K можно было гомеоморфно вложить в E^n, необходимо выполнение условия $g_p(K) \leqslant n(p-1)$. Гомологический род $h_p(K)$ пространства $K^p \setminus d(K)$ относительно преобразования T был использован для получения оценки размерности евклидова пространства, в которое можно вложить пространство K, У Вень-цзюнем [54] и Шапиро [58]. Оказывается, что в случае, когда K — замкнутое многообразие, число $h_p(K)$ является гомотопическим инвариантом многообразия K. Если в определении гомологического рода вместо произвольной локальной системы коэффициентов использовать группу вычетов по модулю p, то мы получим вместо инварианта $h_p(K)$ инвариант $h'_p(K)$, более слабый, чем $h_p(K)$ (т. е. $h'_p(K) \leqslant h_p(K)$). В случае, когда K является замкнутым многообразием, для чисел $h'_p(K)$ указываются формулы, выражающие эти числа через приведенные степени Стинрода в многообразии K. Аналогичные результаты могут быть получены для вопроса о возможности регулярного отображения пространства K в евклидово пространство.

Способом, указанным Ян Чжун-дао, понятие рода пространства относительно периодического преобразования применяется к исследованию структуры непрерывных отображений.

Для чтения настоящей работы нужно владеть элементами современной алгебраической топологии. В основном достаточно материала, содержащегося в монографии В. Г. Болтянского [7] и книге Стинрода и Эйленберга [76]. Из сведений, не содержащихся в этих двух книгах, необходимо знать прежде всего определение групп гомологий и когомологий с коэффициентами в локальной системе (см., например, [46], [42]).

Для чтения работы необходимо также знакомство с гомотопической теорией расслоенных пространств в том виде, в котором она теперь обычно применяется ([43], стр. 31—35, [10], стр. 170—171). Так как до сих пор эта теория не изложена систематически в нужной нам форме ни в одной книге или журнальной статье, мы приводим в главе I определение расслоенного пространства и важнейших понятий, связанных с понятием расслоенного пространства, а также формулировки ряда теорем, касающихся этих понятий. Для понимания некоторых мест нужно знать книгу Стинрода [48]. Спектральные последовательности в работе почти не используются.

Многие теоремы формулируются для CW-полиэдров в смысле Уайтхеда [42], однако для чтения работы не обязательно быть знакомым с определением CW-полиэдра: можно всюду заменить понятие CW-полиэдра понятием симплициального полиэдра со слабой топологией.

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Настоящая глава имеет предварительный характер. В ней указываются обозначения, используемые в дальнейшим, а также приводятся определения некоторых топологических понятий (слабой гомотопической эквивалентности цилиндра отображения, соединения пространств, расслоения в смысле Серра и в смысле Гуревича, локально тривиального расслоения, главного расслоения, секущей поверхности, препятствия к распространению секущей поверхности, характеристического класса, индуцированного расслоения). Формулируются некоторые теоремы, касающиеся этих понятий.

При чтении этой главы достаточно ограничиться пунктами, посвященными цилиндру отображения, соединению пространств[1]) и характеристическим классам[2]), и в дальнейшем возвращаться к главе по мере надобности.

В пунктах, посвященных расслоенным пространствам, приводятся почти все основные определения и многие теоремы гомотопической теории расслоенных пространств. Это сделано потому, что в настоящее время теория расслоенных пространств в нужном нам виде нигде не изложена систематически, если не считать гектографированных изданий [25].

§ 1. Пространства и пары пространств

Под пространством в настоящей работе всегда понимается топологическое пространство.

Термин «открытое покрытие» будем употреблять в смысле, отличающемся от общепринятого. Будем называть покрытие $\alpha=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ пространства X открытым, если все его элементы являются открытыми множествами и существует система непрерывных действительных функций $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, удовлетворяющих условиям: а) $0\leqslant h_\lambda\leqslant 1$; б) $h_\lambda(x)=0$, если $x\overline{\in} A_\lambda$; в) в каждой точке $x\in X$ для некоторого $\lambda\in\Lambda$ функция $h_\lambda(x)=1$. Всякое локально конечное покрытие нормального пространства, состоящее из открытых множеств, является открытым покрытием в этом смысле. Во всякое покрытие вполне регулярного пространства, состоящее из открытых множеств, можно вписать открытое покрытие. В дальнейшем будем считать все рассматриваемые топологические пространства нормальными хаусдорфовыми пространствами.

Под полиэдром понимается тело симплициального CW-комплекса, под CW-полиэдром — тело CW-комплекса в смысле Уайтхеда (см. [42], стр. 133).
80

Парой топологических пространств (X, Y) называется пространство X, в котором выделено подмножество Y. Произведением пар (X, Y) и (X', Y') называется пара

$$(X\times X',\ X\times Y'\cup Y\times X').$$

Под отображением f пространства X в пространство Y (обозначается $f\colon X\to Y$) всегда понимаем непрерывное отображение. Отображением f пары (X, X') в пару (Y, Y') (обозначаем $f\colon (X, X')\to(Y, Y')$) называется отображение $f\colon X\to Y$, удовлетворяющее условию $f(X')\subset Y'$. Два отображения f_0 и f_1 пары (X, X') в пару (Y, Y') называются гомотопными (как отображения пар), если существует гомотопия $f_t\colon X\to Y$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, соединяющая отображения f_0 и f_1 и

[1]) Обозначения, введенные в этих пунктах, постоянно употребляются в следующих главах.

[2]) Определение характеристического класса, употребляемое в работе, несколько отличается от обычного. Отметим также, что отличается от обычного принятое в работе определение открытого покрытия (§ 1).

удовлетворяющая при любом t условию $f_t(X') \subset Y'$. Отображение f пары (X, X') в пару (Y, Y') называется гомотопным нулю, если существует гомотопия f_t: $X \to Y$, удовлетворяющая условиям $f = f_0$, $f_t(X') \subset Y'$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, $f_1(X') \subset Y'$.

§ 2. Группы гомологий и когомологий

Под группами гомологий и когомологий всегда, если не оговорено противное, будем понимать сингулярные группы гомологий и когомологий [76]. Локальную систему коэффициентов [42], [46], группы которой (не канонически) изоморфны группе A, будем обозначать $\{A\}$. Иногда мы будем обозначать локальную систему коэффициентов одной буквой (без фигурных скобок). Полную группу когомологий пространства X (пары X, Y) с коэффициентами в локальной системе групп $\{A\}$ будем обозначать $H(X; \{A\})$ $(H(X, Y; \{A\}))$, i-мерную группу когомологий $H^i(X; \{A\})$ $(H^i(X, Y; \{A\}))$; i-мерную группу гомологий $H_i(X; \{A\})$ $(H_i(X, Y; \{A\}))$. Если группы гомологий и когомологий берутся с коэффициентами в группе A (т. е. в тривиальной локальной системе групп), то во всех этих обозначениях фигурные скобки при A опускаются. В случае, когда рассматриваются целочисленные группы гомологий или когомологий, обозначение группы коэффициентов опускается.

Приведенные группы гомологий пространства X обозначаются $\widetilde{H}_i(X; \{A\})$ (напомним, что $\widetilde{H}_i(X; \{A\}) = H_i(X; \{A\})$ при $i > 0$, а группа $\widetilde{H}_0(X; \{A\})$ является подгруппой группы $H_0(X; \{A\})$, состоящей из классов гомологий индекса 0).

Гомоморфизмы групп гомологий и когомологий, индуцированные непрерывным отображением f, обозначаем соответственно f_* и f^*. Если f: $X \to Y$ — непрерывное отображение, $\{A\}$ — локальная система коэффициентов в пространстве Y, то естественно определяется индуцированная системой $\{A\}$ и отображением p локальная система коэффициентов в пространстве X, которую мы будем обозначать $p^*\{A\}$ или просто $\{A\}$, если это не может вызвать недоразумений, а также определяется гомоморфизм p^*: $H(Y; \{A\}) \to H(X; p^*\{A\})$ (см. [42], стр. 23 и 38).

Группы гомологий произведения пар (X, Y) и (X', Y') связаны с группами гомологий пар (X, Y) и (X', Y') следующей точной последовательностью (формула Кюннета):

$$0 \to \sum_{i+j=n} H_i(X; Y) \otimes H_j(X', Y') \to H_n(X \times Y,\ X \times Y') \cup X' \times Y \to$$

$$\to \sum_{i+j=n-1} H_i(X, Y) * H_j(X', Y') \to 0.$$

§ 3. Гомотопические группы

Для гомотопических групп [8] употребляем обычные обозначения $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, A, x_0)$. В случае, когда пространство X гомотопически просто в размерности n, обозначаем канонически изоморфные между собой группы $\pi_n(X, x_0)$ просто $\pi_n(X)$.

Будем говорить, что пространство X асферично в размерностях $< s\,(s \geqslant 1)$, если оно линейно связно и

$$\pi_1(X, x_0) = \ldots = \pi_{s-1}(X, x_0) = 0.$$

Асферичность в размерностях < 1 означает просто линейную связность. Всякое пространство асферично в размерностях < 0.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется слабой гомотопической эквивалентностью (в размерностях $\leqslant k$), если в каждую линейную связную компоненту множества Y отображается одна и только одна линейно связная компонента множества X и для каждой точки $x \in X$, порождаемой отображением f, гомоморфизм $\pi_i(X, x) \to \pi_i(Y, f(X))$ является изоморфизмом при $i \geqslant 1$ (при $1 \leqslant i < k$).

§ 4. Цилиндр отображения

Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y. Положим $M = X \times I \bigcup Y$ (через I обозначен отрезок $[0, 1]$; знак $\bigcup$ обозначает топологическую сумму пространств [18]). Цилиндром отображения f называется пространство Z, получающееся из пространства M с помощью отождествлений $(x, 0) \sim (x', 0)$, если $x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$; $(x, 0) \sim f(x)$ (см. [42]). Отображение отождествления $M \to Z$ обозначим через α. Пространства X и Y, естественно, вкладываются в пространство Z с помощью отображений $i\,(x) = \alpha(X, 1)$ $(x \in X)$ и $j\,(y) = \alpha(y)$ $(y \in Y)$. Отображения $i\colon X \to Z$ и $j\colon Y \to Z$ являются гомеоморфизмами.

Пространство Z естественно отображается в пространство Y: если $z = \alpha(x, t)$ $(x \in X,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$, то полагаем $\varphi(z) = f(x)$; если $z = \alpha(y)$ $(y \in Y)$, то полагаем $\varphi(z) = y$. Легко проверить, что отображение φj является тождественным преобразованием, а отображение $j\varphi$ гомотопно тождественному. Таким образом, отображения $j\colon Y \to Z$ и $\varphi\colon Z \to Y$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Цилиндр отображения пространства X в точку называется конусом над пространством X и обозначается $\Pi(X)$. Конус $\Pi(X)$ может быть непосредственно определен как пространство, получающееся из произведения $X \times I$ отождествлением $(x, 0) \sim (x', 0)$ $(x, x' \in X)$.

Отображение отождествления $X \times I \to \Pi(X)$ обозначаем, как и в общем случае, через α, точку $\alpha(x, 0)$ (вершину конуса) — через O. Через $\Pi'(X)$ будем обозначать множество $\Pi'(X) = \Pi(X) \setminus i\,(X)$ (иначе говоря, $z \in \Pi'(X)$, если $z = \alpha(x, t)$, где $t < 1$). Множество $i\,(X)$ естественно назвать основанием конуса $\Pi(X)$.

§ 5. Соединение пространств

Пусть X и Y — два топологических пространства. Соединением (join) пространств X и Y называется пространство $X * Y = \Pi(X) \times \Pi(Y) \setminus \Pi'(X) \times \Pi'(Y)$. Иначе говоря, точками пространства $X * Y$ служат всевозможные четверки x, t, y, τ, где $x \in X$, $y \in Y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\max(t, \tau) = 1$, с отождествлениями $(x, 1, y, 0) \sim (x, 1, y', 0)$ и $(x, 0, y, 1) \sim (x', 0, y, 1)$. Обычно употребляется другое определение соединения [37]. Именно, считают, что $X * Y$ получается из произведения $X \times Y \times I$ с помощью отождествлений $(x, y, 0) \sim (x', y', 0)$ и $(x, y, 1) \sim (x, y', 1)$. Оба определения эквивалентны. В самом деле, поставив в соответствие каждой четверке $(x, t, y, 1)$ тройку $\left(x, y, \frac{1}{2}t\right)$, а каждой четверке $(x, 1, y, \tau)$ — тройку $\left(x, y, 1-\frac{\tau}{2}\right)$, получаем гомеоморфизм между пространствами $X*Y$, получающимися из этих двух определений. Мы будем пользоваться первым определением.

Легко получить описание групп гомологий пространства $X*Y$. Из точной гомологической последовательности пары $(\Pi(X)\times\Pi(Y), X*Y)$ видно, что $\widetilde{H}_i(X*Y)=H_{i+1}(\Pi(x)\times\Pi(Y), X*Y)$ (так как пространство $\Pi(X)\times\Pi(Y)$ стягиваемо). Пару $(\Pi(X)\times\Pi(Y), X*Y)$ можно рассматривать как произведение пар $(\Pi(X), i(X))$ и $(\Pi(Y), i(Y))$. Так как $H_i(\Pi(X), i(X))=\widetilde{H}_{i-1}(X)$, то в силу теоремы Кюннета имеет место точная последовательность [37]

$$0\to\sum_{i+j=n-1}\widetilde{H}_i(X)\otimes\widetilde{H}_j(Y)\to\widetilde{H}_n(X*Y)\to\sum_{i+j=n-2}\widetilde{H}_i(X)*\widetilde{H}_j(Y)\to 0.$$

Вложение группы $\widetilde{H}_i(X)\otimes\widetilde{H}_j(Y)$ в группу $\widetilde{H}_{i+j+1}(X*Y)$ можно рассматривать как спаривание групп $\widetilde{H}_i(X)$ и $\widetilde{H}_j(Y)$ в группе $\widetilde{H}_{i+j+1}(X)$.

Из приведенной только что формулы вытекает, что соединение $X*Y$ пространства X, ацикличного в размерностях $<r$, и пространства Y, ацикличного в размерностях $<s$, ациклично в размерностях $<r+s$ и

$$\widetilde{H}_{r+s}(X*Y)=\widetilde{H}_r(X)\otimes\widetilde{H}_s(Y).$$

Отметим еще следующее простое предложение (Милнор [37]): соединение линейно связного пространства и непустого пространства односвязно.

Соединение сферы S^m и сферы S^n, очевидно, является сферой $S^{m+n+1}=S^m*S^n$. Это замечание позволяет определить спаривание гомотопических групп $\pi_m(X, x_0)$ и $\pi_n(Y, y_0)$ в группе $\pi_{m+n+1}(X*Y, z_0)$, где $z_0=(x_0, 1, y_0, 1)$. В самом деле, если f: $S^m\to X$, g: $S^n\to Y$ — представители элементов $\alpha\in\pi_m(X, x_0)$, $\beta\in\pi_n(Y, y_0)$, то зададим отображение $h=f*g$: $S^{m+n+1}=S^m*S^n\to X*Y$ с помощью формулы $h(\xi, t, \eta, \tau)=(f(\xi), t, g(\eta), \tau)$ $(\xi\in S^m, \eta\in S^n, 0\leqslant t\leqslant 1, 0\leqslant\tau\leqslant 1)$. Определяемый отображением h элемент $\alpha*\beta\in\pi_{m+n+1}(X*Y, z_0)$ называется *соединением элементов* α и β. Только что описанное спаривание было введено Джеймсом [22].

Заметим, что определенное выше спаривание отображений сфер сохраняет смысл также в случае, когда $m=0$ или $n=0$ и, следовательно, нельзя говорить о гомотопических группах. Если f: $S^m\to X$, g: $S^n\to Y$, $h=f*g$: $S^{m+n+1}\to X*Y$, $\sigma^i\in\widetilde{H}_i(S^i)$ — основной класс гомологий сферы S^i, то имеет место соотношение $f_*\sigma^m\otimes g_*\sigma^n=h_*\sigma^{m+n+1}$ (напомним, что группа $\widetilde{H}_m(X)\otimes\widetilde{H}_n(Y)$ естественно вкладывается в группу $\widetilde{H}_{m+n+1}(X*Y)$).

До сих пор мы говорили о соединении двух пространств. Однако можно определить соединение любого множества пространств.

Соединением пространств X_α $(\alpha\in A)$ называется пространство

$$\mathop{*}_{\alpha\in A}X_\alpha=\prod_{\alpha\in A}\Pi(X_\alpha)\diagdown\prod_{\alpha\in A}\Pi'(X_\alpha).$$

Иначе говоря, пространство $\underset{\alpha \in A}{*} X_\alpha$ является подмножеством произведения конусов $\Pi(X_\alpha)$, состоящим из тех точек, у которых по крайней мере одна из координат содержится в основании $i(X_\alpha)$ конуса $\Pi(X_\alpha)$.

§ 6. Расслоенные пространства

Пусть p: $E \to B$ — непрерывное отображение пространства E на пространство B.

Если X — топологическое пространство, то будем говорить, что отображение p: $E \to B$ удовлетворяет условию существования накрывающей гомотопии для пространства X, если для любого отображения f: $X \to E$ и любой деформации φ_t: $X \to B$ отображения $\varphi_0 = pf$ существует деформация f_t, для которой $f_0 = f$ и $pf_t = \varphi_t$ (так называемая накрывающая деформация).

Отображение p: $E \to B$ называется расслоением (или расслоенным пространством) в смысле Серра (в смысле Гуревича), если оно удовлетворяет условию существования накрывающей гомотопии для любого полиэдра (для любого топологического пространства).

Отображение p: $E \to B$ называется локально тривиальным расслоением, если все множества $p^{-1}(b)$ $(b \in B)$ гомеоморфны фиксированному пространству F и у каждой точки $b \in B$ существует такая окрестность V, что можно найти гомеоморфное вложение π: $V \times F \to E$, отображающее каждое из множеств $v \times F$ на множество $p^{-1}(v)$ $(v \in V)$.

Известно, что всякое локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Серра, а в случае, когда база паракомпактна, то и расслоением в смысле Гуревича (теорема о накрывающей гомотопии). Таким образом, наиболее общим типом расслоений среди описанных выше, являются расслоения в смысле Серра. Расслоения в смысле Серра мы будем в дальнейшем называть просто расслоениями. Термин «расслоенное пространство» употребляем как синоним термина «расслоение».

Пространство E называется пространством расслоения, пространство B — базой расслоения, множества $F_b = p^{-1}(b)$, где $b \in B$, называются слоями. Расслоение p: $E \to B$ с типичным слоем F будем обозначать (E, B, F, p). Кроме того, расслоение может обозначаться одной готической буквой.

Если p: $E \to B$ — непрерывное отображение, A — подмножество пространства B, то секущей поверхностью отображения p над множеством A называется отображение φ: $A \to E$, удовлетворяющее условию $p\varphi(a) = a$ для любого $a \in A$.

Наибольший интерес понятие секущей поверхности представляет в случае, когда отображение p является расслоением.

Пусть в пространстве E действует без неподвижных точек топологическая группа G. Обозначим через B пространство траекторий группы G, через p: $E \to B$ — отображение отождествления. Отображение p: $E \to B$ называется главным расслоением в случае, если у каждой точки пространства B имеется окрестность, над которой существует секущая поверхность отображения p. Легко проверить, что главное расслоение является локально тривиальным расслоением.

Пусть группа G действует без неподвижных точек в пространствах E_1 и E_2, B_1 и B_2 — пространства траекторий и отображения отождествления p_1: $E_1 \to B_1$ и p_2: $E_2 \to B_2$ являются главными расслоениями, которые мы обозначим $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$. Допустимым отображением главного расслоения $\mathfrak{B}_1$ в главное расслоение $\mathfrak{B}_2$ называется отображение f: $E_1 \to E_2$, коммутирующее с преобразованиями группы G. Допустимое отображение порождает отображение φ: $B_1 \to B_2$ по формуле $\varphi p_1 = p_2 f$.

Имеет место следующая теорема о накрывающей гомотопии (Хюбш [57]). Пусть $\mathfrak{B}_1(E_1, B_1, G, p_1)$ и $\mathfrak{B}_2(E_2, B_2, G, p_2)$ — главные расслоения, f_0: $E_1 \to E_2$ — допустимое отображение, φ_0: $B_1 \to B_2$ — порождаемое отображением f_0 отображение баз, φ_t: $B_1 \to B_2$ — деформация отображения φ_0. Если база B паракомпактна, то существует допустимая деформация f_t отображения f_0, накрывающая деформацию φ_t (т. е. существует такая деформация f_t: $E_1 \to E_2$, что каждое отображение f_t допустимо и $p_2 f_t = \varphi_t p_2$).

В настоящей работе понятие косого произведения [48] (расслоенного пространства со структурной группой) почти не будет использоваться, поэтому мы ограничимся следующим определением. Пусть $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ — главное расслоение, F — пространство, на котором действует группа G. На пространстве $E \times F$, естественно, определяется действие группы G (по формуле $g(e, f) = (g(e), g(f))$, $g \in G$, $e \in E$, $f \in F$). Пространство траекторий группы G в пространстве $E \times F$ обозначим через E'. Проекция $(e, f) \to e$ порождает отображение p': $E' \to B$, которое, как легко проверить, является расслоением со слоем F. Это расслоение $\mathfrak{B}'(E', B, F, p')$ называется расслоением со слоем F, ассоциированным с главным расслоением $\mathfrak{B}$.

Всякое косое произведение $\mathfrak{B}(E, B, F, G, p)$ с пространством расслоения E, базой B, слоем F, группой G, проекцией p: $E \to B$ можно рассматривать как расслоение $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$, ассоциированное с некоторым главным расслоением (E', B, G, p') (см. [48]). Мы будем обозначать косое произведение и соответствующее ему расслоение одной и той же буквой.

Если $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ — расслоение, $B' \subset B$, $E' = p^{-1}(B')$, то имеет место соотношение $\pi_i(B, B', b_0) = \pi_i(E, E', e_0)$ $(p(e_0) = b_0)$. В частности, $\pi_i(B, b_0) = \pi_i(E, F, e_0)$. Точная гомотопическая последовательность пары (E, F) называется точной гомотопической последовательностью расслоения:

$$\to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to .$$

Гомотопические и гомологические группы слоев расслоения $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ образуют локальные системы коэффициентов на базе B [43]. Мы будем обозначать эти локальные системы соответственно $\{\pi_i(F)\}$ и $\{H_i(F, A)\}$.

§ 7. Препятствие к распространению секущей поверхности

Пусть $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ — расслоение, база которого является CW-комплексом, φ: $B^r \to E$ — секущая поверхность над r-мерным остовом базы. Поставим в соответствие каждой $(r+1)$-мерной клетке τ^{r+1} базы отображение $h(\tau^{r+1})$: $S^r \to F_b$, где $F_b = p^{-1}(b)$ — слой, лежащий над внутренней точкой в клетке τ^{r+1}, с помощью следующей конструкции. По определению CW-комплекса, существует такая деформация f_t: $S^r \to B$, что $f_0(S^r) \subset \bar{\tau}^{r+1} \setminus \tau^{r+1}$, $f_t(S^r) \subset \tau^{r+1}$ $(t > 0)$, $f_1(S^r) = b$, если $f_{t_1}(x) = f_{t_2}(y)$, то либо $t_1 = t_2 = 0$, либо $t_1 = t_2 = 1$, либо $t_1 = t_2$ и $x = y$. Отображение f_0: $S^r \to B$ накрыто отображением $g_0 = \varphi f_0$: $S^r \to E$. Построим деформацию g_t отображения g_0, накрывающую деформацию f_t, и примем за отображение $h(\tau^{r+1})$: $S^r \to F_b$ отображение g_1. Нетрудно проверить, что гомотопический класс поставленного таким образом в соответствие каждой клетке τ^{r+1} отображения $h{:}S^r \to F_b$ не зависит от случайностей построения. В случае, когда $r>0$ и слой гомотопически прост в размерности r, ставя в соответствие каждой клетке τ^{r+1} элемент группы $\pi_r(F_b)$, определяемый отображением $h(\tau^{r+1})$: $S^r \to F_b$, получаем $(r+1)$-мерную коцепь $y(\tau^{r+1})$ комплекса B с коэффициентами в локальной системе, $\{\pi_r(F)\}$, образованной гомотопическими группами слоев расслоения $\mathfrak{B}$. Коцепь $y(\tau^{r+1})$ называется препятствием к распространению секущей поверхности φ. Коцепь y оказывается коциклом (см. [58]). Определяемый ею класс когомологий $\eta(\varphi) \in H^{r+1}(B, \{\pi_r(F)\})$ также будем называть препятствием к распространению секущей поверхности φ. Из контекста всегда будет ясно, рассматриваем мы препятствие как коцикл или как класс когомологий.

Ставя в соответствие каждой клетке элемент группы $\widetilde{H}_r(F_b)$, определяемый формулой $h_* \sigma^r$, где σ^r — основной класс гомологий сферы S^r, также получаем $(r+1)$-мерный коцикл с коэффициентами в локальной системе $\{\widetilde{H}_r(F)\}$. Этот коцикл, а также определяемый им класс когомологий $\widetilde{\eta}(\varphi) \in H^{r+1}(B, \{\widetilde{H}_r(F)\})$ будем называть гомологическим препятствием к распространению секущей поверхности φ. Отметим, что гомологическое препятствие определено при любых r без каких-либо ограничений на слой.

§ 8. Характеристические классы

Пусть $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ — расслоение, база которого является CW-полиэдром, а слой асферичен в размерностях $<s$. Рассмотрим какой-либо CW-комплекс, телом которого является база B, и построим секущую поверхность над s-мерным остовом этого комплекса (такая секущая поверхность всегда существует [48]). Гомологическое препятствие к распространению этой секущей поверхности не зависит от случайностей построения, т. е. полностью определяется расслоением $\mathfrak{B}$. Оно называется характеристическим классом расслоения $\mathfrak{B}$ и обозначается

$$\xi(\mathfrak{B}) \in H^{s+1}(B, \{\widetilde{H}_s(F)\}).$$

Если $f{:}A \to B$ — непрерывное отображение, то его можно известным способом [26] превратить в расслоение p: $A' \to B$, где A' — пространство, гомотопически эквивалентное пространству A. Характеристический класс расслоения p: $A' \to B$ называется характеристическим классом отображения f и обозначается $\xi(f)$.

Фундаментальным классом $\xi(B, A)$ пары (B, A) $(A \subset B)$ называется характеристический класс отображения вложения i: $A \to B$. Если $\pi_i(B, A)=0$ $(i<s)$, $\pi_s(B, A) \neq 0$, то $\xi(B, A) \in H^s(B, \{H_s(B, A)\})$. Фундаментальным классом линейно связного пространства B называется фундаментальный класс пары $(B, *)$, где $*$ — множество, состоящее из единственной точки.

§ 9. Индуцированные расслоения

Пусть f: $B' \to B$ — отображение пространства B' в базу B расслоения $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$. Обозначим через E' подмножество произведения $E \times B'$, состоящее из пар (e, b'), удовлетворяющих условию $p(e)=f(b')$, через d' — отображение E' на B', определяемое формулой $p'(e, b')=b'$. Отображение p' является расслоением со слоем F. Это расслоение $\mathfrak{B}'(E', B', F, p')$ называется **расслоением, индуцированным расслоением** $\mathfrak{B}$ **и отображением** f. В случае, когда $\mathfrak{B}$ является главным расслоением с группой G, индуцированное расслоение $\mathfrak{B}'$ также естественно становится главным расслоением, если определить действие группы G на E' формулой $g(e, b') = (g(e), b')$.

Отображение $\psi\colon E' \to E$, определяемое формулой $\psi(e, b') = e$, является в этом случае допустимым отображением.

Имеет место следующее утверждение. Если $\mathfrak{B}_1(E_1, B_1, G, p_1)$ и $\mathfrak{B}_2(E_2, B_2, G, p_2)$ — главные расслоения, $f\colon E_1 \to E_2$ — допустимое отображение, $\varphi\colon B_1 \to B_2$ — порожденное им отображение баз, то расслоение, индуцированное расслоением $\mathfrak{B}_2$ и отображением φ, эквивалентно расслоению $\mathfrak{B}_1$.

Из теоремы о накрывающей гомотопии вытекает следующее утверждение. Если $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ — главное расслоение, B' — паракомпактное пространство, $f_0\colon B' \to B$ и $f_1\colon B' \to B$ — два гомотопных отображения, то главное расслоение, индуцированное расслоением $\mathfrak{B}$ и отображением f_0, эквивалентно главному расслоению, индуцированному расслоением $\mathfrak{B}$ и отображением f_1.

Пусть $\mathfrak{B}'(E', B', F, p)$ — расслоение, индуцированное расслоением $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ и отображением $f\colon B' \to B$. Секущая поверхность $\varphi\colon A \to E$ расслоения $\mathfrak{B}$, заданная над подмножеством A базы B, индуцирует секущую поверхность $\varphi'\colon f^{-1}(A) \to E'$ расслоения $\mathfrak{B}'$, заданную над подмножеством $f^{-1}(A) \subset B'$ по формуле $\varphi'(x) = (\varphi f(x), x)$ (напоминаем, что $E' \subset E \times B'$).

Если B и B' — CW-комплексы, $f\colon B' \to B$ — клеточное отображение и секущая поверхность φ задана над k-мерным остовом комплекса B, то индуцированная секущая поверхность φ' определена над k-мерным остовом комплекса B'. Легко проверить, что (гомологическое) препятствие к распространению секущей поверхности φ на $(k+1)$-мерный остов комплекса B и (гомологическое) препятствие η' к распространению секущей поверхности φ' на $(k+1)$-мерный остов комплекса B' связаны соотношением $\eta' = f^*\eta$. Из этого утверждения вытекает, что характеристические классы расслоений $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ связаны соотношением

$$\xi(\mathfrak{B}') = f^*\xi(\mathfrak{B}).$$

ГЛАВА II

ОПЕРАЦИИ НАД РАССЛОЕННЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

§ 1. Сумма расслоений

Пусть $\mathfrak{B}_1(E_1, B, F_1, p_1)$ и $\mathfrak{B}_2(E_2, B, F_2, p_2)$ — два расслоения с одной и той же базой. Обозначим через Z_1 и Z_2 соответственно цилиндры отображений p_1 и p_2, через $i_1\colon E_1 \to Z_1$, $i_2\colon E_2 \to Z_2$ — естественные вложения, через Z_1', Z_2' — множества $Z_1' = Z_1 \setminus i_1(E_1)$, $Z_2' = Z_2 \setminus i_2(E_2)$, через $\alpha_1\colon E_1 \times I \to Z_1$, $\alpha_2\colon E_2 \times I \to Z_2$, $\bar{p}_1\colon Z_1 \to B$, $\bar{p}_2\colon Z_2 \to B$ — естественные отображения (отображения $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ являются расслоениями со слоями соответственно $\Pi(F_1)$ и $\Pi(F_2)$). Рассмотрим подмножество F произведения $Z_1 \times Z_2$, выделяемое условиями $(z_1, z_2) \in E$, если $(z_1, z_2) \overline{\in} Z_1' \times Z_2'$ и $\bar{p}_1(z_1) = \bar{p}_2(z_2)$, и определим отображение $p\colon E \to B$ формулой $p(z_1, z_2) =$

$=\overline{p}_1(z_1)=\overline{p}_2(z_2)$. Отображение $p\colon E\to B$ является расслоением, слоем которого, как легко видеть, является пространство F_1*F_2.

Определение 1. Расслоение (E, B, F_1*F_2, p) называется **суммой расслоений** $\mathfrak{B}_1(E_1, B, F_1, p_1)$ и $\mathfrak{B}_2(E_2, B, F_1, p_1)$ и обозначается $\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2$.

Сумма $\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2$ расслоений $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ может быть описана следующим способом: точками пространства расслоения E являются четверки (e_1, t_1, e_2, t_2), где $e_1\in E_1$, $e_2\in E_2$, $0\leqslant t_1$, $t_2\leqslant 1$, удовлетворяющие условиям $p_1(e_1)=p_2(e_2)$, $\max(t_1, t_2)=1$, с отождествлениями $(e_1, 0, e_2, 1)\sim\sim(e_1', 0, e_2, 1)$, $(e_1, 1, e_2, 0)\sim(e_1, 1, e_2', 0)$, $(e_1, e_1'\in E_1,\ e_2, e_2'\in E_2)$. Топология в пространстве E определяется как топология фактор-пространства подмножества прямого произведения $E_1\times I\times E_2\times I$ по описанному выше отношению эквивалентности. Проекция $p\colon E\to B$ расслоения $\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2$ определяется формулой $p(e_1, t_1, e_2, t_2)=p_1(e_1)=p_2(e_2)$. В дальнейшем мы будем задавать точки пространства E четверками (e_1, t_1, e_2, t_2), помня, что различные четверки могут задавать одну точку.

Отметим еще, что сумму расслоений $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ можно описать следующим эквивалентным способом: точками пространства расслоения E являются тройки (e_1, e_2, t), где $e_1\in E_1$, $e_2\in E_2$, $0\leqslant t\leqslant 1$, удовлетворяющие условию $p_1(e_1)=p_2(e_2)$, с отождествлениями $(e_1, e_2, 0)\sim(e_1', e_2, 0)$, $(e_1, e_2, 1)\sim(e_1, e_1', 1)$. Проекция p расслоения $\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2$ задается формулой $p(e_1, e_2, t)=p_1(e_1)=p_2(e_2)$.

Можно определить также сумму любого множества расслоений с одной и той же базой. Пусть $\{\mathfrak{B}_\mu(E_\mu, B, F_\mu, P_\mu)\}_{\mu\in M}$ — семейство расслоений, обозначенных индексами из (конечного или бесконечного) множества M. Обозначим через Z_μ цилиндр отображения $p_\mu\colon E_\mu\to B$, через $i_\mu\colon E_\mu\to Z_\mu$ — естественное вложение, через Z_μ' — множество $Z_\mu\setminus i_\mu(E_\mu)$, через $\alpha_\mu\colon E_\mu\times I\to Z_\mu$, $\overline{p}_\mu\colon Z_\mu\to B$ — естественные отображения (отображение $\overline{p}_\mu$ является расслоением со слоем $\prod\limits_{\mu\in M}(F_\mu)$).

Рассмотрим расслоение $\overline{p}\colon \prod\limits_{\mu\in M}Z_\mu\setminus\prod\limits_{\mu\in M}Z_\mu'\to\prod\limits_{\mu\in M}B(\mu)$, где $\prod\limits_{\mu\in M}B(\mu)$ — произведение m экземпляров пространства B, обозначенных индексами из множества M (здесь m — мощность множества M). Отображение $\overline{p}\colon \prod\limits_{\mu\in M}Z_\mu\to\prod\limits_{\mu\in M}B(\mu)$ определяется формулой $\overline{p}\{Z_\mu\}=\{\overline{p}_\mu(Z_\mu)\}$. Расслоение

$$\Big(\prod_{\mu\in M}Z_\mu\setminus\prod_{\mu\in M}Z_\mu',\ \prod_{\mu\in M}B_{(\mu)},\ \mathop{*}_{\mu\in M}F_\mu,\ \overline{p}\Big)$$

обозначим через $\mathfrak{S}$. Через $d\colon B\to\prod\limits_{\mu\in M}B_\mu$ обозначим диагональное вложение: $d(b)=\{b\}$.

Определение 1′. Расслоение $(E, B, \mathop{*}\limits_{\mu\in M}F_\mu, p)$, индуцированное расслоением $\mathfrak{S}$ и отображением $d\colon B\to\prod\limits_{\mu\in M}B(\mu)$, называется **суммой семейства расслоений** $\{\mathfrak{B}_\mu\}_{\mu\in M}$ и обозначается $\sum\limits_{\mu\in M}\mathfrak{B}_\mu$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{B}_1(E_1, B_1, F_1, p_1)$ и $\mathfrak{B}_2(E_2, B_2, F_2, p_2)$ — два расслоения, базой которых служит один и тот же CW-полиэдр B. Если над k_μ-мерным остовом базы B существует секущая поверхность φ_μ расслоения $\mathfrak{B}_\mu$ $(\mu=1, 2)$ и препятствие (гомологическое препятствие) к распространению этой секущей поверхности на $(k_\mu+1)$-мерный остов базы принадлежит классу когомологий $\eta_\mu\in H^{k_\mu+1}(B, \{\pi_{k_\mu}(F_\mu)\})$ (классу кого-*

мологий $\widetilde{\eta}_\mu \in H^{k_\mu+1}(B, \{H_{k_\mu}(F_\mu)\}))$, *то над* (k_1+k_2+1)-*мерным остовом базы существует секущая поверхность расслоения* $\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2$, *препятствие (гомологическое препятствие) к распространению которой на* (k_1+k_2+2)-*мерный остов базы принадлежит классу когомологий*

$$\eta=\eta_1\bigcup\eta_2\in H^{k_1+k_2+2}(B, \{\pi_{k_1+k_2+1}(F_1*F_2)\})$$
$$(\widetilde{\eta}=\widetilde{\eta}_1\bigcup\widetilde{\eta}_2\in H^{k_1+k_2+2}(B, \{\widetilde{H}_{k_1+k_2+1}(F_1*F_2)\})).$$

(Произведения $\eta_1\bigcup\eta_2$ и $\widetilde{\eta}_1\bigcup\widetilde{\eta}_2$ определяются с помощью спариваний, определенных в гл. I, § 5.)

Доказательство. Докажем сначала часть теоремы 1, касающуюся препятствий.

Пусть $\tau^{k_\mu+1}$ — $(k_\mu+1)$-мерная клетка базы B, f_t^μ: $S^{k_\mu+1}\to B$ — деформация, удовлетворяющая условиям

а) $f_0^\mu(S^{k_\mu})\subset\bar{\tau}^{k_\mu+1}\setminus\tau^{k_\mu+1}$,

б) $f_t^\mu(S^{k_\mu})\subset\tau^{k_\mu+1}$ $(t>0)$,

в) $f_1^\mu(S^{k_\mu})=b_\mu\in\tau^{k_\mu+1}$,

г) если $f_{t_1}^\mu(x)=f_{t_2}^\mu(y)$ и $0<t_1$, $t_2<1$, то $t_1=t_2$, $x=y$.

Обозначим через g_t^μ деформацию отображения $g_0^\mu=\varphi_\mu f_0^\mu$, накрывающую деформацию f_t^μ, через h^μ: $S^{k_\mu}\to p_\mu^{-1}(b)=F_\mu$ — отображение g_1^μ. Такое построение проведем для каждой $(k_\mu+1)$-мерной клетки пространства B.

Напомним, что с помощью этой конструкции в § 7 гл. I определялось препятствие к распространению секущей поверхности φ_μ, а именно, препятствием был назван коцикл y_μ, получающийся, если каждой клетке $\tau^{k_\mu+1}$ поставить в соответствие элемент гомотопической группы $y_\mu(\tau^{k_\mu+1})\in\pi_{k_\mu}(p_\mu^{-1}(b_\mu))$, определяемый отображением h^μ: $S^{k_\mu}\to P_\mu^{-1}(b_\mu)$.

Продолжим секущую поверхность φ_μ: $B^{k_\mu}\to E_\mu$ в секущую поверхность Φ_μ: $B^{k_\mu+1}\to Z_\mu$ цилиндра $(Z_\mu, B, \Pi(F_\mu), \bar{p}_\mu)$ расслоения $\mathfrak{B}_\mu$, полагая $\Phi_\mu(x)=i_\mu\varphi_\mu(x)$, если $x\in B^{k_\mu}$, $\Phi_\mu(f_t^\mu(y))=\alpha_\mu(g_t(y), 1-t)$ для $y\in S^{k_\mu}$, $0\leqslant t\leqslant 1$ (напомним, что любая точка $x\in\tau^{k_\mu+1}$ представляется в виде $x=f_t^\mu(y)$, где $t>0$, и это представление однозначно, если $x\neq b_\mu=b_1^\mu(S^{k_\mu})$). Секущую поверхность Φ_μ продолжим каким-либо образом в секущую поверхность расслоения $\bar{p}_\mu$: $Z_\mu\to B$, заданную над всей базой (это возможно, так как слой $\Pi(F_\mu)$ стягиваем). Продолженную секущую поверхность также будем обозначать буквой Φ_μ.

Рассмотрим отображение Φ: $B\times B\to Z_1\times Z_2$, определенное формулой $\Phi(b_1, b_2)=(\Phi_1(b_1), \Phi_2(b_2))$. (Это отображение является секущей поверхностью расслоения $\bar{p}_1\times\bar{p}_2$: $Z_1\times Z_2\to B\times B$.) Произведение $B\times B$ превратим в CW-комплекс, разбив его на произведения клеток из CW-комплекса B. Если $b_1\in\tau^\lambda$, $b_2\in\tau^\nu$, где τ^λ и τ^ν — клетки комплекса B размерностей соответственно λ и ν и либо $\lambda\leqslant k_1$, либо $\nu\leqslant k_2$, то $\Phi(b_1, b_2)\in Z_1\times Z_2\setminus Z_1'\times Z_2'$. В частности, для любой точки (b_1, b_2), содержащейся в (k_1+k_2+1)-мерном остове разбиения $B\times B$, $\Phi(b_1, b_2)\in$ $\in Z_1\times Z_2\setminus Z_1'\times Z_2'$ и, следовательно, отображение определяет секущую поверхность расслоения $\bar{p}_1\times\bar{p}_2$: $Z_1\times Z_2\setminus Z_1'\times Z_2'\to B\times B$, заданную на (k_1+k_2+1)-мерном остове разбиения $B\times B$, а также на всех (k^1+k_2+2)-мерных клетках, не имеющих вида $\tau^{k_1+1}\times\tau^{k_2+1}$.

Обозначим через y препятствие к распространению секущей поверхности Φ на (k_1+k_2+2)-мерный остов разбиения $B\times B$ и покажем, что y является прямым произведением препятствий y_1 и y_2 к распространению секущих поверхностей φ_1 и φ_2 (все препятствия рассматриваются как коциклы, прямое произведение коциклов y_1 и y_2 определяется с помощью спаривания групп $\pi_{k_1}(p_1^{-1}(b_1))$ и $\pi_{k_2}(p_2^{-1}(b_2))$ в группе $\pi_{k_1+k_2+1}(p_1^{-1}(b_1)*p_2^{-1}(b_2))$, описанного в § 5 гл. I).

Вычислим прежде всего значения коцикла y на клетках вида $\tau^{k_1+1}\times\tau^{k_2+1}$. Для каждой такой клетки деформация f_t: $S^{k_1+k_2+1}\to B\times B$, удовлетворяющая условиям:

а) $f_0(S^{k_1+k_2+1})\subset\bar\tau^{k_1+1}\times\bar\tau^{k_2+1}\diagdown\tau^{k_1+1}\times\tau^{k_2+1}$,

б) $f_t(S^{k_1+k_2+1})\subset\tau^{k_1+1}\times\tau^{k_2+1}$ $(t>0)$,

в) $f_1(S^{k_1+k_2+1})=(b_1,\ b_2)\in\tau^{k_1+1}\times\tau^{k_2+1}$,

г) если $f_{t_1}(x)=f_{t_2}(y)$ и $0<t_1t_2<1$, то $t_1=t_2$, $x=y$,

может быть построена следующим образом: рассматриваем сферу $S^{k_1+k_2+1}$ как соединение сфер S^{k_1+1} и S^{k_2+1} и полагаем $f_t(s_1,\ \tau_1,\ s_2,\ \tau_2)=$ $=(f^1_{1-(1-t)\tau_1}(s_1),\ f^2_{1-(1-t)\tau_2}(s_2))$ (здесь $s_1\in S^{k_1+1}$, $s_2\in S^{k_2+1}$, $0\leqslant\tau_1$, $\tau_2\leqslant 1$, $\max(\tau_1,\ \tau_2)=1$, $0\leqslant t\leqslant 1$, f^μ_t: $S^{k_\mu+1}\to B$, $\mu=1,\ 2$ — деформации, описанные на стр. 226). Определим деформацию g_t: $S^{k_1+k_2+1}\to Z_1\times Z_2\diagdown Z_1'\times Z_2'$ с помощью формулы

$$g_t(s_1,\ \tau_1,\ s_2,\ \tau_2)=(g^1_{1-(1-t)\tau_1}(s_1),\ g^2_{1-(1-t)\tau_2}(s_2))$$

(обозначения s_i, τ имеют прежний смысл, g^μ_t — деформации, описанные на стр. 226). Деформация g_t накрывает деформацию f_t и $g_0=\Phi f_0$, поэтому элемент $y(\tau^{k_1+1}\times\tau^{k_2+1})$ может быть определен с помощью отображения $h=g_1$: $S^{k_1+k_2+1}\to p_1^{-1}(b_1)*p_2^{-1}(b_2)$.

Так как

$$h(s_1,\ \tau_1,\ s_2,\ \tau_2)=(g_1^1(s_1),\ \tau_1,\ g_1^2(s_2),\ \tau_2)=(h^1(s_1),\ \tau_1,\ h^2(s_2),\ \tau_2),$$

то мы можем утверждать, что $h=h^1*h^2$ (через $*$ обозначено спаривание отображений сфер, определенное в § 5 гл. I).

Так как отображение h^μ: $S^{k_\mu+1}\to p_\mu^{-1}(b_\mu)$, по определению, задает элемент $y_\mu(\tau^{k_\mu+1})$, то из соотношения $h=h^1*h^2$ вытекает соотношение $y(\tau^{k_1+1}\times\tau^{k_2+1})=y_1(\tau^{k_1+1})*y_2(\tau^{k_2+1})$. На каждой (k_1+k_2+2)-мерной клетке $\tau^\lambda\times\tau^\nu$ комплекса $B\times B$, не имеющей вида $\tau^{k_1+1}\times\tau^{k_2+1}$, коцикл y принимает значение 0, так как на всех таких клетках секущая поверхность Φ определена.

Из полученных соотношений вытекает, что коцикл y является прямым произведением коциклов y_1 и y_2

$$y=y_1\otimes y_2.$$

Обозначая через ζ класс когомологий коцикла y (т. е. препятствие к распространению секущей поверхности Φ, рассматриваемое как класс когомологий) и переходя в равенстве $y=y_1\otimes y_2$ к классам когомологий, получаем соотношение $\zeta=\eta_1\otimes\eta_2$.

Пусть теперь d: $B\to B\times B$ — диагональное вложение; $d(b)=(b,\ b)$, $\tilde d$: $B\to B\times B$ — клеточная аппроксимация отображения d. Расслоение $\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2(E,\ B,\ F_1*F_2,\ p)$ можно рассматривать как расслоение, индуцированное расслоением $\bar p_1\times\bar p_2$: $Z_1\times Z_2\diagdown Z_1'\times Z_2'\to B\times B$ и отображением

$\widetilde{d}$: $B \to B \times B$ (из определения расслоения $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ легко вытекает, что оно индуцируется расслоением $\overline{p}_1 \times \overline{p}_2$: $Z_1 \times Z_2 \setminus Z_1' \times Z_2' \to B \times B$ и отображением d: $B \to B \times B$, но отображения d и $\widetilde{d}$ гомотопны, а гомотопные отображения индуцируют эквивалентные расслоения).

Секущая поверхность Φ индуцирует над $(k_1 + k_2 + 1)$-мерным остовом базы B секущую поверхность $\widetilde{\Phi}$ расслоения $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$. Препятствие к распространению секущей поверхности $\widetilde{\Phi}$ задается формулой $\widetilde{d}^* \zeta$. Так как $\widetilde{d}^* = d^*$, $\zeta = \eta_1 \otimes \eta_2$ и $d^*(\eta_1 \otimes \eta_2) = \eta_1 \cup \eta_2$, то класс когомологий $\eta_1 \cup \eta_2$ реализуется как препятствие к распространению секущей поверхности Φ.

Для того чтобы доказать вторую часть теоремы, нужно во всех проведенных выше рассуждениях говорить не о препятствиях, а о гомологических препятствиях и заметить, что в случае гомологических препятствий из соотношения $h = h^1 * h^2$ вытекает соотношение $y(\tau^{k_1+1} \times \tau^{k_2+1}) = y_1(\tau_1^{k_1+1}) \otimes y_2(\tau_2^{k_2+1})$ (в силу формулы в конце § 5 гл. I).

Из доказанной только что теоремы вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{B}_i(E_i, B, F_i, p_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — *расслоения, базой которых служит один и тот же CW-полиэдр* B, *слой* F *асферичен в размерностях* $< s_i$ $(s_i \geqslant 0)$. *Обозначим через* $\xi_i \in H^{s_i+1}(B, \{\widetilde{H}_{s_i}(F_i)\})$ *характеристический класс расслоения* $\mathfrak{B}_1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. *Тогда характеристический класс*

$$\xi \in H^{s_1+\ldots+s_n+n}(B, \{H_{s_1+\ldots+s_n+n-1}(\mathop{*}_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i)\})$$

суммы $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \ldots + \mathfrak{B}_n$ *расслоений* $\mathfrak{B}_i$ *равен произведению характеристических классов расслоений* $\mathfrak{B}_i$

$$\xi = \xi_1 \cup \xi_2 \cup \ldots \cup \xi_n.$$

(Напомним, что в условиях этой теоремы $\widetilde{H}_r(\mathop{*}_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i) = 0$ при $i < s_1 + \ldots + s_n + n - 1$ и

$$\widetilde{H}_{s_1+\ldots+s_n+n-1}(\mathop{*}_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i) = \widetilde{H}_{s_1}(F_1) \otimes \ldots \otimes \widetilde{H}_{s_n}(F_n)$$

(см. § 5 гл. I).)

Предложение 1. *Пусть* $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ — *главное расслоение,* F_1 и F_2 — *пространства, на которых действует группа* G, $\mathfrak{B}_1(E_1, B, F_1, p_1)$ *и* $\mathfrak{B}_2(E_2, B, F_2, p_2)$ — *расслоения со слоями* F_1 *и* F_2, *ассоциированные с расслоением* $\mathfrak{B}$. *Тогда расслоение* $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2(E', B, F_1 * F_2, p')$ *эквивалентно расслоению* $\mathfrak{B}''(E'', B_1, F_1 * F_2, p'')$ *со слоем* $F_1 * F_2$, *ассоциированным с расслоением* $\mathfrak{B}$ (*действие группы* G *на пространстве* $F_1 * F_2$ *определяется формулой* $g(f_1, t_1, f_2, t_2) = (g(f_1), t_1, g(f_2), t_2)$, *где* $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$, $0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1$, $g \in G$).

Доказательство. Точки пространства E_i $(i = 1, 2)$ определяются парами (e, f) с отождествлениями $(e, f) \sim (g(e), g(f))$ $(e \in E, f \in F_i, g \in G)$. Точки пространства E' определяются четверками (e_1, t_1, e_2, t_2) с отождествлениями

$$(e_1, 0, e_2, 1) \sim (e_1', 0, e_2, 1),$$
$$(e_1, 1, e_2, 0) \sim (e_1', 1, e_2, 0)$$
$$(e_i, e_i \in E_i, 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1, \max(t_1, t_2) = 1, p_1(e_1) = p_2(e_2))$$

или, что то же, шестерками $(a_1, f_1, t_1, a_2, f_2, t_2)$ с отождествлениями

$$(a_1, f_1, t_1, a_2, f_2, t_2) \sim (g_1(a_1), g_1(f_1), t_1, g_2(a_2), g_2(f_2), t_2),$$
$$(a_1, f_1, 0, a_2, f_2, 1) \sim (a_1', f_1', 0, a_2, f_2, 1),$$
$$(a_1, f_1, 1, a_2, f_2, 0) \sim (a_1, f_1, 1, a_2', f_2', 0)$$

(здесь $a_i, a_i' \in E$, $f_i, f_i' \in F_i$, $g_i \in G$, $0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1$,

$$\max(t_1, t_2) = 1, \; p(a_1) = p(a_2)).$$

Точки пространства E' задаются пятерками (a, f_1, t_1, f_2, t_2) с отождествлениями

$$(a, f_1, t_1, f_2, t_2) \sim (g(a), g(f_1), t_1, g(f_2), t_2),$$
$$(a, f_1, 0, f_2, 1) \sim (a, f_1', 0, f_2, 1),$$
$$(a, f_1, 1, f_2, 0) \sim (a, f_1, 1, f_2', 0)$$
$$(a \in E, \; f_i, f_i' \in F_i, \; 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1, \; \max(t_1, t_2) = 1).$$

Отобразим пространство E'' в пространство E', поставив в соответствие каждой пятерке (a, f_1, t_1, f_2, t_2) шестерку $(a, f_1, t_1, a, f_2, t_2)$. Легко проверяется, что это отображение является гомеоморфным отображением пространства E'' на пространство E' и порождает эквивалентность расслоений $\mathfrak{B}''$ и $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$.

Проверим, например, что в каждую точку пространства отображается некоторая точка пространства E''. Пусть точка x пространства E задается шестеркой $(a_1, f_1, t_1, a_2, f_2, t_2)$. В силу условия $p(a_1) = p(a_2)$ найдется элемент $g \in G$, для которого $a_2 = g(a_1)$. Шестерка $(a_1, f_1, t_1, a_2, f_2, t_2)$ задает ту же точку, что и шестерка $(a_1, f_1, t_1, g(a_1), g(f_2), t_2) = (a_1, f_1, t_1, a_1, g(f_2), t_2)$, и следовательно, в точку x отображается точка пространства E'', определяемая пятеркой $(a_1, f_1, t_1, g(f_2), t_2)$.

Предложение 1 легко обобщается на случай суммы любого числа расслоений.

Предложение 2. *Сумма* $\sum\limits_{\mu \in M} \mathfrak{B}_\mu(E, B, \underset{\mu \in M}{*} F_\mu, p)$ *расслоений* $\mathfrak{B}_\mu(E_\mu, B, F_\mu, p)(\mu \in M)$ *имеет секущую поверхность в том и только том случае, если можно найти такое открытое покрытие* $\{C_\mu\}_{\mu \in M}$ *пространства* B, *что над множеством* C_μ *существует секущая поверхность расслоения* $\mathfrak{B}_\mu$.

Доказательство. Предположим сначала, что существует такое открытое покрытие $\{C_\mu\}_{\mu \in M}$, что над множеством C_μ можно построить секущую поверхность φ_μ расслоения $\mathfrak{B}_\mu$. Построим систему непрерывных действительных функций $\{h_\mu\}$ на пространстве B так, чтобы выполнялись условия:

а) $0 \leqslant h_\mu \leqslant 1$;

б) $h_\mu = 0$ вне множества C_μ;

в) в каждой точке $x \in B$ для некоторого μ функции $h_\mu(x) = 1$.

Такая система функций существует в силу принятого в работе определения открытого покрытия (гл. I, § 1). Для каждого индекса $\mu \in M$ определим секущую поверхность расслоения $\bar{p}_\mu\colon Z_\mu \to B$ с помощью формулы $\psi_\mu(b) = \alpha(\varphi_\mu(b), h_\mu(b))$, если $b \in C_\mu$, $\psi_\mu(b) = \bar{j}_\mu(b)$, если $b \in B \setminus C_\mu$. Отображение $\psi\colon B \to \prod\limits_{\mu \in M} Z_\mu$, определяемое формулой $\psi(b) = \{\psi_\mu(b)\}$.

удовлетворяет условию

$$\psi(B)\in E=\Big(\prod_{\mu\in M} Z_\mu \diagdown \prod_{\mu\in M} Z'_\mu\Big)\cap \bar{p}^{-1}(d(B)),$$

так как

$$\bar{p}\psi(b)=\{\bar{p}_\mu\bar{\psi}_\mu\}=\{b\}=d(b)$$

и $\psi(b)=\prod_{\mu\in M} Z_\mu$ вследствие того, что для некоторого μ имеем $h_\mu(b)=1$. В силу соотношения $\bar{p}\psi=d$ отображение ψ порождает секущую поверхность расслоения $\sum_{\mu\in M}\mathfrak{B}_\mu$.

Обратно, пусть у расслоения $\sum_{\mu\in M}\mathfrak{B}_\mu$ существует секущая поверхность ψ_μ: $B\to E\subset\prod_{\mu\in M} Z_\mu$. Обозначаем через ψ_μ: $B\to Z_\mu$ отображение $\psi_\mu=\lambda_\mu\psi$, где λ_μ: $\prod_{\mu\in M} Z_\mu\to Z_\mu$ — проекция произведения на сомножитель с индексом μ. Рассмотрим множества C_μ, состоящие из тех точек $b\in B$, для которых $\psi_\mu(b)\,\overline{\in}\, j_\mu(B)$. Над каждым из множеств C_μ существует секущая поверхность φ_μ расслоения $\mathfrak{B}_\mu$, определяемая формулой $\psi_\mu(b)=$ $=\alpha(\varphi_\mu(b),\ h_\mu(b))$. Для любого $b\in B$ существует индекс μ, для которого $\psi_\mu(b)\,\overline{\in}\, j_\mu(B)$, в противном случае $\psi(b)=\{\psi_\mu(b)\}\in\prod_{\mu\in M} j_\mu(B)\subset\prod_{\mu\in M} Z'_\mu$, поэтому множества C_μ образуют покрытие пространства B. Каждое из множеств C_μ открыто, так как может быть представлено как прообраз открытого множества $Z_\mu\diagdown j_\mu(B)$ при отображении ψ_μ: $B\to Z_\mu$. Наконец, покрытие, образованное множествами C_μ, является открытым покрытием, так как функция h_μ удовлетворяет условиям определения открытого покрытия.

§ 2. Соединение главных расслоений

Определение 2. Пусть $\{\mathfrak{B}_\mu(E_\mu,\ B_\mu,\ G,\ p_\mu)\}_{\mu\in M}$ — конечное или бесконечное множество главных расслоений с одной и той же группой G. Соединением этих главных расслоений называется главное расслоение $\underset{\mu\in M}{*}\mathfrak{B}_\mu(E,\ B,\ G,\ p)$, пространство которого E является соединением пространств E_μ (т. е. $E=\underset{\mu\in M}{*}E_\mu$), а действие группы G на пространстве $E\subset\prod_{\mu\in M}\Pi(E_\mu)$ определяется с помощью следующего соглашения: если $\lambda_\mu(e)=\alpha(e_\mu,\ t)$, то $\lambda_\mu(g(e))=\alpha(g(e_\mu),\ t)$.

(Здесь $e\in E$, $e_\mu\in E_\mu$, $g\in G$, $0\leqslant t\leqslant 1$, через λ_μ: $E\to\Pi(E_\mu)$ обозначена проекция множества E на сомножитель с индексом μ.)

Иначе можно сказать, что действие группы G на конусе $\Pi(E_\mu)$ определяется формулой $g\alpha(e_\mu,\ t)=\alpha(g(e_\mu),\ t)$, а на произведении $\prod_{\mu\in M}\Pi(E_\mu)$ группа G действует покоординатно.

Соединение конечного числа главных расслоений $\mathfrak{B}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{B}_n$ будем обозначать $\mathfrak{B}_1*\ldots*\mathfrak{B}_n$.

Корректность определения 2 легко проверяется.

Обозначим через $\mathfrak{A}(G)$ главное расслоение с группой G, базой которого является точка (пространством этого расслоения является пространство группы G, на котором группа G действует с помощью левых сдвигов).

Определение 3. Конусом над главным расслоением $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ называется соединение $\mathfrak{B}*\mathfrak{A}(G)$ $(E*G, B', G, p')$ расслоения $\mathfrak{B}$ с главным расслоением $\mathfrak{A}(G)$.

В дальнейшем важную роль будет играть расслоение $\mathfrak{A}_n(G)$, получающееся как соединение n экземпляров расслоения $\mathfrak{A}(G)$.

§ 3. Произведение расслоений

Определение 4. Пусть $\mathfrak{B}_1(E_1, B, F_1, p_1)$ и $\mathfrak{B}_2(E_2, B, F_2, p_2)$ — два расслоения с одной и той же базой B. Произведением этих расслоений называется расслоение $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2(E, B, F_1 \times F_2, p)$, пространство которого E представляет собой подмножество произведения $E_1 \times E_2$, состоящее из пар (e_1, e_2), удовлетворяющих условию $p_1(e_1) = p_2(e_2)$, а проекция p: $E \to B$ задается формулой $p(e_1, e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2)$.

Предложение 3. *Произведение $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ расслоений $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ имеет секущую поверхность тогда и только тогда, когда оба расслоения $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ имеют секущие поверхности.*

В самом деле, если φ_μ: $B \to E_\mu$ — секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_\mu$ $(\mu = 1, 2)$, то отображение φ: $B \to E$, определяемое формулой $\varphi(b) = (\varphi_1(b), \varphi_2(b))$, является секущей поверхностью расслоения $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$. Та же формула $\varphi(b) = (\varphi_1(b), \varphi_2(b))$ определяет секущие поверхности расслоений $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$, если задана секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.

В заключение введем понятие произведения главных расслоений и укажем, как оно связано с понятием суммы расслоений, а также покажем, каким образом понятие уитнеевской суммы пучков сфер связано с понятием суммы расслоений.

Определение 4'. Пусть $\mathfrak{B}_1(E_1, B, G_1, p_1)$ и $\mathfrak{B}_2(E_2, B, G_2, p_2)$ — главные расслоения, имеющие одну и ту же базу B. Произведением этих расслоений называется главное расслоение $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2(E, B, G_1 \times G_2, p)$, пространством которого является подмножество E произведения $E_1 \times E_2$, состоящее из пар (e_1, e_2), удовлетворяющих условию $p_1(e_1) = p_2(e_2)$, а группа $G_1 \times G_2$ действует на пространстве E по формуле $(g_1, g_2)(e_1, e_2) = (g_1(e_1), g_2(e_2))$ $(g_i \in G_i,\ e_i \in E_i)$.

Имеет место следующее:

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{B}_1(E_1, B, G_1, p_1)$, $\mathfrak{B}_2(E_2, B, G_2, p_2)$ — главные расслоения,* F_1 и F_2 *— пространства, на которых действуют соответственно группы G_1 и G_2, $\mathfrak{B}'(E', B, F_1, p')$ и $\mathfrak{B}''(E'', B, F_2, p'')$ — расслоения со слоями F_1 и F_2, ассоциированные с расслоениями $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ соответственно. Расслоение $\mathfrak{B}(E, B, F_1*F_2, p)$ со слоем F_1*F_2, ассоциированное с произведением $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ расслоений $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$, эквивалентно сумме $\mathfrak{B}_1' + \mathfrak{B}_2''$ расслоений $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$; считаем, что группа $G_1 \times G_2$ действует на соединении F_1*F_2 по формуле*

$$(g_1, g_2)(f_1, t_1, f_2, t_2) = (g_1(f_1), t_1, g_2(f_2), t_2)$$

$$(g_i \in G_i,\ f_i \in F_i,\ 0 \leqslant t_1,\ t_2 \leqslant 1).$$

Доказательство предложения 4 проводится по такой же схеме, как и доказательство предложения 1.

Если определить сумму двух косых произведений $\mathfrak{B}_\mu(E_\mu, B, F_\mu, G_\mu, p_\mu)$ $(\mu = 1, 2)$ как косое произведение со слоем F_1*F_2, ассоциированное с произведением ассоциированных главных расслоений для косых произведений $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$, то в силу предложения 2 сумма косых произведений, рассматриваемая как расслоение, эквивалентна сумме косых произведений $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$, рассматриваемых как расслоения.

Легко видеть, что уитнеевскую сумму пучков сфер [48] можно рассматривать как сумму косых произведений в определенном только что смысле.

Отметим, что легко определить произведение любого (конечного или бесконечного) множества расслоений и главных расслоений с одной и той же базой и перенести на этот случай предложения 3 и 4.

ГЛАВА III

РОД РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА. ОЦЕНКИ РОДА

В этой главе дается определение рода расслоенного пространства. Указываются основные свойства этого понятия. Доказываются теоремы, позволяющие вычислять род расслоенного пространства.

§ 1. Определение рода расслоенного пространства. Сведение вычисления рода к вопросу о возможности построения секущей поверхности

Определение 5. Родом расслоения $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ (обозначаем $g(\mathfrak{B}) = g(E, B, F, p)$) называется наименьшая мощность открытого покрытия базы B, состоящего из множеств, над каждым из которых существует секущая поверхность.

Таким образом, род расслоенного пространства является некоторым кардинальным числом (не обязательно конечным).

Мы будем рассматривать в дальнейшем только расслоения, имеющие род, т. е. такие расслоения, что у каждой точки базы имеется окрестность, над которой существует секущая поверхность. Очевидно, что к этому классу расслоений относятся все локально тривиальные расслоения, а также все расслоения с триангулируемой базой.

Определение 6. Если B' — подмножество базы B расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$, то будем говорить, что расслоение $\mathfrak{B}$ имеет над множеством B' род τ, если расслоение $\mathfrak{B}'(p^{-1}(B'), B', F, p)$ имеет род τ.

Род расслоения $\mathfrak{B}$ над множеством B' будем обозначать $g(\mathfrak{B}, B')$.

Предложение 5. *Пусть* $\{B_\lambda\}_{\lambda \in L}$ — *открытое покрытие базы* B *расслоения* $\mathfrak{B}$. *Тогда*

$$g(\mathfrak{B}) \leqslant \sum_{\lambda \in L} g(\mathfrak{B}, B_\lambda).$$

В самом деле, по определению 6, существует состоящее из $g(\mathfrak{B}, B_\lambda)$ элементов открытое покрытие α_λ множества B_λ, над каждым из элементов которого существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$. Объединяя покрытия $\alpha_\lambda (\lambda \in L)$, получим открытое покрытие базы, состоящее из $\sum\limits_{\lambda \in L} (\mathfrak{B}, B_\lambda)$ элементов, над каждым из которых существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$.

Предложение 6. *Пусть* $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ *и* $\mathfrak{B}'(E', B, F', p)$ — *расслоенные пространства,* f — *отображение пространства* E *в* E', *удовлетворяющее условию* $p'f = p$. *Тогда* $g(\mathfrak{B}') \leqslant g(\mathfrak{B})$.

Пусть α — покрытие базы B, состоящее из $g(\mathfrak{B})$ элементов, и над каждым из элементов $A \in \alpha$ существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$: φ: $A \to E$. Для доказательства достаточно проверить, что над любым множеством $A \in \alpha$ существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}'$. Но это очевидно: отображение $f\varphi$: $A \to E'$ является секущей поверхностью расслоения $\mathfrak{B}$.

Предложение 7. *Пусть* $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ — *расслоенное пространство,* f: $B' \to B$ — *непрерывное отображение,* $\mathfrak{B}'(E', B', F, p')$ — *расслоение, индуцированное отображением* f *и расслоением* $\mathfrak{B}$. *Тогда* $g(\mathfrak{B}') \leqslant g(\mathfrak{B})$.

Для доказательства достаточно заметить, что любому открытому покрытию α пространства B соответствует открытое покрытие α' пространства B', составленное из прообразов элементов покрытия α, при отображении f, и если над каждым из элементов покрытия α существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$, то над каждым из элементов покрытия α' существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}'$, а именно индуцированная секущая поверхность (см. гл. I, § 9).

Предложение 8. *Если база* B *расслоения* $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ *является бикомпактом, то род расслоения* $\mathfrak{B}$ *конечен.*

Доказательство. Рассмотрим совокупность всех открытых подмножеств базы, над которыми существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$. Так как мы рассматриваем только расслоения, имеющие род, эта совокупность образует покрытие пространства B. В силу бикомпактности базы из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Покажем сейчас, как можно свести вычисление рода расслоенного пространства к изучению возможности построения секущей поверхности в вспомогательном расслоенном пространстве.

Обозначим через $\mathfrak{B}_\tau(E_\tau, B, F_\tau, p_\tau)$ сумму τ экземпляров расслоения $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$.

Теорема 3. *Расслоенное пространство* $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ *тогда и только тогда имеет род* $\leqslant \tau$, *когда у расслоенного пространства* $\mathfrak{B}_\tau(E_\tau, B, F_\tau, p_\tau)$ *существует секущая поверхность.*

В этой теореме τ может быть как конечным, так и бесконечным кардинальным числом.

Утверждение теоремы получается из предложения 2, если применить это предложение к сумме τ экземпляров расслоения $\mathfrak{B}$.

В случае, когда n — натуральное число, имеет место следующее более общее утверждение.

Теорема 3'. $g(\mathfrak{B}_n) = \left[\frac{1}{n}(g(\mathfrak{B}) + n - 1)\right]$.

Эта теорема может быть получена из утверждения теоремы 3. В самом деле, предположим, что $g(\mathfrak{B}) = m$. Тогда существует открытое покрытие пространства B, состоящее из $\left[\frac{1}{n}(m+n-1)\right]$ множеств C_j, над каждым из которых расслоение $\mathfrak{B}$ имеет род $\leqslant n$. В самом деле, если $B_1, \ldots, B_m$ — открытое покрытие пространства B, над каждым из множеств которого расслоение $\mathfrak{B}$ имеет секущую поверхность, то, полагая $C_1 = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, $C_2 = B_{n+1} \cup \ldots \cup B_{2n}$, $C_3 = B_{2n+1} \cup \ldots \cup B_{3n}, \ldots$, мы получим искомое покрытие пространства B. Из теоремы 3 вытекает, что над каждым из множеств $C_1, C_2, \ldots$ существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_n$, поэтому

$$g(\mathfrak{B}_n) \leqslant \left[\frac{1}{n}(m+n-1)\right].$$

Обратно, пусть $g(\mathfrak{B}_n)=s$. Тогда существует открытое покрытие $C_1, \ldots, C_s$, над каждым из множеств которого существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_n$. В силу теоремы 3 над каждым из множеств $C_1, \ldots, C_s$ расслоение $\mathfrak{B}$ имеет род $\leqslant n$, и значит, $g(\mathfrak{B}) \leqslant sn$ (см. предложение 5).

Сравнивая неравенства $g(\mathfrak{B}_n) \leqslant \left[\frac{1}{n}(g(\mathfrak{B})+n-1)\right]$ и $g(\mathfrak{B}) \leqslant ng(\mathfrak{B}_n)$, получаем утверждение теоремы.

§ 2. Гомологические оценки для рода расслоения. Длина расслоения

Из теоремы 3 можно получить гомологические оценки рода расслоенного пространства.

Для того чтобы существовала секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_n$, необходимо, чтобы для любой локальной системы коэффициентов A на пространстве B отображение p_n^*: $H(B;\ A) \to H(E_n;\ A')$ было мономорфизмом (здесь через A' обозначена локальная система коэффициентов на пространстве E_n, индуцированная отображением p_n: $E_n \to B$ и системой A).

Введем обозначения: Z — цилиндр отображения p: $E \to B$, $iE \to Z$ и f: $Z \to B$ — естественные отображения, $Z' = Z - i(E)$, f_n: $Z^n \to B^n$ — произведение n экземпляров отображения f, λ — отображение вложения множества $E_n = (Z^n \diagdown Z'^n) \cap d^{-1}(B)$ в Z^n, d: $B \to B^n$ — диагональное вложение.

Напомним, что $p_n = \alpha^{-1} f_n \lambda$, а отображение d^* является умножением Колмогорова — Александера [1] (точнее говоря, если $\xi_i \in H(B;\ A_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, где A_i — локальные системы коэффициентов на B и $\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \in H(B^n;\ A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)$ — тензорное произведение элементов ξ_i, то $d^*(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n) = \xi_1 \cup \ldots \cup \xi_n \in H(B;\ A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)$ — произведение Колмогорова — Александера классов $\xi_1, \ldots, \xi_n$).

Поэтому можно сформулировать следующее утверждение.

Предложение 9. *Если $g(\mathfrak{B}) \leqslant n$ и элементы $\xi_i \in H(B,\ A_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, где A_i — локальные системы коэффициентов на пространстве B, таковы, что $\xi_1 \cup \ldots \cup \xi_n \neq 0$, то $\lambda^* f_n^*(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n) \neq 0$.*

В самом деле, ясно, что $\lambda^* f_n^*(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n) = p_n^* d^*(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n) = p_n^*(\xi_1 \cup \ldots \cup \xi_n) \neq 0$, так как в условиях предложения у расслоения $\mathfrak{B}_n$ существует секущая поверхность.

Для того чтобы иметь возможность применять предложение 9 для оценки рода расслоения $\mathfrak{B}$, нужно иметь сведения о ядре гомоморфизма $\lambda^* f_n^*$.

Обозначим через μ отображение вложения μ: $Z^n \diagdown Z'^n \to Z^n$. Так как $E_n \subset Z^n \diagdown Z'^n$, то ядро гомоморфизма $\mu^* f_n^*$ содержится в ядре гомоморфизма $\lambda^* f_n^*$. Мы дадим сейчас описание ядра гомоморфизма $\mu^* f_n^*$.

Лемма 1. *Пусть $\xi_i \in H(B;\ A_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, где A_i — локальные системы коэффициентов. Для того чтобы класс когомологий $\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \in H(B^n;\ A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)$ содержался в ядре гомоморфизма $\mu^* f_n^*$ достаточно, чтобы $p^* \xi_i = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.*

В самом деле, если $p^* \xi_i = 0$, то из точной когомологической последовательности пары $(Z,\ i(E))$

$$\ldots \to H(Z,\ i(E);\ A_i) \xrightarrow{\sigma^*} H(Z;\ A_i) \xrightarrow{i^*} H(E;\ A_i) \to \ldots$$

и из коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} H(Z;\ A_i) & \xrightarrow{i^*} & H(E;\ A_i) \\ f^* \uparrow & \nearrow_{p^*} & \\ H(B;\ A_i) & & \end{array}$$

в которой отображение f^* является изоморфизмом, вытекает, что существует элемент $\eta_i \in H(Z,\ i(E);\ A_i)$, удовлетворяющий условию $\sigma^*\eta_i = f^*\xi_i$.

Тензорно перемножая соотношения $\sigma^*\eta_i = f^*\xi_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, приходим к соотношению $\sigma_n^*(\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_n) = f_n^*(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n)$, где $\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_n \in H(Z^n,\ Z^n \setminus Z'^n;\ A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)$, $\sigma_n^*\colon H(Z^n,\ Z^n \setminus Z'^n;\ A_1 \otimes \ldots \otimes A_n) \to H(Z^n;\ A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)$ — гомоморфизм, фигурирующий в точной последовательности пары $(Z^n,\ Z^n \setminus Z'^n)$. Из этой точной последовательности заключаем, что $\mu^*\sigma_n^* = 0$, поэтому $\mu^* f_n^*(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n) = \mu^*\sigma_n^*(\eta \otimes \ldots \otimes \eta_n) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{B} = (E,\ B,\ F,\ p)$ — расслоенное пространство. Если существует n классов когомологий $\xi_1 \in H(B;\ A_1)$, $\xi_2 \in H(B;\ A_2), \ldots, \xi_n \in H(B; A_n)$, где A_i — локальные системы коэффициентов, для которых $p^*\xi_1 = \ldots = p^*\xi_n = 0$ и класс когомологий $\xi_1 \cup \ldots \cup \xi_n \in H(B; A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)$ отличен от нуля, то $g(\mathfrak{B}) \geqslant n+1$.*

Действительно, из леммы 1 вытекает, что в условиях теоремы 4 $\mu^* f_n^*(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n) = 0$ и, значит, $\lambda^* f_n^*(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n) = 0$. Если мы предположим, что $g(\mathfrak{B}) \leqslant n$, то из предложения 9 вытекает, что $\lambda^* f_n^*(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n) \neq 0$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Теорему 4 можно коротко сформулировать с помощью понятия длины расслоенного пространства.

Определение 7. Длиной расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E,\ B,\ F,\ p)$ (обозначаем $\operatorname{long}(\mathfrak{B})$) назовем наибольшее число n, для которого существует n классов когомологий $\xi_1 \in H(B;\ A_1), \ldots, \xi_n \in H(B;\ A_n)$, удовлетворяющих условиям $p^*\xi_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\xi_1 \cup \ldots \cup \xi_n \neq 0$ (здесь A_i — локальные системы коэффициентов на базе B, $\xi_1 \cup \ldots \cup \xi_n \in H(B;\ A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)$).

Следующая теорема очевидным образом равносильна теореме 4.

Теорема 4′. *Для любого расслоенного пространства $\mathfrak{B}$ имеет место неравенство $g(\mathfrak{B}) \geqslant \operatorname{long}(\mathfrak{B}) + 1$.*

Теорема 4 является обобщением теоремы Фролова — Эльсгольца о связи категории топологического пространства и его длины (см. главу VII). Мы приведем сейчас другое доказательство теоремы 4, обобщающее доказательство теоремы Фролова — Эльсгольца, данное авторами [64].

Докажем предварительно следующее утверждение.

Предложение 10. *Пусть $\{B_1, \ldots, B_n\}$ — открытое покрытие базы B расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E,\ B,\ F,\ p)$, $\mathfrak{B}_i$ — расслоенное пространство $(p^{-1}(B_i),\ B_i,\ F,\ p)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда $\operatorname{long}(\mathfrak{B}) \leqslant n - 1 + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{long}(\mathfrak{B}_i)$.*

Доказательство. Отображение вложения $B_i \to B$ обозначим через λ_i, а число $\operatorname{long}(\mathfrak{B}_i)$ через s_i. Предположим, что $\operatorname{long}(\mathfrak{B}) \geqslant n + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{long}(\mathfrak{B}_i)$, т. е. что существуют классы когомологий $\xi_j \in H(B,\ A_i)$ $(1 \leqslant j \leqslant n + \sum_{i=1}^{n} s_i)$, для которых $p^*\xi_j = 0$ и $\xi_1 \cup \ldots \cup \xi_{n+s_1+\ldots+s_n} \neq 0$ $(A_i$ —

локальные системы коэффициентов). Рассмотрим классы когомологий

$$\eta_1=\xi_1\cup\xi_2\cup\ldots\cup\xi_{s_1+1},\quad \eta_2=\xi_{s_1+2}\cup\ldots\cup\xi_{s_1+s_2+2},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \eta_i=\xi_{s_1+s_2+\ldots+s_{i-1}+i}\cup\xi_{s_1+\ldots+s_{i-1}+i+1}\cup\xi_{s_1+\ldots+s_i+i},\ \ldots$$

Ясно, что $\lambda_i^*\eta_i=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ (в противном случае в пространстве B_i нашлось бы s_i+1 классов когомологий $\lambda^*\xi_i$ $(s_1+\ldots+s_{i-1}+i\leqslant j\leqslant s_1+\ldots$ $\ldots+s_i+i)$, для которых $p^*\lambda^*\xi_j=0$ и произведение которых отлично от нуля, что противоречит условию $\operatorname{long}(\mathfrak{B}_i)=s_i+1)$.

По теореме о покрытии ([76], стр. 246) можно строить теорию сингулярных когомологий, рассматривая коцепи как функции, определенные только на таких сингулярных симплексах, которые содержатся[1]) в одном из элементов покрытия $\{B_1,\ldots,B_n\}$. Будем пользоваться при доказательстве этого предложения именно таким определением коцепи.

В силу доказанного выше соотношения $\lambda_i^*\eta_i=0$ мы можем найти коцикл y_i из класса когомологий η_i, принимающий нулевое значение на всех симплексах, принадлежащих множеству B_i. Произведение коциклов $y_1\cup\ldots\cup y_n$ является нулевым коциклом. (Мы рассматриваем коцикл как функцию на симплексах, принадлежащих одному из множеств B_i, а для каждого из таких симплексов найдется такое i, $1\leqslant i\leqslant n$, что коцикл y_i обращается в нуль на всех гранях этого симплекса.)

Коцикл $y_1\cup y_2\cup\ldots\cup y_n$ принадлежит к классу когомологий $\eta_1\cup\eta_2\cup\ldots\cup\eta_n=\xi_1\cup\xi_2\cup\ldots\cup\xi_{n+s_1+\ldots+s_n}$, и следовательно, этот класс когомологий равен нулю, что противоречит сделанному предложению.

Из предложения 10 мгновенно следует теорема 4'. В самом деле, пусть $g(\mathfrak{B})=n$. Тогда существует открытое покрытие $\{B_1,\ldots,B_n\}$ базы B, над каждым из множеств которого существует секущая поверхность. Если через $\mathfrak{B}_i$ обозначено так же, как в формулировке предложения 10, расслоенное пространство $(p^{-1}(B_i),\ B_i,\ F_i,\ p)$, то можно утверждать, что $\operatorname{long}\mathfrak{B}_i=0$. В самом деле, у расслоения $\mathfrak{B}_i$ имеется секущая поверхность, поэтому не существует класса когомологий $\zeta\in H(B_i,A)$, удовлетворяющего условию $p^*\zeta=0$. Применяя предложение 10, получаем, что

$$\operatorname{long}(\mathfrak{B})\leqslant n-1+\sum_{i=1}^{n}\operatorname{long}(\mathfrak{B}_i)=n-1,$$

т. е.

$$\operatorname{long}(\mathfrak{B})\leqslant g(\mathfrak{B})-1.$$

§ 3. Связь рода расслоения с размерностью базы

До сих пор мы использовали теорему 3 для того, чтобы оценить род расслоенного пространства снизу. Однако с помощью этой теоремы можно также оценить род расслоенного пространства сверху.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{B}=(E,\ B,\ F,\ p)$ — расслоенное пространство, слой которого асферичен в размерностях $<s$, а база является k-мерным CW-полиэдром. Тогда*

$$g(\mathfrak{B})<\frac{k+1}{s+1}+1.$$

---

[1]) Сингулярный симплекс f пространства B (т. е. отображение f симплекса Δ в пространство B) содержится в множестве B_i, если $f(\Delta)\subset B_i$.

(Эта теорема является обобщением теоремы Гроссмана [21] о категории полиэдра, асферичного до некоторой размерности.)

Доказательство. В условиях теоремы слой $F_n = F * \ldots * F$ расслоения $\mathfrak{B}_n(E_n, B, F_n, p_n)$ асферичен в размерностях $< n(s+1)-1$ (см. гл. I, § 5), поэтому над $(n(s+1)-1)$-мерным остовом базы B существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_n$. Если $n(s+1)-1 \geqslant k$, то секущая поверхность существует над всей базой B расслоения $\mathfrak{B}_n$, и, значит, для n, удовлетворяющего условию $n \geqslant \frac{k+1}{s+1}$, имеем $g(\mathfrak{B}) \leqslant n$. Отсюда сразу вытекает заключение теоремы.

В случае, когда база B является полиэдром, можно дать другое, более элементарное доказательство теоремы 5.

Пусть K^* — барицентрическое подразделение какой-либо триангуляции K полиэдра B. Обозначим через $\mathfrak{A}_i$ множество тех вершин триангуляции K^*, которые являются центрами симплексов триангуляции K, имеющих размерность $(s+1)(i-1) \leqslant t < (s+1)i$. Рассмотрим множества A_i, представляющие собой объединения звезд тех вершин комплекса K^*, которые входят в множество $\mathfrak{A}_i$. Над каждым из множеств A_i существует секущая поверхность, так как любое из этих множеств может быть продеформировано в подкомплекс триангуляции K^*, имеющий размерность $\leqslant s$, именно, в подкомплекс, состоящий из симплексов триангуляции K^*, все вершины которых принадлежат множеству $\mathfrak{A}_i$. Так как множества A_i образуют открытое покрытие базы и среди них имеется менее, чем $\frac{k+1}{s+1}+1$, непустых, теорема доказана.

В теореме 5 мы предполагали, что база является CW-полиэдром. Это условие можно ослабить.

Теорема 5′. *Пусть $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ — расслоенное пространство в смысле Гуревича, слой которого асферичен в размерностях $< s$, а база гомотопически эквивалентна k-мерному CW-полиэдру. Тогда* $g(\mathfrak{B}) < \frac{k+1}{s+1}+1$.

Доказательство. Пусть B' есть k-мерный CW-полиэдр, гомотопически эквивалентный базе B, $\varphi: B' \to B$ и $\psi: B \to B'$ — отображения, для которых $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ гомотопны тождественным отображениям.

Обозначим через $\mathfrak{B}'(E', B', F, p')$ расслоенное пространство, индуцированное расслоением $\mathfrak{B}$ и отображением $\varphi: B' \to B$, а через $\mathfrak{B}''(E'', B, F, p'')$ — расслоенное пространство, индуцированное расслоением и отображением $\psi: B \to B'$. Расслоение $\mathfrak{B}''$ можно рассматривать так же, как расслоенное пространство, индуцированное расслоением $\mathfrak{B}$ и отображением $\varphi\psi: B \to B$. Так как отображение $\varphi\psi$ гомотопно тождественному, а гомотопные отображения индуцируют эквивалентные расслоенные пространства, расслоение $\mathfrak{B}''$ эквивалентно расслоению $\mathfrak{B}$ и, следовательно, $g(\mathfrak{B}) = g(\mathfrak{B}'')$. В силу предложения 7 имеем $g(\mathfrak{B}') \leqslant g(\mathfrak{B})$ и $g(\mathfrak{B}'') \leqslant g(\mathfrak{B}')$, откуда ясно, что $g(\mathfrak{B}) = g(\mathfrak{B}')$.

Применяя теорему 5 к расслоению $\mathfrak{B}'$, получаем требуемое утверждение.

Определение 8. Размерностью пространства X (обозначаем $\dim X$) называется такое число k, что в любое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное открытое покрытие кратности $\leqslant k+1$, но найдется открытое покрытие пространства X, в которое нельзя вписать локально конечное открытое покрытие кратности $\leqslant k$.

В случае, когда X — бикомпакт, это определение совпадает с обычным. Отметим, что определение 8 применимо только к паракомпактным пространствам.

Теорема 5″. *Род расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$, имеющего k-мерную базу, не превышает $k+1$.*

(Эта теорема обобщает принадлежащую Люстернику и Шнирельману теорему о категории k-мерного компакта.)

Доказательство. Пусть α — покрытие базы, состоящее из всех открытых множеств базы B, над которыми существует секущая поверхность, $\gamma = \{C_\lambda\}$ — локально конечное открытое покрытие кратности $\leqslant k+1$, вписанное в покрытие α, K — нерв покрытия γ, $f\colon B \to K$ — квазибарицентрическое γ-отображение пространства B в полиэдр K (см. [77], стр. 104). Возьмем барицентрическое подразделение K' комплекса K. Вершину комплекса K' назовем вершиной i-го типа, если она является центром i-мерного симплекса комплекса K. Совокупность всех вершин i-го типа обозначим через $\mathfrak{A}_i$. Рассмотрим открытые множества $A_i = \bigcup\limits_{x \in \mathfrak{A}_i} f^{-1}(\mathrm{St}\, x)$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$, состоящие из точек, которые переходят при отображении f в звезды вершин i-го типа в комплексе K' (если x — вершина комплекса K', то через $\mathrm{St}\, x$ обозначается открытая звезда этой вершины в комплексе K').

Над каждым из множеств $f^{-1}(\mathrm{St}\, x)$ существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$, так как любое из этих множеств содержится в одном из элементов покрытия γ.

Так как множества $f^{-1}(\mathrm{St}\, x)$ и $f^{-1}(\mathrm{St}\, y)$ при $x \neq y$, $x, y \in \mathfrak{A}_i$ не пересекаются и система множеств $\{f^{-1}(\mathrm{St}\, x)\}_{x \in \mathfrak{A}_i}$ локально конечна, секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$ существует также над всем множеством A_i. Ввиду того, что множества $A_0, A_1, \ldots, A_k$ образуют покрытие базы B, это доказывает утверждение теоремы.

Так же, как только что доказанная теорема, доказывается следующее

Предложение 11. *Род расслоенного пространства $\mathfrak{B}$ с паракомпактной базой не более чем счетен.*

Мы рассмотрим сейчас случай, когда гомологические инварианты позволяют точно вычислить род расслоенного пространства.

Начнем со следующего утверждения.

Предложение 12. *Предположим, что слой F расслоения $\mathfrak{B}(F, B, F, p)$ асферичен в размерностях $< s$. Тогда характеристический класс*

$$\xi(n) \in H^{(s+1)n}(B, \{\widetilde{H}_s(F) \otimes \ldots \otimes \widetilde{H}_s(F)\})$$

расслоения $\mathfrak{B}(F_n, B, F_n, p_n)$ определяется формулой $\xi(n) = \xi \cup \ldots \cup \xi$, где $\xi \in H^{s+1}(B, \{H_s(F)\})$ — характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}$.

Это предложение сразу вытекает из теоремы 2.

Теорема 6. *Пусть слой F расслоенного пространства $\mathfrak{B}$ асферичен в размерностях $< s$ $(s \geqslant 0)$, база B является CW-полиэдром размерности $\leqslant (s+1)n$, $n > 2$, если $s = 0$, $n > 1$, если $s = 1$, n — любое, если $s > 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) $g(\mathfrak{B}) = n + 1$,

б) $\operatorname{long}(\mathfrak{B}) = n$,

в) $\xi^n = \xi \cup \ldots \cup \xi \neq 0$.

Заметим прежде всего, что в силу теоремы 3 из условия $\dim B \leqslant (s+1)n$ вытекает, что $g(\mathfrak{B}) \leqslant n+1$.

Покажем теперь, что утверждения а) и в) эквивалентны. Если выполнено условие в), то из теоремы 4′ следует, что $g(\mathfrak{B}) \geqslant n+1$ и, значит, $g(\mathfrak{B}) = n+1$. (Теорема 4′ применима, так как $p^*\xi = 0$.) С другой стороны, если условие в) не выполнено, то характеристический класс $\xi(n) = \xi \cup \ldots \cup \xi$ расслоения $\mathfrak{B}_n$ равен нулю. Поэтому существует секущая поверхность над $(s+1)\,n$-мерным остовом базы расслоения $\mathfrak{B}_n$, т. е. в силу условия $\dim B \leqslant (s+1)\,n$ над всей базой. Из теоремы 3 заключаем, что тогда $g(\mathfrak{B}) \leqslant n$, т. е. условие а) не выполнено.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, заметим, что из утверждения в) вытекает утверждение б), а из утверждения б) в силу теоремы 4′ вытекает утверждение а).

Отметим следующее обобщение одного из утверждений теоремы 6.

Предложение 13. *Пусть $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ — расслоение, базой которого является k-мерный CW-полиэдр B, а слой F асферичен в размерностях $< s$. Если $\xi^r = \xi \cup \ldots \cup \xi = 0$, $g(\mathfrak{B}) = g$, то $k > (s+1)(g-1) + \left[\frac{g-1}{r}\right] - 1$ (при $s = 0$ считаем, что $r > 2$, при $s = 1$, что $r > 1$, при $s > 2$ r — любое; через $\xi \in H^{s+1}(B, \{H_s(F)\})$ обозначаем, как и раньше, характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}$).*

Доказательство. Так как характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}_r$ равен ξ^r (в силу предложения 12), то над $(s+1)\,r$-мерным остовом базы B существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_r$. Над s-мерным остовом расслоения $\mathfrak{B}$ существует секущая поверхность в силу асферичности слоя F в размерностях $< s$. Отсюда вытекает в силу теоремы 1, что над $[(s+1)(pr+q)+p-1]$-мерным остовом базы B существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_{pr+q}$ $(p \geqslant 0,\ q \geqslant 0)$.

Полагая $pr+q = g-1$, $p = \left[\frac{g-1}{r}\right]$ и замечая, что в силу условия $g(\mathfrak{B}) = g$ у расслоения $\mathfrak{B}_{g-1}$ не существует секущей поверхности, убеждаемся, что

$$(s+1)(g-1) + \left[\frac{g-1}{r}\right] - 1 < k.$$

Теорема 7. *Если классы когомологий $\xi \in H^k(B, \{\pi_{k+1}(F_r)\})$ и $\eta \in H^l(B, \{\pi_{l-1}(F_s)\})$ реализуются как препятствия к распространению секущих поверхностей соответственно в расслоениях $\mathfrak{B}_r$ и $\mathfrak{B}_s$, то класс когомологий*

$$\xi \cup \eta \in H^{k+l}(B, \{\pi_{k+l-1}(F_{r+s})\})$$

реализуется как препятствие к распространению секущей поверхности в расслоении $\mathfrak{B}_{r+s}$.

(Спаривание $\pi_{k-1}(F_r)$ и $\pi_{l-1}(F_s)$ в группе $\pi_{k+l-1}(F_{r+s})$, с помощью которого определяется произведение $\xi \cup \eta$, определено на стр. 224; напомним, что $F_{r+s} = F_r * F_s$.)

Для доказательства достаточно применить теорему 1, полагая в формулировке этой теоремы $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_r$, $\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}_s$.

Приведем следующее простое предложение, позволяющее определить, когда род накрытия равен 2.

Предложение 14. *Пусть $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ — расслоенное пространство, слой которого F есть нульмерное сепарабельное метризуемое пространство, а база B является CW-полиэдром. Для того чтобы расслоение $\mathfrak{B}$ имело род 2, необходимо и достаточно, чтобы это расслоение имело род 2 над двумерным остовом B^2 базы B.*

В самом деле, в условиях этого предложения слой $F * F$ расслоения $\mathfrak{B}_2$ является одномерным сепарабельным метризуемым пространством и, следовательно, [34] асферичен в размерностях > 1 (т. е. $\pi_i(F_2) = 0$ при $i > 1$). Поэтому секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_2$, определенная над двумерным остовом B^2 базы B, может быть продолжена в секущую поверхность над всей базой B.

§ 4. Более тонкие оценки рода расслоенного пространства

Для вычисления рода расслоения могут быть использованы результаты Болтянского [8], [9], усовершенствованные Ляо [33] и Виноградовым [9], о втором препятствии к распространению секущей поверхности. Сформулируем эти результаты для секущих поверхностей в ориентируемом пучке сфер, т. е. косом произведении, слоем которого является сфера S^n, а группой — группа вращений $SO(n+1)$, обычным способом действующая на сфере.

Предложение 15. *Пусть $\mathfrak{B}(E, B, S^n, SO(n+1), p)$ — ориентируемый пучок n-мерных сфер ($n \geqslant 3$), база которого является CW-полиэдром.*

Если первое препятствие к распространению секущей поверхности в расслоении $\mathfrak{B}$ равно нулю, то вторые препятствия (т. е. препятствия к распространению секущих поверхностей расслоения $\mathfrak{B}$ на $(n+2)$-мерный остов) заполняют те и только те классы когомологий $z \in H^{n+2}(B; Z_2)$, которые определяются формулой

$$z = z_0 + d \cup w_2 + Sq^2 d,$$

где z_0 — препятствие к распространению некоторой фиксированной секущей поверхности на $(n+2)$-мерный остов, $w_2 \in H^2(B; Z_2)$ — двумерный штифелевский класс пучка $\mathfrak{B}$, d пробегает группу $H^n(B)$.

Классы когомологий z, заполняемые вторыми препятствиями, могут быть определены также формулой

$$p^* z = t \cup p^* w_2 + Sq^2 t,$$

где t пробегает все классы когомологий из группы $H^n(E)$, высекающие на слое фундаментальный класс сферы, т. е. удовлетворяющие условию $i^* t = s$ ($i: S^n \to E$ — вложение слоя в пространство расслоения, s — фундаментальный класс сферы S^n).

(Первое препятствие к распространению секущей поверхности в расслоении $\mathfrak{B}$ можно определить также как характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}$ или $(n+1)$-мерный штифелевский класс пучка $\mathfrak{B}$. Второе препятствие является элементом группы $H^{n+2}(B; Z_2)$, так как $\pi_{n+1}(S^n) = Z_2$ при $n \geqslant 3$. Произведения $d \cup w_2$ и $t \cup p^* w_2$ определяются с помощью единственного нетривиального спаривания группы Z и группы Z_2 в группе Z_2.)

Предложение 16. *Пусть $\mathfrak{B}(E, B, S^n, SO(n+1), p)$ — ориентируемый пучок n-мерных сфер ($n \geqslant 1$), база которого является $(nk+k-1)$-мерным CW-полиэдром ($k \geqslant 2$ при $n \leqslant 2$, k — любое при $n > 2$), $\mathfrak{B}_k(E_k, B, S^{nk+k-1}, SO(nk+k), p_k)$ — уитнеевская сумма k экземпляров пучка $\mathfrak{B}$. Расслоение $\mathfrak{B}$ имеет род $\leqslant k$ в том и только в том случае, когда выполнены требования: 1) $\operatorname{long} \mathfrak{B} \leqslant k-1$; 2) существует класс когомологий $t \in H^{nk+k-1}(E_k)$, высекающий на слое S^{nk+k-1} расслоения $\mathfrak{B}_k$ фун-*

даментальный класс когомологий и удовлетворяющий условию $Sq^2 t = kt \cup p^* w_2$, *где* w_2 — *двумерный штифелевский класс пучка* $\mathfrak{B}$.

(Первое требование можно заменить требованием: $\xi^k = 0$, где $\xi \in H^{n+1}(B)$ — характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}$,

$$\xi^k = \underbrace{\xi \cup \ldots \cup \xi}_{k} \in H^{(n+1)k}(B).$$

Вместо того чтобы говорить об уитнеевской сумме пучков сфер, можно в силу замечания в конце гл. II говорить о сумме k экземпляров расслоения $\mathfrak{B}$ в смысле определения 1.)

Предложение 16 следует из предложения 15 и теоремы 3, если заметить, что характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}_k$ равен $\xi^k = \xi \cup \ldots \cup \xi$ (в силу предложения 12), а двумерный штифелевский класс пучка $\mathfrak{B}_k$ равен kw_2 (это вытекает, например, из теоремы двойственности Уитнея ([48], стр. 240, или [51])).

Теорема 8. *Пусть* $\mathfrak{B}(E, B, S^n, SO(n+1), p)$ — *ориентируемый пучок* n-*мерных сфер* ($n \geqslant 1$), *база которого является* $(nk+k+1)$-*мерным односвязным гладким замкнутым многообразием* ($k \geqslant 2$ *при* $n \leqslant 2$, k — *любое при* $n > 2$). *Предположим, что* $g(\mathfrak{B}) = k+1$ (ξ — *характеристический класс расслоения* $\mathfrak{B}$). *Тогда в случае, когда* k *четно, двумерный штифелевский класс* w_2' *многообразия* B *равен нулю, в случае, когда* k *нечетно, двумерный штифелевский класс* w_2' *пучка* $\mathfrak{B}$ *равен двумерному штифелевскому классу* w_2' *многообразия* B.

Доказательство. Рассмотрим уитнеевскую сумму

$$\mathfrak{B}_k(E_k, B, S^{nk+k-1}, SO(nk+k-1), p_k)$$

k экземпляров пучка $\mathfrak{B}$.

Из условия $g(\mathfrak{B}) = k+1$ в силу теоремы 3 вытекает, что у расслоения $\mathfrak{B}_k$ не существует секущей поверхности. Первое препятствие к распространению секущей поверхности в расслоении $\mathfrak{B}_k$ является элементом группы $H^{nk+n}(B)$ и, следовательно, равно нулю, так как по закону двойственности Пуанкаре группа $H^{nk+n}(B)$ изоморфна группе $H_1(B)$, тривиальной в силу односвязности многообразия B. Таким образом, препятствие к распространению секущей поверхности в расслоении $\mathfrak{B}_k$ на $(nk+k+1)$-мерный остов базы B (второе препятствие) не может быть равно нулю. По предложению 15, вторые препятствия заполняют классы когомологий, определяемые формулой $z = z_0 + d \cup w_2(\mathfrak{B}_k) + Sq^2 d$, где z_0 — препятствие к распространению фиксированной секущей поверхности на $(nk+n+1)$-мерный остов, $w_2(\mathfrak{B}_k)$ — двумерный штифелевский класс пучка $\mathfrak{B}_k$, d пробегает группу $H^{nk+n-1}(B)$. Так как $w_2(\mathfrak{B}_k) = k \cdot w_2$, где w_2 — двумерный штифелевский класс пучка $\mathfrak{B}$, а $Sq^2 d = d \cup w_2'$, где w_2' — двумерный штифелевский класс многообразия B [62], то можно переписать формулу для классов когомологий, заполняемых вторыми препятствиями, в виде

$$z = z_0 + d \cup (kw_2 + w_2').$$

Группа $H^{nk+n+1}(B, Z_2)$, элементами которой являются классы когомологий, заполняемые вторыми препятствиями, содержит всего один ненулевой элемент (так как B — многообразие). Так как $z_0 \neq 0$ и для любого $d \in H^{nk+n-1}(B)$

$$z = z_0 + d \cup (kw_2 + w_2') \neq 0,$$

то из этого следует, что при любом $d \in H^{nk+n-1}(B)$ имеет место равенство $d \cup (kw_2 + w_2') = 0$. Естественный гомоморфизм $H^{nk+n-1}(B) \to H^{nk+n-1}(B; Z_2)$ (приведение по модулю 2) является эпиморфизмом (это вытекает из точной последовательности

$$\ldots \to H^{nk+n-1}(B) \to H^{nk+n-1}(B, Z_2) \to H^{nk+n}(B) \to \ldots,$$

порождаемой точной последовательностью групп коэффициентов $O \to Z \to \to Z \to Z_2 \to 0$, и из соотношения $H^{nk+n}(B) = H_1(B) = 0$). Приводя по модулю 2 равенство $d \cup (kw_2 + w_2') = 0$, получаем, что для любого элемента $\tilde{d} \in H^{nk+n-1}(B, Z_2)$ справедливо равенство $\tilde{d} \cup (kw_2 + w_2') = 0$, и, значит, по закону двойственности $kw_2 + w_2' = 0$. При $k = 2l$ получаем соотношение $w_2' = 0$, при $k = 2l + 1$ — соотношение $w_2 = w_2'$. Теорема доказана.

§ 5. Полиэдральный род и k-мерный род расслоения

Определение 9. Будем называть **полиэдральным родом расслоения** $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ (обозначается $g'(\mathfrak{B})$) наибольшее число n, для которого можно найти такой полиэдр P и такое отображение $\varphi: P \to B$, что расслоение, индуцированное отображением φ и расслоением $\mathfrak{B}$, имеет род n. В случае, если не существует наибольшего из чисел, удовлетворяющих указанному выше условию, будем говорить, что полиэдральный род равен бесконечности.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 17. *Если база B расслоения $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ является полиэдром, то полиэдральный род расслоения $\mathfrak{B}$ равен роду расслоения $\mathfrak{B}$ (т. е. $g'(\mathfrak{B}) = g(\mathfrak{B})$).*

Определение 10. Будем называть **k-мерным родом расслоения** $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ (обозначаем $g_k(\mathfrak{B})$) наименьшую мощность открытого покрытия $\alpha = \{A_\lambda\}$ базы B, обладающего следующим свойством: если $\varphi: P^k \to B$ — такое отображение k-мерного полиэдра P^k в базу B, что образ полиэдра P^k целиком содержится в одном из элементов покрытия α, то расслоение, индуцированное отображением φ и расслоением $\mathfrak{B}$, имеет секущую поверхность.

Покажем, прежде всего, что k-мерный род можно рассматривать как полиэдральный род некоторого вспомогательного расслоения.

Известно [56], что для расслоенных пространств можно построить аналог натуральной системы (системы Постникова [42]), т. е. разложить расслоенное пространство (с точностью до гомотопии) в последовательность расслоений, слоями которых служат пространства типа $K(\Pi, n)$. Из этого разложения вытекает, что для расслоения $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ и натурального числа k существует такое расслоение $\mathfrak{B}_k(E_k, B, F_k, p_k)$ со слоем, асферичным в размерностях $\geqslant k$, что можно найти расслоение $\tilde{\mathfrak{B}}(\tilde{E}, B, \tilde{F}, \tilde{p})$ и послойные отображения $\varphi_k: \tilde{E} \to E_k$ и $\psi: \tilde{E} \to E$ ($p_k\varphi_k = \tilde{p}$, $p\psi = \tilde{p}$), первое из которых индуцирует слабую гомотопическую эквивалентность слоя $\tilde{F}$ и слоя F_k в размерностях $< k$, а второе — индуцирует слабую гомотопическую эквивалентность слоя $\tilde{F}$ и слоя F).

Предложение 18. *Полиэдральный род расслоения $\mathfrak{B}_k(F_k, B, F_k, p_k)$ равен k-мерному роду расслоения $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$, т. е. $g_k(\mathfrak{B}) = g'(\mathfrak{B}_k)$.*

Предложение 18 вытекает из следующих простых утверждений.

Лемма 2. *Если $\mathfrak{B}(E,\ B,\ F,\ p)$ и $\mathfrak{B}'(E',\ B,\ F',\ p')$ — два расслоения, базой которых является один и тот же k-мерный полиэдр B, и $\psi\colon E \longrightarrow E'$ — послойное отображение ($p'\psi = p$), индуцирующее слабую гомотопическую эквивалентность слоя F и слоя F' в размерностях $< k$, то у расслоения $\mathfrak{B}$ секущая поверхность существует в том и только в том случае, когда существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}'$.*

Лемма 3. *Если слой расслоения $\mathfrak{B}$ асферичен в размерностях $\geqslant k$, то k-мерный род расслоения $\mathfrak{B}$ равен полиэдральному роду этого расслоения.*

Доказательство предложения 18. Из леммы 2 вытекает, что k-мерный род расслоения $\mathfrak{B}(E,\ B,\ F,\ p)$ равен k-мерному роду расслоения $\widetilde{\mathfrak{B}}(\widetilde{E},\ B,\ \widetilde{F},\ \widetilde{p})$, который в силу той же леммы равен k-мерному роду расслоения $\mathfrak{B}_k(E_k,\ B,\ F_k,\ p_k)$: $g_k(\mathfrak{B}) = g_k(\widetilde{\mathfrak{B}}) = g_k(\mathfrak{B}_k)$.

В силу леммы 3 k-мерный род расслоения $\mathfrak{B}_k$ равен полиэдральному роду этого расслоения, т. е. $g_k(\mathfrak{B}_k) = g'(\mathfrak{B}_k)$. Предложение доказано.

Следствие. *Если база B расслоения $\mathfrak{B}(E,\ B,\ F,\ p)$ является полиэдром, то k-мерный род расслоения $\mathfrak{B}$ равен роду расслоения $\mathfrak{B}_k(E_k,\ B,\ F_k,\ p_k)$ (т. е. $g_k(\mathfrak{B}) = g(\mathfrak{B}_k)$).*

Укажем неравенства, связывающие k-мерный род расслоения и род расслоения (эти неравенства обобщают доказанные Берштейном неравенства, связывающие k-мерную категорию и категорию топологического пространства (см. гл. VI)).

Предложение 19. *Если $\mathfrak{B}(E,\ B,\ F,\ p)$ — расслоение, базой которого является m-мерный полиэдр, то*

$$g(\mathfrak{B}) \leqslant g_k(\mathfrak{B}) + \left[\frac{m}{k+1}\right],\quad g(\mathfrak{B}) \leqslant \max\left(g_{m-1}(\mathfrak{B}),\ 2\right).$$

Доказательству предложения 19 предпошлем следующее утверждение, полезное и в других случаях.

Предложение 20. *Пусть $\gamma = \{C_1,\ \ldots,\ C_m\}$ и $\delta = \{D_1,\ \ldots,\ D_n\}$ — такие открытые покрытия базы B расслоения $\mathfrak{B}(E,\ B,\ F,\ p)$, что над каждым множеством вида $C_i \cap D_j$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$. Тогда род расслоения $\mathfrak{B} \leqslant m + n - 1$.*

Доказательство предложения 20. Построим открытые покрытия $\gamma^{(k)} = \{C_1^k,\ C_2^k,\ \ldots,\ C_{m+n}^k\}$ и $\delta^{(k)} = \{D_1^k,\ D_2^k,\ \ldots,\ D_{m+n}^k\}$, $k \geqslant 1$, пространства B так, чтобы выполнялись следующие условия: $C_i^1 = C_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $D_j^1 = D_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n$, C_i^1 при $i > m$ и D_j^1 при $j > n$ — пустые множества $C_i^k \supset \overline{C}_i^{k+1}$, $D_j^k \supset \overline{D}_j^{k+1}$. Определим открытое покрытие $\alpha = \{A_1,\ \ldots,\ A_{m+n-1}\}$ пространства B, полагая

$$\begin{gathered}
A_1 = C_1^1 \cap D_1^1,\\
A_2 = (C_1^2 \cap D_2^2 \cup C_2^2 \cap D_1^2) \setminus \overline{C_1^2 \cap D_1^2},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
A_k = \bigcup_{i+j=k+1} C_i^k \cap D_j^k \setminus \bigcup_{i+j \leqslant k} \overline{C_i^k \cap D_j^k}.
\end{gathered}$$

Из легко проверяемого по индукции соотношения $\bigcup\limits_{s \leqslant k} A_s \supset \bigcup\limits_{i+j \leqslant k+1} C_i^k \cap D_j^k$ вытекает, что множества $A_1,\ \ldots,\ A_{m+n-1}$ действительно образуют покрытие пространства B. Над каждым из множеств A_k $(1 \leqslant k \leqslant m + n - 1)$

существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$ (в самом деле, $A_k = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k+1} G_s^k$, где $G_s^k = C_s^k \cap D_{k+1-s}^k \setminus \overline{\bigcup_{i+j \leqslant k} C_i^k \cap D_j^k}$, открытые множества G_s^k и $G_{s'}^k$ не пересекаются при $s \neq s'$ и над каждым из множеств G_s^k существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$, так как $G_s^k \subset C_s \cap D_{k+1-s}$).

Таким образом, действительно $g(\mathfrak{B}) \leqslant m+n-1$.

Доказательство предложения 19. Пусть $g_k(\mathfrak{B}) = n$. Возьмем настолько мелкую триангуляцию K полиэдра B, что можно найти открытое покрытие $\gamma = \{C_1, \ldots, C_n\}$, замыкания элементов которого $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_n$ являются подкомплексами триангуляции K и над k-мерным остовом каждого из подкомплексов $\overline{C}_i$ существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$. Пусть K^* — барицентрическое подразделение триангуляции K, $\mathfrak{A}_i$ — множество тех вершин триангуляции K^*, которые являются центрами симплексов триангуляции K, имеющих размерность $(k+1)(i-1) \leqslant t(k+1)i$. Рассмотрим[1]) множества D_i, представляющие собой объединения звезд тех вершин комплекса K^*, которые входят в множество $\mathfrak{A}_i$. Множества $D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots$ $\left(1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{m}{k+1}\right]+1\right)$ образуют открытое покрытие пространства B; обозначим это покрытие через δ. Покрытия $\gamma = \{C_1, \ldots, C_n\}$ и $\delta = \{D_1, \ldots, D_{\left[\frac{m}{k+1}\right]+1}\}$ удовлетворяют условию предложения 20, так как каждое из множеств $\overline{C}_i \cap D_j$ может быть продеформировано в k-мерный остов подкомплекса $\overline{C}_i$ и следовательно, над каждым из множеств $C_i \cap D_j \subset \overline{C}_i \cap D_j$ существует секущая поверхность. Применяя предложение к покрытиям γ и δ, получаем первое из доказываемых неравенств:

$$g(\mathfrak{B}) \leqslant g_k(\mathfrak{B}) + \left[\frac{m}{k+1}\right].$$

Докажем второе неравенство: $g(\mathfrak{B}) \leqslant \max(g_{m-1}(\mathfrak{B}), 2)$. Если $g_{m-1}(\mathfrak{B}) = 1$, то в силу уже доказанного не равенства $g(\mathfrak{B}) \leqslant 2$, поэтому можно считать, что $g_{m-1}(\mathfrak{B}) = n \geqslant 2$.

Выберем замкнутое покрытие $\gamma = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$, элементы которого являются такими подкомплексами триангуляции K полиэдра B, что над $(m-1)$-мерным остовом каждого из этих подкомплексов существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$. Можно считать, что подкомплексы C_i и C_j при $i \neq j$ не имеют общих m-мерных симплексов. (Если m-мерный симплекс содержится в нескольких подкомплексах C_i, то выбросим внутренность этого симплекса из всех этих подкомплексов, кроме одного. Проведя эту операцию для всех m-мерных симплексов, получим покрытие, обладающее нужным нам свойством.) Выберем внутри каждого m-мерного симплекса T_j малый замкнутый шар E_j и малый открытый шар E'_j, содержащий замкнутый шар E_j; заключим каждое из множеств C_i в тесную окрестность U_i. Будем обозначать через $\mathfrak{S}_i$ множество тех индексов j, для которых m-мерный симплекс T_j содержится в подкомплексе C_i. Построим открытое множество B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, выбросив из множества C_i все шары E_j, где $j \in \mathfrak{S}_i$, и присоединив все шары E'_j, где $j \overline{\in} \mathfrak{S}_i$. Если окрестности U_i выбраны достаточно тесными, то над каждым из множеств B_i существует секущая поверхность (так как B распадается на два непересекающихся открытых множества $U_i \setminus \bigcup_{j \in \mathfrak{S}_i} E$

[1]) Точно такая же конструкция была применена на стр. 242.

и $\bigcup\limits_{j\in\mathfrak{S}_i} E'_j$, над каждым из которых существует секущая поверхность). Множества $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют открытое покрытие пространства B, поэтому $g(\mathfrak{B}) \leqslant n$.

Доказанное выше предложение 20 может быть использовано также для доказательства следующих утверждений.

Предложение 21. *Пусть* $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2(E, B, F_1 \times F_2, p)$ — *произведение расслоений* $\mathfrak{B}_1(E_1, B, F_1, p_1)$ *и* $\mathfrak{B}_2(E_2, B, F_2, p_2)$. *Тогда*

$$g(\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2) \leqslant g(\mathfrak{B}_1) + g(\mathfrak{B}_2) - 1.$$

Доказательство. Пусть $g(\mathfrak{B}_1) = m$, $g(\mathfrak{B}_2) = n$, $\gamma = \{C_1, \ldots, C_m\}$ — открытое покрытие пространства B, над каждым из множеств которого существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_1$, $\delta = \{D_1, \ldots, D_n\}$ — открытое покрытие пространства B, над каждым из множеств которого существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_2$. В силу предложения 2 над каждым из множеств $C_i \cap D_j$ существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.

Применяя предложение 20 к покрытиям γ и δ, получаем требуемое неравенство.

Предложение 22. *Пусть* $\mathfrak{B}_1(E_1, B_1, F_1, p_1)$ *и* $\mathfrak{B}_2(E_2, B_2, F_2, p_2)$ — *два расслоенных пространства*, $(E_1 \times E_2, B_1 \times B_2, F_1 \times F_2, p_1 \times p_2)$ — *расслоение* $\mathfrak{B}$. *Тогда*

$$g(\mathfrak{B}) \leqslant g(\mathfrak{B}_1) + g(\mathfrak{B}_2) - 1.$$

Доказательство. Пусть $g(\mathfrak{B}_\lambda) = m_\lambda$, $\alpha_\lambda \{A_1^\lambda, A_2^\lambda, \ldots, A_{m_\lambda}^\lambda\}$ — открытое покрытие пространства B_λ, над каждым из множеств которого существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2)$. Обозначим через C_i множество $A_i^1 \times B_2$, через D_j — множество $B_1 \times A_j^2$. Множества $\{C_1, \ldots, C_{m_1}\}$ $(\{D_1, \ldots, D_{m_2}\})$ образуют открытое покрытие пространства $B_1 \times B_2$; это покрытие обозначим через γ (соответственно, δ). Над каждым из множеств вида $C_i \cap D_j$ существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$ (так как $C_i \cap D_j = A_i^1 \times A_j^2$). Применяя предложение 21 к покрытиям γ и δ, получаем неравенство

$$g(\mathfrak{B}) \leqslant m_1 + m_2 - 1.$$

Замечание. Предложение 21 и предложение 22 могут быть получены одно из другого.

Предложение 22 является обобщением неравенства $\operatorname{cat}(X \times Y) \leqslant \operatorname{cat} X + \operatorname{cat} Y - 1$ [78] (через $\operatorname{cat} X$ обозначается категория пространства (см. гл. VI)).

ГЛАВА IV

РОД ГЛАВНОГО РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

В этой главе мы займемся родом главного расслоенного пространства. Для случая главного расслоенного пространства можно дать несколько иное определение рода, очевидным образом эквивалентное определению 5.

Определение 11. Родом главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ называется наименьшая мощность открытого покрытия базы B, состоящего из множеств, над каждым из которых расслоенное пространство эквивалентно прямому произведению.

В самом деле, главное расслоение тогда и только тогда эквивалентно прямому произведению, когда у него существует секущая поверхность.

Вместо того, чтобы говорить о роде главного расслоения, можно говорить о роде пространства относительно действующей в нем без неподвижных точек топологической группы, пользуясь следующим определением.

Определение 11'. Пусть в пространстве E действует без неподвижных точек топологическая группа G и действие этой группы порождает главное расслоение $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$. Родом пространства E относительно действующей в нем группы G (обозначаем $g(E, G)$) называется род главного расслоения $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$.

§ 1. Универсальное главное расслоенное пространство рода $\leqslant \tau$

Предложение 23. *Если главное расслоение $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ можно допустимо отобразить в главное расслоение $\mathfrak{B}'(E', B', G', p')$, то $g(\mathfrak{B}) \leqslant g(\mathfrak{B}')$.*

В самом деле, известно, что в условиях этого предложения расслоение $\mathfrak{B}$ индуцируется расслоением $\mathfrak{B}'$, поэтому применимо предложение 7.

Из предложения 23 вытекает, что в главное расслоенное пространство рода τ нельзя допустимо отобразить главные расслоенные пространства, которые имеют род $> \tau$. Естественно возникает вопрос: можно ли построить универсальное главное расслоенное пространство рода τ, т. е. такое главное расслоенное пространство с группой G, в которое можно допустимо отобразить те и только те главные расслоенные пространства с группой G, которые имеют род $\leqslant \tau$. Ответ на этот вопрос оказывается положительным.

Мы укажем сейчас конструкцию главного универсального пространства рода $\leqslant \tau$.

Пусть G — топологическая группа. Обозначим через $\mathfrak{A}(G)$ главное расслоенное пространство с группой G, базой которого является точка (можно считать, что пространством расслоения $\mathfrak{A}(G)$ является пространство G и группа G действует на G с помощью левых сдвигов). Через $\mathfrak{A}_\tau(G) = (A_\tau(G), B_\tau(G), G, p_\tau)$ обозначим соединение τ экземпляров главных расслоенных пространств $\mathfrak{A}(G)$ [1]).

Точнее говоря, рассмотрим множество M, имеющее мощность τ, и совокупность τ экземпляров $\{\mathfrak{A}(G)_\mu\}$ расслоения $\mathfrak{A}(G)$, обозначенных индексами μ из множества M. Главное расслоение $*\mathfrak{A}(G)_{(\mu)}$ и будем обозначать через $\mathfrak{A}_\tau(G) = (A_\tau(G), B_\tau(G), G, p_\tau)$ или через $\mathfrak{A}_M(G) = (A_M(G), B_M(G), G, p_M)$ в случае, когда нужно отметить, какое множество пробегают индексы, которыми обозначены экземпляры расслоения $\mathfrak{A}(G)$, соединением которых является расслоение $\mathfrak{A}_M(G)$.

Пространство $A_M(G)$ можно отождествить с пространством

$$\prod_{\mu \in M} \Pi(G)_{(\mu)} \diagdown \prod_{\mu \in M} \Pi'(G)_{(\mu)},$$

где $\Pi(G)$ — конус над пространством G,

$$\Pi'(G) = \Pi(G) \diagdown i(G), \quad \prod_{\mu \in M} \Pi(G)_{(\mu)} \quad \Big(\prod_{\mu \in M} \Pi'(G)_{(\mu)}\Big)$$

---

[1]) Расслоение $\mathfrak{A}_\tau(G)$ при $\tau \leqslant \omega$ (ω — счетная мощность) было построено Милнором [37], который показал, что расслоение $\mathfrak{A}_\omega(G)$ является универсальным (в смысле определения в [48]).

— тихоновское произведение τ экземпляров пространства $\Pi(G)$ ($\Pi'(G)$), обозначенных индексами из множества M. Проекцию пространства $\prod\limits_{\mu\in M}\Pi(G)_{(\mu)}$ на сомножитель $\Pi(G)$, имеющий индекс μ, обозначаем λ_μ: $A_M(G)\to\Pi(G)$. Действие группы G на пространстве $A_M(G)$ определяется формулой $\lambda_\mu g(x)=g(\lambda_\mu(x))$. Напомним, что через α обозначается естественное отображение $G\times I\to\Pi(G)$, через i: $G\to\Pi(G)$ — вложение: $i(g)=\alpha(g, 1)$, вершина конуса $\Pi(G)$ обозначается буквой O (т. е. $O=\alpha(g, O)$), группа G действует на пространстве $\Pi(G)$ по формуле

$$g\alpha(h, t)=\alpha(hg, t).$$

Теорема 9. *Для того чтобы главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ можно было допустимо отобразить в главное расслоенное пространство $\mathfrak{A}_\tau(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $g(\mathfrak{B})\leqslant\tau$.*

В этой теореме τ может быть как конечным, так и бесконечным кардинальным числом.

Доказательство. Покажем, что всякое главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$, имеющее род $\leqslant\tau$, можно допустимо отобразить в $\mathfrak{A}_\tau(G)$.

Пусть $\beta\{B_\mu\}_{\mu\in M}$ — открытое покрытие мощности τ пространства B множествами, над которыми существует секущая поверхность, φ_μ: $B_\mu\to E$ — секущая поверхность над множеством B_μ (элементы покрытия β обозначены индексами из множества M, имеющего мощность τ). Построим систему непрерывных действительных функций $\{h_\mu\}_{\mu\in M}$ на пространстве B, обладающую следующими свойствами: а) $0\leqslant h_\mu\leqslant 1$, б) $h_\mu=0$ вне множества B_μ, в) в каждой точке $x\in B$ для некоторого μ функция $h_\mu(x)=1$. Такая система функций существует в силу принятого в работе определения открытого покрытия (гл. I, § 1). Определим для каждого индекса $\mu\in M$ отображение Φ_μ: $E\to\Pi(G)$, коммутирующее с преобразованиями группы G, с помощью следующей конструкции. Каждой точке $x\in p^{-1}(B_\mu)$ ставим в соответствие точку $\alpha(g, t)\in\Pi(G)$, где элемент $g\in G$ определяется соотношением $x=g\varphi_\mu p(x)$, а число t — формулой $t=h_\mu p(x)$. Точкам же множества $E\diagdown p^{-1}(B_\mu)$ ставим в соответствие точку $O\in\Pi(G)$. Совокупность отображений $\{\Phi_\mu\}$ определяет отображение Φ: $E\to\prod\limits_{\mu\in M}\Pi(G)$, коммутирующее с преобразованиями группы G, по формуле $\lambda_\mu\Phi(e)=\Phi_\mu(e)$. Из того, что для каждой точки $x\in B$ существует индекс μ, для которого $h_\mu(x)=1$, вытекает, что $\Phi(E)\subset A_\tau(G)=\prod\limits_{\mu\in M}\Pi(G)_{(\mu)}\diagdown\prod\limits_{\mu\in M}\Pi'(G)_{(\mu)}$, и, следовательно, мы построили допустимое отображение главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}$ в главное расслоенное пространство $\mathfrak{A}_\tau(G)$.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно показать, что $g(\mathfrak{A}_\tau(G))\leqslant\tau$. Это неравенство вытекает из соотношений

$$\mathfrak{A}_\tau(G)=\mathop{*}_{\mu\in M}\mathfrak{A}(G)_{(\mu)},\quad g(\mathfrak{A}(G))=1$$

и следующего утверждения.

Предложение 24. *Пусть $\{\mathfrak{B}(E_\mu, B_\mu, G, p_\mu)\}_{\mu\in M}$ — совокупность главных расслоенных пространств с группой G, $\mathfrak{B}(E, B, G, p)=\mathop{*}\limits_{\mu\in M}\mathfrak{B}_\mu$ — соединение расслоений $\mathfrak{B}_\mu$.*

Тогда $g(\mathfrak{B})\leqslant\sum\limits_{\mu\in M}g(\mathfrak{B}_\mu)$.

Доказательство. По определению соединения главных расслоенных пространств $E = \prod_{\mu \in M} Z_\mu \setminus \prod_{\mu \in M} Z'_\mu$, где Z_μ — цилиндр отображений $p_\mu: E_\mu \to B$, $Z'_\mu = Z_\mu \setminus i(E_\mu)$. Обозначим через C_μ открытое подмножество пространства E, состоящее из тех точек, проекция которых на μ-ый сомножитель Z_μ содержится в множестве $Z_\mu \setminus j\ (B_\mu)$ (т. е. $C_\mu = \lambda_\mu^{-1} \times \times (Z_\mu \setminus j(B_\mu))$. Через D_μ обозначим множество $p(C_\mu)$. Множества D_μ очевидно, образуют открытое покрытие пространства B.

Род расслоения $\mathfrak{B}$ над множеством D_μ, т. е. род расслоения $(C_\mu, D_\mu, G, p) \leqslant g(\mathfrak{B}_\mu)$, так как, поставив в соответствие каждой точке $c \in C_\mu$ ее проекцию на μ-ый сомножитель Z_μ, мы получим допустимое отображение расслоения (C_μ, D_μ, G, p) в расслоение $Z_\mu \setminus j(B) \to B$, имеющее, очевидно, род $g(\mathfrak{B}_\mu)$. Применяя предложение 5, получаем требуемое утверждение.

Пусть $M = \{\mu\}$ — множество мощности τ, $N = \{\nu\}$ — множество мощности σ, $\tau \leqslant \sigma$, $\psi: M \to N$ — взаимно однозначное отображение множества M на подмножество множества N.

Поставим в соответствие вложению $\psi: M \to N$ вложение $s_\psi: A_M(G) \to \to A_N(G)$ следующим образом. Если $x \in A_\mu(G)$, то полагаем $\lambda_\nu(s_\psi(x)) = = \lambda_{\psi^{-1}(\nu)}(x)$ в случае, когда $\nu \in \psi(M)$, $\lambda_\nu(s_\psi(x)) = 0$ в случае, когда $\nu \bar{\in} \psi(M)$. Вложение s_ψ коммутирует с преобразованиями группы G и, следовательно, порождает допустимое отображение расслоения $\mathfrak{A}_M(G)$ в расслоение $\mathfrak{A}_N(G)$. Порожденное отображением s_ψ вложение пространства $B_M(G)$ в пространство $B_N(G)$ будем обозначать $\bar{s}_\psi$.

Отметим следующие предложения.

Предложение 25. *Если при вложении $\psi: M \to N$ множество M отображается на собственное подмножество множества N (т. е. $\psi(M) \neq N$), то множество $s_\psi(A_M(G))$ стягиваемо в пространстве $A_N(G)$.*

Доказательство. Фиксируем какой-нибудь элемент $g_0 \in G$ и определим деформацию h_t при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ формулами $\lambda_\nu(h_t(x)) = \lambda_\nu(x)$ для $\nu \in \psi(M)$, $\lambda_\nu(h_t(x)) = \alpha(g_0, 2t)$ для $\nu \bar{\in} \psi(M)$, а при $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$ — формулами $\lambda_\nu(h_t(x)) = S_{2t-1}\lambda_\nu(x)$ для $\nu \in \psi(M)$, $\lambda_\nu(h_t(x)) = \alpha(g_0, 1)$ для $\nu \bar{\in} \psi(M)$. Здесь через S_t обозначена деформация пространства $\Pi(G)$ в точку O, определенная формулой

$$S_t\alpha(g, \tau) = \alpha(g, (1-t)\tau).$$

Деформация h_t является искомой.

Предложение 26. *Пусть множество M имеет мощность τ, N — подмножество множества M, также имеющее мощность τ, $\psi: N \to M$ — отображение вложения. Тогда существует коммутирующая с преобразованиями группы G деформация h_t: $A_M(G) \to A_M(G)$, удовлетворяющая условиям: 1) h_0 — тождественное отображение; 2) $h_1(A_\mu(G)) \subset s_\psi(A_N(G))$; 3) если $x \in s_\psi A_N(G)$, то $h_t(x) = x$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.*

Доказательство. Построим взаимно однозначное отображение φ множества N на множество M и определим деформацию h_t формулами: если $\lambda_\mu(x) = \alpha(g_\mu(x), \tau_\mu(x))\ x \in A_M(G)$, $\mu \in M$, то для $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ полагаем

$$\lambda_\mu h_t(x) = \alpha(g_\mu(x),\ \tau_\mu(x) + 2t(1 - \tau_\mu(x))\,\tau_{\varphi(\mu)}(x))$$

при $\mu \in N$; $\tau_\mu(x) \neq 0$;

$$\lambda_\mu(h_t(x)) = \alpha(g_{\varphi(M)}(x),\ 2t\tau_{\varphi(\mu)}(x))$$

при $\mu \in N$, $\tau_\mu(x)=0$;

$$\lambda_\mu(h_t(x)) = \lambda_\mu(x),$$

при $\mu \bar{\in} N$; для $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$ полагаем

$$\lambda_\mu(h_t(x)) = \lambda_\mu(h_{\frac{1}{2}}(x))$$

при $\mu \in N$,

$$\lambda_\mu(h_t(x)) = \alpha(g_\mu(x), (2-2t)\tau_\mu(x))$$

при $\mu \bar{\in} N$.

Нетрудно проверить, что построенная таким образом деформация h_t удовлетворяет условиям 1) — 3).

Следствие. *В условиях предложения* 26 *множество* $\bar{s}_\psi(B_N(G))$ *является деформационным ретрактом пространства* $B_M(G)$.

В самом деле, построенная выше деформация h_t коммутирует с преобразованиями группы G и, следовательно, порождает деформацию $\bar{h}_t$ пространства $B_M(G)$, удовлетворяющую условиям: 1) $\bar{h}_0$ — тождественное отображение; 2) $\bar{h}_1(B_M(G)) \subset \bar{s}_\psi(B_N(G))$; 3) если $x \in \bar{s}_\psi(B_N(G))$, то $\bar{h}_t(x)=x$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Из предложений 25 и 26 вытекает следующее

Предложение 27. *Если* τ — *бесконечное кардинальное число, то пространство* $A_\tau(G)$ *стягиваемо.*

Для того чтобы проверить это утверждение, достаточно заметить, что у множества M мощности τ найдется собственное подмножество N, имеющее ту же мощность, после этого применить предложение 26, а затем сослаться на предложение 25.

Из предложения 27 следует, что для любого бесконечного кардинального числа τ главное расслоенное пространство $\mathfrak{A}_\tau(G)$ является универсальным главным расслоенным пространством группы G, а его база $B_\tau(G)$ — классифицирующим пространством группы G в смысле определения в [48].

Позже в главе VIII будет подробно рассмотрена связь понятия рода расслоенного пространства и теоремы о классификации главных расслоенных пространств.

Пусть главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ допустимо отображено в главное расслоенное пространство $\mathfrak{A}_n(G)$. Индуцированное этим отображением отображение $\varphi: B \to B_\tau(G)$ базы расслоения $\mathfrak{B}$ в базу расслоения $\mathfrak{A}_n(G)$ называется **характеристическим отображением расслоения**.

Из сделанного выше замечания вытекает, что в случае, когда кардинальное число τ бесконечно, данное только что определение согласуется с обычным определением характеристического отображения.

Теорема 10. *Пусть* τ — *бесконечное кардинальное число. Тогда два любых характеристических отображения базы* B *расслоения* $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ *в пространстве* $B_\tau(G)$ *гомотопны между собой.*

Доказательство. Пусть $f_0: E \to A_\tau(G)$, $f_1: E \to A_\tau(G)$ — допустимые отображения, индуцирующие те характеристические отображения $\varphi_0: B \to B_\tau(G)$, $\varphi_1: B \to B_\tau(G)$, гомотопность которых мы хотим доказать. Для того чтобы проверить утверждение теоремы, достаточно построить гомотопию $f_t: E \to A_\tau(G)$, соединяющую отображения f_0 и f_1 и коммутирующую с преобразованиями группы G.

Пусть расслоение $\mathfrak{A}_n(G)$ определено как соединение τ экземпляров расслоения $\mathfrak{A}(G)$, перенумерованных индексами из множества M мощности τ. Представим множество M в виде суммы $M=N_0 \bigcup N_1$ двух непересекающихся подмножеств, каждое из которых имеет мощность τ. Отображения вложения множеств N_0 и N_1 в M обозначим соответственно ψ_0 и ψ_1. Применив к множествам N_0 и N_1 предложение 26, убеждаемся, что отображение f_i $(i=0, 1)$ можно соединить коммутирующей с преобразованиями группы G деформацией с отображением g_i, удовлетворяющим условию $g_i(E) \in s_{\psi_i}(A_{N_i}(G))$. Таким образом, для того чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось соединить коммутирующей с преобразованиями группы G деформацией g_t отображения g_0 и g_1. Эту деформацию можно построить следующим способом: при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ полагаем $\lambda_\mu g_t(x)=\lambda_\mu g_0(x)$ для $\mu \in N_0$, $\lambda_\mu g_t(x)=S_{1-2t}\lambda_\mu g_1(x)$ для $\mu \in N_1$, при $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$ полагаем $\lambda_\mu g_t(x)=S_{2t-1}\lambda_\mu g_0(x)$ для $\mu \in N_0$, $\lambda_\mu g_t(x)=\lambda_\mu g_1(x)$ для $\mu \in N_1$. (Напомним, что через S_t обозначается деформация пространства $\Pi(G)$, определенная формулой $S_t\alpha(g, \tau)=\alpha(g, (1-t), \tau)$.)

Из теоремы 10 мгновенно получается

Теорема 11. *Пусть M — счетное множество, N — его конечное подмножество, состоящее из n элементов, $\psi\colon N \to M$ — отображение вложения, $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ — главное расслоенное пространство с паракомпактной базой, $\varphi\colon B \to B_M(G)=B_\omega(G)$ — характеристическое отображение расслоения $\mathfrak{B}$. Для того чтобы расслоенное пространство $\mathfrak{B}$ имело род $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы характеристическое отображение φ_0 можно было продеформировать в отображение, переводящее пространство B в множество $\bar{s}_\psi B_N(G)=B_n(G)$, т. е. чтобы существовала гомотопия $\varphi_t\colon B \to B_M(G)$, удовлетворяющая условию $\varphi_1(B) \subset \bar{s}_\psi(B_N(G))$.*

Для доказательства достаточно заметить, что в случае, когда $g(\mathfrak{B}) \leqslant n$, существует характеристическое отображение расслоения φ_1, переводящее пространство B в множество $\bar{s}_\psi B_N(G)$. По теореме 10 отображение φ_1 гомотопно отображению φ_0 в пространстве $B_M(G)$.

Обратно, если существует деформация φ_t, удовлетворяющая условию $\varphi_1(B) \subset \bar{s}_\psi B_N(G)$, то в силу теоремы о накрывающей гомотопии расслоение $\mathfrak{B}$ эквивалентно расслоению, индуцированному над B отображением φ_1 и расслоением $\mathfrak{A}_M(G)$ и, следовательно, $g(\mathfrak{B}) \leqslant n$.

§ 2. Гомологические оценки рода главного расслоения

В дальнейшем мы будем обозначать через ω счетную мощность, через n — натуральное число. Будем считать, что для каждого n выбрано вложение ψ_n множества мощности n в счетное множество и образ отображения ψ_n содержится в образе отображения ψ_{n+1}. Вложение ψ_n индуцирует, как отмечено выше, допустимое отображение расслоения $\mathfrak{A}_n(G)$ в расслоение $\mathfrak{A}_n(G)$. Порождаемые этим отображением вложения $B_n(G) \to B_\omega(G)$ будем обозначать через φ_n. Отображение φ_n можно рассматривать как характеристическое отображение расслоения $\mathfrak{A}_n(G)$. Множество $\varphi_n(B_n(G))$ будем отождествлять с пространством $B_n(G)$.

Фундаментальная группа пространства $B_\tau(G)$ изоморфна группе G/N, где N—линейно связная компонента единицы в группе G, поэтому локальную систему коэффициентов в пространстве $B_\tau(G)$ естественно рассматривать как абелеву группу, в которой действует группа G/N. Будем обозначать через $\mathfrak{H}(G, A)$, где A — группа с операторами из группы G/N, группу когомологий $H(B_\tau(G), A)$ пространства $B_\tau(G)$ с коэффициентами в локальной системе, соответствующей группе с операторами A. Для любого бесконечного кардинального числа τ группа $\mathfrak{H}_\tau(G, A)$ изоморфна группе $\mathfrak{H}_\omega(G, A)$ (это вытекает из хорошо известного и почти очевидного утверждения, что различные классифицирующие пространства группы G слабо гомотопически эквивалентны). Поэтому группу $\mathfrak{H}_\omega(G, A)$ мы будем обозначать просто $\mathfrak{H}(G, A)$ и называть группой когомологий классифицирующего пространства группы G (в случае, когда группа G дискретна, эта группа называется группой когомологий группы G). Характеристическое отображение φ базы B главного расслоения $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ в классифицирующее пространство $B_\tau(G)$ порождает гомоморфизм

$$\varphi^*: \mathfrak{H}(G, A) \to H(B, A'),$$

где A' — локальная система, индуцированная локальной системой A при отображении φ. В силу теоремы 10 гомоморфизм φ^* не зависит от выбора характеристического отображения φ и полностью определяется расслоением $\mathfrak{B}$.

Характеристическое отображение $\varphi_n: B_n(G) \to B_\omega(G)$ базы расслоения $\mathfrak{A}_n(G)$ в базу расслоения $\mathfrak{A}_\omega(G)$ порождает гомоморфизм $\varphi_n^*: \mathfrak{H}(G, A) \to \mathfrak{H}_n(G, A)$.

Теорема 12. *Если род главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ равен n, то ядро гомоморфизма $\varphi^*: \mathfrak{H}(G, A) \to \mathfrak{H}(B, A')$ содержит ядро гомоморфизма $\varphi_n^*: \mathfrak{H}(G, A) \to \mathfrak{H}_n(G, A)$.*

В самом деле, если $g(\mathfrak{B}) = n$, то существует, в силу теоремы 9, допустимое отображение расслоения $\mathfrak{B}$ в расслоение $\mathfrak{A}_n(G)$, порождающее отображение $\psi: B \to B_n(G)$. Отображение $\varphi_n\psi: B \to B_\omega(G)$ является, очевидно, характеристическим. Из равенства $\varphi^* = \psi^*\varphi_n^*$ вытекает требуемое утверждение.

Теорему 12 можно коротко сформулировать с помощью следующего определения.

Определение 12. Гомологическим родом расслоения $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ (обозначаем $h(\mathfrak{B})$) называется наименьшее число n, для которого найдется класс когомологий $x \in \mathfrak{H}(G, A)$, удовлетворяющий условию $\varphi_n^*(x) \neq 0$, $\varphi_{n-1}^*(x) = 0$.

Теорема 12'. *Для любого главного расслоенного пространства $g(\mathfrak{B}) \geqslant h(\mathfrak{B})$.*

Теорема 12 дает гомологическую оценку снизу для рода главного расслоенного пространства. Она аналогична теореме 4. Докажем сейчас аналог теоремы 6 для главных расслоенных пространств.

Для этого используем теорему Понтрягина—Постникова [40], [41], [79] о стягивании отображения на подмножество.

Пусть A — такое линейно связное подпространство линейно связного пространства X, что относительные гомотопические группы $\pi_i(X, A)$ при $i \leqslant n-1$ тривиальны ($n \geqslant 3$). Отображение φ: $L \to X$, где L — n-мерный CW-полиэдр, тогда и только тогда гомотопно отображению ψ: $L \to X$, переводящему L в A, когда отображение φ^*: $H(X, \{\pi_n(X, A)\}) \to H(X, \{\pi_n(X, A)\})$ переводит в нуль характеристический класс $\xi \in H(X, \{\pi_n(X, A)\})$ пары (X, A).

Теорема Понтрягина — Постникова будет использована нами для случая, когда $A = B_n(G)$, $X = B_\omega(G)$, поэтому мы должны прежде всего изучить группы $\pi_i(B_\omega(G), B_n(G))$.

Предложение 28. *Пусть пространство группы G асферично в размерностях $< s$. Тогда*

$$\pi_i(B_\omega(G), B_n(G)) = 0 \text{ при } i < (s+1)n,$$

$$\pi_{(s+1)n}(B_\omega(G), B_n(G)) = \underbrace{\widetilde{H}_s(G) \otimes \ldots \otimes \widetilde{H}_s(G)}_{n}.$$

При $s > 0$ фундаментальная группа $\pi_1(B_\omega(G))$ тривиальна, при $s = 0$ группа $\pi_1(B_\omega(G)) = G/N$, где N — линейно связная компонента единицы, и группа G/N действует на тензорном произведении $\widetilde{H}_0(G) \otimes \ldots \otimes \widetilde{H}_0(G) = \pi_n(B_\omega(G), B_n(G))$ по формуле $g(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \bar{g}_*(x_1) \otimes \ldots \otimes \bar{g}_*(x_n)$, где $g \in G/N$, $\bar{g} \in G$ — элемент из смежного класса g, $\bar{g}_*\colon \widetilde{H}_0(G) \to \widetilde{H}_0(G)$ — автоморфизм, порождаемый левым сдвигом на $\bar{g}$ в группе гомологий пространства G.

Доказательство. В силу теоремы о накрывающей гомотопии имеет место изоморфизм

$$\pi_i(B_\omega(G), B_n(G)) = \pi_i(A_\omega(G), A_n(G)).$$

Из асферичности пространства $A_\omega(G)$ (см. предложение 27) вытекает, что

$$\pi_i(A_\omega(G), A_n(G)) = \pi_{i-1}(A_n(G)) = \pi_{i-1}(G * \ldots * G).$$

Пространство $A_n(G) = G * \ldots * G$ односвязно и

$$H_k(A_n(G)) = 0 \text{ при } k < (s+1)n - 1,$$

$$H_{(s+1)n-1}(A_n(G)) = \widetilde{H}_s(G) \otimes \ldots \otimes \widetilde{H}_s(G) \quad (\text{см. гл. I}).$$

Применяя теорему Гуревича к пространству $A_n(G)$, получаем требуемое утверждение.

Характеристический класс пары $(B_\omega(G), B_n(G))$ обозначим через $\xi(n, G)$. По доказанному выше

$$\xi(n, G) \in H^{n(s+1)}(B_\omega(G); \{\widetilde{H}_s(G) \otimes \ldots \otimes \widetilde{H}_s(G)\}).$$

Теорема 13. *Пусть $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ — главное расслоенное пространство, база которого является полиэдром размерности $\leqslant (s+1)n$, где $n > 2$ при $s = 0$, $n > 1$ при $s = 1$, n — любое при $s > 1$. Для того чтобы расслоенное пространство $\mathfrak{B}$ имело род $n+1$, необходимо и достаточно, чтобы класс когомологий $\varphi^*\xi(n, G)$ был не равен нулю.*

(Здесь через φ^* обозначен, как обычно, гомоморфизм, порождаемый характеристическим отображением φ.)

Утверждение теоремы 13 немедленно вытекает из теоремы Понтрягина—Постникова, теоремы 9 и предложения 28.

Следствие 1. *Если пространство группы G асферично в размерностях $< s$ то для того, чтобы главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$, база которого является полиэдром размерности $\leqslant (s+1)n$, имело род $n+1$, необходимо и достаточно, чтобы гомологический род расслоения $\mathfrak{B}$ был равен $n+1$.*

Рассмотрим случай, когда группа G несвязна, т. е. $s = 0$. Тогда главному расслоенному пространству $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ естественным образом ставится в соответствие главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}'(E/N, B, G/N, p')$, получающееся факторизацией расслоения $\mathfrak{B}$ по линейно связной компоненте N единицы группы G.

Из теоремы 13 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Если база B расслоения $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ является n-мерным CW-полиэдром, то $g(\mathfrak{B}) = n+1$ тогда и только тогда, когда $g(\mathfrak{B}') = n+1$.*

В самом деле, пусть ϱ — естественное отображение $B_\omega(G)$ на $B_\omega(G/N)$. Гомоморфизму ν: $G \to H$ ставится в соответствие отображение $\tilde{\nu}$: $\Pi(G) \to \Pi(H)$ по формуле $\tilde{\nu}(\alpha(g, t)) = \alpha(\nu(g), t)$. Произведение τ экземпляров отображения $\tilde{\nu}$ дает отображение $\Pi(G)^\tau$ в $\Pi(H)^\tau$, переводящее $A_\tau(G)$ в $A_\tau(H)$. При этом отображении $A_\tau(G)$ в $A_\tau(H)$ слой расслоения $\mathfrak{A}_\tau(G)$ переходит в слой расслоения $\mathfrak{A}_\tau(H)$ и, следовательно, определяется отображение $B_\tau(G)$ в $B_\tau(H)$.

При отображении ϱ множество $B_n(G) \subset B_\omega(G)$ переходит в множество $B_n(G/N) \subset B_\omega(G/N)$, а, следовательно, отображение ϱ порождает гомоморфизм

$$\varrho_*\colon \pi_i(B_\omega(G), B_n(G)) \to \pi_i(B_\omega(G/N), B_n(G/N)).$$

При $i = n$ гомоморфизм ϱ_* является изоморфизмом. В самом деле, из предложения 28 вытекает, что обе группы $\pi_n(B_\omega(G), B_n(G))$ и $\pi_n(B_\omega(G/N), B_n(G/N))$ изоморфны группе $\tilde{H}_0(G) \otimes \ldots \otimes \tilde{H}_0(G)$ (так как $\tilde{H}_0(G/N) \approx \tilde{H}_0(G)$). Проанализировав доказательство предложения 28, легко убедиться, что установленные в предложении 28 изоморфизмы коммутируют с отображением ϱ_* и, следовательно, отображение ϱ_* при $i = n$ является изоморфизмом.

Легко проверить также, что при отображении

$$\varrho^*\colon H^n(B_\omega(G/N), \tilde{H}_0(G) \otimes \ldots \otimes \tilde{H}_0(G)) \to$$
$$\to H^n(B_\omega(G/N), \tilde{H}_0(G) \otimes \ldots \otimes \tilde{H}_0(G))$$

характеристический класс $\xi(n, G/N)$ пары $(B_\omega(G/N), B_n(G/N))$ переходит в характеристический класс $\xi(n, G)$ пары $(B_\omega(G), B_n(G))$, т. е. $\xi(n, G) = \varrho^*\xi(n, G/N)$.

Если φ: $B \to B_\omega(G)$ — характеристическое отображение расслоения $\mathfrak{B}$, то отображение $\varphi_1 = \varrho\varphi$: $B \to B_\omega(G/N)$ является характеристическим отображением расслоения $\mathfrak{B}'$ и в силу указанных выше фактов $\varphi^*\xi(n, G/N) = \varphi^*\varrho^*\xi(n, G/N) = \varphi^*\xi(n, G)$, применяя теорему 13, получаем требуемое утверждение.

Мы покажем сейчас, что для главных расслоенных пространств теорема 6 эквивалентна теореме 13 настоящей главы. Для этого используем

Предложение 29. *Для любой топологической группы класс когомологий $\xi(1, G) \in H^{s+1}(B_\omega(G), H_s(G))$ является характеристическим классом расслоения $\mathfrak{A}_\omega(G)$ и $\xi(n, G) = \underbrace{\xi(1, G) \cup \ldots \cup \xi(1, G)}_{n}$.*

Из того, что $\xi(1, G)$ является характеристическим классом расслоения $\mathfrak{A}_\omega(G)$ вытекает, что для любого главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ класс когомологий $\varphi^*\xi(1, G) = \xi$, где φ — характеристическое отображение $B \to B_\omega(G)$, является характеристическим классом расслоения $\mathfrak{B}$. Из второго утверждения предложения 29 вытекает равенство $\varphi^*\xi(n, G) = \xi \cup \ldots \cup \xi$, показывающее, что для главных расслоенных пространств теорема 6 эквивалентна теореме 13 настоящей главы.

Доказательство предложения 29. Обозначим через $\mathfrak{S}_n(S_n, B_\omega(G), \Pi(G)^n \setminus \Pi'(G)^n, \pi_n)$ сумму n экземпляров расслоения $\mathfrak{A}_\omega(G)$. Нам достаточно показать, что характеристический класс $\xi(n, G)$ совпадает с характеристическим классом расслоения $\mathfrak{S}_n$. Тогда первое утверждение предложения 29 следует из того, что $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{A}_\omega(G)$, а второе — из предложения 10.

Из предложения 1 вытекает, что расслоение можно рассматривать как расслоение со слоем $A_n(G) = \Pi(G)^n \setminus \Pi'(G)^n$, ассоциированное с главным расслоением $\mathfrak{A}_\omega(G)$. Это означает, что пространство S_n можно рассматривать как базу главного расслоенного пространства $\mathfrak{W}_n$ с группой G и с пространством расслоения $A_\omega(G) \times (\Pi(G)^n \setminus \Pi'(G)^n)$, на котором группа G действует по правилу: если $a \in A_\omega(G)$, $x \in \Pi(G)^n \setminus \Pi'(G)^n$, $g \in G$, то $g(a, x) = (g(a), g(x))$. (Действие группы G на пространстве $A_n(G) = \Pi(G)^n \setminus \Pi'(G)^n$ определено выше. Оно порождает главное расслоение $\mathfrak{A}_n(G) = (A_n(G), B_n(G), G, p_n)$.) Проекция ψ_n: $S_n \to B_\omega(G)$ расслоения $\mathfrak{S}_n$ является характеристическим отображением главного расслоенного пространства $\mathfrak{W}_n$.

Отметим теперь, что расслоение $\mathfrak{W}_n$ можно допустимо отобразить на расслоение $\mathfrak{A}_n$, поставив в соответствие каждому элементу $(a, x) \in A_\omega(G) \times A_n(G)$ элемент $x \in A_n(G)$. Порождаемое этим допустимым отображением отображение σ: $S_n \to B_n(G)$ является слабой гомотопической эквивалентностью. В самом деле, при допустимом отображении расслоения $\mathfrak{W}_n$ в расслоении $\mathfrak{A}_n$ точная гомотопическая последовательность расслоения $\mathfrak{W}_n$ отображается в точную гомотопическую последовательность расслоения $\mathfrak{A}_n$ При этом гомотопические группы слоя расслоения $\mathfrak{W}_n$ изоморфно отображаются на гомотопические группы слоя расслоения $\mathfrak{A}_n$ (так как сами слои отображаются гомеоморфно). Гомотопические группы пространств расслоений также отображаются изоморфно, так как проекция $A_\omega(G) \times A_n(G) \to A_n(G)$ является гомотопической эквивалентностью в силу стягиваемости пространства $A_\omega(G)$ (предложение 27). Из этих утверждений и так называемой «леммы о пяти гомоморфизмах» (см. например [76]) вытекает, что отображения σ_*: $\pi_i(S_n) \to \pi_i(B_n(G))$ также являются изоморфизмами для всех i и, значит, σ является слабой гомотопической эквивалентностью.

Заметим теперь, что отображение $\varphi_n\sigma$: $S_n \to B_\omega(G)$, где φ_n: $B_n(G) \to B_\omega(G)$ — характеристическое отображение расслоения $\mathfrak{A}_n(G)$, очевидно, является характеристическим отображением расслоения γ_n и, следовательно (теорема 10), гомотопно отображению ψ_n. Характеристический класс отображения φ_n равен характеристическому классу отображения $\varphi_n\sigma$, характеристический класс отображения $\varphi_n\sigma$ равен характеристическому классу отображения φ_n (так характеристические классы гомотопных отображений равны). Комбинируя эти утверждения, получаем доказательство совпадения характеристического класса расслоения γ_n (т. е. отображения ψ_n) с характеристическим классом пары $(B_\omega(G), B_n(G))$ (т. е. отображения φ_n).

Отметим следующее утверждение, облегчающее ответ на вопрос: имеет ли данное расслоение род 2.

Предложение 30. *Пространство $B_2(G)$ гомеоморфно надстройке SG над пространством G.*

Доказательство. Будем интерпретировать пространство $A_2(G) = G*G$ как совокупность троек (g, h, t), где $g, h \in G$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с отождествлениями $(g, h, 0) \sim (g, h', 0)$ и $(g, h, 1) \sim (g', h, 1)$ для любых g, g', h, $h' \in G$. Поставим в соответствие точке пространства $A_2(G)$, определяемое тройкой (g, h, t), точку надстройки SG, определяемую парой $(g^{-1} h, t)$. Нетрудно убедиться, что получающееся таким образом расслоение $A_2(G) \to SG$ совпадает с расслоением $\mathfrak{B}_2$. Тем самым порождается вполне определенный гомеоморфизм пространств $B_2(G)$ и SG.

ГЛАВА V

РОД РЕГУЛЯРНОГО НАКРЫТИЯ

В этой главе будет рассмотрен род главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ с дискретной группой G. (Если пространство расслоения E связно, расслоение $\mathfrak{B}$ является, как известно, регулярным накрытием. Обратно, всякое регулярное накрытие можно рассматривать как главное расслоенное пространство с дискретной группой.)

Определение рода расслоенного пространства в рассматриваемом нами случае допускает следующую модификацию.

Определение 13. **Родом главного расслоенного пространства** $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ с дискретной группой G называется наименьшая мощность открытого покрытия базы, состоящего из просто накрытых множеств. (Открытое множество $A \subset B$ называется просто **накрытым**, если существует такое открытое множество $C \subset E$, что отображение p является взаимно однозначным соответствием между C и A.)

§ 1. Определение рода пространства относительно группы преобразований и относительно периодического преобразования

В случае, когда мы имеем главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$, можно говорить не о роде расслоения $\mathfrak{B}$, а о роде пространства E относительно действующей в нем группы преобразований G.

Определение 14. Пусть в пространстве E действует дискретная группа G и у каждой точки $x \in E$ существует окрестность U, не пересекающаяся ни с одним из множеств $g(U)$, где $g \in G$ — любой отличный от единицы элемент группы G[1]). **Родом пространства** E относительно действующей в нем группы G (обозначаем $g(E, G)$) называется наименьшая мощность открытого покрытия $\{D\}$ пространства E, каждый из элементов которого может быть представлен в виде $D = \bigcup_{g \in G} g(F)$, где F — открытое множество и множества $g(F)$ и $h(F)$ при $g \in G$, $h \in G$, $g \neq h$ не пересекаются между собой. В условиях определения 14 действие группы G на пространстве F порождает главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}$, базой которого служит пространство $B = E/G$ траекторий группы G, а проекцией — отображение отождествления $p\colon E \to E/G$.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 31. *Род пространства E относительно группы G равен роду главного расслоенного пространства* $\mathfrak{B}(E, E/G, G, p)$.

Если в пространстве E действует периодическое преобразование T, имеющее период n, то оно порождает группу $G = \{T^i\}_{0 \leqslant i < n}$ преобразований пространства E.

Пользуясь этим, можно дать следующее

Определение 15. Пусть в пространстве E действует преобразование T, имеющее период n, каждая степень которого либо является

[1]) В случае, когда группа G конечна, очевидно, достаточно потребовать, чтобы группа G действовала в E без неподвижных точек.

тождественным преобразованием, либо не имеет неподвижных точек. Родом пространства E относительно преобразования T (обозначаем $g(E, T)$) называется род пространства E относительно порожденной преобразованием T циклической E группы преобразований пространства E, т. е. наименьшая мощность открытого покрытия $\{D\}$ пространства E, каждый из элементов которого может быть представлен в виде $D = \bigcup_{0 \leqslant i < n} T^i(F)$, где F — открытое множество и множество $T^i(F)$ не пересекается с F, если $0 < i < n$.

Отметим следующее простое

Предложение 32. *Если в пространстве E действует дискретная группа G, удовлетворяющая условиям определения 14, то для любой подгруппы H группы G имеем $g(E, H) \leqslant g(E, G)$.*

Доказательство. Пусть M — множество элементов группы G, содержащее по одному элементу из каждого смежного класса подгруппы H. По определению 14 существует такое открытое покрытие $\{D_\lambda\}$ пространства E, имеющее мощность $g(E, G)$, что каждое множество D_λ представлено в виде $D_\lambda = \bigcup_{g \in G} g(F_\lambda)$, где F_λ — открытое множество. Но D_λ может быть представлено также в виде $D_\lambda = \bigcup_{h \in H} h(F'_\lambda)$, где $F'_\lambda = \bigcup_{g \in M} g(F_\lambda)$ и, следовательно, $g(E, H) \leqslant g(E, G)$.

Разумеется, естественнее говорить о роде пространства относительно действующей в нем дискретной группы преобразований или относительно периодического преобразования, чем о роде главного расслоенного пространства с дискретной группой, но, желая сохранить возможность пользоваться обозначениями и определениями предыдущих глав, мы будем обычно пользоваться терминологией расслоенных пространств.

§ 2. Допустимые отображения главных расслоений с дискретной группой

Теорема 14. *Для того чтобы главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ с дискретной группой G имело род $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы его можно было допустимо отобразить в главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}'$ с группой G, база которого является $(n-1)$-мерным полиэдром.*

Если группа G конечна, то можно потребовать дополнительно, чтобы база расслоения $\mathfrak{B}'$ была конечным полиэдром.

Доказательство. Расслоение $\mathfrak{B}$, имеющее род $\leqslant n$, можно допустимо отобразить в расслоение $\mathfrak{A}_n(G)$, база которого является $(n-1)$-мерным полиэдром, конечным в случае, если группа G конечна, и бесконечным в противном случае. Это доказывает одно из утверждений теоремы. Для того чтобы доказать другое утверждение, достаточно сослаться на теорему 5.

Сформулируем в качестве примера только что доказанную теорему в терминах рода относительно группы преобразований.

Теорема 14'. *Для того чтобы пространство E имело относительно действующей в нем конечной группы G род $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы его можно было допустимо отобразить в $(n-1)$-мерный конечный полиэдр, в котором действует без неподвижных точек группа G.*

Теорема 15. *Пусть $\mathfrak{S}(S, R, G, \pi)$ — главное расслоенное пространство с дискретной группой G и с пространством расслоения S, асферичным в размерностях $< n-1$. Тогда любое главное расслоен* *пространство* $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ *с группой* G, *имеющее род* $\leqslant n$, *может быть допустимо отображено в расслоенное пространство* $\mathfrak{S}$.

Для доказательства достаточно проверить, что в $\mathfrak{S}$ можно допустимо отобразить главное расслоенное пространство $\mathfrak{A}_n(G)$. Так как база расслоения $\mathfrak{A}_n(G)$ является $(n-1)$-мерным полиэдром, это вытекает из теоремы о классификации главных расслоенных пространств с полиэдральной базой ([48], стр. 124).

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 15 пространство* R *является* $(n-1)$-*мерным полиэдром, то в расслоение* $\mathfrak{S}$ *можно допустимо отобразить те и только те главные расслоенные пространства* G, *которые имеют род* $\leqslant n$.

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{S}(S, R, G, \pi)$ — *главное расслоенное пространство с дискретной группой* G *и пространством расслоения, асферичным в размерностях* $< n-1$. *Если существуют главные расслоенные пространства с группой* G, *имеющие род* n, *то* $g(\mathfrak{S}) \geqslant n$.

Следствие 3. *Пусть* T — *центральная симметрия сферы* S^{n-1}. *Пространство* E, *на котором действует инволюция без неподвижных точек, тогда и только тогда имеет относительно этой инволюции род* $\leqslant n$, *когда* E *может быть допустимо отображено в сферу* S^{n-1} *с инволюцией* T.

Следствие 4. *Пусть* S^{2n-1} — $(2n-1)$-*мерная сфера, рассматриваемая как сфера в* n-*мерном комплексном пространстве (т. е.* S^{2n-1} *задается уравнением* $|\zeta_1|^2 + \ldots + |\zeta_n|^2 = 1$, *где* $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — *комплексные числа);* T — *преобразование периода* s, *определяемое формулой* $\zeta_i' = e^{\frac{2\pi i}{s}} \zeta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. *Предположим, что на пространстве* E *действует преобразование периода* s, *любая степень которого либо не имеет неподвижных точек, либо является тождественным преобразованием. Пространство* E *тогда и только тогда имеет относительно этого периодического преобразования род* $\leqslant 2n$, *когда оно может быть допустимо отображено в сферу* S^{2n-1} *с периодическим преобразованием* T.

§ 3. Гомологический род главного расслоения с дискретной группой

Для главных расслоенных пространств с дискретной группой становится более интересным введенное в предыдущей главе понятие гомологического рода. Прежде всего, данное там определение принимает следующий более простой вид.

Определение 16. Гомологическим родом главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ с дискретной группой G называется наибольшее число n, для которого существует $(n-1)$-мерный класс когомологий группы G $x \in H^{n-1}(G; A)$, удовлетворяющей условию $\varphi^* x \neq 0$. Здесь A — абелева группа, в которой действует группа G, $H^i(G; A)$ — i-мерная группа когомологий группы G с коэффициентом в группе A, $\varphi^*\colon H^i(G; A) \to H^i(B; A)$ гомоморфизм, порожденный характеристическим отображением $\varphi\colon B \to B_\omega(G)$.

Эквивалентность определения 16 определению 12 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 33. *Если* G — *дискретная группа,* $\varphi_n\colon B_n(G) \to B_\omega(G)$ — *характеристическое отображение, то ядро отображения* $\varphi_n^*\colon H(G; A) = \mathfrak{H}(G; A) \to \mathfrak{H}_n(G, A)$ *состоит из всех классов когомологий размерности* $\geqslant n$.

Доказательство. Пространство $B_n(G)$ имеет размерность $n-1$, поэтому ядро отображения φ_n^* содержит все классы когомологий размерности $\geqslant n$. Для доказательства мономорфности отображения φ_n^*: $H^i(B_\omega(G), A) \to H^i(B_n(G), A)$ при $i<n$ в силу точности когомологической последовательности пары $(B_\omega(G), B_n(G))$ достаточно проверить, что $H^i(B_\omega(G), B_n(G); A)=0$ при $i<n$. Но последнее утверждение вытекает из доказанного выше (см. стр. 256) соотношения $\pi_i(B_\omega(G), B_n(G))=0$ при $i<n$.

Теорема 16. *Для главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ с дискретной группой G следующие утверждения эквивалентны:*

а) $h(\mathfrak{B}) \leqslant n$,

б) *для любого класса когомологий $x \in H^n(G; A)$ имеем $\varphi^*(x)=0$,*

в) $\varphi^*\xi(n, G)=0$,

г) $\xi^n = \xi \cup \ldots \cup \xi = 0$.

Если база B является CW-полиэдром, то каждое из этих утверждений эквивалентно следующему:

д) *над любым n-мерным полиэдром B' базы B род расслоения $\mathfrak{B}$ не превосходит n (т. е. $g(p^{-1}(B'), B', G, p) \leqslant n$).*

Здесь A — абелева группа, в которой действует группа G, $\xi \in H^1(B; I)$ — характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}$ (I—приведенная нульмерная группа гомологий топологического пространства G); $\xi(n, G) \in H^n(G, I\otimes \ldots \otimes I)$ — характеристический класс пары $(B_\omega(G), B_n(G))$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что из утверждения а) в силу определения гомологического рода вытекают утверждения б) и в).

Из утверждения б) очевидно, вытекает утверждение в). Далее, в силу соотношения $\xi(m, G) = \underbrace{\xi(1, G) \cup \ldots \cup \xi(1, G)}_{m}$ (предложение 29) из утверждения в) вытекает, что $\varphi^*\xi(m, G)=0$ для любого $m \geqslant n$, так как при $m>n$

$$\varphi^*\xi(m, G) = \varphi^*\xi(n, G) \cup \varphi^*\xi(m-n, G) = 0.$$

Для того чтобы вывести из утверждения в) утверждения а) и б), достаточно сослаться теперь на следующее алгебраическое

Предложение 34. *Для любого класса когомологий $x \in H^m(G; A)$ найдется такой операторный гомоморфизм μ: $\underbrace{I\otimes \ldots \otimes I}_{m} \to A$, что для индуцированного им гомоморфизма μ^*: $H^m(G; I\otimes \ldots \otimes I) \to H^m(G; A)$ будет иметь место равенство $\mu^*\xi(m, G)=x$.*

Эквивалентность утверждений в) и г) следует из соотношений $\xi = \varphi^*\xi(1, G)$, $\varphi^*\xi(n, G) = \varphi^*(\xi(1, G) \cup \ldots \cup \xi(1, G)) = \xi \cup \ldots \cup \xi$ (предложение 29). Из утверждения в) вытекает утверждение д) в силу теоремы 13. Наконец, если не выполнено утверждение в) (т. е. $\varphi^*\xi(n, G) \neq 0$), то не выполнено и утверждение д). В самом деле, примем за подполиэдр B' n-мерный остов CW-полиэдра B и обозначим через j отображение вложения $B' \to B$. Вложение j порождает, очевидно, мономорфное отображение j^* n-мерной группы когомологий полиэдра B в n-мерную группу когомологий его n-мерного остова B', а поэтому $j^*\varphi^*\xi(n, G) \neq 0$. Отсюда вытекает, что $h(p^{-1}(B'), B', G, p) = n+1$ и, следовательно $g(p^{-1}(B'), B', G, p) = n+1$, т. е. утверждение д) не выполнено.

Эквивалентность всех утверждений теоремы доказана.

Только что доказанная теорема позволяет, очевидно, дать четыре новых определения гомологического рода главного расслоенного пространства с дискретной группой, эквивалентных определению 16.

Мы приведем только одно из них.

Определение 16′. Гомологическим родом главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ с дискретной группой G и базой B, являющейся CW-полиэдром, называется наибольшее число n, для которого существует такой $(n-1)$-мерный подполиэдр $B' \subset B$, что расслоение $\mathfrak{B}$ имеет над B' род n (т. е. $g(p^{-1}(B'), B', G, p) = n$).

Это определение не использует гомологических понятий.

Замечание 1. Естественно поставить вопрос: можно ли дать определение гомологического рода, аналогичное определению 16 для случая, когда база B не является CW-полиэдром. Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным, если ограничиться рассмотрением расслоенных пространств с базой, являющейся конечномерным компактом. Именно существует такое главное расслоенное пространство с группой $G = Z_m$, что база B является двумерным компактом, $h(\mathfrak{B}) = 2$ и тем не менее над любым одномерным замкнутым подмножеством базы род расслоения $\mathfrak{B}$ равен 1. Приведем соответствующий пример (этот пример по несколько иному поводу был сообщен автору П. С. Александровым).

Введем обозначения: R — числовая прямая $R = (-\infty, \infty)$, $R^+ = [0, +\infty)$, $R^- = (-\infty, 0]$, R^3 — трехмерное евклидово пространство, L — открытый единичный куб в R^3: $(x, y, z) \in L$, если $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$, t — сдвиг на 1 по оси z в пространстве R^3: $t(x, y, z) = (x, y, z+1)$, S — квадрат $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $z = 0$, P — множество, состоящее из одной точки $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Построим гомеоморфное отображение φ: $R \to R^3$, удовлетворяющее условиям: а) $\varphi(R) \subset L$, б) $\overline{\varphi(R^+)} = \varphi(R^+) \cup S$, в) $\overline{\varphi(R^-)} = \varphi(R^-) \cup P$. Обозначим через $\widetilde{E}$ множество $\widetilde{E} = \bigcup\limits_{-\infty<i<\infty} t^i\,\overline{\varphi(R)}$. Обозначим через Z группу преобразований множества $\widetilde{E}$, порожденную преобразованием t. Через $E_m[B]$ обозначим пространство, получающееся из $\widetilde{E}$ отождествлением точек, эквивалентных относительно группы mZ, т. е. группы, порожденной преобразованием t^m [соответственно, относительно группы Z]. На пространстве E_m действует без неподвижных точек группа $Z_m = Z/mZ$. Тем самым определяется главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}(E_m, B, Z_m, p_m)$. Это расслоенное пространство удовлетворяет сформулированным выше условиям. В самом деле, отобразим пространство $\widetilde{E}$ в прямую R, положив $\psi(x, y, z) = z$. При отображении ψ преобразование t: $\widetilde{E} \to \widetilde{E}$ переходит в сдвиг $z \to z+1$, а расслоение $\mathfrak{B}_m$ допустимо отображается в m-листное накрытие окружности окружностью π_m: $S^1 \to S^1$. Гомологический род расслоения π равен 2, а порождаемый естественным отображением $B \to S^1$ гомоморфизм групп когомологий в смысле Чеха является изоморфизмом, поэтому $h(\mathfrak{B}) = 2$. С другой стороны, над каждым одномерным замкнутым подмножеством B' базы B существует секущая поверхность. В самом деле, множество не может содержать всего множества $p_m(\varphi(R))$, так как в противном случае в силу замкнутости оно содержало бы двумерное множество $p_m(S) \subset p_m(\varphi(R))$. Но над каждым подмножеством базы B, не включающим в себя все множество $p_m(\varphi(R))$ существует секущая поверхность.

Замечание 2. При выводе из утверждения в) утверждений а) и б) было использовано алгебраическое предложение 34. В случае, когда база B является CW-полиэдром, можно избежать использования этого предложения. В самом деле, в этом случае, точно так же, как была доказана эквивалентность утверждений в) и д), может быть доказана эквивалентность утверждений б) и д). Заметив, что из условия $\varphi^*\xi(n, G)=0$ в силу соотношения $\xi(n+k, G)=\xi(n, G)\bigcup\xi(k, G)$ вытекает, что $\varphi^*\xi(m, G)=0$ при $m\geqslant n$, убеждаемся, что из утверждения $\varphi^*\xi(n, G)=0$ следует выполнение утверждения б) при любом $m\geqslant n$ (т. е. утверждения: для любого класса когомологий $x\in H^m(G; A)$ $m\geqslant n$ имеем $\varphi^*(x)=0$). А это условие в силу определения 16 эквивалентно утверждению а).

Предложение 35. *Если $\mathfrak{B}$ — главное расслоенное пространство с дискретной группой, то*

$$h(\mathfrak{B})\leqslant \operatorname{long}\mathfrak{B}+1.$$

В самом деле, если $h(\mathfrak{B})=n$, то в силу теоремы 16

$$\xi^{n-1}=\underbrace{\xi\bigcup\ldots\bigcup\xi}_{n-1}\neq 0,$$

где $\xi\in H^1(B; I)$ характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}$. Так как $p^*\xi=0$, то $\operatorname{long}\mathfrak{B}\geqslant n-1$.

Предложение 36. *Пусть $\{B_1, \ldots, B_n\}$ — открытое покрытие базы B главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ с дискретной группой G, $\mathfrak{B}_i$ — расслоенное пространство $(p^{-1}(B_i), B_i, G, p)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Тогда $h(\mathfrak{B})\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}{}' h(\mathfrak{B}_i)$.*

Доказательство предложения 36 можно провести совершенно аналогично доказательству предложения 9, использовав эквивалентность утверждений а) и г) теоремы 16.

Обозначим через $\xi\in H^1(B; I)$ характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}$, через λ_i — отображение вложения $B_i\to B$. Тогда характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}_i$ равен $\lambda_i^*\xi$.

Введем обозначение $h(\mathfrak{B})=s_i$. Тогда в силу теоремы 16

$$(\lambda_i^*\xi)^{s_i}=\lambda_i\xi^{s_i}=0.$$

Повторяя доказательство предложения 11, убеждаемся, что произведение $\xi^{s_1}\bigcup\xi^{s_2}\bigcup\ldots\bigcup\xi^{s_n}=0$ и, следовательно $\xi^{s_1+s_2+\ldots+s_n}=0$, что в силу теоремы 16 равносильно утверждению

$$h(\mathfrak{B})\leqslant s_1+\ldots+s_n=h(\mathfrak{B}_1)+\ldots+h(\mathfrak{B}_n).$$

Определение 17. Слабым гомологическим родом главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ с дискретной группой G (обозначается $h'(\mathfrak{B})$) называется наибольшее число n, для которого можно найти такое поле A и такой $(n-1)$-мерный класс когомологий $x\in H^{n-1}(G, A)$, что $\varphi^*x\neq 0$ (считаем, что в поле A группа G действует тривиально,

$$\varphi^*\colon\ H^{n-1}(G; A)\to H^{n-1}(B; A)$$

— гомоморфизм, порожденный характеристическим отображением φ: $B\to B_\omega(G)$).

Очевидно, что $h'(\mathfrak{B})\leqslant h(\mathfrak{B})\leqslant g(\mathfrak{B})$, т. е. слабый гомологический род дает худшую оценку для рода расслоения, чем гомологический род. Однако в ряде случаев удобно пользоваться именно слабым гомологическим родом.

Заметим, что, так же как и для рода, можно говорить о гомологическом роде и о слабом гомологическом роде пространства E относительно действующей в нем группы G или периодического преобразования T (в этих случаях будут употребляться обозначения $h(E, G)$, $h(E, T)$, $h'(E, G)$, $h'(E, T)$).

Гомологический род и слабый гомологический род, так же как и род, не понижаются при допустимых отображениях.

Укажем сейчас оценку слабого гомологического рода расслоения $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ через гомологические свойства пространств E и B.

Теорема 17. *Пусть $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ — главное расслоенное пространство с дискретной группой G. Предположим, что $H^n(G, A) \neq 0$ (A — некоторое поле, в котором группа G действует тривиально) и что при $q < n$ группа $H^q(B; A)$ отображается на всю группу $H^q(E, A)$ при гомоморфизме p^* (т. е. $p^*H^q(B; A) = H^q(E; A)$). Тогда $h'(\mathfrak{B}) \geqslant n+1$.*

Доказательство. Достаточно показать, что при выполнении условий теоремы гомоморфизм φ^*: $H^p(G; A) \to H^p(B; A)$, порожденный характеристическим отображением, является мономорфизмом при $p \leqslant n$. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы Лере — Гирша [43].

Рассмотрим спектральную последовательность когомологий с группой коэффициентов A главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}$ [11]. Заметим, прежде всего, что группа G тривиально действует на группах $H^q(E; A)$ при $q < n$. В самом деле, каждый элемент $\xi \in H^q(E; A)$ при $q < n$ можно представить в виде $\xi = p^*\eta$, где $\eta \in H^q(B; A)$. Если $g \in G$, то $g^*\xi = g^*p^* = p^*\xi = \xi$, так как $pg = p$. Отсюда следует, что $E_q^{p,q} = H^p(G; A) \otimes H^q(E; A)$ при $q < n$. Так как при $q < n$ p^* отображает группу $H^q(B; A)$ на $H^q(E; A)$, то при $q < n$ имеем $E_2^{0,q} = E_0^{0,q} = \ldots = E_\infty^{0,q}$ и, значит, на $E_r^{0,q}$ при $q < n$ дифференциал d_r равен 0. В силу того, что $E_2^{p,q} = E_q^{p,0} \otimes E_2^{0,q}$ при $q < n$, дифференциал равен нулю также на всех $E_r^{p,q}$ при $q \leqslant n$. Отсюда следует, что при любом $r \geqslant 2$ и $p \leqslant n$ в $E_r^{p,0}$ нет ограничивающих циклов (т. е. отображение d_r: $E_r^{p-r,r-1} \to E_r^{p,0}$ переводит все $E_r^{p-r,r-1}$ в нуль). Это показывает, что группа $E_q^{p,0}$ изоморфно отображается на $E_\infty^{p,0}$ при $p \leqslant n$, т. е. отображение φ^*: $H^p(G; A) \to H^p(B; A)$ будет изоморфным при $p \leqslant n$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{B} = (E, B, G, p)$ — главное расслоенное пространство с дискретной группой G, A — поле, в котором группа G действует тривиально, $H^p(G; A) \neq 0$. Если $H^i(E; A) = 0$ при $i < n$, то $h'(\mathfrak{B}) \geqslant n+1$.*

Следствие 2. *Пусть в пространстве E действует преобразование T периода m, степени $T, T^2, \ldots, T^{m-1}$ которого не имеют неподвижных точек. Пусть p — простое число, являющееся делителем числа m. Если пространство E ациклично по модулю p в размерностях $< n$, то оно имеет относительно преобразования T слабый гомологический род $\geqslant n+1$.*

(Предположение об ацикличности пространства E можно заменить более слабым условием: при $i < n$ группа гомологий $H_i(E; Z_p)$ отображается мономорфно на группу гомологий $H_i(B; Z_p)$ пространства B, получающегося отождествлением точек пространства E, эквивалентных относительно преобразования T.)

В самом деле, известно, что группы когомологий циклической группы даются формулой $H^i(Z_m, Z_p) = Z_p$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$), если только p является делителем m.

Отсюда видно, что $H^i(Z_m, Z_p) \neq 0$ и, следовательно, можно применять теорему 17.

Это следствие заключает в себе, в частности, теорему Красносельского[1]) [30], получающуюся, если пространство E считать n-мерной сферой (теорема Красносельского заключается также в следствии 2 теоремы 15). В другом направлении теорему Красносельского можно обобщить таким образом.

Следствие 3. *Пусть на n-мерной сфере S^n действует преобразование T, имеющее период m, и пусть множество A, состоящее из всех точек, неподвижных хотя бы при одном преобразовании $T, T^2, \ldots, T^{m-1}$, имеет размерность k. Тогда множество $S^n \setminus A$ имеет относительно преобразования T слабый гомологический род $\geqslant n-k$.*

(Легко видеть, что множества A и $S^n \setminus A$ инвариантны относительно преобразования T и, значит, можно говорить о роде множества $S^n \setminus A$ относительно преобразования T.)

Доказательство. Из закона двойственности Понтрягина вытекает, что множество $S^n \setminus A$ ациклично в размерностях $< n-k-1$. Применяя следствие 2, получаем требуемое утверждение.

Замечание. В формулировках теоремы 17 и ее следствий в силу неравенства $h'(\mathfrak{B}) \leqslant h(\mathfrak{B}) \leqslant g(\mathfrak{B})$, можно, конечно, говорить не о слабом гомологическом роде, а о гомологическом роде или о роде расслоенного пространства.

Пусть в пространстве X действует преобразование T периода p, переводящее в себя замкнутое подмножество $Y \subset X$. Обозначим через X' (Y') пространство, получающееся из X (Y) отождествлением точек, эквивалентных относительно преобразования T. Будем считать, что преобразования $T, T^2, \ldots, T^{p-1}$ не имеют неподвижных точек в множестве $X \setminus Y$. Тогда, как известно, определены естественные гомоморфизмы:

$$E_\alpha\colon\ H^i(X', Y'; Z_p) \to H^{i+\alpha}(X', Y'; Z_p)$$

(см., например, [55], где E_α обозначено через μ_α или [38], где используются обозначения $E_{2\lambda} = \mu^\lambda$, $E_{2\lambda+1} = \mu^\lambda\nu$). Гомоморфизмы E_α удовлетворяют соотношениям $E_\alpha \cdot E_\beta = \varepsilon_{p,\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}$, где $\varepsilon_{p,\mu} = 0$, если p и μ нечетны, $\varepsilon_{p,\mu} = 1$ в остальных случаях; $E_\alpha(x) = x \cup E_\alpha(1)$, где $1 \in H^0(X' \setminus Y'; Z_p)$ — единичный класс когомологий пространства $X' \setminus Y'$, $E_\alpha(1) \in H^\alpha(X' \setminus Y'; Z_p)$.

Предложение 37. *Слабый гомологический род пространства X относительно не имеющего неподвижных точек преобразования T простого периода p равен наименьшему из чисел ν, для которых $E_\nu(1) = 0$ (через $1 \in H^0(X'; Z_p)$ обозначаем единичный класс когомологий пространства X', получающегося при отождествлении точек пространства X, эквивалентных относительно преобразования T).*

Доказательство. Пусть $\varphi^*\colon H^i(Z_p; A) \to H^i(X'; A)$ есть порождаемый характеристическим отображением гомоморфизм групп когомологий группы Z_p в группы когомологий пространства X'. Если A — поле с характеристикой, отличной от p, то $H^i(Z_p; A) = 0$, поэтому слабый гомологический род $h'(X, T)$ пространства X относительно преобразования T равен наименьшему из чисел ν, для которых $\varphi^* H^\nu(Z_p; Z_p) = 0$. Класс когомологий $e_\nu = E_\nu(1')$, где $1' \in H^0(Z_p; Z_p)$ — единичный класс когомологий группы Z_p, является образующим элементом группы $H^\nu(Z_p; Z_p)$, поэтому $\varphi^* H^\nu(Z_p; Z_p) = 0$ в том и только в том случае, когда $p^* e_\nu = 0$.

---

[1]) Теорема Красносельского является обобщением теоремы Фета [63].

Для того чтобы закончить доказательство, достаточно заметить, что $p^*e_\nu = p^*E_\nu(1') = E_\nu(1)$ (в силу естественности гомоморфизма E_ν).

Предложение 38. *Пусть в конечном полиэдре K действует симплициальное преобразование T периода p (p — простое число), не имеющее неподвижных точек в $K \setminus L$, где L — инвариантный относительно T подполиэдр полиэдра K. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) $h'(K \setminus L, t) \geqslant k$,

б) *существует класс когомологий $x \in H(K', L'; Z_p)$, удовлетворяющий условию $E_{k-1}(x) \neq 0$,*

в) *существует класс когомологий $x \in H^{n-k+1}(K', L'; Z_p)$, удовлетворяющий условию $E_{k-1}(x) \neq 0$, (K', L' — пространства, получающиеся из K и L отождествлением точек, эквивалентных относительно преобразования T).*

Доказательство. Применяя предложение 37 к пространству $K \setminus L$, убеждаемся, что из утверждения а) вытекает, что $E_{k-1}(1) \neq 0$ (через $1 \in H^0(K' \setminus L'; Z_p)$ обозначен единичный класс когомологий пространства $K' \setminus L'$). Применяя закон двойственности Пуанкаре—Колмогорова к многообразию $K' \setminus L'$, убеждаемся, что произведение классов когомологий является невырожденным скалярным произведением группы $H^{n-k+1}(K', L'; Z_p)$ в группы $H^{k-1}(K' \setminus L'; Z_p)$ в группе $H^n(K', L'; Z_p)$. Отсюда вытекает, что существует класс когомологий $x \in H^{n-k+1}(K', L'; Z_p)$, для которого $x \cup E_{k-1}(1) \neq 0$, т. е. $E_{k-1}(x) \neq 0$. Таким образом из утверждения а) вытекает утверждение в).

Из утверждения в) очевидным образом следует утверждение б).

Наконец, из утверждения б) в силу соотношения $E_{k-1}(x) = x \cup E_{k-1}(1)$ вытекает, что $E_{k-1}(1) \neq 0$, т. е. утверждение а).

§ 4. Род конуса над главным расслоением

Напомним, что конусом над главным расслоением $\mathfrak{B}(E, B, G_p)$ называется соединение $\mathfrak{B} * \mathfrak{A}(G)$ расслоения $\mathfrak{B}$ с главным расслоением $\mathfrak{A}(G)$ (имеющим базу, состоящую из одной точки); в силу предложения 24

$$g(\mathfrak{B} * \mathfrak{A}(G)) \leqslant g(\mathfrak{B}) + 1$$

и, следовательно, род конуса над главным расслоением $\mathfrak{B}$ либо равен роду расслоения $\mathfrak{B}$, либо превышает его на 1 (здесь не предполагается, что группа G дискретна).

М. А. Красносельский высказал предположение [31], которое может быть следующим образом выражено с помощью понятия конуса над главным расслоением: если G — группа Z_2 вычетов по модулю 2, то для любого главного расслоения $\mathfrak{B}$ с группой G

$$g(\mathfrak{B} * \mathfrak{A}(G)) = g(\mathfrak{B}) + 1.$$

Мы приведем сейчас пример, опровергающий это предположение.

Сформулируем прежде всего предположение Красносельского в несколько ином виде.

Пусть E — пространство с инволюцией T, не имеющей неподвижных точек. Обозначим через SE надстройку над пространством E, т. е. произведение пространства E на отрезок $[0, 1]$, в котором все точки нижнего основания $E \times 0$ отождествлены между собой и все точки верхнего основания $E \times 1$ отождествлены между собой. Через T' обозначим инволюцию пространства SE, определяемую формулой $T'\alpha(e, t) = \alpha(Te, 1-t)$, где $e \in E$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, α — естественное отображение $E \times [0; 1]$

на SE. Пусть $\mathfrak{B}(E, E/T, Z_2, p)$ [$\mathfrak{B}'(SE, SE/T, Z_2, p')$] — главное расслоение с группой Z_2, порождаемое инволюцией T в пространстве E [инволюцией T' в пространстве SE]. Легко проверить, что $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} * \mathfrak{A}(Z_2)$, поэтому предположение $g(\mathfrak{B} * \mathfrak{A}(Z_2)) = g(\mathfrak{B}) + 1$ можно выразить в виде соотношения [1]) $g(SE, T') = g(E, T) + 1$.

Поставим в соответствие каждому отображению φ: $S^m \to S^n$ m-мерной сферы на n-мерную, пространство E_φ с инволюцией T_φ, не имеющей неподвижных точек. Определим пространство E_φ как топологическую сумму $S^n \bigcup E_1^{m+1} \bigcup E_2^{m+1}$ с отождествлениями $\lambda_1(x) \sim \varphi(x)$, $\lambda_2(x) \sim T\varphi(x)$ для любого $x \in S^m$ (здесь через E_1^{m+1}, E_2^{m+1} обозначены два экземпляра $(m+1)$-мерного шара, через λ_1: $S^m \to E_1^{m+1}$, λ_2: $S^m \to E_2^{m+1}$ — гомеоморфные отображения сферы S^m на границы шаров E_1^{m+1}, E_2^{m+1}, через T: $S^n \to S^n$ — центральная симметрия сферы S^n). Иначе можно сказать, что пространство E_φ получается из сферы S^n приклеиванием двух $(m+1)$-мерных шаров: одного с помощью отображения φ, а другого — с помощью отображения $T\varphi$. Инволюцию T_φ: $E_\varphi \to E_\varphi$ определим как инволюцию, индуцированную следующей инволюцией пространства

$$S^n \bigcup E_1^{m+1} \bigcup E_2^{m+1}\colon\quad T_\varphi x = Tx,\ \text{если}\ x \in S^n,$$

$$T_\varphi x = Rx,\ \text{если}\ x \in E_1^{m+1},\quad T_\varphi x = R^{-1}x,\ \text{если}\ x \in E_2^{m+1}$$

(через R: $E_1^{m+1} \to E_2^{m+1}$ обозначен гомеоморфизм, удовлетворяющий условию $R\lambda_1 = \lambda_2$).

Нетрудно проверить следующие два утверждения.

Лемма 4. *Если φ': $S^{m+1} \to S^{n+1}$ — надстройка над отображением φ: $S^m \to S^n$ (т. е. $\varphi' = S\varphi$), то $SE_\varphi = E_{\varphi'}$, а инволюция $(T_\varphi)'$ на пространстве SE_φ, построенная описанным выше способом исходя из инволюции T_φ, совпадает с инволюцией $T_{\varphi'}$.*

Лемма 5. *Род пространства E_φ относительно инволюции T_φ зависит только от гомотопического класса отображения φ.*

Если $\alpha \in \pi_m(S^n)$, то будем обозначать через $g(\alpha)$ род пространства E_φ относительно инволюции T_φ, где φ: $S^m \to S^n$ — отображение, определяющее элемент α гомотопической группы $\pi_m(S^n)$.

Следуя Серру ([44], стр. 145), будем обозначать через φ_q: $\pi_m(S^n) \to \pi_m(S^n)$ эндоморфизм группы $\pi_m(S^n)$, индуцированный отображением h: $S^n \to S^n$ степени q. (Если отображение f: $S^m \to S^n$ принадлежит классу $\alpha \in \pi_m(S^n)$, то отображение hf: $S^m \to S^n$ принадлежит классу $\varphi_q(\alpha) \in \pi_m(S^n)$.)

Предложение 39. *Если $\alpha \in \pi_m(S^n)$, то $g(\alpha) = n+1$ тогда и только тогда, когда существует нечетное число q, для которого $\varphi_q(\alpha) = 0$. Если это условие не выполнено, то $g(\alpha) = n+2$.*

Доказательство. Очевидно, что $n+1 \leqslant g(\alpha) \leqslant n+2$ (неравенство $g(\alpha) \geqslant n+1$ вытекает, например, из асферичности пространства E_φ в размерностях $< n$, неравенство $g(\alpha) \leqslant n+2$ может быть доказано непосредственной конструкцией покрытия, удовлетворяющего соответствующим условиям). Таким образом, достаточно показать, что $g(\alpha) \leqslant n+1$ только в случае, когда найдется нечетное число q, для которого $\varphi_q(\alpha) = 0$. По следствию 3 теоремы 15 $g(\alpha) \leqslant n+1$ тогда и только тогда, когда

---

[1]) Гипотеза $g(\mathfrak{B} * \mathfrak{A}(Z_2)) = g(\mathfrak{B}) + 1$ может быть выражена также в следующей форме: если в пространстве E действует без неподвижных точек инволюция T и множество $E' \subset E$, инвариантное относительно инволюции T, можно стянуть по E в точку, то $g(E', T) < g(E, T)$.

существует допустимое отображение пространства E_φ с инволюцией T_φ в сферу S^n с инволюцией T (центральной симметрией) (через φ обозначено отображение из гомотопического класса α). Сфера S^n является подмножеством пространства E_φ и на ней инволюция T_φ совпадает с инволюцией T. Если h: $S^n \to S^n$ — допустимое отображение сферы $S^n \subset E_\varphi$ с инволюцией T_φ (или что то же с инволюцией T) в сферу S^n с инволюцией T, то это отображение может быть продолжено в допустимое отображение пространства E_φ с инволюцией T_φ в сферу S^n с инволюцией T в том и только в том случае, когда отображение $h\varphi$: $S^m \to S^n$ гомотопно нулю. Так как сферу S^n с инволюцией T можно допустимо отобразить в себя со степенью q тогда и только тогда, когда q — нечетное число (см., например, [17], [31]), отсюда вытекает нужное нам утверждение.

Следствие 1. *Если $\alpha \in \pi_m(S^n)$, где $n \leqslant 3$, $n = 7$ или $m < 2n-1$, то $g(\alpha) = n+1$ в том и только в том случае, когда элемент α имеет нечетный порядок.*

В самом деле, в условиях этого следствия при $n=2$, $m \geqslant 3$ $\varphi_q(\alpha) = q^2(\alpha)$, а в остальных случаях $\varphi_q(\alpha) = q(\alpha)$ (см. [44], стр. 148).

Следствие 2. *Если $\alpha \in \pi_3(S^2)$ — ненулевой элемент с четным хопфовским инвариантом, то $g(\alpha) = g(S\alpha) = 4$.*

Для любого ненулевого элемента $\alpha \in \pi_3(S^2)$ $g(\alpha) = 4$ (так как $\pi_3(S^2) = Z$ не содержит элементов конечного порядка). С другой стороны, для любого элемента $\alpha \in \pi_3(S^2)$, имеющего четный хопфовский инвариант, имеем $S\alpha = 0$, и, следовательно, $g(S\alpha) = 4$.

Из следствия 2 и леммы 4 вытекает, что для пространства E_φ с инволюцией T_φ, где φ — отображение S^3 на S^2 с четным хопфовским инвариантом, предположение Красносельского не выполняется.

Заметим, однако, что предположение Красносельского справедливо, если заменить в его формулировке род гомологическим родом. Имеет место также следующее более общее утверждение.

Предложение 40. *Если G — конечная группа, то для любого главного расслоения $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ гомологический род конуса над расслоением $\mathfrak{B}$ на единицу больше гомологического рода расслоения $\mathfrak{B}$:*

$$h(\mathfrak{B} * \mathfrak{A}(G)) = h(\mathfrak{B}) + 1.$$

На доказательстве этого предложения мы не будем останавливаться.

Из предложения 40 вытекает

Предложение 41. *Если $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ — главное расслоение с конечной группой G, $B' \subset B$, $E' = p^{-1}(B')$ и гомологический род расслоения $\mathfrak{B}$ равен гомологическому роду расслоения $\mathfrak{B}'$ над множеством B' (т. е. гомологическому роду расслоения $\mathfrak{B}'(E', B', G, p)$), то множество E' нельзя стянуть в точку в пространстве E.*

В самом деле, если множество E' можно стянуть в точку в пространстве E, то конус над расслоением $\mathfrak{B}'(E', B', G, p)$ можно допустимо отобразить в расслоение $\mathfrak{B}$ и, значит, $h(\mathfrak{B}) \geqslant h(\mathfrak{B}' * \mathfrak{A}(G)) = h(\mathfrak{B}') + 1$. (Если φ: $E' \times I \to E$ деформация множества E' в точку $\varphi(e', 0) = e'$, $\varphi(e', 1) = a$, то $E' * G$ — пространство расслоения $\mathfrak{B}' * \mathfrak{A}(G)$ — отображаем в E по формуле $\psi(e', g, t) = g\varphi(e', t)$, где $e' \in E'$, $g \in G$, $0 \leqslant t \leqslant 1$).

Отметим, что предложение 40 не обобщается на случай, когда группа G бесконечна (легко построить противоречащий пример для случая, когда G — свободная циклическая группа).

Поступило
23. IV. 1960

Литература

1. Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., Гостехиздат (1947).

2. Альбер С. И., Гомологии пространств плоскостей и применение их к вариационному исчислению, ДАН 91 (1953), 1237—1240.

3. Альбер С. И., О периодической задаче вариационного исчисления в целом, УМН 12, вып. 4 (76) (1957), 135—153.

4. Barcus W. D., Meyer J., The suspension of a loop space.

5. Berstein I., Sur la categorie de Lusternik — Schnirelmann, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) (1958), 362—364.

6. Болтянский В. Г., Секущие поверхности косых произведений, ДАН 85 (1952), 17—20.

7. Болтянский В. Г., Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, Труды Матем. ин-та им. Стеклова 47 (1955), 1—200.

8. Болтянский В. Г., Вторые препятствия для секущих поверхностей. Изв. АН, серия матем. 20 (1956), 99—136.

9. Болтянский В. Г., Виноградов А. М., О втором препятствии для секущих поверхностей, II-я Всесоюзная топологическая конференция, тезисы докладов, Тбилиси (1959), 7—8.

10. Борель А., О когомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли, Сб. «Расслоенные пространства», М., ИЛ (1958), 163—245.

11. Борисович Ю. Г., Об оценке количества критических точек функционалов, ДАН 101, № 2 (1955), 205—207.

12. Борисович Ю. Г., К вопросу об устойчивости критических значений четных функционалов, ДАН 104, № 2 (1955).

13. Борисович Ю. Г., К одной задаче вариационного исчисления в целом в гильбертовом пространстве, Казань, Уч. зап. ун-та 115 : 14 (1855), 117—138.

14. Борисович Ю. Г., О критических значениях некоторых функционалов в банаховых пространствах, УМН 12, вып. 1 (73) (1957), 157—160.

15. Борисович Ю. Г., О роде множеств, Воронеж, Труды семин. по функц. анализу 6 (1957), 3—7.

16. Борисович Ю. Г., Об одной теореме о критических точках функционала, Матем. сб. 42 (84) (1959), 353—360.

17. Borsuk K., Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphär, Fund. Math. 20 (1933).

18. Бурбаки Н., Общая топология, Основные структуры, М., Физматгиз, 1958.

19. Bourgin D. G., On some separation and mapping theorems, Comment Math. Helv. 29 (1955), 199—214.

20. Гордон И. И., Обобщение теоремы Какутани о непрерывной функции, заданной на сфере, УМН 10, вып. 1 (1955), 97—99.

21. Гроссман Д. П., Об одной оценке для категории Люстерника—Шнирельмана, ДАН (1946), 109—112.

22. James I. M., The intrinsic join: a study of the homotopy groups of Stiefel manifolds, Proc. London Math. Soc. 8, № 32 (1958), 507—535.

23. Dyson F. I., Contrinuous function defined on a sphere, Ann. of Math. 54 (1951), 534—536.

24. Kakutani S., A proof that there exists a circumscribing cude around any bounded clodes convex set in R^3, Ann. of Math. (2) 43 (1942), 739—741.

25. Cartan H., Seminaire de Topologie algebrique de I'E. N. S. Paris.

26. Cartan H., Serre J. P., Espaces fibres et groupes d'homotopie, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 234 (1952), 288—395.

27. Curtis M. Z., Fort J. R., Homotopy groups of one-dimensional spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 8, № 3 (1957), 577—579.

28. Красносельский М. А., Устойчивость критических значений четных функционалов на сфере, Матем. сб. 37 (79) (1955), 301—322.

29. Красносельский М. А., О вычислении вращения векторного поля на n-мерной сфере, ДАН 101 (1955), 401—404.

30. Красносельский М. А., О специальных покрытиях конечномерной сферы, ДАН 103 (1955), 961—964.

31. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.

32. Красносельский М. А., Об оценке количества критических точек функционалов, УМН 7, вып. 2 (48) (1952), 157—164.

33. L i a o S. D., On the theory of obstructions of fiber bundles, Ann. of Math. **60**, № 1 (1954), 146—191.

34. Л ю с т е р н и к Л. А., Ш н и р е л ь м а н Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930.

35. Л ю с т е р н и к Л. А., Ш н и р е л ь м а н Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, УМН **2**, вып. 1 (17) (1947), 166—217.

36. L i v e s a y G. R., Two theorems of the two sphere, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 492.

37. M i l n o r J., Construction of universal bundles, II, Ann. of Math. **63**, № 3 (1956), 430—435.

38. N a k a o k a M., Cohomology of the p-fold cyclic products, Proc. Japan. Acad. **31**, № 10 (1955), 665—669.

39. П о н т р я г и н Л. С., Классификация некоторых косых произведений, ДАН **47** (1945), 327—330.

40. П о н т р я г и н Л. С., Об одной связи между гомологиями и гомотопиями, Изв. АН, серия матем. **13** (1949), 193—200.

41. П о с т н и к о в М. М., Об одной связи между гомологиями и гомотопиями, УМН **5** вып. 4 (38) (1950), 140.

42. П о с т н и к о в М. М., Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений, Труды Матем. ин-та им. Стеклова **46** (1955), 1—156.

43. С е р р Ж. П., Сингулярные гомологии расслоенных пространств, Сб. «Расслоенные пространства», М., ИЛ (1958), 5—48.

44. С е р р Ж. П., Гомотопические группы и классы абелевых групп, Сб. «Расслоенные пространства», М., ИЛ (1958), 124—159.

45. С м и т П. А., Неподвижные точки периодических отображений, Прибавление к книге Лефшеца «Алгебраическая топология», М., ИЛ, 1949.

46. S t e e n r o d N., Homology with local coefficients, Ann. Math. **44** (1945), 610—627.

47. S t e e n r o d N., Cyclic reduced powers of cohomology classes, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39** (1953), 213—217.

48. С т и н р о д Н., Топология косых произведений М., ИЛ, 1953.

49. Т о м Р., Некоторые свойства в «целом» дифференцируемых многообразий, Сб. «Расслоенные пространства», М., ИЛ (1958), 243—343.

50. T h o m R., Espaces fibres en spheres et carres de Steenrod, Ann. Ecole Norm. **69** (1952), 109—181.

51. W u W e n-T s u n, On the product of sphere bundles and the duality theorem mod 2, Ann. Math. **49** (1948), 641—653.

52. W u W e n-T s u n, Classes caracteristiques et i-carres d'une variete, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **230** (1950), 508—509.

53. W u W e n-T s u n, On the relation between Smith operations and Steenrod powers, Fund Math. **44** (1957), 262—269.

54. W u W e n-T s u n, On the realization of complexes in euclidean spaces II, Scientia Sinica **7**, № 4 (1958), 365—387.

55. W u W e n-T s u n, A Theory of imbedding and immersion in euclidean spaces, (Гектографир. 1958).

56. H e r m a n n R., Secondary obstructions for fibre spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **65**, № 1 (1959), 3—8.

57. H u e b s c h W., On the covering homotopy theoren, Ann. of Math. **61** (1955), 555—563.

58. S h a p i r o A., Obstructions to the imbedding of a complex in a Euclidean Space I, The first obstruction, Ann. Math. **66**, № 2 (1957), 256—269.

59. W u T s e n-t e h, On the mod 2 imbedding classes of triangulabe compact manifold, Science Record, New Ser. **2**, № 3 (1958).

60. W h i t n e y H., Topological properties of differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (1937), 785—805.

61. W h i t n e y H., On the topology of differentiable manifolds, Lectures in Topologie, Univ. of Mich. Press (1941).

62. F a r y I s t v a n, Sur la categorie des classes de homologie d'un espace, Proc. Internat. Congr. math. **2** (1954), 215.

63. Ф е т А. И., Обобщение теоремы Люстерника — Шнирельмана о покрытиях сфер и некоторых связанных с ней теорем, ДАН **95**, № 6 (1954), 1149—1151.

64. Ф р о л о в С. В. и Э л ь с г о л ь ц Л. Э., Нижняя граница числа критических значений функции, заданной на многообразии, Матем. сб. **42** (1935).

65. Ш в а р ц А. С., Некоторые оценки рода топологического пространства в смысле Красносельского, УМН **12**, вып. 4 (1957), 209—214.

66. Ш в а р ц А. С., Род расслоенного пространства, УМН **13**, вып. 4 (1958), 212.

67. Шварц А. С., Род расслоенного пространства, ДАН **119**, № 2 (1959), 219—222.
68. Шварц А. С., О роде расслоенного пространства, ДАН **126**, № 4 (1959), 719—722.
69. Шварц А. С., Устойчивость стационарных значений, ДАН **131**, № 6 (1960), 1276—1278.
70. Фукс Д. Б., Шварц А. С., Циклические степени полиэдра и проблема вложения, ДАН **125**, № 2 (1959), 285—288.
71. Eilenberg S., Ganea T., On the Lusternik — Schnirelmann category of abstract groups, Ann. of Math. **65**, № 3 (1957), 517—518.
72. Eilenberg S., Mac Lane S., Relations between homology and homotopy groups of spaces, Ann. Math. **46** (1945), 480—509; Ann. Math. **51** (1950), 514—533.
73. Яворовский Я. В., О некоторых отображениях сферы в евклидово пространство, Бюлл. Польск. АН **3**, № 3, 11, 579, 581.
74. Yamabe H. and Jujobo L., On the continuous functions defined on a sphere, Osaka Math. Yourn. **2** (1950), 19—22.
75. Yang Chung-Tao, On theorems of Borsuk—Ulam, Kakutuni—Yamabe—Yujobo and Dyson. I, Ann. of Math. **60**, № 2 (1954); II, Ann. of Math. **62**, № 2 (1955), 271—283.
76. Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, М., Физматгиз, 1958.
77. Гуревич В., Волмен Г., Теория размерности, М., ИЛ, 1948.
78. Эльсгольц Л. Э., Оценка числа критических точек, УМН 5, вып. 6 (1950), 52—87.
79. Математика в СССР за сорок лет (1917—1957), т. I, М., Физматгиз, 1959.
80. Люстерник Л. А., Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом, Труды Матем. ин-та им. Стеклова (1947), 1—96.
81. Van Kampen E., Komplexe in euclidische Räume, Abh. Math. Sem. Hamburg 9 (1932), 72—78; Berichtigung dazu. ibid. 152—153.
82. Фет А. И., Связь между топологическими свойствами и числом экстремалей на многообразии, ДАН 88, № 3 (1959), 415—417.

РОД РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА [1]

А. С. Шварц

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА VI

КАТЕГОРИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Эта глава посвящена установлению связи понятия категории топологического пространства в смысле Люстерника — Шнирельмана и близких понятий с понятием рода расслоенного пространства. Указанные в предыдущих главах оценки для рода расслоенного пространства применяются для получения оценок категории топологического пространства.

§ 1. Связь рода расслоенного пространства с категорией топологического пространства и близкими понятиями

Приведем для удобства определения категории топологического пространства X [80], категории подмножества A топологического пространства X в пространстве X и категории непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ [82].

Определение 18. Категорией топологического пространства X (обозначаем $\operatorname{cat} X$) называется наименьшая мощность открытого покрытия пространства X, состоящего из стягиваемых в пространстве X множеств.

[1]) Первая часть настоящей работы напечатана в т. 10 Трудов Московского математического общества. Основные результаты статьи доложены на заседании Московского математического общества 11 февраля 1958 г. и 17 февраля 1959 г.

Определение 18'. Категорией подмножества A пространства X относительно X (обозначаем $\mathrm{cat}_X A$) называется наименьшая мощность открытого покрытия множества A, состоящего из множеств, стягиваемых в пространстве X.

Определение 18'' (Фет [82]). Категорией непрерывного отображения $f: X \to Y$ (обозначаем $\mathrm{cat} f$) называется наименьшая мощность открытого покрытия $\lambda = \{L_i\}$ пространства X, состоящего из таких множеств L_i, что отображение f: $L_i \to Y$ гомотопно нулю.

Очевидно, что $\mathrm{cat}\, X = \mathrm{cat}_X X$, а $\mathrm{cat}_X A$ совпадает с категорией отображения вложения $A \to X$.

Теорема 18. *Для любого расслоенного пространства в смысле Гуревича $\mathfrak{B}(E, B, F, p)$ род не превышает категории базы, т. е. $g(\mathfrak{B}) \leqslant \mathrm{cat}\, B$. Если пространство расслоения E стягиваемо, то*

$$g(\mathfrak{B}) = \mathrm{cat}\, B.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из того, что над стягиваемым подмножеством A пространства B существует секущая поверхность. (Для проверки этого факта достаточно применить теорему о накрывающей гомотопии к деформации F_t, стягивающей множество A в точку.)

Для того чтобы доказать второе утверждение теоремы, нужно проверить, что в случае, когда пространство E стягиваемо и над множеством $A \subset B$ существует секущая поверхность φ: $A \to E$, множество A стягиваемо. В самом деле, пусть $g_t: E \to E$ — деформация, стягивающая E в точку по себе. Тогда деформация $h_t = p g_t \varphi$ стягивает множество A в точку в базе B.

Из второго утверждения теоремы 18 вытекает следующее предложение.

Теорема 18'. *Род серровского расслоения $\mathfrak{B}_X(E_a, X, \Omega(X), p)$ над линейно связным пространством X равен категории пространства X.*

(Под серровским расслоением понимается расслоение пространства E_a всех путей в X с началом в фиксированной точке $a \in X$, получающееся, если каждому пути $f \in E$ поставить в соответствие его конец: $p(f) = f(1)$. Слоем расслоения p: $E \to X$ служит пространство $\Omega(X)$ петель в X.)

Теорема 18' очень легко может быть доказана непосредственно. В самом деле, секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_B$ над множеством $A \subset B$ естественным образом отождествляется с деформацией множества A в точку a.

Теорема 19. *Пусть A — подмножество пространства X. Обозначим через $\mathfrak{B}_{A, X} = (E_{a, X}, A, \Omega(X), p)$ расслоение пространства $E_{a, A}$ всех путей в X с началом в фиксированной точке $a \in X$ и с концом в множестве A, получающееся, если каждому пути поставить в соответствие его конец. Тогда* $\mathrm{cat}_X A = g(\mathfrak{B}_{A, X})$.

Теорема 19'. *Пусть f: $X \to Y$ непрерывное отображение. Обозначим через $\mathfrak{B}_f$ расслоение над X, индуцированное серровским расслоением $\mathfrak{B}_Y$ и отображением $f: X \to Y$. Тогда* $\mathrm{cat} f = g(\mathfrak{B}_f)$.

Теорема 19 является, очевидно, частным случаем теоремы 19', так как $\mathfrak{B}_{A, X} = \mathfrak{B}_i$, где i: $A \to X$ — отображение вложения.

Теорема 19' вытекает из следующего утверждения: над множеством $M \subset X$ тогда и только тогда существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}_f$, когда отображение f: $M \to Y$ гомотопно нулю. Чтобы проверить это утверждение, заметим, что пространство расслоения $\mathfrak{B}_f$ состоит из пар (x, α), где $x \in X$, $\alpha \in E_a$ и $f(x) = \alpha(1)$ (E_a — пространство серровского расслоения над Y). Секущая поверхность φ расслоения $\mathfrak{B}_f$ над множеством M ставит в соответствие каждой точке $x \in M$ пару $\varphi(x) = (x, \alpha)$, где α —

путь в Y с началом в фиксированной точке a и с концом в точке $f(x)$. Полагая $f_t(x)=\alpha(1-t)$ (здесь $x\in M$, α — путь в Y, определяемый условием $\varphi(x)=(x, \alpha)$), получаем деформацию отображения $f=f_0$: $M\to Y$ в отображение f_1: $M\to a\in Y$. Обратно, всякой деформации f_t отображения f: $M\to Y$ в отображение f_1, переводящее все M в точку $a\in Y$, ставится в соответствие секущая поверхность φ: $x\to(x, \alpha)$ над множеством M, где α — путь в Y, определяемый формулой

$$\alpha(t)=f_{1-t}(x).$$

Теорема 19 позволяет свести вычисление категории непрерывного отображения к вычислению рода некоторого расслоенного пространства. Обратно, род любого главного расслоенного пространства выражается через категорию непрерывного отображения с помощью следующего предложения.

Теорема 19''. *Род главного расслоенного пространства $\mathfrak{B}(E,B,G,p)$ с наследственно паракомпактной базой B равен категории характеристического отображения φ: $B\to B_\omega(G)$.*

В самом деле, над множеством $M\subset B$ тогда и только тогда существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{B}$, когда над M расслоение $\mathfrak{B}$ является прямым произведением, иначе говоря, характеристическое отображение φ: $M\to B_\omega(G)$ гомотопно нулю.

§ 2. Оценки для категории

Приведем оценки для категории топологического пространства и непрерывного отображения, получающиеся из оценок рода расслоенного пространства, выведенных в предыдущих главах.

Определение 19. Длиной пространства X (обозначаем $\operatorname{long} X$) называется наибольшее число n, для которого существует n классов когомологий $\xi_i\in H(X; A_i)$ ненулевой размерности, произведение которых

$$\xi_1\cup\xi_2\cup\ldots\cup\xi_n\in H(X, A_1\otimes\ldots\otimes A_n)$$

не равно нулю (здесь A_i — локальные системы коэффициентов на X).

(Первоначально определение длины многообразия было дано Фроловым и Эльсгольцем [64]. Приведенное здесь определение, использующее локальные системы коэффициентов, принадлежит И. Берштейну.)

Предложение 42. $\operatorname{cat} X\geqslant\operatorname{long} X+1$.

Это известная теорема Фролова и Эльсгольца. Она является частным случаем теоремы 5. В самом деле, если $\mathfrak{B}_X$ — серровское расслоение над X, то

$$\operatorname{cat} X=g(\mathfrak{B}_X),\quad \operatorname{long} X=\operatorname{long}(\mathfrak{B}_X).$$

Теорема 20 (И. Берштейн[1]). *Пусть X есть CW-полиэдр размерности nS, асферичный в размерностях $<S$ $(S\geqslant 1)$.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

а) $\operatorname{cat} X=n+1$,

б) $\operatorname{long} X=n$,

в) $\xi^n=\underbrace{\xi\cup\ldots\cup\xi}_{n}\neq 0$

(*через ξ обозначен фундаментальный класс пространства X*).

[1]) Эта теорема при $S=1$ была сообщена автору И. Берштейном в личном письме.

Для доказательства достаточно применить теорему 6 к серровскому расслоению $\mathfrak{B}_X$, заметив, что слой $\Omega(X)$ асферичен в размерностях $< S-1$,

$$\operatorname{cat} X = g(\mathfrak{B}_X), \quad \operatorname{long} X = \operatorname{long} \mathfrak{B}_X,$$

а фундаментальный класс пространства X совпадает с характеристическим классом расслоения $\mathfrak{B}_X$.

Заметим, что в теореме 20 при $S=1$ в случае, когда X — замкнутое многообразие и $\pi_1(X)=Z_2$, можно длину пространства X понимать в обычном смысле как наибольшее число классов когомологий ненулевой размерности из кольца $H(X, Z_2)$, произведение которых не равно нулю. В этом случае теорема 20 была ранее доказана автором [67].

Обозначим через $G(n)$ многообразие неориентированных больших кругов на n-мерной сфере. Категория многообразия $G(n)$ играет существенную роль в оценке числа замкнутых геодезических на n-мерной сфере; она оценивалась снизу Л. А. Люстерником [80] и С. И. Альбером [2], [3].

Используя сделанное выше замечание и результаты Альбера [2], [3] о строении кольца когомологий $H(G(n), Z_2)$, легко убедиться, что $\operatorname{cat} G(n) = \dim G(n) + 1 = 2n-1$ тогда и только тогда, когда $n=2^k$. Используя данную Альбером оценку $\operatorname{cat} G(n)$ снизу, получаем $\operatorname{cat} G(n) = 2n-1$ при $n=2^k$, $\operatorname{cat} G(n) = 2n-2$ при $n = 2^k+1$ $(k \geqslant 1)$, $2n-1-s \leqslant \operatorname{cat} G(n) \leqslant 2n-2$ при $n=2^k+s$ $(1 \leqslant s \leqslant 2^k)$. Отметим, что написанные только что оценки категории многообразия $G(n)$ выполняются также для рода расслоения $\mathfrak{W}(V(n), G(n), O(2), p)$, где $V(n)$ — многообразие единичных касательных векторов к n-мерной сфере S^n, $p\colon V(n) \to G(n)$ — отображения, ставящие в соответствие каждому касательному вектору большой круг, касающийся этого вектора. (Расслоение $\mathfrak{B}$ можно рассматривать как главное расслоение с ортогональной группой $O(2)$.)

Определение 19′. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Обозначим через $l(f)$ наибольшее число n, для которого существует n классов когомологий $\xi_i \in H(Y, A_i)$ ненулевой размерности, удовлетворяющих условию $f^*\xi_1 \cup f^*\xi_2 \cup \ldots \cup f^*\xi_n \neq 0$ (здесь A_i — локальные системы коэффициентов на Y).

Очевидно, что выполняется неравенство $l(f) \leqslant \operatorname{long} \mathfrak{B}_f$.

Заметим, однако, что соотношение $l(f) = \operatorname{long} \mathfrak{B}_f$ не обязательно выполняется.

Предложение 42′. $\operatorname{cat} f \leqslant l(f)+1$.

Это предложение вытекает из теоремы 5, примененной к расслоению $\mathfrak{B}_f$, и соотношений $\operatorname{cat} f = g(\mathfrak{B}_f)$, $\operatorname{long} \mathfrak{B}_f \geqslant l(f)$.

Теорема 20′. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *непрерывное отображение,* Y — *пространство, асферичное в размерностях* $< s$ $(s \geqslant 1)$, X — *полиэдр размерности* ns.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

а) $\operatorname{cat} f = n+1$,

б) $l(f) = n$,

в) $(f^*(\eta))^n = f^*(\eta) \cup \ldots \cup f^*(\eta) \neq 0$ *(через* η *обозначен фундаментальный класс пространства* Y*).*

Для доказательства достаточно применить теорему 6 к расслоению $\mathfrak{B}_f$ и заметить, что $\operatorname{cat} f = g(\mathfrak{B}_f)$, а характеристический класс расслоения $\mathfrak{B}_f$ равен $f^*\eta$.

Пусть X — топологическое пространство, $S\Omega(X)$ — надстройка над пространством петель в X. Построим отображение $\pi\colon S\Omega(X) \to X$ следующим образом: точке пространства $S\Omega(X)$, определяемой парой (α, t), где $\alpha \in \Omega(X)$ — петля в X, $0 \leqslant t \leqslant 1$, ставим в соответствие точку $\alpha(t) \in X$.

Обозначим через $\mathfrak{B}_2$ $(E_2, X, \Omega*\Omega, \psi)$ расслоенное пространство $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_X + \mathfrak{B}_X$, где $\mathfrak{B}_X (E_a, X, \Omega(X), p)$ — серровское расслоение над X. В силу теоремы 3 пространство X тогда и только тогда имеет категорию $\leqslant 2$, когда у расслоения $\mathfrak{B}_2$ существует секущая поверхность[1]).

Теорема 21. *Пространство расслоения E_2 расслоенного пространства $\mathfrak{B}_2$ гомотопически эквивалентно пространству $S\Omega(X)$. Существует гомотопическая эквивалентность $\nu: E_2 \to S\Omega(X)$, удовлетворяющая условию $\pi\nu = \psi$.*

Доказательство. Точки пространства E_2 определяются четверками $(\alpha, \beta, \tau_1, \tau_2)$, где α и β — пути в X, удовлетворяющие условиям

$$\alpha(0) = \beta(0) = a, \quad \alpha(1) = \beta(1), \quad 0 \leqslant \tau_1 \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant \tau_2 \leqslant 1, \quad \max(\tau_1, \tau_2) = 1,$$

с отождествлениями

$$(\alpha, \beta, 0, 1) \sim (\alpha', \beta, 0, 1), \quad (\alpha, \beta, 1, 0) \sim (\alpha, \beta', 1, 0).$$

Нетрудно проверить, что это же пространство можно определить как совокупность троек (α, β, τ), где α и β — пути в X, $\alpha(0) = \beta(0) = a$, $\alpha(1) = \beta(1)$ с отождествлениями $(\alpha, \beta, 0) \sim (\alpha', \beta, 0)$ и $(\alpha, \beta, 1) \sim (\alpha, \beta', 1)$ (каждой четверке $(\alpha, \beta, \tau_1, \tau_2)$ ставится в соответствие тройка $\left(\alpha, \beta, \tau\right)$, где $\tau = \frac{1}{2}\tau_1$, если $\tau_2 = 1$, $\tau = 1 - \frac{1}{2}\tau_2$, если $\tau_1 = 1\Big)$.

Обозначим через M_0 (M_1) множество точек пространства E_2, определяемых тройками $(\alpha, \beta, 0)$ (соответственно $(\alpha, \beta, 1)$). Легко видеть, что оба эти множества гомеоморфны пространству E_a и, следовательно, стягиваемы по себе в точку. Нетрудно устроить такую деформацию пространства E_2, при которой множества M_0 и M_1 стягиваются по себе в точки.

Определим отображение $\nu: E_2 \to S\Omega(X)$, поставив в соответствие точке пространства E_2, определяемой тройкой (α, β, τ), точку пространства $S\Omega(X)$, определяемую парой (γ, τ), где γ — петля в X, задаваемая формулой $\gamma(t) = \alpha\left(\frac{t}{\tau}\right)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $\gamma(t) = \beta\left(\frac{t-1}{\tau-1}\right)$ при $\tau \leqslant t \leqslant 1$ (тройкам $(\alpha, \beta, 0)$ и $(\alpha, \beta, 1)$ ставятся в соответствие вершины надстройки, т. е. точки, задаваемые парами $(\gamma, 0)$ и $(\gamma, 1)$, где γ произвольно).

Отображение ν удовлетворяет условию $\pi\nu = \psi$ и является гомотопической эквивалентностью. Для того чтобы проверить последнее утверждение, заметим, что пространство $S\Omega(X)$ получается из E_2 с помощью отождествлений $x \sim y$, если $x, y \in M_0$, $x \sim y$, если $x, y \in M_1$. (Это следует из того, что прообразы всех точек надстройки $S\Omega(X)$ при отображении ν, кроме вершин, состоят из единственной точки, а прообразами вершины являются множества M_0 и M_1.) Для того чтобы закончить доказательство, достаточно применить следующую простую лемму.

Лемма 6. *Пусть A — топологическое пространство, B — такое подмножество пространства X, что существует деформация пространства X, стягивающая множество B по себе в точку, A' — пространство, получающееся из A отождествлением точек множества B между собой. Тогда отображение отождествления $A \to A'$ является гомотопической эквивалентностью.*

[1]) Расслоение, гомотопически эквивалентное расслоению $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_X + \mathfrak{B}_X$, было ранее построено Барсуком и Мейером [4] для других целей

Следствие. *Пусть существует n классов когомологий $\xi_i \in H(X, A_i)$, удовлетворяющих условиям*

$$\sigma^*\xi_1 = \ldots = \sigma^*\xi_n = 0, \quad \xi_1 \cup \xi_2 \cup \ldots \cup \xi_n \neq 0$$

(здесь через $\sigma^*: H(X, A_i) \to H^{i-1}(\Omega(X), A_i)$ обозначен гомоморфизм надстройки). Тогда $\operatorname{cat} X \geqslant 2n+1$.

В самом деле, в силу только что доказанной теоремы и соотношения $S\sigma^* = \pi^*$ получаем $\operatorname{long} \mathfrak{B}_2 \geqslant n$ и, значит, $g(\mathfrak{B}_2) \geqslant n+1$. Применяя теорему 3', получаем

$$g(\mathfrak{B}_2) = \left[\frac{1}{2}(g(\mathfrak{B}_2)+1)\right] = \left[\frac{1}{2}(\operatorname{cat} X + 1)\right] \geqslant n+1.$$

Из этого соотношения вытекает нужное нам утверждение.

Для изучения категории могут быть использованы многие из доказанных выше теорем. Отметим, что частным случаем теоремы 5 является теорема Гроссмана [21] о категории полиэдра, асферичного до некоторой размерности, частным случаем предложения 22 является теорема Эльсгольца [78] о категории топологического произведения.

§ 3. Понятие m-мерной категории

Покажем сейчас, каким образом включается в понятие рода расслоенного пространства понятие m-мерной категории.

Определение 20. Будем называть m-*мерной категорией пространства* X (обозначается $\operatorname{cat}_m X$) наименьшую мощность открытого покрытия α пространства X, обладающего следующим свойством: отображение любого m-мерного полиэдра в элемент покрытия α гомотопно нулю в X.

Заметим прежде всего, что имеет место следующее очевидное утверждение.

Предложение 43. *m-мерная категория пространства X равна m-мерному роду серровского расслоения $\mathfrak{B}_X$:*

$$\operatorname{cat}_m X = g_m(\mathfrak{B}_X).$$

Но m-мерная категория может быть охарактеризована и как род некоторого расслоенного пространства.

Предложение 44. *Род расслоения $\mathfrak{S}_m(X_m, X, F_m, p_m)$, убивающего гомотопические группы полиэдра X в размерностях $\leqslant m$, равен m-мерной категории пространства X.*

(Говорят, что расслоение $p_m: X_m \to X$ *убивает* гомотопические группы пространства X в размерностях $\leqslant m$, если $\pi_i(X_m) = 0$ при $i \leqslant m$, и отображение p_m *порождает* изоморфизм гомотопических групп $\pi_i(X_m)$ и $\pi_i(X)$ в размерностях $> m$ [26].)

Это утверждение вытекает из предложения 17. Легко дать и непосредственное доказательство предложения 44.

Достаточно проверить следующее утверждение: над подкомплексом Y триангуляции пространства X тогда и только тогда существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{S}_m$, когда m-мерный остов этого подкомплекса можно стянуть в точку в пространстве X. Для того чтобы доказать это утверждение, заметим прежде всего, что слой F_m расслоения $\mathfrak{S}_m$ асферичен в размерностях $\geqslant m$. Это сразу получается из точной гомотопической последовательности расслоения $\mathfrak{S}_m$ (см. [26]). Если известно, что m-мерный остов Y^m подкомплекса Y стягиваем в точку в X, то в силу теоремы о накрывающей гомотопии над m-мерным остовом существует секущая поверхность расслоения $\mathfrak{S}_m$. Эта секущая поверхность в силу асферичности слоя F_m в размерностях $\geqslant m$ может быть продолжена на весь подкомплекс Y.

Если известно, что над подкомплексом Y существует секущая поверхность φ, то можно следующим образом стянуть в точку m-мерный остов Y^m комплекса Y. В силу асферичности пространства X_m в размерностях $\leqslant m$ существует деформация φ_t отображения $\varphi: Y^m \longrightarrow X_m$ в стационарное отображение. Очевидно, что деформация $p_m \varphi_t: Y^m \longrightarrow X$ стягивает множество Y^m в точку по пространству X.

Следствие. *Одномерная категория полиэдра X совпадает с родом универсального накрытия пространства X.*

Предложение 44 может быть применено, например, к расслоению $\mathfrak{W}(V(n), G(n), O(2), p)$ (см. [2]). Группы $\pi_i(V(n)) = 0$ при $i \leqslant n-2$, гомоморфизм $p_*: \pi_i(V(n)) \longrightarrow \pi_i(G(n))$ является изоморфизмом при $i > 2$, поэтому $g(\mathfrak{W}) = \operatorname{cat}_2 G(n) = \operatorname{cat}_{n-2} G(n)$.

Отметим следующие утверждения.

Предложение 45. *Если X — полиэдр размерности $\leqslant ns$, асферичный в размерностях $< s$ $(s \geqslant 1)$, то $\operatorname{cat} X = n+1$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{cat}_s X = n+1$.*

Для доказательства достаточно применить теорему 6 к серровскому расслоению $\mathfrak{B}_X$ и к расслоению $\mathfrak{S}_s$, убивающему гомотопические группы пространства X в размерностях $\leqslant s$, и заметить, что характеристические классы расслоения $\mathfrak{B}_X$ и расслоения $\mathfrak{S}_s$ совпадают.

Предложение 45 при $s=1$ было одновременно и независимо доказано И. Берштейном ([5]) и автором ([68]).

Предложение 46 (И. Берштейн). *Если X — полиэдр размерности $\leqslant n$, то*

$$\operatorname{cat} X \leqslant \operatorname{cat}_m X + \left[\frac{n}{m+1}\right],$$

$$\operatorname{cat} X \leqslant \max(\operatorname{cat}_{n-1} X, 2).$$

Это предложение вытекает из предложения 18 и предложения 43.

§ 4. Род и гомологический род группы

Определение 21. Родом (гомологическим родом) топологической группы G (обозначается $g(G)$) (соответственно $h(G)$) называется наибольшее из натуральных чисел n, для которых существует главное расслоенное пространство с группой G, имеющее род n (соответственно гомологический род n). Если наибольшего из таких чисел не существует, то будем говорить, что род (гомологический род) группы G бесконечен.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 47.

$$g(G) = g(\mathfrak{A}_\omega(G)) = \operatorname{cat} B_\omega(G),$$

$$h(G) = h(\mathfrak{A}_\omega(G))$$

(здесь ω — счетная мощность, $\mathfrak{A}_\omega(G)$ — универсальное расслоение рода ω, $B_\omega(G)$ — база этого расслоения).

Если G — дискретная группа, то из предложения 47 видно, что $g(G) = \operatorname{cat} G + 1$, $h(G) = \dim G + 1$, где $\operatorname{cat} G$ — категория, а $\dim G$ — размерность группы G в смысле Эйленберга — Ганя [71].

Из результатов главы IV легко получаются следующие утверждения, впервые доказанные Эйленбергом и Ганя [71].

Предложение 48. *Если G — дискретная группа и $g(G) \neq 3$, то $g(G) = h(G)$.*

Группу G, для которой $g(G) \neq h(G)$ (в этом случае обязательно $g(G)=3$, $h(G)=2$), будем, следуя Ганя, называть особой группой. Особую группу можно определить так же, как группу G, удовлетворяющую условию $h(G)=2$, но не являющуюся свободной. Вопрос о существовании особых групп остается открытым.

Предложение 49. *Пусть G — дискретная группа и $s(G)$ — наименьшее из чисел, для которых существует комплекс K размерности $s(G)$, асферичный в размерностях > 1 и удовлетворяющий условию $\pi_1(K)=G$. Тогда $g(G)=s(G)+1$ (при условии $g(G) \neq 2$).*

В самом деле, неравенства $g(G) \geqslant h(G)$ и $g(G) \leqslant s(G)+1$ очевидны. Обратные неравенства вытекают из следующей леммы.

Лемма 7. *Если характеристический класс $\xi(n, G)$ пары $(B_\omega(G), B_n(G))$ равен нулю, то при $n \geqslant 3$ множество $B_{n+1}(G)$ можно стянуть по себе в $B_n(G)$, оставляя на месте $B_n(G)$.*

(Это утверждение справедливо в силу n-мерности пространства $B_{n+1}(G)$.)

В самом деле, если $g(G)=n$, $h(G) < n$, то, применяя лемму 7, видим, что $B_n(G)$ можно продеформировать по себе в $B_{n-1}(G)$, и значит, $g(\mathfrak{A}_n(G)) \leqslant$ $\leqslant n-1$, что противоречит предположению $g(G)=n$. Если $g(G)=n$ $(n \neq 2)$, то $s(G) \leqslant n-1$, так как полиэдр $B_n(G)$ имеет размерность $n-1$, $\pi_1(B_n(G))=G$ и $\pi_i(B_n(G))=0$ при $i > 1$ (последнее в силу того, что по лемме 7 множество $B_m(G)$ при любом $m > n$ можно стянуть в множество $B_n(G)$, оставляя на месте множество $B_n(G)$).

Предложение 50. *Если дискретная группа G содержит элемент конечного порядка, то род группы G бесконечен.*

Доказательство. Пусть H — циклическая группа, порожденная элементом конечного порядка, содержащимся в группе G. Применив предложение 24 к пространству $A_\omega(G)$, в котором действует группа G, получаем, что

$$g(A_\omega(G),\ H) \leqslant g(A_\omega(G),\ G) = g(\mathfrak{A}_\omega(G)).$$

Но в силу следствия 2 теоремы 10 $g(A_\omega(G), H)=\omega$.

§ 5. Категория многообразия

Покажем сейчас, каким образом могут быть получены результаты И. Берштейна о категории многообразий, удовлетворяющих некоторым условиям асферичности.

Теорема 22 (И. Берштейн). *Пусть V есть n-мерное компактное многообразие, удовлетворяющее условию*

$$\pi_i(V) = 0 \qquad (2 \leqslant i \leqslant k-1),$$

где $k-1 \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда $\operatorname{cat}_1 V = \min(g(\pi_1(V)),\ n+1)$ и выполнено одно из следующих соотношений:

1) $\operatorname{cat} V = \operatorname{cat}_1 V = n+1$,
2) $\operatorname{cat} V = \operatorname{cat}_1 V + 1 = g(\pi_1(V)) + 1 < n-k+2$,
3) $\operatorname{cat}_1 V = \operatorname{cat} V = g(\pi_1(V)) = 3,\ h(\pi_1(V)) = 2$

(неизвестно, реализуется ли последний случай).

Доказательство. Неравенство $\operatorname{cat}_1 V \leqslant \min(g(\pi_1(V)),\ n+1)$ очевидно. Докажем обратное неравенство. Обозначим через $\varphi\colon V \to B_\omega(\pi_1(V))$ характеристическое отображение универсального накрытия многообразия V. Так как универсальное накрывающее пространство многообразия V асферично в размерностях $\leqslant k-1$, гомоморфизм $\varphi^*\colon H^i(\pi_1(V), A) \to H^i(V, A)$ является изоморфизмом в размерностях $i \leqslant k-1$ (A — любая абелева группа, в которой действует группа $\pi_1(V)$). Введем обозначения:

$$\xi = \xi(1,\ \pi_1(V)) \in H^1(\pi_1(V),\ I)$$

— характеристический класс расслоения $\mathfrak{A}_\omega(G)$, $x = \varphi^*\xi$ — характеристический класс универсального накрытия многообразия V.

Применяя предложение 32 и пользуясь тем, что гомоморфизм φ^* является изоморфизмом в размерностях $\leqslant k-1$, убеждаемся, что любой класс когомологий $z \in H^i(V, A)$ $(i \leqslant k-1)$ представим в виде образа класса $x^i \in H^i(V, I \otimes \ldots \otimes I)$ при гомоморфизме $H^i(V, I \otimes \ldots \otimes I) \to H^i(V, A)$, индуцируемом некоторым гомоморфизмом групп коэффициентов

$$I \otimes \ldots \otimes I \to A.$$

Пусть для некоторого s имеем $x^s \neq 0$. Докажем, что тогда либо $x^n \neq 0$, либо $s < n-k+1$. В самом деле, в силу теоремы двойственности Пуанкаре для локальных систем коэффициентов существует такой класс когомологий $y \in H^{n-s}(V, B)$ с коэффициентами в некоторой локальной системе B, что $x^s \cup y \neq 0$. Если $s \geqslant n-k+1$, то $n-s \leqslant k-1$, и следовательно, класс когомологий y получается из класса когомологий x^{n-s} с помощью некоторого гомоморфизма групп коэффициентов, поэтому $x^s \cup x^{n-s} = x^n \neq 0$.

В случае $x^n \neq 0$ имеем, очевидно,

$$\operatorname{cat}_1 V = n+1, \quad g(\pi_1(V)) \geqslant n+1.$$

Если $x^n = 0$, то обозначим через r число, для которого $x^r = 0$ и $x^{r-1} \neq 0$. По доказанному выше $r \leqslant n-k+1$ и, значит, в силу неравенства $k-1 \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ имеем $r \leqslant k-1$. Так как в размерностях $\leqslant k-1$ отображение φ^* является изоморфизмом, то $\xi^r = 0$ и $\xi^{r-1} \neq 0$, т. е. $r = h(\pi_1(V)) \leqslant n-k+1$, откуда заключаем, что $\operatorname{cat}_1(V) \geqslant h(\pi_1(V))$. Из соотношения $h(\pi_1(V)) = g(\pi_1(V))$ вытекает нужное нам неравенство

$$\operatorname{cat}_1 V \geqslant \min(g(\pi_1(V)),\ n+1);$$

особый случай $h(\pi_1(G)) = 2$, $g(\pi_1(V)) = 3$ исчерпывается ссылкой на следствие 2 теоремы 15.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, разберем отдельно случаи:

1) $\operatorname{cat}_1 V = n+1$,

2) $\operatorname{cat}_1 V = g(\pi_1(V)) \leqslant n-k+1$.

В первом случае в силу предложения 45

$$\operatorname{cat} V = \operatorname{cat}_1 V = n+1.$$

Во втором случае

$$\operatorname{cat} V \geqslant h(\pi_1(V)) + 1,$$

так как в силу теоремы двойственности Пуанкаре существует класс когомологий z, удовлетворяющий условию $x^{r-1} \cup z \neq 0$ (здесь $r = h(\pi_1(V))$ и, следовательно, $\operatorname{long} V \geqslant h(\pi_1(V))$). Для того чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что в условиях теоремы $\operatorname{cat}_1 V = \operatorname{cat}_{k-1} V$

и, значит,

$$\operatorname{cat} V \leqslant \operatorname{cat}_{k-1} V + \left[\frac{n}{k}\right] = \operatorname{cat}_1 V + 1.$$

Следствие (И. Берштейн). *Категория трехмерного многообразия V полностью определяется его фундаментальной группой. Именно, если многообразие односвязно, то* $\operatorname{cat} V=2$, $\operatorname{cat}_1 V=1$, *если* $\pi_1(V)$ — *свободная группа, то* $\operatorname{cat} V=3$, $\operatorname{cat}_1 V=2$, *если* $\pi_1(V)$ — *особая группа (т. е.* $h(\pi_1(V))=2$, $g(\pi_1(V))=3$), *то* $\operatorname{cat} V=\operatorname{cat}_1 V=3$, *во всех остальных случаях* $\operatorname{cat} V=\operatorname{cat}_1 V=4$.

Ни для какого трехмерного многообразия не может быть $h(\pi_1(V))=3$.

Отметим следующее утверждение, которое может быть получено из теоремы 8.

Теорема 23. *Пусть M — односвязное гладкое замкнутое многообразие размерности $2k+1$ $(k>1)$, двумерная группа гомологий которого является свободной циклической группой. Предположим, что* $\operatorname{cat}_2 M=k+1$. *Тогда в случае, когда k нечетно, двумерный штифелевский класс многообразия M не равен нулю, а в случае, когда k четно — равен нулю.*

Доказательство. Рассмотрим главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}(E, M, S^1, p)$ с базой M, группой которой является группа $S^1=SO(2)$, а характеристический класс равен фундаментальному классу когомологий пространства M. Легко видеть, что расслоение $p\colon E\to M$ убивает гомотопические группы пространства M в размерностях $\leqslant 2$ и, следовательно, по предложению 44, $\operatorname{cat}_2 M=g(\mathfrak{B})$.

Главное расслоение $\mathfrak{B}$ можно рассматривать как пучок сфер $\mathfrak{B}(E, M, S^1, SO(2), p)$ и применить к нему теорему 8.

Замечая, что $H^2(M)=Z$, $H^2(M; Z_2)=Z_2$, а двумерный штифелевский класс пучка сфер $\mathfrak{B}$, рассматриваемый как класс когомологий по модулю 2, равен единственному ненулевому элементу группы $H^2(M; Z_2)$, получаем из утверждения теоремы 8 нужное нам утверждение.

§ 6. Категория класса когомологий

Определение 22 (Фари [62]). Категорией класса когомологий $h\in H^n(X, A)$ пространства X (обозначаем $\operatorname{cat} h$) называется наименьшая мощность открытого покрытия $\beta=\{B_\lambda\}$ пространства X, на каждом из множеств которого элемент h высекает нулевой класс когомологий (т. е. для любого λ должно быть $i_\lambda h=0$, где $i_\lambda\colon B_\lambda\to X$ — отображение вложения).

Для того чтобы включить понятие категории класса когомологий в понятие рода расслоенного пространства, построим следующее расслоение $\mathfrak{B}_h$. Пусть $K(A, n)$ — пространство, все гомотопические группы которого, кроме n-мерной, тривиальны, а n-мерная изоморфна группе A, т. е. $\pi_i(K(A, n))=0$ при $i\neq n$, $\pi_n(K(A, n))=A$. (Такие пространства называются пространствами Эйленберга — Маклейна [72].) Выберем отображение $\varphi\colon X\to K(A, n)$, при котором характеристический класс $\xi\in H^n(K(A, n), A)$ пространства $K(A, n)$ переходит в класс h (т. е. $\varphi^*\xi=h$). Через $\mathfrak{B}_h(E_h, X, K(A, n-1), p)$ обозначаем расслоение, индуцированное над X отображением φ и серровским расслоением

$$\mathfrak{B}_{K(A, n)}=(E_a, K(A, n), \quad K(A, n-1), p)$$

над $K(A, n)$. Расслоение $\mathfrak{B}_h$ естественно назвать расслоением, убивающим класс когомологий h.

Предложение 51. *Если* $h \in H(X, A)$ — *класс когомологий полиэдра* X, *то* $\operatorname{cat} h = \operatorname{cat} \varphi = g(\mathfrak{B}_h)$.

Достаточно показать, что категория класса когомологий h равна категории отображения φ, так как равенство $\operatorname{cat} \varphi = g(\mathfrak{B}_h)$ вытекает из теоремы 19'. Соотношение $\operatorname{cat} h = \operatorname{cat} \varphi$ вытекает из следующего утверждения: если B — подполиэдр полиэдра X и $i: B \to X$ — отображение вложения, то $i^*h = 0$ тогда и только тогда, когда отображение φi: $B \to K(A, n)$ гомотопно нулю. Это утверждение справедливо в силу известной теоремы о классификации отображений в пространство $K(A, n)$ [25].

ГЛАВА VII

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПОНЯТИЯ РОДА РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Теорема о классификации главных расслоенных пространств

Укажем, каким образом результаты главы IV могут быть использованы для получения теоремы о классификации главных расслоенных пространств с базой, являющейся произвольным нормальным пространством [1]).

Определение 23. Главные расслоенные пространства $\mathfrak{B}_0(E_0, B, G, p_0)$ и $\mathfrak{B}_1(E_1, B, G, p_1)$ называются слабо эквивалентными, если существует такое главное расслоенное пространство $\mathfrak{B} = (E, B \times I, G, p)$ (I — отрезок $[0, 1]$), что можно найти допустимые гомеоморфизмы f_0: $E_0 \to E$ и f_1: $E_1 \to E$, удовлетворяющие условиям

$$pf_0(x) = (p_0(x), 0) \quad \text{и} \quad pf_1(x) = (p_1(x), 1).$$

Иначе говоря, главные расслоенные пространства слабо эквивалентны, если их можно соединить непрерывным семейством главных расслоенных пространств.

Предложение 52 (Хюбш [57]). *Если база B нормальна и паракомпактна, то главные расслоенные пространства* $\mathfrak{B}_0(E_0, B, G, p_0)$ *и* $\mathfrak{B}_1(E_1, B, G, p_1)$ *слабо эквивалентны.*

Пусть G — топологическая группа, τ — бесконечное кардинальное число, $B_\tau(G)$ — база построенного в главе IV расслоения $\mathfrak{A}_\tau(G)$, B — топологическое пространство. Каждому непрерывному отображению φ: $B \to B_\tau(G)$ поставим в соответствие главное расслоенное пространство $\mathfrak{B}_\varphi$, индуцированное отображением φ и расслоением $\mathfrak{A}_\tau(G)$.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 53. *Если отображения* φ_0: $B \to B_\tau(G)$ *и* φ_1: $B \to B_\tau(G)$ *гомотопны, то соответствующие им главные расслоенные пространства* $\mathfrak{B}_{\varphi_0}$ *и* $\mathfrak{B}_{\varphi_1}$ *слабо эквивалентны.*

Таким образом, мы построили отображение множества $\mathfrak{M}$ гомотопических классов отображений $B \to B_\tau(G)$ в множество $\mathfrak{N}$ классов слабой эквивалентности главных расслоенных пространств с базой B и группой G. Это отображение обозначим через α.

Из результатов главы IV вытекает классификационная теорема для главных расслоенных пространств с данной базой и данной группой.

Теорема 24. *Пусть B — нормальное пространство веса $\leqslant \tau$, G — топологическая группа. Тогда отображение α является взаимно*

[1]) Милнор [37] доказал теорему о классификации главных расслоений с произвольной группой G с базой, являющейся полиэдром. Известна также теорема о классификации главных расслоений с паракомпактной локально бикомпактной конечномерной базой и с компактной группой [30].

однозначным соответствием между множеством $\mathfrak{M}$ *гомотопических классов отображений* $B \to B_\tau(G)$ *и множеством* $\mathfrak{N}$ *классов слабой эквивалентности главных расслоенных пространств с базой* B *и группой* G.

Доказательство. Чтобы проверить утверждение теоремы, достаточно построить отображение $\beta\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, для которого отображения $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются тождественными преобразованиями. Заметим прежде всего, что справедливо следующее очевидное утверждение.

Предложение 54. *Если база* B *локально тривиального расслоенного пространства имеет вес* $\leqslant \tau$, *то* $g(\mathfrak{B}) \leqslant \tau$.

Пусть $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ — главное расслоенное пространство с базой B, $f\colon E \to A_\tau(G)$ — допустимое отображение главного расслоения $\mathfrak{B}$ в главное расслоение $\mathfrak{A}_\tau(G)$ (такое отображение существует в силу теоремы 9 и предложения 54), $\varphi\colon B \to B_\tau(G)$ — порождаемое отображением f отображение базы расслоения $\mathfrak{B}$ в базу расслоения $\mathfrak{A}_\tau(G)$, иначе говоря, — характеристическое отображение расслоения $\mathfrak{B}$ (см. гл. IV). В силу теоремы 10 два любых характеристических отображения расслоения $\mathfrak{B}$ гомотопны. Таким образом, каждому главному расслоенному пространству с базой B ставится в соответствие гомотопический класс отображений $B \to B_\tau(G)$. Легко убедиться, что слабо эквивалентным главным расслоенным пространствам $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ соответствует один и тот же гомотопический класс. В самом деле, расслоение $\mathfrak{B}(E, B \times I, G, p)$, существование которого утверждается в определении 23, можно допустимо отобразить в расслоение $\mathfrak{A}_\tau(G)$, так как вес $B \times I \leqslant \tau$, и характеристическое отображение этого расслоения $B \times I \to B_\tau(G)$ является гомотопией между характеристическими отображениями расслоений $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$.

Таким образом, мы построили отображение $\beta\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$. Для того чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно доказать, что отображения $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются тождественными преобразованиями. Это утверждение получается из следующего хорошо известного предложения: если $\varphi\colon B \to B'$ — отображение баз, индуцируемое допустимым отображением главного расслоения $\mathfrak{B}(E, B, G, p)$ в главное расслоение $\mathfrak{B}'(E', B', G, p')$, то главное расслоение $\mathfrak{B}$ эквивалентно расслоению, индуцируемому отображением φ и расслоением $\mathfrak{B}'$.

Рассмотрим сейчас случай, когда B — паракомпактное пространство. В этом случае, в силу предложения 52, множество классов слабой эквивалентности главных расслоенных пространств с базой B и группой G можно рассматривать как множество классов главных расслоений с базой B и группой G относительно обычной эквивалентности. Применяя вместо предложения 54 предложение 11, по которому локально тривиальное расслоенное пространство с паракомпактной базой имеет род, не превышающий ω (ω — счетная мощность), получаем с помощью точно таких же рассуждений, как при доказательстве теоремы 24, следующее утверждение.

Теорема 24′. *Пусть* B — *паракомпактное пространство,* G — *топологическая группа. Тогда отображение* α *является взаимно однозначным соответствием между множеством* $\mathfrak{M}$ *гомотопических классов отображений* $B \to B_\omega(G)$ (ω — *счетная мощность*) *и множеством* $\mathfrak{N}$ *классов эквивалентных главных расслоенных пространств с базой* B *и группой* G.

§ 2. Проблема вложения

Говорят, что пространство K можно вложить в пространство L, если пространство K гомеоморфно подмножеству пространства L. С помощью понятия рода можно построить инварианты, позволяющие в некоторых случаях устанавливать невозможность вложения одного пространства в другое.

Пусть K — топологическое пространство, p — простое число, $K^p = K\times\ldots\times K$ — произведение p экземпляров пространства K, $t\colon K^p \to K^p$ — преобразование периода p, определяемое формулой $t(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_2, \ldots, x_p, x_1)$, $Z_p(K)$ есть p-я циклическая степень пространства K, т. е. пространство, получающееся из K^p отождествлением точек, эквивалентных относительно преобразования t, $\pi\colon K^p \to Z_p(K)$ — естественная проекция, $d\colon K \to K^p$ — диагональное вложение $d(x) = (x, \ldots, x)$, $d' = \pi d$.

Очевидно, что в пространстве $K^p \setminus d(K)$ преобразования $t, t^2, \ldots, t^{p-1}$ не имеют неподвижных точек, поэтому можно говорить о роде пространства $K^p \setminus d(K)$ относительно преобразования t или, другими словами, о роде накрытия $\pi\colon K^p \setminus d(K) \to Z_p(K) \setminus d'(K)$.

Будем обозначать род (гомологический род) пространства $K^p \setminus d(K)$ относительно преобразования t через $g_p(K)$ (соответственно $h_p(K)$ и $h'_p(K)$):

$$g_p(K) = g(K^p \setminus d(K),\ t),$$
$$h_p(K) = h(K^p \setminus d(K),\ t),$$
$$h'_p(K) = h'(K^p \setminus d(K),\ t).$$

Очевидно, что числа $g_p(K)$, $h_p(K)$, $h'_p(K)$ являются топологическими инвариантами пространства K. Имеют место неравенства

$$g_p(K) \geqslant h_p(K) \geqslant h'_p(K).$$

Предложение 55. *Если пространство K можно вложить в пространство L, то*

$$g_p(K) \leqslant g_p(L),$$
$$h_p(K) \leqslant h_p(L),$$
$$h'_p(K) \leqslant h'_p(L).$$

В самом деле, вложение $i\colon K \to L$ порождает допустимое (т. е. коммутирующее с преобразованием t) отображение $j\colon K^p \setminus d(K) \to L^p \setminus d(L)$ по формуле

$$j(x_1, \ldots, x_p) = (i(x_1), \ldots, i(x_p)),$$

а при допустимом отображении род (гомологический род; слабый гомологический род) не увеличивается.

Предложение 55'. *Если пространство K можно вложить в n-мерное евклидово пространство E^n, то*

$$h'_p(K) \leqslant h_p(K) \leqslant g_p(K) \leqslant n(p-1).$$

В силу предложения 55 достаточно показать, что

$$g_p(E^n) = h_p(E^n) = h'_p(E^n) = n(p-1).$$

Выделим в пространстве $(E^n)^p \setminus d(E^n)$ подмножество S, гомеоморфное $(np-n-1)$-мерной сфере S^{np-n-1}, уравнениями

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p = 0, \quad \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_p\|^2 = 1$$

(точку пространства $(E^n)^p$ задаем строчкой $(x_1, \ldots, x_p)$, где $x_i \in E^n$, через $\|x_i\|$ обозначаем длину вектора x_i). Множество S инвариантно относительно преобразования $t\colon (E^n)^p \to (E^n)^p$. В силу теоремы 5 и следствия 2 теоремы 17 имеем

$$h'(S,\ t)=h(S,\ t)=g(S,\ t)=n(p-1).$$

Для того чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что пространство $(E^n)^p \setminus d(E^n)$ можно стянуть в множество S с помощью деформации, коммутирующей с преобразованием t и оставляющей на месте множество S. Такая деформация может быть определена формулами

$$\varphi_t(x_1,\ldots,x_n)=\left(x_1-\frac{2t}{p}\sum_{i=1}^{p}x_i,\ \ldots,\ x_p-\frac{2t}{p}\sum_{i=1}^{p}x_i\right) \quad \text{при } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},$$

$$\varphi_t(x_1,\ldots,x_n)=\left(\frac{y_1}{(2t-1)\|y\|+2-2t},\ \ldots,\ \frac{y_p}{(2t-1)\|y\|+2-2t}\right) \text{при } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.$$

Через $y=(y_1,\ldots,y_n)$ обозначен вектор $\varphi_{\frac{1}{2}}(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, длина вектора y определяется равенством $\|y\|^2=\|y_1\|^2+\ldots+\|y_p\|^2$.

Идея использовать пространство $K^p \setminus d(K)$ и преобразование t в нем для изучения возможности вложения одного пространства в другое принадлежит У Вень-цзюню [54] (в неявной форме пространство $K^2 \setminus d(K)$ было использовано ранее с той же целью Ван Кампеном [81]).

У Вень-цзюнь пользовался инвариантом $h'_p(K)$, а также несколько более сильным инвариантом $I_p(K)$, связанным с рассматриваемыми нами инвариантами неравенствами: $h'_p(K)\leqslant I_p(K)\leqslant h_p(K)$, $I_p(K)\leqslant h'_p(K)+1$.

Он показал, в частности, что *из условия* $h'_2(K)\leqslant n$, *необходимого для вложимости полиэдра K в n-мерное евклидово пространство E^n, вытекают полученные ранее Уитнеем* [61] *и Томом* [50] *условия вложимости.*

Уитней показал, что для дифференцируемой вложимости m-мерного гладкого многообразия K в пространство E^n необходимо выполнение условия $\bar{w}_k=0$, $k\geqslant n-m$, где $\bar{w}_k$ — дуальные штифелевские классы [1]).

Том дал следующее условие: для того чтобы компакт K можно было вложить в евклидово пространство E^n, необходимо, чтобы для любого k-мерного класса гомологий $x\in H_k(K;\ Z_2)$ при $r\geqslant n-k$ выполнялось соотношение $Sm_r x=0$, где $Sm_r: H_k(K;\ Z_2)\to H_{k-r}(K;\ Z_2)$ — операции, выражающиеся через стинродовские степени и названные У Вень-цзюнем операциями Смита [2]). У Вень-цзюнь (и вслед за ним

---

[1]) Дуальными или нормальными штифелевскими классами многообразия называются штифелевские классы $\bar{w}_i$ нормального пучка многообразия K при каком-либо гладком вложении многообразия K в евклидово пространство. Дуальные штифелевские классы $\bar{w}_i$ являются топологическими (даже гомотопическими) инвариантами многообразия K и связаны со штифелевскими классами многообразия K соотношениями $\sum_{i=0}^{r} w_i\bar{w}_{r-i}=0$.

[2]) Операции $Sm_i^{(p)}: H_k(K;\ Z_p)\to H_{k-i}(K;\ Z_p)$ и двойственные им операции $Sm_{(p)}^i: H(K,\ Z_p)\to H^{k+i}(K;\ Z_p)$ были определены У Вень-цзюнем [53] и Томом [50], [49]. (Том употреблял обозначения $Sm_i^{(p)}=\vartheta_i^p$; $Sm_{(p)}^i=Q_p^i$.) Операции $Sm_{(p)}^i$ связаны со стинродовскими степенями $St_p^i: H^k(K;\ Z_p)\to H^{k+i}(K;\ Z_p)$ соотношениями $Sm_{(p)}^0 St_p^0=1$, $\sum_{j=0}^{k} Sm_{(p)}^{k-j} St_p^j=0$ при $p=2$, $k>0$, и при $p>2$, k — нечетном, $\sum_{j=0}^{k} Sm_{(p)}^{2k-2j} St_p^{2j}=0$ при $p>2$, $k>0$. Мы будем в дальнейшем опускать индекс p в обозначениях смитовских операций и стинродовских степеней и писать просто Sm_i, Sm^i, St^i.

Шапиро [58]) дал необходимое и достаточное условие для вложимости n-мерного полиэдра в E^{2n}. В терминах, принятых в настоящей работе, это условие может быть сформулировано следующим образом.

Для того чтобы n-мерный полиэдр K $(n \neq 2)$ можно было вложить в евклидово пространство E^{2n}, необходимо и достаточно выполнение неравенства $h_2(K) \leqslant 2n$.

В этом условии неравенство $h_2(K) \leqslant 2n$ можно заменить неравенством $g_2(K) \leqslant 2n$. (В силу предложения 55 условие $g_2(K) \leqslant 2n$ необходимо. Достаточность следует из неравенства $h_2(K) \leqslant g_2(K)$.) Замечание о возможности замены в теореме У Вень-цзюня неравенства $h_2(K) \leqslant 2n$ неравенством $g_2(K) \leqslant 2n$ впервые опубликовал Ганя.

Числа $g_p(K)$, $h_p(K)$, $h'_p(K)$ не являются гомотопическими инвариантами пространства K (достаточно заметить, что все евклидовы пространства E^n гомотопически эквивалентны друг другу и $g_p(E^n) = h_p(E^n) = h'_p(E^n) = n(p-1)$).

Оказывается, однако, что для двух гомотопически эквивалентных замкнутых многообразий K и L

$$h_p(K) = h_p(L) \quad \text{и} \quad h'_p(K) = h'_p(L).$$

Мы покажем далее, каким образом число $h'_p(K)$ в случае, когда K — замкнутое многообразие, ориентируемое, если $p \neq 2$, выражается через операции Смита в многообразии K; а в случае, когда K — гладкое замкнутое многообразие, как число $h'_2(K)$ выражается через дуальные штифелевские классы многообразия K. Выражение чисел $h'_p(K)$ при $p=2$ через операции Смита и дуальные штифелевские классы одновременно и независимо получил У Цзень-те [59].

Из полученных формул для числа $h'_2(K)$ следует, что для замкнутых многообразий условие вложимости $h'_2(K) \leqslant n$ многообразия K в E^n, принадлежащее У Вень-цзюню, эквивалентно условиям вложимости Тома и Уитнея.

Остается открытым вопрос: существуют ли гомотопически эквивалентные замкнутые многообразия K и L, для которых $g_p(K) \neq g_p(L)$? Положительный ответ представлял бы существенный интерес, так как в настоящее время известно весьма мало топологических, но не гомотопических инвариантов замкнутых многообразий. Этот вопрос не является простым, так как вычисление инвариантов $g_p(K)$ для конкретных многообразий представляет значительные трудности, поэтому было бы интересно решить сначала следующую более простую задачу: построить замкнутое многообразие K, для которого $g_p(K) \neq h_p(K)$.

Покажем сейчас, каким образом инвариант $h'_p(K)$ выражается через операции Смита (а следовательно, и через приведенные степени Стинрода) в многообразии K.

Теорема 25. *Пусть полиэдр K является n-мерным замкнутым многообразием, k — основной класс гомологий $\mathrm{mod}\, 2$ многообразия K. Тогда число $h'_2(K)$ равно наибольшему из чисел m, для которых $Sm_{m-n-1}(k) \neq 0$.*

Теорема 25'. *Пусть полиэдр K является n-мерным замкнутым ориентируемым многообразием, p — нечетное простое число, k — основной класс гомологий $\mathrm{mod}\, p$ многообразия K. Тогда число $h'_p(K)$ равно наибольшему из нечетных чисел m, для которых $Sm_{m-(p-1)n-1}(k) \neq 0$.*

Прежде, чем доказывать теоремы 25 и 25', сформулируем некоторые утверждения о группах когомологий $H(Z_p(K), d'(K); Z_p)$. Пусть

$$s^*\colon H^i(K^p; Z_p) \to H^i(Z_p(K), d'(K); Z_p)$$

— гомоморфизм, обозначенный в [38] через φ_0^*,

$$\delta^*\colon H^i(K;\ Z_p) \to H^{i+1}(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$$

— гомоморфизм, получающийся при помощи суперпозиции изоморфизма $(d'^*)^{-1}\colon H^i(K;\ Z_p) \to H^i(d'(K);\ Z_p)$ и кограничного гомоморфизма пары $(Z_p(K),\ d'(K))$,

$$E_\alpha\colon H^i(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p) \to H^{i+\alpha}(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$$

— гомоморфизм, о котором шла речь в § 3 гл. V. Известно, что любой класс когомологий $x \in H^i(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$ может быть представлен в виде $x \in s^*u + E_\alpha\delta^*v$, где $u \in H^i(K^p;\ Z_p)$, $v \in H^{i-\alpha-1}(K;\ Z_p)$. Отображение $E_\alpha\delta^*\colon H^q(K;\ Z_p) \to H^{q+\alpha}(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant (p-1)q-1$ является мономорфизмом. Обозначим через a основной класс когомологий многообразия K. Тогда класс

$$r = E_{(p-1)\,n-1}\delta^* St^0 a \in H^{np}(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$$

не равен нулю, так как отображение

$$E_{(p-1)(n-1)}\delta^*\colon H^n(K;\ Z_p) \to H^{np}(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$$

является мономорфизмом, и следовательно, класс когомологий r является образующим элементом группы

$$H^{np}(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p) = Z_p.$$

Имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{\alpha=0}^{(p-1)q} E_\alpha\delta^* St^{(p-1)q-\alpha} u = 0 \qquad (p \geqslant 2)$$

(u — произвольный элемент группы $H^q(K;\ Z_p)$, через St^k обозначаются приведенные степени Стинрода).

Из изложенных только что сведений о группах когомологий $H^i(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$ нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 8. *Для любого элемента $u \in H^q(K;\ Z_p)$ и любого элемента $v \in H^q(K^p;\ Z_p)$ имеют место соотношения*

$$E_{np-q-1}\delta^* u = \langle Sm^{n-q}u,\ k\rangle\, r \qquad (u \in H^q(K;\ Z_p)),$$
$$E_{np-q} s^* v = -\varepsilon_{p,\,np-q}\langle Sm^{n-q}v,\ k\rangle\, r \qquad (v \in H^q(K^p;\ Z_p)).$$

(Через $\varepsilon_{p,\,m}$ здесь обозначается функция, определенная в § 4 гл. V: $\varepsilon_{p,\,m} = 0$, если p и m нечетны, $\varepsilon_{p,\,m} = 1$ в остальных случаях.)

Докажем прежде всего соотношение

$$E_{np-q-1}\delta^* u = \langle Sm^{n-q}u,\ k\rangle\, r.$$

Заметим, что мы можем написать

$$E_{np-q-1}\delta^* u = f(u)\, r,$$

где $f(u)$ — класс вычетов по модулю p, зависящий от u. В самом деле, $E_{np-q-1}\delta^* u \in H^{np}(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$, а класс $r = E_{np-q-1}\delta^* St^0 a$ является образующим элементом группы $H^{np}(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$. По самому определению класса r, $f(St^0 a) = 1$ и, значит, $f(u) = \langle Sm^0 u,\ k\rangle$ для любого

$u \in H^n(K;\ Z_p)$. (Мы воспользовались здесь соотношением $Sm^0St^0=1$.) Применяя к соотношению

$$\sum_{\alpha=0}^{(p-1)q} E_\alpha\delta^*St^{(p-1)q-\alpha}u=0 \qquad (u\in H^q(K;\ Z_p),\ p\geqslant 2)$$

гомоморфизм $E_{np-qp-1}$ и пользуясь тем, что $E_i\cdot E_j=\varepsilon_{p,\,ij}E_{i+j}$, получаем

$$f(St^0u)+f(St^1u)+\ldots+f(St^{(p-1)q}u)=0$$

при $p=2$, а также при $p>2$ и $n-q$ нечетном,

$$f(St^0u)+f(St^2u)+f(St^4u)+\ldots+f(St^{(p-1)q}u)=0$$

при $p>2$ и четном $n-q$.

Написанные только что соотношения вместе с известным нам соотношением $f(u)=\langle Sm^0u,\ k\rangle$, если $u\in H^n(K;\ Z_p)$, полностью определяют функцию $f(u)$. В самом деле, пусть уже доказано, что известные нам соотношения определяют функцию $f(u)$ для $u\in H^{n-l}(K;\ Z_p)$, где $l<k$.

Из выведенных нами соотношений можно определить $f(St^0u)$, где $u\in H^{n-k}(K;\ Z_p)$ (так как числа $f(St^iu)$ при $i>0$ нам уже известны). Но $f(St^0u)=f(\lambda_{p,q}u)=\lambda_{p,q}f(u)$, где $\lambda_{p,q}\neq 0$, и следовательно, мы можем определить также $f(u)$.

Для того чтобы завершить вычисление функции $f(u)$, достаточно показать, что функция $f(u)=\langle Sm^{n-q}u,\ k\rangle$, где $u\in H^q(K;\ Z_p)$ удовлетворяет соотношениям $f(u)=\langle Sm^0u,\ k\rangle$, если $u\in H^n(K;\ Z_p)$; $f(St^0u)+f(St^1u)+\ldots+f(St^{(p-1)q}u)=0$ при $p=2$, а также при $p>2$ и нечетном $n-q$; $f(St^0u)+f(St^2u)+\ldots+f(St^{(p-1)q}u)=0$ при $p>2$ и четном $n-q$. Но это непосредственно вытекает из соотношений

$$Sm^kSt^0+Sm^{k-1}St^1+\ldots+Sm^0St^k=0$$

при $k>0$, если $p=2$ или $p>2$, k нечетно;

$$Sm^{2k}St^0+Sm^{2k-2}St^2+\ldots+Sm^0St^{2k}=0$$

при $k>0$ и $p>2$, связывающих операции Смита с приведенными степенями Стинрода [53].

Из доказанного только что соотношения

$$E_{np-q-1}\delta^*u=\langle Sm^{n-q}u,\ k\rangle\, r$$

вытекает в силу формулы

$$E_\alpha s^*=-\varepsilon_{p,\,\alpha}\cdot E_{\alpha-1}\delta^*d^*$$

второе нужное нам соотношение

$$E_{np-q}s^*u=-\varepsilon_{p,np-q}E_{np-q-1}\delta^*d^*u=-\varepsilon_{p,\,np-q}\langle Sm^{n-q}d^*u,\ k\rangle\, r.$$

Из леммы 8 и предложения 40 можно вывести теоремы 25 и 25′. Для этого рассмотрим функции $F_p^m(u)$ и $G_p^m(v)$, определенные, если $u\in H^{np-m}(K^p;\ Z_p)$, $v\in H^k(K;\ Z_p)$, $k<np-q$, и принимающие значения в Z_p:

$$E_ms^*u=F_p^m(u)\cdot E_{n(p-1)-1}\delta^*St^0a=F_p^m(u)\cdot r,$$

$$E_m(E_{np-m-k-1}\delta^*v)=G_p^m(v)\cdot E_{n(p-1)-1}\delta^*St^0a=G_p^m(v)\cdot r.$$

Пусть $\mu[\nu]$ — наибольшее из чисел, для которых существует элемент $u\in H^{np-\mu+1}(K^p;\ Z_p)\,[v\in H^k(K;\ Z_p),\ k<np-\nu+1]$, удовлетворяющий

условию $F_p^{\mu-1}(u) \neq 0$ $[G_p^{\nu-1}(v) \neq 0]$. Из приведенного выше описания групп когомологий H $(Z_p(K), d'(K); Z_p)$ и предложения 40 вытекает, что число $h'_p(K)$ равно наибольшему из чисел μ и ν.

Из леммы 8 сразу следует, что функции $F_p^m(u)$ и $G_p^m(v)$ могут быть выражены через смитовские операции формулами

$$F_p^m(u) \cdot a = -\varepsilon_{p,\,m} Sm^{m-n(p-1)} d^*u,$$

$$G_p^m(v) \cdot a = \varepsilon_{p,\,m(n+k+1)} Sm^{m-k} v.$$

В случае $p=2$ из этих формул ясно, что μ можно определить как наибольшее из чисел, для которых существует элемент $z \in H^{2n-\mu+1}(K; Z_2)$, удовлетворяющий условию $Sm^{\mu-n-1}z \neq 0$, и что $\nu = \mu - 1$.

Таким образом, $h'_2(K) = \mu$, что в силу приведенного выше выражения числа μ через смитовские операции дает утверждение теоремы 25 (следует использовать то, что отображения

$$Sm^{\mu-n-1} : H^{2n-\mu+1}(K; Z_2) \to H^n(K; Z_2)$$

и

$$Sm_{\mu-n-1} : H_n(K; Z_2) \to H_{2n-\mu+1}(K; Z_2)$$

являются сопряженными гомоморфизмами).

В случае $p > 2$ те же формулы показывают, что число μ можно определить как наибольшее из нечетных чисел, для которых существует элемент $z \in H^{np-\mu+1}(K; Z_p)$, удовлетворяющий условию $Sm^{\mu-1-n(p-1)}z \neq 0$, а число ν — как наибольшее из чисел, для которых можно найти элемент $v \in H^{np-\nu}(K, Z_p)$, удовлетворяющий условию $Sm^{\nu-n(p-1)}v \neq 0$. Заметим, что $\mu \geqslant \nu$. В самом деле, если число ν четно, то $\mu = \nu + 1$, если число ν нечетно, то $Sm^{\nu-n(p-1)}v = -Sm^{\nu-1-n(p-1)}\, Sm^1 v \neq 0$ и, значит, $\mu = \nu$. Таким образом, $h'_p(K) = \mu$. Используя описание числа μ через смитовские операции и тот факт, что отображения

$$Sm^{\mu-1-n(p-1)} : H^{np-\mu+1}(K; Z_p) \to H^n(K; Z_p)$$

и

$$Sm_{\mu-1-n(p-1)} : H_n(K; Z_p) \to H_{np-\mu+1}(K; Z_p)$$

являются сопряженными гомоморфизмами, получаем утверждение теоремы 25′.

Из теоремы 25′ вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 25″. *Пусть K является n-мерным замкнутым гладким многообразием, k — основной класс гомологий* mod 2 *многообразия K; $h'_2(K) = m$. Тогда* а) $Sm_{m-n-1}(k) \neq 0$, б) *для любого класса гомологий $x \in H_s(K; Z_2)$ имеем $Sm_j x = 0$, если $j \geqslant m - s$;* в) $\overline{w}_{m-n-1} \neq 0$, г) $\overline{w}_j = 0$ *при $j \geqslant m - n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение а) содержится в теореме 25. Утверждение б) доказано У Вень-цзюнем [54]. Утверждения в) и г) вытекают из теоремы 25 и из того, что класс когомологий $\overline{w}_j$ двойствен в смысле Пуанкаре классу гомологий $Sm_j k$ (Том [50], стр. 155).

Из теорем 25 и 25′ вытекает, что числа $h'_p(K)$ одинаковы у гомотопически эквивалентных замкнутых триангулируемых многообразий.

Перейдем к доказательству гомотопической инвариантности чисел $h_p(K)$ для замкнутых многообразий.

Предложение 56. *Если замкнутые триангулируемые многообразия K и L гомотопически эквивалентны, то $h_p(K) = h_p(L)$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу предложения 40 для замкнутого триангулируемого многообразия K число $h_p(K)$ может быть определено как наибольшее из чисел m, для которых можно найти класс когомологий $x \in H(Z_p(K), d'(K); A)$ (A — группа с операторами из Z_p), удовлетворяющий условию $\mu^{m-1}(x) \neq 0$. Отсюда следует, что для доказательства достаточно построить изоморфизм между группами $H(Z_p(K), d'(K); A)$ и $H(Z_p(L), d'(L); A)$, коммутирующий с гомоморфизмом μ.

Пусть $\varphi: K \to L$ — гомотопическая эквивалентность. Отображение $\psi: K^p \to L^p$, определяемое формулой $\psi(x_1, \ldots, x_p) = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_p))$, коммутирует с отображением t и переводит множество $d(K)$ в множество $d(L)$. Отсюда вытекает, что отображение ψ индуцирует отображение $\tilde{\psi}$ пары $(Z_p(K), d'(K))$ в пару $(Z_p(L), d'(L))$; нетрудно видеть, что порождаемый отображением $\tilde{\psi}$ гомоморфизм групп когомологий является изоморфизмом и коммутирует с гомоморфизмом μ.

§ 3. Регулярные отображения

Отображение $f: K \to L$ называется **регулярным**, если существует такое открытое покрытие $\alpha = \{A\}$ пространства K, что две любые точки пространства K, принадлежащие одному и тому же элементу покрытия α, переходят в различные точки пространства L (если $x, y \in A$, $x \neq y$, $A \in \alpha$, то $f(x) \neq f(y)$).

Слегка модифицируя конструкцию предыдущего параграфа, можно построить инварианты, позволяющие устанавливать невозможность регулярного отображения одного пространства в другое.

Обозначения K^p, $t: K^p \to K^p$, $Z_p(K)$, $\pi: K^p \to Z_p(K)$, $d: K \to K^p$, $d' = \pi d: K \to Z_p(K)$ будем понимать в том же смысле, что и в предыдущем параграфе.

Пусть U — окрестность множества $d(K)$ пространства K^p (окрестность диагонали произведения K^p). Если окрестность U инвариантна относительно преобразования t, то можно говорить о роде (гомологическом роде, слабом гомологическом роде) пространства $U \setminus d(K)$ относительно преобразования t.

Будем обозначать через $\bar{g}_p(K)$ ($\bar{h}_p(K)$, $\bar{h}'_p(K)$) наименьшее из чисел, равных роду (гомологическому роду, слабому гомологическому роду) множества $U \setminus d(K)$ относительно преобразования t, где U — некоторая инвариантная относительно преобразования t окрестность диагонали $d(K)$ произведения K^p:

$$\bar{g}_p(K) = \min_U g(U \setminus d(K), t),$$

$$\bar{h}_p(K) = \min_U h(U \setminus d(K), t),$$

$$\bar{h}'_p(K) = \min_U h'(U \setminus d(K), t).$$

Очевидно, что $\bar{h}'_p(K) \leqslant \bar{h}_p(K) \leqslant \bar{g}_p(K)$.

П р е д л о ж е н и е 57. *Если пространство K можно регулярно отобразить в пространство L, то*

$$\bar{g}_p(K) \leqslant \bar{g}_p(L),$$
$$\bar{h}_p(K) \leqslant \bar{h}_p(L),$$
$$\bar{h}'_p(K) \leqslant \bar{h}'_p(L).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f: K \to L$ — регулярное отображение, $\alpha = \{A\}$ — открытое покрытие пространства K, удовлетворяющее условию: если $x, y \in A$, $x \neq y$, $A \in \alpha$, то $f(x) \neq f(y)$. Построим окрестность U диагонали $d(K)$ произведения K^p, полагая, что $(x_1, \ldots, x_p) \in U$, если для любой пары индексов i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant p)$ найдется такой элемент A покрытия α, что $x_i \in A$, $x_j \in A$. Пусть V — инвариантная относительно преобразования t окрестность диагонали $d(L)$ произведения L^p, для которой $\bar{g}_p(L) = g(V \setminus d(L), t)$. Построим отображение $\psi: K^p \to L^p$ с помощью формулы $\psi(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_p)$ и рассмотрим множество $U \cap \psi^{-1}(V)$. Множество $U \cap \psi^{-1}(V)$ инвариантно относительно преобразования t и является окрестностью диагонали $d(K)$ произведения K^p, отображение ψ коммутирует с преобразованием t и переводит множество $U \cap \psi^{-1}(V) \setminus d(K)$ в множество $V \setminus d(L)$, поэтому $\bar{g}_p(K) \leqslant g(U \cap \psi^{-1}(V) \setminus d(K)) \leqslant g(V \setminus d(L)) = \bar{g}_p(L)$.

Доказательство неравенств $\bar{h}_p(K) \leqslant \bar{h}_p(L)$, $\bar{h}'_p(K) \leqslant \bar{h}'_p(L)$ происходит точно так же, только вместо теоремы о том, что род не понижается при допустимом отображении, нужно использовать соответствующий факт для гомологического рода и слабого гомологического рода.

П р е д л о ж е н и е 57′. *Если пространство K можно регулярно отобразить в евклидово пространство E^n, то*

$$\bar{h}'_p(K) \leqslant \bar{h}_p(K) \leqslant \bar{g}_p(K) \leqslant n(p-1).$$

Для доказательства достаточно проверить, что

$$\bar{h}'_p(E^n) = \bar{h}_p(E^n) = \bar{g}_p(E^n) = n(p-1).$$

Это можно сделать с помощью рассуждений, аналогичных доказательству предложения 55.

Описанная только что конструкция инвариантов, позволяющих устанавливать невозможность регулярного отображения одного пространства в другое, принадлежит У Вень-цзюню. У Вень-цзюнь пользовался инвариантом $\bar{h}'_p(K)$ и несколько более сильным инвариантом $J_p(K)$, связанным с рассматриваемыми нами инвариантами неравенствами $\bar{h}'_p(K) \leqslant J_p(K) \leqslant \bar{h}_p(K)$, $J_p(K) \leqslant \bar{h}'_p(K) + 1$. У Вень-цзюнь указал оценку инварианта $J_p(K) \leqslant \bar{h}'_p(K)$ с помощью операций Смита в пространстве K, а для гладких замкнутых многообразий — выражение инварианта $\bar{h}'_2(K)$ через дуальные штифелевские классы многообразия K [54].

На инварианты $\bar{h}'_p(K)$, $\bar{h}_p(K)$, $\bar{g}_p(K)$ могут быть перенесены результаты, полученные в предыдущем пункте для инвариантов $h'_p(K)$, $h_p(K)$, $g_p(K)$.

Числа $\bar{h}'_p(K)$, $\bar{h}_p(K)$, $\bar{g}_p(K)$ оказываются топологическими, но не гомотопическими инвариантами пространства K. Однако если K — замкнутое триангулируемое многообразие, то числа $\overline{h}'_p(K)$ и $\overline{h}_p(K)$ определяются гомотопическими свойствами многообразия K. Число $\overline{h}'_p(K)$ можно в этом случае выразить через операции Смита в многообразии K (при $p > 2$ в предположении, что многообразие K ориентируемо). Остается открытым вопрос: существуют ли гомотопически эквивалентные замкнутые многообразия K и L, для которых $g_p(K) \neq g_p(L)$?

Мы остановимся здесь только на выражении числа $\overline{h}'_p(K)$ через операции Смита.

Теорема 26. *Пусть K есть n-мерное замкнутое триангулируемое многообразие, ориентируемое, если $p > 2$ (p — простое число); k — основной класс гомологий $\operatorname{mod} p$ многообразия K. Тогда число $\overline{h}'_p(K)$ равно наибольшему из чисел s, для которых $Sm_{s-(p-1)n}(k) \neq 0$.*

Доказательство. Выберем такую инвариантную относительно преобразования t окрестность U диагонали $d(K)$ произведения K^p, что $\overline{h}'_p(K) = h'(U \setminus d(K),\ t)$ и существует инвариантная относительно t деформация множества U по себе в множество $d(K)$, оставляющая $d(K)$ на месте. Обозначим через $V = \pi(U)$ проекцию окрестности U в $Z_p(K)$, через $i\colon\ V \setminus d'(K) \to Z_p(K) \setminus d'(K)$ — отображение вложения, через $1 \in H^0(Z_p(K) \setminus d'(K);\ Z_p)$ [$\overline{1} \in H^0(V \setminus d'(K);\ Z_p)$] — единичный класс когомологий $\operatorname{mod} p$ пространства $Z_p(K) \setminus d'(K)$ [пространства $V \setminus d'(K)$], очевидно, $\overline{1} = i^*1$. Для того чтобы доказать теорему, достаточно проверить, что $E_s(\overline{1}) = 0$ тогда и только тогда, когда для любого $r > s$ имеем $Sm_{r-(p-1)n}(k) = 0$.

Заметим, что $E_s\overline{1} = i^*E_s1$ и, следовательно, из точной последовательности пары $(Z_p(K) \setminus d'(K),\ \ V \setminus d'(K)) \to H^s(Z_p(K),\ V;\ Z_p) \xrightarrow{j^*}$ $\xrightarrow{j^*} H^s(Z_p(K) \setminus d'(K);\ Z_p) \xrightarrow{i^*} H^s(V \setminus d'(K);\ Z_p)$ можно заключить, что $E_s(\overline{1}) = 0$ в том и только в том случае, когда $E_s1 = j^*x$, где $x \in H^s(Z_p(K),\ V;\ Z_p)$. Из условий, наложенных на окрестность U, вытекает, что $H^s(Z_p(K),\ V;\ Z_p) = H^s(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$, и мы можем утверждать, что $E_s\overline{1} = 0$ тогда и только тогда, когда существует элемент $x \in H^s(Z_p(K),\ d'(K); Z_p)$, удовлетворяющий условию $E_s1 = j^*x$, где j можно рассматривать как естественное отображение группы когомологий с компактными носителями многообразия $Z_p(K) \setminus d'(K)$ в обычную группу когомологий этого многообразия. Из закона двойственности Пуанкаре и соотношения $E_sU = U \cup E_s1$ вытекает, что $E_s1 = j^*x$ в том и только том случае, когда $E_sU = u \cup x$ для любого класса когомологий $u \in H^{np-s}(Z_p(K),\ d'(K); Z_p)$. Условия для существования такого элемента x нетрудно получить из известных фактов об алгебре когомологий $H(Z_p(K),\ d'(K); Z_p)$ и результатов предыдущего параграфа.

Напомним прежде всего, что всякий элемент $u \in H^{np-s}(Z_p(K), d'(K); Z_p)$ может быть представлен в виде $u = s^*a + E_\alpha\delta^*b$, где $a \in H^{np-s}(K^p;\ Z_p)$, $b \in H^{np-s-\alpha-1}(K;\ Z_p)$. Произведение классов когомологий $Z_p(K) \operatorname{mod} d'(K)$ определяется соотношениями $s^*a \cup E_\alpha\delta^*b = E_\alpha\delta^*b \cup E_\alpha\delta^*b' = 0$, $s^*a \cup s^*b = s^*(\sigma a \cup b)$, где $a \in H(K^p, Z_p)$, $b, b' \in H(K, Z_p)$, $\sigma\colon H(K^p;\ Z_p) \to H(K^p;\ Z_p)$ — гомоморфизм, определяемый формулой $\sigma = 1 + t^* + t^{*2} + \ldots + t^{*p-1}$.

Заметим, что из этих соотношений вытекает, что $u \cup (s^*a + E_\alpha\delta^*b) = u \cup s^*a$ для любого $u \in H(Z_p(K),\ d'(K);\ Z_p)$ и, следовательно, мы можем искать элемент x, удовлетворяющий условию $E_s1 = j^*x$ в виде $x = s^*a$, где $a \in H^s(K^p,\ Z_p)$.

Пусть $E_s\bar{1}=0$. Тогда $E_s 1=j^*x$, $x=s^*a\,(a\in H^s(K^p;Z_p))$. Из леммы 8 вытекает, что $E_\alpha\delta^*b\bigcup s^*a=E_{\alpha+s}\delta^*b=\langle Sm^{\alpha+s+1-n(p-1)}b,\,k\rangle r$, где $\alpha\geqslant 0$ при $p=2$ или s четном, α — четное число $\geqslant 0$ при $p>2$, s нечетном, b — произвольный элемент группы $H^{np-\alpha-s-1}(K;\,Z_p)$. С другой стороны, $E_\alpha\delta^*b\bigcup s^*a=0$. Таким образом, $Sm^{\alpha+s+1-n(p-1)}b=0$ для любого элемента $b\in H^{np-\alpha-s-1}(K;\,Z_p)$ и, значит, $Sm_{\alpha+s+1-n(p-1)}k=0$. Отсюда следует, что при условии $E_s(\bar{1})=0$ выполняются соотношения $Sm_{r-n(p-1)}k=0$ для $r>s$. (При $p=2$ и при $p>2$, s четном это уже доказано, при $p>2$, s нечетном следует воспользоваться тем, что $Sm_{2l+1}=-Sm_1Sm_{2l}$.)

Пусть для любого $r>s$ имеем $Sm_{r-n(p-1)}(k)=0$. Покажем, что тогда $E_s(\bar{1})=0$. Если $p>2$, s нечетно, то по теореме 25 заключаем, что $h'_p(K)\leqslant s$, т. е. $E_s(1)=0$ и, значит, $E_s(\bar{1})=0$. Рассмотрим случай, когда $p>2$, s четно или $p=2$. Мы должны показать, что существует элемент $a\in H^s(K;\,Z_p)$, удовлетворяющий условиям:

$$E_\alpha\delta^*b\bigcup s^*a=E_\alpha\delta^*b\bigcup E_s1=\langle Sm^{\alpha+s+1-n(p-1)}b,\,k\rangle r,$$

где $\alpha\geqslant 0$, $b\in H^{np-\alpha-s-1}(K;\,Z_p)$ и

$$s^*u\bigcup s^*a=s^*u\bigcup E_s1=-\langle Sm^{s-n(p-1)}d^*u,\,k\rangle,$$

где $u\in H^{np-s}(K^p;\,Z_p)$. Первое условие автоматически удовлетворяется, так как $E_\alpha\delta^*b\bigcup s^*a=0$ и

$$\langle Sm^{\alpha+s+1-n(p-1)}b,\,k\rangle=\langle b,\,Sm_{\alpha+s+1-n(p-1)},\,k\rangle=0.$$

Второе условие в силу соотношения $s^*u\bigcup s^*a=s^*(u\bigcup\sigma a)$ и соотношения $s^*(\lambda m)=r$, где m — основной класс когомологий многообразия K^p, может быть переписано в виде $u\bigcup\sigma a=-\lambda\langle Sm^{s-n(p-1)}d^*u,\,k\rangle m$. Так как функция $h(u)=-\lambda\langle Sm^{s-n(p-1)}d^*u,\,k\rangle$ является гомоморфизмом группы $H^{np-s}(K^p;\,Z_p)$ в группу Z_p, из законов двойственности Пуанкаре и Понтрягина вытекает, что существует единственный класс когомологий $w\in H^s(K^p;Z_p)$, удовлетворяющий условию $u\bigcup w=-\lambda\langle Sm^{s-n(p-1)}d^*u,k\rangle m$. Для того чтобы завершить доказательство, достаточно убедиться, что класс когомологий w может быть представлен в виде $w=\sigma a$. Из формулы Кюннета $H(K^p;\,Z_p)=H(K;\,Z_p)\otimes\ldots\otimes H(K;\,Z_p)$ вытекает, что это можно показать, проверив, что $t^*w=w$ и $(z\otimes\ldots\otimes z)\bigcup w=0$ для любого класса когомологий $z\in H(K;\,Z_p)$, если $s+p\cdot\dim z=np$. Соотношение $t^*w=w$ вытекает из того, что $d^*t^*u=d^*u$, и следовательно,

$$t^*u\bigcup w=-\lambda\langle Sm^{s-n(p-1)}d^*t^*u,\,k\rangle m=-\lambda\langle Sm^{s-n(p-1)}d^*u,\,k\rangle=u\bigcup w$$

для любого элемента $u\in H^{np-s}(K^p;\,Z_p)$. Соотношение $(z\otimes\ldots\otimes z)\bigcup w=0$ ($\dim z=l$, $s+pl=pn$) можно доказать, заметив, что $(z\otimes\ldots\otimes z)\bigcup w=-\lambda\langle Sm^{s-n(p-1)}z^p,\,k\rangle m=0$, так как $\langle Sm^{s-n(p-1)}z^p,\,k\rangle=$ $=\langle Sm^{s-n(p-1)}St^{l(p-1)}z,\quad k\rangle=-\sum\limits_{r>s}\langle Sm^{r-n(p-1)}St^{l(p-1)+s-r}z,\quad k\rangle=$ $=\sum\limits_{r>s}\langle St^{l(p-1)+s-r}z,\,Sm_{r-n(p-1)}\,k\rangle=0$. (Мы воспользовались здесь формулой $\sum\limits_{i=0}^{k}Sm^iSt^{k-i}=0\quad(k>0)$.)

Из теоремы 26 и теорем 25 и 25′ вытекает следующее утверждение.

Теорема 26′. *Пусть K — замкнутое триангулируемое многообразие, ориентируемое, если $p>2$ (p — простое число). Если число $h'_p(K)$ нечетно и $p>2$, то $\bar{h}'_p(K)=h'_p(K)$, в остальных случаях $\bar{h}'_p(K)=h'_p(K)-1$.*

§ 4. Структура непрерывных отображений

В последние годы появилось большое количество работ, в которых показывается, что при непрерывном отображении одного пространства в другое (чаще всего при отображении сферы в евклидово пространство) множество данного вида переходит в точку. Отметим, например, работы [17], [19], [20], [23], [24], [36], [74], [75].

По-видимому, первой из теорем этого типа была

Теорема 27 (Борсука — Улама [17]). *Непрерывное отображение n-мерной сферы S^n в n-мерное евклидово пространство E^n переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.*

Приведем также следующую теорему Какутани — Ямабе — Юдзёбо [24], [74].

Теорема 28. *Если действительная непрерывная функция f определена на $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1}, то можно найти n взаимно перпендикулярных радиусов этой сферы, на концах которых функция f принимает одно и то же значение.*

Отметим, что из теоремы 28 вытекает, что около каждого замкнутого ограниченного выпуклого множества в n-мерном евклидовом пространстве можно описать n-мерный куб.

Ряд общих теорем, охватывающих, в частности, сформулированные выше теоремы Борсука — Улама и Какутани — Ямабе — Юдзёбо и другие доказанные ранее предложения, содержится в работах Ян Чжун-дао [75].

Ян Чжун-дао определяет понятия B-индекса и индекса бикомпакта относительно действующей в нем без неподвижных точек инволюции и показывает, что с помощью этих понятий можно получить для отображений пространств, в которых действует инволюция, ряд теорем, обобщающих и существенно усиливающих многие теоремы, известные ранее для отображения сфер.

Введенные Ян Чжун-дао понятия B-индекса и индекса пространства относительно инволюции содержатся в понятиях, определенных в настоящей работе. Именно B-индекс (индекс) бикомпакта относительно действующей в нем без неподвижных точек инволюции на единицу меньше рода (слабого гомологического рода) этого бикомпакта относительно инволюции.

Сформулируем некоторые из теорем, полученных Ян Чжун-дао; пользуясь принятой в настоящей работе терминологией.

Y1. *Пусть в бикомпакте X действует без неподвижных точек инволюция T. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) $g(X, T) \geqslant n+1$,

б) *для любого непрерывного отображения f бикомпакта X в евклидово пространство E^n найдется такая точка $x \in X$, что $f(x)=f(Tx)$,*

в) *не существует отображения пространства X в сферу S^{n-1}, переводящего любую пару точек x, Tx в диаметрально противоположные точки сферы.*

Y2. *Пусть в бикомпакте X действует без неподвижных точек инволюция T, f — отображение пространства X в k-мерное евклидово пространство E^k, X_k — множество точек пространства X, удовлетворяющих условию $f(x)=f(Tx)$. Тогда*

$$g(X_k, T) \geqslant g(X, T)-k,$$
$$h'(X_k, T) \geqslant h'(X, T)-k.$$

Y3. *Если в бикомпакте X действует без неподвижных точек инволюция T, то*

$$h'(X, T) \leqslant h(X, T) \leqslant \dim X + 1.$$

Y4. *Пусть X — бикомпакт с инволюцией T, не имеющей неподвижных точек, E и F — два замкнутых подмножества произведения $X \times X$ такие, что утверждения $(x, y) \in E$, $(y, x) \in E$, $(Tx, y) \in F$, $(x, Ty) \in F$ эквивалентны, $E \bigcup F = X \times X$ и $(x, x) \in E \setminus F$ (x и y — произвольные точки пространства X). Если f — отображение пространства X в k-мерное евклидово пространство E^k и $g(X, T) \geqslant nk + k$, то существуют такие точки $x_1, \ldots, x_n \in X$, что $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n) = f(Tx_1) = f(Tx_2) = \ldots = f(Tx_n)$ и $(x_i, x_j) \in E \bigcap F$ при $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Последнее утверждение может быть применено, например, в случае, когда $X = S^{nk+k}$ есть $(nk+k)$-мерная сфера $(x, y) \in E$ $[(x, y) \in F]$, если радиус-векторы точек x и y образуют угол $\leqslant \frac{\pi}{2}$ $\left[\geqslant \frac{\pi}{2}\right]$. В этом случае условие $(x, y) \in E \bigcap F$ обозначает, что радиус-векторы точек x и y ортогональны.

Укажем сейчас обобщения некоторых из результатов Ян Чжун-дао на случай, когда пространство X, в котором действует периодическое преобразование, отображается в пространство Y (не обязательно в евклидово пространство). (Отметим, что обобщением одного из утверждений теоремы Y3 является теорема 5, а эквивалентность условий а) и в) теоремы Y1 вытекает из теоремы 14.)

Предложение 58. *Пусть в пространствах X и Y действует конечная группа G, причем в пространстве X группа G действует без неподвижных точек, а U — такое замкнутое подмножество пространства Y, инвариантное относительно группы G, что в $Y \setminus U$ группа G действует без неподвижных точек. Тогда для любого отображения $f: X \to Y$ пространства X в пространство Y, коммутирующего с преобразованиями группы G, имеем $g(f^{-1}(U), G) \geqslant g(X, G) - g(Y \setminus U, G)$.*

(Множество $f^{-1}(U)$ инвариантно относительно группы G, поэтому можно говорить о его роде.)

Для доказательства достаточно заметить, что

$$g(X \setminus f^{-1}(U), G) \leqslant g(Y \setminus U, G).$$

Применяя предложение 3, убеждаемся, что для любой окрестности V множества $f^{-1}(U)$, инвариантной относительно группы G, $g(X, Y) \leqslant \leqslant g(Y \setminus U, G) + g(V, G)$.

Для того чтобы завершить доказательство, достаточно сослаться на следующее почти очевидное утверждение.

Лемма 9. *Если в пространстве X действует без неподвижных точек конечная группа G, а Z — замкнутое подмножество пространства X, переходящее в себя при преобразованиях группы G, то у множества Z существует такая инвариантная относительно группы G окрестность V, что*

$$g(Z, Y) = g(V, G).$$

Теорема 29. *Пусть в пространстве X действует без неподвижных точек преобразование T периода p (p — простое число), $f: X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X в пространство Y, Z — множество точек $x \in X$, удовлетворяющих условию*

$$f(x) = f(Tx) = f(T^2x) = \ldots = f(T^{p-1}x).$$

Тогда

$$g(Z, T) \geqslant g(X, T) - g_p(Y).$$

(Множество Z инвариантно относительно преобразования T, поэтому можно говорить о роде множества Z. Через $g_p(Y)$, как и в § 2, обозначается род пространства $Y^p \setminus d(Y)$ относительно периодического преобразования t (здесь $t(y_1, \ldots, y_p) = (y_2, \ldots, y_p, y_1)$).)

Доказательство. Рассмотрим отображение $p: X \to Y^p$, определенное формулой $p(x) = (f(x), f(Tx), \ldots, f(T^{p-1}(x)))$, и применим к этому отображению предложение 58, приняв за множество U, фигурирующее в этом предложении, множество $d(Y)$. (Считаем, что в пространстве X действует группа, порожденная преобразованием T, а в пространстве Y^p действует группа, порожденная преобразованием t. Предложение 58 применимо, так как $p(Tx) = tp(x)$.) Мы получаем, что

$$g(p^{-1}d(Y)) \geqslant g(X, T) - g(Y^p \setminus d(Y), t).$$

Так как $p^{-1}d(Y) = Z$, а $g(Y^p \setminus d(Y), t) = g_p(Y)$, то доказанное неравенство равносильно утверждению теоремы.

Следствие. *Если в условиях теоремы* 29 *пространство* Y *является* k*-мерным евклидовым пространством* E^k, *то* $g(Z, T) \geqslant g(X, T) - k(p-1)$.

В самом деле, в § 2 было доказано, что $g_p(E^k) = k(p-1)$ (см. доказательство предложения 55).

Замечание. Если пространство X является бикомпактом, то в предложении 58 и теореме 29 можно говорить не о роде, а о гомологическом роде, определяя гомологический род с помощью групп когомологий в смысле Александера — Спаньера.

Точнее говоря, можно утверждать, что в условиях предложения 58

$$h(f^{-1}(U), G) \geqslant h(X, G) - h(Y \setminus U, G),$$

а в условиях теоремы 29

$$h(Z, T) \geqslant h(X, T) - h_p(Y).$$

Для того чтобы убедиться в этом, нужно повторить доказательство предложения 58 и теоремы 29, заменив ссылку на предложение 5 ссылкой на предложение 36. (Аналог леммы 8 для гомологического рода вытекает из непрерывности теории групп когомологий в смысле Александера — Спаньера.)

Теорема 30. *Пусть* X — *пространство, в котором действует без неподвижных точек преобразование* T *периода* p (p — *простое число*), E^n — n*-мерное евклидово пространство.*

Следующие утверждения эквивалентны:

а) $g(X, T) > np - n$,

б) *при всяком непрерывном отображении* f *пространства* X *в пространство* E^n *найдется точка* $x \in X$, *удовлетворяющая условию*

$$f(x) = f(Tx) = \ldots = f(T^{p-1}x).$$

Доказательство. В силу следствия теоремы 29 из утверждения а) вытекает утверждение б). Покажем, что верно и обратное. Пусть $g(X, T) \leqslant np - n$. Выделим в пространстве $(E^n)^p$ множество S, гомеоморфное сфере S^{np-n-1}, уравнениями $x_1 + \ldots + x_p = 0$, $\|x_1\|^2 + \ldots + \|x_p\|^2 = 1$ (точки пространства $(E^n)^p$ задаем строчками $x_1, \ldots, x_p$, где $x_i \in E^n$, $\|x_i\|$ — длина вектора x_i). Множество S инвариантно относительно преобразования t. По теореме 15 существует отображение $\psi: X \to S$, удовлетворяющее условию $\psi T = t\psi$. Определим отображение $\pi : S \to E^n$ следующим образом: если $x=(x_1, \ldots, x_p) \in S$, то $\pi(x)=x_1$. Легко видеть, что для отображения $f=\pi\psi : X \to E^n$ нельзя найти точки $x \in X$, удовлетворяющей условию $f(x) = f(Tx) = \ldots = f(T^{p-1}x)$. Таким образом, из утверждения б) вытекает утверждение а).

Предложение 58 и следствие теоремы 29 при $p=2$, теорему 30 при $p=2$, $n=1$ доказал Ян Чжун-дао [75] (см. теоремы Y1 и Y2 в начале этого пункта).

Мы не будем останавливаться на обобщении других результатов Ян Чжун-дао. Заметим лишь, что при доказательстве теорем типа теоремы Какутани — Ямабе — Юдзёбо можно с успехом применять не только понятие рода пространства относительно инволюции, которые использовал Ян Чжун-дао, но и понятие рода пространства относительно периодического преобразовния.

Поступило
23.IV.1960

Литература

1. Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., Гостехиздат (1947).

2. Альбер С. И., Гомологии пространств плоскостей и применение их к вариационному исчислению, ДАН 91 (1953), 1237—1240.

3. Альбер С. И., О периодической задаче вариационного исчисления в целом, УМН 12, вып. 4 (76) (1957), 135—153.

4. Barcus W. D., Meyer J., The suspension of a loop space.

5. Berstein I., Sur la categorie de Lusternik — Schnirelmann, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) (1958), 362—364.

6. Болтянский В. Г., Секущие поверхности косых произведений, ДАН 85 (1952), 17—20.

7. Болтянский В. Г., Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, Труды Матем. ин-та им. Стеклова 47 (1955), 1—200.

8. Болтянский В. Г., Вторые препятствия для секущих поверхностей, Изв. АН, серия матем. 20 (1956), 99—136.

9. Болтянский В. Г., Виноградов А. М., О втором препятствии для секущих поверхностей, 11-я Всесоюзная топологическая конференция, тезисы докладов, Тбилиси (1956), 7—8.

10. Борель А., О когомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли, Сб. «Расслоенные пространства», М., ИЛ (1958), 163—245.

11. Борисович Ю. Г., Об оценке количества критических точек функционалов, ДАН 101, № 2 (1955), 205—207.

12. Борисович Ю. Г., К вопросу об устойчивости критических значений четных функционалов, ДАН 104, № 2 (1955).

13. Борисович Ю. Г., К одной задаче вариационного исчисления в целом в гильбертовом пространстве, Казань, Уч. зап. ун-та 115 : 14 (1955), 117—138.

14. Борисович Ю. Г., О критических значениях некоторых функционалов в банаховых пространствах, УМН 12, вып. 1 (73) (1957), 157—160.

15. Борисович Ю. Г., О роде множеств, Воронеж, Труды семин. по функц. анализу 6 (1957), 3—7.

16. Борисович Ю. Г., Об одной теореме о критических точках функционала, Матем. сб. 42 (84) (1959), 353—360.

17. Borsuk K., Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphär, Fund. Math. 20 (1933).

18. Бурбаки Н., Общая топология, Основные структуры, М., Физматгиз, 1958.

19. Bourgin D. G., On some separation and mapping theorems, Comment Math. Helv. 29 (1955), 199—214.

20. Гордон И. И., Обобщение теоремы Какутани о непрерывной функции заданной на сфере, УМН 10, вып. 1 (1955), 97—99.

21. Гроссман Д. П., Об одной оценке для категории Люстерника — Шнирельмана, ДАН (1946), 109—112.

22. James I. M., The intrinsic join: a study of the homotopy groups of Stiefel manifolds, Proc. London Math. Soc. 8, № 32 (1958), 507—535.

23. Dyson F. I., Contrinuous function defined on a sphere, Ann. of Math. 54 (1951), 534—536.

24. Kakutani S., A proof that there exists a circumscribing cude around any bounded clodes convex set in R^3, Ann. of Math. (2) 43 (1942), 739—741.

25. Cartan H., Seminaire de Topologie algebrique de l'E. N. S. Paris.

26. Cartan H., Serre J. P., Espaces fibres et groupes d'homotopie, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 234 (1952), 288—395.

27. Curtis M. Z., Fort J. R., Homotopy groups of one-dimensional spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 8, № 3 (1957), 577—579.

28. Красносельский М. А., Устойчивость критических значений четных функционалов на сфере, Матем. сб. 37 (79) (1955), 301—322.

29. Красносельский М. А., О вычислении вращения векторного поля на n-мерной сфере, ДАН 101 (1955), 401—404.

30. Красносельский М. А., О специальных покрытиях конечномерной сферы, ДАН 103 (1955), 961—964.

31. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.

32. Красносельский М. А., Об оценке количества критических точек функционалов, УМН 7, вып. 2 (48) (1952), 157—164.

33. Liao S. D., On the theory of obstructions of fiber bundles, Ann. of Math. 60, № 1 (1954), 146—191.

34. Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930.

35. Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, УМН 2, вып. 1 (17) (1947), 166—217.

36. Livesay G. R., Two theorems of the two sphere, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 492.

37. Milnor J., Construction of universal bundles, II, Ann. of Math. 63, № 3 (1956), 430—435.

38. Makaoka M., Cohomology of the p-fold cyclic products, Proc. Japan. Acad. 31, № 10 (1955), 665—669.

39. Понтрягин Л. С., Классификация некоторых косых произведений, ДАН 47 (1945), 327—330.

40. Понтрягин Л. С., Об одной связи между гомологиями и гомотопиями, Изв. АН, серия матем. 13 (1949), 193—200.

41. Постников М. М., Об одной связи между гомологиями и гомотопиями, УМН 5, вып. 4 (38) (1950), 140.

42. Постников М. М., Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений, Труды Матем. ин-та им. Стеклова 46 (1955), 1—156.

43. Серр Ж. П., Сингулярные гомологии расслоенных пространств, Сб. «Расслоенные пространства», М., ИЛ (1958), 5—48.

44. Серр Ж. П., Гомотопические группы и классы абелевых групп, Сб. «Расслоенные пространства», М., ИЛ (1958), 124—159.

45. Смит П. А., Неподвижные точки периодических отображений, Прибавление к книге Лефшеца «Алгебраическая топология», М., ИЛ, 1949.

46. Steenrod N., Homology with local coefficients, Ann. Math. 44 (1945), 610—627.

47. Steenrod N., Cyclic reduced powers of cohomology classes, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39 (1953), 213—217.

48. Стинрод Н., Топология косых произведений М., ИЛ, 1953.

49. Том Р., Некоторые свойства в «целом» дифференцируемых многообразий, Сб. «Расслоенные пространства», М., ИЛ (1958), 243—343.

50. Thom R., Espaces fibres en spheres et carres de Steenrod, Ann. Ecole Norm. 69 (1952), 109—181.

51. Wu Wen-Tsun, On the product of sphere bundles and the duality theorem mod 2, Ann. Math. 49 (1948), 641—653.

52. Wu Wen-Tsun, Classes caracteristiques et i-carres d'une variete, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 230 (1950), 508—509.

53. Wu Wen-Tsun, On the relation between Smith operations and Steenrod powers, Fund. Math. 44 (1957), 262—269.

54. Wu Wen-Tsun, On the realization of complexes in euclidean spaces II, Scientia Sinica 7, № 4 (1958), 365—387.

55. Wu Wen-Tsun, A Theory of imbedding and immersion in euclidean spaces, (Гектографир., 1958).
56. Hermann R., Secondary obstructions for fibre spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 65, № 1 (1959), 3—8.
57. Huebsch W., On the covering homotopy theorem, Ann. of Math. 61 (1955), 555—563.
58. Shapiro A., Obstructions to the imbedding of a complex in a Euclidean Space I, The first obstruction, Ann. Math. 66, № 2 (1957), 256—269.
59. Wu Tsen-Teh, On the mod 2 imbedding classes of triangulabe compact manifold, Science Record, New Ser. 2, № 3 (1958).
60. Whitney H., Topological properties of differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), 785—805.
61. Whitney H., On the topology of differentiable manifolds, Lectures in Topologie, Univ. of Mich. Press (1941).
62. Fary Istvan, Sur la categorie des classes de homologie d'un espace Proc. Internat. Congr. math. 2 (1954), 215.
63. Фет А. И., Обобщение теоремы Люстерника — Шнирельмана о покрытиях сфер и некоторых связанных с ней теорем, ДАН 95, № 6 (1954), 1149—1151.
64. Фролов С. В. и Эльсгольц Л. Э. Нижняя граница числа критических значений функции, заданной на многообразии, Матем. сб. 42 (1935).
65. Шварц А. С., Некоторые оценки рода топологического пространства в смысле Красносельского, УМН 12, вып. 4 (1957), 209—214.
66. Шварц А. С., Род расслоенного пространства, УМН 13, вып. 4 (1958), 212.
67. Шварц А. С., Род расслоенного пространства, ДАН 119, № 2 (1959), 219—222.
68. Шварц А. С., О роде расслоенного пространства, ДАН 126, № 4 (1959), 719—722.
69. Шварц А. С., Устойчивость стационарных значений, ДАН 131, № 6 (1960), 1276—1278.
70. Фукс Д. Б., Шварц А. С., Циклические степени полиэдра и проблема вложения, ДАН 125, № 2 (1959), 285—288.
71. Eilenberg S., Ganea T., On the Lusternik — Schnirelmann category of abstract groups, Ann. of Math. 65, № 3 (1957), 517—518.
72. Eilenberg S., Mac Lane S., Relations between homology and homotopy groups of spaces, Ann. Math. 46 (1945), 480—509; Ann. Math. 51 (1950), 514—533.
73. Яворовский Я. В., О некоторых отображениях сферы в евклидово пространство, Бюлл. Польск. АН 3, № 3, 11, 579, 581.
74. Yamabe H. and Jujiobo L., On the continuous functions defined on a sphere, Osaka Math. Journ. 2 (1950), 19—22.
75. Yang Chung-Tao, On theorems of Borsuk — Ulam, Kakutuni — Yamabe — Jujiobo and Dyson. I, Ann. of Math. 60, № 2 (1954); II, Ann. of Math. 62, № 2 (1955), 271—283.
76. Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, М., Физматгиз, 1958.
77. Гуревич В., Волмен Г., Теория размерности, М., ИЛ, 1948.
78. Эльсгольц Л. Э., Оценка числа критических точек, УМН 5, вып. 6 (1950), 52—87.
79. Математика в СССР за сорок лет (1917—1957), т. I, М., Физматгиз, 1959.
80. Люстерник Л. А., Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом, Труды Матем. ин-та им. Стеклова (1947), 1—96.
81. Van Kampen E., Komplexe in euclidische Räume, Abh. Math. Sem. Hamburg 9 (1932), 72—78; Berichtigung dazu. ibid. 152—153.
82. Фет А. И., Связь между топологическими свойствами и числом экстремалей на многообразии, ДАН 88, № 3 (1959), 415—417.